Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

LES QVINZE

LIVRES DES ELEMENTS GEOMETRIQVES D'EVCLIDE MEGARIEN.

Traduits de Grec en François, & augmentez de plusieurs figures & demonstrations, auec la correction des erreurs commises és autres traductions.

Dediez à MONSEIGNEVR l'Illustrissime & Reuerendissime CARDINAL de Lyon.

PAR PIERRE MARDELE' *Professeur és Mathematiques.*



IN PRAG * K.K. GEHEIME LEHRERBILDUNGSANSTALT

A LYON,
Chez SIMON RIGAVD, Marchand Libraire, ruë Merciere, à l'Escu de Venize.

M. DC. XLVI.



7/4953/49

A MONSEIGNEVR, MONSEIGNEVR L'ILLVSTRISSIME ET REVERENDISSIME CARDINAL DE LYON.

MONSEIGNEVR,

Il y a quelques années qu'ayant traduit ce liure du Grec de l'Autheur & donné au public: Il a eſté fauorablement receu, non ſeulement de tous les hommes Doctes en cette ſcience, mais auſſi de ceux qui deſirent paruenir à la cognoiſſance des Mathematiques & des autres ſciences. C'eſt pourquoy (MONSEIGNEVR) *deſirant pour la ſeconde fois le mettre en lumiere, auec l'augmentation de pluſieurs demonſtrations & nouuelles figures de mon inuention, pour faciliter les plus difficiles Propoſitions: afin qu'il ſoit encore plus fauo-*

rablement receu ; I'ay pris la hardieſſe (MONSEIGNEVR) *de vous le preſenter ; croyant que ſi vous me faictes la faueur d'approuuer ce mien trauail, tout le monde qui recognoiſt en toutes vos actions autant d'honneur que de gloire comme leurs compagnes, l'eſpere qu'il rejaillira ſur ce mien ouurage quelque partie de ces belles qualitez, que le public cherit en voſtre perſonne, d'autant qu'il porte voſtre Nom ſur le front ; & ce à cauſe que l'on ne donne rien aux Grands, qui ne ſoit digne de leur entretien, ils l'eſtimeront d'auantage. Et en cette conſideration,* (MONSEIGNEVR) *ie ſupplie voſtre Grandeur, qu'il luy plaiſe le regarder d'vn œil fauorable, & vous m'inciterez d'autant plus à trauailler pour le public, & luy donner cét ouurage d'auſſi bon cœur, que ie ſuis & deſire d'eſtre à iamais,*

MONSEIGNEVR,

Voſtre tres-humble & tres-obeyſſant ſeruiteur
PIERRE MARDELE.

AV LECTEVR.

AYANT par cy-deuant (amy Lecteur) traduit ce Liure & mis en lumiere, lequel ayant eſté bien receu de tous, & voyant qu'il ne s'en trouuoit plus d'exemplaires : ie me ſuis deliberé pour la ſeconde fois de le donner au public, auec la correction de pluſieurs faures commiſes par d'autres qui l'ont mis auparauant en lumiere, & auſſi pluſieurs autres œuures ſous le nom d'vn quidam Copiſte qui en faiſoit trafic, & auec l'augmentation de pluſieurs demonſtrations & nouuelles figures, par le moyen deſquelles les propoſitions plus difficiles ſont rendues faciles, ce que l'experience fera voir à ceux qui le liront auec attention. A Dieu.

IN EVCLIDEM EX GRÆCO IN SERMONEM VERNACVLVM CONVERSVM EPIGRAMMA.

TVrpibus Euclidem nauis, mendisque scatentem
Purgatum nobis MARDELE *depromperas.*
Euclidem Græcum feciſti MARDELE, *Gallum,*
Quod Gallo Græcus, Latio quod Græcus erat.

PETRVS VALLENS Græcarum Literarum Profeſſor Regius.

DOMINO LE MARDELE EVCLIDIS INTERPRETI VNICO.

HActenus Euclidi bellum indixiſſe videntur
Nec libros doctis expoſuiſſe libris.
Nam tot ſpurcarunt diuina volumina mendis,
Auſi diuinum contaminare virum.
MARDELE *opus fuerat qui Mars deleret & aureum*
Inſperſum maculis, emacularet opus.

IANVS CÆCILIVS FREY, Doctor Medicus, & Philoſophorum Profeſſorum Decanus.

PREFACE

PREFACE.

D'où les disciplines Mathematiques ont pris leur nom, & de leur diuision.

LEs disciplines Mathematiques lesquelles traitent de la quantité, ont pris leur nom de μαθημα, ou μαθησις, qui est à dire, discipline ou doctrine : Et seules entre les autres ont acquis ce nom pour deux raisons selon les bons autheurs. La premiere est que les Pythagoriciens & Platoniciens estimans que les ames raisonnables estoient en nombre certain & determiné, & passoient de corps en autre (ce que la Foy Chrestienne tient pour faux) tesmoignent que les Mathematiques ont obtenu ce nom, d'autant que par icelles nous acquerons le resouuenir de la science, dont nostre ame estoit doüée auparauant (selon leur erreur) qu'elle donnast forme au corps. Ce que Platon tasche de prouuer par vn exemple familier, au dialogue inscrit Menon, où il introduit Socrate interrogeant vn enfant sur quelques questions Geometriques, de la dimension du quarré. A quoy bien qu'il respondit au commencement comme enfant, neantmoins peu à peu il en vint iusques-là, qu'il respondit les mesmes choses que s'il eust apprins par vn long temps la Geometrie. La seconde est d'autant (comme veulent les autres) que ces arts seuls gardent la raison & moyen de la science : procedans touſiours de principes au-

parauant cogneus, pour demonstrer leurs conclusions, qui est le propre deuoir & office de la doctrine ou discipline, comme enseigne Aristote 1. des Posterieures. Et les Mathematiciens ne prennent iamais rien qui ne soit prouué; mais voulans enseigner quelque chose, si ce qui a esté monstré auparauant en depend, ils le prennent pour concedé, monstrans ce qui n'a esté enseigné; ce que les autres arts & disciplines ne font touſiours, prenant quelquefois pour confirmer leur dire choses non demonstrées. Or les Pythagoriciens suiuis presque de tous les Mathematiciens & Philosophes, ont diuisé toutes les Mathematiques en quatre parties: sçauoir en l'Arithmetique, la Musique, la Geometrie & l'Astronomie: Car d'autant que toute quantité qui est l'obiet de la Mathematique, est discrete ou continuë, la discrete qui contient sous soy les nombres; la continuë, qui contient sous soy toutes les grandeurs: & l'vne & l'autre se pouuant considerer tant selon soy que comparée à vn autre: il leur a semblé à propos d'instituer les quatre susdites parties qui trattallent des deux especes de quantité, selon les raisons dites. Partant l'Arithmetique traitte de la quantité discrete selon soy, recherchant & expliquant toutes les passions & proprietez des nombres. La Musique traitte aussi de la quantité discrete, ou du nombre comparé à autre chose, sçauoir entant qu'il considere les accords des sons & l'harmonie. La Geometrie dispute de la quantité continuë aussi selon soy, & comme immobile. L'Astronomie finalement considere la mesme quantité continuë en tant qu'elle est mobile, comme sont les corps celestes, entant qu'ils tournent par vn mouuement continuel. Or toutes

les

les autres parties qui traitent de la quantité en quelque façon que ce soit, comme sont la Perspective, la Geographie & semblables, se peuuent rapporter comme à leurs chefs desquels elles dependent, à ces quatre parties susdites, dont la Geometrie & l'Arithmetique sont appellées pures : mais la Musique & l'Astronomie, mixtes. Les disciplines Mathematiques sont aussi diuisées en vne autre maniere par Geminus ancien Geometre & autres, comme rapporte Proclus en ses commentaires sur le premier liure d'Euclide.

Diuision de la Geometrie, & des Elements d'Euclide.

LA Geometrie est diuisée en la contemplation des plans, laquelle selon le terme general est dicte Geometrie, & en la doctrine des solides, laquelle proprement & particulierement les Mathematiciens appellent Stereometrie. Car la Geometrie en general se propose ce but, de constituer les plans & les solides, & ceux qui sont ja constituez de les comparer entr'eux ou les diuiser. Et l'on ne doit s'esmerueiller, que y ayant trois genres de grandeurs, sçauoir la ligne, la superficie, & le corps, l'on fait mention seulement de la contemplation des deux derniers proprement, & non de la ligne & du poinct. D'autant que comme dit Proclus, la Geometrie traicte principalement des figures lesquelles consistent toutes seulement aux plans ou aux solides, car les poincts & les lignes ne constituent aucune figure sans les plans ou solides, & partant n'estoit necessaire d'en traiter à part. Donc

Euclide nous voulant laisser vne parfaite cognoissance en ses Elements de la Geometrie ; Il traitte aux six premiers liures des plans : Et aux cinq derniers il dispute subtilement des solides, recherchant leurs plus belles proprietez. Mais d'autant que toutes les choses Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers appellez selon la coustume, corps Platoniques, ne pouuoient estre traictez sans la cognoissance des lignes commensurables & incommensurables, Euclide a adiousté le dixiéme liure, deuant sa Stereometrie, afin d'auoir tous les documents requis à l'intelligence & dimension des grandeurs, auquel dixiéme liure il discourt subtilement de telles lignes. Et voyant derechef que ce traicté des lignes commensurables & incommensurables ne se pouuoit entendre sans la cognoissance des nombres : Deuant le dixiéme liure il traicte des proprietez & passions d'iceux nombres aux 7. 8. & 9. liures, Parquoy tout ce volume des Elements Geometriques comprins en quinze liures (dont les treize premiers sont attribuez à Euclide sans aucune controuerse : mais les deux derniers sont estimez par quelques-vns estre à Hypsicle Alexandrin) pourra estre diuisé en quatre parties, dont la premiere contiendra les six premiers liures qui traictent des plans ; La seconde les trois suiuants, laquelle recherche les passions & proprietez des nombres ; La troisiéme contenant le dixiéme liure seulement, dispute des lignes commensurables & incommensurables. Et la quatriéme finalement, sçauoir les cinq derniers liures, contient la science des solides ou corps. La premiere partie est diuisée derechef en trois. Car aux quatre premiers liures est traicté des plans absolument

lument, recherchant leur egalité ou inegalité. Au cinquiéme est disputé des proportions des grandeurs en general. Et au sixiéme finalement les proportions des figures planes sont examinées. Mais il sera aussi exposé en son lieu, ce que Euclide traicte en chacun de ses liures.

Que c'est entre les Mathematiciens que Probleme, Theoreme, Proposition, Lemme.

TOute demonstration Mathematique est diuisée par les anciens autheurs, en Probleme, & Theoreme. Ils appellent Probleme celle demonstration qui commande & enseigne à construire quelque chose. Comme si quelqu'on vouloit demonstrer, que l'on peut constituer vn triangle equilateral sur vne ligne droicte, donnée & terminée, telle demonstration sera appellée Probleme, d'autant qu'elle enseigne par quel moyen vn triangle equilateral doit estre constitué sur vne ligne droicte terminée. Or ce genre de demonstration est appellé Probleme à la similitude du Probleme des Dialecticiens. Car comme en Dialectique, le Probleme est ceste question, de laquelle l'vne & l'autre partie de la controuerse ou contradiction (comme ils parlent) est probable, comme est ceste question; Sçauoir si le tout est distinct realement de ses parties prises ensemble. Ainsi aussi ceste Proposition entre les Mathematiciens, par laquelle ils commandent de constituer ou construire quelque chose, dont le compris peut aussi estre faict, s'appelle Probleme. Comme si quelqu'vn se propose de pouuoir constituer vn

triangle

triangle equilateral sur vne ligne droicte terminée, il faict vn Probleme : d'autant qu'vn triangle non equilateral, sçauoir vn Isoscele ou Scalene, peut aussi estre constitué sur la mesme ligne. Semblablement quiconque propose de couper vn angle rectiligne en deux parties egales, il exhibe vn Probleme, d'autant que le mesme angle peut aussi estre diuisé en parties non egales : Mais toutes fois il y a grande difference entre le Probleme des Dialecticiens, & des Mathematiciens. Car au Probleme de Dialectique, laquelle partie que l'on veut de la contradiction estant prise, est confirmée probablement seulement, de sorte que l'on est touſiours en doute laquelle partie d'icelle est vraye : Mais au Probleme Mathematique, quelconque partie que quelqu'vn prenne, il la prouuera par vne demonstration certaine ; de sorte qu'il ne restera aucun doute. Car si le Geometre ordonne de quelconque point d'vne ligne droicte proposée, mener vne ligne perpendiculaire, il le fera auec vne raison constante & euidente ; & faut dire le semblable s'il veut mener vne ligne non perpendiculaire. Or ils appellent Theoreme ceste demonstration, laquelle examine seulement quelque passion ou proprieté d'vne ou plusieurs quantitez ensemble. Comme si on veut demonstrer qu'en tout triangle, les trois angles sont egaux à deux angles droicts : ils appelleront telle demonstration, Theoreme, d'autant qu'il ne commande pas ou enseigne de construire vn triangle ou quelqu'autre chose ; mais il contemple tant seulement ceste passion de quelconque triangle, que les angles d'iceluy soient egaux à deux droits : Dont ceste demonstration est dite Theoreme de la contemplation mesme : & au

Theoreme

Theoreme il ne se peut nullement faire que l'vne & l'autre partie de la contradiction soit veritable. Car ayant demonstré, que tous les trois angles de tout triangle sont egaux à deux angles droicts; il ne se peut faire qu'ils soient aussi inegaux à deux droits: & ainsi des autres. Donc, pour dire en vn mot, ceste question Mathematique, qui enseigne à faire ou construire quelque chose, & dont la partie opposée peut aussi estre faite, s'appelle Probleme. Mais celle-là qui enseigne quelque chose où il n'y a rien à construire, & de laquelle la partie opposée est perpetuellement fausse, est appellée Theoreme. Parquoy si quelqu'vn proposoit en façon de Probleme vouloir constituer vn angle droict, en vn demicercle, il seroit tout à faict digne d'estre mocqué & estimé ignorant en Geometrie; puis que tous les angles au demicercle sont droicts: comme il sera demonstré 31.p.3.l. Parquoy ceste Proposition doit estre appellée Theoreme & non pas Probleme. Au reste tant le Probleme que le Theoreme, entre les Mathematiciens est dit Proposition, d'autant que l'vn & l'autre nous propose quelque chose, comme appert par les exemples susdits: & touiours les demonstrations des Problemes se concluent par ces mots: Ce qu'il falloit faire. Mais celles des Theoremes, par ceux-cy Ce qu'il falloit demonstrer.

Or aux demonstrations des Problemes & Theoremes estans requis fort souvent quelques autres Theoremes ou Problemes moins principaux, & qui peuuent estre facilement entendus de ceux qui sont premierement demonstrez; Iceux sont quelquesfois inserez par les Geometres entre les Theoremes & Problemes, desquels il s'agit principalement

principalement, afin qu'ils puissent estre plus briefuement demonstrez, & ils les appellent Lemmes, d'autant qu'ils sont pris seulement pour d'autres demonstrations, & d'iceux n'est instituée vne dispute principale, ainsi que des autres. Donc la demonstration ou construction de ce qui est pris pour la demonstration de quelque Theoreme ou Probleme principal, afin que la demonstration se face plus promptement & briefuement peut estre appellée Lemme.

Que c'est que Principes entre les Mathematiciens.

TOute doctrine & discipline est engendrée, comme dit Aristote, d'vne preexistente cognoissance, & demonstrant ses conclusions par de certains principes prins & concedez: Mais aucune science, selon l'opinion du mesme Aristote & des autres Philosophes, ne demonstrant ses principes: Toutesfois les disciplines Mathematiques auront leurs principes, par lesquels, posez & concedez, elles puissent confirmer leurs Problemes & Theoremes.

Or entre les Mathematiciens, il y a de trois genres de principes. Au premier se trouuent toutes les definitions, que quelques vns auec Aristote appellent suppositions, ou hypotheses, comme veut Proclus: Et par icelles sont expliquez les termes de l'art, afin qu'en traictant la science, ne soyons trompez par l'ambiguité & obscurité des noms, & ne tombions en des paralogismes. Au second genre sont les petitions ou demandes, lesquelles sont tellement claires & manifestes en la

science

ſcience que l'on traicte, qu'elles n'ont beſoin d'aucune preuue ; mais demandent ſeulement le conſentement de l'auditeur, afin qu'il n'y ait aucune heſitation ou difficulté en la demonſtration. Au troiſiéme ſont les Axiomes ou maximes, ou communes notions de l'eſprit, leſquelles non ſeulement en la ſcience propoſée, mais auſſi en toutes les autres, ſont tellement manifeſtes & euidentes, que celuy qui conceura fort bien ces meſmes mots & termes, ne s'en pourra en aucune façon departir, qu'il n'y conſente facilement : Leſquels principes Euclide met deuant les demonſtrations de ſes concluſions, afin que par iceux comme eſtans bien entendus de chacun, il puiſſe deduire des Theoremes admirables, leſquels perſonne n'accorderoit auparauant qu'eſtre confirmez par *raiſons euidentes & certaines*. Mais ſuiuons noſtre *Autheur*.

LIVRE

LIVRE PREMIER,
DES ELEMENTS GEOMETRIQVES D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Le poinct eſt, ce qui n'a aucune partie.

EVCLIDE nous a fait entendre, par la negation des parties (& ce auec raiſon) que c'eſt en la quantité continuë que le poinct, principe & fondement de ſon ſujet. Car les principes eſtans differens des choſes deſquelles ils ſont principes, & les proprietez & accidens de tels principes eſtans incogneus, on monſtre en quelque façon ces principes, niant qu'ils ſoient les choſes dont ils ſont principes, ou qu'ils ayent quelque choſe de commun auec icelles. Vray eſt, que pour faire de ſemblables definitions, ou pluſtoſt deſcriptions, il faut auoir expliqué & faict cognoiſtre les choſes que nous excluons, ainſi qu'a faict Porphyre en ſon Introduction definiſſant l'accident, *ὃ ὅτε γίνεται ἐν ὑποκειμένῳ ὑπάρχειν, ὅτε δὲ χωρὶς ὑποκειμένου ὑπάρχειν, ὅτε ἴδιον, ἀεὶ δὲ οὐκ ἐν ὑποκειμένῳ ὑπάρχειν ἀμετον.* Ce qui n'eſt ny genre, ny

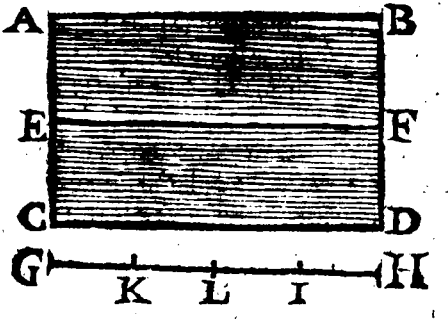
 difference,

difference,ny espece,ny propre,& est tousiours au suiet. Mais cela eust esté fort esloigné,& plus propre au Physicien qu'au Geometre,d'enseigner que c'est que diuisible en general. C'est pourquoy il l'a obmis, se contentant d'en definir apres quelques espéces, comme la ligne & la surface, desquelles il considere plusieurs & diuerses affections en ses six premiers liures.

Henrion Copiste, pretendant faire icy entendre que c'est que le poinct, dit ainsi. Les Physiciens disent que le poinct est le moindre obiect de la veuë, & iceluy peut estre descrit auec ancre ou autre chose : mais les Mathematiciens reiettans cette definition, disent que le poinct est vn obiect de l'intellect si subtil, qu'il ne peut estre diuisé en aucunes parties : d'où il est tres-manifeste qu'il n'entend rien en Philosophie, & bien peu en Mathematique. Et pour faire cognoistre son ignorance, il faut entendre que les Mathematiques sont les premieres sciences de toutes. C'est pourquoy elles ont aussi retenu le nom de disciplines ou sciences, & tant icelles que les autres, ont esté inuentées par deux principes; sçauoir,l'admiration & l'experience. Comme par exemple, ceux qui ont premierement apperceu l'eclipse de la Lune, l'ont admirée,& l'ayans obseruée plusieurs fois, ont enfin recogneu la cause, & de là en ont fait cette proposition vniuerselle, certaine & necessaire. *L'eclipse de la Lune arriue à cause de l'interposition de la terre entre la Lune & le Soleil.* Ainsi la Geometrie a esté inuentée par l'experience & pratique, se seruant de poincts, lignes & superficies Physiques, c'est à dire materielles

&

& visibles (car Physique, c'est à dire materiel) en leurs operations: comme pour exemple, si vn Geometre vouloit diuiser vne superficie (laquelle sera icy representée par la figure A B C D) en deux egalement, & ayant trouué auec ses



instrumens qu'icelle a les angles droits, il diuiseroit les deux costez A C, & B D, chacun en deux egalement, par les poincts F & G, & pour faire entẽdre la separation des deux parties, il meneroit vne ligne de F à E, par l'application d'vne ficelle ou corde, laquelle il terminera de deux pierres, bastons, ou autres choses semblables, qu'il appellera signes, poincts, termes ou bornes: mais en cette sorte vne superficie ne pourroit estre diuisée precisement en deux egalement: car l'espace occupé ou couuert par vne telle ligne si deliée qu'elle peut estre, seroit partie du tout, comme il appert. Parquoy il se faut representer en l'entendement vne distance de E à F, qui diuise le tout en deux egalement, & qui ne soit partie de l'vne ny de l'autre, laquelle distance ou ligne imaginaire en quelque façon representée par cette corde, s'appellera ligne Mathematique, c'est à dire, purement intellectuelle, & qui hors l'entendement n'a aucune existence

celle en nature,& les extremitez ou termes d'icelle,s'appelleront poincts Mathematiques, auſſi purement intellectuels, & qui ne ſont aucune partie de la ligne ; mais ſont la negation de la production ou eſtenduë d'icelle plus outre, ou bien de l'vne partie de la ligne ſur l'autre. Comme par exemple,ſi la ligne G H eſt diuiſée en quatre parties,par les poincts K, I, L, le poinct K ſera celuy de la conionction des deux parties G K, K I, & auſſi de la negation de l'eſtenduë de la partie G K, vers la partie K I,tout ainſi que le poinct G ou H, eſt la negation de l'eſtenduë, ou production de la ligne G H plus outre,& ne peut eſtre cogneu que par l'intellect.

Or Ariſtote ne parle en aucun lieu de la definition du poinct,& tant luy que Platon,& les autres Philoſophes parlans du poinct, ils en parlent comme d'vne choſe deſia cogneuë, & perſonne de leur temps n'apprenoit la Philoſophie,qu'il ne ſceuſt auparauant la Geometrie, comme teſmoigne le meſme Platon, par l'inſcription qu'il auoit faict mettre à l'entrée de ſon Academie : *οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω*, c'eſt à dire, que perſonne n'entre ceans pour apprendre la Philoſophie, ignorant la Geometrie : ce qui eſt auſſi manifeſte d'Ariſtote. Car premierement,en la Categorie de la quantité,il prend le poinct comme deſia definy, en parlant de la quantité continuë. *Ἡ δὲ γραμμὴ, συνεχὴς ἐστιν : ἔστι γὰρ κοινὸν ὅρον λαβεῖν, καθ' ὃν ὄντα μέσα ἀνταῖς συνάπτει, στιγμὴν, ἢ τὰ ἐπιφανείας γραμμήν.* &c. La ligne (dit-il) eſt vne quantité continuë, en laquelle on peut prendre vn terme commun, par lequel ſes parties ſont conioinctes,ſçauoir le poinct:

&c

& en la ſuperficie la ligne : donc Ariſtote parle du poinct comme deſia deſiny, & du poinct Mathematique, teſmoignant que ce n'eſt pas vne partie, puis qu'il conioint les parties : autrement les parties du continu ſeroient conioinctes par d'autres parties, ce qui eſt abſurde, & contraire à ce qu'il dit en la Phyſique parlant du continu, & diſant qu'il eſt faict de parties, & non de choſes indiuiſibles, ἀδύνατον ἐξ ἀδιαιρέτων εἶναί τι συνεχὲς, οἷον γραμμὴν ἐκ στιγμῶν, εἴπερ ἡ γραμμὴ μέν ἐστι συνεχὲς, ἡ στιγμὴ δὲ ἀδιαίρετον. Il eſt impoſſible, dit-il, qu'aucune quantité continuë ſoit d'indiuiſibles, comme la ligne de poincts, d'autant que la ligne eſt vne choſe continuë, mais le poinct vne choſe indiuiſible. D'où il eſt manifeſte que les Philoſophes ne parlent que du poinct Mathematique, & comme deſia deſiny par Euclide, ou autres Mathematiciens deuant luy.

Dauantage, les poincts dont ſe ſeruent les Mathematiciens en leurs figures ſenſibles & palpables, pour faire entendre les demonſtrations ſcientifiques, qui ſont les meſmes que ceux des Grammairiens, ne ſont le moindre obiect de la veuë, & ſemblablement les termes & bornes dont on ſe ſert en la pratique, à cauſe deſquels on a imaginé les poincts & lignes Mathematiques, pour ſçauoir ſcientifiquement ce que l'on deſire. Car ſi cela eſtoit, il faudroit qu'ils fuſſent moindres que les atomes que l'on voit aux rayons du Soleil, luiſant par les feneſtres, & partant inutiles en la pratique: & qui plus eſt, le moindre obiect de la veuë ne ſe peut proprement donner, comme nous monſtrerons tres-bien. Il faut donc conclurre que les Phi-

loſophes n'ont point definy ny diuiſé le poinct. Donc les Mathematiciens ſe ſont premierement ſeruis de ce poinct phyſique, ou materiel & viſible, s'en ſeruans en leurs operations & pratique, lequel eſt le principe reculé ou plus eſloigné de leur ſcience, ſçauoir, *principium remotum*, comme diſent les Philoſophes, & ont pris le poinct Mathematique & intellectuel pour principe plus prochain, tout ainſi que l'admiration eſt le principe reculé de l'inuention des ſciences, & l'experience le principe prochain, & perſonne n'a definy ainſi le poinct que le Copiſte.

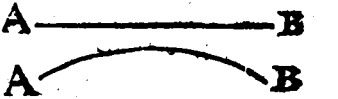
L'on appelle auſſi vne choſe bien grande vn poinct, en comparaiſon d'vne autre choſe tres-grande, & qui ſemble quaſi n'eſtre d'aucun eſtime, eu eſgard à la plus grande, comme il appert de Ciceron au ſonge de Scipion, comparant l'Empire Romain au globe de la terre. *Iam verò ipſa terra ita mihi parua viſa eſt, vt me Imperij noſtri, quo quaſi punctum eius attigimus pœniteret.* Or me ſembla pour lors la terre ſi petite, que i'eus honte de noſtre Empire Romain, lequel ne monte comme rien au globe de ladite terre, où eſt comme vn poinct.

Et Ptolomée au premier liure de ſon Almageſte, dit que la terre eſt comme vn poinct, au reſpect du Firmament, & en telles comparaiſons ils peuuent auoir eſgard au poinct ſenſible, qui n'eſt poinct que homonymement.

Or que le poinct Mathematique ou intellectuel, ſoit la negation de l'extenſion ou production de la ligne, comme nous auons dit, & hors l'intellect n'ait aucune exiſtence reelle en nature;

Il eſt manifeſte, ſelon le meſme Ariſtote, qui dit, que la ligne eſt vne quantité continuë ; d'autant que l'on y peut prendre vn terme commun, ſçauoir le poinct, (c'eſt à dire conceuoir en ſon entendement.) Il ne dit donc pas qu'il y ait vn terme commun reellement, mais il dit que l'on y peut conceuoir ou imaginer vn terme commun, comme il appert par ſon texte cy-deuant allegué: où il dit auſſi qu'en la ſuperficie, l'on peut conceuoir vne ligne pour terme commun aux parties d'icelle ſuperficie : & partant, la negation de l'extenſion de l'vne des parties vers l'autre : Et ſi quelqu'vn vouloit dire le contraire, ie luy monſtreray non ſeulement par le texte d'Ariſtote, que cela ne peut eſtre autrement, mais auſſi Geometriquement.

2. La ligne eſt, vne longueur ſans largeur.



La ligne eſt la premiere eſpece de quantité, laquelle a tant ſeulement vne dimenſion, à ſçauoir longitude, ſans aucune latitude ny profondité, & n'eſt autre choſe que le flux ou coulement du poinct, lequel eſtant totalement indiuiſible, laiſſera de ſon mouuement imaginaire quelque veſtige en long, exempt de toute latitude. Comme ſi le poinct A eſt entendu couler de A à B, le veſtige A B, qu'il a fait par ſon flux ou coulement, ſera appellé ligne, puiſque l'interualle compris entre les deux poincts A & B, eſt vrayement vne longitude, defaillant de toute latitude, d'autant que le poinct par le flux duquel elle eſt produite,

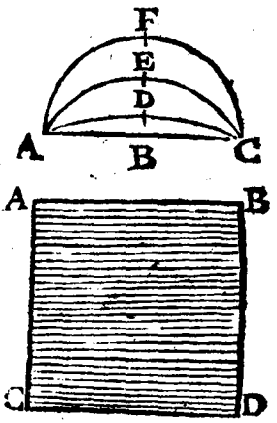
duite, n'a aucune dimenſion. Quelques-vns diſent, que c'eſt vne quantité qui a vn interualle ; car la ligne peut eſtre diuiſée ou couppée en vne ſeule maniere, à ſçauoir ſelon la longitude.

3. Les extremitez de la ligne, ce ſont poincts.

Euclide enſeigne icy quels ſont les termes ou extremitez de la ligne, diſant que la ligne eſt terminée ou finie de part & d'autre de poincts, non pas que toute ligne ait des termes : car comment pourroit-on aſſigner des termes à vne ligne infinie ? ou trouuer extremité à vne ligne circulaire? Mais il faut entendre que toute ligne finie eſt terminée de poincts à ſes extremitez. Comme la ligne precedente A B eſt terminée des poincts A & B. Et faut entendre le meſme de toutes autres lignes finies ou terminées.

4. La ligne droicte, eſt celle qui eſt egalement eſtenduë entre ſes poincts.

Les Mathematiciens ont de trois ſortes de lignes, la droicte, la circulaire, laquelle ils appellent courbe, & la mixte, qui eſt compoſée de l'vne & de l'autre. Euclide deſcrit en ce lieu la droicte, qu'il dit eſtre celle-là laquelle eſt egalement eſtẽduë entre ſes poincts, c'eſt à dire, en laquelle aucun des poincts, de tous ceux qui ſont poſez



entre

entre les extremitez, n'eſt plus eſleué ou abbaiſſé: & en vn mot, c'eſt le plus court chemin d'vn poinct à l'autre, ou comme dit Archimede, la plus courte de celles qui ont meſmes extremitez. Icelle nous peut eſtre aucunement exprimée par quelque fil bien delié, & tendu autant qu'il ſe peut faire. Proclus expoſant cette definition dit, qu'vne ligne eſt egalement eſtenduë entre ſes poincts, quand elle occupe vn eſpace ou interualle egal, à celuy qui eſt poſé entre ſes poincts extremes; comme par exemple, la ligne A B C, ſera dite droicte, d'autant qu'elle occupe autant d'interualle, qu'il y a de diſtance du poinct A au poinct C: mais les lignes A D C, A E C, A F C, ne ſeront droictes, d'autant qu'elles obtiennent plus d'eſpace que la diſtance de A à C. Platon definit ainſi la droicte ligne: La ligne droicte eſt celle de laquelle les parties du milieu ombragent les extremes: comme ſi en la ligne A B C, le poinct B, ou quelqu'autre du milieu auoit la force de cacher, & le poinct A extreme la vertu d'illuminer, le poinct B empeſcheroit touſiours que le poinct extreme C, ne fuſt illuminé de A, ce qui n'arriueroit aux lignes non droictes, comme A D C, A F C, comme il eſt manifeſte.

Euclide ne definit icy les lignes non droictes, qui peuuent toutes eſtre dites obliques, mais il definira la circulaire à la 15. Definition: reiettant les autres qui ne ſont d'aucun vſage en ſes Elements. Et y en a de pluſieurs genres, deſquelles traicte Apollonius, Nicomedes, Archimede, &c. Or comme la ligne eſt produite par le flux continuel du poinct, ainſi la ſuperficie eſt formée de la ligne ſe mouuant de trauers, laquelle ſe definit ainſi.

5. La ſuperficie eſt, ce qui a tant ſeulement longueur & largeur.

Apres la ligne, qui eſt la premiere eſpece de quantité continuë, & qui a vne ſeule dimenſion, il definit la ſuperficie, qui eſt la ſeconde eſpece, & qui a deux dimenſions, ſçauoir longueur & largeur, ſans toutefois aucune profondité. Comme la quantité A B C D, contenuë entre les lignes A B, C D, A C, B D, (en la figure precedente page 8.) conſiderée ſelon la longitude A B, ou C D, & ſelon la latitude A C, ou B D, ſans aucune profondité, eſt appellée ſuperficie. La latitude extreme de tout corps entenduë ſans aucune ſolidité nous repreſente icelle. Et comme dit Proclus, les ombres des corps nous la repreſentent quaſi naifuement: Si l'on entend auſſi vne ligne ſe mouuoir de trauers, elle deſcrira vne ſuperficie, comme diſent les Mathematiciens; Comme ſi on entend la ligne A B ſe mouuoir vers la ligne D C, elle deſcrira la ſuperficie A B C D; De ſorte que comme la ligne commence à vn poinct, & finit à vn poinct, auſſi la ſuperficie terminée de lignes, commence à vne ligne, & finit à vne ligne. Quelques-vns diſent que c'eſt le terme du corps, d'autres que c'eſt vne quantité contenuë de deux interualles. Car la ſuperficie peut eſtre diuiſée ou couppée en deux manieres, à ſçauoir ſelon la longitude & latitude.

6. Mais les extremitez de la ſuperficie ſont lignes.

Cette definition ne differe de la ſuperieure, où ont eſté definis les termes de la ligne. Car il dit que les extremitez de la ſuperficie ſont lignes, tout ainſi que les extremitez des lignes ſont poincts.

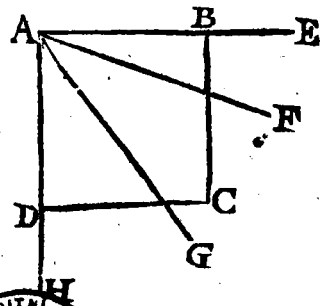
Comme

Comme en la ſuperficie de la derniere figure A B C D, les extremitez ſont A B, B D, D C, C A. Et ainſi en toute autre ſuperficie qui a extremitez, faut entendre des lignes aux extremitez, & non en la ſuperficie Spherique, de laquelle vn corps Spherique eſt enclos. Il y a auſſi quelque ſuperficie qui eſt encloſe d'vne ſeule ligne, comme la ſuperficie circulaire, comme il ſera monſtré en la definition du cercle.

7. Superficie plane, eſt celle qui eſt egalement eſtenduë entre ſes lignes.

Cette definition a quelque ſympathie auec celle de la ligne droicte. Car la ſuperficie, qui eſt egalement eſtenduë entre ſes lignes, en ſorte que les parties du milieu ne ſont point plus eſleuées ny abbaiſſées que les extremes, eſt appellée ſuperficie plane, comme ſeroit la ſuperficie de quelque marbre bien poly & vny, auquel toutes les parties ſont diſpoſées, ou colloquées directement : & comme la ligne droicte eſt le plus court chemin d'vn poinct à l'autre, auſſi telle ſuperficie eſt le plus court chemin d'vne ligne à l'autre.

Les autres definiſſent la ſuperficie, diſans que c'eſt celle-là, de laquelle toutes les parties du milieu ombragent les extremes : Ou que c'eſt la plus



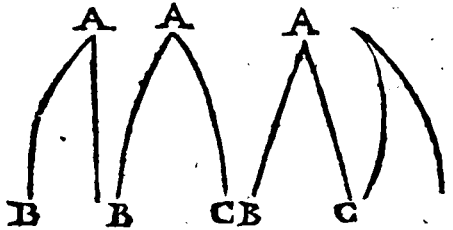
courte

courte ou briefue de toutes celles qui ont meſmes extremitez. Ou celle-là (comme veut Heron ancien Geometre) à toutes les parties de laquelle vne ligne droicte peut eſtre accommodée. Comme par exemple, la ſuperficie A B C D, doit alors eſtre appellée plane, ſi la ligne A E eſtant enduë ſe mouuoir à l'entour du poinct A, demeurant fixe, en ſorte qu'elle ſoit comme A E, puis comme A F, & comme A G, & que finalement paruenant du poinct E au poinct H, ne rencontre rien en la ſuperficie de plus eſleué ou abbaiſſé l'vn que l'autre: mais tous les poincts de la ſuperficie ſont touchez de la ligne, ou en quelque maniere raclez. Et telle ſuperficie eſt celle que nous pouuons entendre eſtre deſcrite par le mouuement ou flux d'vne ligne droicte en trauers. Et faut noter que les Mathematiciens ont couſtume d'appeller aſſez ſouuent cette ſuperficie, Plan. De ſorte que quand ils parlent du Plan, il faut entendre par ce mot Plan, la ſuperficie plane. Toutes autres ſuperficies ſont appellées courbes, comme ſont celles des voûtes ou arcades, colonnes, corps Spheriques & autres. Mais la ſuperficie courbe eſt diuiſée en conuexe & concaue: La conuexe eſt comme l'exterieure ſuperficie d'vn globe ou corps Spherique, d'vn cylindre, d'vn cone, &c. La concaue eſt comme la ſuperficie interieure d'vne voûte ou arcade, ou d'vn orbe, &c.

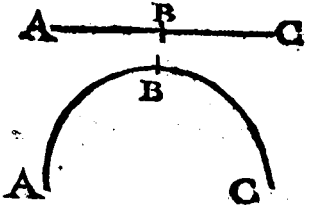
8. **Angle-plan, eſt l'inclination de deux lignes, leſquelles ſe touchent l'vne l'autre en vn plan, & ne ſe rencontrent directement.**

Euclide nous enſeigne icy que c'eſt qu'Angle-plan,

plan, disant que quand deux lignes se rencontrent l'vne l'autre en vne superficie plane, n'estans constituées directement, de tel rencontre ou inclination l'vne à l'autre, il se fait vn angle, lequel est appellé angle-plan, d'autant qu'il est constitué en vne superficie plane, comme l'angle A B C.



Or deux lignes droictes ne se rencontrent directement, quand vne d'icelles estant prolongée de la part où elles se rencontrent, ne tombe sur l'autre, mais la couppe, ou aussi-tost s'esloigne du poinct d'attouchement : ce qui soit dit à cause de l'angle d'attouchement ou de contingence, qui se fait de l'attouchement de deux cercles, ou d'vne ligne droicte qui touche le cercle, comme il est monstré à la 16. prop. du 3. liure.



Que si deux lignes droictes se touchent l'vne

l'autre

l'autre eſtans eſtenduës directement, ſçauoir, en ſorte que l'vne d'icelles eſtant prolongée, conuienne auec l'autre, il ne ſe fera aucun angle de ce rencontre, attendu qu'il n'y a aucune inclination, mais les deux feront vne ſeule ligne : comme les lignes droictes A B, C B, qui ſe rencontrent directement au poinct B : ſemblablement il ne ſe fera aucun angle au poinct B, par le rencontre des lignes courbes A B, C B, puis que celle que l'on voudra des deux, eſtant prolongée ſelon leur inflection & obliquité tombera ſur l'autre : partant ſeront dites eſtre eſtenduës directement ſelon leur rencontre. Il eſt donc neceſſaire que les lignes droictes qui font angle, ſe couppent l'vne l'autre au poinct où eſt fait l'angle, ſi elles ſont prolongées. Mais les lignes courbes, ou bien vne droicte & vne courbe, peuuent faire angle, encore qu'elles ne s'entre-couppent, & ſuffit qu'elles s'entre-touchent, en ſorte qu'auſſi-toſt apres l'attouchement elles s'eſloignent l'vne de l'autre.

Or la quantité de tout angle conſiſte en la ſeule inclination, & non en la longueur des lignes: car le prolongement des lignes n'augmente point leur inclination, & partant ny la quantité de l'angle.

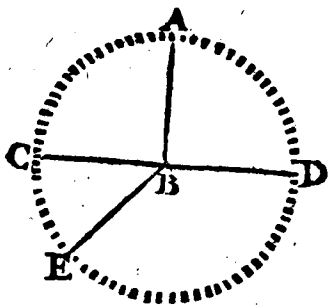
Il y a encore deux autres genres d'angles : le premier comprend les angles ſolides, conſiderez aux corps ſolides, dont traite Euclide en la Stereometrie. L'autre comprend les Spheriques, conſtituez en la ſuperficie de la Sphere, par les circonferences des plus grands cercles, deſquels traicte Menelaus en ſes Elements Spheriques ; mais il s'agit ſeulement icy des angles plans.

9. Or

9. Or quand les lignes qui comprennent l'angle ſont droictes, l'angle ſera appellé rectiligne.

Tout angle-plan eſt fait, ou de deux lignes droictes, & eſt appellé angle rectiligne, & de celuy-cy traicte ſeulement icy Euclide : ou de deux lignes courbes, & ſera appellé curuiligne, ou d'vne ligne droicte & d'vne courbe, & ſera appellé mixtiligne, leſquels on peut conſiderer en la figure de la precedente definition aux angles, B A C.

10. Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre ligne droicte, faict les angles de ſuitte, ou d'vne part & d'autre egaux entr'eux, l'vn & l'autre d'iceux angles egaux eſt droict : Et la ligne droicte tombante, eſt dite perpendiculaire à celle-là, ſur laquelle elle tombe.



L'vſage de l'angle droict, de la ligne perpendiculaire & de l'angle obtus & agu, eſt fort frequent en la Geometrie. Euclide definit icy l'angle droict, & aux deux ſuiuantes definitions, l'angle obtus & agu. Or tout angle rectiligne eſt droict, obtus ou agu. Il dit donc que

quand

quand vne ligne droicte tombe ſur vne autre ligne droicte, en ſorte qu'elle ne s'incline ou panche point plus d'vn coſté que de l'autre, elle fait les angles de ſuitte egaux, & chacun d'iceux angles eſt appellé angle droit, comme ſi la ligne droicte A B, laquelle tombant ſur la droicte C D, fait les angles de ſuitte au poinct B, ſçauoir A B C, A B D, egaux entr'eux, chacun d'iceux ſera appellé angle droict, & A B, ſera dite perpendiculaire à C D, ſur laquelle elle tombe. Pareillement C B, ſera dite perpendiculaire à A B, encore que C B faſſe ſeulement vn angle droict auec A B : car ſi A B eſtoit prolongée de la part de B directement, il ſe feroit vn angle egal à l'autre A B C. Et pour ſçauoir ſi vne ligne panche point plus d'vn coſté que d'autre, ſoit deſcrite vne circonference cõme A C E D, du poinct B, à tel interualle qu'on voudra (moyennant que l'interualle pris n'excede les lignes qui conſtituent l'angle) & ſi la partie de la circonference A C, compriſe entre les deux lignes A B, C B eſt egale à la partie de la meſme circonference A D, compriſe entre les lignes A B, D B, cela denote que la ligne A B ne s'incline de coſté ny d'autre, par ce moyen les angles A B C, A B D ſont egaux entr'eux de part & d'autre : Partant, pour conclure qu'vn angle eſt droict, ou que la ligne qui conſtituë l'angle eſt perpendiculaire à vne autre, il eſt neceſſaire, & ſuffit auſſi de monſtrer que l'angle de ſuitte, ou de l'autre coſté, eſt egal. Pareillement, ſi vn angle eſt dit droict, ou que la ligne qui conſtituë iceluy ſoit perpendiculaire à l'autre, on pourra colliger que l'angle de ſuitte luy eſt ſemblablement egal.

Le Copiſte a dit en cette definition, *Les angles*

ſont

ſont droicts, au lieu de dire ; *l'vn & l'autre d'iceux angles egaux eſt droict*, comme dit Euclide : ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν, & ainſi ſa pretenduë traduction n'eſt conforme, ny au Grec d'Euclide, ny à la traduction Latine, d'où il appert que cét ignorant n'entend ny Grec ny Latin, & copie la traduction des autres en changeant les termes.

Ledit Copiſte dit auſſi en la 18. Definition. *Demy cercle, eſt vne figure compriſe du diametre, & moitié de la circonference.* Et Euclide dit. *Le demy cercle eſt vne figure contenuë ſous le diametre, & la ligne retranchée, ou priſe par iceluy diametre, de la circonference du cercle :* ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. En la 20. Definition il dit: *Figure rectiligne eſt celle, &c.* au lieu de dire comme Euclide : *Figures rectilignes ſont celles qui ſont contenuës ſous des lignes droictes, & deſguiſe ainſi les traductions des autres, afin que les ignorans croyent que c'eſt luy qui traduit : Il change ainſi aux autres Definitions ſuiuantes : ce qu'il ne deuoit faire, tant afin de n'alterer le texte de l'Autheur, que d'autant que ledit Autheur n'a dit aucun mot qui ne ſoit ſignificatif, c'eſt à dire, qui ne ſerue au ſens & intelligence de ce qu'il propoſe, comme nous monſtrerons.*

11. L'angle obtus, eſt celuy qui eſt plus grand qu'vn droict.

12. Mais l'agu, eſt celuy qui eſt plus petit qu'vn droict.

Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre ligne droicte ne fait les angles de ſuitte, c'eſt à dire, de coſté & d'autre egaux, l'vn ny l'autre n'eſt droict, mais l'vn eſt plus grand qu'vn droict, &

l'autre plus petit; & le plus grand eſt appellé angle obtus, & le plus petit angle agu : comme par exemple, ſoit la ligne E B (en la precedente figure, fol. 15.) laquelle tombant ſur C D, fait les deux angles de coſté & d'autre E B C, E B D inegaux, ſçauoir E B D, plus grand, & E B C plus petit, à cauſe que la circonference E D eſt plus grande que la circonference E C : l'angle E B D plus grand ſera dit obtus ou mouſſu, & E B C plus petit ſera agu. De ces definitions l'on peut colliger que l'angle droit n'admet aucune varieté : en ſorte que l'vn ſoit plus grand que l'autre ou plus petit; puis que la ligne perpendiculaire qui conſtituë l'angle droit ne s'incline point plus d'vn coſté que d'autre : mais l'angle obtus & l'angle agu peuuent eſtre augmentez ou diminuez en diuerſes manieres, attendu que la ligne droicte qui conſtituë iceux peut s'eſloigner ou approcher diuerſement de celle ſur laquelle elle tombe, comme il eſt manifeſte.

Mais d'autant que pour conſtituer vn angle plan il faut que deux lignes ſe rencontrent, & quelquefois y a pluſieurs angles conſtituez à vn meſme poinct : les Mathematiciens pour euiter confuſion, ont de couſtume d'exprimer chacun angle par trois lettres, deſquelles celle du milieu monſtre le poinct auquel les deux lignes conſtituent l'angle, & les extremes deſignent les lignes qui contiennent l'angle. Comme par exemple, l'angle obtus, en la precedente figure, eſt entendu par l'angle E B D, conſtitué au poinct B, & contenu par les deux lignes droictes E B, D B ſe rencontrant au poinct B, & l'angle agu eſt entendu par l'angle E B C. Ce qu'il faut noter diligemment, pour

facilement

facilement discerner les angles, desquels il est faict mention aux Demonstrations.

Or quand l'on nous propose vn angle, si nous voulons examiner s'il est droict, obtus ou agu, nous le pourrons sçauoir en prenant le poinct de l'angle pour centre, & descriuant vn cercle à quel interuale que ce soit autour d'iceluy: & si l'angle proposé est ouuert selon le quart de la circonference du cercle descrit, il sera droict: si plus que le quart, il sera obtus, & si moins, il sera agu.

13. Terme, est l'extremité de quelque chose.

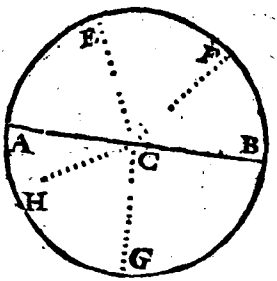
Il y a trois sortes de termes selon cette definition: car le poinct est le terme ou l'extremité de la ligne, la ligne est le terme de la superficie, & la superficie le terme du corps: mais le corps ne peut rien terminer, d'autant qu'il ne se trouue aucune quantité qui ait plus de trois dimensions. Et toute chose terminée, excede son terme d'vne dimension, comme il est manifesté par les exemples proposez.

14. Figure est, ce qui est contenu sous vn terme, ou sous plusieurs termes.

Toute quantité terminée ne peut pas estre appellée figure, autrement la ligne terminée ou finie seroit figure: mais seulement celles qui ont longueur & largeur, comme sont les superficies terminées, ou longueur, largeur & profondité, comme sont les solides terminez, seront appellez du nom de figure; car iceux seulement sont dicts estre contenus de termes: mais la ligne finie est seulemẽt terminée de deux poincts, & non enuironnée.

Donc les termes doiuent enclore la quantité appellée figure, & non seulement la terminer : aussi les superficies infinies ou les corps infinis, n'estans enclos d'aucun terme, ne doiuent aucunement estre appellez figures. Les figures contenuës d'vn seul terme sont le cercle, l'ellypse, la sphere, spheroïde & autres semblables : & les figures encloses de plusieurs termes, sont le triangle, le quarré, le cube, &c.

15. Le cercle est vne figure plane, contenuë sous vne seule ligne, appellée circonference, à laquelle toutes les lignes droictes menées d'vn seul poinct, de ceux qui sont posez au dedans de la figure, sont egales entr'elles.



Il definit icy le cercle, qui est la plus parfaicte de toutes les figures, nous enseignant que la figure plane, qui est enuironnée d'vne seule ligne, à laquelle ligne, toutes les droictes lignes menées d'vn seul poinct de ceux qui sont au dedans de la figure, sont egales entr'elles. Comme si vne superficie ou espace est enclos d'vne seule ligne, sçauoir A, E F B G H, & que d'vn poinct au dedans, comme de C, toutes les lignes droictes menées au terme, A E F B G H, sçauoir C A, C E, C F, C B, C G, C H, soient egales entr'elles ; telle figure plane est appellée

cercle,

cercle, & le terme ou ligne enuironnant cette figure, est appellé circonference. L'on peut aussi definir le cercle en cette maniere.

Le cercle est vne figure plane, laquelle est descrite par vne ligne droicte finie, menée à l'entour d'vn des poincts extremes, lequel demeure fixe, iusqu'à ce qu'elle soit retournée derechef au mesme lieu où elle a commencé de mouuoir: comme si l'on entend la droicte ligne A C, se mouuoir à l'entour du poinct C, lequel demeure fixe, iusques à ce qu'elle retourne au mesme poinct A, où elle a commencé son mouuement, elle descrira tout l'espace circulaire & le poinct extreme A, descrira la circonference, A E F B G H, & le poinct fixe C, est celuy-là duquel toutes les lignes droictes menées à la circonference sont egales entr'elles, d'autant que C A, menée à l'entour, mesure egalement toutes les lignes droictes, qui peuuent estre menées de C, à la circonference.

16. Mais ce poinct, est appellé centre du cercle.

Ce poinct, dit-il, qui est au dedans du cercle, sçauoir celuy duquel toutes les lignes droictes, menées à la circonference sont egales entr'elles, est appellé le centre du cercle, comme le poinct C, en la precedente figure: D'où il est manifeste que le pole d'vn cercle en la sphere, duquel toutes les lignes droictes tombantes à la circonference du cercle, sont egales, comme dit Theodose en ses Elements spheriques, ne doit estre appellé centre du cercle: attendu que ce poinct, qui est appellé pole du cercle, est en la superficie de la sphere,

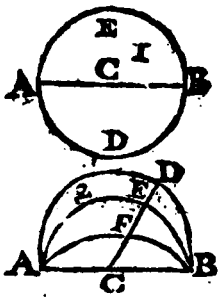
& non en la ſuperficie du cercle, qui eſt vne condition requiſe, afin qu'vn poinct ſoit dit centre.

17. Le diametre du cercle, eſt vne ligne droicte menée par le centre, & terminée de part & d'autre à la circonference du cercle, laquelle diuiſe le cercle en deux également.

Si au cercle on mene vne ligne droicte par le centre, ſe finiſſant à la circonference de part & d'autre, comme la ligne droicte A B, (en la precedente figure) menée par le centre C, & finiſſant en la circonference de part & d'autre, telle ligne eſt appellée le diametre du cercle, & icelle couppe auſſi le cercle par la moitié, puis qu'iceluy diametre paſſe par le milieu, ſçauoir par le centre: & partant couppe auſſi la circonference du cercle en deux parties egales. Ce que toutefois Thales Miloſius (à ce que dit Proclus) a ainſi demonſtré.

Soit entendu ou conceu en l'entendement, que la portion du cercle A D B, ſoit accommodée ou poſée ſur l'autre portion A E B, en ſorte que le diametre A B, ſoit commun à l'vne & à l'autre portion: ſi la circonference A D B, conuient totalement auec la circonference A E B, il eſt manifeſte que ces deux portions faites par le diametre, ſont egales entr'elles, attendu que l'vne n'excede l'autre: mais ſi A D B, ne conuient auec A E B, elle tombera au deſſus ou au deſſous,

S'il



S'il est ainsi, soit menée la droicte ligne C D, du centre C, coupant les circonferences A D B, A E B, aux poincts D, & E (comme il se voit en la seconde figure) les deux lignes droictes C D, C E, menées du centre à la circonference d'vn mesme cercle, seront egales entr'elles par la definition du cercle, ce qui est impossible, l'vne estant partie de l'autre: donc les circonferences A B D, A E D, seront egales, ce qu'il falloit demonstrer.

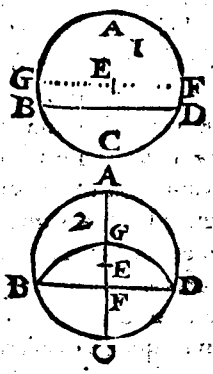
De cette demonstration il s'enfuit que le diametre coupe non seulement la circonference, mais aussi toute la superficie du cercle en deux egalement: Car puis que les demies circonferences conuiennent entr'elles, comme il est monstré, les superficies contenuës entre le diametre, & l'vne & l'autre circonference conuiendront aussi entr'elles, puis que l'vne n'excede l'autre, & partant seront egales.

18. Le demy-cercle est vne figure contenuë sous le diametre, & sous la ligne retranchée de la circonference du cercle.

Comme par exemple la figure A D B, au cercle precedent, contenuë sous le diametre A B, & la circonference A D B, est appellée demy-cercle, d'autant que c'est la moitié du cercle, comme nous

auons monſtré en la definition precedente. Semblablement la figure A E B, eſt demy-cercle, & le meſme poinct C, par lequel le diametre eſt diuiſé en deux egalement, eſt le centre au cercle & au demy-cercle.

Si vne ligne droicte, comme B D, couppant le cercle en deux portions, ne paſſe par le centre E, elle le couppera en deux portions inegales, comme B A D, B C D, deſquelles B A D, en laquelle eſt le centre, eſt la plus grande. Ce qui ſe peut ainſi demonſtrer.



Soit mené le diametre G F, parallele à B D, ou non, pourueu que B D, G F, ne s'entre-coupent: d'autant que G F, eſt le diametre du cercle A B C. Il le couppera en deux egalement, & partant le demy-cercle G A F, ſera egal au demy-cercle G C F, mais G C F, eſt plus grand que B C D, le tout que ſa partie, donc G A F, egal à G C F, ſera auſſi plus grand que B C D, & partant la portion totale B A D, qui eſt plus grande que G A F, le tout que ſa partie, ſera encor bien plus grande que la portion B C D, ce qui eſtoit propoſé. Ce que l'on peut auſſi demonſtrer comme s'enſuit.

Soit conceu que le diametre A C, ſoit mené par le centre E, perpendiculaire à B D. Donc ſi les portions B A D, B C D, ſont dites egales, & que la portion

portion B C D, soit entenduë se mouuoir à l'entour de la ligne droicte B D, en sorte qu'elle tombe sur B A D, elles conuiendront entr'elles, & la droicte ligne F C, conuiendra sur la ligne F A, à cause des angles droicts au poinct F, qui sont egaux entr'eux par la dixiéme definition, estant de suitte: donc la droicte ligne F C, qui est maintenant la mesme que F A, sera plus grande que E A, qui n'est qu'vne partie de F A. Donc puis que E C, est egale à E A, estans menées toutes deux du centre E, à la circonference, F C sera pareillement plus grande que E C, la partie que le tout; ce qui est impossible. Donc la portion B C D, ne conuiendra sur la portion B A D, mais tombera au dedans, comme est la portion B G D, de sorte que la droicte ligne F G, qui sera alors la mesme que F C, puisse estre plus petite que E A, ou E C. Or si elle estoit dite tomber dehors, comme si le cercle estoit B C D G, duquel le centre fust E, & la portion B C D, tombast hors B G D, telle qu'est la portion B A D. Derechef F A, qui seroit lors la mesme que F C, seroit plus grande que E G, c'est à dire que E F C, & partant la partie F C, seroit derechef plus grande que le tout E C, ce qui est absurde. Donc il est manifeste que la portion B A D, en laquelle est le centre E, est plus grande que l'autre portion B C D, puis que B C D, est egale à B G D, qui est partie de la portion B A D: car puis qu'il est monstré que la portion B C D, menée à l'entour de la ligne droicte B D, ne peut conuenir sur la portion B A D, ny tomber hors icelle, elle tombera totalement au dedans, comme B G D.

19. Portion, segment ou section de cercle

cle eſt vne figure contenuë ſous vne ligne droicte, & partie de la circonference du cercle,

Euclide repete cette definition au troiſieſme liure, parquoy n'en dirons icy autre choſe.

20. Figures rectilignes, ſont celles qui ſont contenuës ſous des lignes droictes.

Apres la definition du cercle, Euclide voulant faire les deſcriptions de diuerſes figures, il enſeigne auparauant, quelles figures ſont dites rectilignes: car il doit traicter principalement d'icelles aux liures ſuiuans.

Donc toutes les figures planes encloſes de tous coſtez de lignes droictes, ſont appellées figures rectilignes. D'où il eſt manifeſte que les figures planes, enuironnées de lignes courbes, ſont appellées curuilignes: mais celles qui ſont circonſcrites en partie de lignes droictes, & en partie de courbes, ſont appellées mixtes. Or diuers genres de figures ſeront maintenant deſcrits par Euclide.

21. Figures trilateres, ſont celles qui ſont contenües ſous trois lignes droictes.

Quand Euclide dit icy, que les figures rectilignes trilateres, ſont celles qui ſont enuironnées de trois lignes droictes, il nous monſtre clairement, comment il faut definir le triangle: car puis qu'aux figures rectilignes il y a autant d'angles que de coſtez, ou de lignes droictes, deſquelles elles ſont conſtituées: le triangle ſera vne figure contenuë ſous trois lignes droictes, duquel les eſpeces ſeront cy-apres declarées.

22. Les figures quadrilateres, ſont celles qui ſont contenuës ſous quatre lignes droictes.

Semblablement, le quadrangle ou quadrilatere eſt vne figure, contenuë de quatre lignes droictes; de laquelle les diuerſes eſpeces ſeront incontinent declarées.

23. Les figures multilateres, ou de pluſieurs coſtez, ſont celles qui ſont contenuës ſous plus de quatre lignes droictes.

D'autant que les eſpeces des figures rectilignes ſont innombrables, à cauſe du progrez infiny des nombres. Car trois lignes droictes enuironnans vne figure, conſtituent la premiere eſpece, ſous laquelle ſont contenuës tous les triangles; quatre lignes droictes conſtituent la ſeconde eſpece, laquelle comprend tous les quadrangles ou quadrilateres: cinq lignes droictes compoſent la troiſieſme eſpece, 6. la 4. & ainſi de ſuitte infiniment. Donc, afin qu'Euclide ne ſoit contraint de pourſuiure cette infinité, il appelle toutes autres figures rectilignes, circonſcrites de plus de quatre lignes droictes de ce nom general (Multilateres) ſe contentant de la denomination des trilateres & quadrilateres: peut eſtre à cauſe qu'il parle principalement de celles-cy en ſes liures, & que par la cognoiſſance d'icelles l'on entendra facilement la definition des autres, &c.

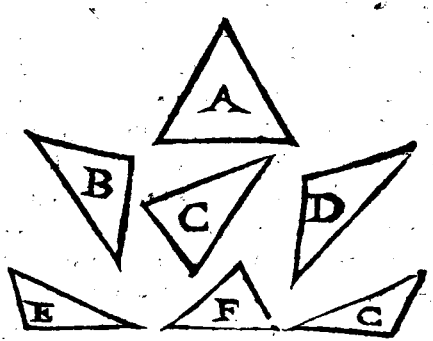
24. Or des figures trilateres, celle qui a trois coſtez egaux, s'appelle triangle equilateral.

25. Mais

25. Mais triangle Isoscele, celle qui a deux costez egaux tant seulement.

26. Et Scalene, qui a les trois costez inégaux.

Par ces trois definitions il expose les trois especes de triangles, la premiere & plus simple desquelles est le triangle Equilateral, ou de trois costez egaux, comme est le triangle A. La seconde, est le triangle Isoscele, qui a seulement deux costez egaux, comme les trois B, C, D, & la troisiesme est le Scalene, qui a tous les trois costez inégaux, comme sont les triangles E, F, G: Les Equilateres sont tousiours vniformes, d'autant que leurs angles sont tousiours égaux. Mais les Isoscheles & Scalenes, se diuersifient en infinies manieres, comme l'on peut cognoistre par cette figure.



27. Au surplus des figures trilateres, le triãgle Ortogone ou Rectangle, est celuy-là qui a vn angle droict.

28. L'Amblygone, est celuy qui a vn angle obtus ou mousſu.

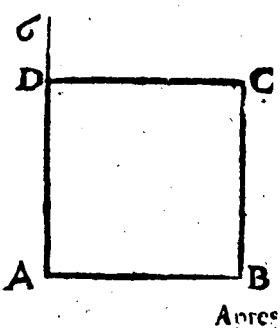
29. L'Oxygone,

29. L'Oxygone, eſt celuy qui a tous les trois angles agus.

Il a expoſé les triangles, en les conſiderant premierement ſelon leurs coſtez, il le faict maintenant ſelon la conſideration des angles ; & d'autant qu'il y a tant ſeulement trois genres diuers d'angles rectilignes, comme nous auons declaré, auſſi y a-il trois genres de triangles ; ſçauoir eſt le Rectangle, qui eſt celuy qui a vn angle droit, lequel peut eſtre Scalene ou Iſoſcele, comme ſont les triangles B & E, (en la precedente figure,) le triangle Amblygone peut eſtre pareillement Iſoſcele, ou Scalene, & non Equilateral, comme ſont D & G, mais tout triangle Oxygone ou Acutangle, peut eſtre equilateral, Iſoſcele ou Scalene, ce que l'on peut conſiderer aux triangles A, C, F.

Il faut icy noter qu'en tout triangle, deux des lignes eſtans priſes pour deux coſtez, le troiſiéme reſtant a couſtume d'eſtre appellé par les Mathematiciens la baſe du triangle, ſoit qu'iceluy ſoit le coſté infime du triangle ou non : de ſorte que chacune des lignes qui encloſt le triangle peut eſtre priſe pour baſe.

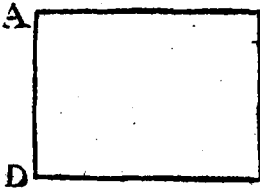
30. Mais des figures de quatre coſtez, le quarré eſt celuy qui eſt Equilatere & Rectangle ; *c'eſt à dire, qui a les quatre coſtez egaux, & les angles droicts.*



Apres

Apres les figures Trilateres, il expose les Quadrilateres, en declarant seulement de cinq sortes, les quatre premieres desquelles sont regulieres: mais la derniere & cinquiesme est irreguliere, Donc la premiere figure Quadrilatere est appellée quarré, de laquelle tous les costez sont egaux entr'eux, & tous les angles droicts, comme est la figure A B C D, & partant le quadrangle equilatere, & non rectangle, ou au contraire, rectangle & non equilatere, ne sera appellé quarré.

31. Le quarré long, est vne figure rectangle, mais non equilatere.



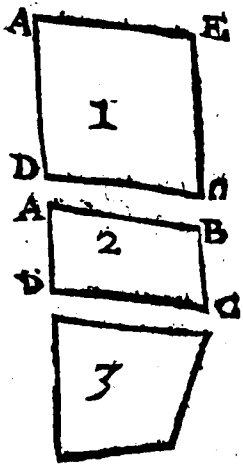
La seconde figure quadrilatere, est appellée par les Grecs ἑτερόμηκες, c'est à dire, plus longue d'vne part, qui est celle qui a les quatre angles droicts, mais n'a pas les quatre costez egaux entr'eux, combien que les costez opposez soient egaux entr'eux, comme est cette figure A B C D, où les costez A B, D C, opposez sont egaux entr'eux, & A D, B C, pareillement.

32. Rhombe, est vne figure equilatere, mais n'est pas rectangle.

Cette figure, qui est la troisiesme entre les quadrilateres, a les quatre costez egaux, mais les quatre angles ne sont droits, combien que les angles opposez soient egaux entr'eux, deux à deux, comme en la premiere des trois figures suiuantes, les angles A, & C, sont egaux entr'eux & non droicts, pareillement B, & D.

33. Rhomboide,

33. Rhomboide, eſt vne figure, laquelle a les coſtez oppoſez egaux, & les angles oppoſez auſſi egaux, mais n'eſt pas equilatere ny rectangle.



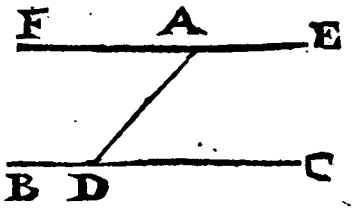
Cette figure appellée Rhomboide, n'a pas les coſtez egaux, ny aucun angle droict, mais a ſeulement les coſtez oppoſez, & les angles oppoſez egaux entr'eux (comme en la figure 1.) les coſtez AD, B C, ſont egaux entr'eux, pareillement A B, D C, & les angles oppoſez A, & C, ſemblablement B, & D, egaux entr'eux. Donc ces *quatre* figures quadrilateres peuuent eſtre dites regulieres, mais toutes les autres quadrilateres ſont irregulieres.

34. Mais outre ces figures, toutes les autres quadrilateres ſont appellées trapezes.

Toutes les autres figures quadrilateres, qui different des ſuſdites, c'eſt à dire, qui ne ſont ny quarrez ny quarrez longs, ny rhombes ny rhomboides, ſont appellées trapezes, & ſont irregulieres, attendu qu'elles peuuent eſtre de diuerſes manieres, &c. Voyez la figure troiſieſme & derniere.

35. Paralleles, ſont lignes droictes, leſquelles eſtans en vn meſme plan, & prolongées

longées infiniment de part & d'autre, ne se rencontrent de costé ny d'autre.

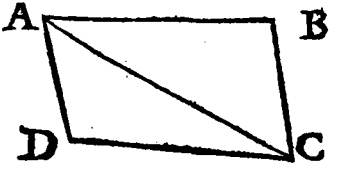


Afin que les droictes lignes soient paralleles ou equidistantes, il ne suffit pas qu'estans prolongées de part & d'autre infiniment, qu'elles ne viennét à vn poinct, ou ne se couppent iamais ; mais il est necessaire qu'elles soient aussi en vne mesme superficie plane. Car plusieurs lignes droictes n'estans en vne mesme superficie plane, prolongées à l'infiny, ne s'entre-coupent iamais à vn poinct, & toutefois ne sont dites paralleles, telles que seroient deux lignes posées de trauers, entenduës au milieu de l'air, & ne se touchant point ; celles-là, dis-je, ne peuuent iamais se couper. Donc les lignes droictes, lesquelles sont en vne mesme superficie plane, & qui estãs prolongées à l'infiny de costé & d'autre, (comme par exemple les lignes FE, BC,) ne s'entre-coupent iamais, seront dites paralleles, ou egalement distantes. Posidonius definit ainsi les paralleles. Paralleles, dit-il, sont celles-là lesquelles ne s'abbaissent ny ne s'esleuent en vn plan, mais ont toutes les perpendiculaires egales, lesquelles sont menées, de tous les poincts pris en l'vne, sur l'autre.

Euclide finit icy les Definitions de son premier liure, mais d'autant qu'il est fait mention en icelluy des figures Parallelogrammes, & de leurs compliments, nous auons estimé qu'il ne sera inutile d'expliquer les deux Definitions suiuantes, pour plus

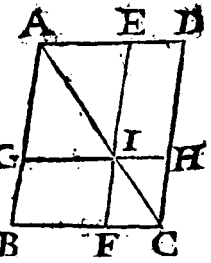
plus facilement entendre les Demonſtrations.

36. Parallelogramme, eſt vne figure quadrilatere, de laquelle les coſtez oppoſez ſont paralleles ou equidiſtans.



Comme ſi en la figure A B C D, le coſté A B, eſt parallele au coſté oppoſé C D, & A D, parallele à B C, elle ſera appellée Parallelogramme, c'eſt à dire, figure de lignes paralleles; & y en a de quatre ſortes, ſçauoir le Quarré & quarté long, qui ſont auſſi appellez parallelogrammes rectangles; le Rhombe & le Rhomboide, parallelogrammes non rectangles: d'où l'on peut colliger qu'il y a tant ſeulement de quatre ſortes de parallelogrammes.

37. Mais quand en vn parallelogramme; l'on mene vn diametre, ou diagonale, & deux lignes droictes paralleles aux coſtez, couppantes le diametre à vn meſme poinct, en ſorte que le parallelogramme ſoit diuiſé par icelles lignes paralleles, en quatre parallelogrammes; ces deux là, par leſquels le diametre ne paſſe, ſont appellez complements; mais les deux autres, par leſquels le diametre paſſe, ſont dits eſtre à l'entour du diametre.

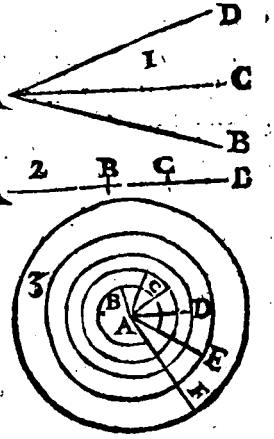


Soit le parallelogramme A B C D, auquel ayant mené le diametre A C, & la ligne E F, coupant iceluy au poinct I, & parallele à A B, C D, semblablement H G, coupant iceluy diametre au mesme poinct I, & parallele à A D, B C, il est manifeste que tout le parallelogramme est diuisé en quatre parallelogrammes, deux desquels, sçauoir D I, & I B, par lesquels le diametre ne passe, sont appellez par les Geometres, complements, ou supplements des parallelogrammes, restans E G, F H, qui sont dits estre à l'entour du diametre, d'autant que le diametre passe par iceux.

Petitions ou Demandes.

1. De tout poinct donné, à tout autre poinct donné, mener vne ligne droicte.
2. Prolonger directement vne ligne droicte donnée & terminée, infiniment.
3. De quelconque centre & interualle, deſcrire vn cercle.

Cette



Cette premiere demande sera manifeste, si l'on considere ce qui a esté dit cy-deuant de la ligne. Car puis que la ligne est vn flux imaginaire du poinct, & par ce moyen la ligne droicte est vn flux procedant du droit chemin, il aduiendra que si l'on entend quelque poinct se mouuoir à vn autre, vne ligne droicte sera menée d'vn poinct à l'autre : ce que demande Euclide par cette premiere petition. Comme l'on voit icy la ligne droicte A B, menée du poinct A, au poinct B, & du mesme poinct A, la *ligne* droite A C, menée au poinct C. Item AD, &c.

Que si l'on entend ce poinct se mouuoir encore *plus* outre directement, la ligne droicte terminée sera continuée, & cette production se pourra faire *infiniment* : puis que nous pouuons entendre ce poinct se mouuoir infiniment. Comme si la ligne *droicte* A B, est continuée au poinct C, puis au poinct D, &c.

Maintenant si nous conceuons en l'entendement, *quelconque* ligne droicte terminée, appliquée selon vne des extremitez à vn poinct fixe, se mouuoir à *l'entour* d'iceluy, iusqu'à ce qu'elle retourne où elle a commencé son mouuement, elle *aura descrit* vn cercle, qui est le requis de la 3. petition; comme l'on peut voir par exemple en ces cinq *lignes* A B, A C, A D, A E, A F, lesquelles menées à

l'entour du centre A, ont descrit des cercles selon la quantité ou interualle de chacune.

D'autres adiouſtent cette quatrieſme.

4. Semblablement, quelconque grandeur eſtant donnée, en pouuoir prendre vne autre plus grande ou plus petite.

Car toute quantité continuë, peut eſtre augmentée par addition, mais par diuiſion, peut eſtre diminuée infiniment: dont il ne ſe peut donner quantité continuë ſi grande, qu'il ne s'en puiſſe donner encore vne plus grande, ny vne ſi petite, qu'il ne s'en puiſſe donner encore vne plus petite. Cecy eſt auſſi veritable aux nombres, par addition. Car chacun nombre peut eſtre augmenté infiniment par l'addition continuelle de l'vnité, combien qu'en la diminution d'iceluy on paruienne à l'vnité indiuiſible.

COMMVNES SENTENCES, ou notions.

1. Les choſes qui ſont egales à vne meſme, ſont auſſi egales entr'elles.

De cette premiere notion, il eſt euident, qu'vne choſe plus grande, ou plus petite qu'vne des egales, ſera auſſi plus grande ou plus petite que l'autre. Et ſi l'vne des choſes egales eſt plus grande ou plus petite que quelque grandeur, l'autre ſera pareillement plus grande ou plus petite que la meſme grandeur.

2. Et ſi à choſes égales, l'on adiouſte choſes égales, les touts ſont égaux.

3. Et si de choſes egales, on retrancho choſes egales, les reſtes ſont égaux.

4. Et ſi à choſes inegales, on adiouſte choſes egales, les touts ſont inégaux.

Semblablement il eſt manifeſte, que ſi à choſes inégales, l'on adiouſte choſes inégales, à la plus grande, la plus grande, & à la plus petite, la plus petite, que les touts ſont inégaux, celuy-là plus grand, & cettuy-cy plus petit.

5. Et ſi de choſes inégales l'on oſte choſes égales, les reſtes ſont inégaux.

Il s'enſuit d'icy, que ſi de choſes inégales on oſte choſes inégales, ſçauoir de la plus grande moins, & de la plus petite plus, les reſtes ſont inégaux: ſçauoir eſt celuy-là plus grand, & celuy-cy plus petit. Or en toutes ces notions, excepté la premiere, par le mot de quantitez égales, faut entendre auſſi vne meſme, commune à pluſieurs: Car ſi à choſes égales l'on adiouſte vne choſe commune, les touts ſeront égaux: Et ſi de choſes égales l'on retranche vne choſe commune, les reſtes ſeront auſſi égaux: Et ſi à choſes inégales l'on adiouſte vne meſme choſe commune; ou à vne meſme choſe commune, on adiouſte choſes inégales, les touts ſeront inégaux: Et ſi de choſes inégales l'on retranche vne meſme choſe commune, ou d'vne meſme choſe commune on retranche choſes inégales, les reſtes ſeront inégaux.

6. Et les choſes qui ſont doubles d'vne meſme, ſont auſſi egales entr'elles.

D'où s'enſuit, que ce qui eſt double d'vne des choſes égales, eſt auſſi double de l'autre.

Semblablement, les choſes qui ſont triples, quadruples, quintuples, &c. d'vne meſme choſe ſont egales entr'elles, comme il eſt manifeſte.

7. Et les choſes qui ſont moitiez d'vne meſme, ſont auſſi egales entr'elles.

Au contraire, il s'enſuit que les choſes egales entr'elles, ſont moitiez d'vne meſme. Semblablement, les choſes leſquelles ſont tierces parties, ou quartes ou cinquieſmes, &c. ſont auſſi egales entr'elles.

En ces deux maximes, par vne meſme quantité, on doit auſſi entendre les quantitez egales: Car les choſes doubles, triples, &c. de choſes egales ſont pareillement egales entr'elles. Item, les choſes leſquelles ſont moitiez, ou tierces parties, ou quartes, &c. de choſes egales, ſont auſſi egales entr'elles.

8. Et les choſes qui conuiennent entr'elles, ſont auſſi egales entr'elles.

C'eſt à dire, que deux quantitez, deſquelles l'vne eſtant ſuperpoſée à l'autre, l'vne n'excede l'autre, mais toutes deux conuiennent entr'elles, ſont egales. Comme deux lignes droictes ſeront dites egales entr'elles, quand l'vne eſtant poſée ſur l'autre, celle qui eſt poſée deſſus conuient totalement auec l'autre, de ſorte qu'elle ne l'excede, ny n'eſt excedée d'icelle. De meſme auſſi deux angles rectilignes ſeront egaux entr'eux, quand l'vn eſtant poſé ſur l'autre, celuy qui eſt ſuperpoſé, n'excede point l'autre, & n'eſt excedé d'iceluy; mais les lignes qui conſtituent celuy-là, tombent totalement ſur celles qui conſtituent cettuy-cy. Car cela eſtant ainſi, les inclinations des lignes ſont egales, combien

que

que quelquefois icelles lignes soient inegales entr'elles : mais il faut entendre, que les grandeurs qui conuiennent entr'elles sont egales, selon cela seulement en quoy elles conuiennent. Or la longitude conuient seulement à la longitude : la superficie à la superficie : & l'inclination des lignes, à l'inclination des lignes, &c.

Clauius voulant couertir cette maxime, dit ainsi: *Et au contraire, les choses qui sont égales entr'elles, conuiennent entr'elles, si l'vne est posée sur l'autre.* Ce qui toutefois ne peut estre ; car si l'on descrit vn quarré, & sur le diametre d'iceluy on descrit encor vn autre quarré, le premier quarré descrit sera egal à la moitié du dernier, c'est à dire à vn triangle Isoscele, & neantmoins ne pourront pas conuenir, estans posez l'vn sur l'autre. L'on peut faire aussi vn angle curuiligne, egal à vn angle droict, à vn angle obtus, & à vn angle agu, comme a monstré Proclus, lesquels ne conuiendront toutefois pas, estans superposez chacun au sien. Finalement, l'on peut faire vn triangle rectiligne egal à vn autre triangle rectiligne, lesquels ne conuiendront pas aussi, estans superposez l'vn à l'autre, comme il est manifeste par la 37. & 41. du premier liure. Dont cette maxime ne se pourra conuertir vniuersellement, mais bien ainsi : *Les lignes droittes égales conuiennent entr'elles, estans posées les vnes sur les autres : pareillement les angles rectilignes égaux, comme aussi les superficies planes semblables & egales, &c.*

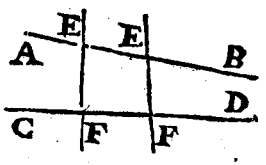
9. Et le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droicts sont égaux entr'eux.

Cét axiome eſt manifeſte par la 10. definition. Pappus enſeigne en ce lieu, que cét axiome ne peut eſtre conuerty : car tout angle égal à vn angle droict n'eſt pas droict, comme nous auons dit à la 8. commune ſentence ; mais ſeulement, tout angle rectiligne égal à vn angle droict, eſt auſſi droict, Ce que l'on peut prendre pour maxime.

11. Et ſi ſur deux lignes droictes, tombe vne autre ligne droicte, faiſant les angles internes & de meſme part, moindres que deux droicts ; icelles deux lignes droictes eſtans prolongées infiniment, ſe couperont l'vne l'autre, de la part où les deux angles ſont moindres que les deux droicts.

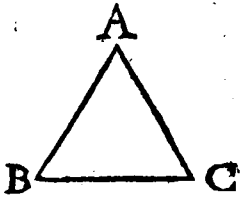
Comme ſi vne ligne droicte E F, tombant ſur les deux A B, C D, fait les deux angles internes B E F, D F E, de meſme part B D, moindres que deux droicts : Euclide dit qu'icelles eſtans prolongées de la part B D, où les angles ſont faicts moindres que deux droicts, que finalement elles ſe couperont à vn poinct. Ce qui eſt manifeſte : car quand les deux angles internes, & de meſme part ſont égaux à deux droits, les deux lignes ne ſe peuuent couper nulle part, & ſont touſiours également diſtantes l'vne de l'autre, comme il ſera demonſtré à la 28. propoſition de ce liure : parquoy ſi les angles internes de meſme part ſont moindres, il eſt neceſſaire que l'eſpace d'entre les lignes s'eſtreciſſe de plus en plus, & de l'autre part qu'il s'eſlargiſſe



s'eſlargiſſe pareillement : Donc icelles lignes enfin s'entre-couperont à vn poinct.

12. Deux lignes droictes ne contiennent pas vn eſpace.

Cét axiome n'a aucune difficulté : car ſi deux lignes font vn angle à vn poinct, elles ſe dilateront touſiours de part & d'autre de plus en plus, eſtans prolongées, comme il eſt manifeſte par cette figure : car ayant mené vne ligne droicte de A à B, du meſme poinct A, l'on ne pourra pas mener vne autre ligne droicte au poinct B par vn autre chemin, en ſorte qu'entre A B, & l'autre, il demeuraſt quelque eſpace enclos : tellement qu'vne autre ligne droicte menée du poinct A, comme A C, fera angle auec A B, de ſorte qu'il faudroit mener encore vne autre ligne comme B C, pour enclore vn eſpace ; mais vne ligne droicte & vne courbe, ou bien deux lignes courbes, pourront bien contenir ou enclore vn eſpace, comme il eſt manifeſte.



Apres ces Axiomes d'Euclide Clauius, & autres Interpretes, ont encore adiouſté les ſuiuans.

1. Deux lignes droictes n'ont pas vne meſme commune ſection.

2. Deux lignes droictes ſe rencontrans à vn poinct, ſi elles ſont toutes deux prolongées, elles ſe couperont neceſſairement.

Mais le Copiſte, qui a auſſi mis ces deux preten-

duës maximes, n'a pas eu l'eſprit non plus que Clauius, de recognoiſtre qu'Euclide demonſtre ce qu'ils diſent icy, par apres, parquoy ils n'en doiuent faire des maximes, comme ie luy feray voir, Dieu aydant, à la 13. & 14. propoſition de ce liure. Or ce pauure homme eſt ſi ignorant, ne ſçachant rien que par routine, & non pas de la façon qu'enſeigne Ariſtote, chap. 2. du 1. des Poſt. Analytiques: ὁπόσα δὲ οἰόμεθα ἴσα ὄντα ἁπλῶς, ἀλλὰ μὴ κατὰ σοφιστικὸν τρόπον, καὶ κατὰ συμβεβηκός, ὅταν τὰ μὲν ἴσα οἰώμεθα γινώσκειν, δι' ἣν τὸ πρᾶγμα ἐστίν, ὅτι ἐκείνου αἰτία ἐστὶ, καὶ μὴ ἐνδέχεται τοῦτ' ἄλλως ἔχειν. Que s'il auoit trouué en rapſodiant que Clauius euſt dit que veſſies, comme l'on dit, fuſſent non ſeulement lanternes, mais figures Mathematiques, il le croiroit.

Ils adiouſtent encore les ſix ſuiuantes.

1. Si à choſes egales, on adiouſte choſes inegales, l'excez des toutes ſera égal, ou le meſme que l'excez des adiouſtées.

2. Si à choſes inegales, on adiouſte choſes egales, l'excez des toutes ſera égal, ou le meſme que l'excez de celles qui eſtoient au commencement.

3. Si de choſes egales, on retranche choſes inegales, l'excez des reſtantes ſera égal, ou le meſme que l'excez des retranchées.

4. Si de choſes inegales, on oſte choſes egales, l'excez des reſtantes ſera le meſme que l'excez des toutes.

5. Le

5. Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

6. Si vn tout eſt double d'vn tout, & le retranché du retranché, le reſte ſera double du reſte.

Or ces ſix pretenduës maximes ou axiomes ſont auſſi demonſtrées par Euclide cy-apres, comme nous ferons voir Dieu aydant, parquoy puis qu'ils ſe prouuent par cy-apres, ſuiuant ce qu'a demonſtré Euclide, ils ne doiuent eſtre pris pour axiomes: Nous demonſtrerons, apres Euclide, les cinq premiers à la ſeconde propoſition de ce liure, & le 6. à la 5. du 5. liure.

De ce que deſſus on peut colliger auec Proclus & Geminus, cette difference, entre les demandes & les maximes ou axiomes, que puis que les vns & les autres ſont cognus d'eux-meſmes, & indemonſtrables, que celles-là ſont de la nature des Problémes, d'autant que par icelles on requiert que quelque choſe ſoit faicte: mais ceux-cy reſſemblent les Theorémes, puis que par iceux il n'eſt requis qu'aucune choſe ſoit faicte, mais eſt ſeulement propoſé quelque ſentence tres-cogneuë. Mais la demande ou petition differe du Probléme, en ce que la conſtruction de la demande n'a beſoin d'aucune demonſtration, mais perſonne n'accorde la conſtruction du Probléme ſans demonſtration, d'autant que quelque choſe de difficile eſt propoſé à conſtruire. Semblablement il y a difference entre l'Axiome & le Theoréme: car celuy-là ne doit eſtre demonſtré, mais celuy-cy ne doit aucunement eſtre concedé, qu'il ne ſoit demonſtré: car perſonne ne demandera la preuue

ou

ou demonſtration de cette propoſition, *Les choſes leſquelles ſont égales à vne meſme, ſont pareillement égales entr'elles* : Mais de celle-cy chacun deſirera la demonſtration. *De tout triangle, les trois angles internes ſont égaux à deux droicts.* Et faut entendre le meſme des autres axiomes & theorémes, & auſſi des demandes & problémes.

Il eſt certain pareillement, que des demandes ou petitions, les vnes ſont plus propres à la Geometrie, comme ces trois qu'Euclide nous a propoſez : quelques-vnes communes à la Geometrie & à l'Arithmetique, telle qu'eſt cette-cy. *Vne quantité pouuoir eſtre infiniment augmentée.* Car tant le nombre que la grandeur, peut eſtre augmentée par addition, en ſorte que l'on ne peut iamais trouuer de fin à cette augmentation. L'on dira le meſme des Axiomes ou communes ſentences : car le 8. 10. 11. & 12. conuiennent à la Geometrie ſeulement : mais tous les autres ſont appliquez aux demonſtrations Geometriques & Arithmetiques. Car tout ainſi comme les grandeurs égales, retranchées des grandeurs égales, laiſſent grandeurs égales, ſoit que ces grandeurs ſoient lignes ou ſuperficies, ou corps : ainſi pareillement les nombres égaux, retranchez de nombres égaux, laiſſent des nombres égaux : & ayant dit cecy de ces trois genres de principes, venons aux demonſtrations, par leſquelles l'on cognoiſtra plus parfaictement la nature de tous les principes. Car il y a pluſieurs principes tels entre les Mathematiciens qu'ils ne ſont pas facilement entendus, qu'auparauant l'on n'ait cogneu leur vſage aux demonſtrations : ce que l'experience monſtrera aſſez.

Afin que le cours de la demonſtration ne ſoit interrompu,

interrompu, nous auons cité les principes & propositions d'Euclide en la marge, auec vne lettre de l'Alphabet, laquelle lettre est aussi mise dans le discours, là où la proposition se doit citer, laquelle est escrite en marge apres la mesme lettre: ce que l'on entendra comme s'ensuit.

1.Definit.	Premiere definition, & ainsi des autres, comme 4.def.18.def.&c.
1.Pet. ou 1.Demande.	Premiere petition, ou premiere demãde.
1.c.s. ou 1. c. n.	Premiere commune sentence, ou premiere commune notion.
1.Pre.ou 1.1.	Premiere proposition du premier liure.
1.2.	Premiere proposition du second liure.
2.3.	Seconde prop.du 3.liure.
9.6.	Neufiéme prop.du 6.liure.
23.11.	Vingt-troisiéme proposition de l'onziéme liure.
12.14.	Douziéme prop. du quatorziéme liure, &c.
Scho.17.	Scholie de la dix-septiéme proposition du 10.liure.
Coroll. 32. 1.	Corollaire de la 32. proposition du premier liure.

Et faut entendre le mesme des autres.

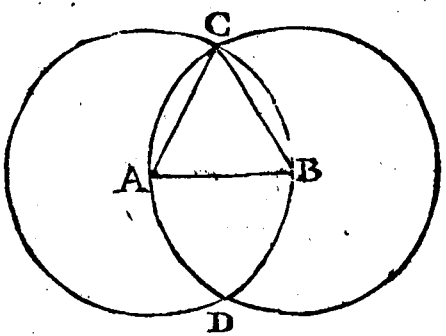
LIVRE PREMIER.

PROBLEME I.

PROPOSITION I.

Sur vne ligne droicte donnée & terminée, deſcrire vn triangle equilateral.

SOit la ligne droicte donnée A B, ſur laquelle il faut deſcrire vn triangle equilateral. Du poinct A, pris pour centre & de l'interualle de A B, ſoit deſcrit le cercle B C D : Derechef, du poinct B, pris pour centre & du meſme interualle B A, ſoit deſcrit vn autre cercle



A C D, coupant le premier aux poincts C, & D, duquel que l'on voudra deſquels, ſçauoir de C, ſoient

soient menées les lignes droictes C A, C B. Ie dis que le triangle A B C, descrit sur la ligne droicte proposée A B, est equilateral.

Car d'autant que les lignes droictes A B, & A C, sont menées du centre A, à la circonference du cercle B C D, [a] A C, sera égale à A B. Derechef, d'autant que les lignes droictes B A, B C, sont menées du centre B, à la circonference du cercle A C D, [b] B C, sera égale à B A, mais A C, est aussi monstrée égale à A B: Donc tant A C, que B C, sera égale à A B, [c] & partant égales entr'elles: Donc le triangle A B C, est equilateral. Donc sur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

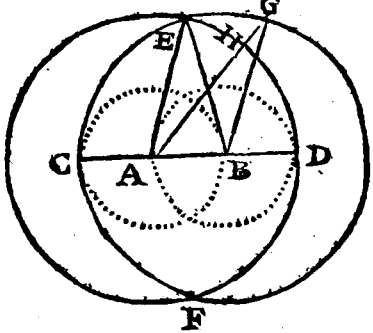
a 15. *def.*

b 15. *def.*

c 1. *c. f.*

SCHOLIE.

Si quelqu'vn desiroit descrire vn triangle Isoscele, ou vn Scalene sur vne ligne droicte proposée, comme a faict Proclus, il le fera en cette maniere. Soit la ligne droite donnée A B, à l'entour de laquelle soient descrits deux cercles comme cy-dessus, puis soit prolongée A B, de part & d'autre directement aux circonferences, comme aux poincts C & D, & du poinct A, comme centre, à l'interualle A D, soit descrit vn cercle E D F; Semblablement du poinct B, & de l'interualle B C, soit descrit le cercle C E F,



coupant

coupant le cercle E D F, aux poincts E, & F, & duquel qu'on voudra d'iceux comme de E, soient menées les lignes droictes E A, E B. Ie dis que le triangle A E B, descrit sur la ligne A B, est Isoscele.

a 15. def. Car d'autant que A E, est égale à A D, [a] estans
b 15. def. menées du centre, & A D, est double de A B, estans [b] B A, B D, égales entr'elles, A E, sera aussi double de A B. Derechef, d'autant que B E, est égale à B C, &
c 15. def. B C, double de B A, puis que A B, A C, sont [c] égales entr'elles, B E, sera aussi double de A B : donc puis que tant A E, que D B, est double de la mesme A B,
d 6. e. s. [d] icelles A E, B E, seront égales entr'elles, & chacune plus grande que A B, donc le triangle A E B, est Isoscele.

Mais maintenant si du poinct A, on mene la droicte ligne A G, autre que A E, ou A D, à la circonference E G F, coupant la circonference E H D, au poinct H, & du poinct G, au poinct B, l'on mene la droicte ligne G B, le triangle A G B, descrit sur la ligne A B, sera Scalene. Car d'autant que A H, est
e 15. d. égale à A D, & B G, égale à [e] B C : Mais tant A D, que B C, a esté monstrée double de A B : donc tant A H, que B G, sera aussi double de A B, & partant
f 9. c. s. chacune plus grande que A B. Or la toute A G, [f] est plus grande que A H, elle sera donc aussi plus grande que B G, égale à A H : donc le triangle A B G, est Scalene, duquel le plus grand costé est A G, le moyen est B G, & le plus petit est A B.

SCHOLIE.

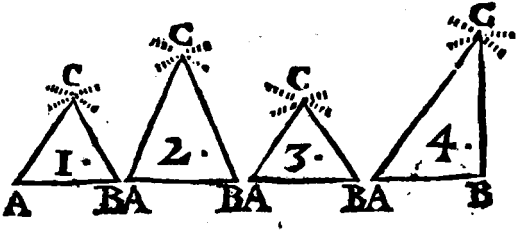
Il faut noter que quand on trouuera ce mot, ligne, posé simplement, ou deux lettres, comme A B, ou autres, faut entendre vne ligne droicte ; & ce mot angle,

gle, ou trois lettres posées simplement, sans autre explication, faut entendre angle rectiligne, & la lettre du milieu denote tousiours l'angle dont est question, &c.

PRACTIQVE.

Pour descrire sur vne ligne proposée vn triangle equilateral, Isoscele, ou Scalene, l'on le fera en cette maniere.

Pour descrire vn triangle equilateral sur la ligne A B, des centres A, & B, & de l'interualle A B, faut descrire deux arcs s'entre-coupans au poinct C, & mener les deux lignes droictes C A, & C B, comme en la figure premiere.



Pour le triangle Isoscele, il faut prendre les poincts A, & B, mais l'interualle plus grand que A B, ou plus petit, & descrire deux arcs se coupans au poinct C, & mener les lignes A C, C B, comme l'on voit en la figure 2. & 3.

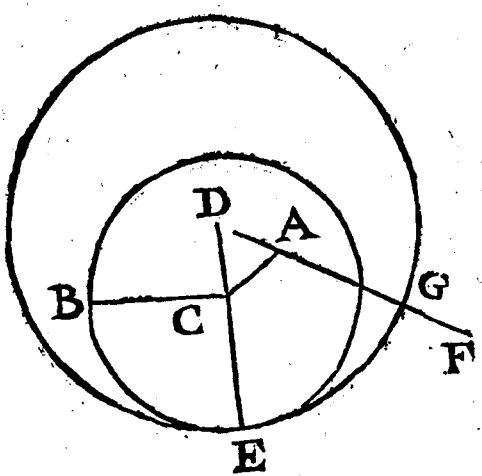
Pour le Scalene, faut prendre B, pour centre, & l'interualle plus grand que B A, & descrire l'arc C, puis prendre A, pour centre, & l'interualle plus grand que le premier, & descrire vn autre arc qui coupe le premier du mesme poinct C, & tirer les lignes C A, C B, comme en la figure 4.

PROBLEME 2. PROP. 2.

A vn poinct donné, poſer vne ligne droicte, égale à vne ligne droicte donnée.

Soit le poinct donné A, & la ligne droicte donnée B C, il faut poſer vne ligne droicte au poinct A égale à B C, c'eſt à dire du poinct A, mener vne ligne droicte égale à B C.

De l'vne ou l'autre extremité B & C, de la ligne propoſée B C, ſçauoir de C, pris pour centre, & de
a 1. p. l'interualle B C, [a] ſoit décrit le cercle B E; puis du poinct donné A, ſoit menée la ligne droicte A C,



b 1. p. ſur laquelle A C, ſoit [b] deſcrit le triangle equilateral A C D, & ſoit prolongé le coſté D C, iuſques à la circonference au poinct E, & le coſté D A,

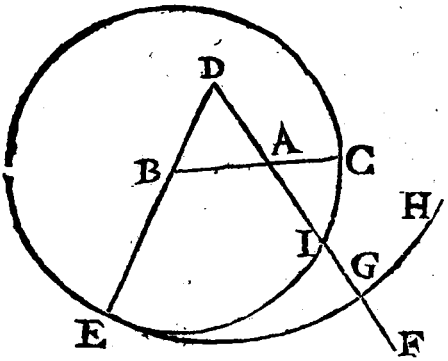
tant

tant qu'il ſera beſoin, comme en F, & du centre D, & de l'interualle D E, ſoit deſcrit le cercle E G, coupant la ligne E F, au poinct G. Ie dis que la ligne A G, qui eſt menée du poinct donné A, eſt égale à la ligne droicte donnée B C.

Car les lignes [c] D E, D G, ſont égales eſtans menées du centre D, à la circonference E G, & [d] D A, D C, auſſi égales, eſtans les coſtez d'vn triangle equilateral, leſquelles eſtans retranchées des toutes D G, D E [e] reſtera A G, égale à C E : mais G B, eſt auſſi égale à C E, eſtans menées du centre C, à la circonference B E : donc puis que tant A G, que C B, eſt égale à C E, A G, ſera auſſi [f] égale à C B. Donc du poinct donné A, nous auons mené vne ligne droicte, égale à la ligne droicte donnée B C, ce qu'il falloit faire.

c 15. d.
d 1. p.
e 3. c. f.
f 1. c. f.

Mais ſi le poinct donné A, eſtoit en la ligne don-



née B C, comme il appert par cette derniere figure, ayant fait la meſme conſtruction qu'auparauant : on conclura tout de meſme que A G, menée

du poinct A, est égale à la ligne droicte donnée B C, &c.

COROLLAIRE.

Par cette proposition, s'ensuit premierement, que si à choses égales, on adiouste choses inegales, l'excez des toutes sera égal, ou le mesme que l'excez des adiouſtées : car puis que A G, B E, sont monstrées égales, si à A G, on adiouste G F, icelle F G, sera l'excez de A F, B E : donc si à D A, & D B, qui sont aussi monstrées égales, on adiouste A F, B E, inegales, F G, sera aussi l'excez des toutes, D F, D E.

2. Et si à choses inegales, on adiouste choses égales, l'excez des toutes sera égal, ou le mesme que l'excez de celles qui estoient au commencement : car A G, B E, estans monstrées égales, A F, B E, seront inegales, & G F, sera l'excez, auſquelles A F, B E, si on adiouste D A, D B, qui sont monstrées égales, G F, sera encore l'excez des toutes D F, D E, comme il appert par ce qui est demonstré.

3. Et si de choses égales, on retranche choses inégales, l'excez des restantes sera égal, ou le mesme que l'excez des retranchées : car si de D E, D G, qui sont monstrées égales, on retranche G I, E B, inegales (car A G, B E, sont auſſi monstrées égales) A I, sera l'excez entre les retranchées B E, I G, qui est le mesme d'entre D B, D I, puis que D A, D B, sont auſſi égales.

4. Et si de choses inegales, on retranche choses égales, l'excez des restantes sera le mesme que l'excez des toutes. Car si de D F, D E, qui sont inega- 1. p. 1.
les (D G, D E, estans monstrées égales) G F, sera l'excez, & si on retranche D A, D B, qui sont éga-

les,

les, restera A F, B E, inegales, & puis que A G, C E, sont monstrées egales, G F, sera aussi l'excez des testantes A F, B E.

5. Nous monstrerons encore icy, que le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble : car puis que toutes les parties D A, A G, G F, de la grandeur D F, prises ensemble, constituent le tout A F, ce qui est proposé est manifeste. Ce que Euclide a dit aussi à la 9. commune sentence (*Implicite:*) car puis que le tout (comme dit Euclide) est plus grand que sa partie, il ne peut estre plus grand que de la partie ou parties, par lesquelles il excede la partie proposée : comme par exemple, le tout D F, estant plus grand que sa partie D A, il n'est plus grand que de la partie A F, ou des parties A G, G F : mais la partie proposée D A, auec l'excez A G, G F, font le tout D F : donc par la 9. commune sentence il est égal à toutes ses parties prises ensemble ; Donc quand Euclide dit, que le tout est plus grand que sa partie, n'est autre chose à dire, que toutes les parties prises ensemble qui font le tout, sont plus grandes qu'vne d'icelles.

Clauius, & autres Interpretes d'Euclide, ont fait des communes sentences ou maximes, de ce que nous venons de demonstrer en suitte de cette seconde proposition, que nous auons mises cy-deuant pag. 41. lesquelles (à ce que dit Clauius) ne sont moins neceſſaires que ceux d'Euclide, en quoy ledit Clauius se trompe fort, & monstre bien qu'il n'a point entendu Euclide comme vn homme docte le doit entendre, puis que toutes ces pretenduës maximes sont demonstrées, comme nous auons desia dit, & comme nous monstrerons encore cy-apres par Euclide, & partant ne doiuent

estre tenuës pour maximes, comme enseigne fort bien Aristote liu. 1. des Post. Analytiques. πᾶσα διδασκαλία ἢ πᾶσα μάθησις διανοητική, ἐκ προυπαρχούσης γίνεται γνώσεως, &c.

Il ne faut donc pas que Clauius & autres pensent, qu'Euclide se soit tant oublié, que d'auoir obmis quelque chose, qui soit necessaire pour demonstrer tout ce qu'il propose, & ce qui se peut proposer & demonstrer.

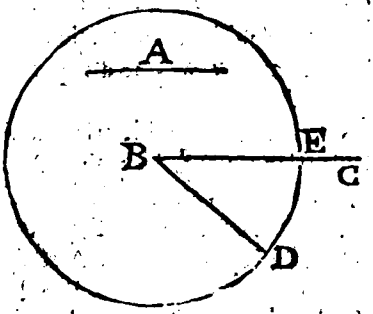
PROBLEME 3. PROP. 3.

De deux lignes droictes inegales données, oster de la plus grande, vne ligne droicte egale à la plus petite.

Soient deux lignes droictes inegales proposées A, & B C, la plus grande desquelles soit B C: Il faut retrancher de la plus grande B C, vne ligne droicte égale à la plus petite A: soit posée au poinct B, ou C, la ligne droicte [a] B D, égale à A, & du poinct B, pris pour centre, & de l'interualle B D, soit descrit le cercle D E, coupant B C, au poinct E. Ie dis que B E, est ostée égale à A.

a 2. *Prem.*

Car



Car puis que B, eſt le centre du cercle D E, la ligne droicte B E, [b] ſera égale à B D; mais A, eſt egale à B D, par la conſtruction, donc B E, ſera egale à A, [c] chacune eſtant egale à B D: donc de deux lignes droictes inegales nous auons, &c. Ce qu'il falloit faire.

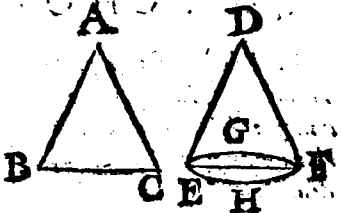
[b] 15. def.

[c] 1. com. ſ.

THEOREME 1. PROP. 4.

Si deux triangles ont deux coſtez égaux à deux coſtez, chacun au ſien, & l'angle contenu d'iceux coſtez égaux, égal à l'angle: Ils auront la baſe egale à la baſe, & le triangle ſera égal au triangle; & les autres angles ſouſtendans iceux coſtez égaux, égaux aux autres angles, chacun au ſien.

Soient les deux triangles A B C, D E F, ayans deux coſtez, ſçauoir A B, A C, égaux aux deux coſtez D E, D F, chacun au ſien, ſçauoir A B, égal à D E, & A C, égal à D F, &



l'angle A, égal à l'angle D, (lesquels sont contenus d'iceux costez egaux) ie dis que la base B C, sera egale à la base E F.

Car si l'on entend le triangle A B C, estre posé sur le triangle D E F, le poinct A, posé sur le poinct D, & la ligne droicte A B, sur D E, [d] le poinct B, conuiendra sur le poinct E, puis que A B, est egale à D E: & puis que l'angle A, est égal à l'angle D, la ligne A C, tombera sur D F, & le poinct C, conuiendra sur [e] le poinct F, puis que A C, est egale à D F: mais le poinct B, conuient au poinct E: donc la base B C, conuiendra sur la base E F, & partant [f] egales: car le poinct B, tombant sur le poinct E, & le poinct C, sur le poinct F, si la base B C, ne tomboit sur E F, elle passeroit par au dessus comme E G F, ou an dessous comme E H F: ce qui est [g] impossible, attendu que deux lignes droictes n'encloſt point d'espace: donc B C, conuiendra sur E F, & partant egales, & tout le triangle A B C, égal à tout le triangle D E F, & les autres angles B & C, égaux aux autres angles E, & F, chacun au sien, sçauoir B, à E, & C, à F, puis qu'ils conuiennent entr'eux, & que le triangle conuient sur le triangle. Donc si deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, &c. ce qu'il falloit demóstrer.

d 8. com. f.

e 8. com. f.

f 8. com. f.

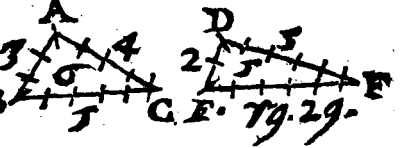
g 12. com. f.

SCHOLIE.

Euclide met fort à propos deux conditions en ce Theoreme. La premiere est, que deux costez d'vn triangle soient égaux aux deux costez de l'autre, chacun au sien. La seconde, que l'angle contenu des deux costez de l'vn, soit égal à l'angle de l'autre, contenu des deux costez égaux, aux deux costez du prem ier.

premier. Car l'vne de ces conditions defaillant, ny les baſes ny les autres angles ne pourront iamais eſtre égaux, comme demonſtre Proclus ſur cette propoſition: car encore que les triangles puiſſent quelquefois eſtre égaux, la derniere condition defaillant, comme l'on peut demonſtrer par apres: toutefois cela aduient aſſez rarement.

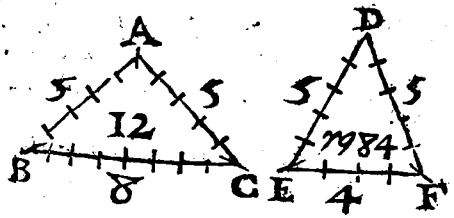
Car ſoient les angles A, & D, des triangles ABC, & DEF, égaux, ſçauoir droits, & les deux coſtez égaux aux deux coſtez, non chacun au ſien, mais les deux enſemble AB, AC, égaux aux deux enſemble DE, DF. Et ſoit AB, 3. AC, 4. qui ſeront eſtans adiouſtez, 7. mais DE ſoit 2. & DF, 5. qui aſſemblez ſont auſſi 7. Ce qu'eſtant ainſi la baſe BC ſera 5. & la baſe EF, 12.9.29. laquelle eſt plus grande que 5. mais moindre que 6. Semblablement l'aire ou plan du triangle ABC, ſera 6. & l'aire du triangle DEF, ſera



5. & finalement les angles ſur la baſe BC, inegaux aux angles ſur la baſe EF, leſquelles choſes nous monſtrerions icy, ſinon qu'il y a pluſieurs choſes à ce requiſes, qui n'ont encore eſté demonſtrées.

Derechef, ſoient les coſtez AB, AC, du triangle ABC, egaux aux deux coſtez DE, DF, du triangle DEF, chacun au ſien, & ſoit vn chacun d'iceux de 5. & que les angles A, & D, contenus d'iceux coſtez ſoient inegaux, & ſoit A, plus grand que D, leſquelles choſes eſtans ainſi, la baſe BC, ſera plus grande que la baſe EF, comme il ſera demonſtré en la 24. Propoſition de ce liure. Que ſi nous poſons la baſe BC, 8. & la baſe EF, 4. l'aire du triangle ABC, ſera 12.

mais l'aire du triangle D E F, sera B.q. de ce nombre 84. *laquelle est plus grande que* 9. *mais plus petite que* 10. *ce qui est cogneu entre les Geometres : Donc*

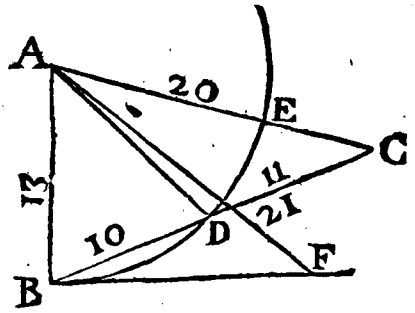


afin que de deux triangles, les bases, & les angles, & les triangles mesmes, soient égaux entr'eux, il est necessaire que l'vn & l'autre costé de l'vn soit égal à l'vn & l'autre costé de l'autre, & pareillement que les angles contenus d'iceux costez soient aussi égaux, comme a fort bien dit Euclide.

Le Copiste, apres auoir copié ce que nous venons de dire au Scholie de cette 4. Proposition, & ailleurs cy-deuant (selon sa coustume) pour faire paroistre d'auantage son ignorance & bestise, il adiouste ce qui s'ensuit.

Et afin (dit-il) *qu'on n'estime pas que cette inegalité aduienne, à raison de ce que tous les quatre costez des triangles sont égaux, & rendre tant plus manifeste la necessité de la seconde condition de ce Theoreme, Soit vn triangle A B C, duquel le costé A B, soit moindre que le costé A C, & aussi que la base B C, & du centre A, & de l'internalle du petit costé A B, soit descrit vn cercle B D E, qui coupera tant le plus grand costé A C, que la base B C : car autrement il passeroit, ou par le poinct C, ou au delà d'iceluy. Ce qui est absurde, veu que toutes les lignes droites tirées du centre à la circonference doiuent estre*

egales,



egales, par la 15. Definition. Qu'il coupe donc B C, en D, & soit tirée la ligne A D, par la 15. Definit. A B, eſt egale à A D, & A C, commune aux deux triangles A B C, A D C: & partant les deux coſtez A B, A C, du triangle A B C, ſont egaux aux deux coſtez A D, A C, du triangle A D C, chacun au ſien. Mais l'angle D A C, contenu d'iceux coſtez A D, A C, n'eſt que partie de l'angle B A C, contenu des coſtez egaux à ceux-là: & partant, la baſe D C, ne ſera que partie de la baſe B C, & pareillement le triangle A D C, partie du triangle A B C. Ce qui eſt auſſi manifeſte, par l'application des nombres aux lignes, &c.

Voila la belle demonſtration du Copiſte Henrion : mais voyons combien ce pauure homme commet icy de fautes.

Premierement il dit, qu'y ayant vn triangle comme A B C, duquel le coſté A B, ſoit moindre que le coſté A C, & auſſi que la baſe B C; & que du centre A, & de l'interualle A B, qu'on deſcriue vn cercle, il coupera la baſe B C, autrement il paſſeroit par le poinct C, ou au delà. Ce qui eſt manifeſtement faux, comme nous auons demonſtré à la 16. Propoſition du 3. liure, & comme il appert par cette figure, où la circonference B E, qui coupe le coſté

coſté B C, comme il dit au poinct D, ne coupe pas le coſté B F, du triangle A B F, qui a auſſi les deux coſtez A F, B F, chacun plus grand que A B : donc la circonference B E, deſcrite du centre A, & de l'interualle A B, ne coupera le coſté du triangle comme il dit, mais par accident ſeulement : c'eſt à dire, en tant que l'angle A B C, ſoit agu. Dauantage, il faict encore icy des erreurs manifeſtes ; car il prend vne partie de l'angle B A C, ſçauoir D A C, & vne partie de la baſe B C, ſçauoir D C, & enfin vne partie de tout le triangle A B C, ſçauoir le triangle A D C, pour monſtrer que chacun eſt moindre que ſon tout, c'eſt à dire, qu'apres tout cela il pretend conclure Geometriquement, que deux triangles ayans deux coſtez egaux à deux coſtez chacun au ſien, & l'angle plus grand que l'angle, la baſe ſera plus grande que la baſe, & le triangle que le triangle, qui eſt vne petition du principe la plus vicieuſe de toutes les cinq ſortes, dont Ariſtote fait mention au 8. liure de ſes Topiques chap. 13. & au 2. des Prieures Analytiques chap. 7. voulant monſtrer qu'vne choſe eſt moindre qu'vne plus grande, prenant vne partie de la plus grande, & diſant qu'elle eſt moindre que ſon tout.

Il fait icy de meſme que celuy qui prendroit vn flambeau ardant pour voir le ſoleil ; encore qu'il penſe demonſtrer autre choſe que ce qu'il dit ; ſçauoir qu'ayans deux coſtez égaux à deux coſtez, chacun au ſien, & l'angle plus grand que l'angle, la baſe ſera plus grande que la baſe. Mais qu'il apprenne qu'Euclide meſme ne l'a peû demonſtrer, qu'il n'ait demonſtré 23. Propoſitions, & le demonſtre à la 24. & qu'il ſe meſle ſeulement de faire imprimer & vendre, ce que ſon Traducteur luy

traduict,

traduict, collige & met par ordre ; & non pas de faire rien de luy-meſme. Il faict paroiſtre encore ſon aſnerie, en voulant monſtrer par les nombres qu'vne partie de ce triangle eſt moindre que ſon tout, & vne partie de la baſe auſſi moindre que ſon tout : & qui lira attentiuement ſon Onologie, trouuera encore pluſieurs erreurs que ie paſſe ſous ſilence, afin d'euiter prolixité. Car il faudroit faire vn volume entier, qui voudroit remarquer toutes les fautes qu'il commet en ſes Onologies.

Ie diray neantmoins encore icy, que ledit Copiſte a obmis ces mots d'Euclide, à la fin du texte de cette 4. Propoſ. *Souſtendans iceux coſtez égaux* : mais c'eſt qu'il eſtoit ainſi en ſa copie ; car s'il traduiſoit luy-meſme du Latin, comme il dit, il auroit trouué *ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur*, & par ainſi l'auroit traduit.

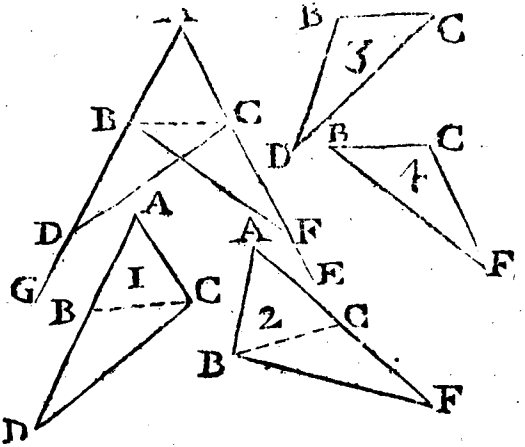
THEOREME 2. PROP. 5.

Des triãgles Iſoſceles, les angles qui ſont à la baſe ſont égaux entr'eux : & les lignes droictes égales eſtãs prolongées, les angles, qui ſont ſous la baſe, ſeront égaux entr'eux.

Soit le triangle Iſoſcele A B C, ayant le coſté A B, égal au coſté A C. Ie dis que les angles A B C, & A C B, ſur la baſe B C, ſont égaux entr'eux : ſemblablement que ſi l'on prolonge les coſtez égaux A B, A C, directement aux poincts G, & E, les angles C B G, B C E, ſous la baſe B C, ſont auſſi égaux entr'eux. En la ligne A G, ſoit pris le poinct contingent D, & de la plus grande A E, prolongée infiniment ſoit [h] retranchée A F, égale à D A, puis ſoient menées les lignes droictes D C, & F B.

h 3. prémier.

Pour



Pour entendre plus facilement la demonſtration de cette propoſition, il faut conceuoir en cette figure D A F, quatre triangles, comme s'ils eſtoient ſeparez l'vn de l'autre, ſçauoir B A F, & C A D, & D B C, & B C F, comme ſont les triangles marquez par 1. 2. 3. & 4. Car 1. & 2. eſtans appliquez l'vn ſur l'autre, ſçauoir le poinct A, du triangle 1. ſur le poinct A, du triangle 2. & la ligne A B, de l'vn ſur la ligne A D, de l'autre, feront la figure D A F. Semblablement le triangle 3. appliqué ſur le triangle 4. ſçauoir la ligne B C, de l'vn, ſur B C, de l'autre, feront la figure D B C F: cela eſtant bien entendu, la demonſtration ſera facile, comme s'enſuit.

D'autant que le coſté A B, eſt égal au coſté A C, par l'hypotheſe, & A D, égal à A F, par la conſtruction, les deux coſtez C A, A D, du triangle C A D, ſeront égaux aux deux coſtez B A, A F, du triangle B A F, chacun au ſien, & l'angle A, contenu

contenu d'iceux coſtez, commun, [i] la baſe B F, ſera egale à la baſe C D, & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au ſien : ſçauoir, A B F, égal à A C D, & l'angle D, égal à l'angle F. Et d'autant que la toute A D, eſt monſtrée egale à A F, ſi l'on oſte d'icelles les egales A B, A C, [k] le reſte B D, ſera égal au reſte C F : mais D C, eſt monſtrée egale à F B. Donc les deux coſtez B D, D C, ſont égaux aux deux C F, F B, chacun au ſien, & l'angle D, monſtré égal à l'angle F, leſquels ſont contenus d'iceux coſtez, & la baſe B C, commune, [l] tout le triangle D B C, ſera égal à tout le triangle F C B, & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au ſien : ſçauoir, l'angle D B C, égal à l'angle F C B, & l'angle D C B, égal à l'angle F B C : mais les angles A B F, & A C D, ſont monſtrez égaux aux premiers triangles A B F, A C D : donc ſi l'on retranche d'iceux les angles égaux D C B, & F B C, les angles [m] A B C, A C B, qui reſteront ſur la baſe B C, ſeront égaux entr'eux : & les angles D B C, & F C B, ſous la baſe B C, ſont auſſi demonſtrez égaux entr'eux. Donc les angles ſur la baſe & ſous la baſe, ſont égaux entr'eux. Partant des triangles Iſoſceles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

i 4. *prem.*

k 3. *conſ.*

l 4. *Prem.*

m 3. *com. ſ*

SCHOLIE.

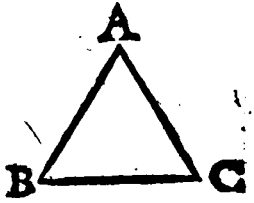
Il eſt manifeſte que le meſme aduiendra aux triangles Equilateraux, encore qu'Euclide ſemble auoir extendu ſa propoſition, des triangles Iſoſceles ſeulement. Car les deux coſtez A B, A C, eſtans égaux entr'eux, au triangle A B C, ſoit que le 3. B C, ſoit égal à chacun d'iceux, comme il aduient au

triangle

triangle Equilatere, ou inegal, comme au triangle Isoscele : l'on monstrera par la susdite demonstration, que tant les angles sur la base, que sous la base, soit égaux entr'eux.

COROLLAIRE.

De cette 5. Proposition il s'ensuit pareillement que tout triangle equilateral est equiangle, c'est à dire, que les trois angles de quelconque triangle equilateral, sont égaux entr'eux. Car soit le triãgle equilateral A B C: D'autant que les deux costez A B, A C, sont egaux, [n] les deux angles B & C, sur la base B C, seront égaux. Semblablement, d'autant que les deux costez A B, B C, sont égaux, les deux angles A, & C, sur la base A C, seront égaux: partant, tous les trois angles A, B, & C, seront égaux, ce qu'il falloit demonstrer.



n 5. *Premier.*

THEOREME 3. PROP. 6.

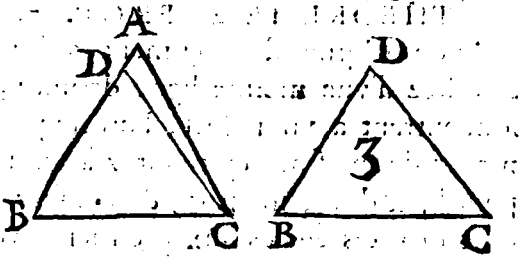
Si deux angles d'vn triangle sont égaux entr'eux, les costez soustendans iceux angles égaux, seront aussi égaux entr'eux.

Soit le triangle A B C, ayant l'angle B, égal à l'angle A C B. Ie dis que le costé A B, opposé à l'angle A C B, est égal au costé A C, opposé à l'angle B.

Car s'il est inegal, l'vn d'iceux sera plus grand: soit donc A B plus grand, s'il est possible, & soit retranchée [o] D B, egale à A C, & menée D C: D'autant

o 3. *Prem.*

D'autant que D B, est egale à A C, & B C, commune, les deux costez D B, B C, du triangle D B C,



seront égaux aux deux costez A C, C B, du triangle A C B, chacun au sien, & l'angle B, est égal à l'angle A C B, par l'hypothese, P la base A B, sera égale à la base D C, & tout le triangle D B C, égal à tout le triangle A C B, la partie égale à son tout, ce qui est absurde : partant A B, ne sera inegal à A C. Donc si deux angles d'vn triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

P 4. premier.

Il faut entendre icy deux triangles appliquez l'vn sur l'autre, comme par exemple : si le triangle D B C, marqué par 3, estoit posé sur le triangle A B C.

COROLLAIRE.

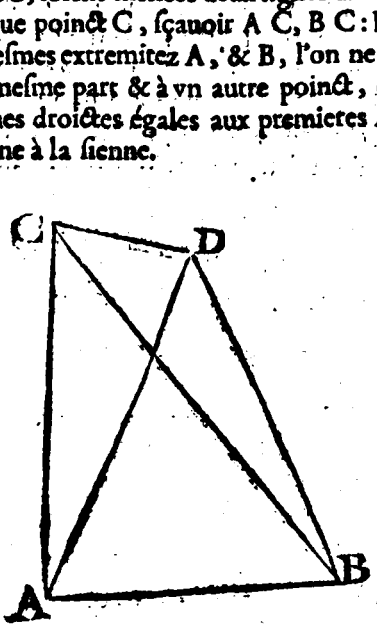
Il s'ensuit de cette proposition que tout triangle equiangle, c'est à dire, duquel tous les angles sont égaux entr'eux, est equilateral. Car puis qu'il a esté demonstré, que d'autant que les angles B, & C, sont égaux ; les costez soustendans A B, A C, sont aussi égaux : on conclura de mesme, que puis que A, & B, sont égaux, les costez soustendans A C, C B, seront aussi égaux, & ainsi des deux autres, &c.

Donc les trois costez seront égaux : & partant le triangle est equilateral.

THEOREME 4. PROP. 7.

Si deux lignes droictes menées des extremitez d'vne mesme ligne droicte, se rencontrent à vn poinct, l'on ne pourra mener des mesmes extremitez à vn autre poinct, & de mesme part, deux autres lignes droictes égales aux premieres, chacune à la sienne.

Soit la ligne droicte A B, des extremitez de laquelle A, & B, soient menées deux lignes droictes, à quelconque poinct C, sçauoir A C, B C : Ie dis que des mesmes extremitez A, & B, l'on ne peut mener de mesme part & à vn autre poinct, deux autres lignes droictes égales aux premieres A C, B C, chacune à la sienne.



Il est tres certain que du poinct A, vers C, à vn

autre

autre poinct, comme D, l'on peut mener vne ligne égale à A C, mais la ligne menée de B, au meſme poinct D, ne ſera égale à B C. Pareillement de B, on peut mener vne ligne égale à B C, de meſme part, à quelqu'autre poinct : mais la ligne menée de A, au meſme poinct, ne ſera égale à A C.

Soit donc menée [q] A D, égale à A C, de meſme part, & ſoit coniointe B D : ie dis que B D, ne peut eſtre égale à B C : car ayant mené C D, la figure A C D, ſera vn triangle Iſoſcele, A C, A D, eſtans égales par la conſtruction : [r] donc l'angle A C D, ſera égal à C D A, ſur la baſe C D ; mais l'angle B C D, eſt moindre que A C D, la partie que ſon tout. [ſ] Il ſera donc auſſi moindre que C D A, qui eſt monſtré égal à A C D, & partant, encore bien moindre que le tout C B D : mais ſi la ligne B D, eſtoit auſſi égale à la ligne B C, le triangle B C D, ſeroit encore Iſoſcele : & partant [t] l'angle B C D, ſeroit égal à l'angle C D B, ſur la baſe C D, mais B C D, eſt monſtré bien plus petit que C D B, il ſeroit donc égal & bien plus petit, ce qui eſt impoſſible : Donc B D, ne ſera égale à B C : ce qu'il falloit demonſtrer.

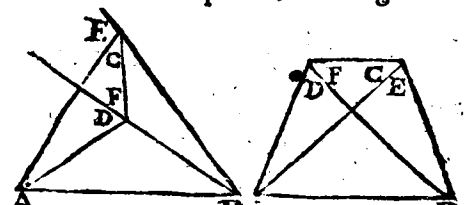
q 2. 1.

r 5. 1.

ſ 9. c.ſ.

t 5. 1.

Et ſi du poinct B, l'on menoit vne ligne égale à B C, à vn autre poinct que C, & de meſme part, l'on mõſtrera par le meſme diſcours que la ligne menée du poinct A, au meſme poinct, ne ſera égale à A C.



Nous auons adiousté cette premiere demonstration, à cause qu'elle est plus facile que toutes les autres.

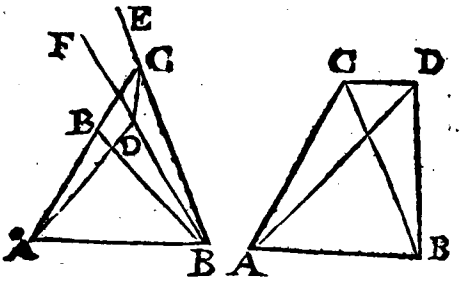
Autrement, s'il est possible, des extremitez A, & B, soient menées A D, B D, à vn autre poinct D, vers C, égales aux premieres A C, B C, chacune à la sienne, sçauoir A D, égale à A C, ayant mesme extremité A, & B D, égale à B C, ayant mesme extremité B, & soit coniointe D C; & si le poinct D, est dans le triangle (comme en la 1 figure) soient prolongées B C, B D, directement, de la part de E, & F, tant qu'il sera expedient.

D'autant que la ligne B D, est posée égale à B C, l'angle F, seul, sera égal à C E, pris pour vn seul angle, v. 5. 1. puis qu'ils sont tous deux sous la base D C, du triangle B D C, en la 1 figure, ou dessus en la 2. figure. Mais tout l'angle E C, est plus grand que x 9. c. 5. l'angle C, tout seul, x le tout que sa partie: donc l'angle F, sera aussi plus grand que l'angle C. Derechef, puis que la ligne A C, est posée égale à la ligne A D, l'angle C, seul sera égal à F, & D, pris y 5. 1. pour vn seul angle y puis qu'iceux angles C, & F, D, sont sur la base D C, du triangle A D C: mais nous auons monstré que l'angle F, est plus grand que l'angle C: donc le mesme angle F, sera aussi plus grand que l'angle F, D, la partie que son tout, ce qui est impossible. Donc sur, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Les autres Interpretes demonstrent autrement cette Proposition, comme s'ensuit.

Soit faicte la mesme construction de la precedente figure: puis que A D, est posée égale à A C, z 5. 1. z les deux angles A D C, A C D, sur la base D C, du triangle A D C, seront égaux entr'eux: mais

l'angle



l'angle A D C, est plus grand que l'angle F D C, le tout que sa partie, donc l'angle A C D, égal à A D C, sera aussi plus grand que F D C: & partant l'angle total E C D, qui est plus grand que A C D, sera encor bien plus grand que F D C. Derechef, d'autant que la ligne B D, est posée égale à B C, [a] les deux angles E C D, F D C, sous la base D C, du triangle B C D, seront égaux entr'eux: mais l'angle E C D, a esté demonstré bien plus grand que F D C; il sera donc égal & bien plus grand, ce qui est impossible. a 5. *com. s.*

Finalement, d'autant que A D, A C, sont posées égales (soit veuë la derniere figure, où le poinct D, est hors le triangle) les deux angles [b] A C D, A D C, sur la base C D, du triangle A C D, sont égaux entr'eux: mais l'angle A C D, est plus grand que B C D, [c] le tout que sa partie: donc A D C, sera aussi plus grand que B C D, & partant l'angle B D C, qui est plus grand que A D C, sera encore bien plus grand que B C D. Derechef, puis que B C, B D, sont posées égales, les deux angles B C D, B D C, sur [d] la base C D, du triangle B C D, seront égaux entr'eux, mais nous auons monstré que l'angle B D C, est bien plus grand que l'angle B C D, il sera donc égal à iceluy, & bien plus grand; ce qui est impossible. Mais si l'on dit que le poinct D, b 5. 1. c 9. *com. s.* d 5. 1.

eſt en vne des lignes A C, B C, comme au poinct D, en la ligne A C, (où eſt tirée la ligne B D, denotée par poincts) cela eſtant, il s'enſuiura, comme dit eſt, que la partie A D, ſera égale à ſon tout A C, ce qui eſt auſſi impoſſible. Donc ſur vne meſme ligne, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

D'icy il s'enſuit qu'ayant mené deux lignes des extremitez d'vne ligne droite à vn meſme poinct, comme, A C, & B C, ſi des meſmes extremitez l'on en mene deux autres égales aux deux premieres, chacune à la ſienne ; de meſme part, elles ſe rencontreront au meſme poinct, eſtans inclinées l'vne à l'autre, comme il eſt manifeſte par les figures precedentes.

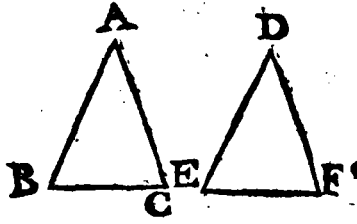
THEOREME 5. PROP. 8.

Si deux triangles ont deux coſtez égaux à deux coſtez, chacun au ſien ; & qu'ils ayent la baſe égale à la baſe, ils auront auſſi l'angle contenu d'iceux coſtez égaux, égal à l'angle.

Soient les deux triangles A B C, D E F, ayans les deux coſtez A B, A C, égaux aux deux D E, D F, chacun au ſien, ſçauoir A B, égal à D E, & A C, égal à D F, & la baſe B C, égale à la baſe E F. Ie dis que l'angle A, eſt égal à l'angle D, leſquels angles ſont contenus d'iceux coſtez égaux.

Car ſi l'on entend que le triangle A B C, ſoit poſé ſur le triangle D E F, ſçauoir le poinct B, ſur le

le poinct E, & la baſe B C, ſur la baſe E F, le poinct C, conuiendra au poinct F, [e] puis que B C, E F, ſont egales, & les deux lignes droictes B A, & C A, conuiendront ſur les deux E D, F D, eſtans égales à [f] icelles chacune à la ſienne, & le poinct A, ſur le poinct D, & partant l'angle A, ſera égal à l'angle D. Autrement elles ſe rencontreroient à vn autre poinct, ce qui eſt impoſſible, [g] puis que ſi deux lignes droictes menées des extremitez d'vne autre ligne droicte, ſe rencontrent à vn poinct, &c. Donc A, ſera égal à D. Donc ſi deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



[e] 8. *comm. ſ.*

[f] 8. *comm. ſ.*

[g] 7. *Prem.*

COROLLAIRE.

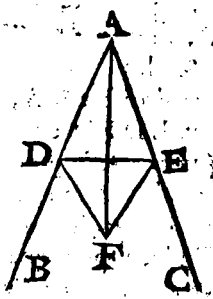
L'on peut colliger de cette Propoſition, que les autres angles ſont auſſi égaux aux autres angles chacun au ſien, & tout le triangle, à tout le triangle. Car puis que l'angle A, eſt monſtré égal à l'angle D, les coſtez A B, A C, eſtans égaux à D E, D F, chacun au ſien, il s'enſuit [h] que le triangle eſt égal au triangle, & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au ſien.

[h] 4. *Prem.*

PROBLEME 4. PROP. 9.

Couper vn angle rectiligne donné, en deux egalement.

Soit l'angle rectiligne donné B A C, qu'il faut diuiser en deux egalement, c'est à dire, en deux angles égaux. Soit pris le poinct contingent D, en la ligne A B, & de la plus grande A C, prolongée infiniment [i] soit retranchée A E, egale à A D, & menée D E, [k] sur laquelle soit descrit le triangle equilateral D F E, & menée A F. Ie dis que l'angle B A C, est diuisé en deux angles égaux. Car d'autant que E A, a esté prise égale à A D, & A F, est commune, les deux costez D A, A F, sont égaux aux deux E A, A F, chacun au sien, & la base D F, égale à la base E F, estans les costez d'vn triangle equilateral, [l] l'angle D A F, sera égal à l'angle E A F: & partant l'angle B A C, sera diuisé en deux egalement. Donc l'angle rectiligne, &c. Ce qu'il falloit faire.



i 2. *Prem.*

k 1. *Prem.*

l 8. *Prem.*

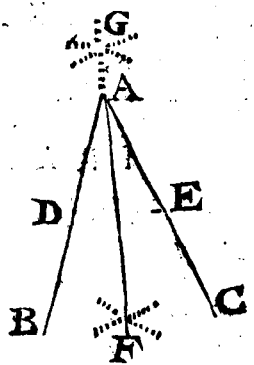
PRACTIQVE.

La pratique de cette Proposition se peut faire ainsi. Soit l'angle B A C, à diuiser en deux egalement: du poinct A, comme centre à quelconque interualle, soient coupées A D, A E, egales, puis des points D, & E, comme centres, du mesme interualle ou moindre, ou plus grand, comme il sera plus expedient, soient

soient descrits deux arcs s'entre-coupans au poinct F, au dessous du poinct A, vers B, & C, ou au dessus vers G, puis soit menée la droite ligne A F, ou G A F, laquelle diuisera l'angle B A C, en deux egalement. Voyez la suiuante figure.

SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus, que l'on peut diuiser tout angle rectiligne en 4. 8. 16. 32. ou 64. parties egales, & ainsi de suite, procedant par augmentation double. Car apres que l'on a diuisé vn angle rectiligne en deux angles égaux, faut derechef diuiser chacun d'iceux en deux egalement, & l'on aura quatre angles égaux, & faire ainsi de suite.

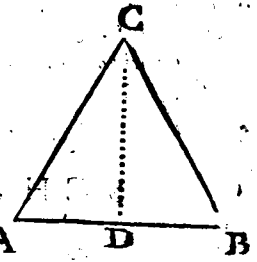


PROBLEME 5. PROP. 10.

Couper vne ligne droicte donnée & terminée, en deux parties egales.

Soit la ligne droite donnée & terminée A B, qu'il faut diuiser en deux egalement.

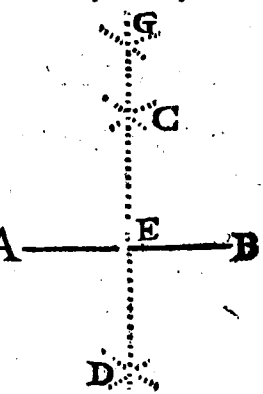
Sur icelle A D, soit [m] descrit le triangle equi- [m] 1. *Prem.* lateral A B C, puis soit diuisé l'angle [n] A C B, en [n] 9. *Prem.* deux egalement, par la ligne droicte C D. Ie dis que A B, est diuisée en deux egalement au poinct D.



Car d'autant que A C, est égale à C B, (car elles sont les costez d'vn triangle equilateral,) & C D, est commune, les deux costez A C, C D, sont égaux aux deux B C, C D, chacun au sien, & l'angle A C D, égal à l'angle B C D, par la 04. *Prem.* construction, la base A D,* sera égale à la base B D: partant A B, sera diuisée en deux egalement. Ce qu'il falloit faire.

PRACTIQVE.

Pour diuiser A B, en deux egalement, des poincts A, & B, comme centres, en ouurant le compas, en sorte que l'ouuerture excede la moitié de la ligne A B, soient descrits deux arcs s'entrecoupans au poinct C, au dessus de la ligne: semblablemẽt des mesmes centres & à mesme interualle, soient descrits deux autres arcs au dessous de A B, s'entre-coupans au poinct D, & soit menée la droicte ligne C D, elle coupera A B, en deux egalement au poinct E: Ou bien apres auoir descrit deux arcs s'entre-coupans au poinct C, des centres A & B, des



mesmes

meſmes centres, & à plus grande interualle que le premier, ſoient deſcrits deux autres arcs au deſſus de C, s'entre-coupans au poinct G, & ſoit menée la droicte ligne G C E, elle coupera A B, au meſme poinct E.

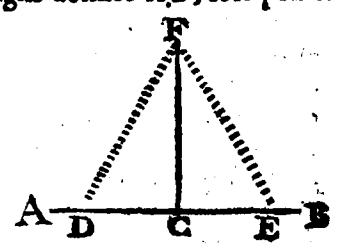
SCHOLIE.

Il eſt manifeſte qu'en la meſme maniere l'on peut diuiſer la ligne droicte A B, en quatre parties, puis en huict, & ainſi conſequemment, comme nous auons dit en la Propoſition precedente, de la diuiſion de l'angle.

PROBLEME 6. PROP. 11.

Sur vne ligne droicte donnée, & d'vn poinct donné en icelle, mener vne ligne droicte, à angles droicts.

Soit la droicte ligne donnée A B, & le poinct dõné en icelle C, il faut du poinct C, mener vne ligne droicte & à angles droicts, à la ligne donnée A B.



En la partie A C, ſoit pris le poinct contingent D, puis ſoit poſée ou priſe p C E, égale à C D, puis ſur D E, ſoit q deſcrit le triangle equilateral D F E, & ſoit menée C F. Ie dis qu'icelle eſt à angles droicts à la ligne A B.

p 2. *ou* 3. *Premier.*

q 1. *Prem*

Car

Car d'autant que C D, eſt égale à C E, & C F, commune, les triangles D C F, & E C F, auront les deux coſtez D C, C F, égaux aux deux coſtez F C, C F, chacun au ſien, & les baſes D F, E F, égales, eſtans les coſtez d'vn triangle equilateral, les angles au poinct C, ſeront égaux : donc l'vn & l'autre ſera droict, partant C F, ſera à angles droicts à A B. Donc ſur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

r 8. *Prem.*

ſ 10. *def.*

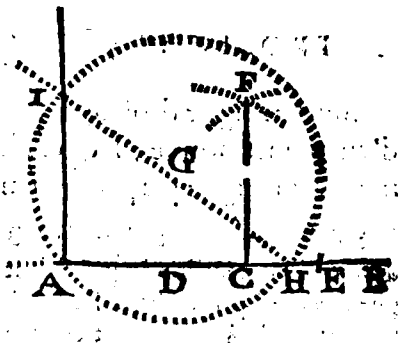
SCHOLIE.

Clauius dit, qu'ayant pris le poinct D, en la ligne A C, il faut retrancher C E, égale à C D, par la 3. Prop. du 1. ce qui ne ſe pourra pas touſiours faire, attendu que la reſtante C B, peut eſtre moindre que la ligne C D, priſe, ou que le poinct donné C, peut eſtre le meſme qu'vn de ceux de l'extremité A, ou B, mais Theon, faict mieux ainſi ; εἰλήφθω ὁπὶ τὸ α κ, τυχὸν σημεῖον, τὸ δ' χ κείσθω τῇ κ δ ἴση ἡ κ ε χ συνεςάτω ὁπὶ τὸ δ ε τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ φ δ ε χ ἐπεζεύχθω ἡ φ κ, &c. C'eſt à dire, ſoit pris le poinct contingent, ou à l'aduenture D, en la ligne C A, & ſoit poſée C E, égale à C D ; & ſur D E, ſoit conſtitué le triangle equilateral F D E, & conioint F C, &c. Or quand Theon dit, ſoit poſée C E, égale à C D, faut entendre, ſoit priſe égale, ou prolongée, s'il eſt beſoin, &c. Et Henrion dit, du poinct C, ſoient priſes les deux lignes égales C D, C E, par la troiſieſme Propoſition, ce qui ne ſe pourra pas auſſi touſiours faire, pour les raiſons ſuſdites.

t 2. 1.

La pratique de cette Propoſition ſe fera comme s'enſuit : Si ſur la ligne A B, on veut mener vne ligne à angles droicts : du poinct C, en icelle ſoient priſes

prises de part & d'autre pariers égales C E, C D, & des poincts D, & E, comme centres, soient



descrits deux arcs s'entre-coupans au poinct F, à telle interualle que l'on voudra, pourueu qu'il excede D C, ou E C, puis soit menée C F, icelle sera à angles droits à A B.

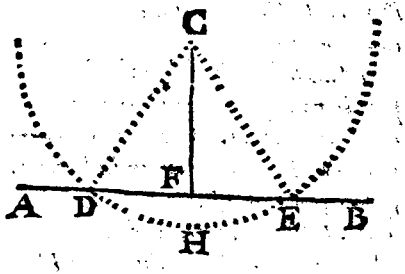
Mais si le poinct donné est à l'extremité A, soit prins le poinct G, hors la ligne, en sorte toutefois que le cercle descrit du poinct G, comme centre & de l'interualle G A, puisse couper la ligne donnée à quelque poinct, comme H, & soit descrit la circonference I A H, du centre G, & de l'interualle G A, coupant A B, au poinct H, & du poinct H, par G, soit menée la ligne H G I, coupant la circonference au poinct I, puis soit menée la droicte ligne A I, icelle sera à angles droits, comme il sera demonstré a la 31. Prop. du 3. liu. Et encore que A, ne fust le poinct de l'extremité (ce qui aduiendroit, si la ligne estoit prolongée comme à K,) en la mesme maniere l'on meneroit A I, à angles droicts.

PRO.

PROBLEME 7. PROP. 12.

Sur vne ligne droicte donnée & infinie, d'vn poinct donné, lequel n'eſt en icelle; mener vne ligne perpendiculaire.

Soit la ligne droicte donnée A B, & le poinct donné C, hors icelle; duquel il faut mener vne ligne droicte, perpendiculaire ſur A B. Soit pris de l'autre part de A B, le poinct contingent H. Et du poinct C, comme centre, & à l'interualle C H, ſoit deſcrit le cercle D E, coupant A B, aux poincts D, & E, puis ſoit v diuiſée D E, en deux egalement au poinct F, & ſoit menée C F, & C D, C E. Ie dis que C F, eſt perpendiculaire à A B.



v 10. 1.

Car d'autant que D F, eſt égale à E F, par la conſtruction, & F C, commune, les deux coſtez D F, F C, du triangle D F C, ſont égaux aux deux coſtez E F, F C, du triangle E F C, chacun au ſien, & la baſe C D, égale à la baſe C E, eſtans toutes deux menées du centre C, à la circonference, x les angles de part & d'autre au poinct F, ſeront égaux, y & partant l'vn & l'autre droict. Donc C F, eſt menée perpendiculaire à A B. Ce qu'il falloit faire.

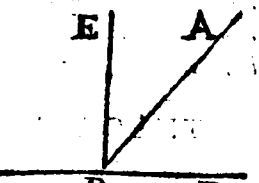
x 1. 8.

y 10. *def.*

THEO

THEOREME 6. PROP. 13.

Quand vne ligne droicte tombant sur vne ligne droicte, faict angles, ou elle fera deux angles droicts, ou égaux à deux droicts.



Que la ligne droicte A B, tombant sur C D, faſſe deux angles A B D, A B C. Ie dis qu'iceux ſont droicts ou égaux à deux droicts.

Car ſi l'angle A B D, eſt égal à A B C, [z] ils ſeront tous deux droicts, s'il eſt inegal, [a] ſoit menée B E, à angles droicts à C D, donc E B D, & E B C, ſeront droicts. Or d'autant que les deux angles D B A, & A B E, ſont [b] égaux au droict E B D, toutes les parties priſes enſemble à leur tout, [c] ſi on adiouſte le commun, E B C, les trois D B A, A B E, & E B C, ſeront égaux aux deux droicts, D B E, & E B C. Derechef, d'autant que l'angle A B C, eſt égal aux deux A B E, E B C, le tout à toutes ſes parties priſes enſemble. Si on adiouſte le commun D B A, les deux angles D B A, & A B C, ſeront égaux aux trois D B A, A B E, & E B C: mais ces trois ont eſté monſtrez égaux à deux droicts: donc D B A, & A B C, ſeront auſſi égaux à deux droicts. Donc, quand vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

z 10. *def.*
a 11. 1.
b 9. *com. ſ.*
c 2. *com. ſ.*

SCHOLIE.

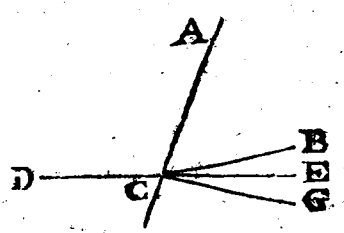
SCHOLIE.

Cette Propoſition ſemble dependre de quelque commune notion de l'eſprit. Car de ce que l'angle A B C, excede l'angle droit E B C, le reſte A B D, eſt excedé d'autant par l'angle droit E B D. Car comme en celuy-là l'excez eſt l'angle A B E, ainſi en celuy-cy le defaut eſt le meſme angle A B E, parquoy l'on pourra conclure de là, qu'ils ſont égaux à deux droicts, attendu que l'excez de l'vn, eſt le defaut de l'autre.

THEOREME 7. PROP. 14.

Si à quelque ligne droite, & à vn poinct en icelle, ſont menées deux lignes droictes, non de meſme part, faiſant les angles de part & d'autre égaux à deux droicts: icelles lignes droictes ſe rencontreront directement.

Soit la droicte ligne A B, & le poinct en icelle C, auquel ſoient menées les droictes lignes D C, E C, de part & d'autre de A B, faiſant les angles D C A, & A C E, égaux à deux droicts. Ie dis que D C, & E C, ſe rencontrent directement, c'eſt à dire, que D C E, eſt vne ligne droicte: autrement D C, eſtant prolongée vers E, tomberoit



tomberoit au dessus de C E, ou au dessous : qu'elle tombe donc premierement au dessus, s'il est possible, comme au poinct F, en sorte que D C F, soit ligne droicte.

D'autant que la droicte ligne A C, tombant sur la droicte D C F, fait les deux angles D C A, & A C F, [d] iceux seront droicts ou égaux à deux droicts : mais les deux D C A, & A C E, sont égaux à deux droicts par l'hypothese, & tous [e] les angles droicts sont égaux entr'eux : donc les deux angles D C A, & A C F, sont égaux aux deux angles D C A, & A C E, ostant donc le commun D C A, [f] restera A C F, égal à A C E, la partie à son tout [g] cé qui est impossible. La mesme absurdité arriuera si l'on veut dire que D C, estant prolongée, tombe au dessous de C E, comme au poinct G : Partant D C, & E C, se rencontreront directement. Donc si à quelque ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

d 13. *Prem.*
e 10. *com. s.*
f 3. *c. s.*
g 9. *com. s.*

SCHOLIE.

Cette Proposition est la conuerse de la precedente, où il a esté monstré que si D C E, est ligne droicte, les angles A C D, A C E, sont égaux à deux droicts : En celle-cy il est monstré que si les angles susdits sont égaux à deux droicts, que les deux lignes droictes D C, E C, sont vne seule ligne droicte.

COROLLAIRE 1.

Il s'ensuit de cette Proposition, que deux lignes droictes se rencontrans indirectement, n'ont pas vn mesme commun segment, c'est à dire vne mesme partie commune, comme à F C, & E C, qui se rencontrent indirectement au poinct C, la ligne

D C, ne pourra pas estre commune à C E, C F, c'est à dire, que D C, C E, faisans vne ligne droicte, D C, C F, ne feront pas aussi vne ligne droicte; car autrement si tant D C E, que D C F, estoit vne ligne droicte, comme nous venons de demonstrer, l'angle A C F, seroit égal à l'angle A C E, la partie au tout, ce qui est impossible.

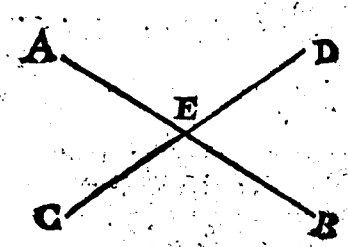
COROLLAIRE 2.

Il s'ensuit encore que deux lignes droictes se rencontrans indirectemẽt à vn poinct, si elles sont toutes deux prolongées, elles s'entre-couperont necessairement estans prolongées de la mesme part où elles se rencontrent: comme si les lignes E C, F C, qui se rencontrent au poinct C, sont prolongées, à sçauoir E C, directement elle tombera au poinct D, comme il est monstré; mais si F C, est aussi prolongée de la part de C, elle coupera la ligne E C, prolongée à D, c'est à dire, tombera au dessous de C D: car autrement F C, tomberoit sur C D, & partant E C, F C, auroient vn mesme commun segment, ce qui est monstré impossible: & si on vouloit dire que F C, prolongée tombast au dessus de C D, il s'ensuiuroit encore la mesme absurdité que cy-deuant: sçauoir que la partie seroit égale à son tout; ce qui est impossible. Et ce que nous venons de demonstrer icy, sont les deux premieres pretenduës maximes, des huict, que Clauius & autres auoient adiousstées à celles d'Euclide; cinq desquelles nous auons demonstrées à la seconde Proposition, & l'autre qui reste est demonstrée à la 5. du 5. liure. Voila donc comment ils ont voulu prendre pour Notions anticipées, ce qu'Euclide demonstre

demonſtre par apres. En noſtre premiere Edition nous auions remarqué ſeulement quelques-vnes des fautes commiſes par le Copiſte, tant à cette Propoſition qu'ailleurs cy-apres, leſquelles il a corrigées en ſa troiſiéme Edition des ſix premiers liures, comme nous luy auons monſtré : parquoy nous ne les repeterons icy.

THEOREME 8. PROP. 15.

Si deux lignes droictes ſe coupent l'vne l'autre, elles feront les angles oppoſez, au ſommet égaux entr'eux.



Soiét les deux lignes droictes A B, C D, s'entre-coupãtes au poinct E : Ie dis qu'elles font les angles au ſommet égaux entr'eux, à ſçauoir l'angle A E D, égal à l'angle C E B, & A E C, égal à B E D.

D'autant que D E, tombe ſur A B, les deux angles A E D, D E B, [h] ſeront égaux à deux droicts. [h] 13. *Prem.* Derechef, d'autant que B E, tombe ſur C D, les deux angles C E B, B E B, par la meſme raiſon ſeront égaux à deux droicts, & tous les angles droits ſont égaux [i] entr'eux : donc les deux A E D, D E B, ſeront [i] 10. *com. ſ.* égaux aux deux C E B, B E D : donc ſi l'on oſte l'angle commun D E B, [k] reſtera l'angle A E D, égal à [k] 3. *com. ſ.* C E B. Semblablement l'on monſtrera que l'angle A E C, eſt égal à l'angle D E B. Donc, ſi deux lignes droites ſe coupent, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE 1.

Euclide collige de la demonſtration de ce Theoreme, (ſelon la ſentence de Proclus) que deux lignes droictes ſe coupans l'vne l'autre font quatre angles égaux à quatre droicts: car il a eſté demonſtré que tant les deux angles A E D, D E B, que les deux A E C, C E B, ſont égaux à deux droicts par la treiziéme. Donc les angles conſtituez au poinct E, vaudront deux fois deux droicts: partant égaux à quatre droicts.

COROLLAIRE. 2.

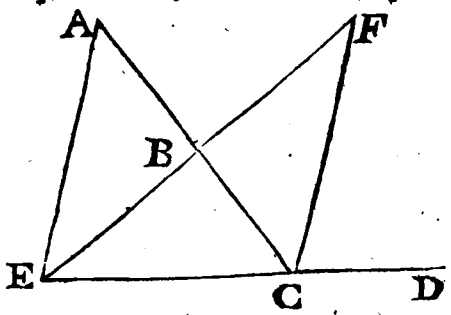
Par la meſme raiſon nous colligerons que tous les angles conſtituez à vn meſme poinct, ſont tant ſeulement égaux à quatre angles droicts. Car ſi du poinct E, en la precedente figure, l'on mene tant de lignes droictes que l'on voudra, les quatre angles conſtituez au poinct E, ſeront diuiſez en plu-
1 *Cor.* 3. 1. lieurs parties, leſquelles ſont égales [1] à leurs touts, priſes enſemble. Donc ces quatre eſtans égaux à quatre droits, par le 1. Corollaire, toutes leurs parties priſes enſemble ſeront pareillement égales à quatre droits. D'où il eſt manifeſte que tout eſpace conſtitué en vn plan à l'entour de quelque poinct, vaut quatre angles droicts, comme il eſt manifeſte, d'autant que tous les angles qui peuuent eſtre conſtituez à l'entour de ce poinct, ſont égaux à quatre droicts. Semblablement, il eſt manifeſte que tant de lignes que l'on voudra, s'entre-coupantes, feront les angles au poinct de la ſection, égaux à quatre droicts.

THEO

THEOREME 9. PROP. 16.

De tout triangle, vn costé estant prolongé, l'angle exterieur est plus grand que chacun des interieurs & opposez.

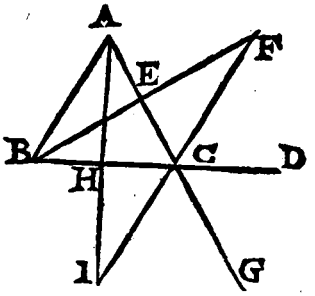
Au triangle A B C, le costé B C, soit prolongé au poinct D. Le dis que l'angle exterieur A C D, est plus grand que chacun des interieurs & opposez, sçauoir est, plus grand que C A B, & semblablement plus grand que C B A.



Car soit coupé le costé A C, en deux [m] egalement au poinct E, & par E, soit menée B E F, & soit faite [n] E F, égale à E B, & iointe F C. m 10. *Premier.* n 2. *Prem.*

D'autant que A E, est égale à E C, & E F, à E B, par la construction, les deux costez A E, E B, du triangle A E B, seront égaux aux deux F E, E C, du triangle F E C, chacun au sien, & les angles au sommet E, contenus d'iceux costez [o] sont égaux, la base A B, sera égale à la base [p] F C, & tout le triangle à tout le triangle, & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au sien, contenus d'iceux costez égaux, sçauoir E C F, égal à E A B. Mais le tout [q] A C D, est plus grand que E C F, il sera donc [q] aussi o 15. *Prem.* p 4. *Prem.* q 9. *c. s.*

auſſi plus grand que ſon égal E A B. Semblablement, ayant coupé B C, en deux egalement au poinct H, comme en la derniere figure, & mené A H I, en ſorte que H I, ſoit égale à H A, & ioint C I, & prolongé le coſté A C, au poinct G, l'on monſtrera que l'angle exterieur B C G, eſt plus grand que l'interieur, & oppoſé A B C ; & partant A C D, qui eſt [r] égal à B C G, ſera auſſi plus grand que A B C. Donc de tout triangle vn coſté, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



r 15. p.

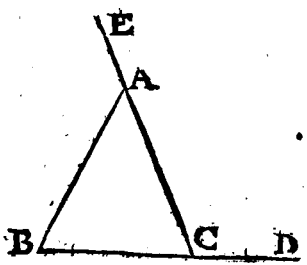
Le Copiſte dit en cette Propoſition : *l'Angle exterieur eſt plus grand que l'vn ou l'autre des oppoſez interieurs :* au lieu de dire comme Euclide; *l'Angle exterieur eſt plus grand que chacun des interieurs & oppoſez :* ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, μείζων ἐστὶ. Donc Euclide vſe de ce mot ἑκάτερος, qui ſignifie l'vn & l'autre, ou chacun des deux, & non pas de ce mot ὁποτερουοῦν, qui ſignifie l'vn ou l'autre, ou lequel que l'on voudra. Car Euclide n'entend pas que l'angle exterieur ſoit plus grand ſeulement que l'vn ou l'autre, ou lequel que l'on voudra des interieurs & oppoſez : mais plus grand que l'vn, & auſſi plus grand que l'autre, chacun pris à part : & diſant qu'il eſt plus grand que l'vn ou l'autre, l'on peut dire qu'eſtant plus grand que l'vn, il ne ſera pas donc auſſi plus grand que l'autre. Ie diray encore icy qu'Euclide n'a

point

point fait mention d'angle exterieur en ce liure, iusques à cette 16. Propoſition, & neantmoins ledit Copiſte met ainſi la fin de la 5. Propoſition. *Les angles exterieurs ſous la baſe ſont égaux:* Et Euclide dit; αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Les angles ſous la baſe ſeront égaux entr'eux: donc au lieu de ce mot, entr'eux, le Copiſte met, exterieurs, ce qui n'eſt aucunement à propos, ny conforme au texte Grec ny Latin: car ce mot (exterieur) eſt relatif à (interieur) dont il n'eſt icy fait mention, attendu que ces angles ſous la baſe, dont eſt queſtion, ſont dits abſolument égaux entr'eux, ſans les referer à aucun autre.

THEOREME 10. PROP. 17.

De tout triangle, deux angles ſont plus petits que deux droicts, de quelque façon qu'ils ſoient pris.



Soit le triangle A B C: Ie dis, que deux des angles d'iceluy, ſont plus petits que deux droits, de quelque façon qu'ils ſoient pris.

Car premierement le coſté B C, eſtant prolongé au poinct D, l'on monſtrera que les deux angles B, & A C B, ſont moindres que deux droicts.

D'autant que l'angle exterieur A C D, eſt plus
f 16.p. grand que f l'oppoſé interieur B. Si l'on adiouſte
t 4.ſ. le commun angle A C B, t les deux A C D, & A C B, ſeront plus grands que B, & A C B : mais
v 13.ſ. A C B, & A C D ſont égaux v à deux droicts : donc B, & A C B, ſont plus petits que deux droicts. Semblablement, le coſté C A, eſtant prolongé au poinct E, l'on monſtrera que C A B, & A B C, ſont plus petits que deux droicts, &c. Donc de tout triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

DE PROCLVS.

Il eſt manifeſté de ce Theoreme, que l'on ne peut mener d'vn meſme poinct plus d'vne ligne droicte perpendiculaire, ſur vne meſme ligne droicte. Car ſi faire ſe peut ſoient menées du poinct A, à la ligne B C, deux perpendiculaires A B, A C, les deux angles internes B, & C, du triangle A B C, ſeront égaux à deux droits, l'vn & l'autre eſtant droit, ce qui eſt
x 17.Prem. *abſurde.* x *Car nous auons monſtré que deux angles de tout triangle, de quelque façon qu'ils ſoient pris, ſont moindres que deux droits. Donc l'on ne pourra mener plus d'vne ligne perpendiculaire, &c. Ce qui eſtoit propoſé. Voyez le petit triangle de la figure ſuiuante.*

COROLLAIRE 1.

De ces demonſtrations, il s'enſuit auſſi que tout triangle qui a vn angle droit ou obtus, a les autres agus. Car puis qu'il eſt monſtré que deux quelconques angles de tout triangle, ſont moindres que deux droits : il eſt neceſſaire que ſi vn angle eſt droict ou obtus, qu'vn chacun des autres

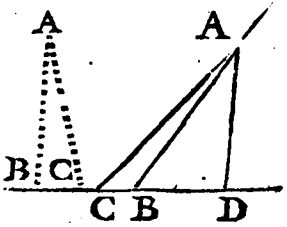
ſoit

ſoit agu, autrement deux angles d'vn triangle ſeroient droicts ou plus grands que deux droicts.

COROLLAIRE 2.

Il s'enſuit auſſi de cette Propoſition, que ſi vne ligne droicte fait deux angles inegaux, auec vne autre ligne droicte, l'vn obtus & l'autre agu, que la ligne perpendiculaire tirée de quelconque poinct d'icelle ſur cét autre, tombera de la part de l'angle agu.

Que A B, faſſe auec C D, deux angles inegaux, ſçauoir A B D, agu & A B C, obtus, & de quelconque poinct A, ſoit menée A D, perpendiculaire à C B. Ie dis que A D, tombera de la part de l'angle agu A B D: autrement qu'elle tombe, s'il eſt poſſible, de la part de l'angle obtus A B C, & ſoit A C. Donc les deux angles, ſçauoir l'obtus A B C, & le droict A C B, au triangle A B C, ſeront plus grãds que deux droits, ce qui eſt abſurde, attendu qu'ils ſont y moindres que deux droicts, donc la perpendiculaire tirée du poinct A, ſur A B, ne tombera de la part de l'angle obtus. Partant elle tombera de la part de l'angle agu.



y 17. *Pre.*

COROLLAIRE 3.

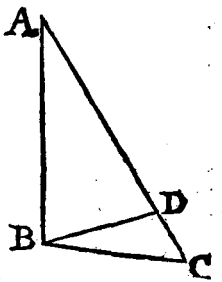
Semblablement, il eſt manifeſte de cette Propoſition que tous les angles d'vn triangle equilateral,

& les deux angles sur la base d'vn triangle Isoscele
z 5. *Prem.* sont agus : car puis z que deux quelconques angles du triangle equilateral, & les deux dessus de la base du triangle Isoscele sont égaux entr'eux : & tant
a 17. *Prem.* a ces deux-là que ces deux-cy, sont moindres que deux droicts, chacun d'iceux sera moindre qu'vn droict, c'est à dire agu. Car si vn estoit droict ou obtus, les deux seroient égaux à deux droicts, ou plus grands que deux droits.

THEOREME 11. PROP. 18.

De tout triangle, le plus grand costé soustient le plus grand angle.

Soit le triangle A B C, ayant le costé A C, plus grand que le costé A B. Ie dis que l'angle A B C, est plus grand que l'angle A C B. Car puis que A C, est plus grand que A B, soit
b 3. *Prem.* retranchée, b A D, égale à A B, & soit iointe B D. D'autant que A B, A D, sont
c 5. 1. égaux ; les c deux angles A B D, A D B, seront égaux : mais l'externe A D B, est
d 16. 2. plus grand d que l'interne, & opposé C, donc son égal A B D, sera aussi plus grand



que C : & partant le tout A B C, encore bien plus grand que l'angle C. Par mesme raison l'on monstrera que l'angle C, est plus grand que l'angle A. Donc de tout triangle le plus, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

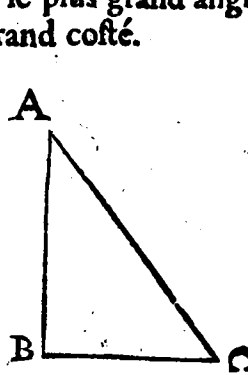
COROL

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cette Propoſition, que les trois angles d'vn triangle Scalene ſont inegaux. Car ſoit le triangle Scalene, duquel le plus grand coſté ſoit A C, le plus petit ſoit B C, & le moyen A B, (ſoit veuë la figure de la Propoſition ſuiuante.) Ie dis que tous les angles d'iceluy ſont inegaux: car puis que le coſté A C, eſt poſé plus grand que le coſté A B, par cette Propoſition l'angle B, ſera plus grand que l'angle C, par la meſme raiſon l'angle C, ſera plus grand que l'angle A, d'autant que le coſté A B, eſt poſé plus grand que le coſté B C. Donc les trois angles ſont inegaux, B, le plus grand, C, le moyen, & A, le plus petit.

THEOREME 12. PROP. 19.

De tout triangle, le plus grand angle eſt ſouſtenu du plus grand coſté.



Soit le triangle A B C, ayant l'angle B, plus grand que l'angle C. Ie dis que le coſté A C, qui ſouſtient l'angle B, eſt plus grand que A B, qui ſouſtient l'angle C. Car s'il n'eſt plus grand, il ſera égal ou plus petit: ſi égal, l'angle B, ſera égal à l'angle C, ce qui eſt abſurde: car B, eſt poſé plus grand. Si le coſté A C, eſt dit eſtre plus petit e 5. *Prem.*

que

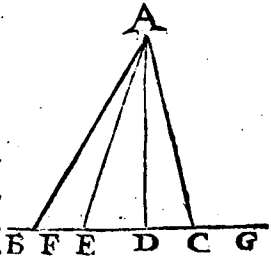
que A B, l'angle B, soustenu du plus petit costé A C, [f] sera plus petit que l'angle C, soustenu [f] du plus grand costé A B, ce qui est plus absurde : car l'angle B, est plus grand que l'angle C, par l'hypothese. Donc le costé A C, sera plus grand que A B. Semblablement, l'on monstrera que le costé A C, est plus grand que le costé B C, posant l'angle B, plus grand que l'angle A. Donc de tout triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

f 18. *Prem.*

COROLLAIRE.

De cette Proposition il s'ensuit, que de toutes les droictes lignes menées d'vn mesme poinct sur vne ligne droicte, celle qui est perpendiculaire est la plus petite.

Car soient menées du poinct A, sur B C, les lignes droictes A D, A E, A F, A C, desquelles A D, soit perpendiculaire à B C. Ie dis qu'icelle est la plus petite : car puis qu'au triangle A D E, les deux angles A D E, & A E D, sont [g] moindres que deux droicts, & A D E, est droict, A E D, sera moindre qu'vn droict, c'est à dire agu : partant [h] A E, sera plus grande que A D. En la mesme maniere l'on demonstrera que chacune des autres est plus grande que A D. Donc la perpendiculaire A D, sera la plus petite.



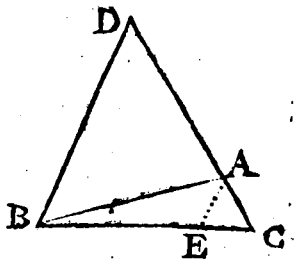
g 17. *Prem.*

h 19. 1.

THEO

THEOREME 13. PROP. 20.

De tout triangle, deux costez sont plus grands que l'autre, en quelque façon qu'ils soient pris.



Soit le triangle A B C. Ie dis que deux costez d'iceluy sont plus grãds que l'autre, en quelque façon qu'ils soient pris, sçauoir B A, & A C, pris ensemble sont plus grands que B C: semblablement A C, C B, plus grands que A B: Finalement A B, B C, plus grands que A C.

Soit prolongé le costé C A, vers D, en sorte que A D, [i] soit posée égale à A B, & soit menée B D. [i] 2. *Prem.* D'autant que les deux costez A D, A B, sont faicts égaux, les deux angles [k] sur la base B D, sçauoir [k] 5. *Prem.* D, & A B D, seront égaux: mais l'angle C B D, [l] est plus grand que A B D, il sera donc aussi plus [l] 9. *c. s.* grand que D: partant au triangle C B D, le costé C D, opposé au plus [m] grand angle C B D, sera [m] 19. *Prem.* plus grand que le costé B C, opposé au plus petit angle D: mais le costé C D, est égal aux deux A B, A C, (car puis que A D, est égal à A B, si l'on adiouste le commun [n] A C, le total C A D, [n] 2. *com. s.* sera égal à A C, A B:) donc les deux costez A C, A B, ensemble, seront plus grands que l'autre costé B C. Semblablement l'on demonstrera que

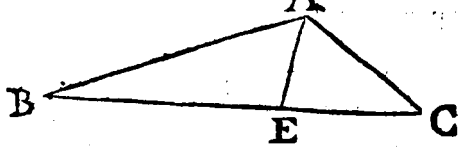
deux

deux autres costez, tels que l'on voudra, sont plus grands que l'autre. Donc de tout triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

AVTREMENT.

Nous demonstrerons ce Theoreme sans prolonger aucun costé, en cette sorte.

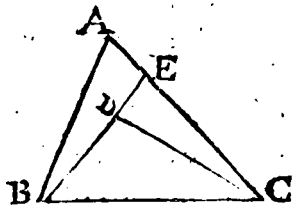
o 9. 1. Soit diuisé l'angle ° B A C, en deux egalement, par la ligne A E : D'autant que le costé C E, du triangle A E C, est prolongé vers B, l'angle externe
p 16. 1. p A E B, sera plus grand que l'interne, & opposé E A C, il sera donc aussi plus grand que son égal B A E. Donc au triangle A B E, le costé A B, opposé
q 19. 1. au plus grand angle A E B, sera q plus grand que le costé B E, opposé au plus petit angle E A B. Semblablement, l'on monstrera que le costé A C, est
r 16. 1. plus grand que E C, d'autant que l'angle r C E A, est plus grand que E A B, c'est à dire que E A C, son égal, &c. Partant les deux A B, A C, seront plus grands que B C, & ainsi des autres, diuisant chacun des autres angles en deux egalement.



THEOREME 14. PROP. 21.

Si sur l'vn des costez d'vn triangle, & des extremitez d'iceluy, sont menées deux

deux lignes droictes au dedans, se rencontrans à vn poinct ; icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle: mais elles contiendront vn plus grand angle.



Au triangle A B C, sur les extremitez B, & C, du costé B C, soient constituées les deux lignes droictes B D, C D, se rencontrant au poinct D. Ie dis que B D, C D, ensemble, sont plus petites que les costez B A, C A, ensemble ; mais l'angle B D C, est plus grand que l'angle B A C.

Car soit prolongée B D, au poinct E, du costé A C: d'autant qu'au triangle B A E, les deux costez B A, A E, [r] sont plus grands que l'autre B E, si l'on adiouste le commun C E, [s] les costez B A, A C, seront plus grands que B E, E C. [r] 20. 1. [s] 4. *com. f.*

Derechef, d'autant qu'au triangle C E D, les deux costez C E, E D, sont [v] plus grands que l'autre C D, si l'on adiouste le commun D B, les deux C E, E B, seront [x] plus grands que C D, D E : mais B A, A C, ont esté monstrez plus grands que B E, E C : donc B A, A C, seront encore plus grands que B D, C D : ce qui estoit premierement proposé. [v] 20. 1. [x] 4. *com. f.*

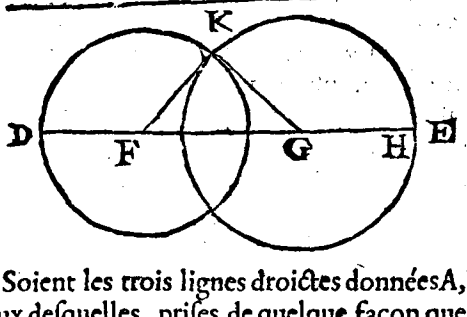
Secondement, d'autãt que l'angle externe B D C, est [y] plus grand que l'interne D E C, & le mesme D E C, est plus grãd que B A C, pour la mesme cause, à plus forte raison l'angle B D C, sera plus grand que l'angle B A C : ce qui estoit secondement [y] 16. 1.

propoſé.

proposé. Donc si sur l'vn des costez,&c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBLEME 8. PROP. 22.

De trois lignes droictes égales à trois lignes droictes données, constituer vn triangle : mais il faut que deux, de quelque façon qu'elles soient prises, soient plus grandes que l'autre ; d'autant que de tout triangle, deux costez, de quelque façon qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre.



Soient les trois lignes droictes données A,B,C, deux desquelles, prises de quelque façon que l'on voudra, soient plus grandes que l'autre, il faut constituer vn triangle qui ait les trois costez égaux aux trois lignes droictes A,B,C.

Soit prise quelque ligne droicte D E, prolongée infiniment vers E,& d'icelle soit prise D F, égale à
3. 1. [a] A,& F G, égale à B, finalement G H, égale à C, & du poinct F, comme centre à l'interualle F D, soit

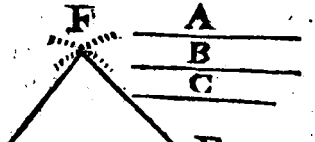
ſoit deſcrit le cercle D K : Derechef, du centre G, & de l'interualle G H, ſoit deſcrit le cercle H K, & ſoient menées F K, & G K. Ie dis que le triangle F G K, eſt fait de trois lignes égales aux trois lignes données A, B, C.

Car d'autant que le poinct F, eſt le centre du cercle D K, la ligne [a] F K, ſera égale à F D : mais A, eſt égale à F D, par la conſtruction : donc F K, & A, ſeront [b] égales entr'elles. Derechef, d'autant que G, eſt le centre du cercle H K, la ligne G K, ſera égale à G H, par la meſme raiſon : mais la ligne C, eſt égale à G H, par la conſtruction : donc G K, & C, ſeront égales, & F G, eſt priſe égale à B : donc les trois lignes droictes K F, F G, G K, ſont égales aux trois lignes droictes données, A, B, C, &c. Ce qu'il falloit faire.

[a] 15. 1.

[b] 1. *com. ſ.*

PRACTIQVE.



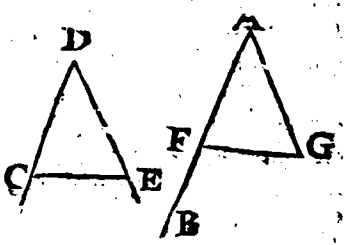
Soit priſe D E, égale à quelqu'vne des lignes A, B, C, ſçauoir à B, que nous voulons eſtre la baſe ; puis du poinct E, & à l'interualle de A, ſoit deſcrit l'arc F. Semblablement du poinct D, & à l'interualle de C, ſoit deſcrit vn autre arc, qui coupe le premier au poinct F, & ſoient menées les lignes droites, D F, E F, le triangle D F E, ſera conſtitué, duquel les trois coſtez ſeront égaux aux trois lignes données A, B, C.

PROBLEME 9. PROP. 23.

A vne ligne droicte donnée, & à vn

poinct donné en icelle, constituer vn angle rectiligne, égal à vn angle rectiligne donné.

Soit la droicte ligne donnée A B, & le poinct A, donné en icelle; & l'angle rectiligne donné C D E, il faut à la ligne A B, & au poinct A, en icelle constituer vn angle rectiligne égal, à l'angle rectiligne donné.



Soient pris les poincts contingens C & E, en l'vne & l'autre ligne D C, D E; & soit menée C E, puis de trois lignes droictes égales aux trois D C, C E, E D, [c] soit constitué le triangle A F G, de sorte que A F, soit posée égale à D C, A G, à D E, & F G, à C E. D'autant donc que les deux costez A F, A G, du triangle A F G, sont égaux aux deux D C, D E, du triangle D C E, chacun au sien, & la base F G, égale à la base C E; l'angle F A G, sera [d] égal à l'angle C D E. Donc à la ligne donnée A B, & au poinct donné en icelle A, nous auons constitué vn angle rectiligne, égal à l'angle rectiligne donné C D E. Ce qu'il falloit faire.

c 22. 1.

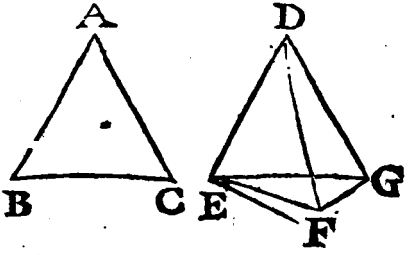
d 8. 1.

THEOREME 15. PROP. 24.

Si deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux costez égaux, plus grand que l'angle: ils auront la base plus grande que la base.

Soient

Soient les deux triangles A B C, D E F, ayans les deux costez A B, A C, égaux aux deux D E, D F, chacun au sien, sçauoir A B, égal à D E, & A C, à D F: mais l'angle A, plus grand que l'angle E D F.



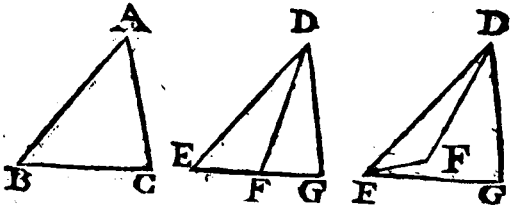
Ie dis que la base B C, sera plus grande que la base E F. Car puis que l'angle A, est plus grand que E D F, à la ligne E D, & au poinct D, en icelle, soit constitué l'angle [e] E D G, égal à l'angle A, & soit prise D G, égale à vne des deux A C, ou D F, & soient menées E G, & F G: D'autant donc que les triangles A B C, E D G, ont les deux costez A B, A C, égaux aux deux D E, D G, chacun au sien, & l'angle A, égal à l'angle E D G, contenu d'iceux costez égaux, [f] la base B C, sera égale à la base E G, Derechef, d'autant que B G, est égale à D F, le triangle D G F, est Isoscele: & partant [g] les deux angles D G F, D F G, sur la base seront égaux: mais l'angle D G F, [h] est plus grand que l'angle E G F: donc D F G, son égal, sera aussi plus grand que E G F, & partant le tout E F G, encore plus grand que E F G. Donc au triangle E F G, le costé E G, qui soustient le plus grand angle E F G, sera plus grand que E F, qui soustient le plus petit E G F; mais B C, est monstrée égale à E G: donc B C, sera aussi plus grande que E F.

e 23. 1.
f 5. 1.
g 9. c. s.
h 19. 1.

Secondement, que la base E G, tombe sur E F, [i] elle sera égale à la base B C, comme auparauant.

i 4. 1.

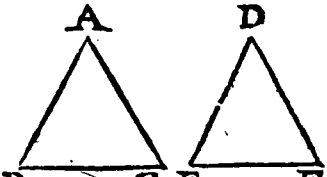
Mais E G, eſt plus grande que F E, le tout que ſa
k 9. c.ſ. partie: donc B C,[k] ſera auſſi plus grande que E F.



Finalement, que E G, tombe au deſſous de E F: d'autant que les deux coſtez D G, E G,[l] ſont plus grands que les deux D F, F E, & D F, eſt faict égal
l 21. 1.
m 5. c.ſ. à D G,[m] oſtant D G, D F, égales, demeurera E F, plus petite E G, ou B C, que nous auons monſtrée égale à E G. Donc ſi deux triangles, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOREME 16. PROP. 25.

Si deux triangles ont deux coſtez égaux à deux coſtez, chacun au ſien; & qu'ils ayent la baſe plus grande que la baſe, ils auront l'angle contenu d'icelles lignes droictes égales, plus grand que l'angle.



Soient deux triangles A B C, D E F, ayans les deux coſtez A B, A C, égaux aux deux D E, D F, chacun au ſien: mais la baſe B C, plus grande que la baſe E F. Ie

dis

dis que l'angle A, ſera plus grand que l'angle D.

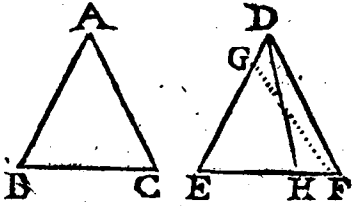
Car ſi A, n'eſtoit plus grand, il ſeroit ou égal, ou plus petit. Si égal, les coſtez A B, A C, eſtans égaux aux deux D E, D F, chacun au ſien [n] la baſe B C, ſeroit égale à E F, ce qui eſt abſurde, car B C, eſt poſée plus grande. Si plus petit, A B, A C, eſtans égaux à D E, D F, chacun au ſien, B C, ſeroit [o] plus petite que E F, ce qui eſt plus abſurde, car elle eſt plus grande par l'hypotheſe. Donc puis qu'il ne peut eſtre égal ny plus petit, il ſera plus grand. Donc ſi deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

n 4. 1.

o 24. 1.

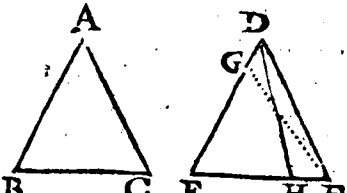
THEOREME 17. PROP. 26.

Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles, chacun au ſien, & vn coſté égal à vn coſté; ſçauoir eſt, ou celuy qui eſt adiacent à iceux angles égaux, ou bien celuy qui ſouſtient vn d'iceux angles égaux, ils auront les autres coſtez égaux aux autres coſtez, chacun au ſien, & l'autre angle égal à l'autre angle.



Soient les deux triangles A B C, D E F, ayans les deux angles B, & C, égaux aux deux angles E, & D F E, chacun au ſien, ſçauoir B, égal à E, & C, égal à D F E: & ſoit premierement le coſté B C, adiacent aux angles B,

& C, égal à E F, adiacent aux angles, & D F E. Ie dis que les autres costez A B, A C, sont égaux aux autres costez D E, D F, chacun au sien : sçauoir A B, à D E, & A C, à D F, lesquels soustendent les angles égaux, & que l'autre angle, sçauoir, A, est égal à l'autre angle D.



Car si A B, n'est égal à D E, l'vn d'iceux sera plus grand ; soit donc D E, plus grand, s'il est possible, duquel soit retranché G E, p égal à A B, & soit menée G F.

p 3. 1.

D'autant que les deux costez A B, B C, du triangle A B C, sont égaux aux deux G E, E F, du triangle G E F, chacun au sien, & l'angle B, égal à l'angle E, par l'hypothese, la base q G F, sera égale à la base A C, & tout le triangle G E F, égal à tout le triangle A B C, & l'angle G F E, égal à l'angle C : mais l'angle D F E, est égal à l'angle C, par l'hypothese; donc l'angle G F E, sera pareillement égal à l'angle D F E, la partie à son tout, ce qui est absurde: donc le costé A B, n'est pas inegal à D E. Donc puis que les deux costez A B, B C, sont égaux aux deux D E, E F, chacun au sien, & les angles B, & E, égaux contenus d'iceux costez, la base r A C, sera égale à la base D F, & les autres angles A, & D, égaux : ce qui estoit proposé.

q 4. *Prem.*

r 4. 1.

Secondement, soient les costez A B, D E, égaux, soustendans les angles égaux C, & D F E. Ie dis derechef que les autres costez A C, C B, sont égaux aux autres costez D F, F E, chacun au sien B C, à E F, & A C, à D F, & l'autre angle A, égal à l'autre angle

gle D. Car si B C, n'est égal à E F, soit l'vn d'iceux sçauoir E F, plus grand, duquel soit pris E H, égale à B C, & menée D H. [3. Prem.]

D'autant donc que les deux costez A B, B C, sont égaux aux deux D E, E H, & les angles B, & E, contenus d'iceux, sont posez égaux, la base est égale à la base, & l'angle D H E, égal à l'angle C; [4. 1.] mais l'angle D F E, est posé égal à l'angle C. Donc l'angle D H E, sera égal au mesme angle D F E; l'externe à son interne & opposé; ce qui est [16. 1.] absurde: donc B C, n'est inegal à E F. Donc par la 4. Proposition de ce liure, l'on colligera comme auparauant, que les deux autres costez sont égaux aux deux autres, & l'autre angle égal à l'autre angle. Donc si deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

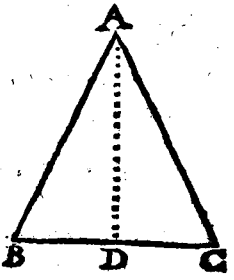
Il est facile à colliger de cette Proposition, que tout le triangle est aussi égal à tout le triangle: car en consequence que les deux costez A B, B C, sont égaux aux deux D E, E F, chacun au sien contenant iceux angles égaux, tout le triangle est aussi égal à tout le triangle. Ce qu'auions desia demonstré.

En suitte de cette Proposition nous monstrerons les deux Theoremes suiuans, dont le premier est tel.

Au triangle Equilateral, ou Isoscele, la ligne droicte menée de l'angle contenu des deux costez égaux, & diuisant l'angle ou la base en deux parties égales, icelle ligne est perpendiculaire à la

base: & si elle diuise l'angle en deux parties égales, elle coupera pareillement la base en deux également. Mais si elle coupe la base en deux parties égales, elle diuisera semblablement l'angle en deux parties égales, & au contraire, la ligne menée perpendiculaire à la base, diuise, & la base & l'angle en deux parties égales.

Soit le triangle A B C, duquel les deux costez, A B, A C, soient égaux, & que l'angle A, soit premierement diuisé en deux également, par la ligne droicte A D, ie dis qu'icelle A D, est perpendiculaire à la base B C, & qu'elle coupe la base B C, en deux également: car puis que A B, est égale à A C, & à A D, commune, les deux costez B A, A D, seront égaux aux deux C A, A D, & l'angle B A D, égal à l'angle C A D, x *la base B D, sera égale à la base C D, & les angles au poinct D, égaux, & partant droits.*



x 4. 1.

Secondement, que A D, diuise la base B C, en deux parties égales. Ie dis que A D, est perpendiculaire à C B, & qu'elle diuise l'angle B A C, en deux angles égaux: car puis que B D, est égale à C D, & A D, commune, les deux costez B D, D A, seront égaux aux deux C D, D A, & la base A B, est égale à la base A C, par l'hypothese, les angles au poinct D, y *seront égaux, & partant droits, &* z *les angles au poinct A, aussi égaux.*

y 8. 1.
z Coroll. 8. 1.

Tiercement, soit A D, perpendiculaire à B C. Ie dis que la base B C, & l'angle A, sont diuisez en deux également: car les angles B & C, sur la base B C,

sont

ſont égaux, & les deux angles au poinct D, égaux, puis que A D, eſt perpendiculaire : Donc puis que les deux angles B & D, du triangle A B D, ſont égaux aux deux D & C, du triangle A D C, chacun au ſien, le coſté A D, oppoſez aux angles égaux B, & C, commun, les [a] autres coſtez B D, C D, ſeront égaux, a 26. 1. *& les autres angles au poinct A, égaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

L'AVTRE THEOREME EST TEL.

Le triangle, auquel vne ligne droicte menée perpendiculairement d'vn des angles ſur la baſe, diuiſe la baſe ou l'angle en deux également, a les deux coſtez contenans ledit angle, égaux : & ſi la baſe eſt diuiſée en deux parties égales, l'angle ſera ſemblablement diuiſé en deux parties égales : mais ſi l'angle eſt diuiſé en deux parties égales, la baſe ſera pareillement diuiſée en deux parties égales.

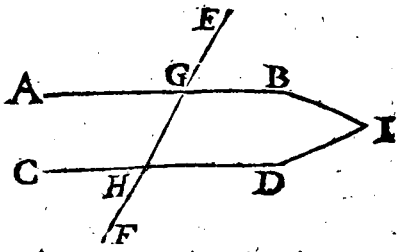
Au ſuſdit triangle A B C, ſoit A D, perpendiculaire à B C, & qu'elle diuiſe premierement la baſe B C, en deux également. Ie dis que les coſtez A B, A C, ſont égaux, & les angles au poinct A, égaux : car d'autant que les deux coſtez B D, D A, ſont égaux aux deux C D, D A, & contiennent angles égaux, ſçauoir droits : les baſes [b] A B, A C, ſeront b 4. *Prem. égales : & les angles au poinct A, égaux : ce qui eſtoit premierement propoſé.*

Secondement, que la perpendiculaire A D, coupe l'angle A, en deux également. Ie dis que les coſtez A B, A C, ſont égaux, & B D, C D, auſſi égales : car puis que les deux angles D & A, du triangle A B D, ſont égaux aux deux D & A, du triangle A C D, & le coſté A D, adiacent à iceux, eſt commun : [c] les c 26. 1.

coſtez A B, A C, & les coſtez B D, C D, ſeront pareillement égaux. Ce qui eſtoit ſecondement propoſé.

THEOREME 18. PROP. 27.

Si vne ligne droicte tombant ſur deux autres lignes droictes, fait les angles alternes égaux entr'eux : icelles lignes droictes ſeront paralleles entr'elles.



Que la ligne droicte E F, tombant ſur les deux lignes droictes A B, C D, faſſe les angles alternes A G H, G H D, égaux entr'eux. Ie dis que A B, C D, ſont paralleles.

Car ſi elles ne ſont paralleles, eſtans prolongées infiniment de part & d'autre, elles ſe rencontreront de la part de A C, ou de B D, autrement elles ſeront paralleles, ſelon la definition des paralleles: qu'elles ſe rencontrent donc, s'il eſt poſſible, de la part de B D, comme au poinct I : par ainſi G I H,
c 16. 1. ſera vn triangle, duquel [c] l'angle externe A G H, ſera plus grand que l'interne & oppoſé G H D, ce qui eſt abſurde : car A G H, eſt égal à G H D, par l'hypotheſe : Donc A B, C D, ne ſe rencontreront,
d 35. def. & [d] partant ſeront paralleles. Semblablement, l'on demonſtrera qu'elles ne ſe peuuent rencontrer de la part de A C. Donc ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO

THEOREME 19. PROP. 28.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes, faict l'angle externe égal à l'interne & opposé & de mesme part; ou les internes, & de mesme part, égaux à deux droicts : icelles lignes droictes seront paralleles entr'elles.

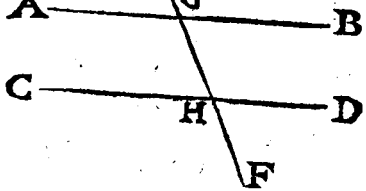
Que la ligne droicte E F, tombant sur les lignes droictes A B, C D, fasse premierement l'angle externe A G E, égal à son interne & opposé, de mesme part G H C. Ie dis que A B, C D, sont paralleles entr'elles.

Car d'autant que l'angle G H C, est égal à l'angle E G A, par l'hypothese, & que l'angle B G H, est égal au mesme angle E G A, estans tous deux opposez au sommet G, les deux B G H, & G H C, lesquels sont alternes & opposez, seront aussi égaux entr'eux; partant A B, C D, seront paralleles entr'elles.

[f] 15. p.

[g] 1. c.

[h] 27. Prem.



Secondement, que E F, tombant sur A B, C D, fasse les angles internes, & de mesme part sçauoir A G H, & C H G, égaux à deux droicts : Ie dis que A B, C D, sont aussi paralleles : car puis que A G E, A G H, sont égaux à

[h] 13. prec.

deux

deux droicts,& que les internes A G H,& C H G, ſont poſez égaux à deux droicts,les angles A G E, A G H, ſeront égaux aux deux A G H, C H G: oſtans donc le commun A G H, demeura A G E, externe, égal à ſon interne & oppoſé de meſme part,G H C: donc A B,C D,ſeront paralleles,par la premiere partie de cette Propoſition: partant ſi vne ligne,&c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

i 3.c.f.

THEOREME 20. PROP. 29.

Si vne ligne droicte, tombe ſur deux lignes droictes paralleles elle fera les angles alternes égaux entr'eux, & l'externe égal à ſon interne & oppoſé, & de meſme part; & les deux internes & de meſme part, égaux à deux droicts.

Que la ligne droicte E F, tombe ſur les deux paralleles A B, C D, (voyez la figure ſuiuante.) Ie dis premierement que les angles alternes A G H, D H G, ſont égaux entr'eux.

Car s'ils ne ſont égaux, ſoit l'vn d'iceux, ſçauoir A G H, plus grand. D'autant donc que l'angle A G H, eſt plus grand que l'angle D H G, ſi l'on adiouſte le commun B G H, ; les deux A G H, B H G, ſeront plus grands que les deux B G H, D G H, mais les deux A G H, B G H, [k] ſont égaux à deux droicts : donc B G H, D H G, ſeront plus petits que deux droicts; partant A B, C D, ne ſeront paralleles, [l] ce qui eſt abſurde : car elles ſont poſées paralleles ; Donc l'angle A G H, n'eſt plus grand que D H G, partant égal. S'il eſtoit dit eſtre plus petit, il en arriueroit la meſme abſurdité.

f 4.c.f.

k 13. 1.

l 11.c.f.

Seconde

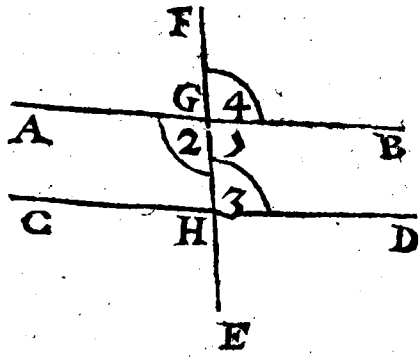
Secondement : Ie dis que l'angle externe E G B, eſt égal à ſon interne & oppoſé de meſme part, G H D. Car d'autant que l'angle G H D, eſt monſtré égal à l'angle A G H, & que l'angle E G B, [m] eſt égal au meſme angle A G H, les angles E G B, & G H D, [n] ſeront égaux entr'eux ; ainſi l'on monſtrera que E G A, eſt égal à G H C.

[m] 15. *Pre.*

[n] 1. *c. ſ.*

Tiercement : Ie dis, que les deux angles internes & de meſme part B G H, G H D, ſont égaux à deux droicts.

Car puis que l'angle externe E G B, eſt monſtré égal à G H D, ſi on adiouſte le commun B G H, [o] o 3. *c. ſ.*



les deux angles B G H, G H D, ſeront égaux aux deux E G B, B G H, [p] mais E G B, B G H, ſont égaux à deux droicts : donc B G H, G H D, ſeront auſſi égaux à deux droicts : par meſme raiſon les deux A G H, G H C, ſeront monſtrez égaux à deux droicts : donc ſi vne ligne droicte tombe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[p] 13. *p.*

Autrement

Autrement ſoient A B,& C D,paralleles : Ie dis que les angles alternes marquez par 2. & 3. ſont égaux entr'eux : car s'il n'eſt ainſi, l'vn d'iceux ſeroit plus grand : ſoit donc 2. plus grand, s'il eſt poſſible : parquoy adiouſtant l'angle 5. les deux
13. 1. 5. & 3. ſeront moindres que 5. & 2. mais 5. & 2. vallent deux droicts : donc 5.& 3.ſeront moindres que deux droicts : partant A B,C D, ne ſeront paralleles, ce qui eſt contre l'hypotheſe : donc 2. eſt égal à 3.

Secondement, l'angle externe 4. eſt égal à l'in-
15. 1. terne & oppoſé de meſme part 3. car 4. eſt égal à
1 *com.ſ.* 2.& 3. eſt monſtré égal à 2. Donc 4. ſera égal à 3. l'externe à l'interne.

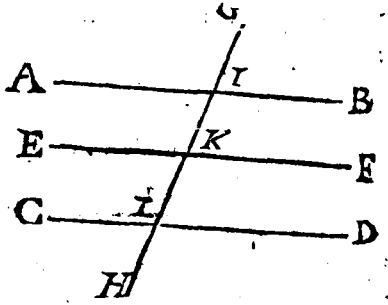
Finalement, les deux internes de meſme part, 5.& 3. ſont égaux à deux droicts : car puis que 4. eſt monſtré égal à 5.ſi on adiouſte 5.à chacun, les
13. 1. deux 3. & 5. ſeront égaux aux deux 4. & 5. mais 4.& 5. ſont égaux aux deux droicts : donc 5. & 3. ſeront auſſi égaux à deux droicts. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Il faut entendre que les characteres poſez aux angles, ne ſont pris pour nombres : mais ſeulement pour denoter les angles au lieu de trois lettres, & ainſi l'on pourroit faire beaucoup de demonſtrations plus briefues, poſant vn charactere pour chacun angle,& non trois lettres de l'alphabet, là où il ſera plus commode.

THEO

THEOREME 21. PROP. 30.

Les lignes droictes, paralleles à vne meſme ligne droicte, ſont auſſi paralleles entr'elles.



Que chacune des lignes droictes A B, C D, ſoit parallele à la droicte E F. Ie dis qu'elles ſont paralleles entr'elles. Car ſoit menée G H, coupãt icelles aux poincts I, K, L. D'autant que la droicte ligne G H, tombe ſur les paralleles A B, E F, l'angle A I K, ſera égal [q] à l'alterne F K I. Derechef, d'autant que G H, tombe ſur les paralleles C D, E F, l'angle D L K, ſera égal à l'angle I K F, l'interne à l'externe, ou l'externe à l'interne & oppoſé de meſme part: mais A I K, eſt égal au meſme I K F: donc A I K, [r] & D L K, ſeront égaux entr'eux, leſquels eſtans alternes, [ſ] des lignes A B, C D, ſeront paralleles entr'elles. Donc les lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[q] 29. 1.

[r] 1. *ax.*

[ſ] 27. 1.

SCHOLIE.

Que ſi quelqu'vn dit que A I, B I, ſont paralleles à E F, & toutesfois ne ſont paralleles entr'elles. Il faut reſpondre que A I, B I, ne ſont pas deux lignes,

mais

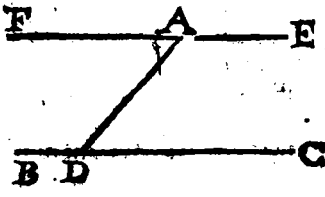
UNIVERSITÄTS BIBLIOTHEK PADERBORN

mais seulement les deux parties d'vne mesme ligne. Car il faut entendre que toutes paralleles se prolongent infiniment: mais il appert que A I, rencontre B I, estant prolongée.

PROBLEME 10. PROP. 31.

D'vn poinct donné mener vne ligne droicte, parallele à vne ligne droicte donnée.

Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte, parallele à la ligne droicte donnée B C. Soit pris le poinct contingent D, en ligne donnée B C, & soit menée A D, faisant vn angle quelcõque A D C,



auec B C, au poinct A, de la ligne droicte donnée A D, soit constitué [t] l'angle rectiligne F A D, égal à l'angle rectiligne donné A D C, & soit prolongée directement F A, vers E. D'autant que les deux angles alternes F A D, C D A, sont égaux par la [v] construction, la ligne A F, [v] sera parallele à B C, & menée du poinct donné A. Ce qu'il falloit faire.

23. 1.

v 27. 1.

SCHOLIE.

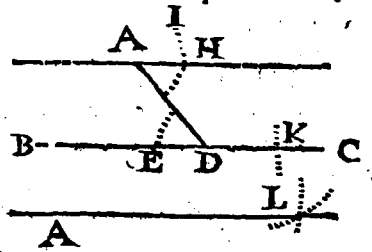
Or le poinct doit estre assigné en tel lieu que la ligne droicte proposée estant prolongée directement, ne rencontre iceluy. Ce que l'on peut colliger manifestement de la construction du mesme Probleme.

Car

Car du poinct donné, il faut mener vne ligne faisant quelque angle auec icelle ligne donnée, ce qui ne se pourroit faire, si le poinct estoit posé directement auec icelle.

PRACTIQVE.

La pratique de cette Proposition se pourra faire facilement en cette maniere. Soit le poinct A, duquel il faut mener vne ligne parallele à B C. Soit menée A D, faisant angle auec B C, puis des poinct A & D, comme centres & de mesme interualle, soient descrits les arcs E F, G I, (de sorte toutefois que l'interualle n'excede D A, ny D B,) & soit pris G H, égal à E F, & menée A H, elle x *sera parallele à B C.* x 27.1.



Autrement, en la ligne B C, soit pris le poinct contingent K, & du poinct A, comme centre, & à l'interualle B K, soit descrit l'arc L, puis du poinct K, comme centre, & de l'interualle A B, soit coupé iceluy arc, par vn autre arc, au poinct L, & soit menée la ligne droicte A L, icelle sera parallele à B C. G, & I, manquent en la figure.

THEOREME 22. PROP. 32.

De tout triangle, l'vn des costez estant prolongé, l'angle externe est égal aux deux

internes & oppoſez ; & les trois angles internes de tout triangle, ſont égaux à deux droicts.

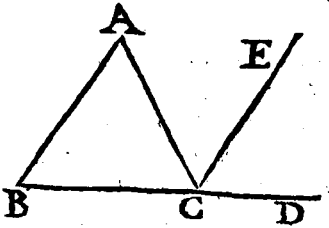
Soit le triangle A B C, duquel vn des coſtez, ſçauoir B C, ſoit prolongé au poinct D. Ie dis premierement que l'angle externe A C D, eſt égal aux deux internes & oppoſez A & B : car du poinct C, [y] ſoit menée [y] C E, parallele à B A.

y 31. *Prem.*

D'autant que A C, tombe ſur les paralleles A B, [z] C E, les angles alternes [z] A, & A C E, ſont égaux: derechef d'autant que B D, tombe ſur les paralleles [a] A B, C E, les angles B, & E C D, ſeront [a] égaux, l'externe à l'interne, & oppoſé de meſme part: partant les deux A C E, E C D, c'eſt à dire, le tout A C D, ſera égal aux deux A, & B, l'externe, aux deux internes & oppoſez : ce qui eſtoit propoſé.

z 29. *Prem.*

a 29. *Prem.*



Secondement, ie dis que les trois angles internes du meſme triangle A B C, ſçauoir A, B, & A C B, ſont égaux à deux droicts.

Car d'autant que A, & B, ſont égaux à l'angle A C D, comme nous auons monſtré, ſi l'on adiouſte l'angle commun A C B, les trois [b] A, B, & A C B, ſeront égaux aux deux A C B, & A C D, mais les deux A C B, A C D, ſont égaux à deux [c] droicts : donc les trois A, B, &, A C B, ſont égaux à deux droicts : donc de tout triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

b 2. *c. f.*

c 13. *Prem.*

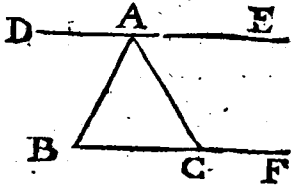
SCHOLIE.

SCHOLIE.

Puis qu'il a eſté demonſtré par la 16. Propoſition, que l'angle externe de tout triangle eſt plus grand que chacun des internes & oppoſez; & icy eſt monſtré que le meſme externe eſt égal aux deux internes & oppoſez enſemble: il eſt manifeſte que, lequel que l'on voudra des deux internes & oppoſez, eſt excedé de l'angle externe, de la quantité de l'autre angle interne & oppoſé. Comme au triangle precedent, l'angle A, interne & oppoſé, eſt excedé par l'externe A C D, de la quantité de l'autre angle interne & oppoſé B, & l'angle interne B, eſt excedé de l'externe A C D, de la quantité de l'angle A, d'autant que l'angle A C D, externe, a eſté monſtré égal aux deux A & B. Derechef, d'autant qu'il eſt demonſtré par la 17. Propoſition, que deux angles de quelconque triangle, en quelque façon qu'ils ſoient pris, ſont moindres que deux droicts: & icy que tous les trois ſont égaux à deux droicts, il eſt manifeſte que deux des angles defaillent de deux droicts, de la quantité de l'autre angle du triangle. Comme au meſme triangle, les deux angles A, & B, defaillent de deux droicts de la quantité de l'angle A C B.

Or les premiers de tous ceux qui ont monſtré que tout triangle auoit les trois angles égaux à deux droicts, comme rapporte Eudemus, ont eſté les Pythagoriciens, comme s'enſuit. Soit le triangle A B C, & par le poinct A, ſoit d *menée la ligne D E, parallele à B C.* d 3

D'autant que les angles alternes D A B, & A B C, ſont égaux, ſi l'on adiouſte les angles égaux



E A C, & A C B, (car ceux-cy ſont auſſi alternes,) les deux
f 2.c.ſ. *angles f D A B, E A C, ſeront égaux aux deux A B C, A C B. Donc ſi l'on adiouſte l'angle commun B A C, les trois angles D A B, B A C, C A E,*
g 2.c.ſ. *g ſeront égaux aux trois angles A B C, B A C, &*
h 13.1. *B C A: mais les trois D A B, B A C, C A E, h ſont égaux à deux droicts. Donc les trois internes du triangle A B C, ſont auſſi égaux à deux droicts. Ce qui eſt propoſé.*

De cecy nous conclurons facilement, ſi le coſté B C, eſt prolongé à F, que l'angle externe A C F, eſt égal aux deux internes & oppoſez A B C, B A C, Car d'autant que les trois angles A B C, B A C, A C B, ſont égaux à deux droicts, comme nous auons
i 13.1. *monſtré. Mais les i deux A C B, A C F, ſont auſſi égaux à deux droits: donc ces trois-là ſont égaux à ces deux-cy; donc en oſtant le commun A C B, de-*
k 3.c.ſ. *meurera l'angle k externe A C F, égal aux internes & oppoſez B, & B A C.*

La premiere partie de la Propoſition d'Euclide pourra auſſi eſtre facilement conuertie. Sçauoir eſt que ſi d'vn angle d'vn triangle l'on mene vne ligne droite, de ſorte que l'angle externe ſoit égal aux deux internes & oppoſez, icelle ligne droite, & le coſté du triangle, ſe rencontreront directement. Car du poinct C, ſoit menée C D, & que l'angle A C D, ſoit égal aux deux internes B, & A. Ie dis que B C, C D, ſe rencontrent directement.

Car puis que l'angle A C D, eſt égal aux deux, B, & A, ſi l'on adiouſte le commun A C B, les deux an-

gles

gles l *A C B, & A C D, seront égaux aux trois A, B,* l 2.c.s.
& A C B, mais ces trois-là sont m *égaux à deux* m 32.1.
droicts : donc ces deux-cy A C B, A C D, seront aussi égaux à deux droicts : n *partant B C, C D, seront* n 14.1.
constituées directement.

Sçauoir combien vallent d'angles droicts, tous les angles de quelconque figure rectiligne.

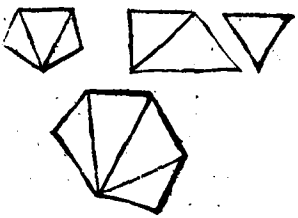
De cette 32. Proposition nous colligerons en deux manieres, à combien d'angles droits sont égaux, tous les angles internes, de chaque figure rectiligne. La premiere maniere sera telle que s'ensuit.

Tous les angles, de quelque figure rectiligne que ce soit, sont égaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle est en nombre entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la premiere figure, qui est le triangle, sont égaux à deux fois un droict : c'est à dire à deux droits, comme il est demonstré. o *Mais les angles de la seconde figure rectiligne,* o 32.1.
qui est la figure de quatre costez, sont égaux à deux fois deux droits, c'est à dire, à quatre droits. Les angles de la trisiéme figure rectiligne, qui est le Pentagone sont égaux à trois fois deux droicts, c'est à dire à six droits : & ainsi de suitte.

Or une figure rectiligne tient tel ordre entre les figures rectilignes, que denote le nombre de ses costez ou de ses angles, apres en auoir retranché deux : d'autant que deux lignes droictes n'encloſt point de superficie, & partant ne constituent point de figure, parquoy il faut à tout le moins trois lignes droictes, pour

constituer vne figure rectiligne, desquelles sera fait le triangle, qui a trois costez & autant d'angles, desquels deux estans ostez, restera vn. Ainsi la figure de 20. costez ou 20. angles, sera la 18. entre les figures rectilignes : car deux estans ostez de 20. reste 18. & faut entendre le mesme des autres figures. Partant la figure contenuë de 20. costez, puis qu'elle est la 18. aura 20. angles égaux à 36. angles droits : sçauoir est à deux fois 18. droits, comme nous auons dit premierement. Semblablement, tous les 10. angles de la figure rectiligne contenuë de 10. costez, seront égaux à 16. droits, puis qu'vne telle figure est la 8. entre les figures rectilignes. Or cecy sera ainsi demonstré. Toute figure rectiligne peut estre diuisée en autant de triangles, qu'elle est en nombre entre les figures rectilignes, ou qu'elle a d'angles ou de costez, deux estans ostez.

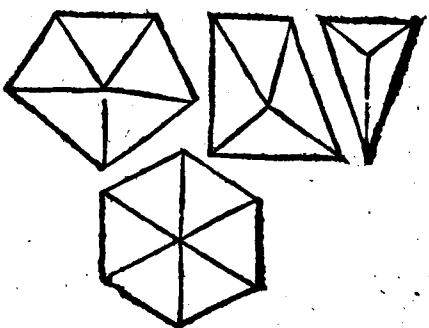


Car de chacun angle d'icelle l'on peut mener des lignes droites à tous les angles opposez, mais aux deux angles prochains l'on n'en peut pas mener. Parquoy la figure sera diuisée en autant de triangles, qu'icelle a d'angles, deux estans ostez. Ainsi, l'on voit que le triangle ne peut estre diuisé en autres triangles; mais la figure quadrilatere peut estre diuisée en deux triangles, le Pentagone ou figure de cinq costez, peut estre diuisée en trois, l'Exagone en quatre, &c. Donc puis que les angles de ces triangles, constituent tous les angles de la figure rectiligne proposée, & que tous les angles de quelconque triangle sont égaux à deux

à deux droits ; il eſt euident que tous les angles de quelque figure rectiligne que ce ſoit, ſont égaux à deux fois autant de droits qu'il y a de triangles en icelle, c'eſt à dire, quantieſme elle eſt entre les figures rectilignes. Ce qui ſe voit manifeſtement aux figures propoſées.

La ſeconde maniere, par laquelle l'on peut ſçauoir la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, eſt telle.

Tous les angles d'vne figure rectiligne, quelconque elle ſoit, ſont égaux à deux fois autant de droicts, quatre eſtans oſtez, qu'elle a de coſtez, ou d'angles.



C'eſt à dire, que les angles de quelconque triangle ſont égaux à trois fois deux droits, quatre eſtans oſtez, c'eſt à ſçauoir à deux droits.

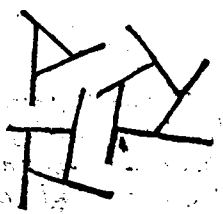
Ainſi les angles de la figure contenuë de 20. coſtez, ſeront égaux à 20. fois deux droits, 4. eſtans oſtez : c'eſt à dire à 36. angles droits, &c. Et la de-

monſtration en eſt telle. Si de quelconque poinct pris en la figure, l'on mene des lignes droictes à tous les angles, l'on conſtituera autant de triangles que ladite figure a de coſtez ou d'angles: puis donc que les
p 32. 1. *angles de quelconque triangle ſont égaux à deux droicts, tous les angles d'iceux triangles ſeront égaux à deux fois autant d'angles droicts, que la figure a de coſtez.*

Mais les angles des meſmes triangles, leſquels ſont conſtituez à l'entour du poinct pris au dedans de la figure, n'appartiennent pas aux angles de la figure rectiligne propoſée, comme il appert. Parquoy ſi ces angles là ſont oſtez, les autres angles des triangles, conſtituans les angles de la figure propoſée, ſeront pareillement égaux à deux fois autant de droits, ceux qui ſont conſtituez autour du poinct pris au dedans de la figure eſtans oſtez, que la figure a d'angles ou de coſtez.

Or tous ces angles là, conſtituez à l'entour de ce poinct pris en la figure, en quelque nombre qu'ils ſoient, ſont égaux à 4. droits tant ſeulement, comme nous auons colligé de la 15. Propoſition. Partant tous les angles de quelconque figure rectiligne, ſont égaux à deux fois autant de droits, 4. eſtans oſtez, qu'icelle figure contient d'angles ou a de coſtez. Ce qui eſt propoſé.

Or de cette maniere ainſi demonſtrée, il eſt manifeſte que ſi chacun des coſtez de quelconque figure rectiligne, eſt prolongé d'ordre, vers meſme part, tous les angles externes ſont égaux à quatre droits. Car vn chacun



externe

externe auec ſon interne de ſuitte, q ſont égaux à deux droits : & partant tous les internes enſemble, auec tous les externes, ſont égaux à deux fois autant de droits, que la figure a d'angles ou de coſtez. Or les internes ſeulement ſont égaux à deux fois, autant de droicts moins 4. comme nous auons monſtré. Donc ſi l'on oſte les internes, les externes demeureront tant ſeulement égaux à quatre droits, leſquels defaillent des angles internes, afin que les internes & externes enſemble, ſoient égaux à deux fois autant de droits, qu'il y a de coſtez à contenir la figure. Pour exemple: En tout triangle les angles internes & externes enſemble, ſont égaux à ſix angles droits. q 13. Prem.

Car puis que les internes ſont égaux r à deux droits, les externes ſeront ſeulement égaux à quatre droits. Au quadrilatere, ou figure de quatre coſtez, les angles externes & internes enſemble, ſont égaux à huict droits. Donc, d'autant que les internes ſeulement ſont égaux à quatre droits, comme nous auons monſtré, les ſeuls externes ſeront auſſi égaux à quatre droits. r 32. Prem.

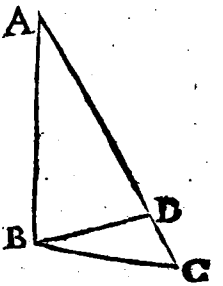
Au pentagone ou quinqu'angle, c'eſt à dire, en la figure de cinq coſtez, ou de cinq angles, les angles internes & externes enſemble, ſont égaux à dix droits. Mais d'autant que les internes ſont égaux à ſix droits, comme nous auons demonſtré, les angles externes demeureront égaux à quatre droits tant ſeulement. Toutes leſquelles choſes ſe peuuent voir par les figures cy appoſées. Et faut entendre le meſme en toutes les autres figures.

COROLLAIRE 1.

De cette 32. Proposition l'on peut colliger, que les trois angles de quelconque triangle pris ensemble, sont égaux aux trois angles pris ensemble de quelconque autre triangle : d'autant que tant
f 32. 1. les trois de l'vn, que les trois de l'autre f sont égaux à deux angles droicts. Donc si deux angles d'vn triangle sont égaux à deux angles d'vn autre triangle, le 3. de l'vn sera aussi égal au 3. de l'autre.

SCHOLIE.

Clauius adiouste icy, & Henrion apres luy. Et iceux triangles seront equiangles. *Ce qui n'est pas touſiours vray; car au triangle A B C, soit menée la ligne droite B D, diuisant le triangle, comment que ce soit, en deux A B D, B D C : d'autant que l'angle*
t 32. 1. *externe B D A,* t *est égal aux deux internes & opposez, C, & C B D, si on ad-*
v 2. com. s. *iouste le commun A B D,* v *les deux angles A B D, A D B, du triangle A D B, seront égaux aux deux A B C, & A C B, du triangle A C B, & l'angle A, est commun à tous les deux*



triangles ; & toutefois ces deux triangles A B C, A B D, ne sont equiangles, combien que deux angles de l'vn, soient égaux à deux angles de l'autre, & le troisiéme au troisiéme ; puis que chacun des angles de l'vn, n'est égal à chacun des angles de l'autre. Et faudroit qu'il y eust ainsi.

Donc

Donc si deux angles d'vn triangle, sont égaux à deux angles d'vn autre triangle, chacun au sien, l'autre angle de celuy-là sera égal à l'autre angle de cettuy-cy, & iceux triangles seront equiangles.

COROLLAIRE 2.

Il est aussi euident, qu'en tout triangle Isoscele, duquel l'angle contenu des costez égaux est droit, qu'vn chacun des autres qui sont sur la base, est demy-droit. Car ces deux ensemble constituent vn droict : [x] puis que les trois sont égaux à deux droicts, & que le troisiéme est posé droict : partant, puis que les deux restans sont égaux entr'eux, vn chacun d'iceux sera demy-droict. Mais si l'angle contenu des costez égaux est obtus, vn chacun des autres sera moindre que demy-droict : & les deux ensemble moindres qu'vn droict, si finalement l'angle susdit est agu, vn chacun des autres sera plus grand que demy-droict : d'autant que les deux ensemble sont plus grands qu'vn droict, &c. x 32. 1.

COROLLAIRE 3.

Il est pareillement manifeste, que chacun angle du triangle equilateral, est les deux tiers d'vn droit, ou le tiers de deux droicts. Car les deux angles droicts, [y] ausquels sont égaux les trois angles d'vn triangle equilateral, estans diuisez en trois angles, constituent chacun angle, de deux tiers d'vn droit. y 32. 1.

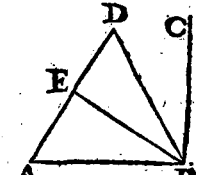
COROLLAIRE. 4.

Il est aussi euident, que si l'on mene vne ligne perpen

perpendiculaire, d'vn des angles du triangle equilateral, ſur le coſté oppoſé, l'on conſtituera deux triangles Scalenes, vn chacun deſquels aura vn angle droit, adiacent à la perpendiculaire, vn autre ſera les deux tiers d'vn droict, ſçauoir celuy qui eſt auſſi angle, du triangle equilateral: finalement l'autre ſera le tiers d'vn droict.

SCHOLIE.

Du troiſieſme Corollaire on trouuera vne methode, par laquelle l'angle droit peut eſtre diuiſé en trois angles égaux. Car ſoit fait l'angle droit A B C, & ſur A B, ſoit [z] *conſtitué vn triangle equilateral: & d'autant* [a] *que l'angle A B D, fait les deux tiers de l'angle droict A B C, l'angle C B D, ſera la tierce partie du meſme angle droit. Donc, ſi l'on diuiſe l'angle* [b] *A B D, en deux egalement, par la ligne B E, chacun des deux angles A B E, & E B D, ſera pareillement la tierce partie d'vn droict: partant l'angle droit A B C, eſt diuiſé en trois angles égaux. Ce qui eſt propoſé.*



z 1. Prem.

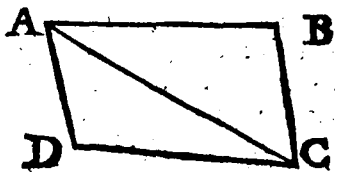
a Coroll. 1. 32. 1.

b 9. 1.

THEOREME 23. PROP. 33.

Les lignes droictes, leſquelles conioignent deux lignes droictes égales & paralleles & de meſme part; icelles ſont pareillement égales & paralleles.

Soient



Soient A B, C D, égales & paralleles, & que les lignes droictes A D, B C, conioignent icelles de mesme part A D, & B C, Ie dis que les lignes A D, & B C, sont aussi égales & paralleles.

Car soit menée A C, d'autant que A C, tombe sur les paralleles A B, D C, [c] les angles B A C, D C A, alternes, seront égaux entr'eux. Et d'autant que A B, est égale à D C, par l'hypothese, & A C, commune, les deux costez B A; A C, du triangle B A C, sont égaux aux deux D C, C A, du triangle D C A, chacun au sien, & l'angle B A C, égal à l'angle D C A, contenus d'iceux costez égaux, la base [d] A D, sera égale à la base B C, & tout le triangle A B C, à tout le triangle D C A, & les autres angles aux autres angles, chacun au sien, sçauoir D, égal à B, & D A C, égal à B C A, lesquels estans alternes [e] les lignes A D, B C, seront paralleles: mais elles sont aussi monstrées égales: elles seront donc égales & paralleles. Donc les lignes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[c] 29. 1.

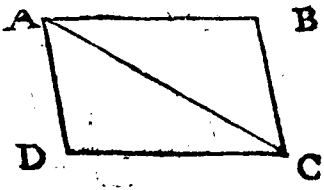
[d] 4. 1.

[e] 27. 1.

THEOREME 24. PROP. 34.

Les costez & les angles opposez des figures ou espaces parallelogrammes, sont égaux entr'eux: & le diametre coupe iceux parallelogrammes en deux également.

Soit



Soit le Parallelogramme A B C D, auquel ſoit mené le diametre A C. Ie dis que les coſtez oppoſez A B, D C, & A D, B C, ſont égaux entr'eux : pareillement, que les angles oppoſez B A D, B C D, & B, & D, ſont auſſi égaux entr'eux, & que le diametre A C, diuiſe ledit Parallelogramme en deux egalement, c'eſt à dire en deux triangles égaux.

Car puis que A B, D C, ſont paralleles, & que
g 29.1. A C, tombe ſur icelles, g les angles alternes B A C, D C A, ſont égaux entr'eux. Derechef, puis que A D, B C, ſont paralleles, les angles alternes B C A, D A C, ſont auſſi égaux : donc puis que les deux angles B A C, B C A, du triangle A B C, ſont égaux, aux deux D A C, D C A, du triangle A D C, chacun au ſien, & le coſté adiacent à iceux angles
h 26.1. égaux, commun à tous les deux triangles, h les deux coſtez A D, D C, ſeront égaux aux deux autres A B, B C, chacun au ſien : ſçauoir A B, égal à ſon oppoſé D C, & A D, égal à B C, oppoſé, & l'angle B, égal à l'angle D : Et d'autant que les deux angles au poinct A, ſont monſtrez égaux aux deux, au poinct C, l'angle total A, ſera égal à ſon oppoſé total C : Donc les coſtez & les angles oppoſez ſont égaux entr'eux.

Mais d'autant qu'aux triangles A B C, A D C, les deux coſtez A B, B C, ſont égaux aux deux C D, D A, chacun au ſien, & les angles D, & B, contenus d'iceux coſtez ſont égaux, comme il a eſté mon-
i 4.1. ſtré : i tout le triangle A B C, ſera égal à tout le triangle

triangle A D C; Partant le diametre diuiſe le Parallelogramme en deux egalement. Donc les coſtez & les angles,&c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE 1.

De cette Propoſition l'on peut premierement colliger, que toute figure quadrilatere, qui a les coſtez oppoſez égaux, eſt Parallelogramme: car les deux coſtez A D,D C,eſtans égaux à A B,B C, chacun au ſien,& la baſe A C,commune,les angles D,& B,ſeront égaux,& les deux autres auſſi égaux aux deux autres,chacun au ſien: ainſi tous les angles alternes, qui ſont aux poincts A, & C, ſeront égaux entr'eux.Donc la figure ſera Parallelogramme,tous les coſtez eſtans paralleles. 8. 1. 4. 1.

COROLLAIRE 2.

Il s'enſuit auſſi, que toute figure quadrilatere qui a les angles oppoſez égaux,eſt Parallelogramme,comme en la meſme figure precedente,les angles oppoſez eſtans égaux, ſçauoir A, à C, & B, à D: & par ce qui eſt monſtré à la 32.Prop. les quatre eſtans égaux à 4.droicts, les deux B, & B C D, ſeront égaux à deux droicts,ſemblablement, B, & B A D,ſeront auſſi égaux à deux droicts:Donc tant A B,C D,que A D,B C,ſeront paralleles:& partant la figure propoſée eſt Parallelogramme,& en arriueroit de meſme ſi tous les angles eſtoient droits. 28. 1.

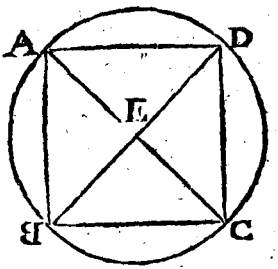
Nous dirons auſſi, qu'encore que la Diagonale diuiſe tout Parallelogramme en deux triangles égaux,il ne s'enſuit pas que toute figure de quatre coſtez, qui ſe diuiſe en deux triangles égaux par la Diagonale,ſoit Parallelogramme,comme il eſt facile 8. 1.

facile à entendre, en menant du poinct A, vers B, vne ligne égale à C B, & du poinct C, vne ligne égale à A B, de mesme part, lesquelles se rencontreront à vn autre poinct, comme il est manifeste par ce qui est demonstré auparauant : dequoy nous n'auons mis de figure à cause de la facilité, &c.

COROLLAIRE 3.

Il s'ensuit aussi, qu'au quarré long & Rhomboide (car il n'y a que quatre sortes de Parallelogrammes, comme nous auons dit) la Diagonale coupe les angles inegalement, à cause de l'inegalité
18.& 19.1. des costez en chacun triangle : Voyez la figure de la page 126.

Mais au quarré & au Rhombe, ladite Diagonale coupe les angles en deux egalement, d'autant que les deux costez de l'vn des triangles sont aussi égaux aux deux costez de l'autre, chacun au sien, & l'angle
4. 1. contenu d'iceux égal à l'angle, & comme il appert par ce quarré A B C D, auquel les Diagonales A C, B D,



6.& 8.1. sont aussi égales, & se coupent en deux egalement au poinct E, à cause de l'egalité de tous les angles qui sont aux poincts A, B, C, D, & au poinct E.

Mais si la figure A B C D, estoit Rhombe, deux
24. 1. angles opposez seroient obtus, & les deux autres agus, parquoy les Diagonales seront inegales, &

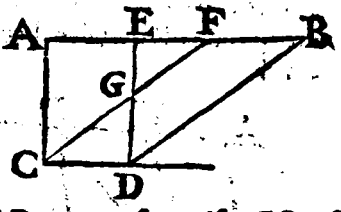
neantmoins

neantmoins se couperont chacune en deux egalement, comme il est facile à entendre de ce que nous auons demonstré, & aussi au quarré long & Rhomboide; & toute figure de quatre costez, en laquelle les Diagonales se coupent en deux egalement, est parallelogramme. Toutes lesquelles choses sont si faciles à demonstrer, entendant les Propositions cy-deuant demonstrées, qu'il n'estoit besoin d'en faire mention. 4. 1. 26. 1. 15. & 1.

THEOREME 25. PROP. 35.

Les parallelogrammes constituez sur vne mesme base, & entre mesmes paralleles, sont égaux entr'eux.

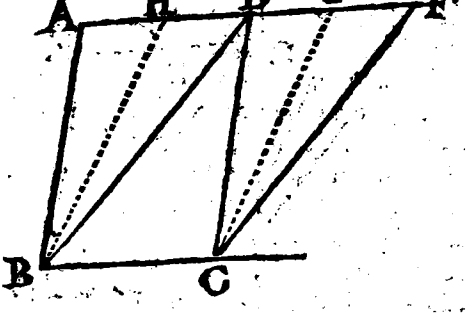
Soient les parallelogrammes A C D E, F C D B, constituez sur mesme base C D: & entre mesmes paralleles A B, C D. Ie dis qu'ils sont égaux entr'eux.



Car d'autant que A C D E, est parallelogramme, a A E, est égale à C D: par mesme raison F B, est égale à C D: b partant A E, F B, sont égales entr'elles: donc si on adiouste la commune E F, c la toute A F, sera égale à la toute E B: d mais A C, est aussi égale à E D. Donc les deux costez F A, A C, du triangle F A C, sont égaux aux deux B E, E D, du triangle B E D, chacun au sien; & les angles A, & E, contenus d'iceux costez, e sont égaux, exterme à l'interne, ou au contraire: donc la base a 34. 1. b 1. c. f. c 2. c. f. d 34. 1. e 39. Prem.

f 4. *Prem.* f F C, sera égale à la base B D, & tout le triangle F A C, à tout le triangle B E D, desquels si on oste
g 3. *c.s.* le commun triangle E G F, & le trapeze A E G C, restera égal au trapeze B F G D, auquels trapezes, si on adiouste derechef le commun triangle C D G,
h 2. *c.s.* h tout le parallelogramme A C D E, sera égal à tout le parallelogramme B D C F : Donc les parallelogrammes constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Mais si les parallelogrammes constituez sur mesme base B C, estoient A B C D, & D B C F,
34. 1. comme en cette derniere figure, tant le costé A D, que D F, seroit égal à B C, comme auparauant, &
29. 1. A B, à D C, & l'angle F D C, externe à l'interne & oppost A : parquoy les deux costez F D, D C,
4. 1. estans égaux à D A, A B, chacun au sien, & l'angle F D C, égal à l'angle A, tout le triangle F D C, sera
2. *c.s.* égal au triangle D A B : Donc si on adiouste à chacun le commun triangle B C D, le parallelogramme A B C D, sera égal au parallelogramme D B C F.



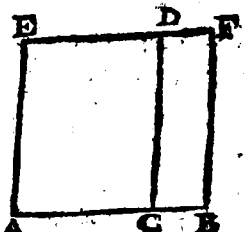
Et finalement, si les parallelogrammes constituez sur la base B C, estoient A B C D, & H B C G,

tant

tant A D, que H G, seroit encore égale à B C : & partant égales entr'elles : donc estant la commune H D, resteroit D G, égale à A H, & comme auparauant le triangle G D C, sera égal au triangle H A B: Donc si à chacun d'iceux l'on adiouste le commun trapeze H B C D, tout le parallelogramme A B C D, sera égal à tout le parallelogramme H B C G. Ce qu'il falloit demonstrer. 34. 1. 3. c. s. 2. c. s.

SCHOLIE.

Il faut icy entendre, que quand Euclide dit, que les parallelogrammes constituez sur mesme base, & entre mesmes paralleles sont égaux, qu'ils doiuent estre tellement constituez sur ladite base, qu'iceux parallelogrammes pris ensemble, ne puissent faire vn seul parallelogramme, c'est à dire, que la base commune, sur laquelle ils sont constituez, doit estre l'vne des paralleles entre lesquelles ils sont constituez, ou en l'vne d'icelles. Autrement cette Proposition ne seroit vniuerselle, comme il appert par cette figure parallelogramme A B F E, où la ligne C D, estant parallele à A E, B F, les parallelogrammes A D, D B, seroient sur mesme base C D, & entre mesmes paralleles A B, E F, & si la base commune C D, ne coupoit pas chacun des costez A B, & E F, en deux également, comme en cette figure, les parallelogrammes A D, D B, seroient inegaux, & si en deux egalement, ils seroient égaux.



Or le Copiste dit, que les parallelogrammes A D, D B, sont constituez sur mesme base C D, & entre mes-

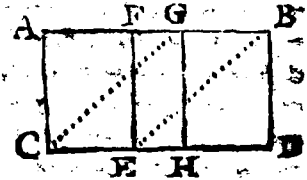
mes paralleles A B, E F; & toutefois il eſt euident qu'ils ne ſont pas égaux. Ce qui aduient (dit il) à cauſe de ce que leur baſe commune C D, n'eſt pas en l'vne ny l'autre des paralleles A B, E F. Mais cét ignorant n'a pas bien entendu ce qu'il a copié, ny ce qu'il veut dire: car l'inegalité de ces deux parallelogrammes A D, D E, n'aduient pas (comme il dit) de ce que la baſe commune C D, n'eſt pas en l'vne des paralleles ſuſdites: mais bien de ce que C D, ne diuiſe pas le total parallelogramme A F, en deux egalement, comme nous auons monſtré.

Il faut donc entendre que leſdits parallelogrammes doiuent eſtre tellement conſtituez ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles, qu'ils ne puiſſent faire vn ſeul parallelogramme, comme font les deux A D, D B, qui ſont le parallelogramme A F.

THEOREME 26. PROP. 36.

Les parallelogrammes conſtituez ſur baſes égales, & entre meſmes paralleles, ſont égaux entr'eux.

Soient les parallelogrammes A C E F, & B G H D, conſtituez ſur baſes égales C E, H D, & entre meſmes paralleles A B, C D. Ie dis qu'ils ſont égaux entr'eux.



Car ſoient menées les lignes droictes C G, E B: D'autant
34. 1. que G B, [i] eſt égale à H D, & C E, eſt poſée égale à la meſme H D, les deux

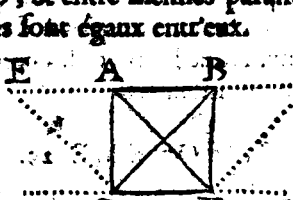
deux [k] G B, & C E, seront égales entr'elles, lesquelles estans paralleles par l'hypothese, les lignes C G, E B; qui les conioignent [l] seront aussi égales & paralleles, & B G C E, sera parallelogramme. Partant, le parallelogramme A C E F, sera égal au parallelogramme G C E B, [m] estant sur mesme base C E, & entre mesmes paralles. Par les mesmes raisons le parallelogramme G H D B, sera égal au mesme parallelogramme G C E B, estant sur mesme base G B, & entre mesmes paralles. Donc les parallelogrammes A C E F, & D B G H, [n] sont égaux entr'eux; partant les parallelogrammes constituez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

k 1. c. f.
l 33. 1.
m 35. 1.
n 1. c. f.

THEOREME 27. PROP. 37.

Les triangles constituez sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont égaux entr'eux.

Soient les triangles A C D, B C D, constituez sur mesme base C D, & entre mesmes paralleles A B, C D. Ie dis qu'ils sont égaux entr'eux.



Soit menée C E, parallele à D A, [o] & D F, parallele à C B, rencontrant A B, prolongée de part & d'autre aux poincts E, & F, les figures A D C E, B C D F, seront parallelogrammes, lesquels estans constituez sur mesme base C D, & entre mesmes paralleles, seront égaux [p] entr'eux; mais les diametres A C, B D, les diuisent

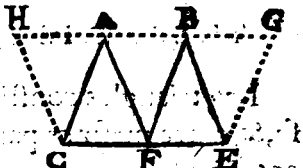
o 31. 1.
p 35. 1.

q 34. 1. r 7. c. s. q en deux egalement. Donc leurs moitiez, qui sont les triangles proposez A C D, B C D, r seront aussi égaux entr'eux. Donc les triangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 28. PROP. 38.

Les triangles constituez sur bases égales, & entre mesmes paralleles, sont égaux entr'eux.

Soient les triangles A C F, B E F, constituez sur bases égales C F, F E, & entre mesmes paralleles A B, C E. Ie dis qu'ils sont égaux entr'eux.



f 31. 1. Car soient menées C H, E G, f paralleles à F A, F B, rencontrant A B, prolongée de part & d'autre aux poincts H, & G, A F C H, & B F E G, seront paral-

t 36. 1. v 34. 2. x 7. c. s. lelogrammes, t & égaux entr'eux, desquels les triangles proposez A C F, B F E, v sont les moitiez: partant iceux triangles x seront aussi égaux entr'eux. Donc les triangles constituez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

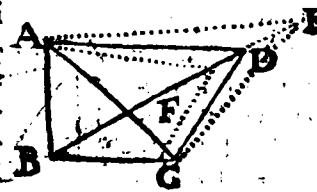
THEOREME 29. PROP. 39.

Les triangles égaux constituez sur mesme base, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.

Sur la base B C, & de mesme part A D, soient constituez deux triangles égaux A B C, D B C. Ie

dis

dis qu'ils ſont auſſi entre meſmes paralleles, c'eſt à dire, que la ligne droicte, menée de A, à D, eſt parallele à B C.



Car ſi A D, n'eſtoit parallele à B C, l'on en pourroit mener du poinct A, vne parallele à icelle B C, qui paſſeroit au deſſus de A D, ou au deſſous: Soit donc menée [y] A F, parallele à B C, ſi A D, ne luy eſt parallele, & ſoit coniointe C F. [y] 31. *Prem.*

D'autant que A F, B C, ſont paralleles, le triangle, F B C, ſera égal au triangle [z] A B C, mais le triangle D C B, eſt égal au meſme triangle A B C, par l'hypotheſe: donc les triangles [a] F B C, & D C B, ſeront égaux entr'eux, la partie & le tout: ce qui eſt abſurde. [z] 37. *Prem.* [a] 1. *e. ſ.*

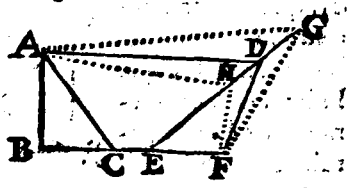
Si l'on dit que la ligne parallele à B C, menée du poinct A, vers D, paſſera au deſſus de A D, il en arriuera la meſme abſurdité: donc A D, eſt parallele à B C. Partant les triangles égaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 30. PROP. 40.

Les triangles égaux, conſtituez ſur baſes égales, & de meſme part, ſont auſſi entre meſmes paralleles.

Sur les baſes égales B C, E F, & de meſme part A, D, ſoient conſtituez les triangles égaux A B C, D E F. Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles: c'eſt à dire, que la ligne menée du poinct A à D,

est parallele à B F,

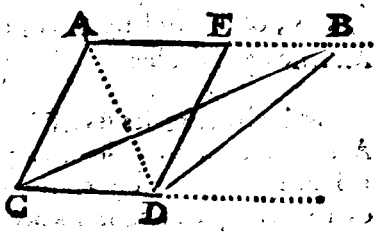


Car autrement on pourroit mener vne ligne parallele à B F, du poinct A, laquelle tomberoit au dessous de A D, ou au dessus.

b 31. 1. Soit donc menée A G, parallele à [b] B F, s'il est possible, & soit coniointe G F. D'autant que les 31. 1. lignes A G, B F, sont paralles, le triangle G E F, sera égal au triangle A B C, mais le triangle D F E, est égal au mesme triangle A B C, par l'hypothese: c 1. c. Donc les triangles D F E, [c] G E F, seront égaux entr'eux, la partie & le tout, ce qui est absurde. Si la parallele est dite passer au dessous de A D, il en arriuera la mesme absurdité. Donc A D, est parallele à B F: partant les triangles égaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 31. PROP. 41.

Si vn parallelogramme a mesme base qu'vn triangle, & est entre mesmes paralleles que le triangle, le parallelogramme sera double du triangle.



Entre les paralleles A B, C D, & sur la base C D, soit constitué le parallelogramme A C D E, & le

triangle

triangle B C D. Ie dis que le parallelogramme eſt double du triangle B C D.

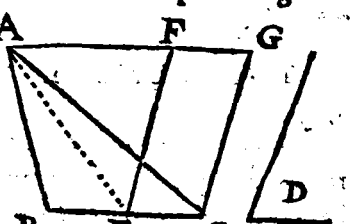
Car ayant mené le diametre A D, le triangle A C D, [d] ſera égal au triangle B C D : mais le parallelogramme A C D E, eſt double du triangle A C D, d'autant [e] que les triangles A C D, A E D, ſont égaux : donc le meſme parallelogramme A C D E, eſt auſſi double du triangle B C D. [d] 37. 1. [e] 34. 1.

THEOREME 11. PROP. 42.

Conſtituer vn parallelogramme égal à vn triangle donné, en vn angle rectiligne donné.

C'eſt à dire, qui ait vn angle égal à vn angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné A B C, & l'angle rectiligne donné D, il faut conſtituer vn parallelogramme égal au triangle donné A B C, en vn angle égal à l'angle D, c'eſt à dire, qui ait vn angle égal à l'angle D.



Soit diuiſé vn des coſtez du triangle, lequel qu'on voudra, ſçauoir B C, en deux [f] également au poinct E, & ſoit coniointe A E, & ſoit fait l'angle C E F, égal à l'angle donné D, puis ſoit menée [g] A F, parallele à B C, rencontrant E F, au poinct : ſoit auſſi du poinct C, menée C G, parallele à E F, rencontrant [f] 10. 1. [g] 31. 1.

A F, prolongée au poinct G, & l'on aura constitué le parallelogramme F E C G, en l'angle C E F, qui est égal à l'angle donné D, lequel parallelogramme, ie dis estre égal au triangle donné A B C.

D'autant que les triangles A B E, A E C, sont
h 38. 1. égaux [h] estans constituez sur bases égales, B E, E C, & entre mesmes paralleles A F, B C, le triangle total A B C, sera double du triangle A E C. Mais
i 41. 1. le parallelogramme F E C G, est [i] aussi double du
k 6. c.f. mesme triangle A E C; donc le triangle A B C, [k] & le parallelogramme F C, seront égaux entr'eux, & le parallelogramme F C, a l'angle C E F, égal à l'angle donné D, par la construction. Partant, nous auons constitué vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique, tant de cette Proposition que de la suiuante, est facile à entendre par la construction d'icelles.

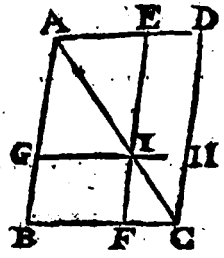
THEOREME 32. PROP. 43.

De tout parallelogramme, les complemens des parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, sont égaux entr'eux.

Au parallelogramme A B C D, soient les parallelogrammes G E, F H, à l'entour du diametre A C, & les complements D I, I B, comme nous auons dit à la 37. Definition. Ie dis qu'iceux complements sont égaux entr'eux.

Car

Car puis que les triangles A B C, & A D C, [l] sont égaux entr'eux (car le diametre A C, diuise le parallelogramme en deux également) & que les deux triangles A G I, A E I, sont aussi égaux entr'eux par la mesme raison, si ces deux derniers sont retranchez des deux premiers [m] les trapezes G B F C I, E D H C I, demeureront égaux entr'eux; mais les triangles F I C, & H I C, [n] sont aussi égaux entr'eux; donc s'ils sont ostez d'iceux trapezes, les complements [o] D I, & I B, demeureront égaux. Donc en tout parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



l 34. 1.

m 3. c. s.

n 34. 1.

o 3. c. s.

SCHOLIE.

Henrion a copié cette Proposition d'vn autre qui l'a ainsi traduite. En tout parallelogramme, les supplements des parallelogrammes qui sont sur le diametre sont égaux entr'eux. Mais s'il sçauoit lire le texte d'Euclide & l'entendre, il auroit bien peu voir qu'il y a ainsi : παντὸς παραλληλογράμμου τοῦ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. C'est à dire, De tout parallelogramme, les complemens des parallelogrammes, qui sont à l'entour du diametre, sont égaux entr'eux. D'où il est facile à voir qu'il faut traduire ces mots: περὶ τὴν διάμετρον à l'entour du diametre, & non pas sur le diametre, comme dit Henrion, puis que selon Euclide, vne figure est dite estre sur vne ligne, quand icelle ligne est vn des costez de ladite figure.

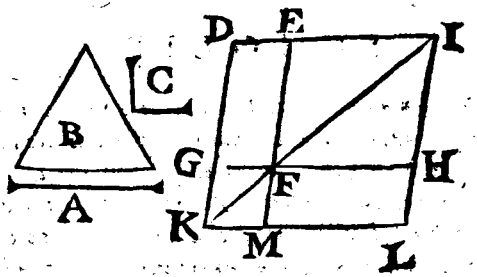
Or

Or ledit Henrion deuoit au moins voir le Latin de Clauius ou autres, où il y a, circa diametrum, *& prendre vn Dictionnaire pour voir la signification, s'il ne la pouuoit entendre.*

THEOREME 12. PROP. 44.

Sur vne ligne droicte donnée, appliquer vn parallelogramme égal à vn triangle donné, en vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnée A, & le triangle B, & l'angle rectiligne donné C, il faut appliquer vn parallelogramme à la ligne donnée A, égal au



triangle donné B, en vn angle égal à l'angle C, c'est à dire, qui ait triangle égal à l'angle donné C.

Soit constitué le parallelogramme D E F G, p 42. 1. p égal au triangle donné B, ayant l'angle G F E, égal à C, puis soit prolongée G F, au poinct H, en sorte que F H, soit égale à A, & par H, soit menée, q 31. *prem.* H I, q parallele à F E, rencontrant D E, prolongée au poinct I : par apres soit mené le diametre I F, par le poinct F, rencontrant D G, prolongée à K, &

& par K, ſoit menée K L, parallele à G H, rencontrant I H, prolongée à L, & ſoit prolongée E F, au poinct M. Ie dis que le parallelogramme L M F H, eſt le requis : car il a le coſté F H, égal à la ligne donnée A, par la conſtruction & l'angle H F M, eſt égal à l'angle E F G, lequel eſt faict égal à l'angle C : donc H F M, ſera auſſi égal à C : & finalement le parallelogramme F L, eſt égal au parallelogramme G E, le complement, au complement, lequel G E, eſt fait égal au triangle B. Donc F L, ſera auſſi égal à B : Donc à vne ligne droicte donnée, &c. Ce qu'il falloit faire. r 31. 1. f 15. 1.

Si le faquin Copiſte, ou autre beſte Arcadienne de ſa ſorte, comme ſon Traducteur (car ils ſont deux aſſociez, ſçauoir vn quidam, qui traduit ce qui ne l'eſt pas, collige & rapſodie ce qui eſt traduit, & baiſſe le tout à copier à Henrion, pour faire imprimer & vendre.

Hos breuitas ſenſus fecit coniungere binos.)

Veut dire qu'Euclide a deſcrit le parallelogramme ſur la ligne propoſée, & non ſur vne égale. Ie luy reſponds qu'il n'entend pas Euclide : car ſelon Euclide, conſtituer vne figure ſur vne ligne donnée, ou ſur vne égale, cela eſt indifferent, comme l'on peut colliger de la ſuiuante Propoſition, & de pluſieurs autres cy-apres, comme de la 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. du ſecond & autres, par leſquelles il eſt manifeſte que quand vne figure eſt dite eſtre deſcrite ſur vne ligne propoſée, n'eſt autre choſe à dire, ſinon que ladite figure ait le coſté, ſur lequel elle eſt dite eſtre deſcrite, d'vne certaine longueur ou interualle determinée par ladite ligne propoſée, comme il appert par les Propoſitions alleguées. Mais reuenons à noſtre Propoſition, laquelle ſuffit

poinct

pour monstrer leur bestise & asnerie ; Voicy donc ce que dit Euclide : παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, sur vne ligne droicte donnée, constituer vn parallelogramme égal à vn triangle donné, en vn angle rectiligne donné. C'est à dire, selon la longueur ou quantité de la ligne proposée : car παρὰ auec l'accusatif ; veut dire *ad*, qui signifie entr'autres significations, selon, comme il appert de Ciceron, *ad meum sensum*, selon mon aduis, ou selon qu'il me semble : & Seneque, *ad naturam viuere*, selon nature, &c.

Donc si Euclide n'entend pas selon la longueur ou quantité d'vne ligne droicte proposée ; comme le l'interprete, il a failly tout le premier, comme i'ay desia monstré, & comme il appert icy par son texte, où il dit qu'il faut constituer le parallelogramme en vn angle rectiligne donné, & ne le fait pas, mais il le fait en vn angle égal au proposé ou donné. Il ne fait donc qu'vne partie de ce qu'il propose, & le tout se peut faire en faisant la ligne proposée, l'vne de celles qui contiennent l'angle. C'est donc par accident que le parallelogramme est icy construit sur la mesme ligne proposée, & ie l'ay fait sur vne égale, pour monstrer que cela est indifferent, & que c'est faire la mesme chose ; & pour le faire comme ils veulent dire, il n'y a qu'à prendre la ligne F H, en nostre figure pour la ligne proposée, & la prolonger à G, en sorte que F G, soit égale à la moitié de l'vn des costez du triangle, & faire G E, égal à B, ayant l'angle G F E, égal au donné, & faire au reste comme il est dit auparauant. 41. 1.

Il est donc facile à voir, que ces deux ignorans calomniateurs

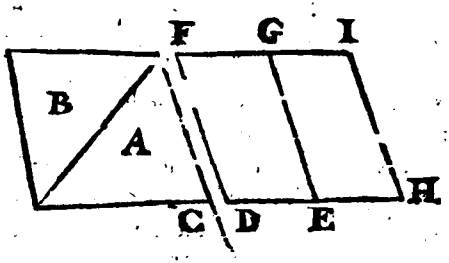
calomniateurs ſont tous deux venus d'Arcadie, *Arcades ambo*, mais toutefois *non cantare pares, nec reſpondere parati* : mais bien pluſtoſt, *rudere parati*, comme ſont les aſnes de leur ſorte, leſquels ne pouuans reſpondre categoriquement, ont recours aux iniures & calomnies, ce que ie n'admire, croyant que le Traducteur a encore la cerueſle auſſi mal diſpoſée, qu'il auoit quand il iettoit ſon argent par la feneſtre en la ruë ; & n'y a perſonne, s'il n'eſt deſpourueu d'entendement, qui ne voye bien que leurs reſueries procedent d'vne pure ignorance, diſant qu'il appert ainſi de Commandin : dequoy ie fais tout autant d'eſtat, que s'il n'auoit rien dit.

PROBLEME 13. PROP. 45.

Conſtituer vn parallelogramme égal à vne figure rectiligne donnée, en vn angle rectiligne donné.

Soit le rectiligne donné A B, diuiſé en deux triangles, & l'angle rectiligne donné C, il faut conſtituer vn parallelogramme égal au rectiligne donné A B, qui ait vn angle égal à l'angle rectiligne donné C.

Soit



c 42.1. Soit fait le parallelogramme D G, c égal au triangle A, ayant l'angle F D E, égal à l'angle rectiligne donné C, puis à la ligne G E, soit appliqué le
v 44.1. parallelogramme E I, égal v au triangle B, ayant l'angle G E H, égal à l'angle C, & l'on aura fait ce qui est requis.

Car d'autant que chacun des angles F D E, &
x 1.c.f. G E H, est fait égal à l'angle C, x ils seront égaux
y 2.c.f. entr'eux. Donc si l'on adiouste l'angle G E D, y les deux G E D, G E H, seront égaux aux deux G E D,
29. 1. F D E : mais F D E, G E D, sont égaux à deux droicts : donc G E D, G E H, seront aussi égaux à
z 14.Prem. deux droicts z partant D E H, sera vne ligne droicte. Par les mesmes raisons l'on prouuera que F G, G I, sont vne ligne droicte. Or puisque chacune
a 34. 1. des lignes D F, H I, est égale & parallele a à E G, elles seront égales & paralleles entr'elles, & les
b 30. 1. lignes droictes F I, D H, qui les conioignent b seront aussi égales & paralleles : partant D I sera parallelogramme, fait des deux D G, F I, égaux aux deux triangles A, B. Donc le parallelogramme D I, est égal au rectiligne A B, ayant l'angle D, égal à l'angle rectiligne donné C. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

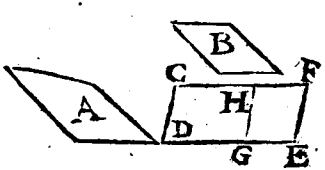
Semblablement, s'il y auoit plusieurs rectilignes donnez, l'on constituera vn parallelogramme égal à iceux, les ayans reduits en triangles, & ayans constitué autant de parallelogrammes égaux à iceux triangles, chacun au sien, par la 44. Proposition, comme nous auons fait en ce Probleme. Car puisque tous ces parallelogrammes font vn seul parallelogramme, comme il est icy demonstré, l'on aura constitué vn parallelogramme, égal à tous les rectilignes proposez.

Or la pratique de ce Probleme peut estre entendue de celle de la precedente Proposition, plusieurs fois repetée.

Nous rapporterons icy vn Probleme de Pelletier fort vtile, qui est tel.

Deux figures rectilignes estans proposées, trouuer l'excez de la plus grande par dessus la plus petite. C'est à dire, la difference entre les deux.

Soient les rectilignes donnez A, & B, & soit A, le plus grand, il faut sçauoir de combien le rectiligne



A, excede le moindre B. Soit fait le parallelogramme C D E F, en quelconque angle D, & égal au rectiligne A, & sur la ligne C D, soit fait le parallelogramme c 34. 1.

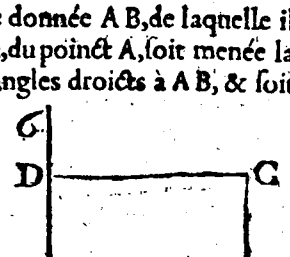
C D G H, ayant le mesme angle D, égal au plus petit rectiligne B.

D'autant que le parallelogramme C D E F, excede le parallelogramme C D G H, du parallelogramme G F, la figure A, excedera pareillement la figure B, du mesme parallelogramme G F. Ce qui est proposé.

PROBLEME 14. PROP. 46.

D'vne ligne droicte donnée, descrire vn quarré.

Soit la droicte ligne donnée A B, de laquelle il faut descrire vn quarré, du poinct A, soit menée la
d 11. *Prem.* droicte ligne A G, [d] à angles droicts à A B, & soit posée A D, égale à A B, & du poinct D,
e 31. *Prem.* soit menée [e] D C, parallele à A B: semblablement soit menée B C, parallele à A D, rencontrant D C, au poinct C, la figure A B C D, sera parallelogramme: & partant le costé [f] D C, égal à A B, & A D, égal à B C:
f 34. 1.
g 1. *ef.* mais A D, est posée égale à A B, donc B C, [g] sera aussi égale à A B: partant A B C D, sera equilatere. Ie dis qu'il est aussi rectangle.



h 28. 1. Car d'autant que A D, B C, sont paralleles, [h] les angles A, & B, sont égaux à deux droicts: mais A, est faict droict. Donc B, sera aussi droit, & les deux
i 34. 1. oppoſez D, & C, [i] sont égaux à iceux, & partant

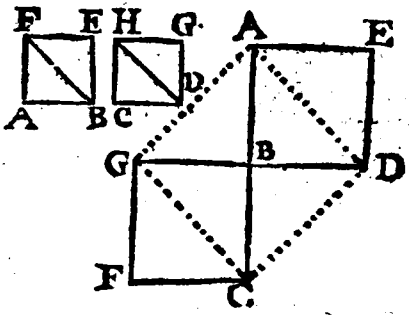
droicts.

droicts. Donc le parallelogramme A C, eſt rectangle & equilatere, & partant ſera quarré. Donc d'vne ligne droicte donnée, nous auons deſcrit vn quarré. Ce qu'il falloit faire.

THEOREME DE PROCLVS.

Les quarrez de lignes égales ſont égaux entr'eux: & des quarrez égaux, les lignes ſont égales.

Soient premierement les lignes droictes A B, C D, égales. Ie dis que les quarrez d'icelles A B E F, C D G H, ſont ſemblablement égaux entr'eux: Car ayant mené les diametres B F, D H, les deux coſtez B A, A F, du triangle B A F, ſont égaux aux deux D C, C H, du triangle D C H, chacun au ſien, puis que par la definition du quarré A F, C H, ſont égales à A B, C D: mais les angles A, & C, ſont égaux, ſçauoir droicts. [k] Donc les triangles B A F, D C H, ſeront égaux: leſquels eſtans les moitiez des quarrez, les quarrez totals ſeront auſſi égaux. Ce qui eſt propoſé.



[k] 4. 1.

Soient derechef les quarrez A B D E, B C F G, égaux. Ie dis pareillement que les lignes d'iceux A B, B C, ſont égales. Car ſoient conioints iceux

quarrez à l'angle B, de sorte que les droictes lignes A B, B C soient constituées directement; d'autant que les angles A B G, A B D, sont droicts, les lignes
l 14.1. droictes G B, B D, l seront aussi constituées directement. Et soient menez les diametres A D, C G, & soient conioinctes les lignes droictes A G, C D.

D'autant donc que les quarrez A B D E, B C F G, sont égaux, les triangles A B D, B C G, leurs moitiez seront aussi égaux: adiouſtant donc le commun triangle B C D, tout le triangle A C D, sera égal à tout le triangle G D C. Partant, puis que les triangles A C D, G D C, sont constituez
m 39.1. sur mesme base C D, & de mesme part: m ils seront aussi entre mesmes paralleles: donc A G, C D, sont paralleles.

Et d'autant qu'au quarré B C F G, le costé B C, est égal à C F, & C G, est commun, les deux costez B C, C G, seront égaux aux deux F C, C G, chacun au sien, & la base F G, du triangle F C G, égale à la base G B, du triangle B C G: car ce sont les costez
n 8.1. du quarré, donc n l'angle F C G, sera égal à l'angle B C G: & partant chacun sera demy-droict: car le total F C B, est droict, selon le mesme discours les deux angles B A D, E A D, seront chacun demy-droicts, & les deux A D B, A D E, aussi demy-droict: & partant les deux alternes D A C, G C A, seront égaux entr'eux, chacun estant demy-droict. Donc
o 27.1. A D, C G, o seront paralleles, & A G C D, sera paral-
p 34.1. lelogramme: p & partant les lignes droictes A D, C G, seront égales. D'autant donc qu'aux triangles A B D, B C G, les costez A D, C G, sont égaux, & les angles ausquels ces costez sont adiacents, sont aussi égaux entr'eux estans demy-droicts, comme
q 26.1. nous venons de monstrer: q les deux autres costez

A B,

A B, B D, seront égaux aux deux autres costez G B, B C, chacun au sien. Ce qui est proposé.

SCHOLIE.

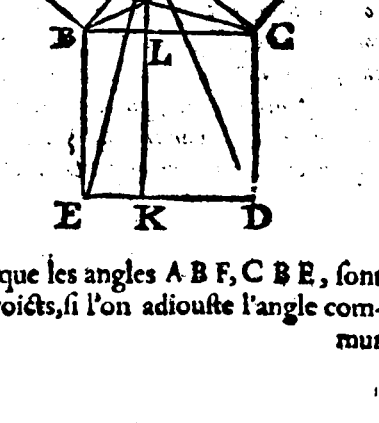
Ceci se peut demonstrer plus briefuement, si l'on entend que l'vn des quarrez soit posé sur l'autre: car si les lignes sont égales, l'vne estant posée sur l'autre, elles conuiendront entr'elles. Et puis que les angles sont aussi égaux, sçauoir droits, ils conuiendront semblablement entr'eux, & partant tout le quarré conuiendra sur tout le quarré. Mais si les quarrez sont égaux, ils conuiendront entr'eux, à cause de l'égalité des angles. Donc les lignes conuiendront aussi, autrement l'vn des quarrez seroit plus grand que l'autre. Or la pratique de ce Probleme 46. est fort facile. Car si à l'vne des extremitez de la ligne donnée, comme au poinct A, l'on mene A D, à angles droits, & égale à la mesme ligne droicte donnée A B, & des poinctz B, & D, comme centres, & à l'interualle A B, l'on descrit deux arcs qui s'entre-coupent au poinct C, & que l'on mene les lignes droites B C, D C, l'on aura descrit vn quarré. Car puisque A B C D, selon la construction, est vne figure equilatere, c'est à dire, de costez égaux: & parmam a les costez opposez égaux, elle sera parallelogramme (comme l'on peut colliger des Definitions des figures quadrilateres) & ayant l'angle A, droit par la construction, l'angle B, sera [29.1.
aussi droit, & leurs opposez D, & C, droicts, &c. [34.1.

THEOREME 33. PROP. 47.

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est égal aux quarrez des costez qui contiennent le mesme angle droict.

Soit le triangle A B C, qui ait l'angle B A C, droict, & des trois costez A B, B C, C A, soient
t 46.1. t descrits les trois quarrez E D, C I, & A F. Ie dis que le quarré B D, descrit du costé B C, qui soustient l'angle droict A, est égal aux deux quarrez C I, & A F, descrits des costez, qui contiennent ledit angle droict.

v 31.1. Soit menée A K, v parallele à B E, ou à C D, coupant B C, au poinct L, & soient iointes les droictes lignes A D, A E, C F, B H: d'autant que les angles BAC, BAG sont droits,
x 14. *Prem.* x GA, A C, feront vne seule ligne droicte par mesme raison B A, A I, feront aussi vne ligne droicte. Derechef, d'autant que les angles A B F, C B E, sont égaux estans droicts, si l'on adiouste l'angle commun



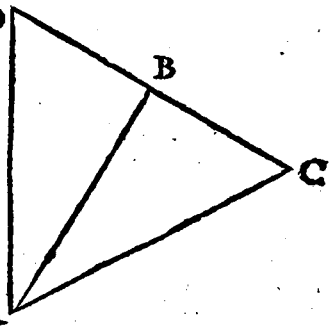
mun A B C, le tout A B E, sera [y] égal au tout C B F: y 2. c. s.
semblablement, le tout A C D, sera égal au tout B C H : D'autant donc que les deux costez A B, B E, du triangle A B E, sont égaux aux deux C B, B F, du triangle C B F, chacun au sien, comme il appert par la Definition des quarrez, & les angles A B E, C B F, contenus d'iceux costez, sont monstrez égaux, [z] iceux triangles A B E, C B F, z 4. 1.
seront égaux : mais le parallelogramme A F, est [a] a 41. 1.
double du triangle C B F, estant sur mesme base, & entre mesmes paralleles. Il sera donc aussi double du triangle A B C, & le parallelogramme B K, est double du mesme triangle A B C, estant sur mesme base, & entre mesmes paralleles: partant le parallelogramme B K, sera égal au quarré A F.

Par mesme discours on monstrera que le parallelogramme L D, est égal au quarré C I. Donc le quarré E C, sera égal aux deux quarrez A F, C I, Donc aux triangles rectangles &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 34. PROP. 48.

Si le quarré descrit d'vn des costez d'vn triangle, est égal aux quarrez des deux autres costez d'iceluy ; l'angle contenu sous les deux autres costez du triangle est droict.

Au triangle A B C, le quarré du costé A C, soit égal au quarrez des costez A B, B C. Ie dis que l'angle A B C, est droict.



Soit menée B D, égale à B C, & à angles droicts à A B, & ſoit ioincte A D: Puis que A B D, eſt droit, le quarré de A D, eſt égal aux deux quarrez de A B, B D : mais le quarré de B D, eſt égal au quarré de B C, puis que les lignes B D, B C, ſont faictes égales, parquoy le quarré de A D, ſera égal aux quarrez de B A, B C. Donc puis que le quarré de A C, eſt égal aux meſmes quarrez B A, B C, iceux quarrez de A C, & A D, ſeront égaux: & partant les lignes A D, A C, égales. D'autant donc qu'aux triangles A B D, A B C, les deux coſtez B D, B A, ſont égaux aux deux B A, B C, chacun au ſien, & les baſes A C, A D, égales, les angles au poinct B, contenus d'iceux coſtez, ſeront égaux entr'eux; mais A B D, eſt faict droict: Donc A B C, ſera auſſi droict: partant le quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

b 11. 1.

c 47. 1.

d 1. c. ſ.

e 8. 1.

Fin du premier Liure.

LIVRE

LIVRE SECOND,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

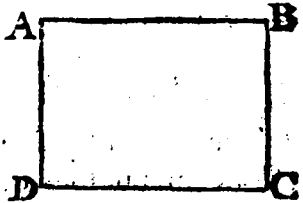
DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, eſt dit eſtre contenu ſous deux lignes droictes, qui contiennent l'angle droict.

EVCLIDE traicte en ce ſecond liure, des puiſſances des lignes droictes, recherchant la quantité des quarrez des parties de toute ligne droicte diuiſée, & des parallelogrammes rectangles, contenus ſous les parties de la meſme ligne diuiſée, tant comparez entr'eux qu'auec le quarré de la toute, &c. Et pour cette cauſe il explique premierement icy, par ces deux Definitions, deux choſes qui ſont neceſſaires pour bien entendre ce qui doit eſtre demonſtré cy-apres.

En la premiere il declare ſous quelles lignes eſt dit eſtre contenu le parallelogramme rectangle, & que c'eſt à dire, vn parallelogramme eſtre contenu ſous deux lignes droictes. Ce que pour plus

facilement entendre, il faut premierement ſçauoir que tout parallelogramme rectangle eſt celuy qui a tous les angles droicts, & y en a de deux ſortes, ſçauoir le quarré, & quarré plus long d'vne part, ou quarré long: car en iceux tous les angles ſont droicts, comme nous auons dit aux Definitions. Et en tout parallelogramme ſi vn ſeul angle eſt donné droict, les trois autres ſeront neceſſairement droicts. Pour exemple, au parallelogramme A B C D, ſoit l'angle A, droict. Ie dis que les trois autres B, C, D, ſont auſſi droicts, car puis que A B, D C: ſont paralleles, [f] les deux angles internes A, & B, ſont égaux à deux droicts: mais A, eſt droict par l'hypotheſe; donc B, ſera droict auſſi. Mais [g] d'autant que chacun eſt égal à ſon oppoſé comme l'angle A, à l'angle C, & l'angle B, à l'angle D; les angles D, & C, ſeront droicts auſſi.



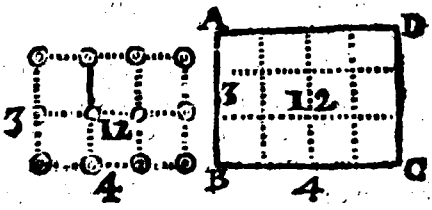
f 29. 1.

g 34. 1.

Donc Euclide dit, que tout parallelogramme rectangle eſt dit eſtre contenu ſous deux lignes droictes, qui contiennent vn angle droict, comme le parallelogramme rectangle A B C D, eſt dit eſtre contenu ſous A B, A D, ou ſous A D, D C, ou finalement ſous A B, B C, d'autant que chaque deux de ces lignes ainſi priſes, expriment la grandeur ou eſpace de tout le parallelogramme, ſçauoir vne, comme A B, ou D C, ſa longitude, & l'autre; comme A D, ou B C, ſa latitude. Donc eſtans exprimées deux lignes au parallelogramme rectangle qui contiennent l'angle droict, on con-

çoit

çoit incontinent toute la quantité d'iceluy, & on entend auſſi ſa longitude & latitude. Il aduient auſſi, que par le mouuement imaginaire d'vne des lignes ſelon l'autre, eſt conſtitué tout ce parallelogramme. Car ſi on conçoit en l'entendement, que la droicte ligne A B, ſe meut de trauers ſelon A D, en ſorte qu'elle conſtituë touſiours vn angle droict auec A D; iuſques à ce que le poinct A, ſoit paruenu au poinct D, & le poinct B, au poinct C, tout le parallelogramme A D C B, ſera de[crit]: le meſme aduiendra ſi A D, eſt poſée ſe mouuoir de trauers ſelon A B. Donc à bon droict vn parallelogramme rectangle eſt dit eſtre contenu ſous deux telles lignes droictes.



Or ceci a auſſi grãde affinité & conuenance auec la multiplication d'vn nombre par vn autre. Car tout ainſi que de la multiplicatiõ de 3. par 4. eſt produit 12. qui eſt conſtitué en forme de parallelogramme, d'où il eſt dit eſtre cõtenu ſous 3. & 4. Ainſi le parallelogramme A B C D, contenu ſous les deux lignes droictes A B, B C, deſquelles celle-là ſoit 3. palmes ou autres meſures, & celle-cy 4. contient 12. palmes quarrées, qui eſt fait du paſſage ou mouuement imaginaire de la ligne A B, de 3. palmes, en la ligne, ou ſelon la ligne B C, de 4. palmes, comme repreſente la figure: Ce qui eſt cogneu aux Arithmeticiens & aux Geometres, & eſt demonſtré par Regiomontanus au liure 1. des trian-

gles,

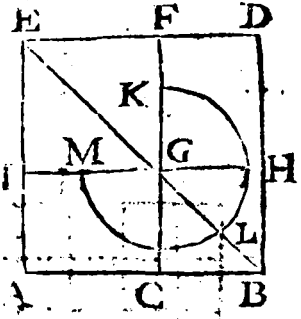
gles, Proposition 16 D'où vient que quelques-vns disent que le parallelogramme rectangle est constitué ou faict du produict de deux lignes qui sont autour de l'angle droict, l'vne par l'autre : comme le precedent parallelogramme est produit de la ligne A B, en B C, ou (ce qui est le mesme) de la ligne B C, en A B : car le mesme parallelogramme est produit, soit que la plus petite ligne soit appliquée à la plus grande, ou la plus grande à la plus petite ; semblablement aussi on produit vn mesme nombre, soit que le moindre soit multiplié par le plus grand, ou le plus grand par le moindre, comme il est demonstré par Euclide liure 7. Proposition 16. car 12. est aussi bien produit de 3. en 4. que de 4. en 3.

» Le Lecteur sera icy aduerty, qu'en ce second liure & autres suiuans : le parallelogramme rectangle est appellé par Euclide rectangle simplement : » ce que les autres Geometres obseruent aussi, en » sorte que par le nom de rectangle, il faudra touſ- » jours entendre parallelogramme rectangle. Derechef, afin que ces mesmes lettres ne soient tant de » fois repetées, les Geometres ont de coustume » d'exprimer le parallelogramme, tant rectangle » que non rectangle, par deux lettres seulement, » sçauoir celles qui sont opposées diametralement : » comme pour denoter le parallelogramme cy- » apposé, on dira le parallelogramme A C, ou bien » B D.

1. De tout espace parallelogramme, l'vn, & lequel qu'on voudra des parallelogrammes, descrits à l'entour du diametre d'iceluy,

d'iceluy, auec les deux complements, ſoit appellé Gnomon.

Au parallelogramme A B D E, ſoit rectangle, ou non, ſçauoir lequel ſoit diuiſé en quatre parallelogrammes comme nous auons monſtré en la 37. Definition du premier liure, deſquels C H, I F, ſont dits eſtre à l'entour du diametre & les deux autres A G, G D, ſont dits complements, la figure compoſée duquel qu'on voudra des parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre comme de C H, auec les deux complements A G, G D, telle qu'eſt la figure M L K, eſt appellée Gnomon: par la meſme raiſon la figure H D E I C G, compoſée du parallelogramme I F, qui eſt à l'entour du diametre, & des deux complements A G, G D, ſera appellée Gnomon.

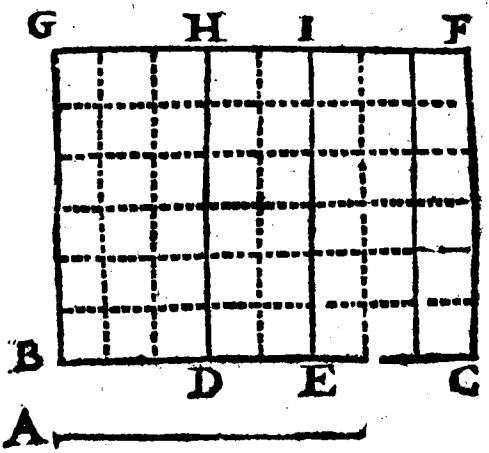


THEOREME 1. PROP. 1.

S'il y a deux lignes droictes, & que l'vne d'icelles ſoit coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu ſous icelles deux lignes droictes, eſt égal aux rectangles contenus ſous la non coupée, & ſous chacune des parties de la coupée.

Soient

Soient deux lignes droictes A, & B C, desquelles B C, soit coupée en tant de parties, que l'on voudra B D, D E, E C. Ie dis que le rectangle compris sous A, & B C, est égal à tous les rectangles ensemblé compris sous la ligne A, non diuisée, & sous chacun des segmens de la diuisée, sçauoir sous A, & B D, sous A, & D E, & sous A, & E C.



Soit le rectangle B F, compris sous A, & B C, c'est à dire, que B G, soit posée égale à A, ce que
h 11. *Prem.* l'on fera ainsi. Soient menées B G, & G F, [h] à angles droicts à la ligne droicte B C, & chacune posée égale à A, & soit conioincte la ligne droicte G F,
i 28. *Prem.* B G, & C F, seront [i] paralleles, à cause des angles
k 1. *c. s.* droicts B, & C, & aussi égales entr'elles [k] puis que chacune est posée égale à A: donc les lignes
33. *Prem.* droictes G F, B C, qui les conioignent [l] seront aussi égales & paralleles, partant B F, sera rectangle,

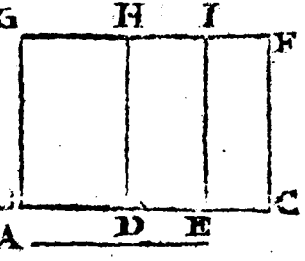
&

& contenu sous B C, & A, c'est à dire B G, son égale, selon la premiere Definition de ce liure. Puis par les poincts D, & E, soient menées D H, E I, [m] paralleles à B G, & partant paralleles [n] entr'elles. Et puis que par la mesme construction, B H, & B I, sont parallelogrammes, les lignes droictes D H, E I, [o] seront égales à B G, c'est à dire à A. Puis donc que B G, est égale à A, le rectangle B H, sera contenu sous la non coupée A, & le segment B D, & le rectangle D I, contenu sous A, & le segment D E, pareillement E F, sera contenu sous A, & le segment E C. Or puis que toutes ces parties-là prises ensemble, sont égales à leur tout B F, il est euident que le rectangle comp. des 2. sera égal aux rectangles comp. de A, & chacun des segments de B C. Donc s'il y a deux lignes. Ce qu'il falloit demonstrer.

[m] 31. 1.
[n] 30. 1.
[o] 34. 1.

SCHOLIE.

Nous auons diuisé ces figures en parties égales, pour faciliter les Demonstrations, & aussi pour les accommoder aux nombres. Ce qui est tres-manifeste par cette figure, en l'appliquant aux nombres, où la ligne B G, égale à A, soit 6. pieds ou autres mesures, & la ligne B C, soit 8. telles parties par la 1. Defin. de ce liure le rectangle B F, sera 48. pieds de superficie, ou autres mesures, & par la mesme raison le rectãgle B H, sera 18. D I, sera 12. & E F, aussi 18.

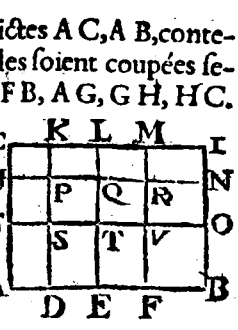


lesquels trois rectangles ensemble font aussi 48. toutes les parties prises ensemble estans égales à leur tout.

Federic Commandin demonstre icy les deux Theoremes suiuans.

1. S'il y a deux lignes droictes, & que toutes deux soient coupées en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu sous icelles deux lignes droictes, est égal aux rectangles contenus sous chacune partie de l'vne, appliquée à chacune partie de l'autre.

Soient les deux lignes droictes A C, A B, contenans l'angle droict A, lesquelles soient coupées selon les parties A D, D E, E F, F B, A G, G H, H C. Ie dis que le rectangle contenu sous A B, A C, est égal aux rectangles ensemble contenus sous A D, A G, A D, G H, A D, H C, D E, A G, D E, G H, D E, H C, E F, A G, E F, G H, E F, H C, F B, A G, F B, G H, F B, H C : Soit accomply le rectangle A B I C, & soient menées D K, E L, F M, p paralleles à A C, ou B I, semblablement soient menées H N, G O, paralleles à A B, ou C I, lesquelles coupent les premieres aux poincts P, Q, R, S, T, V.



p 31.1.

D'autant donc que le rectangle A S, est contenu sous A D, A G, & G P, sous A D, G H, & H K, sous

sous A D, H C, (puis que G S, H P, sont égales à la mesme A D) semblablement les rectangles D T, S O, P L, sont contenus sous D E, A G, D E, G H, D E, H C, (d'autant que D S, S P, P K, sont égales aux mesmes A G, G H, H C, & S T, & O R, égales à D E,) & par mesme raison E V, T R, O M, sont contenus sous B F, A E, E F, G H : E F, H C, & aussi les rectangles F O, V N, R I, sont contenus sous F B, A G, F B, G H, F B, H C : il est manifeste que le rectangle contenu sous A B, A C, est égal aux rectangles contenus sous chacune des parties de l'vne, appliquée à chacune des parties de l'autre, Ce qui est proposé. 34. 1. 34. 1.

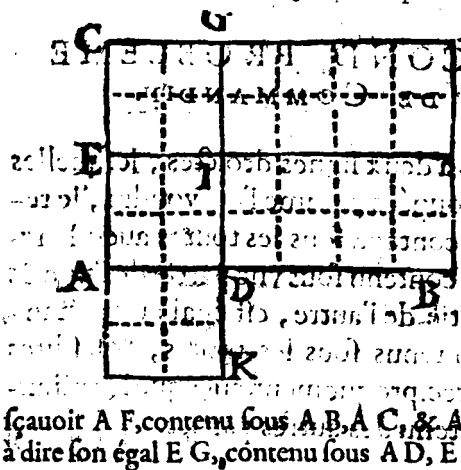
SECOND PROBLEME DE COMMANDIN.

SI y a deux lignes droictes, lesquelles soient coupées comme l'on voudra, le rectangle contenu sous les toutes auec le rectangle contenu sous vne partie de l'vne & vne partie de l'autre, est égal aux rectangles contenus sous les toutes, & lesdites parties reciproquement, auecque le rectangle contenu des autres parties.

Soient deux lignes droites A B, A C, contenans l'angle droit A, lesquelles soient coupées comme l'on voudra aux poincts D, & E, & soit acheué le rectangle A F, & par le poinct D, soit menée D G, parallele à A C, ou B F, & par le poinct E, soit menée E H, parallele à A B, ou C F, coupant D G, au

poinct I, & soit prolongée G D, à K, en sorte que D K, soit égale à E C, & soit acheué le rectangle A K, qui sera égal à E G. Ie dis que le rectangle contenu sous A B, & C, sçauoir A F, auec le rectangle contenu sous les parties A D, E C, qui est E G, ou A K, son égal, est égal aux rectangles contenus sous A B, E C, sçauoir E F, & A C, A D, sçauoir A G, auec le rectangle contenu sous D B, A E, c'est à dire D H.

Car puis que A K, est égal à E G, le rectangle E K, sera égal à A G; parquoy les deux rectangles,



sçauoir A F, contenu sous A B, A C, & A K (c'est à dire son égal E G, contenu sous A D, E C,) sont égaux aux rectangles E F, A G, D H, contenus sous A B, E C; A C, A D, & D B, A E. Ce qui est proposé.

Aux nombres ces mesmes Problemes sont aussi manifestes. Car soient proposez ces deux nombres 10. & 8. le premier desquels soit diuisé en trois parties, 2. 3. 5. & le dernier en 3. & 5. il est

manifeste

manifeſte que 80. nombre produit de 16. par 8. eſt égal aux ſix nombres 6. p. 10, 15. 15. 15. qui ſont produits de chacune des parties 2. 3. 5. multipliées par chacune des parties 3. 5. leſquels adiouſtez enſemble font 80. comme vouloit le premier Theoreme.

Derechef, ſi 2. nombres, comme 4. & 6. ſont diuiſez comme l'on voudra, ſçauoir le premier en 1. & 2. mais le dernier en 2. & 4. Il eſt ſemblablement manifeſte que 24. nombre produit de 4. multiplié par 6. auec 4. nombre produit de 2. par 2. ſçauoir 28. qui ſont les rectangles A F, A K, appliquez aux nombres, ſont égaux à E F, A G, D H, qui font auſſi 28. appliquez aux nombres, comme il appert en la figure.

PROBLEME 2. PROP. 2.

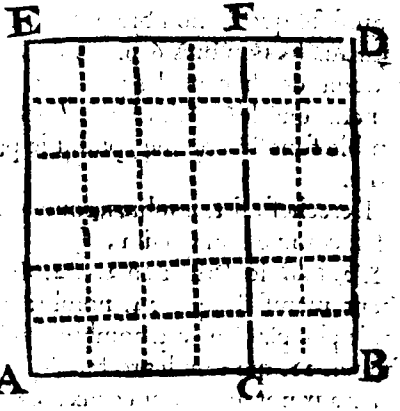
Si vne ligne droicte eſt coupée comme l'on voudra, les rectangles contenus ſous la toute, & chacune des parties, ſont égaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droicte donnée A B, diuiſée comme l'on voudra au poinct C. Ie dis que les rectangles contenus ſous la toute A B, & les parties A C, C B, enſemble ſont égaux au quarré de A B.

Car ſoit deſcrit [f] A D, quarré de la ligne totale A B, & par C, ſoit [t] menée C F, parallele à A E, ou B D, elle ſera [v] égale à A E, c'eſt à dire à A B, laquelle A E, eſt égale, par la definition du quarré. D'autant donc que A E, eſt égale à A B, le rectangle A F, ſera contenu ſous la toute A B, & le

[f] 46. 1.
[t] 31. 1.
[v] 34. 1.

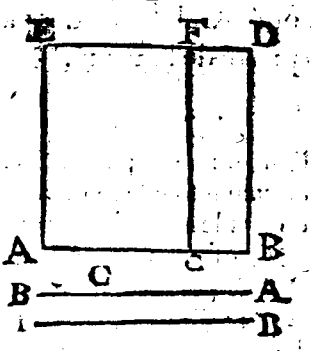
segment A C. Semblablement, d'autant que C F, est égale à A B, le rectãgle C D, est contenu sous la toute A B, & l'autre segment C B. Donc puis que les rectangles C D, A F, sont égaux au



quarré A D, il est manifeste que les rectangles contenus sous la toute A B, & chacun des segments A C, C B, sont égaux au quarré de la toute A B. Donc si vne ligne est coupée, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

AVTREMENT.

Soit ptisé D, égale à A E: D'autant que A B, est diuisée par C, le rectangle contenu sous la non coupée D, & la coupée A B, (qui est le quarré de la toute A B,) sera égal aux deux rectangles compris sous la non coupée D, (c'est à dire sous A B, égale à D,) & vn chacun des segments A C, C B. Ce qui est propos.



SCHOLIE.

SCHOLIE.

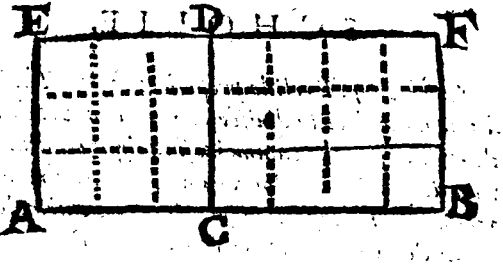
Combien qu'Euclide propose ce second Theoreme d'vne ligne droicte diuisée comme l'on voudra, en deux seulement; neanmoins si la ligne est diuisée en tant de parties que l'on voudra, l'on monstrera en la mesme maniere que toutes rectangles ensemble, contenus de la toute, & de chacun des segments, sont égaux au quarré de la toute, comme il est enident par les figures precedentes.

Cecy se peut voir aussi par les nombres, en diuisant 6. en 4. & 2. ou plus, comme il appert par la figure, l'appliquant aux nombres A F, sera 24. & C D, 12. selon la premiere Definition, lesquels sont 36. & autant est A D, q. de 6.

THEOREME 3. PROP. 3.

Si vne ligne droicte est coupée comme l'on voudra, le rectangle contenu sous la toute & vne des parties, est égal au rectangle contenu sous icelles parties, & au quarré de la partie premierement prise.

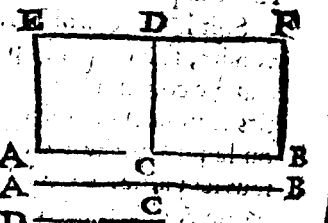
Soit la ligne droicte A B, coupée comme l'on voudra, sçauoir par le poinct C. Ie dis que le rectangle contenu sous la toute A B, & vne des parties, sçauoir A C, (soit que A C, soit la plus grande ou la plus petite) est égal au rectangle contenu sous les parties A C, C B, & au quarré de la susdite partie A C. Car soit descrit A D, quarré, de la partie A C, & par le poinct B, soit menée B F, × parallele à A E, rencontrant E D, prolongée à F. × 31. 1.



D'autant donc que la ligne droicte A E, eſt égale au ſegment A C, par la definition du quarré. Le rectangle A F, ſera contenu ſous la toute A B, & la partie A C. Derechef, d'autant que C D, eſt égale à C A, par la meſme raiſon; le rectangle C F, ſera contenu ſous les parties A C, C B. Donc puis que le rectangle A F, eſt égal au quarré A D, & au rectangle C F; il eſt manifeſte que le rectangle contenu ſous la toute A B, & le ſegment A C, eſt égal au rectangle contenu ſous les parties A C, C B, & au quarré de A C, premierement priſe. Donc ſi vne ligne droicte eſt, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

AVTREMENT.

Soit priſe D, egale à la partie A C. D'autant que la droicte ligne A B, eſt diuiſée au poinct C, le rectangle compris ſous D, & A B, c'eſt à dire, ſous A B, A C; car D,



eſt

eſt égale à AC, & eſt égal au rectangle contenu ſous 1. 2.
DC & CB, c'eſt à dire, ſous AC, CB, & au rectangle contenu ſous DC & AC, c'eſt à dire, au quarré du ſegment AC. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE.

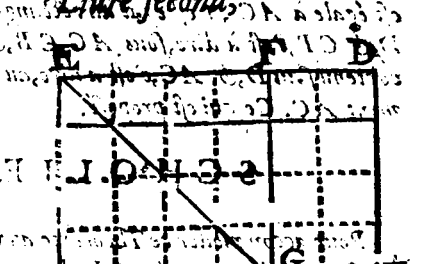
Pour accommoder ce Theoreme aux nombres; ſoit AB, 7. diuiſée en 4 & 3. Ie dis que le nombre 21. produit de 3. par 7. eſt égal à 12. produit des deux ſegments 4, & 3. multipliez l'vn par l'autre; & au nombre 9. quarré de la premiere partie 3. ce que l'operation meſme demonſtre. Semblablement 28. produit de 7. multiplié par 4. eſt egal à 12. produit de 4. en 3. & au nombre 16. qui eſt le quarré du 4. nombre premierement dit, ou pris, comme l'on voit en la figure.

THEOREME 4. PROP. 4.

Si vne ligne droicte eſt coupée comme l'on voudra; le quarré de la toute eſt égal aux quarrez des parties, & à deux fois le rectangle contenu ſous icelles parties.

La ligne droicte AB, ſoit diuiſée comme l'on voudra au poinct C. Ie dis que le quarré de la toute AB, eſt égal aux quarrez des parties AC, CB, & à deux fois le rectangle contenu ſous AC, CB.

Soit deſcrit le quarré de la ligne AB, ſçauoir AD, & ayant mené le diametre BE, ſoit menée par le poinct C, la ligne droicte CF, parallele à AE, ou BD, coupant le diametre au poinct G, & par ice-



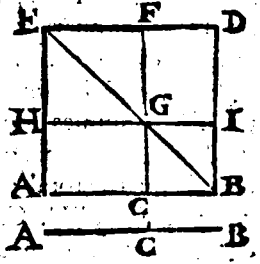
ny point G, soit menée I G H, parallele à A B, ou à D E, & le quarré de A B, sera diuisé en quatre parallelogrammes.

D'autãt qu'au triangle A B E, les deux costez A B, A E, sont égaux, les deux angles A B E, A E B, [z] sur la base E B, sont égaux, mais l'angle A, est droict au quarré, & les trois angles A, A E B, & A B E, [a] sont égaux à deux droits : & partant les deux A B E, A E B, chacun demy-droict, estans égaux entr'eux: & d'autant que H I, A B, sont paralleles, l'angle externe G H E, [b] sera égal à son interne & oppose A, & partant droit : mais les trois angles du triangle [c] E G H, sont égaux à deux droicts, & G E H, est monstré estre demy-droit, & E H G, droit : donc l'autre H G E, sera aussi demy-droit, donc au triangle E G H, les deux angles G E H, E G H, seront égaux, estans chacun demy-droit, partant les deux [d] costez H E, [d] H G, seront égaux : mais les deux [e] costez E F, F G, opposez [e] sont égaux à iceux, chacun au sien : donc le parallelogramme H F, sera quarré, ayant tous les costez égaux, & les angles droits : car vn des angles, sçauoir E H G, estant droit, tous les quatre seront droits, comme il est monstré à la premiere Definition de ce liure. L'on monstrera

z 5. 1.
a 32. 1.
b 29. 1.
c 32. 1.
d 6. 1.
e 34. 1.

monſtrera par les meſmes raiſons que C I, eſt quarré : partant F H, & C I, ſont les quarrez des parties A C, C B, puis que H G, eſt égale à A C. f 34. 1.

Les rectangles A G, G D, ſeront pareillement contenus ſous les ſegments A C, C B : d'autant que C G, G I, ſont égales à C B, à cauſe du quarré C I, & F G, eſt égale à G H, à cauſe du quarré F H, c'eſt à dire g à A C. Partant, puiſque le quarré A D, eſt g 34. Prem.



égal aux deux quarrez H F, & C I, & aux deux rectangles A G, G D, il eſt manifeſte que A D, quarré de la toute A B, eſt égal aux quarrez des parties A C, C D, & a deux fois le rectangle contenu des meſmes parties A C, C B: Donc ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

AVTREMENT.

D'autant que la ligne droicte A B, eſt diuiſée par le poinct C, h *le quarré de la toute A B, eſt égal aux rectangles contenus ſous la toute A B, & chacune des parties A C, C B : mais le rectangle contenu ſous A B, A C,* i *eſt égal au rectangle contenu ſous A C, C B, & au quarré de la partie A C. Semblablement, le rectangle contenu ſous A B, C B, eſt égal au rectangle ſous C B, A C, & au quarré de C B. Donc le quarré A B, eſt auſſi égal aux quarrez de A C, C B, & aux rectangles contenus ſous A C, C B, & ſous C B, A C. Ce qui eſt propoſé.*

h 2. ſect.

i 3. ſect.

COROLLAIRE I.

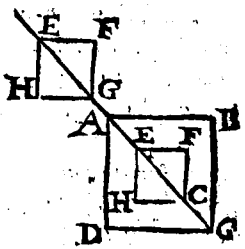
Par ces demonſtrations il eſt manifeſte, que les parallelogrammes deſcrits à l'entour du diametre du quarré, ſont quarrez.

Cela eſt apparent par la premiere demonſtration de ce Theoreme, où il eſt demonſtré que les rectangles C I, F H, qui ſont à l'entour du diametre B E, ſont quarrez: car en tous autres quarrez ce ſera la meſme demonſtration.

Ce Corollaire toutefois ſe doit entendre des parallelogrammes, qui ſont à l'entour du diametre du quarré, & qui ont quelque angle commun auec le quarré total; comme ſont les parallelogrammes C I, F H. Car celuy-là a l'angle A B D, commun auec le quarré, & cettuy-cy l'angle A E D.

Il eſt auſſi veritable de quelconques parallelogrammes, qui ſont à l'entour du diametre du quarré, meſme eſtant prolongé, encore qu'ils n'ayent aucun angle commun auec le quarré, pourueu que leurs coſtez ſoient paralleles aux coſtez du quarré.

Car à l'entour du diametre AC, du quarré B D, ſoit le parallelogramme F H, ſoit qu'il ſoit dedans le quarré, ou qu'il ſoit dehors, lequel toutefois ait les coſtez paralleles aux coſtez du quarré. Ie dis que F H, eſt quarré.



Car puis que A B, E F, ſont paralleles, [k] les angles B A C, F E G, ſeront égaux,

k 29. 1.

égaux, l'externe à l'interne, & par meſme raiſon les angles B C A, F G E, ſeront auſſi égaux : mais les angles B A C, B C A, ſont demy-droicts, comme il a deſia eſté demonſtré. Donc les angles F E G, F G E, ſeront auſſi demy-droicts, [l] & partant les coſtez E F, F G, oppoſez à iceux ſeront égaux [m] & l'angle F, ſera droict : Donc puis que les coſtez E F, F G, [n] ſont égaux à leurs oppoſez G H, H E, le parallelogramme F H, ſera equilateral : mais il eſt auſſi rectangle, comme nous auons monſtré à la premiere Definition de ce liure, d'autant que l'vn des angles F, eſt demonſtré droict. Donc F H, ſera quarré. Ce qui eſt propoſé.

l 6. 1.
m 32. 1.
n 34. 1.

COROLLAIRE 2.

Il s'enſuit auſſi de la demonſtration de cette propoſition que le diamétre de quelconque quarré, diuiſe les angles d'iceluy en deux egalement. Car il a eſté demonſtré que les angles A E B, D E B, ſont demy-droicts. Ce qui eſt auſſi demonſtré par la 34. & 8. Propoſition du 1. liure.

SCHOLIE.

Ce Theoreme quatrieſme ſera auſſi monſtré par les nombres : comme il eſt euident par la figure cy-deſſus appliquée aux nombres. Soit la ligne A B, de 6. pieds, diuiſée en A C, C B, 4. & 4. le quarré de A B, ſera 36. pieds de ſuperficie, & les quarrez de A C, & C B, ſçauoir H F, & C I, ſeront 16. & 4. & les 2. rectangles ſous A C, C B, qui ſont A G, G D, ſont chacun 8. toutes leſquelles parties enſemble font 36, ſçauoir eſt autant que le quarré de la ligne A B, qui eſt A B, D E, comme il eſt manifeſte.

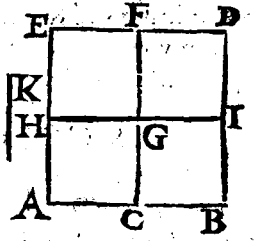
Par

Par ce quatriéme Theoreme, il sera facile de demonstrer cét autre.

Si vne ligne droicte est double d'vne ligne droicte, le quarré descrit de celle-là, est quadruple du quarré descrit de celle-cy. Et si vn quarré est quadruple d'vn quarré, le costé de celuy-là sera double du costé de cettuy-cy.

Soit premierement la ligne A B, double de la ligne K. Ie dis que le quarré de la droicte ligne AB, est quadruple du quarré de la droicte ligne K.

Car ayant diuisé A B, en deux egalement au poinct C, si l'on faict la construction comme en cé quatriesme Theoreme, il y aura quatre parallelogrammes A G, C I, I F, F H, lesquels seront quarrez & égaux entr'eux, puis que tous leurs costez sont égaux, & les angles droits, comme il est facile à demonstrer par la 34. Proposition du liure 1. Partant,



puisque le quarré A D, est égal aux quatre quarrez A G, C I, I F, F H, le quarré de la ligne A B, sera quadruple du quarré de la ligne A C, c'est à dire de la ligne K, qui est égale à A C : car tant l'vne que l'autre est moitié de la ligne A B.

AVTRE

AVTREMENT.

Le quarré de la ligne A B, eſt égal aux quarrez de A C, C B, & a deux fois le rectangle contenu ſous A C, C B. Donc puis que les quarrez de A C, C E, ſont égaux; le rectangle contenu ſous les égales A C, C B, ſera pareillement quarré, & partant égal au quarré de A C : il eſt manifeſte que le quarré de A B, eſt quadruple du quarré de A C, puis qu'il eſt égal à quatre quarrez, vn chacun deſquels eſt égal au quarré de A C. 4. ſecõd.

Secondement; ſoit le quarré de la ligne droicte A B, quadruple du quarré de la ligne droicte K. Ie dis que le coſté A B, eſt double du coſté K. Car ayant diuiſé A B, en deux egalement au poinct C, de ſorte que A B, ſoit double de A C; le quarré de A B, ſera quadruple du quarré de A C, comme il a eſté deſia monſtré. Mais il eſt quadruple du quarré de K, par l'hypotheſe. Donc le quarré de K, & de A C, ſont égaux: & partant la ligne K, & la ligne A C, ſeront égales: mais A B, eſt double de A C, par la conſtruction. Elle ſera donc auſſi double de K.

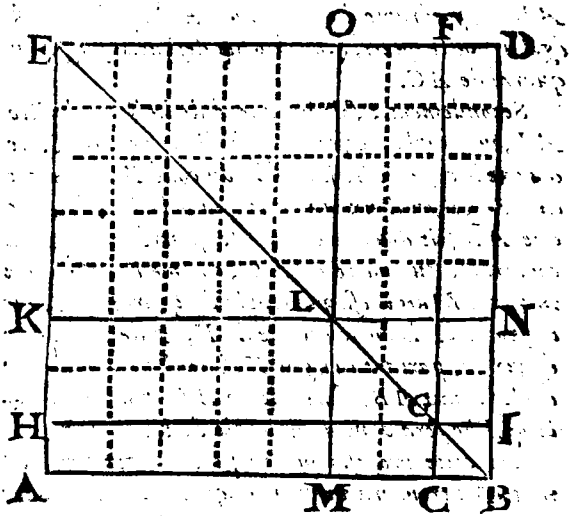
De cette propoſition l'on peut colliger par quel moyen on trouuera vn nombre quarré, lequel auec quel nombre propoſé que l'on voudra impair, faſſe vn nombre quarré.

Pour exemple, voulant trouuer vn nombre q. lequel auec 15. faſſe auſſi vn nombre q. Il faut oſter 1. de 15. reſte 14. Donc la moitié eſt 7. & le quarré eſt 49. lequel auec 15. nombre propoſé, fait 64. nombre auſſi quarré.

L'on fera de meſme, eſtant 1, de tout autre nombre propoſé impair, & prenant la moitié du reſte, & adiouſtant

iouſtant le 9. de cette moitié au nombre propoſé. Ce qui ſera ainſi demonſtré.

Soit le quarré A D, dont le Gnomon H B F G, ſoit 15. le q. C I, 1. ſon coſté C B, ou C G, ſera auſſi 1. & tant A G, que G D, ſera 7. parquoy A C, ou G H, ſera 7. Dont le q. H F, ſera 49. nombre q. lequel auec ledit Gnomon 15. fait le q. A D, de 64. nombre q. Donc la racine quarrée eſt 8.



Semblablement, ſi l'on veut trouuer vn nombre q. duquel vn nombre propoſé impair eſtant oſté, reſte auſſi vn nombre q. Il faut oſter 1. du nombre propoſé, & à la moitié du reſte adiouſter 1. & l'on aura la racine du nombre q. requis. Comme ſi de 15. l'on oſte 1. & que l'on adiouſte 1. à 7. moitié du reſte, l'on aura 8. Donc le q. eſt 64. duquel oſtant 15. nombre propoſé, reſte 49. nombre q.

Clauius n'a pas oublié à mettre cecy en ſuitte de cette 4. Prop. (ſelon qu'il a de couſtume de n'oublier rien de ce qu'il trouue de fait) mais il a oublié à l'entendre, diſant à la fin de ſon diſcours; Regula nihilominus vera eſt, quicunque numerus datus ſit: *La regle eſt neantmoins vraye, quel que ſoit le nombre donné. Ce qui eſt faux: car ſi le nombre propoſé eſtoit pair, comme 16. ayant oſté 1. ſelon la regle, le reſte ſeroit 15. Donc la moitié eſt 7. &* $\frac{1}{2}$ *c'eſt à dire,* $\frac{15}{2}$ *& ſon q. eſt* $\frac{225}{4}$ *ou 56. &* $\frac{1}{4}$ *lequel auecque 16. nombre propoſé, faict 72. &* $\frac{1}{4}$ *qui n'eſt pas nombre q. comme il eſt manifeſte de ce qui eſt demonſtré. Car le Gnomon H B F G eſtant poſé de 16. la racine du q. requis repreſentée en noſtre figure par la ligne A B, ſeroit plus de 8. & moins que 9. Il faut donc que le nombre propoſé ſoit impair, autrement cette regle n'aura lieu.*

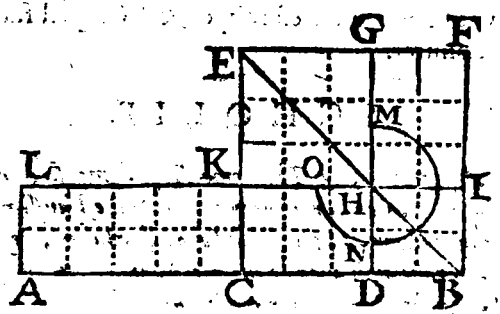
Clauius ſe trompe encore en diſant (pour faire le meſme) que ſi du nombre propoſé l'on oſte quelconque nombre quarré que l'on voudra; (ſçauoir de ceux qui ſe trouuent audit nombre propoſé: car l'on n'en pourroit oſter d'autre) & que l'on diuiſe la moitié du reſte par la racine du 4. oſté, l'on aura le coſté du 4. requis: Comme ſi le nombre propoſé eſtoit 39. repreſenté en la figure par le Gnomon K B O L, duquel ayant oſté M N, 9. nombre q. Dont la racine eſt 3. pour M L, ou M B, reſte les 2. rect. A L, L D, 30. Dont la moitié eſt A L, 15. lequel diuiſé par la racine 3. qui eſt l'autre coſté M L, on aura l'autre coſté K L, 5. pour la racine du 4. K O, 25. lequel auec le nombre propoſé 39. fait 64. nombre 4. Mais tela n'arriue que par accident. Car ſi le nombre propoſé eſt impair, il faut que le nombre q. ſouſtrait ſoit impair,

afin que le reſte ſe puiſſe diuiſer en deux egalement, & que la moitié ſoit diuiſible par la racine du q. oſté, comme il appert par noſtredit exemple 39. en la figure cy-deſſus. Semblablement, ſi de 51. l'on oſte 9. nombre q. reſte 42: dont la moitié eſt 21. lequel diuiſé par 3. R. de 9. donne 7. dont le q. eſt 49. qui auec 51. fait 100. nombre q. Mais ſi dudit nombre 51. l'on oſte 16. nombre q. le reſte 35. ne ſe pourra diuiſer en deux egalement, parquoy on n'en peut pas oſter tel q. que l'on veut de ceux qui y ſont compris, & ſi l'on en oſtoit le nombre q. 25. la moitié du reſte ſeroit 13. qui n'eſt pas diuiſible par 5. racine du nombre q. oſté 25. & ſi cela n'arriuera pas en tous nombres impairs, comme ſi de 17. on oſte 9. nombre q. impair, reſtera 8. Donc la moitié eſt 4. indiuiſible par 3. racine de 9. &c. Et ſi le nombre propoſé eſt pair, comme 18. cela n'arriuera pas auſſi: car de 18. ſoit oſté 4. nombre q. reſtera 14. dont la moitié eſt indiuiſible par 2. racine de 4. & ſi on en oſte 9. nombre q. il en viendra de meſme. Semblablement de ce nombre 26. ſi on oſte les qq. 4. 9. ou 16. reſtera touſiours vn nombre impair: & partant leur moitié indiuiſible par chaque racine des qq. oſtez; en ce nombre 16. cela arriue: car eſtant le q. 4. reſte 12. dont la moitié eſt 6. lequel diuiſé par 2. racine de 4. donne 3. D. & le quarré eſt 9. lequel auec 16. nombre propoſé fait 25. nombre quarré. C'eſt donc par accident que cela ſe fait aux nombres pairs & impairs; & voila comment Clauius n'a entendu ce qu'il a dit icy.

THEOREME 5. PROP. 5.

Si vne ligne droicte est coupée en deux parties égales, & en deux parties inegales, le rectangle contenu des parties inegales de la toute, auec le quarré de la partie du milieu, est égal au quarré de la moitié de la toute.

La ligne droicte A B, soit diuisée au poinct C, en 2. parties égales, & en 2. parties inegales au poinct D. Ie dis que le rectangle contenu sous A D, & D B, parties inegales de la toute A B, auec le quarré de la partie du milieu C D, est égal au quarré de C B, moitié de la toute A B.



Car soit descrit C F, quarré o de C B, & soit mené le diametre B E, & par le poinct D, soit menée P D G, parallele à B F, ou C E, coupant le diametre au poinct H, & par le poinct H, soit menée I K, parallele à A B, & du poinct A, menée A L, o 46. 1. p 31. 1.

M parallele

parallele à C E, rencontrant I K, prolongée au poinct L, les parallelogrammes K G, D I sont à l'entour du diametre B E, seront quarrez : & partant D H, égale à D B, & K H, à C D ; donc le rectangle A H, sera contenu sous A D, D B ; & K G, sera le quarré de C D, lequel A H, auec K G, est égal au quarré C F. Car d'autant que les complements C H, & H F, sont égaux, si l'on adiouste le commun quarré D I, le parallelogramme D F, sera égal au parallelogramme C I. Mais le parallelogramme A K, est egal au parallelogramme C I, estans constituez sur bases egales A C, & C B, entre mesmes paralleles A B, L I : donc A K, sera egal à D F, ausquels si l'on adiouste C H, commun, le Gnomon M N O, sera egal au rectangle A H, parquoy puisque le Gnomon M N O, & le quarré K G, sont egaux au quarré C F, le rectangle A H, auec le quarré K G, sera egal au mesme quarré C F. Donc si vne ligne droicte est coupée, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

¶ *Corell.* 1.4.2.

43.1.

36.1.

SCHOLIE.

Autrement, ce Theoreme sera demonstré auec Maurolycus, en la mesme maniere qu'il est aussi monstré aux nombres, par le Moyne Barlaam, ce que nous ferons aussi auec le mesme Maurolycus, iusques à l'onziesme Proposition exclusiuement.

D'autant que le quarré de C B, est egal aux quarrez de C D, & de D B, & à deux fois le rectangle contenu sous D B, C D : mais le rectangle contenu sous D B, C B, est egal au rectangle contenu sous D B, C D, & au q. de D B ; le q. de C B, sera egal à l'autre q. de C D, auec l'autre rectangle contenu sous D B,

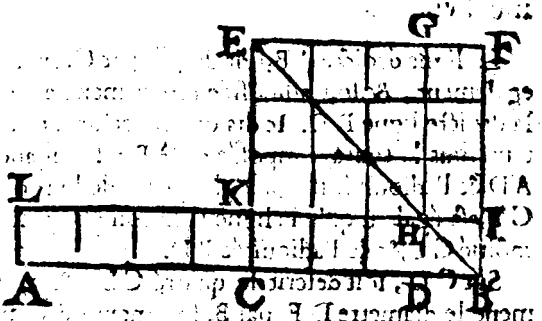
4. *sect.*

3. *sect.*

D B, C D, & au rectangle contenu sous D B, C B, au sous D B, A C. Mais le rectangle contenu sous D B, & la toute A D, x est egale aux rectangles contenus x 1. sect.
sous D B, A C, & sous D B, C D, Donc le q. de C B, sera égal au q. de C D, auec le rectangle contenu sous D B, A D, c'est à dire, le rectangle contenu sous A D, D B, auec le q. de C D, sera egal au q. de C B. Ce qu'il falloit demonstrer.

Le mesme est aussi manifeste en l'appliquant aux nombres. Soit la ligne A B, 10. tant A C, que C B, sera 5. & soit C D, 3. A D, sera 8. & D B, 2. partant le rectangle A H, sera 16. & le q. K G, 9. & le Gnomon aussi 16. lequel auec le q. K G, est 25. qui est le q. C F, & autant vaut le rectangle A H, auec le q. K G: comme il est manifeste.

Par cette 5. Proposition l'on peut aussi trouuer un nombre quarré, lequel auec quel nombre impair que l'on voudra, sera vn nombre quarré: ce que l'on fera en



adiouſtant 1. au nombre proposé, & prenant la moitié du tout, & oſtant 1. d'icelle moitié, l'on aura le coſté du q. requis, comme ſi le nombre donné eſt 7. auec 1. ce ſont 8. Dont la moitié eſt 4. duquel nombre oſtant 1.

le reſte ſera 3. duquel le 9. eſt 9. lequel auec le nombre propoſé 7. fait vn nombre quarré, ſçauoir 16. ce qui ſera ainſi demonſtré. Soit AH, 7. auec DI, 1. ce ſont 8. dont la moitié CI, eſt 4. duquel oſtant DI, 1. reſtera CD, 3. dont le 9. eſt 9. pour le 9. KG, qui auec le rectangle AH, ou le Gnomon nombre propoſé, fait vn nombre quarré. Comme il eſt demonſtré.

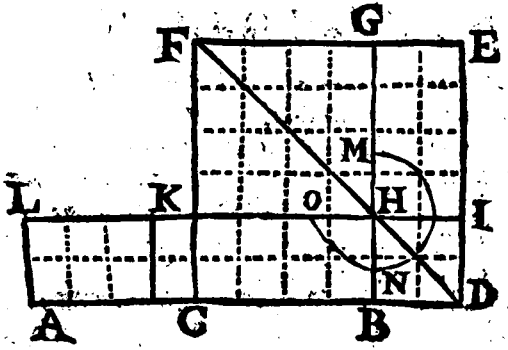
THEOREME 6. PROP. 6.

Si vne ligne droicte eſt coupée en deux parties égales, & qu'on luy adiouſte quelque ligne droicte directement, le rectangle contenu ſous la toute auec l'adiouſtée, & l'adiouſtée, auec le quarré de la moitié, eſt égal au quarré deſcrit de la ligne compoſée de la moitié, & de l'adiouſtée comme d'vne.

La ligne droicte AB, ſoit diuiſée par C, en deux également, & ſoit adiouſtée directement à icelle la droicte ligne BD. Ie dis que le rectangle contenu ſous la toute compoſée de AB, BD; ſçauoir AD, & l'adiouſtée BD, auec le quarré de la moitié CB, eſt égal au q. de la ligne CD, compoſée de la moitié CB, & de l'adiouſtée BD.

Sur CD, ſoit deſcrit le quarré CE, & ayant mené le diametre DF, par B, ſoit menée BG, parallele à DE, ou CF, coupant le diametre au poinct H, & par H, ſoit menée IK, parallele à CD, & par A, ſoit menée AL, parallele à CF, rencontrant IK, prolongée au poinct L. Donc BI, & KG, ſeront quarrez, & DI, ſera égale à BD, & KH, eſt

Corell. 1. 4. 2. v 34. 1.



eſt égale à C B : parquoy le rectangle A I, ſera contenu ſous A D, D B, & K G, ſera le quarré de C B, leſquels rectangle A I, & quarré K G, ſont égaux au quarré C E. Car d'autant que le parallelogramme A K, eſt égal au parallelogramme C H, [2] puiſque les baſes A C, C B, ſont égales : & le parallelogramme H E, eſt égal au meſme C H, le complement au complement, A K, & H E, ſeront égaux entr'eux : Donc leur adiouſtant le commun C I, le Gnomon M N O, ſera égal au rectangle A I: partant puiſque le Gnomon M N O ; auec le quarré K G, eſt égal au quarré C E, le rectangle A I, auec le quarré K G, ſera auſſi égal au quarré C E: Donc ſi vne, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [2] 36. 1.

Ce qui eſt auſſi facile à entendre par noſtre figure, où les rectangles A K, H E, ſont chacun 8. parties égales, à chacun deſquels ſi on adiouſte le rectangle C I, 12. le rectangle A I, vaudra autant que le Gnomon, ſçauoir 18. Dont A I, auec K G, ſera égal à C E, q. comme il appert.

SCHOLIE.

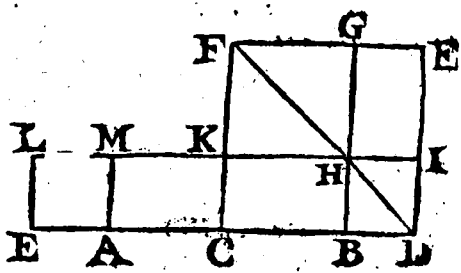
a 4. 1. sect. *Autrement, d'autant que le quarré de C D, est égal aux quarrez de C B, B D, & à deux fois le rectangle contenu sous D B, C B, c'est à dire aux quarrez de C B, B D, & aux rectangles contenus sous D B, C B, & sous D B, A C, (prenant une fois A C, pour C B, qui luy est égale.) Mais le rectangle contenu sous*

b 1. sect. *D B, & la toute A D, est égal aux rectangles sous D B, A C, D B, C B, & sous D B, (qui est le quarré de D B.) Donc le q. de C D, est égal à l'autre q. de C B, auec le rectangle contenu sous A D, D B, auec le q. de C B, est égal au q. de C D. Ce qu'il falloit demonstrer.*

Si l'on considere attentiuement, l'on trouuera que cette 6. Proposition, se peut demonstrer facilement par la precedente 5. Car soit la ligne droicte A B, coupée en deux egalement au poinct C, & à icelle soit adiouſtée B D, directement. Ie dis que le rectangle contenu sous la toute A D, composée de A B, & B D, & l'adiouſtée B D, auec le quarré de la moitié C B, est égal au quarré de C D, composée de la moitié & de l'adiouſtée.

Car soit adiouſtée à A D, la droicte ligne A E, de l'autre part, égale à B D: la toute E D, sera coupée au poinct C, egalement, & au poinct B, inegalement: & d'autant que E A, A C, sont égales à D B, B C, pareillement la droicte ligne E B, sera égale à la droicte A D, puiſque E A, est faite égale à D B, & A B, est commune à toutes les deux. Donc le rectangle contenu sous les parties inegales E B, B D, auec le q. de la ſection d'entre-deux C B, c'est à dire le rectan-

gle



gle contenu sous A D, B D, auec le q. de la moitié C B, sera égal au q. de la moitié C D. C'est à dire, au q. de C D, composé de C B, moitié de la donnée A B, & de l'adiouſtée B D. Ce qui eſt propoſé.

Pour appliquer ce Theoreme aux nombres, ſoit diuiſé 8. en 2. egalement, ſçauoir en 4. & 4. & ſoit adiouſté 2. l'on peut voir comme le nombre 20. produit de tout le nombre compoſé 10. multiplié par l'adiouſté 2. auec 16. q. de la moitié 4. eſt égal à 36. q. de 6. compoſé de la moitié 4. & de l'adiouſté 2. Ce qui ſe peut auſſi entendre par nos figures.

De ce Theoreme l'on collige auſſi vne tres-belle proprieté de la proportionalité Arithmetique, laquelle conſiſte touſiours en vn meſme excez des quantitez proportionelles. Car puiſque A D, excede C D, de la grandeur A C, c'eſt à dire de C B; & C D, excede B D, de la meſme quantité B C, les trois lignes, A D, C D, B D, auront la proportionalité Arithmetique, d'autant que la premiere A D, excede la 2. C D, du meſme excez que la 2. C D, excede la 3. B D. Parquoy puis qu'il eſt demonſtré que le rectangle contenu ſous les extremes A D, B D, auec le q. de l'excez

C B, eſt égal au q. de la moyenne C D, l'on collige manifeſtement qu'en toute proportionalité Arithmetique de 3. lignes, le rectangle contenu ſous les extremes, auec le q. de l'excez, eſt égal au q. de la moyenne. Car 3 lignes proportionnelles, ſelon l'Arithmetique, ſe pourront touſiours conioindre, en ſorte qu'elles ſeront vne ligne qui ſe pourra diuiſer en 2. egalement, laquelle ſoit égale à l'excez entre la 1. & la 3. & de la 3. Comme il appert, ſi les 3. lignes droittes ſont données A D, C D, B D. Car ſi de la premiere A D, l'on oſte D C, égale à la moyenne, & de cette moyenne D C, l'on oſte la 3. D B, la ligne A B, (qui eſt l'excez entre la 1. & la 3.) ſera coupée en deux egalement au poinct C, & à icelle adiouſtée la 3. B D. Car puiſque B C, eſt l'excez entre la moyenne C D, & la 3. B D, qui doit eſtre égale à icelle A C, ſçauoir à l'excez entre la 1. A D, & la moyenne C D, à cauſe de la proportionalité Arithmetique A B, ſera neceſſairement coupée en deux parties égales par le poinct C, & y a meſme raiſon des autres; laquelle choſe ſe voit aux nombres qui ont vn meſme excez: car en ces nombres 4. 7. 10. qui ont meſme excez 3. le nombre 40. produit des externes 4. & 10. auec 9. quarré de l'excez, eſt égal à 49. nombre q. produit du moyen nombre 7.

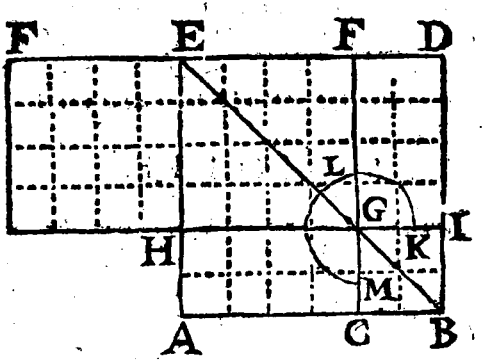
Par cette 6. Propoſition, l'on trouuera vn nombre q. auec lequel quelconque nombre impair propoſé eſtant adiouſté, ſera pareillement vn nombre q. l'operation ſe fera en la meſme maniere qu'en la 4. Propoſition &c.

THEO

THEOREME 7. PROP. 7.

Si une ligne droicte eſt coupée comme l'on voudra, les deux quarrez enſemble, ſçauoir celuy de la toute, & celuy de l'vn des ſegments, ſont égaux à deux fois le rectangle contenu ſous la toute & ledit ſegment, & au quarré de l'autre ſegment.

Soit la ligne droicte A B, coupée comme l'on voudra au poinct C. Ie dis que le quarré de la toute A B, & le q. du ſegment A C, enſemble, ſont égaux à deux fois le rectangle, contenu ſous la toute A B, & ledit ſegment A C: & au quarré de



l'autre ſegment C B. Soit deſcrit le quarré de la ligne A B, ſçauoir le quarré A D, & ayant mené le diametre B E, par C, ſoit menée C F, parallele à A E, ou B D, coupant le diametre au poinct G, par lequel ſoit menée H I, parallele à A B, par le 1. Corollaire de la 4. Propoſ. C I, H F, ſeront quarrez.

c 34.1. Et c d'autant que G H, est egale à A C, la figure H F, sera le quarré du segment A C. Derechef, d'autant que A E, est egale à A B, le rectangle A F, sera contenu sous la toute A B, & le segment A C. Par la mesme raison le rectangle H D, sera contenu sous les mesmes A B, A C, d'autant que D E, & E H, sont egales à A B, A C, à cause des quarrez A D, H F.

D'autant donc que le quarré A D, est égal aux rectangles A F, F I, c'est à dire au Gnomon K L M, & au quarré C I: si l'on adiouste le quarré commun H F, les quarrez A D, H F, seront égaux aux rectangles A F, D H, (chacun desquels est contenu sous la toute A B, & le segment A C,) & à C I, quarré de l'autre segment C B. Donc si vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. Ce qui est aussi manifeste appliqué aux nombres: car A B, estant coupée en 6. parties, A C, sera 4. & C B, 2. & A F, sera 24. & G D, auec H F, aussi 24. & C I, 4. lesquelles parties ensemble font 52. parties egales, & les deux quarrez A D, H F, font aussi 52. Telles parties, &c.

SCHOLIE.

d 4. sect. *Autrement, d'autant que le quarré de A B, d est égal aux quarrez de A C, C B, & a deux fois le rectangle contenu sous A C, C B, si l'on adiouste le q. commun de A C, sçauoir H F, les quarrez de A B, A C, seront égaux au quarré de A C, deux fois, & au q. de C B, & à deux fois le rectangle contenu sous A C, C B. Mais le rectangle contenu sous A B, A C,*

e 3. sect. *e est égal au rectangle contenu sous A C, C B, & au q. de A C: & partant deux fois le rectangle contenu sous A B, A C, est égal à deux fois le rectangle contenu sous A C, C B, & à deux fois le q. de A C:*

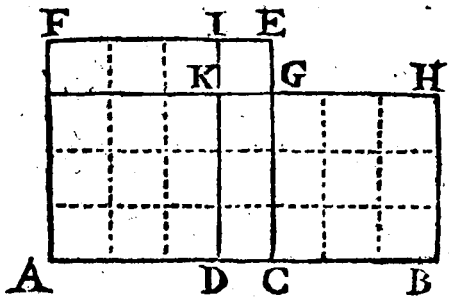
donc

donc les quarrez de A B, A C, sont égaux à l'autre g. de C B, & à deux fois le rectangle contenu sous A B, A C. Ce qu'il falloit demonstrer.

Nous adiousterons icy le Theoreme suiuant de Federic Commandin.

Si vne ligne droicte est coupée en parties inegales, les quarrés d'icelles parties sont égaux au rectangle, contenu deux fois sous lesdites parties, & au quarré de la ligne, par laquelle la plus grande partie excede la plus petite.

Soit la ligne droicte A B, coupée en parties inegales A C, C B, & soit A C, la plus grande partie, & soit prise A D, égale à la moindre partie C B: ainsi D C, soit l'excez, par lequel la partie A C,



excede la partie C B. Ie dis que les quarrez des parties A C, C B, sont égaux à deux fois, le rectangle contenu sous A C, C B, & au quarré de la ligne D C.

Car soient constituez les quarrez A E C H, & soit menée D I, parallele à C E, & prolongée H G,

au

au poinct K : D'autant que A D, eſt égale à C B, ſi l'on adiouſte la commune D C, la toute A C, c'eſt à dire C E, ſera égale à la toute D B : mais C G, eſt auſſi égale à C B, d'autant que C H, eſt vn quarré: Donc la reſtante G E, ſera égale à la reſtante D C: & partant puis que I E, eſt auſſi égale à D C, G E, & I E, ſeront égales, & par ainſi E K, ſera le quarré deſcrit de l'excez D C. Mais d'autant que les rectangles A I, D H, ſont contenus ſous les parties A C, C B, (car A C, eſt égale tant à l'vne qu'à l'autre A F, D B, & C B, égale tant à l'vne qu'à l'autre A D, B H,) il eſt manifeſte que les quarrez A E, & C H, deſcrits des parties A C, C B, ſont égaux aux rectangles A I, D H, qui ſont contenus ſous les parties A C, C B, & à I G, quarré de l'excez D C. Ce qui eſt propoſé. *Ce qui eſt encore manifeſte aux nombres par la figure.*

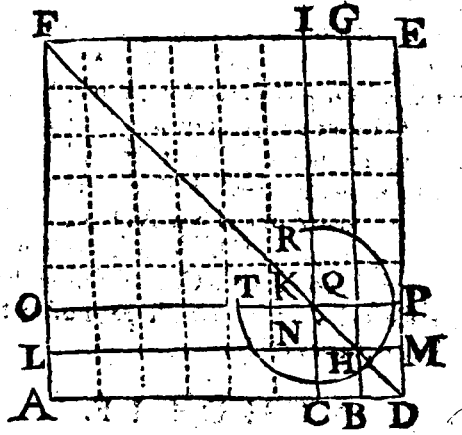
THEOREME 8. PROP. 8.

Si vne ligne droicte eſt coupée comme l'on voudra, quatre fois le rectangle, contenu ſous la toute & vn des ſegments, auec le quarré de l'autre ſegment, eſt égal au quarré décrit de la toute & dudit ſegment, comme d'vne.

Soit A B, diuiſée comme l'on voudra, au poinct C. Ie dis que quatre fois le rectangle contenu ſous la toute A B, & le ſegment C B, auec le quarré de l'autre ſegment A C, eſt égal au quarré de la ligne compoſée de la toute A B, & dudit ſegment C B, comme d'vne.

Car

Car soit prolongée A B, vers D, & soit posée B D, égale à B C, & sur la toute A D, soit descrit le quarré A E, & ayant mené le diametre D F, soient menées C I, B G, paralleles à D E, coupant le diametre aux poincts H, & K, par lesquels soient menées L M, O P, paralleles à A D, lesquelles coupent les premieres paralleles aux poincts N, & Q.



Premierement, les parallelogrammes O I, N Q, B M, L G, C P, qui sont à l'entour du diametre D F, seront quarrez par le 1. Corollaire de la quatrieſme Proposition : & d'autant [f] que O K, est égale à A C; O I, sera le quarré du segment A C. Derechef, puisque N H, est égale [g] à C B, N Q, sera le quarré du segment C B; & partant égal au quarré B M, puisque C B, & B D, sont égales. Partant chacune des lignes B H, H Q, est égale au segment C B; & par ainsi les deux rectangles A H, L Q, seront compris sous la toute A B, & le segment

f 34. 1.

g 34. 1.

h 34. 1. ment C B,[h] puisque L H, est égale à A B. Par mesme raison N G, H E, seront compris sous A B, & C B, puisque les lignes droictes N H, H M, sont égales à C B, & B D; & G H, E M, égales à F L: c'est à dire, à L H, ou A B, son égale. Et d'autant que les quarrez N Q, B M, sont égaux, si l'on adiouste le commun rectangle K G, B M, & K G, ensemble seront égaux au rectangle N G. Parquoy les cinq rectangles A H, L Q, H E, B M, & K G, qui constituent le Gnomon R H T, sont égaux à quatre fois le rectangle contenu sous la toute A B, & le segment C B. Or puisque le Gnomon R S T, & le quarré O I, sont égaux au quarré A E: quatre fois le rectangle contenu sous la toute A B, & le segment C B, auec le quarré de l'autre segment A C, est égal au quarré de la ligne A D, composée de A B, & dudit segment C B. Donc si vne ligne droicte est coupée comme, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. Ce qui s'entendra aussi par nostre figure, diuisée en parties égales.

SCHOLIE.

i 4. 2. *Autrement, d'autant que le quarré de A D,*[i] *est égal aux quarrez de A B, B D, & à deux fois le rectangle contenu sous A B, B D, c'est à dire aux quarrez A B, B C, qui sont L G, B N, auec deux fois le rectangle contenu sous A B, B C: mais les quarrez*

k 7. 2. *de A B, B C,*[k] *sont égaux à deux fois le rectangle contenu sous A B, B C, & au q. de A C: le q. de A D, sera égal à quatre fois le rectangle contenu sous A B, B C, & au quarré de A C. Ce qu'il falloit demonstrer.*

Maintenant soit diuisé le nombre 10. comme l'on voudra,

voudra, en 6. & 4. le nombre 240. qui eſt fait du tout 10. multiplié par la partie 6. quatre fois, auec le nombre 36. q. de l'autre partie 4. c'eſt à dire 256. eſt égal au nombre q. de 16. qui eſt compoſé du nombre donné 10. & de ladite partie 6. comme il eſt manifeſte. En la meſme maniere le nombre 160. qui eſt fait du tout 10. quatre fois multiplié par la partie 4. auec 36. q. de l'autre partie 6. c'eſt à dire 196. eſt égal au q. du nombre 14. compoſé de 10. & 4. comme il eſt euident.

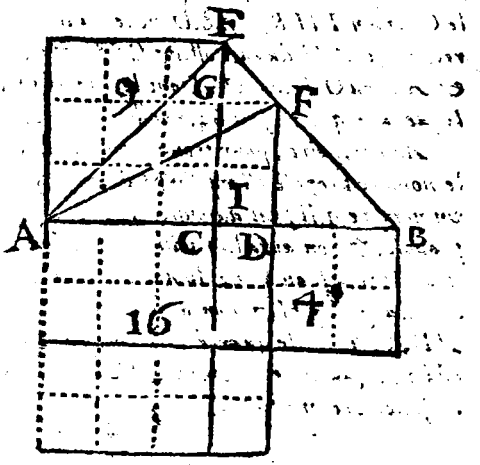
Par cette Propoſition l'on peut trouuer vn nombre q. auec lequel vn nombre propoſé, fera auſſi vn nombre q. Pour ce faire, il faut prendre le quart du nombre propoſé (car il faut qu'iceluy nombre propoſé ſe puiſſe diuiſer en quatre parties égales) & en oſter 1. & le q. de reſte auec le nombre propoſé, fera vn nombre q. comme il appert par la figure cy deſſus, où le Gnomon T H R, eſt 28. Donc le quart eſt 7. pour le rectangle A H, duquel oſtant C I, 1. reſtera L C, 6. & A C, ou O K, auſſi 6. Dont le quarré O I, eſt 36. lequel auecque 28. fait 64. nombre quarré.

Au contraire, pour trouuer vn nombre q. duquel le nombre propoſé eſtant ſouſtrait, reſte pareillement vn nombre q. Il faut adiouſter 1. au quart du nombre propoſé, & l'on aura la racine du nombre quarré requis. Comme ſi au quart du nombre propoſé 28. qui eſt le rectangle A H, 7. l'on adiouſte B M, 1. l'on aura A D, 8. Dont le quarré A E, eſt 64. duquel ayant oſté 28. ſçauoir le Gnomon T H R, reſtera O I, 36. auſſi nombre quarré.

THEOREME 9. PROP. 9.

Si vne ligne droicte eſt coupée en deux parties égales, & en deux parties inegales: les quarrez des ſegments inegaux de la toute, ſont doubles du quarré de la moitié, & du quarré de la ſection du milieu.

Soit coupée la droicte ligne A B, en deux également au poinct C, & en deux inegalement au poinct D. Ie dis que les quarrez des ſegments inegaux A D, D B, enſemble, ſont doubles des quarrez enſemble, qui ſont faicts de la moitié A C, & de la ſection du milieu C D.



Du poinct C, ſoit menée C E, à angles droicts à A B, & poſée égale à A C, & ſoient conioinctes A E, E B; & de D, ſoit auſſi menée D F, à angles droicts

droicts à A B, coupant E B, au poinct F, par lequel soit menée F G, parallele à A B, coupant C E, au poinct G; & finalement soit ioincte A F. D'autant qu'au triangle A C E, les deux costez A C, C E, sont égaux, les deux angles C A E, C E A, seront égaux: mais A C E, est droict; Donc les deux [l] autres vaudront vn droict: & partant l'angle A E C, sera demy-droict. Par la mesme raison l'angle B E C, sera monstré demy-droict, & par consequent le tout A E B, sera droict. Derechef, d'autant qu'au triangle F G E, l'angle E G F, [m] est égal au droict E C B, l'externe à l'interne; les deux autres [n] seront égaux à vn droict: mais il est demonstré que l'angle F E G, est demy-droict: Donc E F G, sera aussi demy-droict, & partant tous deux égaux; [o] donc les costez E G, G F, seront égaux entr'eux. En la mesme maniere l'on monstrera que les deux lignes F D, & D B, sont égales entr'elles.

5. 1. 32. 1. m 29. 1. n 32. 1. o 6. 1.

Or d'autant qu'au triangle A C E, l'angle C, est droict, le [p] quarré du costé A E, sera égal aux deux quarrez de A C, C E, lesquels sont égaux entr'eux, estans les lignes A C, C E, égales: donc le quarré de A E, sera double du quarré de A C. Derechef, d'autant qu'au triangle E G F, l'angle G, est droict, & les deux costez G E, G F, égaux, [q] le quarré de E F, sera double du quarré de G F, c'est à dire, du quarré de C D, qui est [r] égale à G F. Donc les deux quarrez de A E, & E F, sont doubles des deux quarrez de A C, & C D: mais iceux quarrez de A E, & E F, [s] sont égaux au quarré de A F. Donc le quarré de A F, sera double des deux quarrez de A C, C D: & le q. de A F, est égal aux deux quarrez de A D, D F. Donc les deux quatrez de A D, D F, sont doubles des deux quarrez A C, C D; mais le quarré

p 47. 1. q 47. 1. r 34. 1. s 47. 1.

de D E, est égal au quarré de D B: car icelles lignes sont monstrées egales. Pareillement donc les quarrez des segments A D, D B, seront aussi doubles des quarrez de A C, & C D, moitié de la ligne A B: & de la section du milieu. Donc si vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer: ce que l'on entendra encore facilement par cette figure.

SCHOLIE.

Autrement, d'autant que le quarré de la ligne 4. sect. *A D, est égal aux deux quarrez de A C, C D, & à deux fois le rectangle contenu sous A C, C D: si l'on adiouste le commun quarré de D B, les deux quarrez de A D, & de D B, seront egaux aux 3. quarrez de A C, C D, & D B, & à deux fois le rectangle contenu sous A C, C D, ou sous B C, C D: mais les quarrez de B C,* 7. sect. *ou A C, & de C D, sont egaux au quarré de D B, & à deux fois le rectangle contenu sous B C, C D. Donc les quarrez de A D, D B, sont egaux, à deux fois les quarrez de A C, C D: & partant doubles d'iceux. Ce qu'il falloit demonstrer.*

Commandin demonstre cette Proposition autrement, en cette maniere.

D'autant que A C, est egale à C B, & C B, excede C D, de D B; A C, excedera pareillement la mesme C D, de D B. Partant, comme il a esté demonstré à la septiesme Proposition de ce liure, les quarrez de A C, C D, sont egaux à deux fois le rectangle contenu sous A C, C D, & au quarré de D B: parquoy les quarrez de A C, C D, & deux fois le rectangle contenu sous A C, C D, auec le quarré de D B, sont doubles des quarrez de A C,

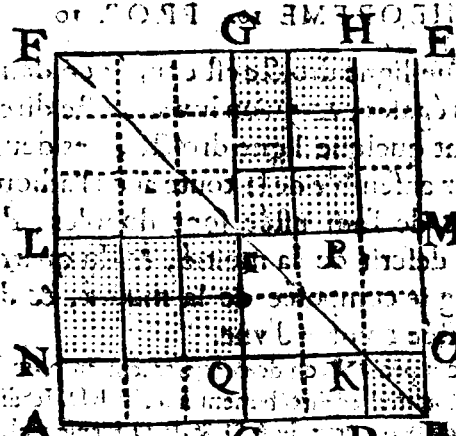
C D,

C D, mais le quarré de A D, est × égal aux quar- x 4. sec.
rez de A C, C D, & à deux fois le rectangle conte-
nu sous A C, C D. Donc les quarrez de A D, D B,
sont doubles des quarrez de A C, C D.

Derechef soit le nombre 10. diuisé également en 5. & 5. & inegalement en 7. & 3. la moyenne section sera 2. comme il est dit en la 5. Proposition. Les quarrez des parties inegales 7. & 3. qui sont 49. & 9. sont doubles de 25. & 4. quarrez de la moitié & de la moyenne section; comme il est manifeste.

Nous pourrons aussi demonstrer cette 9. Proposition par la construction comme les precedentes, en cette maniere.

Soit A E, quarré de A B, diuisée à C, également, 46. 1.



& à D inegalement, & soit mené B F, diametre; & 31. 1.
C G, D H, paralleles à B E, A F, & par I, & K, soient

Coroll. 1. menées N O, L M, paralleles à A B : ou F E, L G,
4. 2. Q P, N H, D O, C M, seront qq. & partant A I, I E,
4. 1. aussi quarrez ; parquoy L G, sera le q. de A C, moi-
34. 1. rié, & Q P, q. de C D, partie du milieu, & N H, D O,
quarrez des parties inegales A D, D B, qui sont
doubles de L G, Q P, quarrez, c'est à dire, que N I,
36. 1. I H, D O, ensemble, sont égaux à L G, Q P : car N I,
Q M, sont égaux, donc N I, sera égal à Q P, q. & à
K M. rectangle. Parquoy adioustant D O : N I, D O,
seront égaux à Q P, D M, c'est à dire, à Q P, P E,
36. 1. ensemble, (car D M, P E, sont égaux, B M, estant
égale à B C, & M E, à M I, ou B C.) Donc si on
adiouste I K ; N I, D O, I H, seront égaux à I E, Q P,
c'est à dire, à L G, Q P, (puisque L G, I E, sont égaux :)
Donc N H, D O, quarrez des parties inegales se-
ront doubles de L G, Q P, quarrez de la moitié, &
de la partie du milieu.

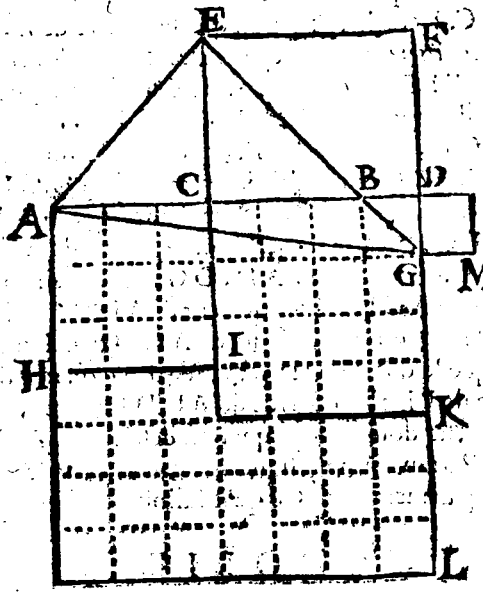
THEOREME 10. PROP. 10.

Si vne ligne droicte est coupée en deux parties égales, & qu'on luy adiouste directement quelque ligne droicte, les deux quarrez ensemble de la toute auec l'adiouſtée, & de l'adiouſtée sont doubles, du quarré descrit de la moitié, & du quarré de la ligne composée de la moitié, & de l'adiouſtée comme d'vne.

Soit coupée A B, en deux egalement au poinct C, & soit adiouſtée directement à icelle B D, Ie dis que les deux quarrez de A D, & de D B, ensemble, sont doubles des quarrez ensemble, qui sont descrits de A C, & C D.

Car

Car soit menée C E, à angles droicts à la ligne A B, & posée égale à la moitié A C, & soient conioinctes les droictes lignes A E, E B, & par D, soit menée F D G, parallele à C E, rencontrant E B, prolongée au poinct G, & par E, soit menée E F, parallele à C D, rencontrant D F, au poinct F, &



soit conioincte la ligne droicte A G; l'on monstrera maintenant que l'angle A E B, est droict comme en la precedente Proposition, & C E B, demy-droict: y & partant son alterne E G F, pareillement demy-droict: mais l'angle z F, est droict estant opposé au droict C, au parallelogramme C F. a Donc l'autre F E G, sera aussi demy droict;

y 29. 1.
z 34. 1.
a 32. 1.

b 6. 1. & partant égal à E G F, parquoy E F, b F G, opposées aux angles F E G, E G F, sont pareillement egales. Par le mesme discours on monstrera que B D, D G, sont egales, d'autant que l'angle B D G, est droict, & B G D, demy-droict, &c.

c 47. 1. D'autant donc que le quarré de A E, c est égal aux quarrez égaux des lignes droictes égales A C, C E, iceluy quarré de A E, sera double du quarré de A C. Derechef, d'autant que le quarré de E G,

d 47. 1. d est égal aux quarrez égaux des lignes droictes egales E F, F G, iceluy quarré de E G, sera pareillement double du quarré E F, ou de C D, son egale:

e 34. 1. car e C D, est egale à E F: donc les deux quarrez de A E, E G, sont doubles des quarrez de A C, C D.

f 47. 2. Mais le quarré de A G, est égal aux f quarrez de A E, E G, & partant double des quarrez de A C, C D; & les quarrez de A D, D G, sont égaux au quarré de A G. Donc les quartez de A D, D G, sont doubles des quarrez descrits de A C, C D. Donc puis que le quarré de D G, est égal au quarré de son egale B D: les quarrez de A D, D B, seront pareillement doubles des quarrez descrits de A C, C D. Partant, si vne ligne droicte est coupée en deux egalement, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

g 4. sect. *Autrement, d'autant que le quarré de A D,* g *est égal aux quarrez de A C, C D, & à deux fois le rectangle contenu sous A C, C D, ou sous B C, C D: si l'on adiouste le commun quarré de B D, les deux quarrez A D, & de B D, seront égaux aux trois quarrez de A C, C D, B D, & à deux fois le rectangle contenu sous B C, C D.* h Mais les quarrez de

h 7. sect.

C D,

C D, & B C, c'eſt à dire les quarrez de A C, C D, ſont égaux au quarré de B D, & à deux fois le rectangle contenu ſous B C, C D. Donc les quarrez de A D, B D, ſont égaux aux quarrez de A C, C D, deux fois ; & partant, les quarrez de A D, B D, ſont doubles des quarrez A C, C D. Ce qu'il falloit demonſtrer.

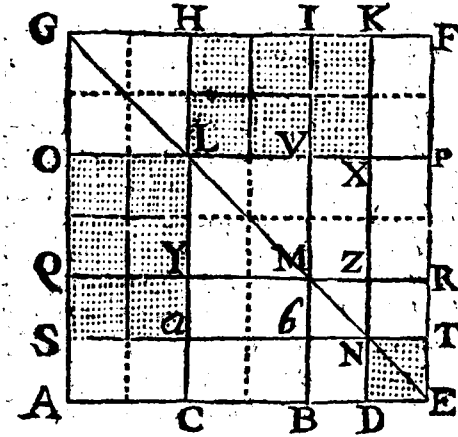
Commandin demõſtre cecy autrement : D'autant que A C, eſt égale à C B, & C D, excede C B, de B D, la meſme C D, excedera pareillement A C, du meſme excez B D : partant, comme il a eſté monſtré à la 7. Propoſition de ce liure, les quarrez de A C, C D, ſont égaux à deux fois le rectangle contenu ſous A C, C D, & au quarré de B D : & pour cette cauſe les quarrez A C, C D, & deux fois le rectangle contenu ſous A C, C D, auec le quarré de B D, ſont doubles des quarrez de A C, C D : mais le quarrez de A D, eſt 4. 2. *égal aux quarrez de A C, C D, & à deux fois le rectangle contenu ſous A C, C D. Donc les quarrez de A D, & de B D, ſont doubles des quarrez, de A C, C D.*

Le nombre 10. ſoit diuiſé en deux parties égales 5. & 5. auquel ſoit adiouſté quelconque nombre 3. de ſorte que tout le nombre compoſé ſoit 13. Dons les nombres quarrez 169. & 9. des nombres 13. & 3. ſont doubles des nombres quarrez 25. & 64. qui ſont produits de ces nombres 5. & 8. Comme il eſt manifeſte.

Cette 10. Propoſition ſe monſtre auſſi par la conſtruction, comme la 9. comme s'enſuit,

Ayant prolongé A D, au poinct E, en ſorte que D E, ſoit egale à B D, adiouſtée, & ayant deſcrit le quarré A F, de la toute A E, & mené le diametre E G, ſoient menées par les poincts C, B, D, les li-

gnes droictes C H, B I, D K, paralleles à A G, E F, coupantes le diametre E G, aux poincts L M N, par lesquels soient menées O P, Q R, S T, paralleles aux costez A E, G F, coupant les premieres aux poincts V, X, Y, *a*, *b*.



D'autant que tous les rectangles qui sont à l'entour du diametre G E, sont quarrez & S N, est égale à A D, & O L, à A C, & à N, à C D, le rectangle S K, sera le quarré de A D, & D T, sera le quarré de D E, ou de B D, & O H, *a* X, quarrez de A C, C D. Ie dis que les quarrez S K, D T, ensemble, sont doubles des quarrez O H, *a* X, ensemble.

k Coroll. 1. 4. 2.
l 34. 1.

Car d'autant que les quarrez S K, D T, excedent les quarrez O H, *a* X, du quarré D T, & des rectangles S L, L K, qui sont égaux aux quarrez O H, *a* X, comme il sera maintenant demonstré; il appert manifestement que les quarrez S K, D T, sont doubles

bles des quarrez O H, a X, puis que ceux-cy ſont contenus deux fois en ceux-là. Or que ces trois rectangles D T, S L, L K, ſoient égaux aux quarrez O H, a X, il ſera ainſi demonſtré. Le rectangle Q L, m eſt égal au quarré O H, à cauſe que les lignes m 36. 1.
Q O, O G, ſont égales n d'autant que Q O, eſt éga- n 34. 1.
le à Y L; & Y L, égale à O G, à cauſe des quarrez égaux Y V, O H, des coſtez égaux O L, L V. Semblablement S Y, eſt o égal à a M, & L I, à Y V, & o 34. 1.
V K, à V Z, & D T, à b Z. Donc les cinq rectangles Q L, S Y, L I, V K, D T, c'eſt à dire les trois rectangles D T, S L, L K, ſont égaux aux cinq rectangles O H, a M, Y V, V Z, b Z, c'eſt à dire aux deux quarrez O H, a X. Ce qui eſt propoſé.

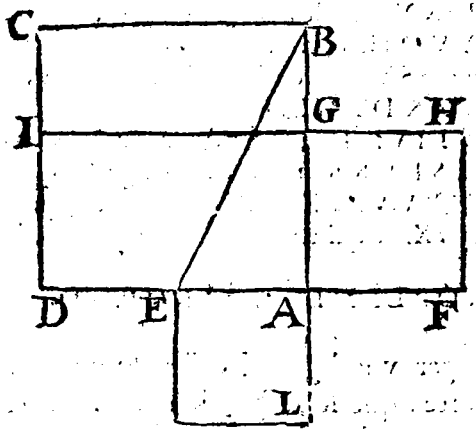
PROBLEME 1. PROP. 11.

Couper vne ligne droicte donnée de telle ſorte, que le rectangle contenu ſous la toute à vn des ſegments, ſoit égal au quarré de l'autre ſegment.

Soit la ligne droicte A B, qu'il faut couper en ſorte que le rectangle contenu ſous la toute A B, & vn des ſegments, ſçauoir le moindre, ſoit égal au quarré de l'autre ſegment, ſçauoir le plus grand.

Soit deſcrit le quarré A C, de la ligne droicte A B, & ayant diuiſé le coſté D A, en deux egalement au poinct E, ſoit menée E B, & ſoit prolongée D A, au poinct F, de ſorte que E F, ſoit poſée égale à E B, & de A B, ſoit retranchée A G, égale à A F: car A B, eſt plus grande que A F, p puiſque p 2. 1.
E A, A B, ſont plus grandes que E B, ou E F, ſon

egale : ostant donc la partie commune E A, restera A B, plus grande que A F. Ie dis que A B, est coupée au poinct G, en sorte que le rectangle contenu sous A B, B G, est égal au quarré de A G : de sorte que B G, est le plus petit, & A G, le plus grand.



Car soit descrit A H, quarré de A G, & prolongé le costé H G, vers I, en sorte que H I, coupée D C, au
q 34. 1. poinct I, laquelle q sera parallele à F D, & B C : partant C G, & D H, seront parallelogrammes rectangles, & C G, sera contenu sous la toute A B, & le segment B G, car C B, est égale à A B, lequel rect. est égal au quarré G F, de l'autre segment A G.

Car d'autant que D A, estant coupée en deux
r 6. sect. egalement à E, à laquelle l'on a adiousté A F, r le rectangle contenu sous D F, F A ; c'est à dire, le rectangle D H, (car F H, est egale à F A,) auec le quarré de la moitié A E, est égal au quarré de E F, c'est à dire au quarré de E B, qui est égale à E F,

mais

mais le quarré de E B, est egal ſ aux quarrez de E A, ſ 47. 1.
& A B. Parquoy le rectangle D H, auec le quarré de A E, ſera auſſi egal aux quarrez de A E, A B; oſtant donc le commun quarré de AE, reſtera le rectangle D H, egal au quarré de A B, qui eſt le quarré A C. Donc ſi l'on oſte le commun rectangle D G, reſtera le rectangle G C, egal au quarré G F. Ce qui eſt propoſé. Nous auons donc coupé, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Ce Probléme ne peut en aucune maniére eſtre demonſtré par les nombres. Car aucun nombre ne peut eſtre diuiſé de telle ſorte en deux, que le nombre produit du tout multiplié par vne des parties, ſoit egal au nombre quarré de la partie reſtante, comme il ſera demonſtré à la 14. Propoſition du 9. liure, où les 10. theoremes precedens de ce liure ſeront demonſtrez par les nombres.

La practique de ceſte Propoſition n'eſt difficile: car par le poinct A, où ſe doit terminer le plus grand ſegment de la ligne donnee A B, ayant mené A D, à angles droits, egale à A B, & coupé icelle A D, en deux egalement, ſi à l'internalle E B, l'on coupe E A prolongee en F, A F, ſera egale au plus grand ſegment A G: comme il a eſté demonſtré.

Le Copiſte dit icy. *Quant aux nombres, ils ne ſe peuuent accommoder à ce Probleme, ſinon qu'on y employe les nombres irrationaux.* Mais ie ne ſçay d'où ceſte beſte Arcadienne copie ce qu'il dit, attendu qu'il n'y a point de nombres irrationaux, puiſque la raiſon irrationnelle eſt celle qui eſt entre

les

les quantitez incommensurables, c'est à dire, qui ne sont mesurées par aucune commune mesure; & cette raison irrationelle ne peut estre exprimée par les nombres, & n'a lieu en la quantité discrete, d'autant que tous les nombres sont commensurables, à raison de l'vnité, comme il appert par les Definitions du 7. liure: mais il sera plus à propos de parler des quantitez irrationelles par cy-apres. Que le Copiste apprenne donc que l'irrationalité ne se trouue qu'en la quantité continuë, & non aux nombres, parquoy il n'y a point de nombres irrationaux, comme il sera monstré ailleurs plus amplement.

THEOREME 11. PROP. 12.

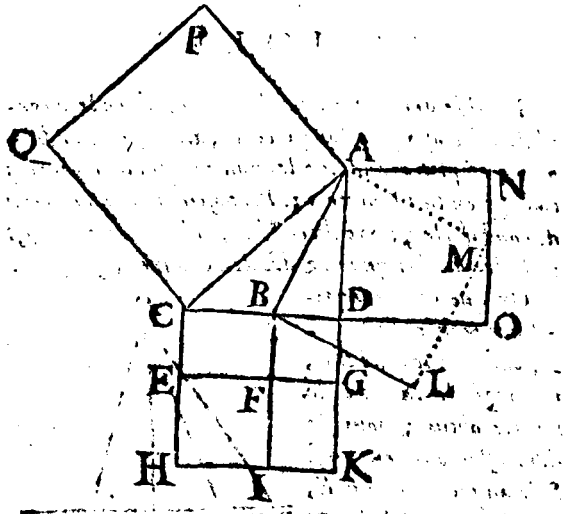
Aux triangles amblygones, le quarré du costé qui soustient l'angle obtus, est plus grand que les quarrez des costez qui contiennent l'angle obtus, de deux fois le rectangle contenu sous l'vn des costez qui sont à l'entour de l'angle obtus: sçauoir celuy, sur lequel estant prolongé, tombe la perpendiculaire, & la ligne prise au dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle A B C, ayant l'angle A B C, obtus, & du poinct A, sur le costé C B, prolongé de la part de l'angle obtus [1] soit menée la perpendiculaire A D. Ie dis que le quarré du costé A C, opposé à l'angle obtus est plus grand que les quarrez des costez A B, B C, qui contiennent l'angle obtus, de

[1] 12. 1.

deux

deux fois le rectangle contenu ſous C B, B D. C'eſt à dire, le quarré du coſté A C, eſt égal aux deux quarrez des coſtez A B, B C, & à deux fois le rectangle contenu ſous C B, B D.



Car puis que C D, eſt diuiſée comment que ce ſoit par B, le quarré de C D, ſçauoir C K, eſt égal aux deux quarrez de C B, B D, & à deux fois le rectangle contenu ſous C B, B D; adiouſtant donc le commun quarré de A D, ſçauoir D N, les deux quarrez de C D, & D A, ſeront égaux aux trois quarrez des lignes C B, B D, D A, & à deux fois le rectangle contenu ſous C B, B D: mais le quarré de A C, [x] eſt égal aux deux quarrez de C D, D A. Iceluy quarré de A C, ſera donc auſſi égal aux trois quarrez de C B, B D, D A, & à deux fois le rectangle contenu ſous C B, B D. Donc puis que le quarré

v 4. ſect.

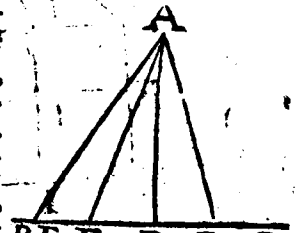
x 47. 1.

ré de B A, est égal aux deux quarrez de B D, D A: le quarré de A C, sera égal aux quarrez de C B, B A, & à deux fois le rectangle contenu sous C B, B D. Ce qui est proposé: donc aux triangles amblygones, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

y 47. 1.

SCHOLIE.

Euclide demonstre en ce lieu, de combien le quarré du costé opposé à l'angle obtus, au triangle amblygone, est plus grand que les quarrez des deux autres costez: en la suiuante 13. Proposition, il monstrera de combien le quarré du costé opposé à l'angle agu, est moindre que les quarrez des deux autres costez.



Or que la perpendiculaire menée du poinct A, tombe sur le costé B C, prolongé de la part de l'angle obtus; nous le demonstrerons en bref. Soit au triangle A F E, l'angle obtus A E F, & le costé E F, prolongé de la part de F E. Ie dis que la perpendiculaire menée du poinct A, tombé hors le triangle sur le costé F C, prolongé comme est A D.

Car si elle tomboit dans le triangle l'angle droict qu'elle feroit auec l'angle obtus A E F, seroient plus grands que deux droits, & si elle tombeit hors le triangle vers B, il en arriueroit la mesme absurdité.

SCHOLIE

SCHOLIE.

Henrion a mis en ce Theoreme, de la quantité de deux fois le rectangle compris du costé contenant l'angle obtus, &c. *Mais s'il entendoit le texte d'Euclide, il trouueroit ainſi :* ὁ τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθείσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. *C'eſt à dire, aux triangles amblygones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle obtus eſt plus grand que les quarrez des coſtez, qui contiennent l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu ſous l'vn des coſtez qui ſont à l'entour de l'angle obtus, ſçauoir celuy ſur lequel eſtant prolongé tombe la perpendiculaire, & la ligne priſe au dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus : il eſt donc manifeſte qu'il faut traduire,* τοῦτο μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, *&c.* Sous l'vn des coſtez qui ſont autour de l'angle obtus, ou qui contiennent l'angle obtus, *& non* du coſté contenant l'angle obtus, *comme il dit; attendu auſſi qu'vn coſté ne contient pas vn angle, &c.*

En la 5. Propoſition de ce liure, où il y a : Le rectangle contenu ſous les parties inegales de la toute, *il a laiſſé ce mot* ὅλης de la toute, *ce qu'il ne deuoit faire, tant par ce qu'il eſt au texte d'Euclide, que d'autant (comme il eſt demonſtré) que le rectangle ſous A D, D B, parties inegales de*

de la toute A B, auec le q. de la partie du milieu, est égal au quarré de la moitié de la toute, & non pas le rectangle sous A C, C D, qui sont aussi parties inegales. Voyez la figure de la cinquiesme Proposition.

Ledit Copiste, ou plustost son Traducteur, à la 7. Proposition de ce liure liure, a obmis ces mots: (τὰ συναμφότερα τετράγωνα, &c.) les deux quarrez ensemble, & a mis ainsi: Le quarré de la toute, & le quarré de l'vne des parties, sont égaux à deux fois le rectangle, & au quarré, &c. *Mais c'est les deux ensemble, aux trois ensemble; ce qu'il n'a pas obserué, & ce qu'il a copié d'ailleurs, où il est ainsi traduit, & ne pourra dire qu'il a traduit selon le Latin: car il y a,* Vtraque simul quadrata, &c. *D'où il appert que son Collecteur & Rapsodieur ne prend pas la peine de voir ny Grec ny Latin, mais collige ce qu'il trouue de tout traduit, tel qu'il est: & le Copiste voyant qu'il y a plus de profit à le faire imprimer & vendre, qu'a estre Secretaire de S. Innocent, ne s'y espargne en rien.*

Iceluy Copiste a encore obmis ces mesmes mots, en la dixiesme Proposition de ce liure: τὰ συναμφότερα τετράγωνα, qui sont expressement au Grec & au Latin: neantmoins il est excusable, puis qu'il a failli comme en sa copie.

THEO

THEOREME 12. PROP. 13.

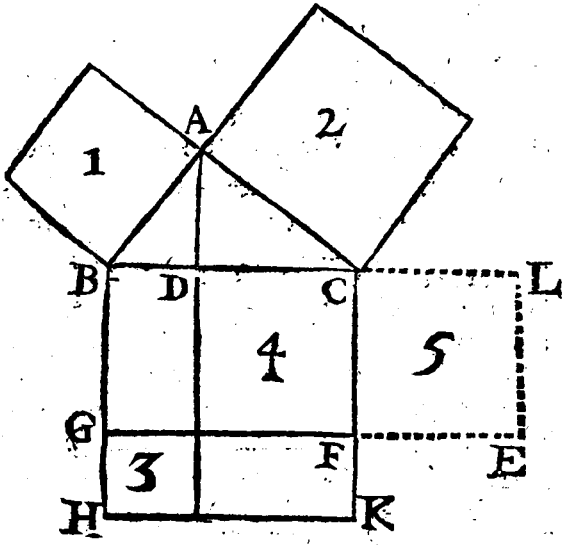
Aux triangles oxygones, le quarré du costé qui soustient l'angle agu, est moindre que les quarrez des costez qui contiennent l'angle agu, de deux fois le rectangle contenu sous l'vn des costez qui sont autour de l'angle agu, sçauoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & la ligne prise au dedans, entre la perpendiculaire & l'angle agu.

Soit le triangle oxygone A B C, & de l'angle A, soit menée la perpendiculaire A D, tombant sur le costé B C. Ie dis que le quarré du costé A B, opposé à l'angle agu A C B, est moindre que les quarrez des costez A C, C B, qui sont autour de l'angle agu C, de deux fois le rectangle contenu sous B C, C D, c'est à dire, le quarré du costé A B, auec deux fois le rectangle contenu sous B C, C D, est égal aux deux quarrez des costez A C, C B.

Car puisque la droicte ligne B C, est diuisée comment que ce soit au poinct D, les quarrez de B C, & de C D, sont egaux à deux fois le rectangle contenu sous B C, C D, & au quarré de B D. Adiouſtant donc le commun quarré de D A, les trois quarrez de B C, C D, D A, seront egaux à deux fois le rectangle contenu sous B C, C D, & aux deux quarrez de B D, D A : [z] mais le quarré de C A, est égal aux deux quarrez de C D, D A. Donc les deux quarrez de B C, C A, sont egaux à deux fois le rectangle contenu sous B C, C D, & aux deux

y 7. *sect.*

z 47. 1.



quarrez de B D, B A. Donc puis que le quarré de A B, eſt égal aux deux quarrez de B D, D A : les deux quarrez de B C, C A, ſeront égaux à deux fois le rectangle contenu ſous B C, C D, & au quarré de A B, ce qui eſt propoſé.

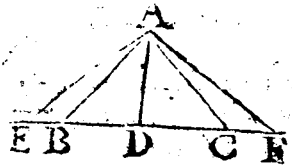
En la meſme maniere l'on demonſtrera que les quarrez de A B, B C, ſont égaux à deux fois le rectangle contenu ſous C B, B D, & au quarré de A C, c'eſt à dire, que le quarré du coſté A C, eſt plus petit que les quarrez des coſtez A B, B C, de deux fois le rectangle contenu ſous C B, B D. Donc aux triangles oxygones, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

De trois Propoſitions, ſçauoir la 47. du liure 1. & de la 12. & 13. de cettuy-cy, nous cognoiſſons quel eſt le quarré de quelconque coſté d'vn triangle, comparé auec les quarrez des deux autres coſtez, ſçauoir, s'il eſt égal à iceux, ou plus grand ou plus petit, & de combien il eſt plus grand ou plus petit, en tant que l'angle oppoſé à iceluy, ſera droit, obtus, ou agu.

Or combien qu'Euclide propoſe ce Theoreme, ſeulement des triangles oxygones, ſçauoir, qui ont tous les angles agus: le meſme toutefois eſt auſſi veritable des triangles rectangles & amblygones, comme il appert par la demonſtration & figure precedente. Car neceſſairement les deux autres angles de ces triangles ſont agus, comme il ſe peut colliger manifeſtement de la 17. ou 32. Prop. du 1. liure.



Il faut ſeulement obſeruer cecy, qu'aux triangles rectangles & amblygones, la perpendiculaire ſe doit mener de l'angle droit ou obtus: mais aux oxygones, duquel que l'on veut, indifferemment. Partant, ce faiſant la perpendiculaire tombera touſiours dedans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonſtration; ce qui ſera facilement ainſi demonſtré.

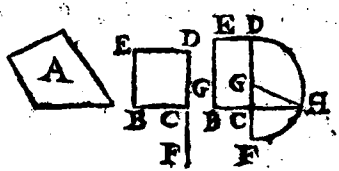
Au triangle A B C, ſoient les deux angles A B C, A C B, agus, & l'angle B A C, ſoit droit, ou obtus, ou agu. Ie dis que la perpendiculaire menée du poinct A, tombera dans le triangle. Car ſi elle

tombeit dehors sur C B, prolongée de la part de B,
a 16. 1. *comme est A E, au triangle A B E, l'angle a exterme A B C, agu, seroit plus grand que l'interne & oppose A E B, qui seroit droict, ce qui est absurde. Mais si elle tombeit dehors outre B C, prolongée de la part de C, comme est la droite ligne A F, il s'ensuiuroit la mesme absurdité, comme il est manifeste.*

PROBLEME 2. PROP. 14.

Constituer vn quarré, égal à vn rectiligne donné.

Soit le rectiligne donné A, auquel il faut con-
b 45. 1. stituer vn quarré égal. Soit b constitué le parallelogramme rectangle B C D E, égal au rectiligne A, duquel vn des costez, comme D C, soit prolongé à F, & soit faicte C F, egale à C B. Et soit diuisée D E, en deux egalement au poinct G, lequel



sera mesme que le poinct C, ou non : que s'il tombe sur le poinct C, la droicte ligne B C, (puis qu'elle est faicte egale à C F,) sera egale à C D. Partant, le rectangle B D,
c 34. 1. sera quarré, puis c que les costez B E, E D, sont egaux aux opposez B C, C D : l'on aura donc le requis. Mais si le poinct G, ne tombe sur le poinct C, du poinct G, comme centre, & de l'interualle G F, ou G D, soit descrit le demy-cercle F H D, & soit prolongée B C, iusques au poinct de la circonference H, soit aussi menée G H. Ie dis maintenant que le quarré de la droicte ligne C H, est égal au

rectiligne

rectiligne A. Car d'autant que D F, eſt diuiſée en deux également à G, & inegalement à C, le rectangle contenu ſous D C, C F, ſçauoir le rectangle B D, d auec le quarré de G C, eſt égal au quarré de G F, ou de G H, ſon egale: mais le quarré de G H, eſt e égal aux deux quarrez G C, C H : Donc le rectangle B D, auec le quarré de G C, eſt égal aux deux quarrez de G C, C H. Donc ſi l'on oſte le commun quarré de G C, demeurera le rectangle B D, c'eſt à dire le rectiligne A, égal au quarré de C H. Donc nous auons conſtitué vn quarré égal à vn rectiligne donné. Ce qu'il falloit faire.

d *5. huit.*

e *34. Prem.*

Fin du ſecond Liure.

LIVRE TROISIESME,

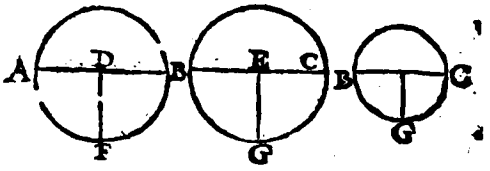
DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Cercles égaux, sont ceux desquels les diametres sont égaux ; ou desquels les lignes droictes menées des centres aux circonferences, sont égales.

DAVANT qu'Euclide demonstre en ce troisiesme liure, diuerses proprietez des cercles; il explique auparauant quelques termes, dont l'vsage sera frequent en iceluy. Il enseigne donc premierement, que ces cercles-là sont égaux, desquels les diametres ou demy-diametres sont égaux. Car puisque le cercle est descrit de la reuolution du demy-diametre, à l'entour d'vne de ses extremitez fixe & immobile, comme il est dit au premier liure : il est manifeste que ces cercles-là sont égaux, desquels les demy-diametres,

diametres, ou les lignes droictes menées des centres aux circonferences ſont égales : où deſquels les diametres entiers ſont égaux : comme ſi les



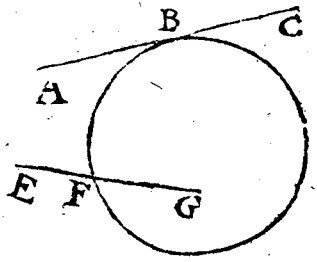
diametres A B, B C, ſont égaux, ou les droictes lignes D F, E G, menées des centres D, & E, les cercles A F B, B G C, ſeront égaux : au contraire, ſi les cercles ſont égaux, les diametres, ou lignes droictes, menées des centres aux circonferences, ſeront égales.

Il appert de cecy, que les cercles deſquels les diametres, ou les lignes droictes, menées des centres aux circonferences ſont inegales, ſont inegaux : & partant, celuy duquel le diametre eſt plus grand, eſt auſſi plus grand : & au contraire des cercles inegaux, les diametres ſont inegaux.

2. Vne ligne droicte, eſt dite toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt prolongée, ne le coupe point.

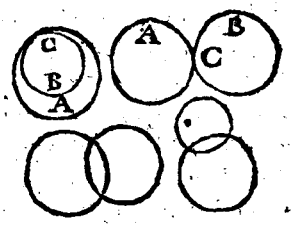
Comme A B, ſera dite toucher le cercle, ſi elle le touche tellement à B, qu'eſtant prolongée vers C, ne le coupe point. Mais d'autant que E F, atteint tellement le meſme cercle au poinct F, qu'eſtant

qu'eſtant prolongée au poinct G, le coupe & tombe au dedans, elle ne ſera dite toucher le cercle, mais le couper.



3. **Les cercles ſont dits ſe toucher l'vn l'autre, leſquels en ſe touchans l'vn l'autre, ne ſe coupent point.**

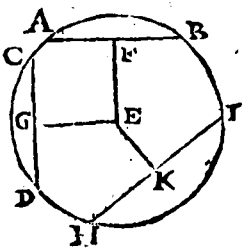
Semblablement, les deux cercles A C, B C, ſont dits ſe toucher à C, s'ils ſe touchent tellement qu'ils ne ſe coupent point, ſoit que l'vn ſoit dedans l'autre, ou dehors. Que ſi deux cercles s'attaignent autrement, ils ſeront dits ſe couper.



4. **Au cercle, les lignes droictes ſont dites eſtre egalement diſtantes du centre, quand les perpendiculaires, qui ſont menées du centre ſur icelles, ſont égales. Mais celle-là eſt dite eſtre plus eſloignée du centre, ſur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.**

Comme les deux lignes droictes A B, C D, au cercle

cercle A B C D, seront dites estre egalement distantes du centre, si les perpendiculaires E F, E G, sont egales: mais la ligne C D, sera dite estre plus esloignée du centre E, que la ligne H I, si la perpendiculaire E G, est plus grande que la perpendiculaire E K.

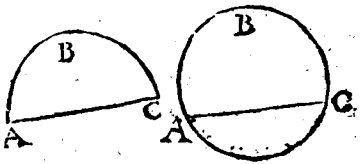


5. Segment, ou section de cercle, est vne figure compriſe ſous vne ligne droite, & la circonference du cercle.

Si au cercle A B C D, on mene vne droicte ligne A C, comment que ce ſoit, tant la figure A B C, contenuë ſous la droicte ligne A C, & la circonference A B C, que la figure A D C, contenuë ſous la meſme A C, & la circonference A D C, ſera dite ſegment, ou ſection de cercle. D'où on peut colliger qu'il y a trois ſortes de ſegments, ſçauoir le demy-cercle, quand la ligne droicte, qui auec la circonference, conſtituë le ſegment, paſſe par le centre; le ſegment plus grand que le demy-cercle, quand le centre du cercle eſt au dedans d'iceluy, comme A B C: & le plus petit ſegment, quand la figure dite ſegment, eſt moindre que le demy-cercle, comme A D C. La ligne droicte A C, s'appelle auſſi, chorde, & la circonference A B C, ou A D C: arc. *Voyez la figure cy-aprés.*

6. L'angle du ſegment ou de la ſection, eſt celuy qui eſt compris ſous vne ligne droicte, & la circonference du cercle.

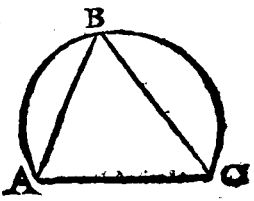
Euclide definit maintenant trois genres d'angles, qui ſont conſiderez aux cercles. En premier lieu, l'angle du ſegment, comme eſt l'angle mixte B A C, ou B C A, contenu ſous la ligne droicte A C, & la circonference A B C; que ſi le ſegment eſt vn demy-cercle, il ſera appellé angle du demy-cercle, ſi le ſegment eſt plus grand, il ſera appellé angle du grand ſegment: ſi plus petit que le demy-cercle, l'angle ſera dit, angle du petit ſegment.



7. Mais vn angle eſt au ſegment ou en la ſection, lors que l'on prend quelque poinct en la circonference du ſegment, & d'iceluy ſont menées deux lignes droictes, ſur les extremitez de la ligne droicte, laquelle eſt la baſe du ſegment, & c'eſt celuy-là, dis-je, qui eſt contenu ſous icelles lignes droictes menées.

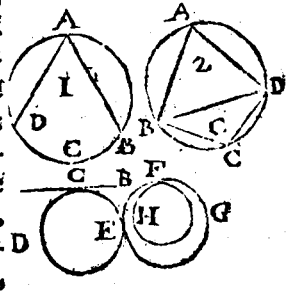
Soit vn ſegment de cercle A B C, la baſe duquel ſoit la droicte ligne A C, & d'vn poinct quelconque

que B, pris en la circonference, soient menées deux lignes droictes A B, B C, aux poincts A, & C, qui sont les extremitez de la base A C, l'angle rectiligne A B C, contenu d'icelles, est dit estre au segment.



8. Mais quand les lignes droictes qui contiennent l'angle prennent ou embrassent quelque circonference, l'angle est dit s'appuyer sur icelle.

Comme l'angle D A B, contenu des deux lignes droictes A B, A D, qui embrassent la circonference B C D, sera dit estre ou s'appuyer sur icelle, & ne differe du precedent, que de voix seulement; car si l'on mene vne ligne droicte de B, à D, pour base, il sera dit estre au segment, selon la precedente definition, & par celle-cy, s'appuyer sur la circonference B C D, toutefois se rapportent à diuerses choses: car l'angle au segment, se refere au segment auquel il est; & l'angle appuyé sur la circonference, se rapporte à la circonference qui est la base d'iceluy. Donc si l'on prend quelque segment du cercle B C D, au cercle A B C D, l'angle qui est en ce segment ne sera le mesme,



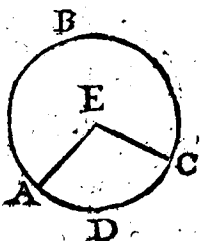
que

que celuy qui insiste ou est appuyé sur la circonference d'iceluy. Car l'angle qui est en iceluy sera B C D : mais l'angle qui insiste ou est appuyé sur la circonference d'iceluy, sera l'angle B A D, qui luy est beaucoup different.

Outre ces trois sortes d'angles susdits, les Geometres considerent aussi vn angle de contingence, qui est contenu d'vne ligne droicte touchant le cercle, & de la circonference du cercle, ou de deux circonferences se touchans l'vne l'autre, au dehors ou au dedans. Comme par exemple, si la droicte ligne A B, touche le cercle C E D, au poinct C, l'angle mixte A C D, ou B C E, sera dit angle de contingence, ou d'attouchement. Semblablement, l'angle curuiligne G F H, ou E F H, fait des circonferences des cercles se touchans, sera dit angle de contingence, ou d'attouchement.

9. Secteur du cercle est vne figure, contenuë sous deux lignes droictes, qui constituent vn angle au centre, & la circonference comprise entre icelles lignes.

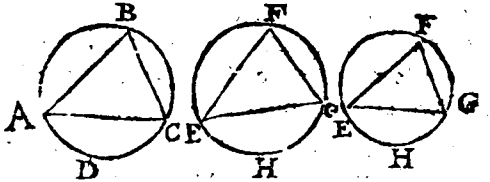
Comme la figure A E C D, contenuë sous les lignes droictes A E, E C, qui font angle au centre E, & sous la circonference A D C, comprise entre A, & C, extremitez d'icelles lignes, est appellé secteur du cercle.



10. Sembla

10. Semblables segments ou sections de cercles, sont celles, qui reçoiuent angles égaux ; ou esquelles les angles sont égaux entr'eux.

Comme si aux cercles A B C D, E F G H, les angles rectilignes B, & F, aux sections A B C, E F G, sont égaux, icelles sections qui reçoiuent iceux angles égaux, ou esquelles sont iceux angles égaux, seront dites semblables sections, & les circonferences A B C, E F G, pareillement seront semblables, c'est à dire, que la section A B C, sera telle



partie de tout le cercle A B C D, que la section E F G, est partie du cercle E F G H, & la circonference A B C, sera aussi mesme partie de toute la circonference A B C D, que la circonference E F G, l'est de toute la circonference E F G H.

Par mesme raison, les arcs ou circonferences, ausquelles insistent ou sont appuyez angles égaux, sont aussi semblables, comme sont les arcs ou circonferences A D C, E H G, sur lesquelles sont appuyez les angles égaux B, & F.

De ces choses l'on peut colliger que semblables sections d'vn mesme cercle, ou de cercles égaux, sont aussi egales entr'elles, estans mesmes parties d'vne mesme chose, ou de choses egales.

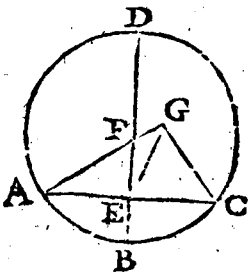
PRO

PROBLEME 1. PROP. 2.

Vn cercle eſtant donné, trouuer le centre.

Soit le cercle donné A B C D, duquel il faut trouuer le centre. Soit menée vne ligne quelconque en iceluy A C, [f] laquelle ſoit diuiſée en deux egalement au poinct E, & par E, ſoit menée B D, à angles droicts, ſe terminant de part & d'autre en la circonference aux poincts B, & D: & ſoit diuiſée en deux egalement au poinct F. Ie dis que F, eſt le centre du cercle propoſé.

f 10. 1.



Car en icelle aucun autre poinct ne peut eſtre le centre, attendu que tout autre poinct la diuiſe inegalement. Donc ſi F, n'eſt le centre du cercle, ſoit le poinct G, le centre, hors icelle B D, duquel ſoient menées les lignes droictes G A, G E, G C.

D'autant qu'au triangle A E G, les deux coſtez A E, E G, ſont égaux aux deux C E, E G, du triangle C E G; & la baſe A G, égale à la baſe C G: (car elles ſont dites eſtre menées du centre) [g] les angles A E G, C E G, ſeront égaux, & partant droicts: mais l'angle A E F, eſt droict par la conſtruction: donc les droicts A E F, A E G, ſont égaux, la partie & le tout, ce qui eſt abſurde. Donc G, n'eſt le centre du cercle; ny par meſme raiſon tout autre poinct hors la ligne D B, donc F, ſera le centre.

g 8. 1.

Partant

Partant nous auons trouué le centre du cercle donné. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cette Proposition il est euident, que si au cercle vne ligne droicte est coupée en deux egalement, & à angles droicts, par vne autre ligne droicte, le centre du cercle sera en icelle coupante, pourueu qu'elle se termine de part & d'autre en la circonference, ou à tout le moins qu'elle ne soit moindre que le demy-diametre du cercle, ou que la coupée passe par le centre: attendu qu'il est demonstré que le centre du cercle A B C D, ne peut estre ailleurs qu'au poinct F, de la ligne B D, laquelle coupe A C, en deux egalement, & à angles droicts.

THEOREME 1. PROP. 2.

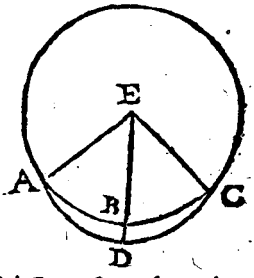
Si en la circonference du cercle l'on prend deux poincts, tels qu'on voudra; la ligne droicte conioincte à iceux poincts, tombera dedans le cercle.

Soit le cercle A B C, en la circonference duquel soient pris deux poincts tels que l'on voudra, A, & B. Ie dis que la ligne droicte menée de A, à B, tombe dans le cercle, en sorte qu'elle le coupera.

Car si elle ne tombe au dedans, qu'elle tombe au dehors, s'il est possible, telle qu'est la ligne droicte A D C, comme veut l'aduersaire, & ayant [h] trouué le centre E, d'iceluy, soient menées les [h] 1. 3. droictes

droictes lignes E A, E C, & E D, à quelconque poinct D, de la ligne A D C : en ſorte qu'elle coupe la circonference du cercle A B C, au poinct B.

D'autant que les deux coſtez E A, E C, du triangle E A C, duquel la ligne A D C, eſt poſée pour baſe, ſont égaux, (eſtans menez du centre) [i] les angles E A D, E C D, ſeront égaux: mais l'angle externe [k] E D A, eſt plus grand que ſon interne & oppoſé E C D, puis que le coſté C D, eſt prolongé au poinct A. Donc le meſme angle E D A, ſera auſſi plus grand que l'angle E A D, qui eſt égal à E C D. Partant E A, oppoſée au plus grand angle E D A, [l] ſera plus grande que E D, oppoſée au plus petit E A D. Donc E B, égale à E A, ſeroit auſſi plus grande que E D, la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droicte menée de A, à B, ne tombera hors le cercle, mais au dedans. Semblablement nous monſtrerons qu'elle ne tombera ſur la circonference. Donc ſi au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



i 5.1.
k 16.1.
l 19.1.

COROLLAIRE.

De la demonſtration de cette deuxieſme Propoſition, il eſt manifeſte que la ligne droicte qui touche le cercle, en ſorte qu'elle ne le coupe point, qu'elle le touche ſeulement à vn poinct. Car ſi elle le touchoit à deux poincts [m] la partie

m 2.3.

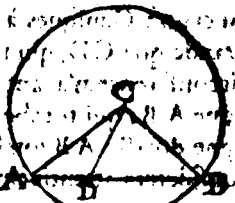
de

de la ligne d'entre iceux poincts tomberoit dans le cercle, & partant le couperoit: ce qui est contre l'hypothese.

SCHOLIE.

Le Capiste, reiettant cette commune demonstration d'Euclide, tant en la premiere & seconde Edition, a mis au lieu, ce Scholie de Clauius, par lequel Scholie ledit Clauius estime monstrer cette Proposition affirmativement; & ledit Henrion Capiste, l'a encore continué en la 3. Edition de son liure, comme sienne.

En la circonference du cercle A B, dont le centre est C, soient pris deux poincts tels qu'on voudra, A, & B. Ie dis que la ligne droicte A B, menée d'vn poinct à l'autre, tombe dans le cercle.



Car soit pris en icelle ligne droicte A B, quelconque poinct D, entre ses extremitez A, & B: puis du centre C, soient menées les lignes droictes C A, C D, C B: d'autant que les deux costez A C, C B, du triangle A C B, sont égaux, les angles B A C, A B C, seront égaux: mais l'angle externe A D C, est plus grand que l'interne A B C. Donc le mesme A D C, sera plus grand que l'angle B A C: & partant le costé A C, sera plus grand que le costé C D: parquoy, puis que C A, est tirée du centre iusques à la circonference, la ligne droicte C D, ne paruiendra pas iusques à icelle circonference: & par consequent

5. 1.

16. 1.

19. 1.

le poinct D, tombe dans le cercle, le meſme ſera demonſtré de tout autre poinct. Donc la ligne droicte A B, tombe dans le cercle.

Voila la belle demonſtration que le Copiſte, ou pluſtoſt ſon Traducteur, a priſe de Clauius : mais Clauius commet icy vn vice, & luy par conſequent, lequel Ariſtote appelle petition de principe, en prenant ce qu'il veut prouuer pour cogneu, & partant ne demonſtre rien : d'autant qu'il mene la ligne droicte A B, dans le cercle, & par le moyen d'icelle ligne droicte A B, menée dans le cercle, il eſtime demonſtrer qu'elle y tombe: car voila comme il argumente. L'angle A D C, qui eſt externe, à cauſe que la ligne droicte C D, tombe ſur A B, qui eſt menée dedans le cercle du poinct A, au poinct B, pour faire le triangle C B A, ſera plus grand que C B A : & partant auſſi plus grand que B A C, qui eſt monſtré égal à C B A : donc A C, qui eſt menée du centre C, iuſques à la circonference, ſera plus grande que C D, qui ne paruient pas iuſques à la circonference, n'ayant eſté menée que iuſques à la ligne A B, qui tombe dans le cercle. Donc ladite ligne droicte A B, tombera dans le cercle. Et qui conſiderera attentiuement cette demonſtration, la trouuera ainſi, puis qu'il mene vne ligne droicte dedans vn cercle, & puis monſtre qu'elle y eſt : & par ainſi ne monſtre rien. L'exemple que donne Ariſtote de telles petitions de principe, ſe peut reduire en tel ſyllogiſme.

9. 1.
19. 1.

Toutes & quantes-fois que les angles alternes ſont égaux, les lignes ſont paralleles.

Toutes & quantes-fois que les lignes ſont paralleles, les angles alternes ſont égaux.

Donc,

Donc, toutes & quantes-fois que les lignes ſont paralleles, les lignes ſont paralleles.

Clauius, & le Copiſte apres luy, argumenterent tout auſſi bien en cette pretenduë demonſtration.

La ligne droicte A B, que nous menons dedans le cercle, tombe dans le cercle.

La ligne droicte C A, qui vient du centre C, iuſques à la circonference A, eſt monſtrée plus grande que C D, à cauſe qu'elle ne vient que iuſques à la ligne A B, qui tombe dans le cercle.

Donc la ligne droicte A B, tombe dans le cercle.

Mais telles fautes doiuent eſtre attribuées au Traducteur, & non au Copiſte, qui eſtant vn homme ignorant, & ſans auoir eſtudié aux lettres humaines, ſeroit excuſable en quelque façon, s'il auoit fait cecy luy-meſme, n'ayant failly qu'apres Clauius, qui eſtoit vn homme docte. Mais qui voudroit remarquer toutes les fautes commiſes aux Onologies, imprimées ſous le nom de Herrion, il faudroit en faire vn volume entier. Icy nous n'en remarquerons que quelques-vnes, pour aduertir le Lecteur d'y prendre garde.

THEOREME 2. PROP. 3.

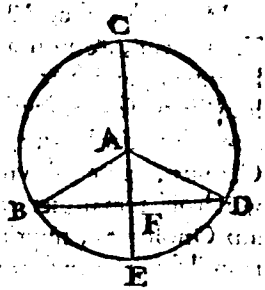
Si dans le cercle quelque ligne droicte paſſant par le centre, coupe quelque autre ligne droicte, qui ne paſſe point par le centre, en deux egalement, elle la coupera auſſi à angles droicts. Et ſi elle la coupe à angles droicts, elle la coupera auſſi en deux egalement.

Soit le cercle B C D E, & soit la ligne E C, passant par le centre A, laquelle coupe la ligne droicte B D, qui ne passe point par le centre, en deux également, au poinct F. Ie dis que la ligne C E, est à angles droicts à la ligne B D.

Car ayant mené les deux lignes A B, A D, les deux costez A F, F B, du triangle A F B, sont égaux aux deux costez A F, F D, du triangle A F D: & les baſes A B, A D, sont égales. n Donc les angles A F B, A F D, seront égaux: o c'est à dire droicts, ce qui estoit premierement proposé.

n 8. 1.
o 10. def.

Soit maintenant C E, à angles droicts à B D. Ie dis que B D, est coupée en deux également au poinct F, par la ligne droicte C E. Car les deux lignes A B, A D, estans égales, p les deux angles A B D, A D B, seront égaux sur la baſe B D, du triangle Iſoſcele A B D.



p 5. 2.

D'auant donc que les deux angles A F B, A B F, du triangle A B F, sont égaux aux deux A F D, A D F, du triangle A D F, & que les costez A B, A D, oppoſez aux angles droits au poinct F, sont semblablement égaux: q les costez F D, F B, seront égaux: ce qui estoit secondement proposé. Donc si au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

q 26. 1.

Cette deuxiéme partie se pouuoit ainſi demonſtrer: soit A F, à angles droicts à B D, r le quarré de A B, sera égal aux deux quarrez de A F, F B: semblablement, le quarré de A D, sera égal aux deux quarrez de A F, F D: mais les quarrez de A B, A D,

r 47. 1.

A D, sont égaux, puis qu'icelles lignes sont égales. Donc les quarrez de A F, F B, seront égaux aux quarrez de A F, F D, parquoy ostant le quarré commun de A F, les quarrez de F B, F D, demeureront égaux: & partant leurs costez F D, F B, serõt égaux.

COROLLAIRE.

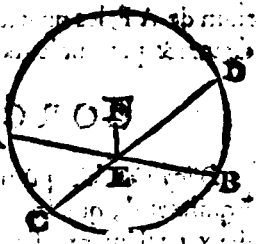
D'icy s'ensuit qu'en tout triangle Isoscele ou Equilateral, que la ligne qui coupera la base en deux egalement, sera perpendiculaire à la base: pourveu qu'elle soit menée de l'angle opposé à la base, sur la base; (ce qu'a oublié Clauius) autrement la conclusion seroit nulle: car vne ligne en coupera bien vne autre en deux egalement, & ne sera toutefois à angles droicts à icelle coupée: & au contraire la ligne perpendiculaire à la base, menée de l'angle oppoſé, la coupera en deux egalement. Car de ce que au triangle B A D, A F, coupe B D, en deux egalement, il a esté demonstré que les angles au poinct F, sont droicts. Et de ce que les angles au poinct F, sont droicts, il a esté monstré que A F, coupe B D, en deux egalement.

THEOREME 3. PROP. 4.

Si au cercle deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, n'estans point menées par le centre, elles ne se couperont point l'vne l'autre en deux egalement.

Au cercle A B C D, soient menées les deux lignes droictes A B, C D, ne passans point par le

centre, & ſe coupant l'vne l'autre au poinct E, Ie dis qu'il ne ſe peut faire qu'elles ſe coupent l'vne l'autre en deux egalement. Car ſi l'vne d'icelles paſſe par le centre, il eſt manifeſte qu'elle ne ſera pas coupée en deux egalement : car elle peut eſtre ſeulement diuiſée au centre en deux egalement, par lequel centre l'autre eſt poſée, ne paſſer : mais ſi l'vne ny l'autre ne paſſe point par le centre : encore que l'vne d'icelles puiſſe eſtre quelquefois coupée en deux egalement par l'autre ; l'autre toutefois ne ſera coupée en deux egalement.



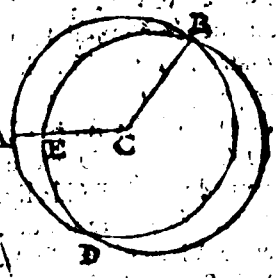
Car qu'elles ſe coupent, s'il eſt poſſible, en deux egalement l'vne l'autre, en ſorte que A E, ſoit egale à E B, & C E, à E D ; & ayant trouué le centre F, d'iceluy ſoit menée F E, au poinct E, où elles ſe coupent. D'autant que F E, paſſant par le centre, coupe A B, ne paſſant par le centre, en deux egalement à E, elle la coupera à angles droicts : Donc l'angle F E B, ſera droict : par meſme raiſon elle coupera auſſi C D, à angles droits. Donc l'angle F E D, ſera auſſi droict : & partant égal à l'angle F E B, la partie au tout, ce qui eſt impoſſible : elles ne ſe couperont donc l'vne l'autre en deux egalement. Donc ſi au cercle, &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

f 1. 3.

t 3. *du* 3.

THEOREME 4. PROP. 5.

Si deux cercles se coupent l'vn l'autre, ils n'auront pas mesme centre.



Que les deux cercles A B D, E B D, se coupent l'vn l'autre aux poincts B, & D. Ie dis qu'ils n'auront pas mesme centre.

Autrement, s'ils ont mesme centre, soit C, centre de tous les deux, si faire se peut, & soit iointe C B, au poinct de la section, & soit menée C E A, coupant les circonferences aux poincts E, & A.

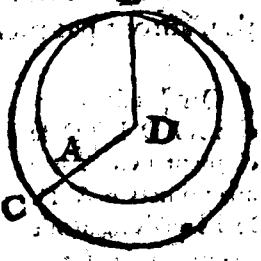
D'autant que C, est le centre du cercle A B D, la ligne C A, sera egalè à C B. Derechef, d'autant que C, est le centre du cercle B E D, la ligne C E, sera égale à C B : mais C A, a esté monstrée égale à C B : [v] donc C A, & C E, seront égalès, la partie & le tout, ce qui est impossible : partant C, n'est pas le centre des deux cercles. Donc si deux cercles se coupent, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 15. *def.* [v] 1. *c.s.*

THEOREME 5. PROP. 6.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre, au dedans, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles A B, C B, se touchans l'vn l'autre au dedans, au poinct B. Ie dis qu'ils n'ont pas mesme centre.

Car s'il est possible, soit D, le centre de tous les deux, & soit coniointe la ligne droicte D B, & soit menée comme l'on voudra la ligne D A C, coupant les circonferences aux poincts A, & C.



D'autant que D, est le centre du cercle B C, la ligne D C, sera egale à D B. Derechef, d'autant que D, est aussi le centre du cercle A B, la ligne D A, sera egale à D B: mais 15. 1. D C, est aussi demonstrée égale à D B: donc D A, & D C, seront egales, la partie & le tout, ce qui est impossible. Donc le poinct D, n'est pas le centre de tous les deux cercles A B, & C B: partant, si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

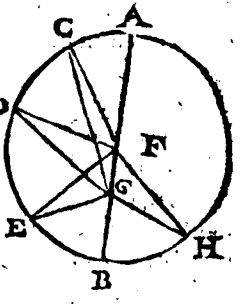
Euclide propose ce Theoreme, seulement des cercles qui se touchent au dedans: d'autant qu'il est tres-manifeste, que les cercles qui se touchent au dehors, ne peuuent auoir vn mesme centre, attendu que l'vn est au dehors de l'autre.

THEOREME 6. PROP. 7.

Si au diametre du cercle l'on prend quelque poinct, lequel ne soit point le cen-

tre du cercle ; & de ce poinct à la circonference tombent quelques lignes droictes, la plus grande sera celle-là en laquelle est le centre ; mais la plus petite sera celle qui reste. Des autres, tousiours la plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignée ; & de ce mesme poinct tomberont seulement deux lignes droictes egales, à la circonference de part & d'autre, de la plus petite.

Au diamettre A B, du cercle A C D E B, duquel le centre est F, soit pris quelconque poinct outre le centre, lequel soit G, & d'iceluy tombent tant de lignes droictes que l'on voudra à la circonference du cercle, sçauoir G C, G D, G E. Ie dis que G A, en laquelle est le centre, est la plus grande de toutes celles qui sont menées d'iceluy poinct G, à la circonference, & que la plus petite est la restante G B, laquelle parfaict le diamettre : en apres que G C,



plus proche de G A, laquelle passe par le centre, est plus grande que G D, qui est plus esloignée de la mesme G A, & par mesme raison que G D, est plus grande que G E ; & ainsi des autres : & finalement du poinct G, l'on peut mener seulement de part & d'autre de la plus petite, deux lignes droictes egales entr'elles à la circonference.

Car ſoient menées du centre F, aux poincts C,D,E, les droictes lignes F C, F D, F E. D'autant que les deux coſtez G F, F G, du triangle G F C, ſont plus grands que l'autre G C, mais G F, F C, ſont égales à G F, F A, c'eſt à dire à la toute G A, icelle G A, ſera auſſi plus grande que G C, & par meſme raiſon plus grande que G D, & ainſi des autres. Donc G A, ſera la plus grande de toutes celles qui tombent du poinct G, à la circonfetence. y 20. 1.

Secondement, d'autant qu'au triangle E F G, le coſté E F, eſt plus petit que les deux E G, G F: mais E F, eſt égale à F B: donc F B, ſera moindre que les deux F G, G E. Donc la partie commune F G, eſtant oſtée, demeurera encore G B, plus petite que G E. Et par meſme raiſon G B, ſera monſtrée plus petite que chacune des autres G D, & G C: partant G B, eſt la plus petite de toutes celles qui ſont menées du poinct G, à la circonference. z 20. 1.

Tiercement, d'autant que les deux coſtez G F, F C, du triangle G F C, ſont égaux aux deux G F, F D, du triangle G F D, & l'angle G F C, eſt plus grand que l'angle G F D, le tout que ſa partie, a la baſe G C, ſera plus grande que la baſe G D, par meſme raiſon G C, ſera plus grande que G E: ſemblablement G D, ſera auſſi plus grande que G E. Donc la ligne plus proche de celle qui paſſe par le centre, eſt plus grande que celle qui en eſt plus eſloignée. a 24. 1.

Finalement, ſoit fait l'angle B F H, de l'autre part de la ligne F B, égal à l'angle B F E, & ſoit menée la droicte ligne G H. D'autant que les deux coſtez E F, F G, du triangle E F G, ſont égaux aux

deux

deux costez H F, F G, du triangle H F G, chacun au sien, & que les angles E F G, H F G, contenus d'iceux costez, sont égaux par la construction, [b] les droictes lignes G E, G H, de part & d'autre de la moindre ligne G B, seront égales entr'elles. Or que nulle autre puisse estre égale à chacune d'icelles, il est manifeste. Car si du poinct G, l'on en mene vne autre de la part de H; elle tombera au dessous de H, & partant plus petite que G H, estant plus esloignée de celle qui passe par le centre, comme il a esté demonstré: & partant aussi plus petite que G E, égale à G H. Si elle passe au dessus de G H, elle sera plus grande pour la mesme raison. Donc l'on peut mener deux lignes droictes égales entr'elles seulement de part & d'autre de la plus petite. Partant si au diametre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 4. 1.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit que de tout poinct pris au cercle, on ne peut mener que deux lignes droictes à la circonference, égales entr'elles, d'autant que par tout poinct pris dans le cercle, l'on peut mener vn diametre.

SCHOLIE.

Henrion Copiste, dit, tant à la fin de cette Proposition que de la suivante. Et deux lignes droictes, tant seulement venans d'iceluy poinct, de part & d'autre du diametre sont égales. *Ce qui n'est pas vray, car l'on peut mener plusieurs lignes droictes égales d'iceluy poinct de part & d'autre: mais il*

deuoit

deuoit mettre comme il y a dedans Euclide : δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπίπτουσαι πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. Mais deux lignes droictes egales tant ſeulement, tombent ou peuuent eſtre menées de ce poinct au cercle ; de part & d'autre de la plus petite, au cercle, *c'eſt à dire à la circonference : car Euclide prend icy, κύκλον, pour περιφέρειαν, ce qui appert auſſi, tant par la 9. Propoſition cy-apres, qu'autres : ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι τὸ λαφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. Si au cercle on prend quelque poinct au dedans, & d'iceluy poinct tombent ou ſont menées plus de deux lignes droictes egales au cercle, c'eſt à dire à la circonference : le poinct pris eſt le centre du cercle. Il deuoit donc adiouſter,* au cercle, ou à la circonference, *& ne s'aſſeurer pas à la traduction Françoiſe, deſia faite, laquelle il a priſe.*

Il reprend le ſieur Donnot en cette Propoſition, par ce que ledit Donnot dit, Qu'vne ligne coupe le centre & commet la meſme faute en la 13. Propoſition de ce liure, à la fin de la Demonſtration, diſant. Il faudroit que la ligne droicte, menée par les deux centres E, & K, coupaſt les deux poincts d'attouchement, &c.

THEOREME 7. PROP. 8.

Si hors le cercle l'on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct l'on mene quelques lignes droictes au cercle, l'vne deſquelles paſſe par le centre, & les autres où l'on voudra ; de toutes les lignes droictes

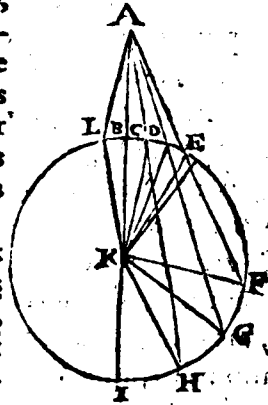
qui

qui tombent en la circonference concaue; la plus grande eſt celle qui paſſe par le centre; mais des autres, touſiours la plus proche de celle qui paſſe par le centre, ſera plus grande que celle qui en eſt plus eſloignée: mais de celles qui tombent à la circonference conuexe, la plus petite eſt celle qui eſt poſée entre le poinct & le diametre. Et des autres, celle-là laquelle eſt plus proche de la plus petite, eſt touſiours moindre, que celle qui en eſt plus eſloignée: & de ce poinct ſeront menées tant ſeulement deux lignes droictes, egales entr'elles au cercle, de part & d'autre de la plus petite.

Du poinct A, pris hors le cercle B C D E, duquel le centre eſt K, ſoient menées des lignes droictes coupans le cercle, deſquelles A I, paſſe par le centre; mais les autres A H, A G, A F, comme l'on voudra. Ie dis que la plus grande de toutes celles qui tombent en la circonference conuexe, eſt A I, qui paſſe par le centre: & apres que A H, qui eſt plus proche de A I, qui paſſe par le centre, eſt plus grande que A G, qui eſt plus eſloignée d'icelle A I; & par meſme raiſon A G, eſt plus grande que A F. Et au contraire, que la droicte ligne A B, compriſe entre le diametre & le poinct A, eſt la plus petite de toutes celles qui ſont hors le cercle: & que A C, laquelle eſt plus proche de la plus petite A B, eſt moindre que A D, plus eſloignée d'icelle A B,

&

& par meſme raiſon A D, eſt moindre que A E. Finalement du poinct A, de part & d'autre de la plus petite A B, l'on peut mener ſeulement deux lignes droictes, égales entr'elles au cercle.



Car du centre K, ſoient menées les lignes droictes K C, K D, K E, K F, K G, K H. D'autant que les deux coſtez A K, K H, du triangle A K H, [c] ſont plus grands que A H: mais A K, K H, ſont égales à A K, K I, c'eſt à dire à la toute A K I; la droicte ligne A I, ſera auſſi plus grande que A H. Par meſme raiſon A I, ſera auſſi plus grande que chacune des autres A G, A F. Donc A I, eſt la plus grande de toutes celles qui ſont menées du poinct A, dans le cercle.

c 20. 1.

Secondement, d'autant que les coſtez A K, K H, du triangle A K H, ſont égaux aux deux A K, K G, du triangle A K G, & que l'angle total A K H, eſt plus grand que l'angle A K G, ſa partie; [d] la baſe A H, ſera plus grande que la baſe A G. Par meſme raiſon A H, ſera plus grande que A F: ſemblablement A G, ſera plus grande que A F; partant la ligne plus proche de celle qui paſſe par le centre, eſt plus grande que la plus eſloignée.

d 24. 1.

Tiercement, d'autant qu'au triangle A C K, la ligne droicte A K, [e] eſt plus petite que les deux autres A C, C K: ſi l'on retranche les égales B K, C K: demeurera encore A B, moindre que A C:

e 20. 1.

par

par raiſon ſemblable A B, ſera moindre que A D, & moindre auſſi que A E. Parquoy A B, eſt la plus petite de toutes les lignes tirées du poinct A, hors le cercle à la circonference conuexe.

4. D'autant que dans le triangle A D K, tombent les deux lignes droictes A C, C K, venant des extremitez du coſté A K, f icelles A C, C K, ſeront moindres que A D, D K. Donc ayant oſté les égales C K, D K, reſtera encore A C, moindre que A D, & pareillement A C, ſera moindre que A E; & A D, auſſi moindre que A E. Donc la ligne plus proche de la moindre ligne A B, eſt plus petite que la plus eſloignée. f 21. 1.

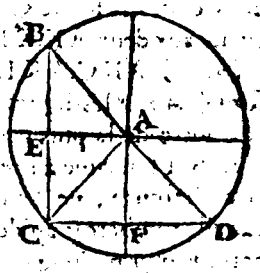
En dernier lieu, ſoit faict l'angle A K L, égal à l'angle A K C, & ſoit menée A L. D'autant que les deux coſtez A K, K C, du triangle A K C, ſont égaux aux deux A K, K L, du triangle A K L; mais les angles A K C, A K L, contenus d'iceux coſtez, ſont égaux: g les lignes droictes A C, A L, de part & d'autre de la plus petite A B, ſeront égales entr'elles. Et aucune autre tirée du poinct A, à ladite circonference, ne ſera égale à aucune d'icelles: car elle tomberoit au deſſous de A L, vers B: & partant plus petite que A L, c'eſt à dire que A C, égale à A L, ou de l'autre part de A L: & partant, plus grande, comme nous auons demonſtré. Donc l'on ne pourra mener que deux lignes droictes égales ſeulement à la circonference de part & d'autre de la moindre A B. Donc ſi l'on prend quelque poinct hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. g 4. 1.

THEO

THEOREME 8. PROP. 9.

Si au dedans du cercle l'on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct tombent plus de deux lignes droictes egales, à la circonference : le poinct pris eſt le centre du cercle.

Soit le cercle B C D, au dedans duquel ſoit pris le poinct A, & du poinct A, à la circonference B C D, tombent plus de deux lignes droictes egales entr'elles A B, A C, A D. Ie dis que le poinct A, eſt le centre du cercle.



Car ſoient conioinctes les lignes droictes B C, C D, leſquelles ſoient coupées en deux egalement, par les poincts E, & F, & par le poinct A, ſoient menées les droictes lignes A E, A F, & prolongées de part & d'autre en la circonference. D'autant donc que E B, eſt egale à E C, & E A, commune, les deux coſtez A E, E B, du triangle A E B, ſont égaux aux deux A E, E C, du triangle A E C, & la baſe A B, eſt egale à la baſe A C, par l'hypotheſe, [h] l'angle A E B, ſera égal à l'angle A E C, [i] & parcant l'vn & l'autre droict. Par meſme raiſon l'on monſtrera que les angles au poinct F, ſont droicts. Partant, puis que les droictes lignes A E, A F, diuiſent les droictes B C, C D, en deux egalement & à angles droicts

h 8. 1.
i 10. *def.*

droicts en chacune d'icelles coupantes. A E, A F, sera le centre du [k] cercle, estans prolongées à la circonference; Donc le poinct A, par lequel elles s'entre-coupent, sera le centre du cercle, ne pouuant estre ailleurs qu'au poinct commun où elles s'entre-coupent, estant en l'vne & en l'autre. Donc si dedans le cercle l'on prend, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

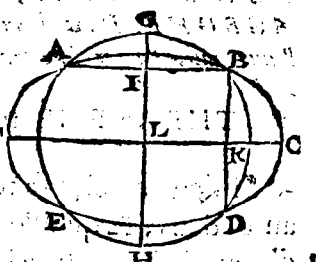
[k] *Coroll.* 1. 3.

THEOREME 9. PROP. 10.

Vn cercle ne coupe pas vn cercle, à plus de deux poincts.

Que le cercle A B C D E F, coupe le cercle A G B D H E, en plus de deux poincts, s'il est possible A, B, & D, & ayant conioint les lignes droictes A B, B D, soient diuisées icelles en deux egalement aux poincts I, & K, & par iceux poincts soient [l] menées I L, K L, à angles droicts aux lignes A B, B D, & soient prolongées de part & d'autre à la circonference.

[l] 1. 11. 2.



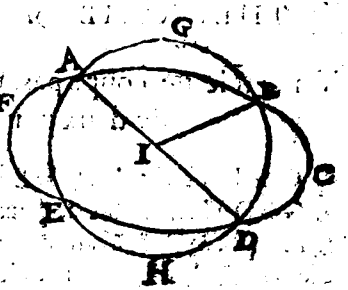
D'autant que les droictes lignes I L, & K L, coupent les droictes lignes A B, B D, en deux egalement, & à angles droicts, au cercle A G B D H E, l'vne & l'autre passera [m] par le centre d'iceluy; partant le poinct L, par lequel elles se coupent, sera le centre dudit cercle. En la mesme maniere nous monstrerons que le

[m] *Coroll.* 1. 3.

poinct L, est le centre du cercle A B C D E F. Donc deux cercles se coupans l'vn l'autre auront mesme
n 5. 3. centre: n Ce qui est impossible. Donc vn cercle, &c.

AVTREMENT.

Que les mesmes cercles se coupent si faire se peut, à plus de deux poincts A, B, & D, & soit trouué I, centre du cercle A G B, D H E, duquel soient menees I A, I B, I D, lesquelles seront egales entr'elles par la definition du cercle.



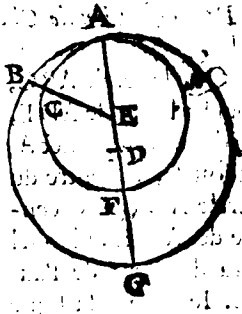
D'autant donc qu'au cercle A B C D E F, l'on a pris le poinct I, duquel tombent plus de deux lignes droictes egales, à la circonference,
o 2. 3. *iceluy poinct I,* o *sera le centre du cercle A B C D E F: mais le mesme poinct I, estoit aussi le centre de A G B D H E. Donc deux cercles se coupans l'vn*
p 5. 3. *l'autre auront vn mesme centre,* p *Ce qui est absurde.*

THEOREME 10. PROP. 11.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, & que l'on prenne les centres d'iceux, la ligne droicte conioignant iceux centres, estant prolongée, tombera à l'attouchement des cercles.

Que

Que les deux cercles A B G, A C F, se touchent l'vn l'autre au dedans au poinct A, & soit trouué le centre du cercle A B G, lequel soit D, & le centre de A C F, lequel soit E. Ie dis que la ligne droicte menée de D, à E, & prolongée, tombera au poinct de l'attouchement A.



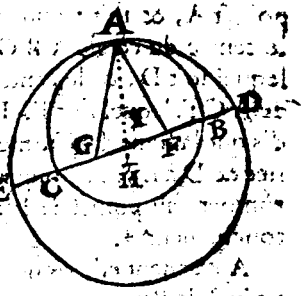
q 1. 3.

Autrement elle tombera de part ou d'autre du poinct de l'attouchement A ; qu'elle tombe donc s'il est possible, ailleurs, comme à B, coupant les circonferences és poincts C, & B, & soit prolongée directement B E D, qui est dicte estre ligne droite, de l'autre part à la circonference au poinct G : par ainsi B E D G, sera le diametre du cercle A B G, & du poinct E, au poinct de l'attouchement A, soit menée E A. D'autant donc qu'au diametre G E B, du cercle A B G, l'on a pris le poinct E, autre le centre D, la ligne E B, sera la plus petite de toutes celles qui sont menées du poinct E, à la circonference du cercle A B G, & partant plus petite que E A : mais E C, est égale à E A, puisque E C, E A, sont menées du centre E, du cercle A C F, à la circonference A C, donc E B, sera aussi plus petite que E C, le tout que sa partie : Donc D E, prolongée, ne pourra tomber ailleurs qu'au poinct d'attouchement A, comme est la ligne D E A. Partant si deux cercles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

r 7. 3.

Demonſtration de Clauius, & autres Interpretes. A

Que le cercle A B C, touche le cercle A D E, au dedans au poinct A, & ſoit F, le centre du cercle A B C, & G, centre de A D E, (lequel ſera different de l'autre. Ie dis que la ligne droicte qui paſſe par G, & F, prolongée, tombera à l'attouchement A.



6. 3.

Car ſi elle n'y tombe, qu'elle coupe l'vn & l'autre cercle aux poincts D, B, C, E, & du poinct d'attouchement A, ſoient menées aux centres G, & F, les droictes lignes A F, A G. D'autant donc qu'au triangle A F G, les deux coſtez G F, F A, ſont plus grands que le coſté G A, mais G A, eſt égale à G D, (d'autant que G, eſt poſé le centre du cercle A E D,) G F, F A, ſeront plus grandes que G D, ayant donc oſté la commune G F, F A, demeurera plus grande que F D. Donc puis que F A, eſt égale à F B, (puis que F, eſt poſé le centre du cercle A B C,) F B, ſera auſſi plus grande que F D, le tout que ſa partie, ce qui eſt abſurde.

Que ſi quelqu'vn veut dire que F, eſt le centre du cercle A D E, & G, le centre du cercle A B C, l'on argumentera en cette maniere. Au triangle A F G, les deux coſtez F G, G A, ſont plus grands que le coſté F A : mais F A, eſt égale à F E, (puis que F, eſt poſé le centre du cercle A D E,) donc F G, G A, ſont plus grandes que F E : oſtant donc

la

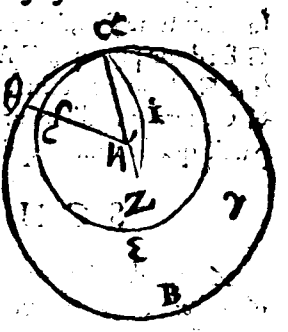
la commune F G, demeurera G A, plus grande que G E : donc puis que G A, est égale à G C, (d'autant que G, est posé le centre du cercle A B C,) la ligne G C, sera pareillement plus grande que G E, la partie que le tout, ce qui est absurde. Donc, &c.

SCHOLIE.

Aucun des Interpretes d'Euclide que i'aye veu, n'a encore entendu cette demonstration, n'entendant pas celle de Theon, comme l'on peut voir par leurs demonstrations, & mesme par celle que Clauius pretend faire apres les autres, en laquelle il conclud vne absurdité, d'où il ne peut inferer, sinon, que les poincts qu'il a pris pour centres, ne sont point les vrais centres : car d'vne absurdité demonstrée, on ne peut tirer, sinon, que le fondement d'où elle a esté deduite est faux : & Clauius ayant supposé deux poincts pour centres, ne l'estans point, & les vrais centres ne luy ayans pas esté niez, il conclud vne absurdité, que la partie est plus grande que le tout : d'où il s'ensuit que les poincts qu'il a pris pour vrais centres, ne le sont pas : mais il ne s'ensuit point que la ligne menée par les centres des deux cercles qui se touchent au dedans à vn poinct, estant prolongée tombera au poinct de l'attouchement. Ce qu'il fallait demonstrer.

Mais voyons comme fait Theon, & faisons vne figure qui responde à son discours, encore que personne n'en ait fait :

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγ, αδε, ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ τὸ α σημεῖον καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν αβγ κύκλου κέντρον, τὸ ζ, τοῦ δὲ αδε, τὸ η: λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ η ἐπὶ τὸ ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ α σημεῖον πεσεῖται. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ὡς ἡ ζηδθ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αι ζ, αη.



Ἐπεὶ οὖν αι, ηζ τῆς ιζ μείζονές εἰσιν τὴν ζθ (ἴση γὰρ ἡ ζι τῇ ζθ, ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω) μείζονες ἄρα εἰσὶν, λοιπὴ ἄρα ἡ αη λοιπῆς τῆς ηθ μείζων ἄρα ἐστὶν ἴση δὲ ἡ αη τῇ ηδ καὶ ἡ ηδ ἄρα τῆς ηθ μείζων ἐστὶν ἡ ἐλάττων, ἢ μείζων ὅπερ, ἀδύνατον ἐκ. ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη καὶ τὸ α συναφὴς πεσεῖται ἐπὶ δυκλῆ ἄρα. ἐὰν ἄρα, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Que les deux cercles αβγ, αδε, ſe touchent l'vn l'autre au dedans au poinct α, & ſoit pris le centre du cercle αβγ, ſçauoir ζ, & η, celuy de αδε. Ie dis que la ligne droicte menée de η, à ζ, & prolongée tombera au poinct d'attouchement α, s'il n'eſt ainſi qu'elle tombe, s'il eſt poſſible, comme eſt ζηδθ, & ſoient conioinctes αι ζ, αη. D'autant donc que αη, ηζ, ſont plus grandes que αι ζ, c'eſt à dire que ζθ, (car ζι, eſt égale à ζθ, car elles ſont toutes deux menées du centre,) ſi on oſte la commune ζη, la reſtante ηα ſera plus grande que la reſtante ηθ: mais ηα, eſt égale à ηδ, donc ηδ, ſera plus grande que ηθ; la plus petite que la plus grande, c'eſt à dire la partie que le tout, ce qui eſt impoſſible. Donc la ligne droicte menée de ζ, à η, &

& prolongée ne passera par autre poinct que celuy d'attouchement, elle tombera donc à iceluy. Ce qu'il falloit demonstrer.

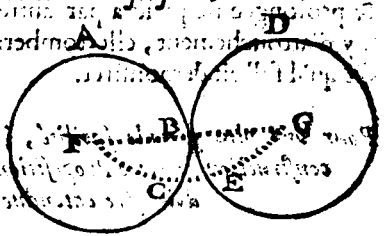
Pour vne plus grande facilité, ie mettray icy la construction de cette Proposition, telle qu'elle doit estre entendue.

Soient les deux cercles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\delta\epsilon$, se touchans au dedans au poinct α, & soit pris ζ, centre du cercle $\alpha\beta\gamma$, & η, centre de $\alpha\delta\epsilon$. Ie dis que la ligne menée de ζ, à η, & prolongée tombera au poinct α, c'est à dire, si du poinct η, à α, on mene la droicte ligne $\eta\alpha$, les deux lignes $\zeta\eta$, $\eta\alpha$, feront vne seule ligne droicte, autrement elles feront angle au poinct η, de part ou d'autre, soit de la part de ι, s'il est possible, & soit la ligne $\alpha\iota\zeta$, entenduë droicte, comme en la seconde Proposition de ce liure: partant $\zeta\eta$, prolongée tombera de l'autre part de l'angle $\alpha\eta\zeta$, comme est $\zeta\eta\delta\theta$, qu'il faut conceuoir comme vne ligne droicte. *Et c'est ainsi que l'entend Theon. Sa demonstration est facile, entendant icecy.* 1. 3.

THEOREME 11. PROP. 12.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dehors, la ligne droicte menée d'vn centre à l'autre, passera par l'attouchement.

Soient deux cercles ABC, DBE, se touchans au dehors au poinct B, & le centre de ABC, soit F, & celuy de DBE, soit G. Ie dis que la ligne droicte menée de F, & G, passe par le poinct d'attouchement B:



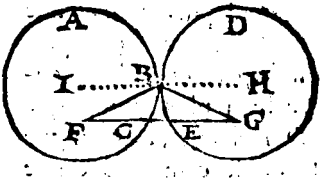
Car ſoit menée la droicte ligne F B, & la droicte G B, toutes deux au poinct d'attouchement B, ſes deux font vne ſeule ligne droicte : partant la ligne droicte menée de F, à G, paſſe par B. Car s'il n'eſt ainſi, elles feront angle de part ou d'autre au poinct B ; qu'elles faſſent donc angle vers C E, s'il eſt poſſible, & ſoit menée de F, à G, vne droicte ligne F C E G, coupant les circonferences aux poincts C, & E. D'autant donc que les deux coſtez B F, B G, du triangle B F G, (car F B, G B, ſont poſez faire angle au poinct B, & F C E G, eſt vne ligne droicte, comme accorde l'aduerſaire) ſont [v] plus grands que l'autre coſté F C E B : mais F C, eſt égale à F B, & G E, [x] égale à G B, eſtans menées des centres, donc F C, & G E, qui ne ſont qu'vne partie de la toute F C E G, ſeront auſſi plus grandes qu'icelle F C E G, la partie que le tout, (puis que F C E G, contient encore C E, outre F C, G E,) ce qui eſt impoſſible. Donc ſi deux cercles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

v 20. 1.
x 15. def. 1.

Mais

Mais voyons la demonſtration des autres, leſquelz ſont comme en la precedente, ce que eſt dit de celle-là, ſe doit entendre de celle-cy.

Soient les deux cercles A B C, D B E, ſe touchans l'vn l'autre au dehors au poinct B. Et ſoit pris F, le centre du cercle A B C, & G, le centre du cercle D B E. Ie dis que la ligne droicte menée du poinct F, au poinct G, paſſera par l'attouchement B.



Car ſi elle n'y paſſe, qu'elle paſſe par les poincts C, & E, coupant les circonferences des cercles; & ſoient menées des centres F, & G, au poinct d'attouchement B, les droictes lignes F B, G B.

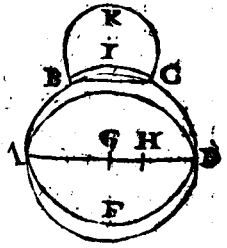
D'autant qu'au triangle F B G, les deux coſtez B G, B F, ſont plus grands que le coſté F G: mais B F, eſt égale à F C, (puis que F, eſt poſé le centre du cercle A B C,) & G B, eſt égale à G E; (d'autant que G, eſt poſé le centre du cercle D B E,) dont les droictes lignes F C, G E, ſeront auſſi plus grandes que la droicte F G, la partie que le tout; (car la toute F G, contient encore la partie moyenne C E, outre les deux F C, G E,) ce qui eſt abſurde: partant ſi deux cercles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 12. PROP. 13.

Vn cercle ne touche point vn cercle à

plus d'vn poinct, ſoit qu'il le touche au dedans ou au dehors.

Que les deux cercles A B C D, A D F, ſe touchent au dedans, s'il eſt poſſible, à plus d'vn poinct, ſçauoir, au poinct A, & D, & ſoient pris les centres
y 6. 3. d'iceux cercles G, & H, y leſquels ſeront diuers:
z 11. 3. donc la ligne menée par les z centres G, & H, prolongée de part & d'autre tombera au poinct de l'attouchement A, & D, comme A G H D. Et d'autant que G, eſt le centre du cercle A B C D, la ligne A G, ſera égale à G D, donc A G, ſera plus grande que H D, eſtant égale à G D, plus grande, partant A H, ſera encore bien plus grande que H D. Derechef, d'autant que H, eſt le centre du cercle A F D, la ligne A H, ſera egale à H D: mais elle a eſté demonſtrée beaucoup plus grande, ce qui eſt impoſſible. Donc vn cercle n'en touche pas vn autre à plus d'vn poinct, au dedans.

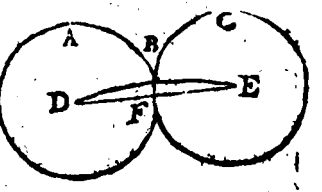


Ie dis auſſi qu'il ne le touche au dehors. Car, s'il eſt poſſible, que le cercle B C K, touche le cercle
2. 3. A B C D, au dehors à plus d'vn poinct, ſçauoir B, & C; & que l'on mene la droicte ligne B C, elle tombera dans l'vn des cercles: & partant hors l'autre, ce qui eſt contre la meſme ſeconde Propoſition de ce liure. Donc vn cercle n'en touche pas vn autre au dehors à plus d'vn poinct. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Elaniſſe

Clauius demonstre ainsi cette derniere partie.

Que les cercles A B, C B, se touchent à plus d'vn poinct au dehors, proche le poinct F, & du centre D, au centre E, soit menée la droicte ligne D E, laquelle passera par le poinct d'attouchement F. a 12. 3. Donc s'ils se touchent aussi à vn autre poinct que F, qu'ils se touchent à B. Donc ayant mené les droictes lignes D B, E B, icelles D B, E B, seront égales à D F, E F, c'est à dire & D E : b mais elles sont plus grandes, ce qui est absurde. Donc les cercles ne se touchent pas au dehors à plus d'vn poinct.



b 20. 1.

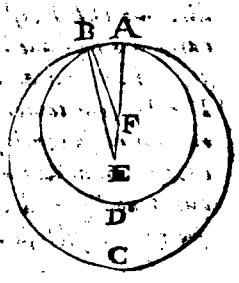
SCHOLIE.

Clauius se trompe fort icy, disant que D B, E B, seront plus grandes que D E, par la 20. du 1. voulant dire que D B E, est vn triangle, ce qui ne peut estre; car ayant posé que les cercles se touchent aux poincts B, & F, il faut accorder par necessité; que D B E; D F E, sont toutes deux lignes droictes. Donc s'il eust dit en sa conclusion, que si deux cercles se touchoient au dehors à plus d'vn poinct; il s'ensuiuroit que deux lignes droictes encloroient vn espace c 12. 1. *ce qui est impossible, il eust bien conclu.*

SCHOLIE

SCHOLIE DE CLAVIVS.

Si l'on conſidere bien la demonſtration d'Euclide, par laquelle il a prouué, qu'vn cercle ne touche pas vn cercle à plus d'vn poinct; icelle ſemble principalement conclure, qu'vn cercle ne touche vn cercle à deux ou pluſieurs poincts, leſquels ſoient fort diſtans, & non pas qu'vn meſme attouchement ne puiſſe auoir pluſieurs poincts. Encore que le meſme puiſſe eſtre facilement demonſtré preſque par le meſme diſcours. Or afin que cecy demeure totalement confirmé, ſçauoir, qu'vn cercle ne peut toucher vn cercle, à plus d'vn poinct; nous monſtrerons briefuement qu'à vn meſme attouchement n'y peut auoir plus d'vn poinct.



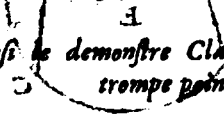
Car, que le cercle A B C, touche le cercle A B D, proche le poinct A, & par les centres E, & F, [d] leſquels ſeront diuers, ſoit menée la droicte ligne E F, laquelle eſtant prolongée [e] tombera neceſſairement au poinct d'attouchement, comme au poinct A. Ie dis que ces cercles ſe touchent tant ſeulement au poinct A: car

d 6. 1.

e 11. 1.

s'ils

s'ils se touchent aussi à vn autre poinct, comme à B, ayant mené du poinct B, aux centres E, & F, les droictes lignes B E, B F; les lignes E F, F B, seront plus grandes que E B: mais E B, est égale à E A, puis que l'vne & l'autre est menée du centre E: donc E F, F B, seront aussi plus grandes que E A; parquoy ayant osté la commune E F, demeurera F B, plus grande que F A, ce qui est absurde: attendu que F B, F A, sont menées de mesme centre F, à la circonférence, & partant sont égales selon la definition du cercle: donc les cercles A B C, A B D, se toucheront l'vn l'autre seulement au poinct A, & non ailleurs.



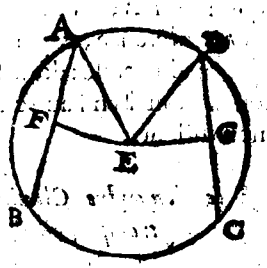
Ainsi le demonstre Clauius, mais ie veux icy le trompe point, & en quoy.

Clauius dit, si les deux cercles se touchent aussi en poinct B, qu'vne ligne menée du poinct B, aux centres F, & E, les droictes lignes B F, B E, les lignes B E, F B, seront plus grandes que B E, procedant construire vn triangle, ce qui est impossible: car posant que les cercles se touchent en poinct B, les lignes E F, F B, menées par les centres E, F, seront vne seule ligne droicte, & partant toute autre ligne menée de E, à B, sera courbe: mais il deuoit dire pour sa conclusion, que les lignes droictes E F B, E F A, feroient vn tout non vn segment, ce qui est impossible: ou bien ayant acheué le diametre, c'est a dire prolongé A E, iusqu'à C, en ostrer qu'il s'ensuiuroit, que le demy cercle ou la circonference B C, seroit égale à A B C, la partie au tout: ce qui est impossible. f 11. 3.

THEO

THEOREME 13. PROP. 14.

Au cercle, les lignes droictes égales, ſont egalement diſtantes du centre : & icelles qui ſont egalement diſtantes du centre, ſont egales entr'elles.



Au cercle ABCD, duquel le centre eſt E, ſoient les deux lignes droictes égales AB, DC. Ie dis qu'elles ſont egalement diſtantes du centre E.

Car du centre E, ſoient menées E F, E G, perpendiculaires à A B, & C D, & ſoient conioinctes E A, E D : les lignes E F, E G, couperont g 3. 3. A B, & C D, en deux egalement, leſquelles eſtans poſées égales, leurs moitiez A F, D G, ſeront auſſi égales.

D'autant que les quarrez des lignes égales E A, h 47. 1. E D, ſont égaux : & h que le quarré de E A, eſt égal aux quarrez de A F, F E, ſemblablement le quarré de E D, égal aux quarrez de D G, & G E: les quarrez de A F, F E, ſeront pareillement égaux aux quarrez de D G, G E : donc ayant oſté les quarrez égaux des lignes droictes égales A F, D G, les quarrez de F E, G E, demeureront égaux : donc i 4. d. 3. E F, E G, ſeront égales. Partant i A B, C D, ſeront egalement diſtantes du centre E.

Derechef, ſoient A B, C D, également diſtantes du centre E. Ie dis qu'elles ſont égales entr'elles : car

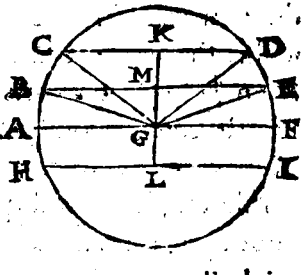
car demeurant ainsi la construction, nous monstrerons que E F, E G, [k] sont égales, & qu'elles diuisent I A B, C D, en deux également, & les quarrez des lignes droictes égales E A, E D, sont égaux entr'eux : mais le quarré de A E, [m] est égal aux deux quarrez de A F, F E, & celuy de E D, aussi égal aux deux de D G, G E : donc les quarrez de A F, F E, sont égaux aux quarrez de D G, G E; ayant donc osté les quarrez égaux des égales E F, E G, demeureront les quarrez de A F, D G, égaux: & partant les lignes A F, D G, égales, donc leurs doubles A B, C D, aussi égales : donc au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

k 4. d. 3.
l 3. 3.
m 47. 1.

THEOREME 14. PROP. 15.

Au cercle, la plus grande ligne est le diametre ; mais des autres, tousiours celle qui est plus proche du centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignée.

Au cercle A B C D, duquel le centre est G, soit le diametre A F : & la ligne droicte plus proche du centre H I, la plus esloignée C D. Ie dis que la plus grande de toutes est le diametre A F, & H I, plus grande que C D.



Car soient menées du centre G, les perpendiculaires

pendiculaires G K, G L, à C D, H I, & d'autant que C D, eſt plus eſloignée du centre que H I, la perpendiculaire G K, ſera plus grande [n] que G L. Soit donc retranchée de G K, la ligne G M, égale à G L, & par M, ſoit menée B M E, perpendiculaire à G K: & ſoient conioinctes les droictes lignes G B, G C, G D, G E.

n 4. d. 3.

D'autant que les perpendiculaires G M, G L, ſont égales, B E, H I, ſeront egalement diſtantes du centre: & partant égales entr'elles. Derechef, d'autant que G B, G E, ſont [o] plus grandes que B E, mais ſont égales au diametre A F: le diametre A F, ſera auſſi plus grand que B E. Par meſme raiſon l'on monſtrera que A F, eſt la plus grande de toutes les autres lignes.

o 20. 1.

Finalement, d'autant que les coſtez G B, G E, du triangle B G E, ſont égaux aux coſtez G C, G D, du triangle C G D, & l'angle B G E, eſt plus grand que l'angle C G D, [p] la baſe B E, ſera plus grande que la baſe C D. Et partant H I, qui a eſté monſtrée égale à B E, ſera pareillement plus grande que C D. Donc au cercle, le diametre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

p 24. 1.

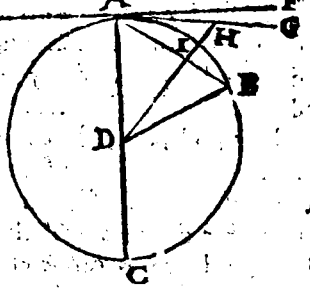
THEOREME 15. PROP. 16.

La ligne droicte menée de l'extremité du diametre du cercle, à angles droicts à iceluy diametre, tombera hors le cercle, & en l'eſpace compris entre icelle ligne droicte & la circonference, ne tombera pas d'autre ligne droicte; & l'angle du demy-cercle eſt plus grand que tout angle rectiligne agu; mais le reſte eſt plus petit.

Soit

Soit le cercle A B C, duquel le centre est D, & le diametre A B, de l'extremité duquel soit menée vne droicte ligne à angles droicts à icelluy. Ie dis qu'elle tombera hors le cercle; car s'il n'est ainsi, s'il est possible, qu'elle tombe au dedans comme est A B, & soit menée D B: [q] les angles D A B, D B A, seront égaux: mais D A B, est droict, donc D B A, sera droict aussi, ce qui est absurde, [r] puis que les deux angles d'vn triangle sont moindres que deux droicts: semblablement nous monstrerons qu'elle ne tombera aussi sur la circonference. Donc au dehors, laquelle soit A E. q 5. 1. r 17. 1.

Ie dis maintenant qu'entre A E, & la circonference B A, ne peut pas tomber vne autre ligne droicte menée du poinct A. Car que A G, y tombe, s'il est possible, par ainsi l'angle D A G, sera agu, & sur A G, soit menée D H, perpediculaire à A G, coupant la circonference à I: D H, ne tombera que de la part de l'angle agu D A G. [s] D'autant qu'au triangle D A H, [t] les deux angles D H A, D A H, sont moindres que deux droicts, & D H A, est droict par la construction, D A H, sera moindre qu'vn droict: & partant D A, c'est à dire D I, égale à icelle, [v] sera plus grande que D H, la partie que le tout, ce qui est impossible. Donc aucune ligne droicte ne tombera entre la circonference A B, & la droicte ligne perpendiculaire A E, mais coupera le cercle.



s Corell. 17. 1.
t 17. 1.

Ie dis finalement, que l'angle du demy-cercle contenu du diametre A C, & de la circonference B A, eſt plus grand que tout angle rectiligne agu, & le reſte qui eſt l'angle de contingence contenu de la droicte ligne A E, & de la circonference A B, eſt plus petit que tout angle rectiligne agu. Car puis qu'il eſt monſtré que toute ligne droite tirée du poinct A, au deſſous de la perpendiculaire A E, tombe dans le cercle, elle fera neceſſairement auec la ligne A C, vn angle rectiligne agu moindre que l'angle du demy-cercle: mais auec A E, conſtituera vn angle rectiligne agu, plus grand que l'angle de contingence, attendu que celuy-là eſt vne partie de l'angle du demy-cercle: mais cettuy-cy quelque tout, au reſpect de l'angle de contingence: ce qui eſt manifeſte, eſtant menée la droite ligne A B, comment que ce ſoit, au deſſous de A E. Car puis qu'icelle A B, tombe dans le cercle, comme il eſt demonſtré, l'angle rectiligne agu C A B, eſt moindre que l'angle du demy-cercle, contenu ſous le diametre A C, & la circonference A B C, puis que celuy-là eſt partie de cettuy-cy. Mais l'angle de contingence contenu ſous la tangente A E, & la circonference A B C, eſt moindre que l'angle rectiligne B A E, puis qu'il eſt partie d'iceluy. Donc l'angle du demy-cercle eſt plus grand que tout angle rectiligne agu, & le reſte, angle de contingence, moindre. Donc, la ligne menée de l'extremité, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Le Copiſte a mal entendu la demonſtration de cette Propoſition, en diſant ainſi. De l'extremité A, ſoit menée la perpendiculaire A E, par la 11. du 1. Ie dis (dit-il) que la ligne A E, tombe hors le cercle: il eſt icy aiſé à voir qu'il ne ſçait ce qu'il veut

veut dire, car puis qu'il a mené la ligne perpendiculaire A E, hors le cercle par la 11. du 1. il n'a plus besoin de prouuer qu'elle tombe hors le cercle, mais il deuoit faire ainsi sa demonstration. *Ie dis que la ligne droite menée de l'extremité du diametre A C, à angles droits à iceluy, tombe hors le cercle, autrement qu'elle tombe au dedans, comme A B, &c.* comme dit Theon : ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, μὴ ἐφ' ἑαυτὸν δὲ ἐπιζεύξαντος τινὸς εὐθείας, ὡς ἡ α γ, &c. Mais ie croy plustost qu'il estoit yure lors, & ne sçauoit ce qu'il faisoit, qui a esté la cause qu'il a mal copié: car au texte de cette mesme Proposition il a mis ainsi. *Si à l'extremité du diametre d'vn cercle, on tire vne ligne perpendiculaire, elle tombera dedans le cercle* : au lieu de dire, elle tombera hors le cercle : car il y a ainsi au texte de l'Autheur, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, c'est à dire ; elle tombera hors le cercle.

COROLLAIRE.

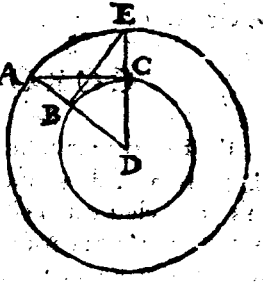
Il est d'icy manifeste, que la ligne droite tirée de l'extremité du diametre, à angles droicts, touche le cercle : car il est demonstré qu'elle tombe dehors le cercle : parquoy elle atteint le cercle à ce poinct extreme du diametre seulement. Comme si du poinct A, en la circonference du cercle A B C, il falloit mener vne ligne qui touchast le cercle au poinct A, nous menerons vne ligne droicte de A, au centre D, & à icelle nous menerons A E, à angles droicts, & icelle touchera le cercle au poinct A, comme il est demonstré.

PROBLEME 7. PROP. 17.

D'vn poinct donné mener vne ligne droicte, qui touche vn cercle donné.

Soit le poinct donné A, & le cercle donné B C, il faut mener vne ligne droicte du poinct A, qui touche le cercle B C.

Soit trouué le centre D, & ioincte la ligne droicte A D, laquelle coupe le cercle au poinct B, & du centre D, & de l'interualle D A, soit descrit le cercle A E, & du poinct B, soit menée B E, à angles droits à A D, coupant le cercle A E, au poinct E: & finalement soit menée D E, coupant le cercle B C, au poinct C, & soit iointe C A. Ie dis que A C, touche le cercle donné au poinct C.



Car puis que les deux costez B D, D E, du triangle B D E, sont égaux aux deux C D, D A, du triangle C D A, chacun au sien, comme il appert par la definition du cercle, & l'angle D, contenu d'iceux costez est commun, les x baſes B E, C A, & les angles D B E, D C A, seront égaux; mais D B E, est droit par la construction: donc D C A, sera droit aussi. Donc puis que C A, est menée de l'extremité C, du demy-diametre D C, à angles droits, elle y touchera le cercle. Donc du poinct donné A, l'on a mené A C, touchant le cercle B C, au poinct C. Ce qu'il falloit faire.

x 4. 1.

y Coroll. 16. 3.

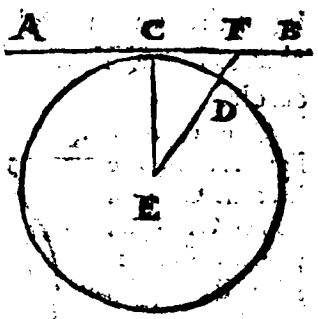
SCHOLIE.

SCHOLIE.

La pratique de cette Propoſition ſe peut colliger de la meſme demonſtration. Mais nous l'enſeignerons plus facilement à la 31. Propoſition de ce liure.

THEOREME 16. PROP. 18.

Si quelque ligne droicte touche vn cercle, & du centre à l'attouchement l'on conioint quelque ligne droicte, la ligne conionicte ſera perpendiculaire à la touchante.



Que la droicte ligne A B, touche le cercle C D, au poinct C, duquel ſoit trouué le centre E, & d'iceluy ſoit menée la droicte ligne E C, au poinct d'attouchement C. Ie dis que E C, eſt perpendiculaire à A B.

Car ſi elle ne l'eſt, ſoit menée E F, perpendiculaire à A B, coupant la circonference au poinct D. D'autant qu'au triangle C E F, [z] les deux angles E C F, E F C, ſont moindres que deux droicts, & E F C, eſt droict par la conſtruction, E C F, ſera moindre qu'vn droict. Partant [a] E C, c'eſt à dire E D, ſon égale ſera plus grande que E F, la partie

z 17. 1.

a 18. 1.

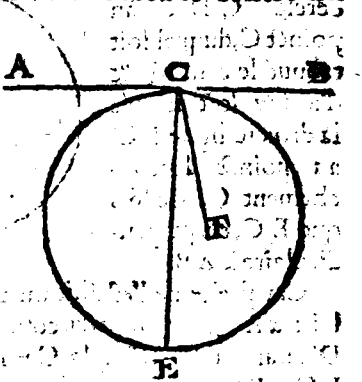
que le tout, ce qui eſt impoſſible. Donc E C, eſt perpendiculaire à A B. Partant ſy vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

AVTREMENT.

Si E C, n'eſt perpendiculaire à A B, l'vn des angles au poinct C ſera obtus, & l'autre agu. Soit E C B, agu, lequel eſtant plus grand que l'angle du demy-cercle E C D, l'angle du demy-cercle ſera plus petit
b 16. 3. *que quelque angle rectiligne agu.* [b] *Ce qui eſt abſurde.*

THEOREME 17. PROP. 19.

Si quelque ligne droicte touche vn cercle, & de l'attouchement l'on mene vne ligne droicte, à angles droicts à la touchante, en icelle menée ſera le centre du cercle.



Que la droicte ligne A B, touche le cercle C E, au poinct C, & du poinct C, ſoit menée C E, à angles droicts à A B. Ie dis qu'en C E, eſt le centre du cercle.

Car s'il eſt hors icelle, qu'il ſoit au poinct F, s'il eſt poſſible, duquel ſoit menée la
c 18. 1. droicte ligne F C, [c] laquelle ſera perpendiculaire à A B. Partant l'angle droict F C B, ſera égal à l'angle

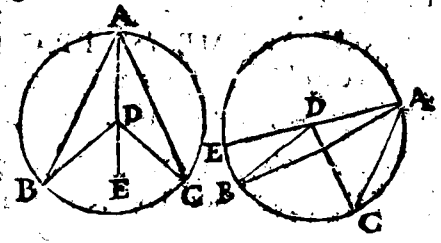
droicte E C B, la partie au tout: ce qui est impossible. Donc le centre du cercle ne sera hors la ligne C E. Donc si vne &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 18. PROP. 20.

Au cercle, l'angle qui est au centre, est double de l'angle qui est à la circonference, quand ils ont pour leur base vne mesme circonference.

Soit le cercle A B C, au centre duquel D, soit constitué l'angle B D C, & A B C, à la circonference ayans vne mesme circonference B C, pour base: Ie dis que l'angle B D C, est double de B A C.

Car soit coniointe A D, & prolongée à E: d'autant que les deux lignes D A, D B, sont égales D A B, D B A, [d] seront égaux: mais l'angle externe E D E, est égal [e] aux deux internes D A B, D B A, & partant double de chacun d'iceux, comme de D A B. Semblablement, nous monstrerons que C D E, est double de l'angle D A C: parquoy le tout B D C, sera double du tout B A C. Ce qui est proposé.



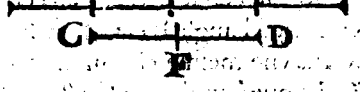
Derechef, que l'angle C A B, n'enclouë point C D B; & soit iointe A D, & prolongée à E. D'autant que les deux costez D A, D C, sont égaux [f] les deux angles

[d] 5. 1.
[e] 32. 1.
[f] 5. 1.

gles D A C, D C A, ſeront égaux : mais l'angle ex-
k 32. 1. terne C D E, eſt égal [k] à iceux, donc il ſera double de D A C : mais l'angle E D B, au centre eſt double de E A B, comme il eſt demonſtré, donc le reſte
l 10. 1. B D C, ſera double du reſte B A C. [l] Car quant le tout eſt double du tout, & le retranché du retranché, le reſte ſera double du reſte. Comme s'enſuit.

LEMME.

Soit A B, toute double de C D, toute & A E, retranchée double de C F, retranchée, le reſte E B, ſera double du reſte F D. Car puiſque A B, eſt double de C D, eſtant diuiſée en deux également à E, tant A E, que E B, ſera égale à C D. Donc A E, eſtant auſſi double de C F, ; C D, égale à A E, ſera auſſi double de C F, & partant de ſon autre moitié F D. Donc le reſte E B, égale à C D, ſera auſſi double du reſte F D. Ce qu'il falloit demonſtrer, &c.



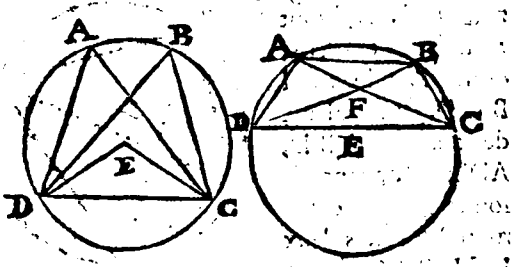
THEOREME 19. PROP. 21.

Au cercle, les angles qui ſont en vn meſme ſegment, ſont égaux entr'eux.

Soit le cercle A B C D, & au ſegment C B A D ſoient les deux angles D A C, C B D. Ie dis qu'ils ſont égaux entr'eux.

Car ſoit le centre E, duquel ſoient ioinctes les lignes E D, E C. D'autant que l'angle D E C, eſt
m 10. 3. conſtitué au centre [m] il ſera double de D A C, à la circonference : car ils ont meſme circonference D C, pour baſe : par meſme raiſon il ſera double de l'angle C B D. Donc chacun des deux A, & B,

ſera moitié de DEC, & partant égaux entr'eux.



Donc au cercle les angles qui ſont, &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

Semblablement on demonſtrera que DAC, CBD, en la moindre ſection DABC, ſont égaux entr'eux. Car ayant mené AB, en la ſeconde figure ADB, BCA, en la plus grande ſection dont la baſe eſt AC, ſeront égaux, comme il eſt monſtré & les angles au ſommet BEC, & AFD, ſont égaux, donc DAC, CBD, en la moindre ſection dont la baſe eſt DC, ſont auſſi égaux. Ce qui eſtoit propoſé. 15. 1. Coroll. 32. 1.

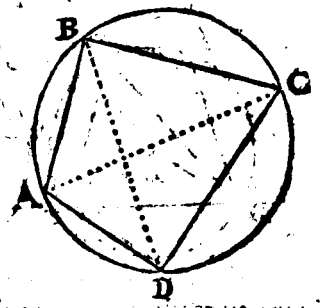
THEOREME 26. PROP. 22.

Les angles oppoſez des figures de quatre coſtez, inſcrites au cercle, ſont égaux à deux droicts.

Soit le cercle ABCD, auquel ſoit inſcrite la figure quadrilatere AC. Ie dis que les deux angles oppoſez BAD, BCD, ſont égaux à deux droicts.

Car ſoient conioinctes les deux Diagonales AC, BD: d'autant que les deux angles ACD, ABD, ſont en vn meſme ſegment ABCD, ils ſeront égaux entr'eux, par meſme raiſon les deux angles

B C A, B D A, au segment B C D A, seront aussi égaux entr'eux, donc l'angle total B C D, sera égal aux deux angles A B D, A D B: donc ayant adiousté l'angle commun B A D, les deux B C D, B A D, seront égaux aux trois angles B D A, D B A, & B A D, du triangle A B D: mais les trois angles du triangle A B D, p sont égaux à deux droicts, donc les deux angles opposez B A D, B C D, seront aussi égaux à deux droicts. Semblablement l'on monstrera que les deux angles opposez aux poincts D, & B, sont égaux à deux droits. Donc les angles opposez des figures, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



p 32. 1.

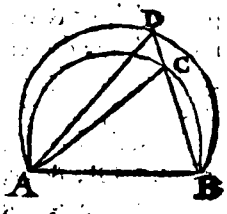
PROBLEME 21. PROP. 23.

Sur vne mesme ligne droicte, l'on ne pourra constituer deux segments de cercles semblables & inegaux, & de mesme part.

Car, s'il est possible, soient constituez deux segments de cercles, semblables & inegaux, sur la ligne A B, & de mesme part A C B, A D B, lesquels segments se couperont seulement aux poincts A, & B, q puis qu'vn cercle ne coupe vn autre cercle à plus de deux poincts. Donc la circonference d'vn des segments sera hors la circonference de l'autre. Soit donc

q 10. 3.

donc menée la ligne droicte B C D, coupant les circonferences aux poincts C, & D, & soient iointes A D, A C: d'autant que les segments A C B, A D B, sont posez semblables, par la 10. Definition de ce liure, l'angle A C B, sera égal à l'angle A D B, ce qui est absurde: car l'externe A C B, est plus grand que l'interne A D B. Ils ne sont donc pas segments semblables: donc sur vne mesme ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



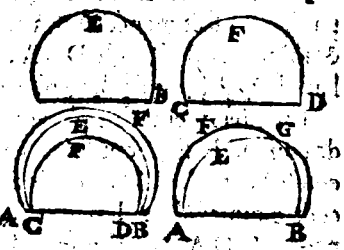
[r] 16. 3.

THEOREME 22. PROP. 24.

Semblables segments de cercles, constituez sur lignes droictes égales, sont égaux entr'eux.

Sur les lignes droictes égales A B, C D, soient constituées les sections de cercles semblables A E B, C F D. Ie dis qu'elles sont égales entr'elles.

Car les lignes A B, C D, estans égales conuiendront entr'elles, si on entend qu'elles soient posées l'vne sur l'autre, sçauoir A B, sur C D, & le segment A E B, conuiendra sur le segment C F D: autrement le segment A E B, tombera au dehors du segment C F D, ou au dedans; ou



partie

partie dehors & partie dedans, & partant ſur vne meſme ligne droicte ſeront conſtituez ſemblables
f 23. 3. ſegments de cercles & inegaux f ce qui eſt abſurde: que s'il tomboit en partie au dehors & partie au dedans, ils ſe coupetoient à plus de deux poincts, comme à B, & G, ce qui eſt impoſſible : car vn cercle ne coupe vn cercle à plus de deux poinctes donc ils conuiendront, & partant ſeront égaux entr'eux. Donc ſur lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBLEME 3. PROP. 25.

Le ſegment d'vn cercle eſtant donné, deſcrire le cercle, duquel il eſt le ſegment.



Soit le ſegment du cercle A B C, duquel il faut deſcrire le cercle dont il eſt le ſegment, ſoit iointe A C, & diuiſée en deux également au poinct D, par lequel ſoit menée D B, à angles droicts à A C, & iointe A B, l'angle D B A, ſera plus grand que l'angle D A B, ou égal, ou plus petit.

Premierement, ſoit plus grand (ce qui aduiendra quand le ſegment ſera moindre que le demy-cercle) car alors B D, prolongée, paſſera t par le
t Coroll. 1. 3. centre qui eſt hors le ſegment, puis qu'il eſt plus
v 7. 3. petit, v & D A, ſera plus grande, que D B : car D B,
x 18. 1. eſt le reſte du diametre : partant x D B A, ſera plus

grand

grand que D A B, soit fait l'angle B A E, égal à D B A, & que la droicte ligne A E, coupe B D, prolongée à E. Ie dis que E, est le centre du cercle duquel A B C, est le segment.

Car ayant mené E C, les deux costez A D, D E, du triangle A D E, seront égaux aux deux C D, D E, du triangle C D E, & les angles contenus d'iceux sont droicts, y partant A E, E C, égales : mais E A, y 4. 1.
est aussi égale à E B, z puisque les angles E A B, z 6. 1.
E B A, sont égaux : donc les trois E A, E B, E C, sont égales. a Donc F, sera le centre du cercle A B C, a 9. 3.
puis que d'iceluy poinct, tombent plus de deux lignes droictes égales, à la circonference.

Secondement, soient les angles D B A, D A B, égaux, b D A, sera égale à D B : mais D C, est aussi b 6. 1.
égale à D B, estant A C, diuisée en deux également au poinct D, toutes les trois D C, D B, D A, seront égales : c partant D, sera le centre du cercle, & le c 9. 3.
segment proposé sera demy-cercle.

Finalement, si l'angle D B A, est plus petit que D A B, soit fait l'angle B A E, égal à A B E, & soit iointe E C. Ie dis que E, est le centre du cercle : car l'on monstrera par les mesmes raisons cy-dessus, que les trois lignes E A, E B, E C, sont égales : & partant aussi le segment proposé excedera le demy-cercle. Donc vn segment de cercle estant donné, nous auons descrit le cercle, duquel il est le segment. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

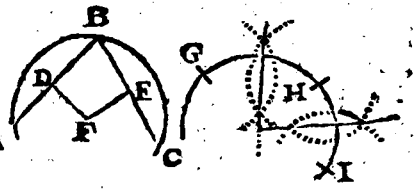
Autrement, ayant pris trois poincts à l'aduenture au segment donné A, B, C, soient menées deux lignes A B, B C, & diuisées en d deux également à D, & E, d 10. 1.

puis

puis menées les lignes D F, E F, *e à angles droicts, leſquelles ſe rencontreront, comme à* F, *(car ſi on menoit vne ligne droicte de* D, *à* E, D E F, E D F, *ſeroient plus petits que deux droicts) donc* f F, *ſera le centre du cercle, &c. En la meſme maniere l'on fera paſſer vne circonference par trois poincts donnez, non en droicte ligne.*

e 11. 1.

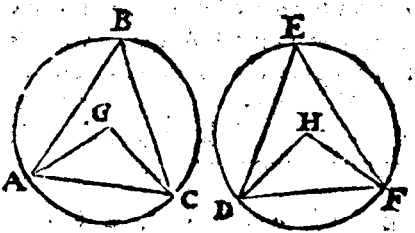
f Coroll. 1. 3.



THEOREME 23. PROP. 26.

Aux cercles égaux, les angles égaux ſont appuyez ſur circonferences égales, ſoit qu'ils y ſoient appuyez, eſtans conſtituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient les cercles égaux A BC, DEF, aux centres deſquels G, & H, ſoiét conſtituez les angles D H F, A G C, égaux : item, que les angles B, & E, ſoient conſtituez aux circonferences auſſi égaux. Ie dis que les circonferences AC, DF, ſur leſquelles ils ſont appuyez, ſont égales.



Car

Car ſoient iointes les lignes droictes A C, D F, d'autant que les deux coſtez G A, G C, du triangle A G C, ſont égaux aux deux H D, H F, du triangle D H F, à cauſe de l'egalité des cercles, & les angles G, & H, égaux par l'hypotheſe, & les baſes A C, D F, ſeront égales : mais les angles B, & E, conſtituez aux circonferences, ſont égaux par l'hypotheſe, & appuyez ſur les meſmes baſes, donc les ſegments A B C, D E F, ſeront [h] ſemblables, & partant égaux: leſquels eſtans ſouſtraits des cercles égaux, demeureront les ſegments, A C, D F, égaux, & partant les circonferences A C, D F, égales. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[g] 4. 1.

[h] 24. 3.

SCHOLIE.

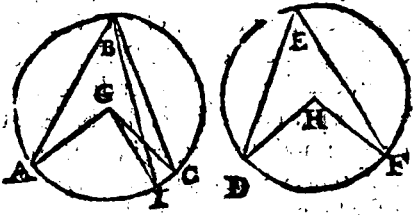
En cette Propoſition & aux trois ſuivantes, ce qui eſt dit des cercles égaux, doit auſſi eſtre entendu d'un meſme cercle ; car ce ſera la meſme demonſtration.

THEOREME 24. PROP. 27.

Aux cercles égaux, les angles appuyez ſur circonferences égales, ſont égaux entr'eux ; ſoit qu'ils y ſoient appuyez eſtans conſtituez aux centres, ou bien eſtans conſtituez aux circonferences.

Aux cercles égaux A B C, D E F, deſquels les centres ſont G, & H, ſoient premierement conſtituez les angles A G C, D H F, aux centres, ayans pour baſes les circonferences égales A C, D F, ie dis qu'ils ſont égaux entr'eux.

Car



Car s'ils ne ſont égaux, ſoit l'angle G, le plus grand, & ſoit fait l'angle A G I, égal à l'angle
i 26. 3. D H F, [i] donc la circonference A I, ſera égale à la circonference D F; mais la circonference A C, eſt égale à la circonference D F, par l'hypotheſe; partant A I, & A C, ſeront égales entr'elles, la partie au tout, ce qui eſt impoſſible. Donc les angles A G C, D H F, ſont égaux.

Secondement, ſoient conſtituez les angles B, & E, aux circonferences, ayans circonferences égales A C, D F, pour baſes: par les meſmes raiſons on monſtrera qu'ils ſont égaux entr'eux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

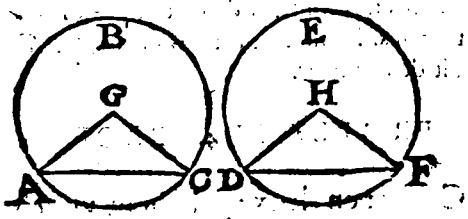
THEOREME 25. PROP. 28.

Aux cercles égaux, les lignes droictes égales, ostent circonferences égales, ſçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

Aux cercles égaux A B C, D E F, ſoient les lignes droictes égales A C, D F. Ie dis que la plus grande circonference A B C, eſt égale à la plus grande D E F, & la moindre A C, égale à la moindre D F.

Car

Car ſoient pris les centres G, & H, & ſoient ioinctes les droictes lignes A G, G C, D H, H F.



Les deux coſtez G A, G C, du triangle A G C, ſont égaux aux deux H D, H F, du triangle D H F, & les baſes A C, D F, ſont égales par l'hypotheſe; partant les [k] angles G, & H, ſont égaux: [l] Donc les circonferences A C, D F, ſur leſquelles il ſont appuyez ſeront égales, leſquelles eſtans oſtées des cercles égaux, demeureront les circonferences A B C, D E F, auſſi égales: donc aux cercles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

k 8. 1.

l 26. 3.

THEOREME 26. PROP. 29.

Aux cercles égaux, les circonferences égales, ſouſtendent lignes droictes égales.

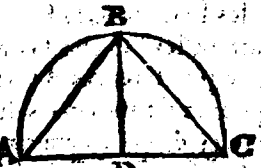
Soient les cercles égaux A B C, D E F, auſquels ſoient priſes les circonferences A B C, D E F, égales, & ſoient iointes les droictes lignes A C, D F. Ie dis qu'icelles lignes droictes qui les ſouſtendent ſont égales. *Voyez la figure precedente.*

Car ſoient pris les centres G, & H, & ſoient conioinctes les droictes lignes A G, G C, D H, H F. D'autant que les deux coſtez A G, G C, du

triangle A G C, sont égaux aux deux D H, H F, du
l 27. 1. triangle D H F, l & les angles G, & H, égaux,
puis qu'ils sont appuyez sur égales circonferences,
m 4. 1. m les bases qui sont les droictes lignes A C, D F,
sont égales. Donc aux cercles égaux, &c. Ce qu'il
falloit démonstrer.

PROBLEME 4. PROP. 30.

Couper en deux également vne circonference donnée,



Soit la circonference donnée A B C, laquelle il faut couper en deux parties égales: soit iointe la ligne droicte A C, laquelle soit diuisée en
n 10. 1. deux parties égales, n par le poinct D, par lequel
p 11. 1. soit menée la droicte ligne D B, à p angles droicts à A C, & soient iointes les lignes droictes A B, C B, elle sera coupée en deux également par le poinct B.

Car puis que A D, C D, sont égales, & D B, commune, les deux costez A D, D B, du triangle A D B, seront égaux aux deux C D, D B, du triangle C D B, & les angles au poinct D, sont égaux,
q 4. 1. sçauoir droicts q les bases A B, C B, sont égales,
r 28. 3. & r partant les circonferences A B, C B, aussi égales: nous auons donc coupé vne circonference en deux également. Ce qu'il falloit faire.

THEO

THEOREME 27. PROP. 31.

Au cercle, l'angle qui eſt au demy-cercle eſt droict : mais celuy qui eſt au plus grand ſegment eſt plus petit qu'vn droict ; & celuy qui eſt au plus petit ſegment, eſt plus grand qu'vn droict. Et dauantage, l'angle du plus grand ſegment, eſt plus grand qu'vn droict ; mais l'angle du plus petit ſegment, eſt plus petit qu'vn droict.

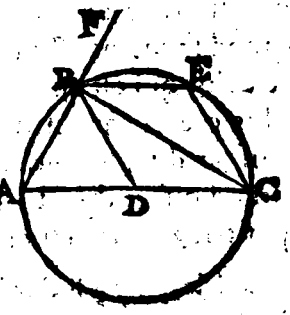
Soit le cercle A B C, & le diametre d'iceluy A C, & le centre D, & ſoient ioinctes les droictes lignes A B, C B ; item B E, E C. Ie dis premierement que l'angle A B C, au demy-cercle eſt droict.

Car ſoit menée B D, au centre D, & prolongée A B, directement vers F. D'autant que D A, D B, ſont égales, les angles D A B, D B A, ſeront égaux entr'eux : par meſme raiſon les deux angles D B C, D C B, ſeront auſſi égaux : car D B, D C, ſont auſſi égales entr'elles : partant les deux D B A, D B C, c'eſt à dire le total A B C, eſt égal aux deux B A C, B C A : mais l'angle externe C B F, eſt égal aux deux meſmes angles internes & oppoſez B A C, B C A. Donc les deux angles A B C, C B F, ſeront égaux entr'eux, & partant droicts, dont l'angle A B C, au demy-cercle eſt droict ; ce qui eſt premierement propoſé. 5. 1. 32. 1.

Ie dis ſecondement, que l'angle B A C, au plus grand ſegment B A C, eſt plus petit qu'vn droict. Car d'autant qu'au triangle A B C, les deux angles A B C, B A C, ſont plus petits que deux droicts,

& A B C, est demonstré droict : l'angle B A C, sera plus petit qu'vn droict. Ce qui est secondement proposé.

Tiercement, ie dis que l'angle B E C, au plus petit segment B E C, est plus grand qu'vn droict. Car d'autant qu'au quadrilatere A B E C, descrit au cercle, les deux angles opposez E, & A, sont



y 22. 3. égaux à deux droicts, & l'angle B A C, est monstré plus petit qu'vn droict, l'autre B E C, sera plus grand qu'vn droict. Ce qui estoit tiercement proposé.

Quartement, ie dis que l'angle du plus grand segment B A C, qui est l'angle A B C, contenu de la circonference A B, & de la ligne droicte B C, est plus grand qu'vn droict. Car puis que l'angle droict A B C, est contenu des lignes droictes A B, B C, est vne partie d'iceluy, le tout A B C, contenu de la circonference A B, & de la ligne droicte B C, sera plus grand qu'vn droict. Ce qui estoit quartement proposé.

Finalement, ie dis que l'angle du plus petit segment qui est l'angle C B E, contenu de la ligne droicte C B, & de la circonference B E C, est plus petit qu'vn droict : car iceluy est plus petit que l'angle droict F B C, la partie que le tout, ce qui estoit finalement proposé. Donc au cercle, l'angle qui est au demy-cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

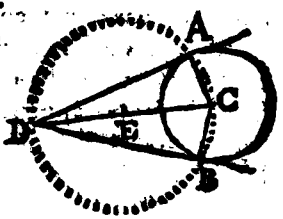
COROL

COROLLAIRE.

D'icy eſt manifeſte, que l'angle d'vn triangle qui eſt égal aux deux autres, eſt droit : d'autant que l'angle contigu à iceluy (qui eſt fait hors le triangle, le coſté eſtant prolongé) eſt égal aux meſmes. Ce qui appert de la premiere demonſtration : ou d'autant qu'il eſt la moitié des trois angles du triangle, leſquels vallent deux droicts.

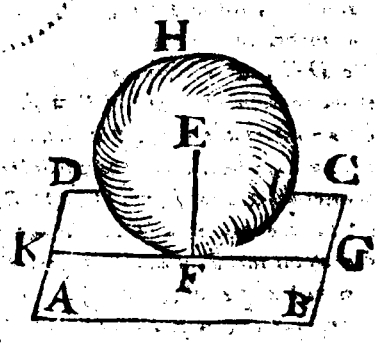
SCHOLIE.

De la premiere demonſtration de cette Propoſition, nous colligerons facilement comment l'on pourra mener deux lignes d'un poinct hors un cercle donné, qui toucheront iceluy cercle de part & d'autre. Soit donc le cercle donné A B, & hors iceluy le poinct D, duquel ie veux mener vne ligne qui touche le cercle à deux poincts de part & d'autre. Soit trouué le centre C, & du poinct D, au centre C, ſoit menée la ligne droicte D C, & diuiſée en deux également au poinct E, & de E, comme centre, & à l'internalle E C, ſoit deſcrit le cercle A D B, coupant le cercle donné aux poincts A, & B, & ſoient tirées les droites lignes D A, D B: Ie dis que l'vne & l'autre touchera le cercle aux poincts A, & B: car ayant mené les droites lignes A C, & B C, l'vn & l'autre [2] angle A, & B, ſera droit au demy-cercle: [2] 31. 3. Donc par le Corollaire de la 16. Propoſ. de ce liure D A, & D B, toucheront le cercle aux poincts A, & B.



De ce qui a esté demonstré cy-deuant à la 6. & autres Propositions des lignes qui touchent le cercle à vn poinct seulement ; nous monstrerons qu'vn corps parfaictement spherique touchera vn plan, aussi parfaictement aplany, & aussi parfaict, qu'il se peut donner en la nature, reellement, & non à vn poinct seulement, comme veulent dire la pluspart des Philosophes, & comme veus demonstrer Theodoze à la 3. Proposition de son 2. liure des Spheriques.

Car soit vn plan tel qu'il est requis, icy representé par la figure A B C D, & soit G K, qui le diuise en deux egalement ou non : soit aussi le corps spherique sur iceluy plan representé par H I F, dont le centre soit E, duquel soit menée la perpendiculaire E F, au poinct F, de la ligne G K ; laquelle G F, sera le demy-diametre du globe : maintenant si l'on conçoit en l'entendement que le demy-diametre E F, face vne entiere reuolution autour de son centre E, iceluy poinct E, demeurant fixe, ledit demy-diametre E F, decrira vn plan circulaire, comme H F I, lequel selon Euclide & tous les Geometres, diuisera ledit corps spherique en deux egalement, & ne sera aucune partie d'iceluy corps spherique. Mais comme nous auons demonstré, le cercle H F I, touchera la ligne



G K.

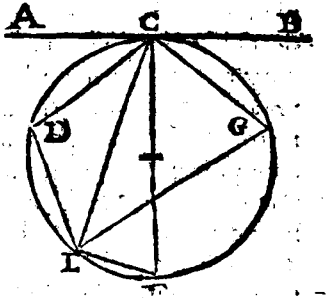
G K, à vn poinct seulement, comme à F, laquelle n'est aussi aucune partie, ny du corps aplany ny de sa superficie, selon Euclide. Il s'ensuit donc que les moitiez de la sphere, c'est à dire la sphere mesme, touchera les deux parties du plan, c'est à dire le plan, autrement, que le cercle H I F, ne touche la ligne G K, c'est à dire, selon quelque partie de sa superficie : autrement la sphere ne pourroit iamais paruenir iusques au plan, ce qui est absurde. Et qu'ainsi ne soit, posons que le corps spherique & materiel soit pesant, pour exemple, de 10000. liures ou plus, lequel tombant embas, rencontre le plan A B C D, iceluy plan l'arrestera, & empeschera de tomber plus bas, autrement la sphere par sa pesanteur feroit descendre le plan, ce qui ne se peut faire sans vn attouchement reel : ou bien si nous posons que le plan soit vn corps de fort peu d'espaisseur ou profondité, & d'vne matiere fragile, comme de verre ou cristal, & soustenu sur les quatre angles A B C D, sans appuy sous le milieu, le corps spherique de telle pesanteur le rencontrant, le romproit infailliblement, n'estant suffisant ledit plan de resister à vne telle pesanteur, ce qui ne se peut imaginer pouuoir estre fait, sans l'attouchement reel de la matiere de l'vn & de l'autre. Donc vn corps spherique, si parfaict qu'il puisse estre, ne touchera pas vn plan aussi parfaictement plan, à vn poinct seulement : mais reellement & selon vne partie, encore bien qu'elle semblast insensible : car autrement l'attouchement de la ligne & du cercle, seroit le mesme que de la superficie spherique & du plan, d'où il s'ensuiuroit que la ligne seroit partie de la superficie, ce qui est contre

Euclide & Aristote. Et pour ce qui est de la proposition de Theodoze, qui la considerera auec attention, trouuera qu'il ne conclud autre chose, sinon que le cercle qui coupe la sphere touche la ligne qui coupe le plan à vn poinct seulement; mais la superficie spherique touche la superficie plane selon quelque partie.

THEOREME 28. PROP. 32.

Si quelque ligne droite touche vn cercle, & de l'attouchement l'on mene quelque ligne droicte au cercle, le coupant, les angles qu'elle fait auec la touchante seront egaux aux angles qui sont aux segments alternes.

Que la ligne droicte AB, touche le cercle CDE, au poinct C, duquel soit menée la ligne droicte CE, coupant le cercle en deux segments CDE, CGFE, ausquels soient constituez les angles D, & G. Ie dis que l'angle ACE, est egal à l'angle G, qui est au segment alterne CGEF, & l'angle BCE, est egal à l'angle D, qui est aussi au segment alterne CDE.



Car soit menée la ligne CF, par le centre, & soit ioincte EF, la ligne FC, sera perpendiculaire à AB, & à l'angle CEF, sera droit;

y 18. 1.

& partant les deux reſtans E F C, E C F, ſeront égaux à vn droict, comme à l'angle droict A C F: donc ſi l'on oſte le commun E C F, demeurera l'angle A C E, égal à l'angle E F C, lequel eſt égal à l'angle G, d'autant qu'ils ſont en vn meſme ſegment: donc l'angle A C E, ſera auſſi égal à l'angle G. 31.6.

Et d'autant qu'au quadrilatere D E G C, inſcrit au cercle, les deux angles oppoſez D, & G, ſont égaux [z] à deux droicts, & les deux A C E, B C E, ſont auſſi égaux à deux droicts, ſi l'on oſte les deux égaux A C E, C G E, demeurera l'angle B C E, égal à l'angle D, au ſegment alterne C D E. Donc ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [z] 22. 3.

Si la coupante paſſe par le centre A, la propoſition eſt manifeſte. 18. & 31.

PROBLEME 5. PROP. 33.

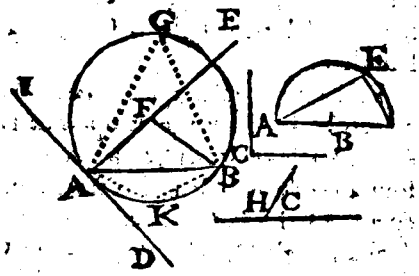
Sur vne ligne droicte donnée, deſcrire vn ſegment de cercle, lequel reçoiue vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la droicte ligne donnée A B, & l'angle donné C, lequel ſoit premierement droict: il faut deſcrire vn ſegment de cercle, auquel l'angle conſtitué, ſoit égal à l'angle donné C.

Soit diuiſée la droicte ligne A B, en deux également par le poinct D, & du poinct D, comme centre, & à l'interualle D A, ſoit deſcrit le demy-cercle, auquel ſoit faict l'angle A E B, lequel eſt droict, & partant égal à l'angle droict donné C. 31. 3.

Soit ſecondement l'angle donné C, aigu, au

poinct A, de la ligne donnée A B, ſoit fait l'angle D A B, égal à l'angle agu C, & du poinct A, ſoit menée A E, à angles droicts à A D, laquelle tombera au deſſus de A B: puis ſoit faict l'angle A B F, égal à l'angle F A B, & que B F, coupe la droicte ligne A E, au poinct F: les lignes F A, F B, ſerõt égales.



6. 1. Partant ſi du centre F, à l'interualle F A, l'on deſcrit le cercle A G, il paſſera par le poinct B. Ie dis donc que l'angle qui ſera faict au ſegment A G B, deſcrit ſur la ligne A B, ſera égal à l'angle C. Soit donc fait l'angle A G B, audit ſegment: d'autant que A E, paſſe par le centre, & de l'extremité A, eſt menée A D, à angles droicts à icelle, D A, a touchera le cercle au poinct A. C'eſt pourquoy l'angle D A B, c'eſt à dire l'angle donné C, ſera égal à l'angle G, au ſegment alterne A G B.

a *Coroll.* 16. 3.

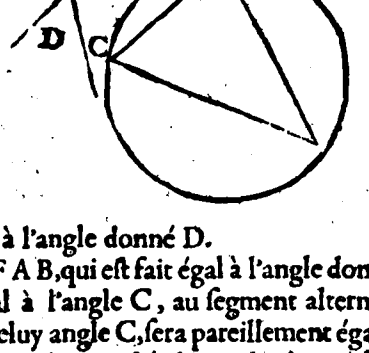
Tierceinent, ſoit l'angle donné H, obtus. Soit fait derechef l'angle I A B, égal à l'angle H, & du poinct A, ſoit menée A E, à angles droicts à A I, laquelle tombera au deſſus de A B: ſoit faict le reſte comme deuant, l'on aura deſcrit ſur la ligne A B, le ſegment A K B, auquel l'angle K, eſt égal à l'angle obtus donné H. Car l'angle I A B, c'eſt à dire l'angle donné H, eſt égal à l'angle K, au ſegment alterne A K B: car c'eſt la meſme demonſtration. Donc ſur vne ligne droicte donnée, &c. Ce qu'il falloit faire.

PRO

PROBLEME 6. PROP. 34.

D'vn cercle donné, retrancher vn segment, qui reçoiue vn angle égal à vn angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné A B C, duquel il faut retrancher vn segment, auquel l'angle constitué soit égal à l'angle donné D. Soit menée la droicte ligne E F, touchant le cercle au poinct A. Puis soit faict l'angle F A B, égal à l'angle donné D, & soient menées les droites lignes A C, B C. Ie dis que l'angle A C B, au segment osté A C B, est égal à l'angle donné D. 17. 3.



Car l'angle F A B, qui est fait égal à l'angle donné D, est [b] égal à l'angle C, au segment alterne A C B: donc iceluy angle C, sera pareillement égal à D. Nous auons donc osté du cercle donné le segment A C B, &c. Ce qu'il falloit faire. b 3. 3. 2

THEOREME 29. PROP. 35.

Si au cercle deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, le rectangle contenu sous les deux parties de l'vne, est égal au

rectangle

rectangle contenu ſous les deux parties de l'autre.

Au cercle A B C, que les deux lignes A B, C D, ſe coupent au poinct E. Ie dis que le rectangle contenu ſous A E, E B, eſt égal au rectangle contenu ſous C E, E D.

Soit premierement le poinct de l'interſection E, le centre du cercle, comme en la premiere figure, les quatre ſegments ſeront égaux, chacun eſtant le demy-diametre du cercle: donc il eſt manifeſte que le rectangle contenu ſous les deux parties de l'vne, eſt égal au rectangle contenu ſous les deux parties de l'autre.

Secondement, que C D, ſeulement paſſe par le centre F, coupant A B, en deux egalement au poinct E: [c] & partant à angles droicts, & ſoit conioincte la droicte ligne B F. D'autant que C D, eſt diuiſée en deux egalement au centre F, & inegalement au poinct E, le rectangle contenu ſous les ſegments inegaux C E, E D, [d] auec le quatré de la moyenne ſection F E, eſt égal au quarré de la moitié F D, c'eſt à dire de F B: mais le quarré de [e] F B, eſt égal aux deux quarrez de F E, E B: donc le rectangle contenu ſous C E, E D, auec le quarré de F E, ſera auſſi égal aux deux quarrez de F E, E B: partant ſi l'on oſte le commun quarré de F E, demeurera le rectangle contenu ſous C E, E D, égal au quarré de E B, c'eſt à dire au rectangle ſous A E, E B: car puis qu'elles ſont égales, le rectangle contenu ſous les deux eſt quarré, ſelon la premiere definition du ſecond liure. *Voyez la deuxieſme figure.*

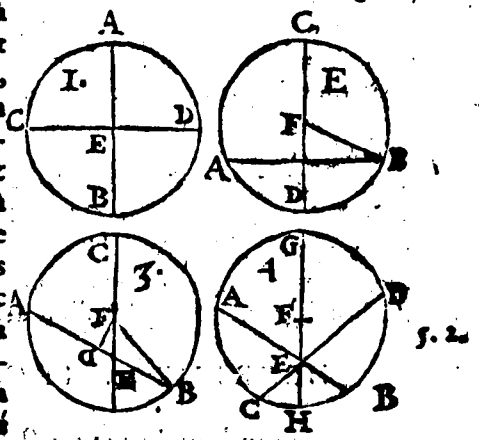
c 3. 3.

d 5. 2.

e 47. 1.

Tiercement, que C D, paſſant par le centre F, coupe A B, en deux inegalement au poinct E, & ſoit

soit diuisée icelle A B, en deux egalement au poinct G, & soient menées G F, & F B, F G, f sera perpendiculaire à A B. D'autant donc que C D, est diuisée en deux également à F, & inegalement à E, le rectangle contenu sous C E, E D, auec le quarré de la moyenne section F E, sera égal au quarré de la moitié F D, c'est à dire, au quarré de F B, son égale: mais le quarré de F B, g est égal aux deux quarrez F G, G B: donc le rectangle contenu sous C E, E D, auec le quarré de F E, est aussi égal aux deux quarrez de F G, G B, & le quarré de F E, h est égal aussi aux deux quarrez de F G, G E, partant le rectangle sous C E, E D, auec les deux quarrez de F G, G E, est égal aux deux quarrez F G, G B: ostant donc le quarré commun F G, restera le rectangle contenu sous C E, E D, auec le quarré de G E, égal au quarré de G B: mais le rectangle contenu sous A E, E B, auec le quarré de G E, est aussi égal au quarré de G B, puis que A B, est diuisée en deux egalement au poinct G, & inegalement au poinct E. Donc le rectangle contenu sous C E, E D, auec le quarré de G E, est égal au rectangle sous A E, E B, auec le mesme quarré de G E: ostant donc le quarré commun



f 3. 3.

5. 2.

g 47. 1.

h 47. 1.

commun de G E, demeurera le rectangle contenu sous C E, E D, égal au rectangle contenu sous A E, E B. Ce qui est proposé. *Voyez la 3. figure.*

Quartement, que A B, ny C D, se coupans au poinct E, ne passent par le centre, & soit mené le diametre G H, par le poinct E, (comme en la 4. figure) l'on monstrera comme auparauant, que le rectangle contenu sous A E, E B, est égal au rectangle sous G E, E H, & le rectangle sous C E, E D, aussi égal au rectangle sous G E, E H: & partant égaux entr'eux, soit qu'vne d'icelles A B, C D, soit coupée en deux egalement ou non. Donc si au cercle deux lignes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 30. PROP. 36.

Si l'on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy tombent deux lignes droictes au cercle, l'vne desquelles coupe le cercle, & l'autre le touche: le rectangle contenu sous toute la coupante & sa partie de dehors prise entre le poinct & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.

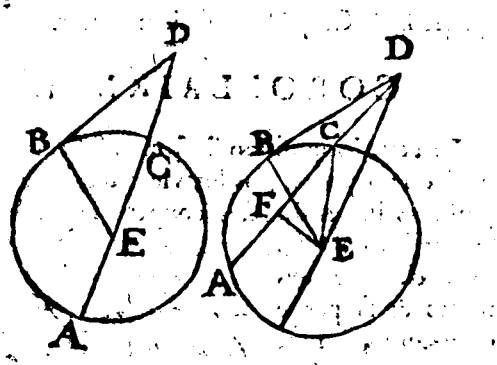
Hors le cercle A B C, soit pris le poinct D, & d'iceluy soit menée D A, par le poinct C, coupant le cercle, & D B, le [i] touchant au poinct B. Ie dis que le rectangle contenu sous la toute A D, & sa partie D C, est égal au quarré de D B.

i 17. 3.

Que D A, passe premierement par le centre E, & soit ioincte la droicte ligne E B, [k] laquelle sera perpendiculaire à D B. D'autant que C A est diuisée

k 18. 3.

sée en deux egalement à E, & à icelle est adiouſtée D C, le rectangle contenu ſous A D, D C, auec le quarré de E C, c'est à dire de E B, ſon égale, est égal au quarré de E D; mais le quarré de E D, [m] est égal aux deux quarrez de D B, & B E, donc le rectangle contenu ſous A D, D C, auec le quarré de B E, ſera auſſi égal aux deux quarrez de D B, B E: donc, oſtant le quarré commun de E B, reſtera le rectangle ſous A D, D C, égal au quarré de D B, touchante, Ce qui eſt propoſé. [l] 6. 2. [m] 47. 1.



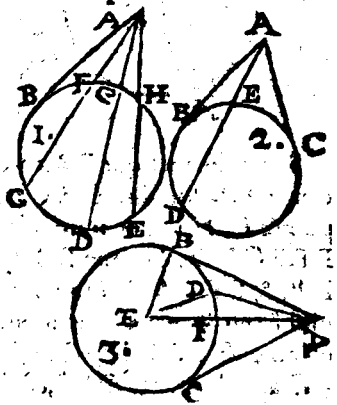
Secondement, que D A, coupante, ne paſſe par le centre E, & ſoit diuiſée A C, en deux egalement au poinct F, & ſoient iointes les droites lignes E B, E F, E C, E D, la ligne E B, ſera perpendiculaire à D B, & E F, à A C. D'autant donc que A C, [n] est diuiſée en deux egalement au poinct F, & à icelle eſt adiouſtée D C, le rectangle contenu ſous A D, D C, auec le quarré de F C, eſt égal au quarré de F D. Donc adiouſtant le cõmun quarré de E F, le rectangle contenu ſous A D, D C, auec les deux quarrez de C F, F E, eſt égal aux deux quarrez de D F, F E: mais le q. de E C, c'eſt à dire de E B, ſon égale, [o] eſt [n] 6. 2. [o] 47. 1.

égal

égal aux deux quarrez de C F, F E : donc le rectangle ſous A D, D C, auec le quarré E B, eſt égal aux deux quarrez de D F, F E, & le quarré de D E, eſt auſſi égal aux deux quarrez de D F, F E : partant le rectangle ſous A D, D C, auec le quarré B E, ſera
p 47. 1. égal au quarré de D E, lequel eſt égal p aux deux quarrez de D B, B E : donc le rectangle ſous A D, D C, auec le quarré de B E, eſt égal aux deux quarrez de D B, B E : oſtant donc le commun quarré de B E, demeurera le rectangle ſous A D, D C, égal au quarré D B. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE 1.

De cette Propoſition il eſt manifeſte, que ſi de quelconque poinct pris hors le cercle, l'on mene pluſieurs lignes droictes coupans le cercle : les rectangles compris ſous chacune des toutes & ſa partie exterieure, ſont égaux entr'eux. Car ſi du poinct A, (en la premiere figure) l'on mene A C, A D, A E, coupant le cercle, & A B, le touchant, le rectangle
q 36. 3. ſous A C, A F, ſera q égal au quarré de A B. Semblablement le rectangle ſous A D, A G, & le rectangle ſous A E, A H, & partant égaux entr'eux.



COROL

COROLLAIRE.

Il eſt auſſi manifeſte que deux lignes droictes menées d'vn meſme poinct, touchant le cercle, ſont égales entr'elles. Comme ſoient les deux A B, A C, qui touchent le cercle aux poinctes B, & C, ſen la 2. figure. Ie dis qu'elles ſont égales entr'elles. Car ſoit menée A D, coupant le cercle au poinct E: donc le quarré de A B, que le quarré de A C, ſera égal au rectangle contenu ſous A D, A E: & partant égaux entr'eux, & donc les lignes AB, AC, pareillement égales entr'elles. r 36. 3.

COROLLAIRE. 3.

Semblablement il eſt manifeſte, que d'vn poinct pris hors le cercle, l'on peut mener ſeulement deux lignes droictes qui touchent le cercle: car ſi outre les deux A B, A C, l'on en peut mener vne troiſieſme A D, touchant le meſme cercle, ayant mené les droictes lignes E B, E D, du centre E, ſ les angles ſ 18. 3.
A B E, A D E, ſeront droicts; & partant égaux entr'eux, ce qui eſt abſurde: car ſi on mene la droicte ligne A E, t l'angle A D E, ſera plus grand que l'angle A B E. t 21. 1.

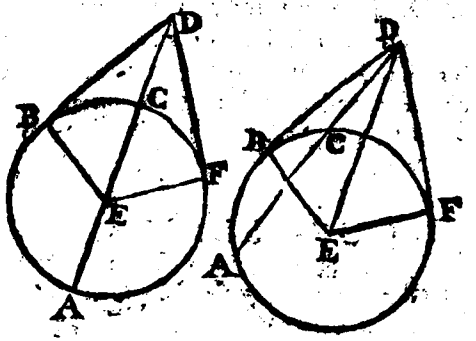
COROLLAIRE. 4.

Il eſt finalement euident, que ſi deux lignes droites égales ſont menées de quelconque poinct, hors le cercle à la circonference conuexe, & que l'vne d'icelles touche le cercle, l'autre le touchera pareillement, &c.

THEOREME 31. PROP. 37.

Si hors le cercle l'on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct tombent au cercle deux lignes droictes, vne deſquelles coupe le cercle, & l'autre l'atteint. Et que le rectangle contenu ſous la toute coupante, & ſa partie de dehors, priſe entre le poinct & la circonference conuexe, ſoit égal au quarré de l'atteignante, icelle atteignante touchera le cercle.

Hors le cercle A B C, ſoit pris le poinct D, duquel ſoit menée D A, par le poinct C, coupant le cercle D B, l'atteignant au poinct B : & ſoit le rectangle contenu ſous A D, D C, égal au quarré de D B. Ie dis que D B, touche le cercle au poinct B.



v 17. 3. Car ſoit v menée A F, touchant le cercle, & ſoit trouué le centre E, & ſoient iointes E B, E F : & ſi D A,

D A, ne paſſe par le centre E, ſoit iointe auſſi D E: l'angle [x] D F E, ſera droit. Et d'autant que D F, touche le cercle, [y] le quarré d'icelle ſera égal au rectangle contenu ſous D A, D C: mais le quarré de D B, eſt égal au meſme rectangle ſous D A, D C, par l'hypotheſe. Donc les quarrez de D B, D F, ſeront égaux entr'eux, & D B, & D F, auſſi égales. [a] Mais E B, E F, ſont égales: donc les deux coſtez D B, B E, du triangle D B E, ſont égaux aux deux D F, F E, du triangle D F E, chacun au ſien, & la baſe D E, commune, & les angles B, & F, ſeront égaux, mais D F E, eſt droit, donc D B E, ſera auſſi droit: donc par le Corollaire de la 16. Propoſition de ce liure, D B, touchera le cercle. Ce qui eſt propoſé. Donc ſi l'on prend quelque poinct, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

x 18. 1.

y 36. 3.

a 15. def.

Fin du troiſieſme Liure,

LIVRE QVATRIESME, DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Vne figure rectiligne eſt dicte eſtre inſcrite en vne figure rectiligne, quand chacun des angles de la figure inſcrite, touche chacun coſté de celle en laquelle elle eſt inſcrite.

EVCLIDE traictant en ce quatrieſme liure de diuerſes inſcriptions de figures aux cercles, & des deſcriptions des meſmes figures à l'entour du cercle. Item, des inſcriptions du cercle aux meſmes figures, & des deſcriptions du cercle à l'entour d'icelles, il expoſe en peu de Definitions, que c'eſt à dire vne figure eſtre inſcrite en vne figure, ou eſtre deſcrite à l'entour, commençant aux figures rectilignes. Comme pour exemple, ſi chacun des angles D, E, F, du triangle interne D E F, touche chacun des coſtez du

du triangle A B C, externe, le triangle D E F, ſera dit eſtre inſcrit au triangle A B C. Mais d'autant que l'angle M, du triangle K L M, (ſoit menée vne ligne droicte de K, à L,) ne touche le coſté H I, du triangle G H I, le triangle K L M, ne ſera dit eſtre inſcrit en l'autre, encore qu'il ſoit tout au dedans; & que deux des angles de l'vn, touchent deux coſtez de l'autre.

2. Semblablement, vne figure eſt dicte eſtre deſcrite à l'entour d'vne figure, quand chacun coſté de la circonſcrite, touche chacun angle, de celle, à l'entour de laquelle elle eſt deſcrite.



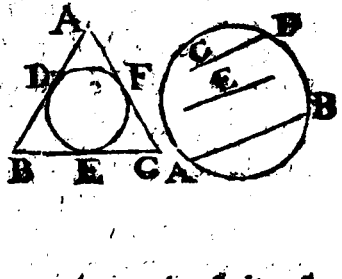
Au contraire, le triangle A B C, ſera dit eſtre deſcrit à l'entour du triangle D E F, d'autant que chacun des coſtez de celuy-là touche chacun des angles de cettuy-cy; mais le triangle G H I, ne ſera dit eſtre deſcrit à l'entour du triangle K L M, puis que le coſté H I, ne touche l'angle M. Il faut entendre le meſme des inſcriptions & circonſcriptions des autres figures rectilignes, &c. Et les figures rectilignes ſont proprement dites eſtre inſcrites ou circonſcrites, quand le nombre des coſtez eſt égal, & le nombre des angles égal, combien qu'il ne ſoit du tout neceſſaire, &c.

3. Vne figure rectiligne eſt dicte eſtre inſcrite en vn cercle, quand vn chacun angle de l'inſcrite, touche la circonference du cercle.

Comme, ſi les angles A, B, C, du triangle A B C, touchent la circonference du cercle A B C, ledit triangle ſera dit eſtre inſcrit au cercle. Et ſi quelqu'vn des angles ne touchoit la circonference, le triangle ne ſeroit dit eſtre inſcrit au cercle.

4. Mais vne figure rectiligne eſt dicte eſtre deſcrite à l'entour du cercle, lors que chacun coſté de la circonſcrite, touche la circonference du cercle.

Pour exemple, ſi les coſtez du triangle A B C, touchent la circonference du cercle D E F, le triangle ſera dit eſtre deſcrit à l'entour du cercle.



5. Semblablement, le cercle eſt dit eſtre inſcrit en vne figure rectiligne, lors que la circonference du cercle, touche chacun coſté de la figure en laquelle il eſt inſcrit.

6. Mais vn cercle eſt dit eſtre deſcrit à l'entour d'vne figure, quand la circonfere-

ference du cercle, touche chacun angle de la figure, à l'entour de laquelle il eſt deſcrit.

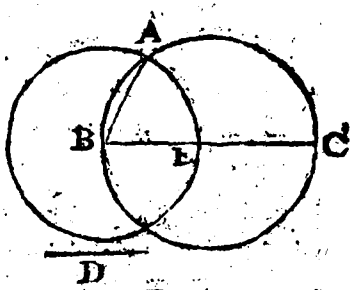
Pareillement le cercle D E F, (en la figure de la 4. Definition) ſera dit eſtre inſcrit au triangle A B C, mais le cercle A B D, en la figure de la 2. Definition, ſera dit eſtre deſcrit à l'entour du triangle A B C: & faut entendre ainſi des autres figures rectilignes qui ſont dites eſtre inſcrites au cercle, ou deſcrites à l'entour, ou auſquelles le cercle eſt dit eſtre inſcrit, ou deſcrit à l'entour.

7. Vne ligne droicte eſt dite eſtre accommodée ou adaptée au cercle, quand les extremitez d'icelle, ſont en la circonference du cercle.

PROBLEME 1. PROP. 1.

1. Au cercle donné, accommoder vne ligne droicte, égale à vne ligne droicte donnée, laquelle ne ſoit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle A B C, auquel il faut accommoder vne ligne droite égale à la donnée D, laquelle n'excede le diametre du cercle donné. D'autant



b 15. 3. que [b] le diametre eſt la plus grande de toutes les lignes accommodées au cercle.

Soit mené le diametre B C: ſi D, eſt égale à B C, l'on aura accommodé la ligne droite B C, au cercle, égale à la donnée D. Mais ſi D, eſt moindre que le diametre B C, ſoit retranchée [c] B E, égale à D, & de B, comme centre à l'intervalle B E, ſoit deſcrit le cercle A E, coupant A B, au poinct A, & ſoit menée B A, icelle ſera accommodée au cercle A B C, égale à D. Car B A, [d] eſt égale à B E, & D, auſſi égale à B E: par la conſtruction: partant B A, & D, ſeront égales entr'elles, & les extremitez de B A, ſont en la circonference, eſtant menée de l'extremité du diametre au poinct de la ſection des deux cercles. Donc nous auons accommodé au cercle vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

c 3. 1.

d 15. def.

PROBLEME 2. PROP. 2.

Dedans vn cercle donné, inſcrire vn triangle equiangle, à vn triangle donné.

Soit le cercle donné A B C, auquel il faut inſcrire vn triangle equiangle, au triangle donné D F E.

Soit menée H G, touchant le cercle au poinct A, & ſoit fait l'angle G A B, égal à l'angle F, [e] & l'angle H A C, égal à l'angle E, menant les droictes lignes A B, A C, iuſques à la circonference aux poincts B, & C, & ſoit iointe la droicte ligne C B. Ie dis que le triangle A B C, inſcrit au cercle donné, eſt equiangle au triangle D E F.

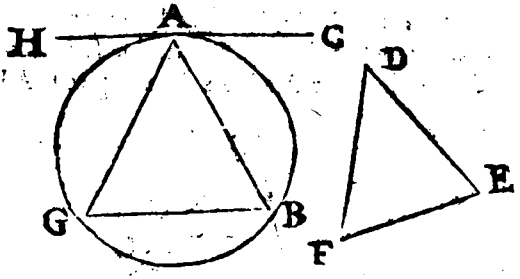
e 17. 3.

Car [f] puis que H G, touche le cercle, & A B, le

f 32. 3.

coupe,

coupe l'angle G A B, qui eſt fait égal à l'angle F, ſera égal à l'angle C, au ſegment alterne : donc les



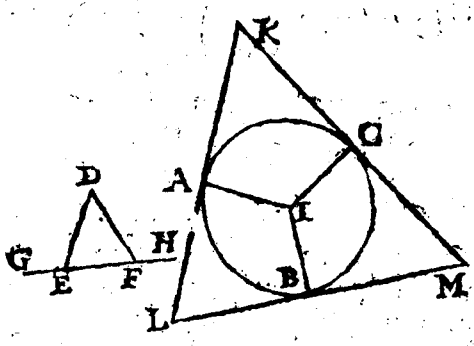
angles C, & F, ſeront égaux entr'eux. Semblablement, d'autant que l'angle H A C, qui eſt égal à l'angle E, par la conſtruction, eſt égal à l'angle B, g 32. 3. au ſegment alterne, les angles B, & E, ſeront égaux : donc puis que les deux angles B, & C, du triangle A B C, ſont égaux aux deux E, & F, du triangle D E F, les deux autres h A, & D, ſeront pareillement égaux entr'eux : donc le triangle A B C, eſt equiangle au triangle D E F. Donc en vn cercle donné, &c. Ce qu'il falloit faire. h 32. 1.

PROBLEME 3. PROP. 3.

A l'entour d'vn cercle donné, deſcrire vn triangle equiangle, à vn triangle donné.

Soit le cercle donné A B C, à l'entour duquel il faut deſcrire vn triangle, equiangle au triangle donné D E F. Ayant prolongé le coſté E F, de part & d'autre aux poincts G, & H, ſoit pris le centre I, & ſoit menée I A, au poinct contingent A, & au

poinct I, d'icelle ſoit fait l'angle A I B, égal à l'angle D E G, & B I C, égal à D F H, & des extremitez A, B, & C, ſoient menées à angles droicts les droictes lignes K L, L M, M K, leſquelles ſe rencontreront aux poincts K, L, M: d'autant que ſi on ioint vne droicte ligne de A, à B, les deux angles L A B,



L B A, ſeront moindres que deux droicts, n'eſtans que partie des deux droicts I A L, I B L: partant
i 11. d. 1. i A L, L B, ſe rencontreront au poinct L, & ainſi des autres: donc le triangle L K M, eſt deſcrit à l'entour du cercle A B C, & eſt equiangle au triangle donné D E F: k car tous les coſtez touchent le
k Coroll. 16. 3. cercle aux poincts A, B, C. Et d'autant que tous les angles du quadrilatere A I B L, ſont égaux à quatre droicts, comme il eſt monſtré à la 32. Propoſ. du 1. liu. & les deux aux poincts A, & B, ſont droits, les deux A I B, A L B, demeureront égaux à deux droits: & partant égaux aux deux D E G, D E F,
l 13. 1. qui l ſont auſſi égaux à deux droits: donc ſi on oſte les égaux A I B, D E G, demeurera A L B, égal à D E F: ainſi l'angle M, ſera monſtré égal à l'angle
1. D F E. Donc le troiſieſme angle K, ſera égal au troiſieſme

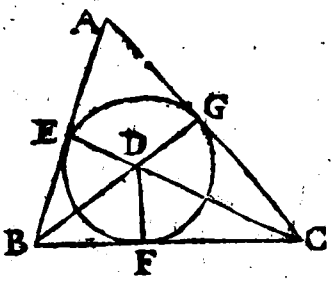
troiſieſme D. Partant le triangle K L M, ſera equiangle au triangle D E F. Donc à l'entour d'vn cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 4. PROP. 4.

Dans vn triangle donné, inſcrire vn cercle.

Soit le triangle donné A B C, dans lequel il faut inſcrire vn cercle.

Soient [m] diuiſez les deux angles B, & C, chacun en deux également, par les droites lignes B D, C D, ſe rencontrans au poinct D, & d'iceluy ſoient menées les perpendiculaires D G, D E, D F, ſur les trois coſtez A B, B C, C A. D'autant que les deux angles D B F, D F B, du triangle D F B, ſont égaux aux deux D B E, D E B, du triangle D E B, chacun au ſien, & le coſté D B, commun: [n] les deux coſtez D E, D F, ſeront égaux. Par meſme raiſon les coſtez D F, D G, ſeront égaux aux triangles D C F, D C G. Donc les trois lignes D G, D F, D E, ſeront égales entr'elles, & le cercle deſcrit du poinct D, comme centre à l'interualle D E, paſſera par les autres poincts G, & F, & [o] touchera les coſtez du triangle aux poincts E, F, G, puis que les coſtez ſont à angles droicts aux ſemy-diametres D E, D F, D G. Donc au triangle



m 9. 1.

n 26. 1.

o *Coroll.* 16. 3.

triangle donné, nous auons inscrit vn cercle. Ce qu'il falloit faire.

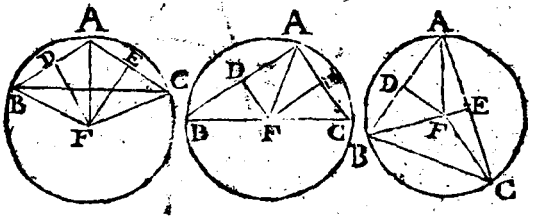
PROBLEME 5. PROP. 5.

A l'entour d'vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné A B C, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

p 10. 1. Soient p diuisez les deux costez A B, A C, en deux egalement aux poincts D, & E, desquels soient

q 11. 1. menées D F, E F, q à angles droits à iceux costez, & se rencontrans au poinct F, (car si on menoit vne ligne droite de D, à E, les deux angles F D E, F E D, seroient moindres que deux droits) & le poinct F, sera dans le triangle, ou au costé, ou dehors. Soient iointes F A, F B, F C : d'autant que les deux costez



A D, D F, du triangle A D F, sont égaux aux deux B D, D F, du triangle B D F, & les angles au poinct

t 4. 1. D, droits : t les bases F A, F B, seront égales. Par mesme raison F A, F C, aussi égales : donc les trois F A, F B, F C, seront égales entr'elles : partant le cercle descrit du poinct F, comme centre, à l'interualle de F A, passera aussi par les deux autres poincts

poincts B,& C.Donc à l'entour du triangle donné nous auons descrit vn cercle.Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

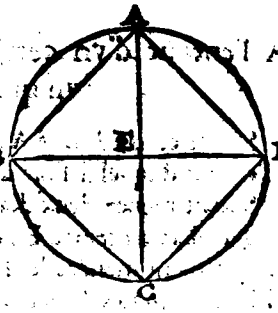
Il est manifeste de cette demonstration,que si le centre tombe au dedans du triangle, que tous les angles sont agus,estans au plus grand segment du cercle : mais s'il tombe au costé, l'angle opposé à iceluy costé,sera droit au demy-cercle.Finalement, s'il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus,estant au plus petit segment du cercle. ſ 31. 1. t 31. 1. v 31. 1.

Au contraire,si le triangle est oxygone,le centre tombera en iceluy : si rectangle,il tombera au costé qui soustient l'angle droict : & si amblygone,il tombera dehors.

PROBLEME 6. PROP. 6.

Dans vn cercle donné, inscrire vn quarré.

Soit le cercle donné A B C, duquel le centre est E, auquel il faut inscrire vn quarré. Soient menez deux diametres AC,BD, qui se coupent à angles droicts au centre E, & soient



iointes les droites lignes A B,B C,C D,D A. Ie dis que A B C D, est le quarré inscrit au cercle donné.

Car

Car d'autant que les deux coſtez E A, E B, du triangle A E B, ſont égaux aux deux E A, E D, du triangle E A D, eſtans tous menez du centre, & les
x 4. 1. angles contenus d'iceux eſtans droits x les baſes A B, A D, ſeront égales, & par meſme raiſon B C, C D, égales, & ſemblablement C D, D A, & D A, A B. Donc A B C D, ſera vn quarré, ayant tous les coſtez égaux, & tous les angles A, B, C, D, droicts,
y 31. 1. y chacun eſtant au demy-cercle: donc en vn cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

AVTREMENT.

D'autant que les quatre angles au poinct E, ſont égaux eſtans droits, les quatre arcs auſquels ils inſiſtent z *ſeront égaux; & partant les quatre droictes*
z 16. 3. a 29. 3. *lignes* a *ſouſtendantes ſeront égales: donc tous les coſtez du quadrilatere A B C D, ſont égaux entr'eux, & tous les angles ſont droits, chacun eſtant* b *au*
b 31. 3. *demy-cercle. Donc A B C D ſera vn quarré.*

PROBLEME 7. PROP. 7.

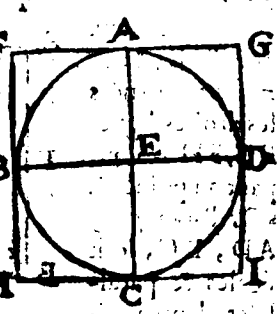


A l'entour d'vn cercle donné, deſcrire vn quarré.

Soit le cercle donné A B C, dont le centre eſt E, à l'entour duquel il faut deſcrire vn quarré.

Soient menez deux diametres ſe coupans à angles droicts au centre E, & par les poincts A, B, C, D, ſoient menées les lignes droites F G, F H, H I, I G, à angles droicts aux diametres, leſquelles ſe rencontreront aux poincts F, H, I, G: d'autant que ſi on mene vne ligne droite de B, à A, les deux angles

angles F B A, F A B, estant moindres que deux droits, & ainsi des autres.



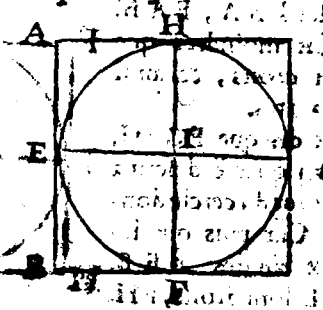
Ie dis que F G I H, est vn quarré descrit à l'entour du cercle donné. Car puis que les deux angles A E B, F B E, sont droits, F H, & A C, [c] seront paralleles: semblablement G I, & A C; donc F H, [d] & G I, seront paralleles, & par les mesmes raisons F G, H I, ainsi paralleles. [c] 28. 1. [d] 30. 1.

Or d'autant que A C H F, est parallelogramme, les costez opposez A C, F H, seront égaux, & les angles opposez C, & F, égaux, mais E C H, est droit, donc A F H, sera droit: par mesme raison les angles H, I, G, seront monstrez droits, & les costez H I, I G, G F, égaux aux diametres A C, B D: & partant égaux entr'eux, donc F H I G, aura les quatre costez égaux, & les quatre angles droicts, partant sera quarré, duquel tous les [f] costez touchent le cercle. Donc à l'entour d'vn cercle donné, nous auons descrit vn quarré. Ce qu'il falloit faire. [e] 34. 1. [f] *Coroll.* 16. 3.

PROBLEME 8. PROP. 8.

Dans vn quarré donné, inscrire vn cercle.

Soit le quarré donné A B C D, auquel il faut inscrire vn cercle. Ayant diuisé les costez en deux egalement



egalement aux poincts E, F, C, H, ſoient menées les droites lignes EG, FH, ſe coupant au poinct I.

34. 1. [a] Or d'autant que AD, BC, ſont égales & paralleles, leurs moitiez AH, BF, ſeront égales & paralleles: & partant AB, ſera égale & parallele à FH. Semblablement CD, ſera égale & parallele à la meſme FH. Pareillement AD, BC, ſeront égales & paralleles à EG. Donc AI, IB, CI, ID, ſeront parallelogrammes, & partant les lignes IE, IF, IG, IH, ſeront égales à AH, EB, DH, AE: mais celles-cy ſont égales entr'elles, eſtans les moitiez des égales AD, AB, &c. Donc IE, IF, IG, IH, ſont égales, partant le cercle deſcrit du poinct I, comme centre & à l'interualle de IE, paſſera auſſi par les poincts F, G, H, & [b] touchera tous les coſtez, puis que les angles aux poincts E, F, G, H, ſont droicts, & ſera inſcrit au quarré AC. Donc en vn quarré donné, nous auons inſcrit vn cercle. Ce qu'il falloit faire.

b *Corol.* 16. 3. 29. 1.

PROBLEME 9. PROP. 9.

A l'entour d'vn quarré donné, deſcrire vn cercle.

Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut deſcrire vn cercle: Soient menez les deux diametres

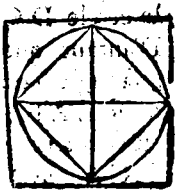
diametres A C, B D, ſe coupans au poinct E. D'autant que les coſtez A B, A D, du triangle A B D, ſont égaux, [i] les angles A B D, A D B, ſeront égaux : mais l'angle B A D, eſt droict au quarré : [k] donc A B D, A D B, ſeront demy-droicts. Semblablement nous monſtrerons que tous les autres angles, qui ſont aux poincts A, B, C, D, ſont demy-droicts, & partant égaux entr'eux. Donc puis que les angles E A D, E D A, ſont égaux entr'eux, les lignes E A, E D, ſeront égales, & par meſme raiſon E A, E B, ſeront égales, & auſſi E B, E C, ſemblablement E C, E D. Partant le cercle deſcrit du centre E, à l'interualle E A, paſſera par les autres poincts B, C, D. Donc à l'entour d'vn quarré donné nous auons deſcrit vn cercle. Ce qu'il falloit faire.



i 5. 1.

k 32. 1.

SCHOLIE.



Mais ſi à vn cercle donné l'on circonſcrit vn autre quarré, le quarré circonſcrit ſera double du quarré inſcrit. Car d'autant que le coſté du quarré circonſcrit eſt égal au diametre du cercle, comme il eſt euident par la 7. Propoſition de ce liure : c'eſt à dire, au diametre du quarré inſcrit ; mais le quarré du diametre eſt double du quarré duquel il eſt diametre, comme nous auons monſtré en la quarante-ſeptieſme

Propoſition du premier liure. Donc ce qui eſt propoſé eſt veritable.

PROBLEME 10. PROP. 10.

Conſtituer vn triangle Iſoſcele, qui ait vn chacun des angles qui ſont à la baſe, double de l'autre.

Soit priſe vne ligne quelconque A B, laquelle ſoit diuiſée au poinct C, en ſorte que le rectangle
l 11.2. contenu ſous [l] A B, B C, ſoit égal au quarré de A C. Puis du centre A, & de l'interualle A B, ſoit deſcrit
m 1.4. vn cercle [m] auquel ſoit accommodée la droicte ligne B D, égale à A C, & ſoit iointe A D. Ie dis que le triangle A B D, eſt Iſoſcele & à vn chacun des angles A B D, A D B, double de l'autre angle A.

Car ayant me-
n 5. 4. né C D, ſoit [n] deſcrit à l'entour du triangle A C D, le cercle D C A. D'autant que le rectangle contenu ſous A B, B C, eſt égal au quarré de C A, c'eſt à dire de B D, ſon egale, & A B, coupe le
o 37. 3. cercle [o] A C D, la ligne B D, le touchera au poinct
p 32. 3. D. Partant l'angle B D C, ſera [p] égal à l'angle A, au ſegment alterne C A D, adiouſtant l'angle commun

mun C D A, l'angle total A D B, sera égal aux deux C A D, C D A, mais l'angle externe D C B, est [q] égal aux mesmes angles A, & A D C. Donc l'angle B C D, est égal à A D B, c'est à dire à [r] A B D, qui luy est egal : partant [t] C D, D B, seront egales; mais B D, est égale à A C, par la construction: donc C D, sera égale à C A, & partant [t] les deux angles C A D, C D A, seront égaux : donc l'angle A D B, qui est monstré égal aux deux C A D, C D A, sera double de l'angle A, & partant l'angle A B D, sera aussi double du mesme angle A. Nous auons donc constitué vn triangle, &c. Ce qu'il falloit faire.

[q] 32. 1. [r] 5. 1. [t] 6. 1. [t] 5. 1.

COROLLAIRE.

Or d'autant que les trois angles du triangle A B D, sont égaux à deux droicts, c'est à dire à cinq cinquiesmes de deux droicts : il est manifeste que l'angle A, est la cinquiesme partie de deux droits, & chacun des deux D, & B, en est 2. cinquiesmes parties. Semblablement A, est les 2. cinquiesmes d'vn droict : & lequel que l'on voudra B, ou D, est les 4. cinquiesmes : [x] d'autant que tous les trois sont égaux à deux droicts, c'est à dire à 10. cinquiesmes parties d'vn droict.

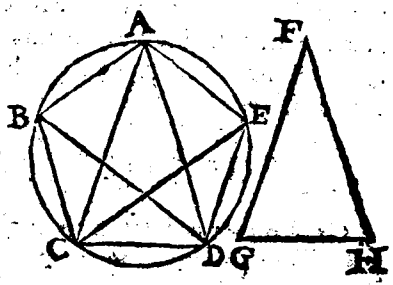
[v] 32. 1. [x] 32. 1.

PROBLEME 11. PROP. 11.

En vn cercle donné, inscrire vn Pentagone equilateral & equiangle.

Soit le cercle donné A B C D, auquel il faut inscrire vn Pentagone equilateral & equiangle. [y] 10. 4.

Soit construit le triangle Isoscele F G H, qui ait chacun des angles G, & H, double de l'angle F,
[a] 2. 4. [a] & au cercle A B C D, soit inscrit le triangle A C D, equiangle au triangle F G H, & l'vn & l'au-
[a] 9. 4. tre des angles A C D, A D C, soit [a] diuisé en deux également par les lignes D B, C E: & soient iointes les lignes droictes A B, B C, C D, D E, E A. Ie dis que le Pentagone A B C D E, inscrit au cercle, est équilateral & equiangle.



Car [illegible] tant qu'vn chacun des angles A C D, A D C, est double de l'angle C A D, estans diuisez chacun en deux également, les cinq angles A D B, B D C, C A D, D C E, E C A, seront égaux: [b] partant les arcs A B, B C, C D, D E, E A: sur lesquels iceux angles sont soustenus
[b] 26. 3. sont égaux: [c] donc les droictes lignes A B, B C, C D, D E, E A, qui les soustendent, seront égales: partant le Pentagone A B C D, est equilateral. Derechef, d'autant que les arcs A B, E D, seront égaux, si l'on adiouste le commun B C D, le tout A B C D,
[c] 29. 3. [d] 27. 3. sera égal au tout E D C B: [d] donc les angles A E D, B A E, appuyez sur iceux seront égaux: en la mesme maniere vn chacun des autres angles seront égaux. Car ils sont appuyez sur arcs égaux, vn chacun desquels est composé de trois arcs égaux. Donc le Pentagone est equiangle, lequel estant monstré aussi équilatere, nous aurons inscrit au

cercle

cercle vn Pentagone equiangle & equilatere. Ce qu'il falloit faire.

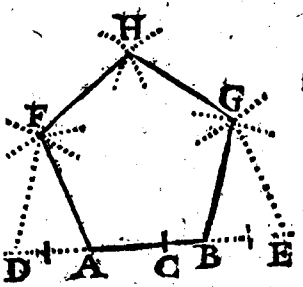
COROLLAIRE.

D'icy il s'enſuit, que l'angle du Pentagone equilateral & equiangle, eſt les trois cinquieſmes de deux droicts, ou les $\frac{6}{5}$ d'vn droict. [e] Car puis que les trois angles B A C, C A D, D A E, ſont égaux, eſtans appuyez ſur les arcs égaux B C, C D, D E: mais C A D, eſt $\frac{1}{5}$ partie de deux droicts, ou $\frac{2}{5}$ d'vn droit: le tout B A E, ſera les $\frac{3}{5}$ de deux droits, ou $\frac{6}{5}$ d'vn droict. e 27. 3.

SCHOLIE.

Si l'on veut deſcrire vn Pentagone equilateral & equiangle, ſur vne ligne droite propoſée, l'on le fera facilement en cette façon.

Soit la ligne droicte propoſée A B, laquelle ſoit [f] diuiſée à C, en ſorte que le rectangle ſous A B, B C, ſoit égal au quarré de A C, & ſoit prolongée A B, de part & d'autre aux poincts D, & E, en ſorte que A D, B E, ſoient égaux au plus grand ſegment A C, & à l'interualle de A B, des deux poincts A, & D, ſoient deſcrits deux arcs ſe coupans au poinct F: ſemblablement des poincts B, & E, & de meſme interualle ſoient deſcrits deux autres arcs ſe coupans au poinct G. Finalement des poincts F, G, f 11. 1.



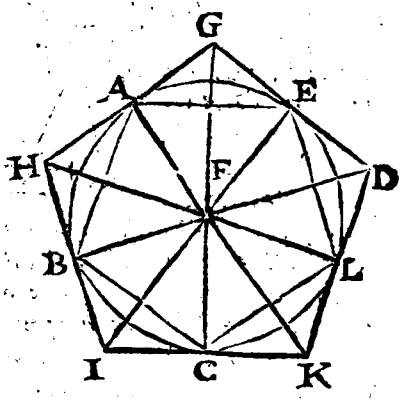
& au mesme interualle soient descrits deux autres arcs se diuisans au poinct H, & soient iointes les droictes lignes : A F, F H, H G, G B. Ie dis que le Pentagone A F H G B, descrit sur la ligne A B, est equilateral & equiangle, &c.

PROBLEME 12. PROP. 12.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn Pentagone equilateral & equiangle.

Soit le cercle donné A B C D, à l'entour duquel il faut descrire vn Pentagone equilateral & equiangle.

g 11. 4. Soit g inscrit en iceluy vn Pentagone equilateral & equiangle A B C D E, & soit pris le centre E, & soient menées les droites lignes F A, F B, F C, F D, F E, par l'extremité desquelles soient menées G H, H I, I K, K L, L G, à angles droicts à icelles, & se rencontrans aux poincts G, H, I, K, L. Car puis que les angles G A E, G E A, sont moindres que deux droits, estans partie des 2. droits F A G, F E G,



h 11. *e. f.* h les lignes A G, E G, se rencontreront au poinct G, & les autres de mesme.

i *Coroll.* 16. 3. Et d'autant i qu'elles touchent le cer-

cle.

cle, le Pentagone GHIKL, sera décrit à l'entour du cercle, lequel ie dis estre equilateral & equiangle.

Car ayant mené les droictes lignes FG, FH, FI, FK, FL, les deux quarrez de FA, AH, [k] seront égaux au quarré de FH, & semblablement les quarrez de FB, BH, seront égaux au mesme quarré FH: partant les deux quarrez de FA, AH, seront égaux aux deux de FB, BH: ostant donc les quarrez égaux des égales FA, FB, les quarrez de AH, & BH, demeureront égaux, dont les lignes AH, BH, seront égales. Et d'autant que les deux costez AF, FH, du triangle AFH, sont égaux à BF, FH, du triangle BFH, chacun au sien, & la base AH, égale à la base BH, comme il est monstré [l] l'angle AFH, sera égal à l'angle BFH: donc les [m] angles AHF, BHF, aussi égaux. Donc l'angle AFB, est double de l'angle BFH, & l'angle AHB, double de l'angle BHF.

k 47. 1.
l 8. 1.
m 4. 1.

Par le mesme discours, nous monstrerons que l'angle BFC, est double de l'angle BFI, & l'angle BIC, double de l'angle BIF. Puis donc [n] que les angles AFB, BFC, sont égaux, estans appuyez sur circonferences égales AB, BC, [o] estans soustenduës des lignes droictes égales, AB, BC, leurs moitiez BFH, BFI, seront égales. Partant, puis que les deux angles BFH, HBF, du triangle BFH, sont égaux aux deux BFI, IBF, du triangle IFB, & le costé BF, adiacent à iceux commun, [p] les costez BH, BI, seront égaux, & les angles BHF, BIF, égaux: donc la ligne HI, est double de la ligne HB.

n 27. 3.
o 28. 3.
p 26. 1.

Par la mesme raison nous monstrerons que GH, est double de HA. Mais HB, HA, sont monstrées égales: donc les doubles d'icelles, sçavoir HI, HG, seront égales. Semblablement nous monstrerons

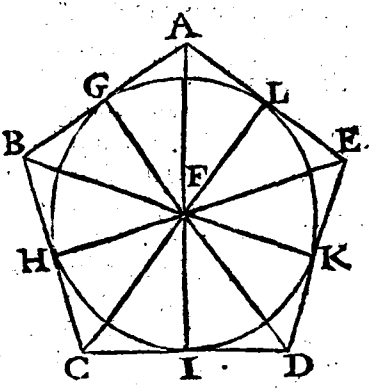
strons, que les droictes lignes I K, K L, L G, sont égales à chacune des lignes droictes H I, H G: donc le Pentagone G H I K L, est equilateral.

Derechef, d'autant qu'il est monstré que les angles B H F, B I F, sont égaux, & qu'ils sont moitiez des angles B H A, B I C: leurs doubles B H A, B I C, seront égaux. Par la mesme raison les angles I K L, K L G, L G H, seront égaux à chacun des angles B H A, B I C: donc le Pentagone G H I K L, est equiangle. Partant estant monstré equilateral, l'on aura descrit à l'entour du cercle vn Pentagone equilateral & equiangle. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 13. PROP. 13.

En vn Pentagone donné, lequel est equilateral & equiangle, inscrire vn cercle.

Soit le Pentagone donné A B C D E, equilateral & equiangle, auquel il faut inscrire vn cercle.



Soient diuisez deux des angles
9. 1. d'iceluy B A E, A B C, en deux egalement par les droictes lignes A F, B F, lesquelles se rencontreront aux
q 11. c. f. poinct F. ¶ Puis que les deux angles F A B, F B A, sont moindres que deux droicts, estans moitiez des deux A, & B, qui

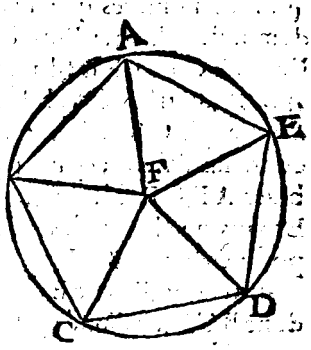
qui ſont moindres que quatre droits, comme il eſt demonſtré à la 32. 1. Puis ſoient menées les droites lignes F C, F D, F E: d'autant que les deux coſtez A B, B F, du triangle A B F, ſont égaux à C B, B F, du triangle C B F, chacun au ſien, & A B F, C B F, contenus d'iceux; égaux par la conſtruction: les [r] 4. 1. baſes A F, C F, & les angles B A F, B C F, ſont égaux. Et puis que les angles du Pentagone A, & C, ſont poſez égaux, & B A F, eſt moitié de B A E, par la conſtruction, l'angle B C F, ſera moitié de B C D: donc B C D, eſt diuiſé en deux egalement: par meſme raiſon nous monſtrerons que les deux autres D, & E, ſont diuiſez en deux egalement: maintenant du poinct F, [ſ] ſoient menées les perpendiculaires F G, F H, F I, F K, F L, ſur les coſtez du Pentagone. D'autant que les deux angles F G A, F A G, du triangle F A G, ſont égaux aux deux F L A, F A L, du triangle F A L, & le coſté A F, oppoſé à vn des angles égaux commun, F G, F L, ſeront égales. [ſ] 12. 1. 26. 1.

Semblablement, l'on monſtrera que les autres perpendiculaires F H, F I, F K, ſont égales à chacune de celles-là: donc le cercle deſcrit du centre F, à l'interualle F G, paſſera pareillement par tous les poincts H, I, K, L: & d'autant que les coſtez du Pentagone [t] touchent iceluy, puis qu'ils ſont angles droicts auec les ſemy-diametres F G, F H, &c. [t] *Coroll.* 16. 1. L'on aura inſcrit vn cercle au Pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 14. PROP. 14.

A l'entour d'vn Pentagone donné, lequel eſt equilateral & equiangle, deſcrire vn cercle.

Soit le Pentagone donné ABCDE, equilateral & equiangle, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle. Ayant diuisé les angles BAE, ABC, en [v] deux également par les lignes droictes AI, BF, lesquelles se rencontreront au poinct F,



[v] 9. 1.

au dedans du Pentagone, comme il a esté demonstré en la precedente proposition, & ayant conioint les droictes lignes FC, FD, FE, nous monstrerons, comme au precedent Probleme, que les autres angles C, D, & E, sont diuisez en deux egalement : Donc tous les demy-angles seront égaux entr'eux, puis que les angles totals sont égaux.

D'autant donc qu'au triangle AFB, les deux angles FAB, FBA, sont égaux : [x] les lignes FA, FB, seront égales. Par mesme raison les autres FC, FD, FE, seront égales à chacune d'icelles. Partant le cercle descrit du centre F, à l'interualle de FA, passera aussi par les poincts B, C, D, E. Donc à l'entour d'vn Pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

[x] 6. 1.

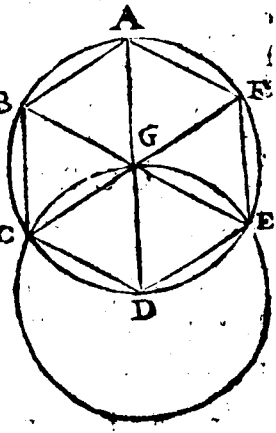
PROBLEME 15. PROP. 15.

En vn cercle donné, inscrire vn Hexagone equilateral & equiangle.

Soit le cercle donné ABCDEF, auquel il faut inscrire vn Hexagone equilateral & equiangle.

Ayant

Ayant pris le centre G, & mené le diametre A D, soit descrit le cercle C G E, du poinct D, comme centre, & de l'interualle D G, lequel coupe le cercle donné aux poincts C, & E, desquels soient menées les droites lignes C F, E B, par le centre G, & soient conioinctes les lignes droites A B, B C, C D, D E, E F, F A, l'on aura inscrit l'Hexagone A B C D E F, au cercle donné, lequel ie dis estre equiangle & equilateral.



Car par la definition du cercle, les trois lignes G C, C D, D G, seront égales entr'elles, & le triangle C D G, sera equilateral, partant les trois [y] angles d'iceluy seront égaux entr'eux, lesquels [z] estans égaux à deux droicts; lequel qu'on voudra d'iceux, comme C G D, sera le tiers de deux droicts: par mesme raison l'angle D G E, sera la tierce partie de deux droits: mais les angles C G D, D G E, E G F, [a] sont égaux à deux droicts: donc l'autre angle E G F, sera aussi la tierce partie de deux droicts. Donc les trois angles C G D, D G E, E G F, sont égaux entr'eux, ausquels les angles C G B, B G A, & A G F, estans [b] égaux au sommer, les six angles au centre G, seront égaux entr'eux. [c] Parquoy les circonferences sur lesquelles ils s'appuyent, sont égales, [d] & partant les droictes lignes A B, B C, C D, D E, E F, F A, égales:

y 5. 1.

z 32. 1.

a 13. 1.

b 15. 1.

c 26. 1.

d 29. 3.

parquoy

parquoy l'Hexagone A B C D E F, ſera equilateral.

Derechef, d'autant que la circonference B C, eſt égale à A F, ſi l'on adiouſte la commune C D E F, les circonferences B C D E F, & A F E D C, ſeront
e 27. 3. égales. e Donc les angles A B C, B A F, appuyez ſur icelles ſeront égaux. Nous monſtrerons ſemblablement que les autres angles de l'Hexagone C, D, E, F, ſont égaux à chacun d'iceux A, & B, parce que chacun d'iceux eſt appuyé ſur vn arc compoſé de quatre circonferences égales. Donc l'Hexagone eſt auſſi equiangle : donc en vn cercle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cette Propoſition il eſt manifeſte que le demy-diametre du cercle eſt égal au coſté de l'Hexagone inſcrit en iceluy. Car D G, demy-diametre, eſt égal à D C, coſté de l'Hexagone, par la definition du cercle.

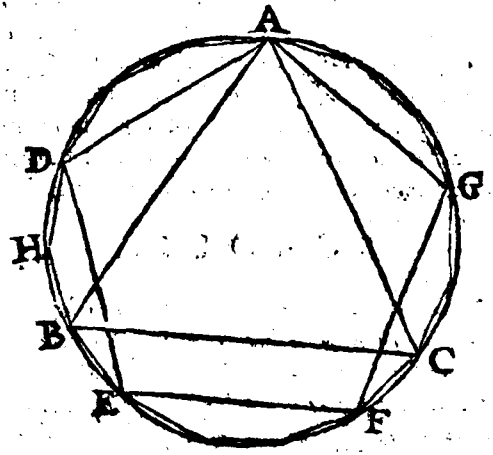
PROBLEME 16. PROP. 16.

En vn cercle donné, inſcrire vn Quindecagone equilateral & equiangle.

Soit le cercle A B C, auquel il faut inſcrire vn Quindecagone equilatetal & equiangle. Soit in-
f 16. ou 28. 3. ſcrit en iceluy le triangle equilateral A B C, f les trois arcs A B, B C, C A, ſeront égaux, à cauſe des trois coſtez, ou des trois angles égaux A, B, C.
g 11. 4. Derechef, ſoit g inſcrit au meſme cercle vn Pentagone equilateral & equiangle A D E F G,

ayant

ayant vn des angles appliqué au poinct A, [h] les h 28. 3.
cinq arcs A D, D E, E F, F G, G A, seront égaux,



Et puis que la circonference du cercle doit estre diuisée en quinze parties égales : l'arc A B, en contiendra cinq, & l'arc A D, trois, estant l'arc A B, la tierce partie de toute la circonference, & A D, la cinquiesme partie : partant le reste D B, en contiendra deux parties. [i] Donc ayant diuisé l'arc D B, i 30. 3.
en deux egalement au poinct H, B H, sera la quinziesme partie de toute la circonference ; donc menant la droicte B H, elle soustiendra la quintiesme partie de toute la circonference : [k] partant si k 1. 4.
l'on accommode au cercle quatorze autres lignes droictes égales à B A, l'on aura inscrit au cercle vn Quindecagone equilateral, [l] lequel est aussi l 27. 3.
equiangle, puis que chacun des angles sont appuyez sur arcs égaux, chacun desquels est composé de treize arcs égaux, comme il est manifeste.

Donc

Donc en vn cercle donné, nous auons inſcrit vn Quindecagone. Ce qu'il falloit faire.

Semblablement, ſuiuant ce qui eſt dit cy-deuant du Pentagone à la 12. 13. & 14. Propoſitions, nous deſcrirons à l'entour du cercle donné vn Quindecagone equilateral & equiangle. Pareillement, au Quindecagone equilateral & equiangle nous inſcrirons vn cercle: & finalement, à l'entour du Quindecagone nous deſcritons vn cercle.

SCHOLIE.

Nous remarquerons icy que en toutes les Propoſitions de ce quatrieſme liure, où Euclide a dit (inſcrire) le Copiſte a mis (deſcrire) qui eſt tout le contraire. Car par ce verbe (inſcrire) Euclide entend conſtituer vne figure dedans vne autre, comme il monſtre par les Definitions du meſme quatrieſme liure, & comme il eſt auſſi manifeſte par les Propoſitions. Car premierement, en la quatrieſme Propoſition il dit ainſi: εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι, en vn triangle donné inſcrire vn cercle, & de meſme en la 6. 8. 11. 13. & 16. Propoſitions. Mais pour dire (deſcrire) il vſe de cét autre verbe περιγράψαι, c'eſt à dire eſcrire à l'entour, comme il appert par les autres Propoſitions. Neantmoins cét ignorant Copiſte ne pouuant dire autre choſe que ce qu'il trouue en ſa copie, commet cette faute en la 4. 6. 8. 11. 13. & 16. Propoſitions de ce liure. Ie diray encore icy qu'en la vingt-huictieſme Propoſition du troiſieſme liure, ledit Copiſte a mis ainſi: Aux cercles égaux, les lignes droictes égales prennent circonferences égales; *Et Euclide dit:* Oſtent, ou retranchent circonferences égales: *αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι.*

ἀφαιροῦσι. *Or quand Euclide dit icy,* Ostent circonferences égales, *il entend de deux lignes égales, chacune desquelles diuise son cercle en deux portions, dont la plus grande est égale à la plus grande, & la moindre à la moindre ; mais s'il disoit,* prennent circonferences égales, *comme il dit en la huictiesme Definition du mesme troisiesme liure :* ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι, τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, *&c. c'est à dire. Mais quand les lignes qui comprennent l'angle,* prennent quelque circonference, *&c. Il entend de deux lignes menées de quelque poinct de la circonference, ou autre, iusques à la circonference, & entre les extremitez desquelles se trouue partie de la circonference du cercle, d'où il appert qu'Euclide ne veut pas dire vne mesme chose par ces deux verbes,* ἀπολαμβάνω, *&* ἀφαιρῶ, *le premier signifiant,* Intercipio, *& le dernier,* Aufero. *Mais le Traducteur du Copiste ne prenant garde à tout cela, prend tout ce qu'il trouue de traduit, & le baille au Copiste pour le faire imprimer ; & à grand peine l'on pourra trouuer vne seule demonstration en tout ce qu'ils font, où il n'y ait faute.*

Fin du quatriesme Liure.

LIVRE

LIVRE CINQVIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

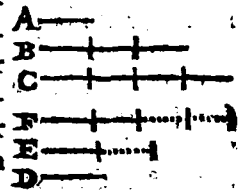
DEFINITIONS.

1. **Vne grandeur eſt partie d'vne autre grandeur, la plus petite de la plus grande, lors que la plus petite meſure la plus grande.**

EVCLIDE a traicté aux quatre liures precedens, de la quantité continuë conſiderée abſolumẽt; Mais aux deux ſuiuans il diſpute de la meſme quantité, non abſolument; mais en tant que l'vne ſe refere à l'autre, c'eſt à dire, qu'entant qu'elle eſt comparée auec vn' autre, elle a quelque raiſon. En ce cinquieſme liure, il enſeigne les proportions des quantitez continuées en general, ne les referant à aucune eſpece de quantité, comme à vne ligne, ſuperficie, ou à quelque corps. Mais au ſixieſme il monſtre ſpecialement, quelle raiſon ont les lignes entr'elles, les angles, les circonferences des cercles, les

les triangles & autres figures planes. Et pour donc garder sa methode, il definit premierement les termes, dont il sera besoin aux Demonstrations.

Il dit donc qu'vne grandeur plus petite, laquelle mesure quelqu'autre grandeur plus grande, est appellée partie d'icelle. Comme pour exemple, d'autant que la grandeur A, prise trois fois,



mesure la grandeur B; A, sera dite partie de B, & prise quatre fois mesure C; la grandeur A, sera dite aussi partie de C. Mais d'autant que D, ne mesure E, ny F; car prise deux fois elle excede E, & prise trois fois elle defaut à F, & prise quatre fois elle excede icelle; D, ne sera dite partie des grandeurs E, & F.

Or entre les Mathematiciens, il y a de deux sortes de partie: l'vne qui mesure son tout, de sorte qu'estant repetée quelque nombre de fois, elle constituë son tout: comme 4. conferé auec 12. 16. 20. & est dite, partie aliquote. L'autre ne mesure son tout: car prise quelque nombre de fois elle l'excede, ou defaut à iceluy, comme 4. conferé auec 6. 7. 9. 18. 30. & est dite partie aliquante.

Euclide definit donc icy seulement la partie aliquote, tant à cause qu'elle mesure seulement son tout: (car la partie aliquante n'est dite mesurer son tout,) que d'autant, comme il appert au 7. liure, que la partie aliquante aux nombres, n'est pas appellée partie par Euclide, mais parties. Car 4. n'est pas partie de 6. mais en est les deux tierces parties, &c.

2. **Vne grandeur, eſt multiple d'vne autre plus petite, quand la plus grande eſt meſurée de la plus petite.**

Comme en l'exemple precedent, tant la grandeur B, que C, eſt multiple de la grandeur A, d'autant que la grandeur A, meſure tant l'vne que l'autre B, & C: mais ny la grandeur E, ny F, ne doit eſtre dicte multiple de la grandeur D; d'autant que D, ne meſure ny l'vne ny l'autre. Donc, partie, ſe refere à multiple, & multiple à partie: de ſorte qu'vne moindre quantité, en meſurant vne plus grande, eſt dicte partie de la plus grande. Mais la plus grande, qui eſt meſurée de la plus petite, eſt dicte multiple de la plus petite.

Il eſt donc aſſez manifeſte, que la partie cy-deuant definie, eſt celle qui meſure exactement ſon tout, ſans qu'il reſte rien.

Or quand deux moindres grandeurs en meſurent deux autres plus grandes egalement, c'eſt à dire, que ſi vne des moindres eſt contenuë autant de fois exactement en vne des plus grandes, que l'autre moindre eſt contenuë de fois en l'autre plus grande; ces deux grandeurs plus grandes ſeront dictes equimultiples des deux moindres. Et en faut dire de meſme, ſi pluſieurs moindres grandeurs meſurent egalement pluſieurs autres grandeurs plus grandes.

3. **Raiſon, eſt vne habitude de deux grandeurs de meſme genre, comparées l'vne à l'autre, ſelon la quantité.**

Quand

Quand deux quantitez de meſme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux ſuperficies, deux ſolides, &c. ſont comparez entr'eux, ſelon la quantité, c'eſt à dire, ſelon que l'vne eſt plus grande que l'autre, ou moindre, ou égale: telle comparaiſon, ou mutuelle habitude, eſt appellée raiſon, ou (comme veulent d'autres) proportion. Parquoy ſi on compare vne ligne auec vne ſuperficie, ou vn nombre auec vne ligne, cette comparaiſon ne ſera appellée raiſon, d'autant que, ny la ligne & la ſuperficie, ny le nombre & la ligne ne ſont quantitez de meſme genre.

Semblablement, ſi on confere vne ligne auec vne autre ligne, ou vne ſuperficie auec vne ſuperficie, ſelon la qualité, c'eſt à dire, ſelon que l'vne eſt blanche & l'autre noire, ou que l'vne eſt chaude & l'autre froide, &c. Combien que toutes deux ſoient de meſme genre, telle comparaiſon toutefois, ne ſera dite, raiſon ou proportion, puis qu'elle n'eſt faicte ſelon la quantité.

Or combien que la raiſon ou proportion ſe trouue proprement entre les ſeules quantitez, toutefois les choſes leſquelles reçoiuent en quelque maniere la nature de la quantité, comme les temps, les ſons, les voix, les lieux, les mouuemens, les poids & les puiſſances, ſont pareillement dites auoir raiſon, ſi l'on conſidere leur habitude ſelon la quantité. Comme quand nous diſons qu'vn temps eſt plus grand qu'vn autre, ou moindre, ou que deux temps ſont égaux, &c. Cette habitude ſera appellée proportion ou raiſon: car alors les temps ſont conſiderez, ſelon la maniere de quelques quantitez.

Au reste, en toute proportion, la quantité qui se refere à vne autre, est dite par Euclide & autres Geometres, antecedent de la raison. Mais celle-là, à laquelle vne autre se refere, est dite consequent de la raison. Comme pour exemple, en la raison d'vne ligne de six palmes, à vne ligne de trois palmes, la ligne de six sera dite antecedent de la raison, & la ligne de trois consequent : & au contraire, si on compare la ligne de trois, à la ligne de six, la ligne de trois sera dite antecedent, & celle de six consequent : autrement la quantité que l'on pose la premiere s'appelle antecedent, & la seconde consequent.

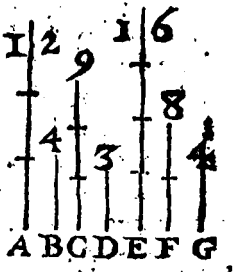
4. Proportion est vne similitude de raisons.

Ce que i'appelle en ce lieu proportion, les Grecs l'appellent ἀναλογίαν, analogie, & plusieurs Latins proportionalité. Tout ainsi donc que l'habitude de deux quantitez entr'elles est dite raison; ainsi la comparaison de deux, ou plusieurs raisons entr'elles, s'appelle proportion. Comme si la raison de la quantité A, à la quantité B, est semblable à la raison de C, à D, l'habitude d'entre ses raisons, sera appellée proportion. En la mesme maniere, si la raison de E, à F, est semblable à celle de F, à G, cette similitude sera appellée proportion.

Or il y a plusieurs sortes de proportion, ou habitude de raisons (& nous appellerons, l'habitude de deux quantitez, raison : mais l'habitude des raisons proportion,) descrites par les Autheurs, principalement par Boëtius & Iordanus, desquelles celles-cy ont esté plus en vsage entre les anciens,

sçauoir

sçauoir la proportion Arithmetique, Geometrique, Musique, ou Harmonique. Mais Euclide traite seulement de la proportion Geometrique en ce liure: & y en a de deux sortes, l'vne continuë, en laquelle les quantitez entre-moyennes sont prises deux fois, en sorte qu'il ne se fait aucune interruption de raisons, mais chaque quantité entre-moyenne est consequente, de la quantité precedente, & antecedente de la suiuante. Comme si on dit, qu'il y a mesme raison de E, à F, que de F, à G, cette proportion s'appellera continuë. Mais l'autre, sera dite discontinuë ou non continuë, en laquelle chacune des quantitez entre-moyennes, est prise vne fois seulement, en sorte qu'il se fait interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedent & consequent; mais antecedent seulement, ou consequent. Comme si on dit, qu'il y a mesme raison de A, à B, que de C, à D, cette proportion sera appellée discontinuë, ou non continuë.



De la diuision de la raison.

Euclide diuise la raison en rationelle & irrationelle. La rationelle est celle-là, laquelle peut estre exprimée par les nombres, comme la raison d'vne ligne de vingt pieds, à vne ligne de dix pieds: car cette raison est monstrée par ces deux nombres vingt & dix. L'irrationelle est celle-là, laquelle ne peut estre exprimée par les nombres, comme est la raison du diametre d'vn quarré au costé du mesme

Rationelle.

Irrationelle.

quarré: car cette raiſon ne peut eſtre trouuée aux nombres, comme demonſtre Euclide liure 10.

D'autres diſent, que la raiſon rationelle eſt celle qui eſt entre deux quelconques quantitez commenſurables, mais l'irrationelle eſt celle qui eſt entre deux quantitez incommenſurables. Or les quantitez ſont dictes commenſurables, leſquelles ont vne commune partie aliquote, ou ſont meſurées par vne meſme commune meſure, comme vne ligne de 20. pieds, & vne ligne de 8. car vne ligne de 4 pieds, eſt partie aliquote de toutes les deux: Semblablement, vne ligne de deux pieds eſt partie aliquote d'icelles: & partant, tant quatre que deux, meſurera tant la ligne de vingt que la ligne de huict.

Commenſurables quantitez.

Incommenſurables.

Mais les quantitez incommenſurables, ſont celles qui n'ont aucune partie aliquote, ou aucune commune meſure qui les puiſſe meſurer, comme eſt le diametre d'vn quarré, & le coſté d'iceluy quarré. Car combien que chacune de ces lignes ait infinies parties aliquotes, comme la moitié, le tiers & autres parties: toutefois aucune partie aliquote de l'vne, ſi petite qu'elle ſoit, ne peut pas meſurer l'autre, comme demonſtre Euclide liure 10. propoſition derniere: auquel liure ſont monſtrées pluſieurs autres lignes incommenſurables, outre ces deux. Partant la ſeule raiſon rationelle ſe trouue aux nombres: mais tant la rationelle que l'irrationelle ſe trouue en la quantité continuë.

Raiſon d'egalité.

La raiſon eſt auſſi diuiſée, en raiſon d'égalité, & d'inegalité. La raiſon d'egalité, eſt celle qui eſt entre deux quantitez égales, comparées entr'elles. Comme entre 20. & 20. entre 100. & 100. entre vne ligne de 12. pieds, & vne ligne de 12. pieds: mais

mais la raison d'inegalité est celle qui est entre deux quantitez inegales, comparées entr'elles, comme entre 20. & 10. entre 8. & 40. entre vne ligne de 6. pieds, & vne de 2. &c.

Or ces deux genres de raison ont cela de commun auec les premieres, que toute raison d'égalité est necessairement rationelle, & non au contraire. Semblablement, toute raison irrationelle est necessairement raison d'inegalité, & non au contraire, &c.

Derechef, la raison d'inegalité (car nous auons laissé la raison d'égalité, attendu qu'elle ne se peut subdiuiser, puis que toutes quantitez égales, soient grandes ou petites, ont touiours mesme raison d'égalité) est subdiuisée en raison d'inegalité maieure, & d'inegalité mineure. *Raison d'inegalité.*

La raison d'inegalité maieure, est quand la plus grande quantité est comparée à la plus petite, comme la raison de 20. à 10. Item la ligne de 8. pieds, à la ligne de 6. pieds, &c. La raison d'inegalité mineure, est quand la moindre quantité est comparée à la plus grande, comme la raison de 10. & 20. Item, de la ligne de 6. pieds, à la ligne de 8. pieds, &c. Or cette raison n'est en vain & superfluë, comme plusieurs doutent; car il n'y a pas mesme raison de 4. à 2. que de 2. à 4, mais different beaucoup entr'elles, leur vsage estant beaucoup diuers, comme il est manifeste à ceux qui sont aucunement versez en la Geometrie & en l'Algebre. *Inegalité maieure.* *Mineure.*

Ce sont icy les generales diuisions de la raison, entant qu'elle contient toutes les raisons, sans nulle excepter. Or maintenant nous subdiuiserons tant la raison de maieure inegalité, que de mineure inegalité, entant qu'elles comprennent seule-

ment les raisons rationelles, d'autant que nous deuons parler au 10. liure des quantitez qui ont raison irrationelle.

Donc la raison rationelle d'inegalité maieure, est diuisée en cinq genres, sçauoir en la raison multiple, super-particuliere, super-partiente, multiple super-particuliere, & multiple super-partiente. Semblablement, la raison de mineure inegalité est diuisée selon les mesmes genres, pourueu qu'à chacun terme de la raison l'on mette deuant cette propositon *(Sub)* c'est à dire sous, comme en la raison submultiple, ou sous-multiple, sous super-particuliere, sous-superpartiente, sous-multiple super-particuliere, sous-multiple super-partiente.

Or de ces cinq genres ou especes, les trois premiers sont simples, mais les deux derniers sont composez de ces trois premiers, comme il est manifeste.

De la raison multiple.

Raison multiple est vne habitude d'vne plus grande quantité à vne plus petite, quand la plus grande contient la plus petite, certain nombre de fois precisément, comme deux fois, trois fois, dix fois, cent fois. De sorte que la plus petite, mesure la plus grande, comme est la raison de ce nombre vingt au nombre quatre, car vingt contient quatre cinq fois. Item, la raison d'vne ligne de trente pieds, à vne ligne de cinq pieds, &c.

Or celle-cy contient sous soy infinis genres; car si la plus grande quantité de la raison multiple, contient la moindre deux fois seulement, elle sera appellée raison double: si trois fois, elle sera

dite

decuple, si dix fois, decuple, si cent fois, centuple, &c.

De ces choſes, nous definirons facilement toutes les eſpeces de raiſon multiple : Car la raiſon octuple ne ſera rien autre choſe, qu'vne habitude d'vne plus grande quantité à vne moindre, quand la plus grande contient la moindre huict fois. En la meſme maniere on definira les autres raiſons multiples, comme la raiſon quintuple, celle qu'eſt quarante à huict, de laquelle raiſon la plus grande quantité contient la moindre cinq fois. Item, la raiſon d'vne ligne de dix pieds, à vne ligne de cinq pieds, eſt celle en laquelle la plus grande quantité contient la moindre deux fois, & ainſi des autres.

De la raiſon ſuper-particuliere.

La raiſon ſuper-particuliere eſt vne habitude d'vne plus grande quantité à vne moindre, quand la plus grande contient la plus petite vne fois ſeulement, & en outre vne partie aliquote d'icelle moindre, ſçauoir la moitié, le tiers ou le quart, &c. Comme eſt la raiſon de 3. à 2. car 3. contient 2. vne fois, & en outre l'vnité qui eſt moitié de 2. Ainſi pareillement vne ligne de 12. pieds a raiſon ſuper-particuliere à vne ligne de 9. pieds : car la premiere ligne 12. contient la derniere 9. vne fois, & en outre vne ligne de 3. pieds, qui eſt la 3. partie de 9. pieds.

Cette raiſon ſe diuiſe pareillement en infinis genres : car ſi cette partie aliquote contenuë en la plus grande quantité, eſt moitié de la moindre quantité, la raiſon conſtituée ſera appellée ſeſquialtere, ſi c'eſt la tierce partie, elle ſera appellée

sesquitierce : si la 4. sesquiquarte, & si la milieme, sesquimilieme.

Donc par ce mesme terme les definitions de toutes les raisons super-particulieres seront faciles: comme la raison sesqui-huictieme, ou sesqui-octaue, est quand la plus grande quantité, contient la moindre vne fois, & en outre la huictieme partie de la moindre, comme est la raison de 9. à 8. Item de 45. à 40. & faut entendre de mesme des autres.

De la raison super-partiente.

La raison superpartiente est l'habitude d'vne plus grande quantité à vne plus petite, quand la plus grande contient la plus petite vne fois seulement, & en outre, quelques parties aliquotes d'icelle moindre, lesquelles prises ensemble, ne font pas vne partie aliquote, comme est la proportion de 8. à 5. car 8. contient 5. vne fois, & de plus, trois vnitez, chacune desquelles est partie aliquote, sçauoir la 5. partie de ce nombre 5. mais ce nombre de 3. composé de ces trois vnitez, n'est pas partie aliquote de 5.

I'ay dit, que ces parties aliquotes ne doiuent constituer vne partie aliquote, à cause de plusieurs raisons, qui du commencement semblent estre superpartientes, lesquelles toutefois sont superparticulieres, comme est la raison entre 10. & 8. Car combien que le nombre 10. contienne 8. vne fois, & de plus deux vnitez, chacune desquelles est la 8. partie de 8. toutefois d'autant que le nombre de deux composé de ces deux vnitez, est la 4. partie de 8. ceste raison ne doit estre appellée superpartiente, mais superparticuliere, sçauoir sesquiquarte: partant,

partant, afin que deux quantitez soient dictes auoir raison superpartiente, il est necessaire que la plus grande quantité contienne la moindre vne fois, & plusieurs parties aliquotes d'icelle moindre, lesquelles prises ensemble ne doiuent constituer vne partie aliquote; ce qu'aucuns ne considerans, confondent beaucoup les genres des raisons entr'eux.

De la raison multiple superparticuliere.

La raison multiple superparticuliere, est l'habitude d'vne plus grande quantité à vne plus petite, quand la plus grande contient la plus petite certain nombre de fois, comme 2. 3. 4. &c. & en outre vne partie aliquote de la moindre, comme est la raison de 9. à 4. Car 9. contient 4. deux fois, & en outre: (en quoy elle conuient auec la multiple, comme auec la double,) contient l'vnité, qui est la 4. partie du moindre nombre (& en cela cette raison est semblable à la superparticuliere, sçauoir à la sesquiquarte,) de sorte que ceste raison sera dite à bon droict, estre composée de la multiple, & de la superparticuliere.

Or cette raison, tout ainsi que la multiple, est diuisée en plusieurs genres, comme en double superparticuliere, triple superparticuliere, &c. entant que la plus grande quantité contient la moindre deux fois, ou trois fois, & en outre, vne partie aliquote de la moindre quantité.

Derechef, vn chacun de ces genres est subdiuisé en plusieurs, eu esgard à la raison superparticuliere: car, pour exemple, la raison triple superparticuliere, contient sous soy la triple sesquial-

tere,

tere, (sçauoir quand la plus grande quantité contient trois fois la moindre : & outre la moitié d'icelle moindre,) la triple sesquitierce, la triple sesquiquarte,& ainsi des autres.

De la raison multiple superpartiente.

Finalement, la raison multiple superpartiente, est l'habitude d'vne plus grande quantité à vne moindre,quand la plus grande contient la moindre, certain nombre de fois, & en outre quelques parties aliquotes de la moindre, lesquelles prises ensemble ne font pas vne partie aliquote, comme est la raison de 11.à 3. I'ay dit, ne faisant pas vne partie aliquote, pour la raison alleguée, en la raison superpartiente. Car si icelles parties aliquotes faisoient vne partie aliquote, elle ne seroit pas raison multiple-superpartiente,mais multiple-superpartículiere.

Comme la raison de 20. à 6. ne doit estre dite multiple-superpartiente sixiesmes,combien que 20. contienne 6.trois fois & deux sixiesmes, d'autant que deux sixiesmes font vne 3.partie.Parquoy elle sera appellée raison triple-sesquitierce.

Or cette raison est diuisée, premierement eu esgard à la raison multiple. Comme en multiple double superpartiente, triple superpartiente,&c.

En apres,chacune d'icelles, eu esgard au nombre des parties, contient sous soy infinis genres: comme sous la triple-superpartiente, est contenuë la triple-superbipartiente, la triple-supertripartiente,&c.

Finalement, chacune d'icelles,en consideration de la denomination des parties aliquotes ; est

encore diuisée en infinis genres : comme la triple superbipartiente est diuisée en triple superbipartiente quatriesmes, en triple superbipartiente cinquiesmes, &c. De toutes lesquelles les definitions & les exemples seront faciles, par ce qui a esté dit, &c.

Des raisons rationelles, de moindre inegalité.

Tout ce qui a esté dit iusques icy, des cinq genres des raisons rationelles de plus grande inegalité, doit pareillement estre entendu des cinq genres correspondans de moindre inegalité, apposant neantmoins tousiours ceste proposition (*sub*) c'est à dire, sous, comme il a esté dit.

Car si aux exemples cy-deuant proposez, on conferé les moindres quantitez auec les plus grandes, l'on aura des raisons de moindre inegalité correspondantes. Car tout ainsi que la raison de 100. à 1. est centuple, ainsi la raison de 1. à 100. est subcentuple, ou sous-centuple, & comme la raison de 11. à 3. est triple-superbipartiente tierces, ainsi la raison de 3. à 11. est subtriple, & superbipartiente tierces, & ainsi des autres.

Des denominateurs, des raisons rationelles.

D'autant que l'vsage des denominateurs des raisons rationelles, cy-dessus exposées, n'est pas peu vtile : il ne sera hors de propos d'enseigner icy, par quels nombres elles sont denommées. Le denominateur de quelconque raison, est le nombre, qui exprime distinctement & apertement, l'habitude d'vne quantité à l'autre : comme le denominateur

de

de la raiſon octuple eſt 8. pour ce que ce nombre 8. monſtre que la plus grande quantité de la raiſon octuple, contient le moindre 8. fois. Semblablement, le denominateur de la raiſon ſeſquiquinte eſt $\frac{1}{5}$. d'autant que ce nombre ſignifie que la plus grande quantité de la raiſon ſeſquiquinte, contient la moindre vne fois, & la 5. partie d'icelle moindre; & faut entendre de meſme des denominateurs des autres raiſons.

C'eſt pourquoy (comme i'eſtime) Euclide au 6. liure, & pluſieurs autres Mathematiciens, appellent le denominateur de quelconque raiſon, la quantité d'icelle: car le denommé (comme nous auons dit) monſtre, combien grande eſt vne quantité, au reſpect d'vne autre, ſçauoir de celle, auec laquelle elle eſt conferée, comme il appert par les exemples propoſez.

Or de ces choſes, que nous auons dites, l'on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raiſon. Car le denominateur de la raiſon multiple, quelconque elle ſoit, eſt vn nombre entier, qui contient autant d'vnitez, que la plus grande quantité de la raiſon contient de fois la moindre: comme pour exemple, le denominateur de la raiſon double, eſt deux, de la raiſon octuple, eſt 8. centuple eſt 100. &c. Mais les denominateurs des raiſons ſubmultiples, correſpondantes aux multiples, ſont parties aliquotes, denommées des denominateurs des raiſons multiples, auſquelles correſpondent les denommées.

Comme le denominateur de la raiſon ſous-double eſt $\frac{1}{2}$. ſubquintuple eſt $\frac{1}{5}$. ſubcentuple eſt $\frac{1}{100}$. &c. & ainſi nous trouuerons les denominateurs des autres raiſons ſubmultiples. Partant, le denominateur

minateur de quelconque raiſon ſubmultiple eſt vn nombre rompu, ou vne fraction, de laquelle le numerateur eſt touſiours l'vnité: mais le denominateur eſt vn nombre denommant la raiſon multiple correſpondante, comme il appert par ces exemples. Donc il ne ſera difficile de trouuer le denominateur de quelconque raiſon multiple, ou ſubmultiple, entendãt bien ce qui eſt dit: d'autant que la prolation meſme, demonſtre le denominateur de la raiſon, comme il eſt manifeſte, par les exemples propoſez.

Le denominateur de quelconque raiſon ſuperparticuliere, eſt l'vnité, auec celle partie aliquote, que la plus grande quantité, doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raiſon ſeſquialtere eſt $1.\frac{1}{2}$. ſeſquihuictieſme eſt $1.\frac{1}{8}$. ſeſquicentieſme eſt $1.\frac{1}{100}$. &c. & ne ſera difficile de trouuer le denominateur de quelconque raiſon ſuperparticuliere, puis que la prolation meſme de la raiſon, exprime le denominateur par ſa partie aliquote, comme il eſt euident par les exemples propoſez.

Mais les denominateurs des raiſons ſubſuperparticulieres, correſpondantes, ſont fractions, deſquelles les numerateurs ſont plus petits que les denominateurs d'icelles, de l'vnité ſeulement, chacun au ſien, comme le denominateur de la raiſon ſubſeſquialtere eſt $\frac{2}{3}$. ſubſeſquihuictiéme eſt $\frac{8}{9}$ ſubſeſquicentiéme eſt $\frac{100}{101}$. &c. Or on trouuera le denominateur de quelconque raiſon ſuperparticuliere, ſi pour le numerateur de la fraction, on prend le denominateur de la partie aliquote exprimée en la raiſon, & pour le denominateur de la meſme fraction, l'on prend vn nombre plus grand

grand de l'vnité. Comme le denominateur de la raison subsesquidixiéme est $\frac{10}{11}$, puis que le numerateur de ceste fraction est le nombre denommant la partie dixiéme, sçauoir 10. mais le denominateur de la mesme fraction, excede le numerateur de l'vnité; le denominateur de la raison subsesquiseptiéme est $\frac{7}{8}$. celuy de la raison subsequiquinte, est $\frac{5}{6}$. &c.

Pareillement, nous trouuerons le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere, si nous reduisons le denominateur de la raison superparticuliere correspondante en vne fraction; de laquelle fraction le numerateur excedera tousjours le denominateur, de l'vnité, lequel est aussi denominateur de la partie aliquote, dont est faict mention en la raison proposée, puis nous transposons les termes de cette fraction : en sorte que le numerateur soit faict denominateur, & le denominateur numerateur : nous aurons le denominateur de la raison subsuperparticuliere proposée, comme si on propose la raison subsequiseptiéme; d'autant que le denominateur de la raison sesquiseptiéme qui luy est correspondante, est $1\frac{1}{7}$. qui se reduit en ceste fraction $\frac{8}{7}$. de laquelle le numerateur est plus grand que le denominateur de la partie aliquote de l'vnité : parquoy si nous transposons cette fraction en ceste maniere $\frac{7}{8}$. nous dirons que le denominateur de la raison subsesquiseptiéme est $\frac{7}{8}$. &c.

Le denominateur de quelconque raison superpartiente, est l'vnité auec les parties aliquotes, (ne faisant vne partie aliquote) lesquelles la plus grande quantité doit contenir outre la moindre.

Comme

Comme le denominateur de la raiſon ſupertripartiente ſeptiémes eſt $1\frac{1}{7}$. ſupertripartiente 20. eſt $1\frac{1}{20}$. &c. Et eſt facile à trouuer, d'autant que la prolation meſme de la raiſon monſtre le propre denominateur, comme il appert par les exemples cy-deſſus.

Mais le denominateur de quelconque raiſon ſubſuperpartiente, eſt vne fraction de laquelle le numerateur eſt moindre que le denominateur, d'autant d'vnitez, que la plus grande quantité de la raiſon propoſée, contient de parties aliquotes outre la moindre. Comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente ſeptiémes eſt $\frac{7}{10}$. de la ſubſupertripartiente vingtiémes eſt $\frac{20}{31}$. &c. Or le denominateur de quelconque raiſon ſubſupertripartiente ſera trouué, ſi pour le denominateur de la fraction, on prend le denominateur des parties aliquotes, contenuës en la raiſon propoſée, auquel ſi on adiouſte le nombre des meſmes parties, on aura le denominateur d'icelle fraction.

Comme le denominateur de la raiſon ſubſuperquatripartiente vnziémes eſt $\frac{11}{15}$. d'autant que le denominateur de cette fraction, eſt le denommant les parties vnziémes, ſçauoir 11. auquel eſt adiouſté 4. le nombre des quatre parties aliquotes, afin de faire 15. denominateur de la meſme fraction.

Mais le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente cinquiémes eſt ceſte fraction $\frac{5}{8}$: car le numerateur d'icelle eſt le nombre denommant les parties cinquiémes, ſçauoir 5. mais le denominateur de la meſme fraction 8. eſt faict du numerateur 5. & de 3. nombre des trois parties aliquotes:

Et ainsi des autres denominateurs que l'on trouuera aussi en ceste maniere.

Soit reduit le denominateur de la raison superpartiente correspondante en vne fraction, de laquelle le numerateur excedera le denominateur, qui denomme aussi les parties aliquotes exprimées, d'autant d'vnitez qu'il y a de parties aliquotes.

Car les nombres de cette fraction estans transposez, en sorte que le numerateur soit faict denominateur, & le denominateur numerateur : l'on aura le denominateur de la raison proposée subsuperpartiente. Comme le denominateur de la raison subsupertripartiente cinquiémes est $\frac{5}{8}$. pour ce que le denominateur de la raison supertripartiente cinquiémes est $1\frac{3}{5}$. qui est reduit en ceste fraction $\frac{8}{5}$. laquelle faict $\frac{5}{8}$. en transposant les nombres, & faut faire de mesme pour trouuer les denominateurs des autres raisons, &c.

Le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere, est vn nombre entier, denommant la raison multiple proposée, auec la partie aliquote, que la plus grande quantité doit contenir, outre la moindre : comme le denominateur de la raison triple sesquiseptiéme est $3\frac{1}{7}$. la quintuple sesquineufiéme, est $5\frac{1}{9}$. &c. & est tres-facile d'exprimer le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere : d'autant que la prolation de la raison monstre distinctement, & le denominateur de la raison multiple, & la partie aliquote, comme l'on peut voir par les exemples proposez. Or le denominateur de quelconque raison submultiplesuperparticuliere est vne fraction,

de

de laquelle le numerateur eſt vn nombre denommant des parties aliquotes en la raiſon. Comme le denominateur de la raiſon ſubtriple ſeſquiſeptiéme, eſt $\frac{7}{21}$. la ſubquintupleſeſquineufiéme eſt $\frac{6}{45}$. &c.

Or ce denominateur ſera trouué, ſi pour le numerateur de la fraction, on prend le denominateur de la partie aliquote, lequel eſtant multiplié par le denominateur de la raiſon multiple, ſi l'on adiouſte l'vnité au produit, l'on aura le denominateur de la meſme fraction.

Comme pour exemple, le denominateur de la raiſon ſubquadruple ſeſquiſexte eſt $\frac{6}{25}$. d'autant que le numerateur 6. denomme les parties ſixiémes, & iceluy multiplié par 4. denominateur de la raiſon quadruple, & ayant adiouſté au produit 24. l'vnité, afin que le denominateur de la meſme fraction ſoit faict 25. &c. Autrement, l'on trouuera le meſme denominateur, ſi l'on reduit en vne fraction, le denominateur de la raiſon multiple ſuperparticuliere correſpondante, comme nous auons dit cy-deſſus.

Comme ſi l'on propoſe la raiſon ſubquadruple ſeſquiſexte : d'autant que le denominateur de la raiſon quadruple ſexquiſexte correſpondante eſt $4\frac{1}{6}$. laquelle ſera reduite à $\frac{25}{6}$. dont ſi on change l'ordre des termes d'icelle fraction, on aura $\frac{6}{25}$. pour le denominateur de la raiſon ſubquadruple ſeſquiſixiéme : & ainſi des autres.

Les denominateurs de quelconque raiſon multiple ſuperpartiente, eſt vn nombre entier denommant la raiſon multiple exprimée en icelle, auec les parties aliquotes, que doit contenir la plus

grande quantité par deſſus la moindre, leſquelles parties aliquotes ne conſtituent vne partie aliquote. Comme le denominateur de la raiſon triple-ſuperquinpartiente huictiéme eſt $3\frac{5}{8}$. de la quadruple ſuperbipartiente cinquiéme eſt $4\frac{2}{5}$.

Et pour trouuer les denominateurs il n'y a aucune difficulté, puis qu'ils ſont exprimez diſtinctement & apertement en chaque raiſon propoſée, multiple ſuperpartiente, ſçauoir tant le denominateur de la raiſon multiple, contenus en icelle, que les parties aliquotes, comme il eſt manifeſté par les exemples propoſez. Mais le denominateur de quelconque raiſon ſubmultiple ſuperpartiente, eſt vne fraction de laquelle le numerateur eſt vn nombre, denommant les parties aliquotes d'icelle raiſon.

Comme le denominateur de la raiſon ſubtriple ſuperquintupartiente huictiémes, eſt $\frac{1}{29}$. ſubquadruple ſuperbipartiente cinquiémes, eſt $\frac{1}{22}$. Or le denominateur de ces raiſons ſubmultiples ſuperpartientes ſera trouué, ſi pour le numerateur de la fraction, on prend le denominateur des parties aliquotes, lequel eſtant multiplié par le denominateur de la raiſon multiple, & ayant adiouſté au produict, le nombre des parties aliquotes, l'on obtiendra le denominateur de la meſme fraction.

Comme le denominateur de la raiſon ſubdouble ſuperoctupartiente treiziémes, eſt $\frac{11}{34}$. parce que le numerateur de cette fraction 15. denomme les parties treiziémes, lequel multiplié par 2. denominateur de la raiſon double, & au nombre produict 26. on adiouſte le nombre des 8. parties, on fera 34. denominateur de la meſme fraction, &c.

Autrement,

Autrement, l'on trouuera le meſme denominateur, reduiſant le denominateur de la raiſon correſpondante, en vne fraction, & tranſpoſant les termes, comme nous auons deſia dit cy-deuant.

Comme pour exemple, ſoit propoſée la raiſon, ſubquintuple, ſupertripartiente dixiémes, pour trouuer le denominateur d'icelle, l'on reduira en vne fraction, le denominateur de la raiſon correſpondante quintuple ſupertripartiente dixiémes, qui eſt $5\frac{1}{10}$. & l'on aura cette fraction $\frac{51}{10}$. & en permutant les termes, c'eſt à dire poſant 10. au lieu de 51. & 51. au lieu de 10. l'on aura $\frac{10}{51}$. pour le denominateur de la raiſon ſubquintuple, ſupertripartiente dixiémes, & ainſi des autres.

Finalement, le denominateur de la raiſon d'egalité eſt touſiours l'vnité; d'autant qu'en cette raiſon, les quantitez doiuent eſtre égales entr'elles: & partant l'vne doit contenir l'autre vne fois, & non plus: ce que ſignifie l'vnité.

5. Les grandeurs ſont dictes auoir raiſon l'vne à l'autre, leſquelles eſtans multipliées, ſe peuuent exceder l'vne l'autre.

D'autant qu'Euclide, en la troiſiéme definition a appellé l'habitude de deux grandeurs de meſme genre, raiſon, il enſeigne maintenant en ceſte cinquiéme definition, quelle choſe eſt requiſe, afin que deux quantitez de meſme genre, ſoient dictes auoir raiſon entr'elles, diſant que les grandeurs

ſont dictes auoir raiſon entr'elles, deſquelles, laquelle que l'on voudra eſtant multipliée, peut eſtre augmentée de telle ſorte qu'elle excede l'autre, comme le diametre & le coſté d'vn meſme quarré, ſeront dicts auoir raiſon, combien qu'elle ſoit irrationelle, laquelle ne ſe peut exprimer par aucun nombre, d'autant que le coſté multiplié par 2. ou pris 2. fois, excede le diametre. Car puis que les deux coſtez du quarré auec le diametre conſtituent vn triangle Iſoſcele,[a] les deux coſtez du quarré ſeront plus grands que le diametre d'iceluy.

a 20. 1.

Ainſi pareillement la circonference du cercle, & le diametre d'iceluy auront raiſon, (combien qu'elle ne ſoit encore cogneuë) d'autant que le diametre multiplié par 4. ou pris 4. fois, excede la circonference, puis que toute circonference de cercle, comme il eſt demonſtré par Archimede, contient tant ſeulement trois fois le diametre du meſme cercle, & de plus vne particule, peu moindre que la ſeptiéme partie du diametre.

En la meſme maniere, pluſieurs figures curuilignes auront raiſon auec des figures rectilignes, comme a monſtré Procus ſur le premier d'Euclide. Or comme diſent quelques Interpretes, toutes les lignes ny tous les angles plans n'ont pas raiſon entr'eux, ſelon ceſte definition: car vne ligne finie, diſent-ils, n'a aucune raiſon à vne ligne infinie, puis qu'en quelque maniere qu'elle ſoit multipliée, elle ne peut exceder la ligne infinie, ny vn angle rectiligne n'a raiſon à vn angle de contingence. Car l'angle de contingence ne peut exceder vn angle rectiligne.

16. 3.

6. Les

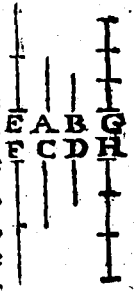
6. Les grandeurs ſont dictes eſtre en meſme raiſon, la premiere à la ſeconde, & la troiſieſme à la quatrieſme, quand les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme, aux equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme, par quelque multiplication que ce ſoit, ou defaillent enſemble, ou enſemble ſont égaux, ou excedent enſemble vn chacun à vn chacun, ſi l'on prend ceux-là qui s'entre-reſpondent.

Euclide monſtre en ce lieu, quelles conditions ſont requiſes aux magnitudes, pour eſtre dictes auoir meſme raiſon, ce que pour expoſer, il eſt contraint de ſe ſeruir des equimultiples d'icelles, afin qu'il comprenne toutes les raiſons des grandeurs, tant rationelles que irrationelles.

Soient donc quatre grandeurs A, premiere, B, ſeconde, C, troiſieſme, D, quatrieſme, & ſoient priſes les equimultiples quelconques de la premiere A, & de la troiſieſme C, ſçauoir E, equimultiple de A, & F, de C. Item, ſoient priſes autres quelconques equimultiples, de la ſeconde B, & de la quatrieſme D, ſçauoir G, equimultiple de B, & H, de D, ſoit que ces deux dernieres ſoient autant multiples de la ſeconde, & de la quatriéme, que les deux premieres le ſont de la premiere & de la troiſieſme ou non.

Que ſi maintenant l'on confere entr'elles les

grandeurs qui ont eſté priſes equimultiples, ſçauoir celles qui s'entre-reſpondent, comme la multiple de la premiere, & la multiple de la ſeconde, qui ſont E, & G. Item, la multiple de la tierce, & la multiple de la quatriéme entr'elles, ſçauoir F, & H, & s'il ſe trouue touſiours qu'elles ont vn tel rapport l'vne à l'autre, que ſi E, multiple de la premiere grandeur, A, eſt moindre que G, multiple de la ſeconde grandeur B, que F, multiple de la troiſieſme grandeur C, ſoit auſſi moindre que H, multiple de la quatriéme grandeur D: ou ſi E, eſt égale à G, auſſi F, ſoit égale à H: ou finalement, ſi E, eſt plus grande que G, auſſi F, ſoit plus grande que H, ce qui eſt defaillir enſemble l'vn & l'autre, de l'vn & de l'autre, ou eſtre égaux enſemble, ou exceder enſemble: de ſorte qu'en aucun genre de multiples le contraire ne ſe puiſſe trouuer: c'eſt à dire, que E, ne ſoit iamais moindre que G, que F, ne ſoit auſſi moindre que H, & que iamais E, ne ſoit égale à G, ſi F, n'eſt auſſi égale à H, & finalement que E, ne ſoit iamais plus grande que G, que F, ne ſoit auſſi plus grande que H.



Si donc on trouue que les equimultiples priſ en quelque façon que ce ſoit, ſe rapportent perpetuellement entr'eux, comme dit eſt, l'on dira qu'il y a meſme raiſon de la premiere grandeur A, à la ſeconde B, que de la troiſieſme grandeur C, à la quatrieſme D: Que ſi on trouuoit quelques fois, meſme en vn ſeul genre des multiples, que le multiple E, defaut du multiple de G, mais le multiple

ple F, ne defaut de H, ou que E, eſt égal à G, & F, n'eſt égal à H : ou finalement E, excede G, & F, n'excede H, combien qu'en infinies autres façons de multiples ; la ſuſdite condition ſe trouue en aucune façon, les grandeurs propoſées ne ſeront dictes auoir meſme raiſon entr'elles : mais diuerſes, comme il ſera manifeſte de la huictieſme definition.

Au contraire, s'il y a meſme raiſon de la premiere à la ſeconde, comme de la troiſieſme à la quatrieſme, il s'enſuiura que les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme, ſeront toutes deux égales, aux equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme, ou toutes deux moindres, ou toutes deux plus grandes en quelconque multiplication que ce ſoit.

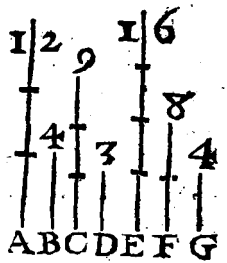
Et s'il n'y auoit meſme raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la troiſiéme à la quatriéme, auſſi les equimultiples de la premiere & troiſiéme n'excederont enſemble les equimultiples de la ſeconde & quatrieſme, ou ne ſeront égales ou plus petites, &c.

Or il faut noter icy, que ceſte definition ſe doit auſſi prendre de trois grandeurs, pourueu que la ſeconde ſoit priſe deux fois, afin d'en auoir quatre, &c.

7. Les grandeurs qui ont meſme raiſon, ſoient appellées analogues, ou proportionnelles.

Comme ſi des grandeurs A, B, C, D, il y a meſme raiſon de A, à B, que de C, à D, icelles grandeurs

deurs A,B,C,D, ſeront dictes proportionnelles : ſemblablement, s'il y a meſme raiſon de E, à F, que de F, à G, les grandeurs E, F, G, ſeront dictes proportionnelles. Or il y a quelques magnitudes proportionnelles continuellement : entre leſquelles ſe trouue la proportion continuë, comme ſont les grandeurs E, F, G : mais quelques vnes ſont proportionnelles non continuellement, mais ſeparément, comme ſont les grandeurs A,B,C,D : car en ceux-cy, y a interruption de raiſons, mais en ceux-là non, comme il eſt dit en la quatriéme definition.



8. Mais quand les equimultiples, le multiple de la premiere grandeur excedera celuy de la ſeconde ; mais le multiple de la troiſieſme grandeur, n'excedera pas celuy de la quatrieſme, alors la premiere grandeur ſera dicte auoir plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme.

Euclide declare en ceſte definition, quelle condition doiuent auoir quatre grandeurs, afin que la premiere ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme, diſant que ſi on prend les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme ; ſemblablement autres equimultiples

tiples de la ſeconde & de la quatrieſme, & qu'il ſe trouue quelques-fois (bien que non pas touſiours) que le multiple de la premiere grandeur ſoit plus grand que le multiple de la ſeconde : mais le multiple de la troiſieſme, n'eſt pas plus grand que le multiple de la quatrieſme ; mais moindre ou égal, l'on dira qu'il y aura plus grande raiſon de la premiere grandeur à la ſeconde, que de la troiſieſme à la quatrieſme, comme il eſt manifeſte en l'exemple propoſé, auquel l'on a pris les doubles de la premiere grandeur A, & de la troiſieſme C, ſçauoir E, & F ; mais de la ſeconde B, & de la quatrieſme D, l'on a pris les triples G, & H. Et d'autant que E, multiple de la premiere, eſt plus grand que G, multiple de la 2. mais F, multiple de la 3. n'eſt pas plus grand que H, multiple de la 4. mais moindre, l'on dira qu'il y aura plus grande raiſon de A, premiere grandeur à B, ſeconde, que de C, troiſiéme, à D, quatriéme.



Or il n'eſt pas neceſſaire, afin que de quatre grandeurs, la 1. ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la 2. que la 3. à la 4. que les equimultiples, ſelon quelconque multiplication, ayent telle habitude que le multiple de la 1. excede le multiple de la 2. mais que le multiple de la 3. n'excede le multiple de la 4. Mais c'eſt aſſez que ſelon quelque multiplication ils ayent telle habitude : car il ſe peut faire quelquefois que tant le multiple de la 1. eſt plus grand que le multiple de la 2. que le multiple de la 3. de celuy de la 4. Semblablement, que

comme

comme le multiple de la 1. eſt moindre que le multiple de la 2. que celuy de la 3. eſt auſſi moindre que celuy de la 4. Toutesfois, d'autant que cela n'aduient pas en toute multiplication; mais quelquefois le multiple de la 1. excede celuy de la 2. mais le multiple de la 3. eſt moindre ou égal au multiple de la 4. pour ceſte cauſe, la 1. grandeur ſera dicte auoir plus grande raiſon à la 2. que la 3. à la 4. & non meſme comme l'on void en l'exemple propoſé, où 3. a plus grande raiſon à 2. que 4. à 3.

15. 9. 12. 3. 2. 10. 18. 14.

10. 12. 16. 4. 3. 15. 12. 21.

Donc, afin que quatre grandeurs ſoient dictes proportionnelles, il eſt neceſſaire que les equimultiples d'icelles, priſes ſelon quelconque multiplication, defaillent enſemble, ſoient égales enſemble, ou excedent enſemble, comme il a eſté expoſé en la 6. definition.

Mais afin que la premiere ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la 2. que la 3. à la 4. Il ſuffit que ſelon quelque multiplication, le multiple de la 1. excede le multiple de la 2. mais celuy de la 3. n'excede celuy de la 4. encore que ſelon infinies autres multiplications, les equimultiples de la 1. & de la 3. excedent enſemble les equimultiples de la 2. & de la 4. &c.

Mais ſi au contraire le multiple de la 1. grandeur, defaut du multiple de la 2. le multiple de la 3. ne defaut du multiple de la 4.: la 1. grandeur ſera dicte auoir moindre raiſon à la 2. que la 3. à la 4. combien que ſelon pluſieurs autres multiplications, les equimultiples de la 1. & de la 3. defaillent enſemble des equimultiples de la 2. & de la 4.

comme

comme l'on voit aux mesmes nombres de l'exemple proposé, la raison de 2. à 3. sera moindre que 3. à 4. &c.

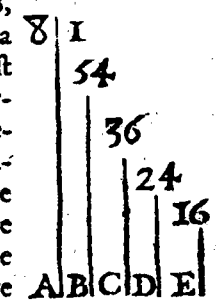
9. La proportion ne peut estre constituée en moins de trois termes.

D'autant que toute Analogie, qui est dite proportion, est vne similitude de raisons, & qu'en toute raison il y a le terme antecedent, & le terme consequent; il est necessaire qu'en toute proportion, il y ait à tout le moins deux termes antecedens, & deux consequens. Partant, si la proportion n'est continuë, seront requis, à tout le moins quatre termes ou grandeurs: mais si la proportion est continuë, il y aura du moins trois termes, d'autant que celuy du milieu est pris deux fois, puis qu'il est consequent d'vne raison, & antecedent de l'autre: & c'est icy le moindre nombre des termes de la proportion. Car en deux termes quelconques se trouue seulement raison, & non proportion.

10. Quand il y a trois grandeurs proportionnelles, la premiere à la troisiesme, est dicte auoir la raison doublée de la premiere à la seconde: mais quand quatre grandeurs sont proportionnelles, la premiere à la quatriesme, est dicte auoir la raison triplée, de la premiere à la seconde, & touſiours de mesme ordre, vne de plus, iusqu'à ce que la proportion soit accomplie.

Comme

Comme ſi les grandeurs A,B,C,D,E,ſont continuellement proportionnelles, de ſorte qu'il y ait meſme raiſon de A à B, que de B à C, & de C à D, & D à E. La raiſon de la premiere grandeur A, à la troiſiéme grandeur C, ſera dicte doublée de la raiſon que la premiere grandeur A, a à la ſeconde grandeur B, d'autant qu'entre A, & C, y a deux raiſons, leſquelles ſont égales à la raiſon de A à B, à ſçauoir la raiſon de A à B, & de B à C. De ſorte que la raiſon de A à B, doublée, c'eſt à dire miſe deux fois d'ordre: mais la raiſon de la premiere grandeur A, à la quatrieſme D, eſt dicte triplée de la raiſon, que la premiere grandeur A, a à la ſeconde grandeur B, d'autant qu'entre A, & D, ſont trois raiſons,



qui ſont égales à la raiſon de A à B, à ſçauoir la raiſon de A à B, de B à C, & de C à D, tellement que la raiſon de A à D, enclos ou comprend en quelque façon, la raiſon de A à B, triplée, c'eſt à dire poſée trois fois d'ordre. Ainſi pareillement la raiſon de A à E, ſera dicte quadruplée de la raiſon de A à B, d'autant que quatre raiſons ſe trouuent entre A & F, qui ſont égales à la raiſon de A à B, &c.

Que ſi au contraire, y a meſme raiſon de E à D, que de D à C, & de C à B, que de B à A; la raiſon de E à C, ſera dicte doublée de la raiſon de E à D: mais la raiſon de E à B, ſera dicte triplée de la raiſon de E à D: ainſi pareillement la raiſon de E à A, ſera dicte quadruplée de la raiſon de E à D, &c.

11. Les grandeurs ſont dictes Homologues, ou de ſemblable raiſon, les antecedentes aux antecedentes, & les conſequentes aux conſequentes.

Il a deſiny auparauant que la proportion eſt vne ſimilitude de raiſons, il enſeigne maintenant que non ſeulement en quelque proportion les raiſons ſont dictes ſemblables, mais auſſi les termes meſmes, ou quantitez, ſont dictes ſemblables ou homologues, diſant que les grandeurs antecedentes ſont appellées homologues, ou ſemblables entr'elles en raiſon: & de meſmes les conſequentes entr'elles: afin d'entendre en pluſieurs demonſtrations, quels coſtez des figures, comparez entr'eux, doiuent eſtre les antecedents des raiſons, & quels les conſequents, comme il ſera declaré au 6. liure.

S'il y a donc meſme raiſon de A à B, que de C à D, la quantité A, ſera dicte ſemblable à la quantité de C, & B, ſemblable à D: car, à cauſe de la ſimilitude des raiſons, il eſt neceſſaire, que l'vne & l'autre grandeur antecedente, ſoit égale à l'vne & l'autre conſequente, ou de meſme façon, plus grande ou plus petite, autrement l'vne & l'autre antecedente n'auroit meſme raiſon à l'vne & l'autre conſequente. En voicy l'exemple.



Aux magnitudes propoſées, auſquelles les antecedentes ſont en meſme façon plus grandes que les conſequentes, à ſçauoir la moitié plus grandes: En voicy vn autre exemple.

Aux

Aux magnitudes continuellement proportionnelles E,F,G,où tant E & F,ſont homologues que F, & G, comme il eſt manifeſte, & pour ceſte cauſe, Euclide en la ſixiéme & huictiéme Definition, commande de prendre les equimultiples de la 1. & 3. grandeur, c'eſt à dire des antecedentes: ſemblablement de prendre autres equimultiples de la 2.& 4.grandeurs:à ſçauoir des conſequentes, car elles ſont ſemblables aux magnitudes proportionelles,comme il eſt manifeſte par ceſte Definition : mais aux grandeurs non proportionelles, ſont diſſemblables.

12. La raiſon alterne,eſt prendre l'antecedent, comparé à l'antecedent, & le conſequent au conſequent.

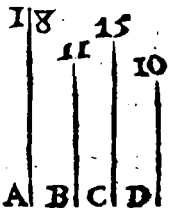
Il explique icy quelques façons d'argumenter aux proportions, dont l'vſage eſt fort frequent entre les Geometres,leſquelles façons d'argumenter ſont 6.en nombre: La 1.eſt dite raiſon alterne, ou permutée : la 2. eſt dite inuerſe, ou raiſon au contraire : la 3.compoſition de raiſon ou proportion conioincte : la 4. diuiſion de raiſon ou proportion diſioincte, ou ſeparée : la 5. conuerſion de raiſon, ou proportion renuerſée : finalement, la 6. eſt appellée raiſon d'égalité, ou égale proportion.

Donc raiſon alterne ou permutée eſt, dit-il, quand quatre grandeurs proportionelles eſtans propoſées, l'on infere qu'il y a meſme raiſon de l'antecedent de la premiere raiſon, à l'antecedent de la derniere, que du conſequent de la premiere,

au

au conſequent de la derniere : comme ſi nous poſons qu'il y ait meſme raiſon de A à B, que de C à D : & partant nous concluons, qu'il y a meſme raiſon de A à C, que de B, à D, nous ſommes dicts argumenter en raiſon permutée.

Les Autheurs Grecs vſent en cette argumentation preſque de ceſte façon de parler : comme A, eſt à B, ainſi C, eſt à D : donc en permutant, ou au contraire, A, ſera à C, comme B, à D. Or nous demonſtrerons la verité de ceſte illation à la 16. Propoſition de ce liure. Et en ceſte façon d'argumenter, il eſt neceſſaire que toutes les quatre grandeurs ſoient de meſme genre, afin qu'il puiſſe y auoir raiſon entre icelles, priſes deux à deux, comme l'on voudra : car ce n'eſt pas bien argumenter de dire, comme la ligne A, eſt à la ligne B, ainſi le nombre C, au nombre D : donc en permutant, comme la ligne A, au nombre C, ainſi la ligne B, au nombre D : attendu qu'il n'y a aucune proportion d'vne ligne à vn nombre : & au contraire, comme il eſt manifeſte de la cinquieſme Definition.



Mais aux autres façons d'argumenter ſuiuantes, les premieres grandeurs peuuent eſtre d'vn genre de quantité, & les dernieres d'vn autre, comme il ſera manifeſte par les demonſtrations de ce cinquieſme liure.

13. Raison inuerse ou transposée, est prendre le consequent comme antecedent, pour le comparer à l'antecedent, comme si c'estoit le consequent.

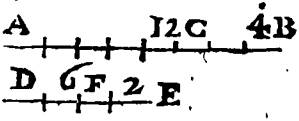
Comme si d'autant que A, est à B, comme C, est à D, nous inferons que B, est à A, comme D, est à C, (voyez la figure precedente,) nous serons dits argumenter par raison inuerse. En ceste maniere d'argumenter les Autheurs parlent quasi en ceste façon comme A, est à B, ainsi C, est à D, donc en changeant, ou au contraire B, sera à A, comme D à C : laquelle maniere d'argumenter sera demonstrée estre veritable au Corollaire de la quatriesme Proposition de ce liure.

Finalement, les deux premieres grandeurs peuuent estre d'vn genre, & les dernieres d'vn autre: car l'on pourra fort bien inferer, comme la ligne A, est à la ligne B : ainsi le triangle ou le nombre C, est au triangle, ou au nombre D. Donc en changeant, comme la ligne B, est à la ligne A, ainsi le triangle ou le nombre D, est au triangle, ou au nombre C, comme il sera euident par le Corollaire de la 4. Proposition.

14. Composition de raison, est quand l'on prend l'antecedent auec le consequent, comme vn, pour le comparer au mesme consequent.

Comme s'il y a mesme raison de A C, à C B, que de D F, à F E : & de là on collige qu'il y a mesme

meſme raiſon de la toute A B, à ſçauoir de l'antecedent auec le conſequent ; à C B, conſequent, que de la toute D E (ſçauoir l'antecedent auec le conſequent) à F E, conſequent. Cette façon d'argumenter ſera appellée compoſition de raiſon, d'autant que de l'antecedent, & du conſequent eſt compoſé vn autre nouueau antecedent.



Or les Autheurs Grecs vſent de ceſte façon de parler en ceſte argumentation, Comme A C, eſt à C B, ainſi D F, à F E : donc en compoſant comme A B, ſera à C B, ainſi D E, à F E, ceſte maniere d'argumenter ſera demonſtrée à la 18. Propoſition de ce liure.

L'on peut adiouſter deux autres moyens d'argumenter à celuy cy. Le premier peut eſtre dit, compoſition de raiſon conuerſe ; à ſçauoir lors qu'on prend l'antecedent & conſequent comme vn, pour le comparer à l'antecedent : comme ſi d'autant que A C, eſt à C B, ainſi D F, à F E, nous inferons, donc comme A B, compoſée de l'antecedent & du conſequent, eſt à l'antecedent A C, ainſi D E, compoſée de l'antecedent & du conſequent eſt à l'antecedent D F : lequel moyen d'argumenter nous monſtrerons eſtre vallable à la 18. Propoſition de ce liure, en laquelle nous pourrons vſer de ceſte maniere de parler ; donc par compoſition de raiſon conuerſe.

L'autre maniere d'argumenter peut eſtre dicte compoſition de raiſon contraire, laquelle ſe faict lors que l'on compare vne meſme grandeur antecedente, à l'antecedente, & à la conſequente

comme à vne seule ; comme si A C, est à C B, ainsi D F, est à F E, & nous inferons par composition de raison contraire : donc comme A C, antecedente, est à la toute A B, composée de l'antecedente & de la consequente : ainsi D F, antecedente, sera à D E, composée de l'antecedente & de la consequente. Et nous demonstrerons ceste maniere d'argumenter vallable à la 18. Prop. de ce liure.

15. Diuision de raison, est lors qu'on prend l'excez, par lequel l'antecedent surpasse le consequent, pour le comparer au mesme consequent.

Comme si l'on dit, qu'il y ait mesme raison de la toute A B, à C B, que de la toute D E, à F E, (voyez la precedente figure :) donc il y aura mesme raison de A C, excez par lequel l'antecedent surpasse le consequent à C B, consequent, que de D F, excez par lequel l'antecedent surpasse le consequent à F E, consequent.

Or en cette diuision de raison, les Autheurs parlent ainsi ; donc en diuisant, &c. Mais ceste illation sera demonstrée à la 17. Proposition de ce liure.

Or à ce moyen d'argumenter, l'on y en peut adiouster deux autres, le premier desquels nous pouuons appeller diuision de raison conuerse, à sçauoir quand le consequent est comparé à l'excez, par lequel l'antecedent surpasse le consequent. Comme si A B, est à C B, ainsi D E, est à F E, & nous concluons par diuision de raison conuerse, donc comme C B, consequent, sera à A C, excez par lequel l'antecedent surpasse le consequent,

ainsi

ainſi F E, conſequent, ſera à D F, excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le conſequent ; mais nous demonſtrerons la certitude de ceſte maniere d'argumenter à la 17. Propoſition de ce liure.

Or il eſt manifeſte, qu'afin que l'vne & l'autre de ces façons d'argumenter ait lieu, ſçauoir celle-cy, & celle d'Euclide, que l'antecedent doit eſtre plus grand que le conſequent, autrement la diuiſion ne ſe pourroit faire.

L'autre moyen d'argumenter, ſe peut appeller diuiſion de raiſon contraire, qui ſe faict quand l'antecedent eſt comparé auec l'excez, par lequel le conſequent ſurpaſſe l'antecedent, comme quand nous diſons : comme A C, eſt à A B, ainſi D F, eſt à D E : donc par diuiſion de raiſon contraire A C, antecedent, ſera pareillement à C B, excez par lequel le conſequent ſurpaſſe l'antecedent, comme D F, antecedent eſt à F E, excez par lequel le conſequent ſurpaſſe l'antecedent : laquelle maniere d'argumenter nous demonſtrerons auſſi en la 17. Propoſition de ce liure.

Finalement, il eſt manifeſte, qu'en cette diuiſion de raiſon contraire, que le conſeqnent doit eſtre plus grand que l'antecedent, afin que l'on puiſſe prendre l'excez, par lequel le conſequent, ſurpaſſe l'antecedent.

16. Conuerſion de raiſon, eſt prendre l'antecedent, pour le comparer à l'excez, par lequel l'antecedent ſurpaſſe le meſme conſequent.

Comme ſi nous diſons en cette maniere : comme toute la grandeur A B, eſt à C B, ainſi la toute D E, eſt à F E, donc auſſi, la meſme A B, ſera à A C, excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le conſequent, comme D E, eſt à D F : nous ferons dicts argumenter par conuerſion de raiſon : dont les Autheurs parlent preſque en cette maniere. Donc par conuerſion de raiſon, &c. mais ce moyen d'argumenter ſera confirmé au Corollaire de la 19. Prop. de ce liure. Voyez la figure precedente.

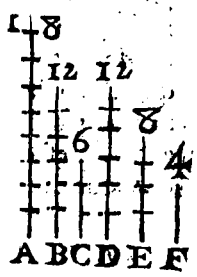
Il eſt auſſi euident, qu'en ce moyen d'argumenter par conuerſion de raiſon, que l'antecedent doit excedez le conſequent, afin que l'excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le conſequent, puiſſe eſtre pris.

17. Raiſon égale ou de l'egalité, eſt quand il y a pluſieurs grandeurs, & d'autres égales à icelles en multitude, qui ſoient priſes deux à deux, & en meſme raiſon : quand comme aux premieres grandeurs, la premiere eſt à la derniere des meſmes ; ainſi aux ſecondes grandeurs, la premiere eſt à la derniere des meſmes. Autrement, c'eſt prendre les extremes par la ſouſtraction des moyennes.

Soient pluſieurs grandeurs A, B, C, d'vne part, & autant de l'autre, D, E, F, leſquelles ſoient priſes de deux en deux, en meſme raiſon, c'eſt à dire, comme A, eſt à B, ainſi D, eſt à E, & comme B, eſt à C, ainſi E, eſt à F. Si donc pour cette cauſe l'on

infere

infere qu'il y a meſme raiſon de A, premiere des premieres grandeurs à C, derniere des meſmes, que de D, premiere des ſecondes grandeurs à F, derniere des meſmes, cette façon d'argumenter ſera appellée raiſon égale, ou raiſon d'egalité, à ſçauoir, en laquelle les grandeurs extremes ayans ſouſtrait les moyennes, ſont dites auoir vne meſme raiſon entr'elles, comme il eſt exprimé en l'autre Definition.

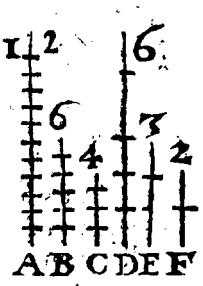


Mais d'autant qu'il eſt permis d'argumenter aux proportions en deux manieres, par l'egalité; à ſçauoir en l'vne, quand nous prenons les grandeurs de deux en deux, en meſme raiſon, en procedant d'ordre; & en l'autre quand l'ordre eſt changé. Euclide explique aux deux Definitions ſuiuantes, que c'eſt que proportion ordonnée, & proportion perturbée ou troublée.

18. Proportion ordonnée eſt, lors que, comme l'antecedent eſt au conſequent, ainſi l'antecedent eſt au conſequent; & comme le conſequent eſt à quelqu'autre, ainſi le conſequent eſt auſſi à quelqu'autre.

Comme ſi A, eſt à B, ainſi D, eſt à E: & derechef, comme B, conſequent eſt à quelqu'autre, ſçauoir à C, ainſi E, conſequent, eſt à quelqu'autre, comme à F. Telle façon d'argumenter ſera

appellée ordonnée : & d'autant qu'on garde vn meſme ordre, tant aux premieres grandeurs qu'aux ſecondes, puis que de part & d'autre, l'on compare premierement la premiere auec la ſeconde, & puis apres la ſeconde auec la tierce. Donc quand en la maniere d'argumenter par egalité, la proportion ordonnée eſt gardée, il eſt demonſtré en la Propoſition 22. de ce liure, que ce moyen d'argumenter eſt bon.

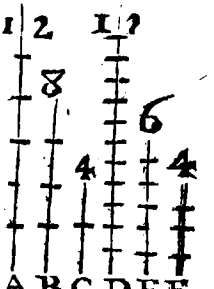


19. Proportion perturbée eſt, lors que trois grandeurs ſont poſées d'vne part & d'autre, égales en multitude à icelles, & comme aux premieres grandeurs, l'antecedent eſt au conſequent, ainſi aux ſecondes grandeurs, l'antecedent eſt au conſequent : mais comme aux premieres grandeurs, le conſequent eſt à quelqu'autre, ainſi aux ſecondes grandeurs quelqu'autre eſt à l'antecedent.

C'eſt à dire, quand trois grandeurs ſont poſées d'vne part, & autant d'vne autre, la premiere des premieres, eſt à la ſeconde des meſmes, comme la ſeconde des ſecondes, à la troiſieſme des meſmes, & comme la ſeconde des premieres eſt à la troiſieſme des meſmes, ainſi la premiere des ſecondes, eſt à la ſeconde des meſmes.

Comme

Comme s'il y a meſme raiſon de A à B, que de E à F, puis apres aux premieres grandeurs, comme B, conſequent eſt à quelqu'autre, ſçauoir à C: ainſi aux ſecondes grandeurs quelqu'autre, à ſçauoir D, eſt à E, antecedent. Et cette façon d'argumenter ſera appellée proportion perturbée, d'autant qu'on n'obſerue pas meſme ordre aux proportions des magnitudes, d'autant qu'aux premieres grandeurs, la premiere eſt comparée auec la ſeconde: mais aux ſecondes grandeurs, la ſeconde eſt comparée auec la tierce: & derechef aux premieres grandeurs, la ſeconde eſt comparée à la tierce, mais aux ſecondes, la premiere eſt comparée auec la ſeconde. Donc quand en la maniere d'argumenter par l'egalité, l'on obſerue la proportion troublée, il eſt demonſtré que cette argumentation eſt bonne, en la 23. Propoſition de ce liure.



Finalement, tant la proportion troublée, qu'ordonnée, infere touſiours par egalité, qu'il y a meſme proportion des extremes, bien que l'on poſe plus de trois grandeurs, comme il ſera manifeſte de la 22. & 23. Prop. de ce liure.

SCHOLIE.

Auparauant que de paſſer outre, ie diray icy que pluſieurs croyent (comme i'ay peû entendre d'eux-meſmes) qu'Euclide s'eſt trompé icy en quelques endroits, & ſpecialement en donnant la 6. & 8.

Definit.entant (diſent-ils) qu'elle paroiſt auſſi obſcure,ou plus,que la choſe definie. Car diſant,qu'il y a meſme raiſon de la premiere grandeur à la 2. que de la 3.à la 4.ſi les equimultiples de la 1.& de la 3. ſont tous deux plus grands, ou tous deux égaux, ou tous deux moindres, que les equimultiples de la 2. & de la 4. en quelque multiplication que ce ſoit, eſtans pris comme ils s'entre-reſpondent. *Cela eſt plus obſcur, que ſi l'on diſoit* : Quand les meſmes parties de la 1.& 3. &c. C'eſt à dire,qu'il deuoit ainſi la faire entendre.

Les grandeurs ſont dites auoir meſme raiſon, la 1.à la 2.& la 3.à la 4.ſi meſmes parties de la 1.& 3. ſont toutes deux plus grandes,ou toutes deux egales, ou toutes deux moindres,que meſmes parties de la 2. & de la 4.chacune à la ſienne.Comme pour exemple, que A,premiere,aura meſme raiſon à B,2. que C, 3. à D, 4. ſi en prenant les moitiez de A,& de C, premiere & 3. ou autres telles meſmes parties que l'on voudra ; & ſemblablement en prenant telles meſmes parties que l'on voudra de B,& D,2.& 4. Il ſe trouue que les parties de la 1. & 3. ſoient toutes deux plus grandes, que celles de la 2. & de la 4. ou toutes deux égales, ou toutes deux moindres chacune à la ſienne, & que cela eſt plus ſenſible & plus cogneu ; car en montant par la multiplication, cela s'eſloigne plus des ſens, par leſquels la cognoiſſance des choſes eſt communiquée à noſtre intellect, ce qui eſt contre le bon vſage du raiſonnement.



Mais ſi ceux qui le condamnent font reflection

ſur

ſur cette remarque, ils trouueront qu'il ne pouuoit definir, la meſme raiſon *(laquelle conuient auſſi aux nombres) auec plus d'addreſſe : car il euſt peu proceder par la voye de la diuiſion, auſſi bien que par la voye de la multiplication ; mais cela euſt apporté de l'obſcurciſſement à cette Definition, par ce qu'il arriue vn inconuenient en la diuiſion des nombres, qui eſt, qu'elle ne ſe peut pratiquer à l'infiny, ſans eſtre reduite au terme de l'vnité, qui ne ſe peut plus partager.*

Et Euclide voulant parler, de la meſme raiſon, *qui eſt commune, tant en la quantité continue que diſioincte, il ne pouuoit proceder auec plus de dexterité, qu'en ſe ſeruant de la multiplication qui conuient à l'vne & à l'autre de ces quantitez. C'eſt pourquoy il a tres-bien remarqué, que ce genre de quantité eſtant impropre ou analogue, au regard de la continue & de la diſioincte ; ces quantitez, par le droit d'analogie, conuiennent en quelque choſe auec leur ſuperieur ou genre, & en partie qu'ils en different, en meſme façon que les Philoſophes recognoiſſent que ce ſuperieur,* Moitié, *comme moitié de 10. ſçauoir 5. & moitié de 12. ſçauoir 6. eſt vn terme analogue, par ce que 6. & 5. conuiennent en partie en ce terme de* moitié, *& diſconuiennent, en ce que la moitié de l'vn eſt nombre pair, & la moitié de l'autre eſt nombre impair.*

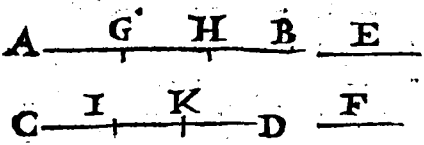
C'eſt donc la cauſe pourquoy Euclide s'eſt ſeruy de la multiplication, & non pas afin de comprendre toutes les raiſons tant rationelles qu'irrationelles, comme dit Clauius, & quelques autres Interpretes, puis que par la diuiſion, la raiſon irrationelle y peut auſſi bien eſtre compriſe que la rationelle. Car pour

exemple,

exemple, ſi l'on ſuppoſe deux quarrez inegaux, le coſté du moindre aura meſme raiſon à ſon diametre; que le coſté du plus grand au ſien: & ce d'autant que les moitiez ou autres parties telles que l'on voudra des coſtez, ſe trouueront toutes deux plus grandes, toutes deux égales, ou toutes deux moindres, que meſmes parties que l'on voudra des diametres, chacune à la ſienne, auſſi bien que les multiples; en quoy Clauius & autres apres luy ſe ſont trompez, croyans que c'eſt la raiſon pourquoy Euclide s'eſt ſeruy des equimultiples, pluſtoſt que des meſmes parties.

THEOREME 1. PROP. 1.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, égales en multitude à d'autres grandeurs, & equimultiples d'icelles, chacune de la ſienne; comme l'vne des grandeurs ſera multiple d'vne; ainſi les toutes ſeront multiples des toutes.



Soient tant de grandeurs que l'on voudra A B, C D, equimultiples, d'autant d'autres grandeurs E, F: Ie dis que les grandeurs A B, C D, enſemble, ſont autant multiples de E & F, enſemble, que A B, toute ſeule eſt multiple de E, toute ſeule, ou C D, de F.

Car

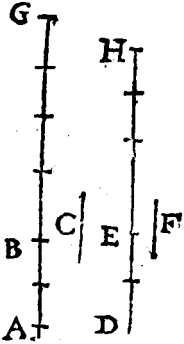
Car puis que A B, C D, ſont equimultiples de E, F, ſi A B, eſt diuiſée ſelon les grandeurs A G, G H, H B, égales chacune à E, & C D, pareillement, ſelon C I, I K, K D, égales chacune à F. Or chacune pourra eſtre diuiſée en parties totalement égales à E, & F, puis que A B, C D, ſont equimultiples de E, F, & partant E, ſera contenuë exactement autant de fois en A B, que F, en C D, comme il appert par la ſeconde definition de ce liure: les grandeurs A G, G H, H B, ſeront autant en nombre que C I, I K, K D: Mais d'autant que A G, & E, ſont égales entr'elles, ſi l'on leur adiouſte les égales C I, & F, A G, & C I, enſemble, ſeront égales à E & F, enſemble. Semblablement G H, & I K, enſemble, ſeront égales à E, & F, enſemble, & auſſi H B, & K D, aux meſmes E & F, donc autant de fois que E eſt contenuë en A B, ou F, en C D, autant de fois E & F, enſemble, ſeront contenuës en A B, C D, enſemble: partant comme A B, eſt multiple de E, ainſi A B, C D, enſemble, ſeront multiples de E & F, enſemble, par la ſeconde Definition de ce liure. Donc s'il y a tant de grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 2. c. ſ.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, que la troiſieſme l'eſt de la quatrieſme, & que la cinquieſme ſoit auſſi autant multiple de la ſeconde, que la ſixieſme l'eſt de la quatrieſme, la compoſée de la premiere & de la cinquieſme, ſera autant multiple de la ſeconde, que

que la compoſée de la troiſieſme, & de la ſixieſme l'eſt de la quatrieſme.

Soit la premiere grandeur A B, autant multiple de la ſeconde C, que D E, troiſieſme, l'eſt de F, quatrieſme. Derechef, ſoit B G, cinquieſme, autant multiple de C, ſeconde, que E H, ſixieſme, l'eſt de F, quatrieſme. Ie dis que A G, compoſée de la premiere A B, & de la cinquieſme B G, eſt autant multiple de C, deuxieſme, que D H, compoſée de la troiſieſme D E, & de la ſixieſme E H, eſt multiple de F, 4.



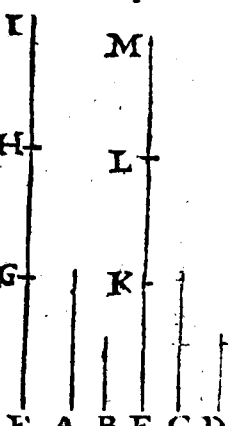
Car puis que A B, & D E, ſont equimultiples de C, & de F, il y aura en A B, autant de grandeurs égales à C, qu'il y a en D E, d'égales à F. Semblablement il y aura en B G, autant de grandeurs égales à C, qu'il y en a en E H, d'égales à F. Si donc l'on adiouſte à égales multitudes A B, D E, égales multitudes B G, E H, toutes les multitudes A G, D H, ſeront égales en nombre: partant C, ſera contenu autant de fois en A G, que F, eſt contenu en D H. Donc A G, (compoſée de la premiere & cinquieſme) ſera autant multiple de C, deuxieſme, que D H, (compoſée de la troiſieſme & ſixieſme) l'eſt de F, quatrieſme. Donc ſi la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO

THEOREME 3. PROP. 3.

Si la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, comme la troiſieſme l'eſt de la quatrieſme, & l'on prend les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme, en raiſon égale, la grandeur priſe multiple de la premiere, ſera auſſi autant multiple de la ſeconde, que la grandeur priſe multiple de la troiſieſme, le ſera de la quatrieſme.

Soit la premiere grandeur A, autant multiple de B, 2. que C, 3. l'eſt de D, 4. & que l'on prenne E & F, equimultiples de la 1. & de la 3. A, & C: ie dis qu'en raiſon égale E, ſera autant multiple de B, ſeconde, que l'eſt F, de D, quatrieſme : Car puiſque E & F, ſont equimultiples de A & C : ſi l'on diuiſe E, en grandeurs égales à A, comme en E G, G H, H I. Irem, F, en grandeurs égales à C, comme en F K, K L, L M : il y aura en E, autant de parties égales à A, qu'il y en a en F, d'égales à D : D'autant donc que E G, eſt égale à A, & F K, égale à C : mais A & C,



ſont equimultiples de B & D, par l'hypotheſe ; E G, & F K, ſeront auſſi

equimultiples

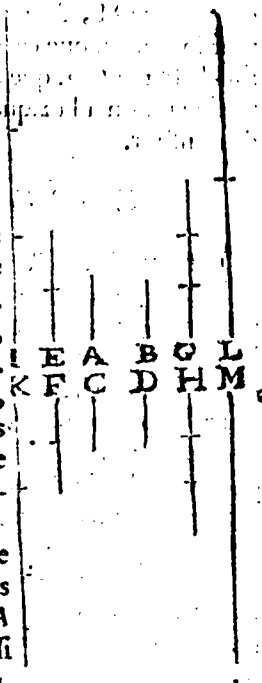
equimultiples des meſmes B & D : ſemblablement G H, K L, & H I, L M, ſeront equimultiples des meſmes B & D : D'autant donc que E G, premiere grandeur, eſt autant multiple de la ſeconde B, que
2. 5. F K, tierce, eſt multiple de la 4. D. Item, G H, cinquieſme eſt autant multiple de B, 2. que K L, 6. eſt multiple de la 4. D ; E H, compoſée de la 1. & de la 5. ſera autant multiple de la 2. B, que F L, compoſée de la 3. & de 6. eſt multiple de la 4. D. Derechef, d'autant que E H, premiere, eſt autant multiple de B, 2. que F L, 3. l'eſt de D, 4. comme nous venons de
2. 5. demonſtrer : mais H I, 5. eſt autant multiple de la 2. B, que L M, 6. l'eſt de D, 4. E I, compoſée de la 1. & de 5. ſera autant multiple de la 2. B, que F M, compoſée de la 3. & de la 6. l'eſt de D, 4. & ainſi des autres, s'il y a plus de parties en E & F. Si donc la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 4. PROP. 4.

Si la premiere a meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme, auſſi les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme auront meſme raiſon aux equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme, ſelon quelque multiplication que ce ſoit, ſi elles ſont priſes ainſi qu'elles s'entre-reſpondent.

Sous la raiſon de A, premiere à B, ſeconde, meſme que celle de C, troiſieſme, à D, quatrieſme : & ſoient priſes E, & F, equimultiples de A, 1. & C, 3.

C, 3. Item G H, equimultiples de B, 2. & D, 4. selon quelque multiplication que ce soit, que E & F, soient autant multiples de A, & C, que G, & H, le sont de B, & D, ou non. Ie dis qu'il y a mesme raison de F, multiple de A, premiere, à G, multiple de B, 2. comme de F, multiple de C, 3. à H, multiple de D, 4.



Car si on constituë derechef E, premiere grandeur, & G, 2. F, 3. & H, 4. & que l'on prenne I & K, quelconques equimultiples de E & F, 1. & 3. Item, L & M, quelconques equimultiples de G, 2. & H, 4. D'autant que E, 1. est autant multiple de A, 2. que F, 3. l'est de C, 4. & que l'on a pris I & K, equimultiples de E & F, 1. & 3. en raison egale [a] I & K, seront aussi equimultiples de A & C, 2. & 4. Par mesme raison L & M, sont equimultiples de B & D, & d'autant que A, est à B, comme C à D, & que l'on a pris I & K, equimultiples de A & C, 1. & 3. & L & M, aussi equimultiples de B, 2. & D, 4. [a] 3. 5.

[b] si I, multiple de la 1. A, defaut de L, multiple de M, [b] 6. *def.* la 2. B, aussi K, multiple de la 3. C, defaudra de multiple de la 4. D: si I, est égale à L, aussi K, sera égale à M: & finalement, si I, excede L, aussi K, excedera M, selon quelconque multiplication.

qu'elles soient prises. Partant, puis que I & K, sont equimultiples de E 1. & F 3. Item, L & M, equimultiples de G 2. & H 4. & qu'il est demonstré que si I, multiple de E, 1. est moindre que L, multiple de G, 2. que K, multiple de F, 3. est moindre que M, multiple de H, 4. & si I, est égale à L, K est égale à M, & si I, est plus grande que L, K est plus grande que M, & que cela aduient en quelque multiplication que ce soit, c il y aura mesme raison de E 1. à G 2. que de F 3. à H 4. donc si la 1. a mesme raison à la 2. que la 3. à la 4. Ce qu'il falloit demonstrer.

c 6. d.

COROLLAIRE.

Par cette demonstration, est manifeste la preuue de la raison inuerse expliquée par Euclide, d qui est, que si 4. grandeurs sont proportionelles, qu'elles le seront aussi prises à rebours, ou au contraire: c'est à sçauoir si A est à B, comme C à D, en raison inuerse, comme B sera à A, ainsi à C D. Car puis que comme A est à B, ainsi C, est à D: e E & F, equimultiples de A & C, 1. & 3. seront toutes deux plus grandes, égales ou moindres que G & H, equimultiples de B & D, 2. & 4. en quelque multiplication que ce soit. Donc au contraire, G & H, seront toutes deux plus petites, égales ou plus grandes que E & F: f partant, il y aura mesme raison de B à A, que de D à C.

d 13. d.

e 6. d.

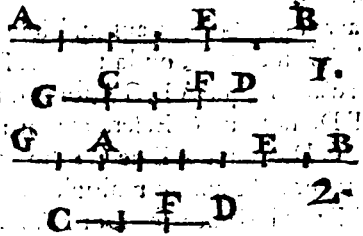
f 6. d.

THEOREME 5. PROP. 5.

Si vne grandeur est autant multiple d'vne grandeur, que la retranchée l'est de la

la retranchée : aussi le reste sera autant multiple du reste, comme la toute l'est de la toute.

Soit la toute A B, autant multiple de la toute C D, comme la retranchée A E, l'est de la retranchée C F. Ie dis que la restante E B, est autant multiple de la restante F D, que la toute A B, l'est de la toute C D: car soit prise C G, de laquelle E B, soit autant multiple que A E, l'est de C F, ou la toute A B, de la toute C D: d'autant que A E, E B, sont equimultiples de C F, G C, & la toute A B, sera autant multiple de la toute G F, comme A E, l'est de C F: c'est à dire les toutes des toutes comme vne seule d'vne seule: mais A B, est posée autant multiple de C D, que A E, de C F: donc A B, sera autant multiple de G F, que de C D: [h] partant G F, C D, sont egales: donc ostant la commune C F, demeurera D F, égale à G C: donc E B, sera autant multiple de F D, que de C G: mais E B, est autant multiple de C G, par l'hypothese, que A E, l'est de C F, c'est à dire, que la toute A B, de la toute C D. Partant le reste E B, sera autant multiple du reste F D, que la toute A B, de la toute C D: Ce qui est proposé.

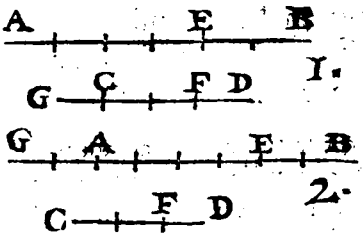


g 1. 5.

h 6. c. f.

Autrement, soit la toute A B, autant multiple de la toute C D, que la retranchée A E, de la re-

tranchée C F. Ie dis que le reſte E B, eſt autant multiple du reſte F D, que la toute A B, de la toute C D:



Car ayant pris G A, autant multiple de F D, comme A E, l'eſt de C F, ou la toute A B, de la toute C D: d'autant que A E, G A, ſont equimultiples de C F, F D, i la toute G E, ſera autant multiple de la toute C D, comme A E, de C F: mais A B, eſt pareillement auſſi autant multiple de C D, que A E, de C F, par l'hypotheſe. Donc G E, & A B, ſont equimultiples de C D: k & partant egales entr'elles, oſtant donc la commune A E, reſteront G A, E B, egales, & partant equimultiples de F D, puiſque G A, eſt priſe autant multiple de F D, que A E, de C F, ou la toute A B, de la toute C D: Donc le reſte E B, ſera autant multiple du reſte F D, que la toute A B, de la toute C D; ce qui eſt propoſé. Donc ſi vne grandeur eſt autant multiple, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

i 1. 5.

k 6. c. ſ.

SCHOLIE.

Nous remarquerons icy, que quand Euclide demonſtre en cette 5. Propoſition, qui ſi vne grandeur eſt autant multiple d'vne grandeur que la retranchée de la retranchée, le reſte eſt autant multiple du reſte, comme la toute l'eſt de la toute, &c. Il demonſtre par ce moyen la meſme choſe de toutes les eſpeces contenues ſous ce genre de Multiple, *comme nous enſeigne*

Ariſt.

Arist. au commencement de ses Categ. Οταν ἕτερον κατ' ἑτέρου κατηγορῆται, ὅσα κατ' ἐκεινου δοκεῖ καὶ τῷ κατηγορουμένου λέγεται, τοσαῦτα καὶ κατὰ τοῦ ὑποκειμένου ῥηθήσεται.

Quand vne chose est dite d'vne autre, comme de son suiet, tout ce qui peut estre dit de ladite chose, sera pareillement dite de son suiet; comme pour exemple, ce mot Homme, *est dit* de Iean & Pierre, *& de tous les individus de cét' espece, ausquels & le nom & la definition d'homme, appartient: donc, selon ledit Aristote, tout ce qui pourra estre dit de l'homme, sera pareillement dit de Iean, Pierre, & de tous les individus contenus sous cét' espece: par la mesme regle d'Aristote, ce mot* multiple, *est dit de double, triple, quadruple, quintuple, &c. qui sont les especes contenues sous ce genre de* multiple, *donc tout ce qui sera dit de* multiple, *pourra aussi estre dit de double, triple, quadruple, quintuple, &c. D'où il s'ensuit fort bien, que quand Euclide a demonstré que si vne grandeur est autant multiple d'vne grandeur, que la retranchée de la retranchée; le reste est aussi autant multiple du reste, &c.*

Il a pareillement demonstré, que si toute vne grandeur est double, triple, ou quadruple, (qui sont especes de multiple) de toute vne grandeur, & la retranchée, double, triple, ou quadruple de la retranchée, le reste, est aussi double, triple, ou quadruple du reste, &c. En quoy Clauius s'est lourdement trompé à la fin des Definitions du premier liure, où il a pris pour notion anticipée, ce qu'Euclide demonstre icy, disant. Si vn tout est double d'vn tout, & le retranché double du retranché, le reste sera aussi double du reste, *ne recognoissant que ce qui est demonstré icy de* multiple, *il est aussi demonstré de double, triple & quadruple*

& de tous les autres, contenus sous ce genre multiple. Donc il est manifeste que Clauius s'est trop licentié, de prendre tant ceux, dont nous parlons, que ses autres pretendues notions anticipées, qu'il a tirées de sa forge, toutes lesquelles sont demonstrées par apres par Euclide, comme nous auons fait voir cy-deuant.

THEOREME. 6. PROP. 6.

Si deux grandeurs sont equimultiples de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche quelques equimultiples des mesmes grandeurs, ou les restes seront égaux aux mesmes, ou equimultiples d'icelles.

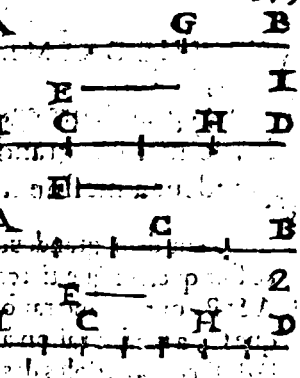
Soient les grandeurs A B, C D, equimultiples de E & F, & les retranchées A G, C H, equimultiples des mesmes E, & F. Ie dis que les restes G B, H D, sont égales à E, & F, ou equimultiples d'icelles.

Car soit premierement G B, égale à E, ie dis que H D, sera égale à F : Soit posée C I, égale à F; d'autant que A G, premiere, est autant multiple de E, 2. que C H, 3. l'est de F, 4. & que G B, 5. est égale à E, & I C, 6. égale à F, 4. [l] A B, composée de la 1. & de la 5. sera autant multiple de E, 2. que I H, composée de la 3. & 6. l'est de F, 4. mais C D, est autant multiple de F, par l'hypothese, que A B, l'est de E : donc H I, & C D, sont equimultiples de F: [m] partant égales entr'elles : donc ostant la commune

l 2. 5.

m 6. c. 5.

mune C H, demeureront C I, & H D, égales. Or puisque C I, est posée égale à F; H D, sera pareillement égale à F: ce qui est proposé. Semblablement nous demonstrerons que si G B, est multiple de E, que H D, sera autant multiple de F, en posant I C, autant multiple de F, que G B, l'est de E, &c.



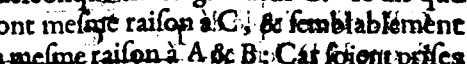
Autrement: d'autant que A B, C D, sont equimultiples de E, & F, il y aura en A B, autant de grandeurs égales à E, qu'en C D: d'égales à F. Derechef, d'autant que A G, C H, sont equimultiples des mesmes E, F, il y aura pareillement en A G, autant de grandeurs égales à E, qu'il y en a en C H, d'égales à F. [n] 1. & 2. *def.*

Si donc d'égales multitudes A B, C D, l'on oste egales multitudes A G, C H, demeureront les multitudes G B, H D, égales. Donc G B, contiendra autant de fois E, que H D, contiendra F, si vne fois seulement G B, H D, seront egales à E, F, si plus d'vne fois equimultiples. Ce qui estoit proposé.

THEOREME 7. PROP. 7.

Les grandeurs egales ont mesme raison à vne mesme grandeur, & vne mesme grandeur a mesme raison aux egales.

Soient deux grandeurs egales entr'elles A & B, & soit quelconque tierce grandeur C. Ie dis que A & B, ont mesme raison à C, & semblablement que C, a mesme raison à A & B. Car soient prises
o 6.c.f. D & E, equimultiples des egales A, B, & icelles D, E, seront egales entr'elles. Derechef, soit prise F, multiple quelconque de C. D'autant donc que D & E sont egales, & equimultiples de A, B, 1. & 3. l'vne & l'autre sera plus petite que F, ou egale, ou plus grande, selon quelconque multiplication qu'elles soient prises.



Donc, puis que D & E, equimultiples de la 1. A, & de la 3. B, sont toutes deux plus grandes que F, multiple de la 2. & de la 4. (car C, est posée comme
p 6.d.f. pour deux grandeurs) ou egales, ou moindres; p il y aura mesme raison de A, 1. à C, 2. que de B, 3. à C, 4.

En la mesme maniere nous demonstrerons que F, est moindre que chacune des grandeurs D, E, ou egale, ou plus grande: Donc puis que F, multiple de la 1. & de la 3. C, est plus petite que chacune D & E, equimultiples de la 2. & 4. A & B, ou egale, ou plus grande, il y aura pareillement mesme raison de la 1. C, à la 2. A, que de la 3. C, à la 4. B. Ce qui est proposé.

L'on

L'on pourroit monſtrer ceſte ſeconde partie plus briefuement par la raiſon inuerſe : car ayant deſia eſté demonſtré qu'il y a meſme raiſon de A à C ; que de B à C, en changeant, q il y aura meſme raiſon de q Coroll.
C à A, que de C à B. Donc les grandeurs égales, &c. 4. 5.
Ce qu'il falloit demonſtrer.

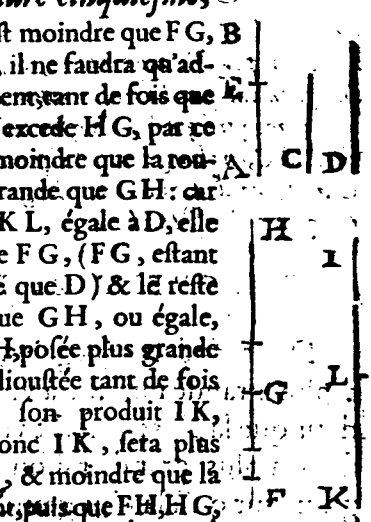
THEOREME 8. PROP. 8.

Des grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raiſon, à vne meſme grandeur que la plus petite. Et vne meſme grandeur a plus grande raiſon à la plus petite grandeur qu'à la plus grande.

Soient les grandeurs inegales : AB, plus grandes & C, plus petite, & ſoit vne 3. grandeur quelconque D. Ie dis que AB, a plus grande raiſon à D, que C, à la meſme D : & au contraire, que D, a plus grande raiſon à C, que à AB : Car de la plus grande AB, ſoit retranchée AE, égale à C, & ſoit poſée AB, 1. grandeur C, 3. & D, 2. & 4. puis ſoient priſes HG, & GF, equimultiples de AE, & EB, en ſorte que GH, multiple de AE, ſoit plus grande que D, & FG, multiple de EB, ne ſoit moindre que la meſme D : mais auſſi plus grande.

Or d'autant que HG, GF, ſont equimultiples de AE, EB, r la toute HF, ſera autant multiple de la r 2. 5.
toute AB, que GH, l'eſt de AE, c'eſt à dire de C, égale à AE. Pareillement, ſoit priſe IK, multiple de D, 2. & 4. en ſorte qu'elle ſoit plus grande HG : mais moindre que la toute HF. Ce qui ſera facile,

car puis que D, eſt moindre que F G, B & auſſi que G H, il ne faudra qu'adiouſter D ſeulement, tant de fois que ſon produit I K, excede H G, par ce moyen I K, ſera moindre que la toute H F, & plus grande que G H: car ayant retranché K L, égale à D, elle ſera moindre que F G, (F G, eſtant priſe plus grande que D) & le reſte L I, moindre que G H, ou égale, (eſtant icelle G H, poſée plus grande que D) & D, adiouſtée tant de fois ſeulement, que ſon produit I K, excede G H. Donc I K, ſera plus grande que G H, & moindre que la toute H F. Partant, puis que F H, H G, ſont equimultiples de A B, premiere, & C, 3. & I K, multiple de D, poſée pour 2. & 4. mais F H, multiple de la 1. eſt plus grande que I K, multiple de la 2. & H G, multiple de la 3. n'eſt plus grande que I K, multiple de la 4. mais moindre par l'hypotheſe (car I K, multiple de D, eſt priſe plus grande que H G,) il y aura plus grande raiſon de A B, 1. à D, 2. que de C, 3. à D, 4.



ſ 8. d.

Secondement, d'autant que I K, multiple de D, 1. (ſoit priſe D, pour 1. & 3. & C, 2. & A B, 4.) eſt plus grande que H G, multiple de C, 2. mais I K, multiple de D, 3. n'eſt plus grande que F H, multiple de A B, 4. mais moindre; F H, eſtant plus grande que I K, comme il eſt monſtré, il y aura plus grande raiſon de D, 1. à C, 2. que de D, 3. à A B, 4. ce qui eſtoit propoſé. Donc les grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO

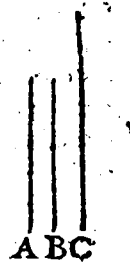
THEOREME 9. PROP. 9.

Les grandeurs qui ont mesme raison à vne mesme grandeur, sont egales entr'elles: Et celles-là, ausquelles vne mesme grandeur a mesme raison, sont aussi égales entr'elles.

Premierement, que A & B, ayent mesme raison à C. Ie dis qu'elles sont égales entr'elles.

Autrement, elles seroient inegales, tellement que l'vne seroit plus grande. Soit donc A, plus grande, & B, moindre, s'il est possible : donc t il y t 8. 5.
aura plus grande raison de A, plus grande à C, que de B, plus petite à la mesme C, ce qui est contre l'hypothese : donc A & B, ne sont inegales, mais égales.

Secondement, que C, ait mesme raison à A, que à B. Ie dis derechef que A B sont egales entr'elles : car si l'vne estoit plus grande, sçauoir A & B, moindre : C v auroit plus grande raison à B, plus petite qu'à A plus grande, ce qui est contre l'hypothese : donc A ne sera plus grande que B, ains égale. Donc les grandeurs qui ont, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



v 8. 5.

THEO

THEOREME 10. PROP. 10.

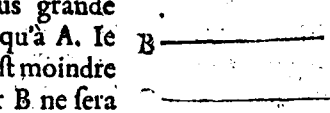
Des grandeurs qui ont raiſon à vne meſme grandeur, celle-là qui a plus grande raiſon, eſt la plus grande; mais celle-là, à laquelle vne meſme grandeur a plus grande raiſon, eſt la plus petite.

Premierement, que A ait plus grande raiſon à C, que B à la meſme C. Ie dis que A eſt plus grande que B: car ſi A eſtoit égale à B, icelles [c] A & B, auroient meſme raiſon à C. Et ſi A eſtoit plus petite que B, [d] la plus grande B, auroit plus grande raiſon à C, que la plus petite A, ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc A n'eſt égale à B, ny plus petite, mais plus grande.

c 7. 5.

d 8. 5.

Secondement, que C, ait plus grande raiſon à B qu'à A. Ie dis que B eſt moindre que A; car B ne ſera égale à A [e] autrement C auroit meſme raiſon à A & B, ce qui eſt contre l'hypotheſe: B ne ſera auſſi plus grande que A, d'autant que C auroit plus grande raiſon à la moindre A qu'à B plus grande: ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc B eſt moindre que A, ce qui eſt propoſé. Partant des grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



e 7. 5. 8. 5.

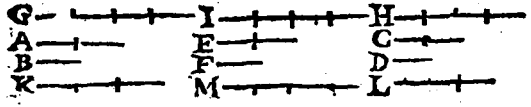
THEO

THEOREME 11. PROP. 11.

Les raisons qui sont le mesme, à vne mesme raison, sont aussi de mesme entr'elles.

Soit la raison de A à B, comme celle de E à F, & comme E à F, ainsi C à D. Ie dis que comme A est à B, ainsi C est à D.

Car soient prises les equimultiples quelconques de toutes les antecedentes A, E, C, lesquelles soient G, I, H : semblablement soient prises K, M,



L, equimultiples quelconques des consequentes B, F, D : D'autant que A 1. est à B 2. comme E 3. à F 4. [f] si G multiple de A 1. defaut de K multiple de B 2. I, multiple de E 3. defaudra aussi de M, multiple de F 4. & si G est égale à K, I sera égale à M ; & si G est plus grande que K, I sera plus grande que M. [g] Mais (comme il sera demonstré en la mesme maniere) si I est moindre que M, ou égale, ou plus grande, pareillement H sera moindre que L, ou égale, ou plus grande, d'autant que par l'hypothese il y a mesme raison de E 1. à F 2. que de C 3. à D 4. Parquoy si G multiple de A 1. est plus petite que K, multiple de B 2. H multiple de C 3. sera plus petite que L, multiple de D 4.

[f] *6.d.5.*

[g] *6.d.5.*

&

& ſi G eſt égale ou plus grande que K, auſſi H, ſera égale ou plus grande que L, & ſera demonſtré qu'il en aduiendra de meſme, en quelconques autres equimultiples : [x] partant il y aura meſme raiſon de A premiere, à B 2. que de C 3. à D 4. Donc les raiſons qui ſont de meſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

x 6. d. 5.

SCHOLIE.

En la meſme maniere, les raiſons qui ſont de meſme à d'autres, ſont auſſi de meſme entr'elles, comme ſi A eſt à B, comme C à D, & que E ſoit à F, comme A eſt à B, & G à H, comme C à D, pareillement, comme E ſera à F, ainſi G à H.

Car d'autant que les raiſons de E à F, & C à D, ſont de meſme à la raiſon de A à B, [y] *comme E, ſera à F, ainſi C à D : derechef, d'autant que les raiſons de E à F, & G à H, ſont de meſme à la raiſon de C, à D,* [z] *pareillement comme E ſera à F, ainſi G à H.*

y 11. 5.

z 11. 5.

A, 3. *B*, 2. *C*, 6. *D*, 4.
E, 9. *F*, 6. *G*, 12. *H*, 8.

Derechef, ſi les raiſons de A à B, C à D, & de E à F, ſont de meſme entr'elles : & que comme A eſt à B, ainſi G eſt à H, & comme C à D, ainſi I à K, & comme E à F, ainſi L à M, les raiſons de G à H, I à K, & L à M, ſeront pareillement de meſme entr'elles : car comme nous venons de demonſtrer en ces dernieres raiſons, comme G eſt à H, ainſi I eſt à K.

A, 3. *B*, 2. *C*, 6. *D*, 4. *E*, 9. *F*, 6.
G, 12. *H*, 8. *I*, 18. *K*, 12. *L*, 30. *M*, 20.

D'autant

D'autant que ces proportions ſont ſemblables aux raiſons de A & B, & de C à D, en la meſme maniere comme I ſera à K, ainſi L ſera à M, d'autant que les raiſons de I à K, & L à M, ſont de meſme aux raiſons de G, à D, & E à F: leſquelles ſont égales: ſemblablement, comme G à H, ainſi L à M, puiſque ces raiſons ſont de meſme aux raiſons de A à B, & E à F, leſquelles ſont poſées egales: & eſt la meſme raiſon de pluſieurs.

THEOREME 12. PROP. 12.

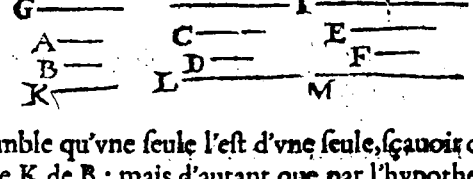
Si tant de grandeurs que l'on voudra ſont proportionelles, comme l'vne des antecedentes ſera à l'vne des conſequentes; ainſi toutes les antecedentes ſeront à toutes les conſequentes.

Ce qui a eſté demonſtré en la premiere Propoſition, de la proportion multiple: il eſt icy demonſtré de tout genre de proportion, & meſme de l'irrationelle.

Soient donc tant de grandeurs que l'on voudra A, B, C, D, E, F, proportionelles, c'eſt à dire, ſoit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainſi E à F. Ie dis que comme vne des antecedentes eſt à vne des conſequentes, ſçauoir comme A à B, ainſi toutes les antecedentes enſemble A, C, E, ſont à toutes les conſequentes enſemble B D F.

Car ſoient priſes G, H, I, equimultiples des antecedentes A, C, B, & K, L, M, equimultiples des conſequentes B, D, F, [a] les toutes G, H, I, a 1. 5. enſemble,

enſemble, ſeront autant multiples des toutes A, C E, enſemble qu'vne ſeule l'eſt d'vne ſeule : ſçauoir comme G de A : & les toutes K, L M, enſemble, ſeront autant multiples des toutes B, D, F, en-



ſemble qu'vne ſeule l'eſt d'vne ſeule, ſçauoir comme K de B : mais d'autant que par l'hypotheſe, il y a meſme raiſon de A 1. à B 2. que de C 3. à D 4. & comme vn autre E 3. à F 4. il aduiendra que ſi G multiple de A 1. defaut de K, multiple de B 2. pareillement, H multiple de C 3. defaudra de L multiple de D 4. & I de M : Et ſi G eſt égale à K, ou plus grande, pareillement H ſera égale à L, & I à M, ou plus grande : & partant ſi G, eſt plus petite ou égale, ou plus grande que K, les toutes G, H, I, enſemble, ſeront plus petites que les toutes K, L, M, enſemble, ou égales ou plus grandes. Parquoy comme A 1. eſt à B 2. ainſi A, C, E, 3. ſera à B, D, F, 4. donc s'il y a tant de grandeurs proportionelles que l'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

6. d. 5.

b 6. d. 5.

THEOREME 13. PROP. 13.

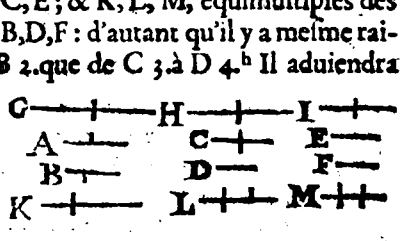
Si la premiere a meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme ; Mais la troiſieſme a plus grande raiſon à la quatrieſme, que la cinquieſme à la ſixieſme : auſſi la premiere aura plus

grande

grande raiſon à la ſeconde, que la cinquieſme à la ſixieſme.

Soit la raiſon de A 1. à B 2. comme C 3. à D 4. Mais ſoit la raiſon de C 3. à D 4. plus grande que celle de E 5. à F 6. Ie dis que la raiſon de A 1. à B 2. eſt plus grande que celle de E 5. à F 6.

Car ſoient priſes G, H, I, equimultiples des antecedentes A, C, E; & K, L, M, equimultiples des conſequentes B, D, F: d'autant qu'il y a meſme raiſon de A 1. à B 2. que de C 3. à D 4.[h] Il aduiendra que ſi G, multiple de A 1. excede K, multiple de B 2. que H, multiple de C 3. excedera L, multiple de D 4. &c. Mais quand H excede L, [i] il n'eſt neceſſaire que I excede M, mais ſera quelquefois égale ou plus petite: d'autant qu'il y a plus grande raiſon de C 1. à D 2. que de E 3. à F 4. Donc ſi G excede K, neceſſairement I n'excede M: [k] il y aura donc plus grande raiſon de A 1. à B 2. que de E 5. à F 6. Partant, ſi la premiere a meſme raiſon à la ſeconde, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



h 6. d. 5.

i 8. d. 5.

k 8. d. 5.

SCHOLIE.

Mais ſi la raiſon de C 3. à D 4. eſt moindre que celle de E 5. à F 6. Il y aura pareillement moindre raiſon de A 1. à B 2. que de E 5. à F 6. car ſi la raiſon de C à D, eſt moindre que celle de E à F, c'eſt à dire, la raiſon de E 1, à F 2. eſt plus grande que celle de

l 8.d.5. *C 3. à D 4.* [l] *il aduiendra que ſi I excede M, il ne ſera neceſſaire que H excede L, mais quelquefois*

m 8.d.5. *ſera plus petite ou egale:* [m] *mais ſi H defaut de L, ou luy eſt egale, auſſi G defaudra de K, ou luy ſera egale: d'autant que la raiſon de C 1. eſt peſée à D 2. meſme que de A 3. à B 4. partant ſi I excede M,*

n 8.d.5. *neceſſairement G n'excedera K,* [n] *& par ainſi il y aura plus grande raiſon de E 1. à F 2, que de A 3. à B 4. c'eſt à dire la raiſon de A à B, eſt moindre que celle de E à F, ce qui eſt propoſé.*

En la meſme maniere, ſi la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la 3. à la 4. & que la 3. ait plus grande raiſon à la 4. que la 5. à la 6. Pareillement, la premiere aura plus grande raiſon à la ſeconde, que la 5. à la 6.

Mais ſi la 1. a moindre raiſon à la 2. que la 3. à la 4. mais que la 3. ait moindre raiſon à la 4. que la 5. à la 6. pareillement la 1. aura beaucoup moindre raiſon à la 2. que la 5. à la 6.

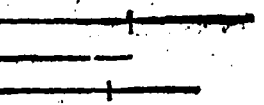
THEOREME 14. PROP. 14.

Si la premiere a meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme, & que la premiere ſoit plus grande que la troiſieſme, la ſeconde ſera auſſi plus grande que la quatrieſme : Et ſi la premiere eſt egale à la troiſieſme, auſſi la ſeconde ſera egale à la quatrieſme ; & ſi plus petite, plus petite.

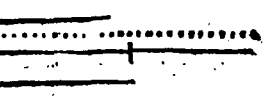
Soit A 1. grandeur, à B 2. comme C 3. à D 4. Ie dis que ſi A 1. eſt plus grande que C 3. que B 2. ſera auſſi

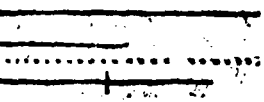
auſſi plus grande que D 4. Et que ſi A 1. eſt egale à C 3. que B 2. ſera egale à D 4. Finalement, ſi A 1. eſt plus petite que C 3. que B 2. ſera plus petite que D 4.

Premierement, ſoit A 1. plus grande que C 3. ° o 8. 5. il y aura plus grande raiſon de A, plus grande à B, que de C, plus petite à la meſme B. Donc, d'autant que C 1. eſt à D 2. comme A 3. à B 4. mais la raiſon de A 3. à B 4. eſt plus grande que la raiſon de C 5. à B 6. comme nous auons monſtré, p il y aura donc plus grande raiſon de C 1. à B 2. que de C 5. à B 6. partant D ſera plus petite que B: donc B ſera plus grande que D: ce qui eſtoit propoſé.



p 13. 5.





Secondement, ſoit A egale à C, q il y aura meſme raiſon de A à B, que de C à B: d'autant donc que les raiſons de C à D, & de C à B, ſont de meſme à la raiſon de A à B, r les raiſons de C à D, & de C à B, ſeront de meſme entr'elles: partant B & D ſeront egales. Ce qui eſt propoſé.

q 7. 5.

r 11. 5.

Finalement, ſoit A plus petite que C, ſ il y aura plus grande raiſon de la plus grande C à B, que de la plus petite A à la meſme B: D'autant donc que C 1. eſt à D 2. comme A 3. à B 4. Mais la raiſon de A 3. à B 4. eſt plus petite que celle de C 5. à B 6. t Il y aura pareillement moindre raiſon de C 1. à D 2. que de C 5. à B 6. partant, B ſera plus petite que

ſ 8. 5.

t 13. 5.

v 10. 3. D.Ce qui eſt propoſé : v donc ſi la 1. a meſme raiſon à la 2. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Que ſi la 2. eſt plus grande, egale, ou moindre que la 4. pareillement ſelon la meſme raiſon, la 1. ſera plus grande, egale ou moindre que la 3. Car ſoit premierement B plus grande que D, comme en la premiere figure. Ie dis que A eſt plus grande que C : car

x 8. 5. *puis que B eſt plus grande que D, x il y aura plus grande raiſon de C à D, que de C à B. Donc d'autant que A 1. eſt à B 2. comme C 3. eſt à D 4. Mais la raiſon de C 3. à D 4. eſt monſtrée plus grande que*

y 13. 5. *celle de C 5. à B 6. y pareillement la raiſon de A 1. à*

z 10. 5. *B 2. ſera plus grande que celle de C 5. à B 6. z Partant A ſera plus grande que C. Ce qui eſt propoſé.*

Secondement, ſoit B egale à D (comme en la 2. figure.) Ie dis que A eſt egale à C : car puis que B eſt

a 11. 5. *egale à D, a C ſera à B, comme à D : mais A eſt pareillement à B, comme C à D. Donc comme A ſera à B, ainſi C ſera à B : & partant A ſera egale à C. Ce qui eſt propoſé.*

Tiercement, ſoit B moindre que D, comme en la 3. figure. Ie dis que A eſt moindre que C ; car puis que

b 8. 5. *B eſt moindre que D, b il y aura moindre raiſon de C à D, que C à B : D'autant donc que A 1. eſt à B 2. ainſi C 3. eſt à D 4. Mais la raiſon de C 3. à D. 4.*

c 13. 5. *eſt monſtrée moindre que celle de C 5. à B 6. c Pareillement la raiſon de A 1. à B 2. ſera moindre que*

d 10. 5. *celle de C 5. à B 6. d Donc C ſera plus grande que A : & partant A plus petite que C. Ce qui eſt propoſé.*

Cette demonſtration ſe peut faire plus briefue : ſi B eſt plus grande que D, & A ſoit dite non plus

grande

grande que C, mais moindre ou egale, [e] B sera pareillement plus petite que D, ou egale, ce qui est contre l'hypothese, & est la mesme raison en tout autre cas. [e] 14. 5.

Ou ainsi : Si A est à B, comme C à D, en changeant B, sera à A, comme D à C. Donc si B est plus grande ou egale, ou moindre que D. Pareillement [f] A sera plus grande, ou moindre ou égale à C. [f] 14. 5.

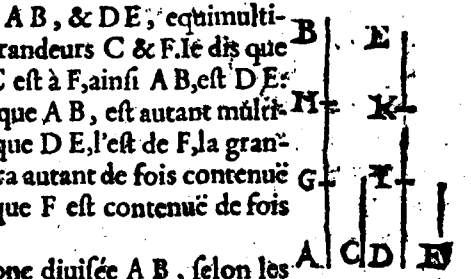
Or Euclide n'a pas demonstré, si la 1. est plus grande ou egale, ou moindre, que la 2. que la 3. sera plus grande, ou egale, ou moindre que la 4. (duquel moyen d'argumenter vsent toutefois plusieurs Geometres, tant des anciens que des modernes.) D'autant que cela est manifeste, à cause de la similitude des raisons.

De là s'ensuit, que si l'vne & l'autre est raison de plus grande inegalité, que l'vne & l'autre grandeur antecedente, c'est à dire, la 1. & la 3. sera plus grande que l'vne & l'autre grandeur consequente, c'est à dire, la 2. & la 4. Mais si l'vne & l'autre est raison de moindre inegalité, l'vne & l'autre grandeur antecedente sera plus petite que l'vne & l'autre consequente, & si d'egalité, sera egale.

Pour exemple ; si comme A est à B, ainsi C à D, l'vne & l'autre raison sera de plus grande inegalité ou d'egalité, ou de moindre inegalité. Partant si A 1. est plus grande que B 2. C 3. sera plus grande que D 4. & si egale, egale : & si moindre, moindre. Ce qui est proposé.

THEOREME 15. PROP. 15.

Les parties ſont entr'elles, comme ſont leurs equimultiples entr'elles, ſi elles ſont priſes comme elles s'entre-reſpondent.



Soient A B, & D E, equimultiples des grandeurs C & F. Ie dis que comme C eſt à F, ainſi A B, eſt D E. Car puis que A B, eſt autant multiple de C, que D E, l'eſt de F, la grandeur C, ſera autant de fois contenuë en A B, que F eſt contenuë de fois en D E.

Soit donc diuiſée A B, ſelon les parties A G, G H, H B, chacune egale à C, & D E, ſelon les parties D I, I K, K E, chacune egale à F. Et d'autant que A G, & C, ſont egales, & D I, & F, auſſi égales, [g] A G, ſera à D I, comme C, ſera à F, par meſme raiſon G H, ſera à I K, & H B, à K E, comme C à F: Et partant A G, G H, H B, auront meſme raiſon à D I, I K, K E. Parquoy, comme A G, ſera à D I, c'eſt à dire, comme C à F, [h] ainſi A B, ſera à D E, à ſçauoir toutes les antecedentes enſemble A G, G H, H B à toutes les conſequentes enſemble D I, I K, K E: Ce qui eſt propoſé. Donc les parties entr'elles ſont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

g 7. 5.

h 12. 5.

SCHOLIE.

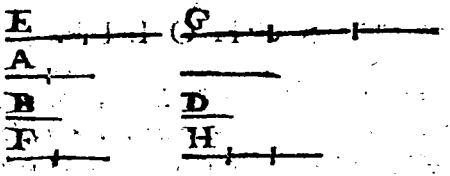
SCHOLIE.

Henrion, qui a copié le liure du Sieur Donnet, n'ayant point trouué ces mots traduits, (λαμβάνεται κατ' ἄλλημα) c'est à dire, estans prises comme elles s'entre-respondent, les a laissez, se contentant de mettre ce qu'il a trouué traduit: ce qu'il ne deuoit faire neantmoins, s'il l'eust peu entendre, puis qu'Euclide ne les a obmis, comme il appert par son texte; τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, ἕκαστον ἑκαστον, λαμβάνεται κατάλλημα ? C'est à dire, les parties ou grandeurs, ont mesme raison que les equimultiples, & elles sont prises comme elles s'entre-respondent. Or cecy defaillant, estans prises comme, &c. l'on pourroit inferer que, comme A B, est à D E, ainsi F, seroit à C; ou comme C à F, ainsi D E, à A B: Ce qui est manifestement faux, &c. Ce que ledit Copiste a toutefois corrigé à sa derniere Edition 1630. mais il n'a pas corrigé ses autres fautes, qui ne luy auoient esté notées, comme en estant incapable, d'autant qu'il ne copie que les œuures d'autruy; & les fait imprimer en son nom pour les vendre.

THEOREME 16. PROP. 16.

Si quatre grandeurs 'sont proportionelles; elles seront auſſi alternatiuement proportionelles.

Car soit A, à B, comme C est à D. Ie dis qu'alternatiuement, ou en permutant, A sera à C, comme B à D.



Soient priſes E & F, equimultiples de A & B, 1.& 2. Item, G & H, equimultiples de C 3. & D 4.

i 15. 5. E ſera à F, comme A eſt à B: [i] Puis que E, F, ſont equimultiples de A, & par la meſme raiſon G ſera à H, comme C à D.

Or puis que les raiſons de E à F,& C à D, ſont

k 11. 5. de meſme à la raiſon de A à B: [k] elles ſeront de meſme entr'elles. Derechef, d'autant que les raiſons de E à F,& G à H, ſont de meſme à la raiſon

l 11. 5. de C à D: [l] elles ſeront auſſi de meſme entr'elles: c'eſt à dire, comme E 1. ſera à F 2. ainſi G 3. à H 4.

m 14.5. [m] Partant ſi E 1. eſt plus grande que G 3. F 2. ſera plus grande que H 4. & ſi E eſt égale ou plus petite que G, auſſi F ſera egale ou plus petite que H, en quelconque multiplication que ſoient priſes E,

n 6.d.5. F,& G H. [n] Donc A 1. ſera à C 2. comme B 3. à D 4. puis que E, F, equimultiples de la 1. & 3. A & B, ſont toutes deux plus grandes que G & H, equimultiples de la 2.& 4. C, D, ou toutes deux egales, ou toutes deux plus petites,&c. Ce qui eſt propoſé. Partant ſi quatre grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or cette demonſtration a lieu ſeulement, quand les quatre grandeurs ſont de meſme genre. Car ſi A, B, eſtoient d'vn genre, & les deux autres C, D, d'vn autre

autre ; Pareillement les multiples E, F, seroient d'vn genre : sçauoir, de celuy de A, B : & les multiples G, H, d'vn autre : sçauoir de celuy de C, D. Partant, E ne pourroit estre dite plus grande que G, ou egale, ou moindre : Parquoy l'on ne concluroit rien de la 6. definition de ce liure. Donc la raison premiere pourra seulement auoir lieu, quand les quatre grandeurs seront de mesme genre.

THEOREME 17. PROP. 17.

Si les grandeurs composées sont proportionelles, aussi estans diuisées elles seront proportionelles.

Soient les grandeurs composées A B, C B, & D E, F E, proportionelles, c'est à dire, soit A B, à C B, comme D E, à F E. Ie dis qu'icelles estans diuisées, seront aussi proportionelles, c'est à dire, comme A C, sera à C B, ainsi D F, à F E.

Car soient prises les equimultiples de A C, C B, D F, F E, de mesme ordre, à sçauoir G H, H I, K L, L M. ° Et G I, sera autant multiple de A B, comme G H, l'est de A C : c'est à dire, comme K L, est multiple de D F : ᵖ ainsi K M, est pareillement multiple de D E. Donc G I, K M, sont equimultiples de A B, D E. Derechef, soient prises I N, M O, equimultiples de C B, F E : D'autant que H I, 1. est autant multiple de C B, 2. que L M, 3. de F E, 4. Item, I N, 5. autant multiple de C B, 2. que M O, 6. l'est de F E, 4. H N, composée de la 1. & 5. sera autant multiple de la 2. C B, que L O, composée de la 3. & 6. l'est de F E, 4. Partant, puis que A B, 1. est à C B, 2. comme

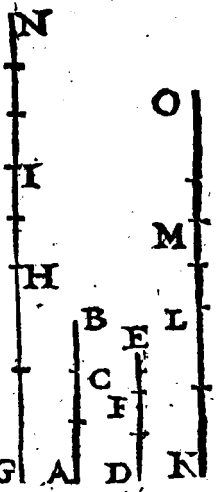
° 1. 5.

ᵖ 1. 5.

DE, 3. à FE, 4. & que l'on a pris les equimultiples de la 1. & de la 3. AB, DE: ſçauoir GI, KM, ſemblablement de la 2. & 4. CB, FE, les equimultiples HN, LO. ¶ Il arriuera que ſi GI, multiple de la 1. AB, defaut de HN, multiple de la 2. CB, auſſi KM, multiple de la 3. DE, defaudra de LO, multiple de la 4. FE; & ſi égale, égale: & ſi plus grande, plus grande. Que ſi tant GI: defaut de HN, que KM, de LO, ayant oſté les communes HI, LM, pareillement GH, defaudra de IN, & KL, de MO, & ſi GI, eſt egale à HN, & KM, à LO, ayant oſté les communes HI, LM; GH, ſera egale à IN, & KL, à MO: Et ſi finalement GI, excede HN, & KM, LO, oſtant les communes HI, LM, GH, excedera pareillement IN & KL, MO; Partant, puis que GH, KL, ont eſté priſes equimultiples de AC, 1. & de DF, 3. ſemblablement IN, MO, equimultiples de CB, 2. & FE, 4. Et il eſt monſtré en quelconque multiplication que les equimultiples ſoient priſes, que les equimultiples de la 1. & 3. defaillent enſemble des equimultiples de la 2. & 4. ou enſemble ſont egales, ou excedent: [r] Comme AC, 1. à CB, 2. DF 3. ſera à FE, 4. Ce qui eſt propoſé. Donc ſi les grandeurs compoſées, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

¶ 6. d. 5.

r 6. d. 5.



SCHOLIE.

SCHOLIE.

De ces choſes nous demonſtrerons facilement ce moyen d'argumenter, lequel nous auons appellé Diuiſion de raiſon conuerſe, à la 15. Definition: C'eſt à dire, ſi comme A B, eſt à C B, ainſi D E, à F E, que pareillement comme C B, ſera à A C, ainſi F E, ſera à D F: ce qui eſt euident. Car d'autant que comme A B, eſt à C B, ainſi D E, ſera à F E. Donc en changeant comme C B, ſera à A C, ainſi F E, ſera à D F. Ce qui eſt propoſé: Voyez la figure cy-apres, en la page 396. 17. 5.

L'on demonſtrera auſſi facilement ce moyen d'argumenter, qu'à la 15. Definition nous auons appellé contraire Diuiſion de raiſon; & auquel la grandeur antecedente eſt plus petite que la conſequente, & non plus grande, comme en la diuiſion de raiſon qu'Euclide a definy, comme celle que nous auons prochainement demonſtré.

Car ſoit comme A C, à A B, ainſi D F, à D E. Ie dis que par contraire diuiſion de raiſon, que A C, ſera pareillement à C B, comme D F, eſt à F E. Car d'autant que comme A C, eſt à A B, ainſi D F, eſt à D E. Ie dis pareillement, que par diuiſion de raiſon contraire, comme A C, eſt à C B, ainſi D F, eſt à F E. Car d'autant que comme A C, eſt à A B, ainſi D F, à D E, en changeant comme A B, ſera à A C, ainſi D E ſera à D F. Donc en diuiſant comme C B, ſera à A C, ainſi F E, ſera à D F: Et partant, en changeant derechef, comme A C, ſera à C B, ainſi D F ſera à F E. Ce qui eſt propoſé. 17. 5.

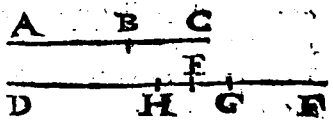
THEO

THEOREME 18. PROP. 18.

Si les grandeurs diuiſées ſont proportionelles, eſtans compoſées, elles ſeront auſſi proportionelles.

Soient les grandeurs diuiſées A B, B C ; D E, E F, proportionelles ; c'eſt à dire, comme A B, eſt à B C : ainſi D E, ſoit à E F. Ie dis, qu'eſtans compoſées, elles ſont proportionelles, c'eſt à dire, que comme A C, eſt à B C : ainſi D F, eſt à E F.

Car ſi A C n'eſt pas à B C, comme D F eſt à E F, D F, aura meſme raiſon à quelqu'autre grandeur moindre que E F, ou plus grande que la meſme E F, que A C à B C.



Premierement, que D F ait meſme raiſon à G F, moindre que E F : que A C, à B C, s'il ſe peut faire.

17. 5. D'autant que comme A C, à B C, ainſi de D F à G F : en diuiſant comme A B, eſt à B C : ainſi D G ſera à G F : Mais comme A B, à B C, ainſi D E, à

11. 5. E F, par l'hypotheſe. Donc comme D G 1. à G F 2. ainſi D E 3. à E F 4. Et puis que D G 1. eſt plus grande que D E 3. Pareillement G F 2. ſera plus grande que E F 4. la partie que ſon tout : Ce qui eſt impoſſible.

Secondement, que D F, ait meſme raiſon à H F, plus grande que E F, s'il ſe peut faire, que A C, à

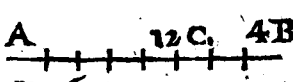
17. 5. B C. D'autant que A C eſt à B C, comme D F à H F, en diuiſant comme A B ſera à B C : ainſi D H à H F.

HF. Mais comme AB, à BC, ainsi est DE, à EF, par l'hypothese. Donc comme DH 1. à HF 2. ainsi DE 3, à EF 4. Et puis DH 1. est plus petite que DE 3. pareillement HF 2. sera moindre que EF 4. le tout que sa partie, ce qui est absurde. Donc DF, n'aura pas mesme raison à GE, moindre que EF, ou à HF, plus grande; que AC, à BC. Donc DF, sera à EF, comme AC, à BC: Ce qui est proposé; partant si les grandeurs diuisées, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 11. 5.

SCHOLIE.

De cette demonstration, nous demonstrerons ces deux moyens d'argumenter, que nous auons descrits à la 14. Definition. Nous auons appellé le premier, composition de raison conuerse, qui est tel. Soit comme AC, à CB, ainsi DF, à FE. Ie dis, par composition de raison conuerse, que comme AB, est à AC, ainsi DE, est à DF.

Car d'autant que comme AC, est à CB, ainsi DF, à EF, en changeant, comme BC, sera à CA, ainsi FE, sera à DF. Donc en composant, comme AB, sera à CA: ainsi DE, sera à DF. Ce qui est proposé.



18. 5.

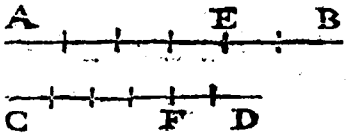
Le moyen d'argumenter, que nous auons appellé composition de raison contraire, est tel. Soit derechef comme AC, à CB, ainsi DF, à FE. Ie dis par composition de raison contraire, que comme AC, est à AB, ainsi DF, à DE. Car d'autant que comme AC, est à CB, ainsi DF, à FE, en changeant, comme BC, à AC,

AC, ainſi EF, à DF. Donc en compoſant, comme AB, à AC, ainſi DE, à DF. Et partant, en changeant derechef, comme AC, à AB, ainſi DF, à DE. Ce qui eſt propoſé.

THEOREME 19. PROP. 19.

Si comme le tout eſt au tout, ainſi le retranché au retranché; auſſi le reſte ſera au reſte, comme le tout au tout.

Soit la toute AB, à la toute CD, comme la retranchée AE, à la retranchée CF. Ie dis que le reſte EB, ſera au reſte FD, comme la toute AB, eſt à la toute CD.



Car puiſque AB, eſt à CD, comme AE, à CF, en changeant, AB ſera à AE, comme CD, à CF: Donc en diuiſant, EB ſera à AE, comme FD, à CF. Partant, en permutant derechef, EB ſera à FD, comme AE à CF: c'eſt à dire, comme la toute AB, à la toute CD. Puiſque AB, eſt poſée à CD, comme AE, à CF. Donc ſi comme le tout, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

16. 5.

17. 5.

COROLLAIRE.

D'icy ſera demonſtré le moyen d'argumenter és proportions, qui eſt pris de la conuerſion de raiſon, ſelon la 16. definition.

Car

Car ſoit comme A B, à C B, ainſi D E, à F E. Ie dis que par conuerſion de raiſon, comme A B eſt à A C: ainſi D E, à D F: Car puis que comme A B, eſt à C B, ainſi D E, eſt à F E, en diuiſant A C, ſera à C B, comme D F, à F E. Donc en changeant, comme C B, à A C, ainſi F E, à D F: Et partant, en compoſant, comme A B, ſera à A C, ainſi D E, à D F. Ce qui eſt propoſé. 5ig. Scho. 18. 17. 5.

THEOREME 20. PROP. 20.

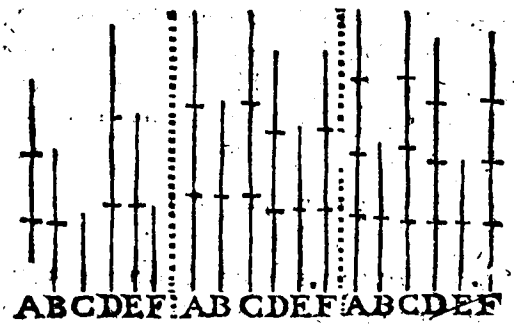
S'il y a trois grandeurs, & d'autres égales à icelles en nombre, leſquelles ſoient priſes de deux en deux, & en meſme raiſon: Et qu'en raiſon egale, la premiere ſoit plus grande que la troiſieſme, auſſi la quatrieſme ſera plus grande que la ſixieſme: Et ſi egale, egale; Et ſi plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F. Et ſoit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F. Et premierement A, 1. ſoit plus grande que C, 3. Ie dis que D, 4. ſera plus grande que F, 6.

Car puis que A, eſt plus grande que C: il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à B. Mais comme A à B, ainſi D à E. Il y aura donc plus grande raiſon de D à E, que de C à B. Mais comme C à B, ainſi F à E (car puis que comme B à C, ainſi E à F, en changeant comme C ſera à B, ainſi F ſera à E.) Il y a pareillement donc plus grande 8. 5. 13. 5.

raiſon

10. 5. raison de D, à E, que de F à E. Partant D, sera plus grande que F : Ce qui est proposé.



7. 5. Secondement, soit A egale à C. Ie dis que D sera égale à F. Car puis que A est egale à C, comme A
11. 5. sera à B, ainsi C à B. Mais comme A est à B, ainsi D est à E. Donc D sera à E, comme C à B, mais comme C est à B, ainsi F à E, (par raison inuerse comme
9. 5. auparauant :) Partant D sera pareillement à E, comme F à E : Donc D & F seront egales. Ce qui est proposé.

Tiercement, soit A moindre que C. Ie dis que D est moindre que F : Car puis que A est moindre que C, il y aura moindre raison de A à B, que de
8. 5. C à B : mais comme A est à B, ainsi D à E. Il y aura donc moindre raison de D à E, que de C à B. Mais par raison inuerse, comme deuant, comme C est
15. 5. à B, ainsi F est à E. Donc il y a moindre raison de D à E, que de F, à E. Partant D sera moindre que F.
10. 5. Ce qui est proposé. Donc s'il y a trois grandeurs, &c.

THEO

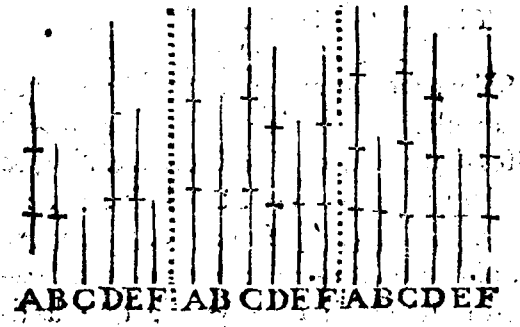
THEOREME 21. PROP. 21.

S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles en nombre, lesquelles soient prises deux à deux, & en mesme raison, & que leur proportion soit troublée, ou sans ordre. Mais qu'en raison egale, la premiere soit plus grande que la troisiesme ; la quatriesme sera aussi plus grande que la sixiesme ; & si egale, egale ; & si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, lesquelles soient prises de deux en deux, & en mesme raison, & soit leur proportion troublée, ou sans ordre, c'est à dire : Soit comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E : Mais soit premierement A 1. plus grande que C 3. Ie dis que D 4. sera aussi plus grande que F 6.

Car puis que A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B, que de C à B, mais comme A est à B, ainsi E est à F. Il y a pareillement donc plus grande raison de E à F, que de C à B. Mais d'autant que comme B est à C, ainsi D est à E, par raison inuerse, comme C à B, ainsi E à D. Parquoy il y aura aussi plus grande raison de E à F, que de E à D ; & partant D sera plus grande que F. Ce qui est proposé. 5. *e.* 13. 5. 10. 5.

Secondement, soit A egale à C. Ie dis que D, sera egale à F ; Car puis que A est egale à C, com- 7. 5.



me A ſera à B, ainſi C ſera à B, mais comme A eſt à B, ainſi E eſt à F : Donc, comme C eſt à B, ainſi E
11. 5. ſera à F : Mais par raiſon inuerſe, comme C eſt à
9. 5. B, ainſi E eſt à D comme auparauant. Donc comme E ſera à F, ainſi E ſera à D : & partant D ſera egale à F. Ce qui eſt propoſé.

Finalement, ſoit A moindre que C. Ie dis que D
8. 5. ſera moindre que F : Car puis que A eſt moindre que C, il y aura moindre raiſon de A à B, que de C à B : Mais comme A eſt à B, ainſi E eſt à F. Il y a
10. 5. donc moindre raiſon de E à F, que de C à B. Mais d'autant que comme auparauant, par raiſon inuerſe, comme C eſt à B, ainſi E eſt à D, il y aura moindre raiſon de E à F, que de E à D : Parquoy D ſera moindre que F ; Ce qui eſt propoſé. Si donc trois grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 22. PROP. 22.

S'il y a tant de grandeurs que l'on voudra, & d'autres egales à icelles en nombre, leſquelles ſoient priſes de deux en deux,

&

& en meſme raiſon : Icelles en raiſon egale, ſeront proportionelles.

Soient premierement trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, & ſoit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F. Ie dis qu'en raiſon egale, A eſt à C, comme D eſt à F.



Car ſoient priſes G, H, equimultiples de A, D, & I, K, equimultiples de B, E, & L, M, de C, F : Et puis que A 1. eſt à B 2. comme D 3. eſt à E 4. Pareillement G, multiple de A 1. ſera à I, multiple de B 2. comme H, multiple de D 3. à K, multiple de E 4. Par meſme raiſon, puis que B. 1. eſt à C 2. comme E 3. à F 4. I, multiple de B 1. ſera à L, multiple de C 2. comme K multiple de E 3. ſera à M, multiple de F 4. D'autant donc qu'il y a trois grandeurs G, I, L, & autres trois H, K, M, leſquelles ſont priſes de deux en deux, & en meſme raiſon. Il aduiendra que ſi G 1. excede L 3. que H 4. excedera M 6. & ſi egale, egale : & ſi plus petite, plus petite. Parquoy, puis que G, H, equimultiples de la 1. A, & de D 3. ou defaillent enſemble de L, M, equimultiples de C 2, & de F 4. ou enſemble ſont egales, ou enſemble excedent en quelconque multiplication que ſoient priſes ces equimultiples : A 1. ſera à C 2. comme D 3. eſt à E 4. Ce qui eſt propoſé. 4. 5. 4. 5. 20. 5. 6. d. 5.

Derechef, ſoient plus de trois grandeurs, en ſorte que C ſoit auſſi à N, comme F à O. Ie dis d'auantage, que comme A ſera à N, ainſi D ſera à O: Car puis qu'il eſt deſia monſtré en trois grandeurs que A eſt à C, comme D à F: mais C eſt poſé à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs à A, C, N, & autres trois D, F, O, leſquelles ſont priſes de deux en deux en meſme raiſon. Donc en raiſon egale demonſtrée en trois grandeurs: derechef, comme A ſera à N, ainſi D à O. Semblablement, l'on monſtrera le meſme en cinq grandeurs, par quatre, comme il a eſté demonſtré en quatre par trois, & ainſi de pluſieurs. Partant s'il y a tant de grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous n'obmettrons icy vn Theoreme, lequel eſt fort vſité entre les anciens Mathematiciens, qui eſt tel.

Si la premiere, a meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme: les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme, auront auſſi meſme raiſon à la ſeconde & à la quatrieſme. Semblablement les equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme, auront auſſi meſme raiſon à la premiere & à la troiſieſme. Et au contraire, la ſeconde & la quatrieſme auront meſme raiſon aux equimultiples de la premiere & de la troiſieſme: pareillement

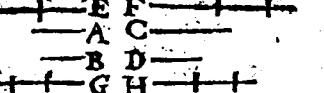
auſſi

aussi la premiere & la troisiesme auront mesme raison aux equimultiples de la seconde & de la quatriesme.

Soit A 1.à B 2.comme C 3.à D 4. & soient prises E,F,equimultiples de A,C : Et G,H,equimultiples de B,D. Ie dis que E est à B, comme F à D. Pareillement, que G est à A, comme H à C, & au contraire : que B est à E, comme D à F : semblablement,que A est à G,comme C à H.

Car,d'autant que E est à A,comme F à C,par la construction, puis que E, F, sont equimultiples de A,C : & A est à B,comme C à D,par l'hypothese, en raison egale, comme E est à B,ainsi F sera à D. Derechef,puis que G est à B,comme H à D : d'autant que de part & d'autre y a mesme proportion multiple,par la construction ; & comme B est à A, ainsi D à C : Car puis que A est posée à B,comme C à D,en raison inuerse, comme B sera à A : ainsi D à C,en raison egale G sera à A,comme H à C. 22. 5. 22. 5.

Secondement, d'autant que comme B est à A, ainsi D à C, par raison inuerse ; & comme A à E, ainsi C à F:Puis que par la construction y a mesme proportion sous-multiple de part & d'autre, en raison egale, comme B sera à E,ainsi D à F. Derechef, puisque A est posé à B, comme C à D,& comme B est à G, ainsi D est à H : D'autant que par la construction en l'vn & en l'autre, y a mesme raison sous-multiple, en raison egale, comme A à G,ainsi C à H. Ce qui est proposé. 22. 5.



D'où est manifeste vn moyen d'argumenter, du-

quel ſe ſeruent le plus ſouuent les Geometres: ſpecialement Archimedes, Apollonius Pergeus, Theon & autres, à ſçauoir, comme A eſt à B, ainſi C à D. Donc, comme E double, ou triple, ou quadruple, &c. de A eſt à C: ainſi pareillement F double, triple, ou quadruple, &c. de C, ſera à D. Semblablement, comme A eſt à B, ainſi C à D: Dont comme A eſt au double, triple ou quadruple, &c. de B, ſçauoir à G, ainſi pareillement C, ſera au double, triple ou quadruple, &c. de D, ſçauoir à H.

THEOREME 13. PROP. 13.

S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles, en nombre, priſes de deux en deux, & en meſme raiſon: & que leur proportion ſoit troublée, en raiſon egale; elles ſeront auſſi en meſme raiſon.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, priſes de deux en deux, & en meſme raiſon, & que leur proportion ſoit troublée: c'eſt à dire, ſoit A à B, comme E à F, & B à C, comme D à E. Ie dis qu'en raiſon egale, comme A ſera à C, ainſi D ſera à F.

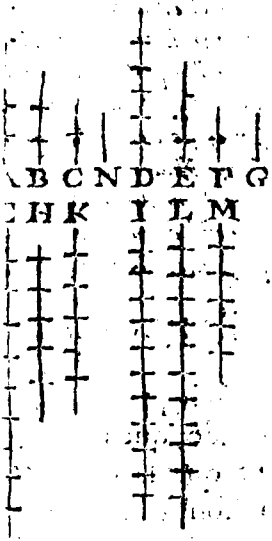
Car ſoient priſes G, H, I, equimultiples de A, B, D: ſemblablement K, L, M, equimultiples de C, E, F, comme A ſera à B, ainſi G ſera à H, puis que G, H, ſont equimultiples de A, B: Mais comme A à B, ainſi E à F. Donc comme G à H, ainſi E à F: mais comme E à F, ainſi L à M, puis que L, M, ſont equimultiples de E, F. Donc G ſera pareillement

15. 5. 11. 5. 15. 5. 11. 8.

ment à H, comme L à M. Derechef, d'autant que B 1. eſt à C 2. comme D 3. à E 4. Pareillement H, multiple de la 1. B, ſera à K, multiple de C 2. comme I, multiple de D 3. eſt à L, multiple de E 4. Et d'autant qu'il y a trois grandeurs G, H, K, & autres trois I, L, M, leſquelles ſont priſes deux à deux en meſme raiſon, eſtant leur proportion troublée: Puis qu'il eſt monſtré que G eſt à H comme L eſt à M, & comme H à K, ainſi I à L: Si G 1. excede K 3. I 4. excedera pareillement M 6. & ſi egale, egale: & ſi plus petite, plus petite. Parrant puis que G, I, equimultiples de la 1. A, & de D 3. ſont toutes deux plus grandes ou egales, ou plus petites que K, M, equimultiples de la 2. C, & de la 4. F: Comme A 1. ſera à C 2. ainſi D 3. ſera à F 4. Ce qui eſt propoſé. Donc s'il y a trois grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

4. 5.

21. 5.



SCHOLIE.

Que s'il y a plus de trois grandeurs, & que leur proportion ſoit troublée, ſçavoir ſi A eſt à B, comme F eſt à O, & B à C, comme E à F, & C à N, comme D à E. Ie dis que A ſera à N, comme D à O: Encore

bien que la proportion d'egalité ſoit en vſage entre les Geometres en plus de trois grandeurs, quand la proportion eſt troublée. Qui eſt la cauſe pourquoy Euclide a propoſé le Theoreme precedent de tant de grandeurs que l'on voudra, & celuy-cy de trois ſeulement. Encore qu'il ſoit auſſi veritable de pluſieurs: ce qui ſera ainſi demonſtré: puis qu'il a eſté demonſtré en trois grandeurs, que A eſt à C, comme E, à O: mais C eſt à N, par l'hypotheſe comme D à E, il y aura trois grandeurs A C N, & autres trois D, E, O, leſquelles priſes deux à deux ſont en meſme raiſon, leur proportion eſtant troublée. Donc deuoit eſtre en raiſon egale demonſtrée en trois grandeurs, comme A ſera à N, ainſi D ſera à O. Semblablement le meſme ſera demonſtré en cinq grandeurs, par quatre, comme il a eſté demonſtré en quatre par trois, & ainſi de pluſieurs. Ce qui eſt propoſé.

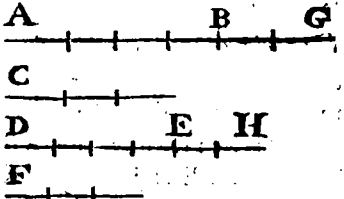
THEOREME 24. PROP. 24.

Si la premiere a meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme: Et que la cinquieſme ayt auſſi meſme raiſon à la ſeconde, que la ſixieſme à la quatrieſme: Auſſi la compoſée de la premiere & de la cinquieſme, aura meſme raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la troiſiéme & de la ſixieſme à la quatrieſme.

Soit A B, premiere à C 2. comme D E, 3. à F 4. Pareillement, ſoit B G 5. à G 2. comme E H 6. à F 4.

Ie

le dis que A G, composée de la premiere & de la cinquiesme est à C 2. comme D H, composée de la 3. & de la 6. est à F 4.



Car puis que B G est à C, comme E H à F, en changeant comme C, sera à B G, ainsi F sera à E H. Donc d'autant que A B est à C, comme D E est à F, & que C est à B G, comme F est à E H: en raison egale à A B, sera à B G, comme D E est à E H. Donc en composant la toute A G sera à B G, comme la toute D H à E H. Partant, puis que derechef A G est à B G, comme D H à E H; & B G à G, comme E H est à F; En raison egale, A G sera à C, comme D H est à F. Ce qui est proposé: Donc si la premiere, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 22. 5. 22. 5.

SCHOLIE.

Cette proposition est veritable, soit que les grandeurs A B, B G, & C, soient de mesme genre que les grandeurs D E, E H, & F, ou non: comme il est manifeste de cette demonstration.

Presque en la mesme maniere cecy sera demonstré en tout genre de proportion. Ce qui a esté demonstré au 6. Theoreme de ce liure, tant seulement aux grandeurs multiples, sçauoir est.

Si deux grandeurs ont mesme raison à deux grandeurs, & que quelques-vnes

retranchées ayent meſme raiſon à icelles; les reſtantes auront auſſi meſme raiſon à icelles.

Que A G, D H, ayent meſme raiſon à C & F, c'eſt à dire, ſoit A G à C, comme D H à F. Semblablement les retranchées A B, D E, ayent meſme raiſon à icelles C, F: De ſorte que A B, ſoit pareillement à C, comme D E à F. Ie dis que les reſtantes B G, E H, ont meſme proportion à icelles C, F: c'eſt à dire, que B G eſt à C, comme E H eſt à F. Car puis que comme A B eſt à C, ainſi D E eſt à F, par raiſon inuerſe, comme C à A B, ainſi F à D E: D'autant donc que A G eſt à C, comme D H eſt à F; & C à A B, comme F eſt à D E, en raiſon egale A G ſera à A B, comme D H eſt à D E. Pareillement, en diuiſant comme B G ſera à A B, ainſi E H à D E: Et partant, puis que derechef B G eſt à A B, comme E H à D E, & A B à C, comme D E à F, en raiſon egale B G ſera à C, comme E H à F. Ce qui eſt propoſé à la figure precedente.

12. 5.

17. 5.

12. 5.

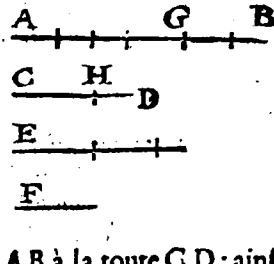
THEOREME 25. PROP. 25.

Si quatre grandeurs ſont proportionelles, la plus grande & la plus petite ſont plus grandes que les deux autres.

Soit A B à C D, comme E à F, & ſoit A B plus grande que toutes, & F plus petite. Ie dis que les deux A B & F, enſemble, ſont plus grandes que les deux C D, & E enſemble.

Car de la grandeur A B, ſoit retranchée A G egale à E, & de C D, ſoit auſſi retranchée C H, egale

egale à F. Donc A G sera à C H, comme E à F, c'eſt à dire, comme A B à C D. Partant, puis que la toute A B, eſt à la toute C D; comme la retranchée A G, eſt à la retranchée C H. Pareillement, comme la toute A B, à la toute C D: ainſi le reſte G B, au reſte H D: Mais A B (puis qu'elle eſt la plus grande de toutes) eſt plus grande que C D. Donc G B ſera auſſi plus grande que H D: Mais d'autant que A G & E, ſont egales, ſi l'on adiouſte à icelles les egales F & C H, à ſçauoir F à A G, & C H à E, A G & F enſemble, ſeront egales à E, & C H enſemble. Donc adiouſtant les inegales G B, & H D: A B & F enſemble, ſeront plus grandes que B & C D enſemble: Puis que G B eſt plus grande que H D. Ce qui eſt propoſé: Si donc quatre grandeurs ſont proportionelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



19. 5.

SCHOLIE.

Or il s'enſuit neceſſairement, que ſi la grandeur antecedente d'vne proportion, eſt la plus grande de toutes; que la conſequente de l'autre proportion ſera la plus petite de toutes: comme on peut voir en l'exemple propoſé. Car puis que comme A B, eſt à C D, ainſi E à F, & A B 1. eſt plus grande que E 3. C D 2. ſera plus grande que F 4. Semblablement, d'autant que A B, eſt plus grande que C D: pareillement E, ſera plus grande que F, à cauſe de la meſme raiſon de A B, à C D, & de E à F, comme nous auons monſtré au Scholie de la 14. Propoſition.

Que

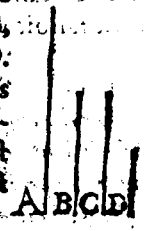
Que si au contraire l'antecedente d'vne proportion est la plus petite de toutes, la consequente de l'autre sera la plus grande, comme il appert, si l'on dit que F est à E, comme C D est à A B. Or les quatre grandeurs doiuent pareillement estre toutes de mesme genre, autrement vne grandeur ne pourroit estre composée de la plus grande & de la plus petite, ny mesme des deux restantes.

En ce lieu, Federic Commandin adiouste vn autre Theoreme, non beaucoup dissemblable de cette 25. à sçauoir.

Si trois grandeurs sont proportionelles, la plus grande & la plus petite seront plus grandes que le double de l'autre.

Soit comme A à B, ainsi B à D, & soit A plus grande, & D plus petite. Ie dis que A & D ensemble, sont plus grandes que le double de B. Car ayant pris C egale à B, comme A sera à B, ainsi C sera à D. Donc A & D ensemble, seront plus grandes que B & D ensemble [a] comme nous venons de demonstrer, c'est à dire, que la double de B. Ce qui est proposé.

a 25. 5.



Icy Euclide finit le 5. liure: mais d'autant que Campanus & quelques autres, adiousteut quelques autres Propositions, desquelles les bons Autheurs s'aident fort souuent, & les citent comme si elles esteient d'Euclide, comme Archimede, Apollonius,

Iean

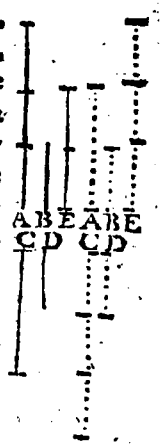
Iean de Mont-Royal, & autres ; nous les auons adiouſtées en ſuitte de ceux d'Euclide, apres Commandin & Clauius.

THEOREME 26. PROP. 26.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme: par raiſon inuerſe, la ſeconde aura moindre raiſon à la premiere, que la quatrieſme à la troiſieſme.

Que A ait plus grande raiſon à B, que C à D. Ie dis que la raiſon de B à A, eſt moindre que celle de D, à C.

Car ſoit entendu que E eſt à B, comme C eſt à D, la raiſon de A à B, ſera pareillement plus grande que celle de E à B : [b] & partant A, ſera plus grande que E : [c] parquoy il y aura moindre raiſon de B à A, plus grande que de B à E, plus petite: Mais comme B, eſt à E, ainſi par raiſon inuerſe D eſt à C. Donc la raiſon de B à A, eſt pareillement moindre que de D à C. Ce qui eſt propoſé.



b 10. 5.
c 8. 5.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

En la meſme maniere, ſi A a moindre raiſon à B, que C à D, par conuerſion de raiſon, B aura plus grande raiſon à A, que D à C, &c.

THEOREME 27. PROP. 27.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce à la quarte; auſſi en changeant la premiere aura plus grande raiſon à la tierce, que la ſeconde à la quarte.

Que A 1. ait plus grande raiſon à B 2. que C 3. à D. Ie dis qu'en permutant, A 1. aura plus grande raiſon à C 3. que B 2. à D 4. Car ſoit poſée E à B, comme C eſt à D: A aura pareillement plus grande raiſon à B, que E à B: [d] Parquoy A ſera plus grande que E. [e] Et partant il y aura plus grande raiſon de A à C, que de E à C: [f] mais d'autant qu'en changeant, comme E eſt à C, ainſi B eſt à D, (E eſtant poſée à B, comme C à D.) Donc A, aura auſſi plus grande raiſon à C, que B à D. Ce qui eſt propoſé. Voyez la ſuiuante figure.

d 10. 5.
e 8. 5.
f 6. 5.

SCHOLIE.

Nous monſtrerons ſemblablement, que ſi la premiere a moindre raiſon à la 2. que la 3. à la 4. en changeant, la 1. aura moindre raiſon à la 3. que la 2. à la 4.

Car

Car soit la raison de A à B, moindre que celle de C à D. Ie dis qu'en changeant, A aura moindre raison à C, que B à D.

Car d'autant qu'il y a moindre raison de A à B, que de C à D: Il y aura plus grande raison de C à D, que de A, à B: [h] *Donc en changeant, il y aura plus grande raison de C à A, que D à B;* [i] *& par conuersion de raison, il y aura moindre raison de A à C, que de B à D. Ce qui est proposé.*



h 27. 5.

i 26. 5.

THEOREME 28. PROP. 28.

Si la premiere a plus grande raison à la seconde, que la tierce à la quarte: La composée de la 1. auec la 2. aura aussi plus grande raison à la 2. que la composée de la 3. auec la 4. à la 4.

Car que A B, ait plus grande raison à B C, que D E, à E F. Ie dis qu'en composant A C, aura plus grande raison à B C, que D F, à E F. Car soit posée G B, à B C, comme D E, à E F, il y aura aussi plus grande raison de A B à B C, que de G B à B C: [k] partant A B, sera plus grande que G B. Adioustant



k 10. 5.

donc

donc la commune B C, A C ſera plus grande que G C : & partant, A C, aura plus grande raiſon à
l 17. 5. B C, que G C à B C : mais en compoſant l G C eſt à B C, comme D F, à E F (puiſque G B eſt poſée à B C, comme D E à E F.) Donc A C, aura plus grande raiſon à B C, que D F, à E F. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE.

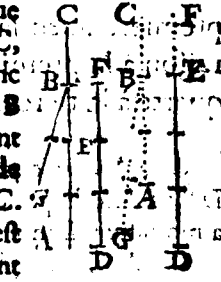
Que ſi A B, a moindre raiſon à B C, que D E à E F : auſſi en compoſant A C, aura moindre raiſon à B C, que D E à E F : Car ſoit poſée G B à B C, comme D E, à E F ; Il y aura auſſi moindre raiſon de A B,
m 10. 5. *à B C, que de G B, à B C :* m *Partant, A B, ſera moindre que G B, adiouſtant B C : A C ſera moindre*
n 8. 5. *que G C.* n *Donc il y aura moindre raiſon de A C, à B C, que de G C, à B C : Mais en compoſant comme G C à B C, ainſi D F, à F E (G B eſtant poſée à B C, comme D E à E F, il y aura donc auſſi moindre raiſon de A C à B C, que D F à F E. Ce qui eſt propoſé. Voyez la figure precedente de poinctz.*

THEOREME 29. PROP. 29.

Si la compoſée de la premiere auec la ſeconde, a plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la tierce auec la quarte, à la quarte : En diuiſant la premiere, aura auſſi plus grande raiſon à la ſeconde, que la tierce à la quarte.

Que A C, ait plus grande raiſon à B C, que D F à E F. Ie dis qu'en diuiſant A B, aura auſſi plus grande

grande raiſon à B C, que D E, à E F. Car ſoit poſée G C à B C, comme D F, à E F, la raiſon de A C, à B C, ſera auſſi plus grande que de G C à B C : o Parquoy A C, ſera plus grande que G C. Donc oſtant B C commune, reſtera A B plus grande que G B : p partant il y aura plus grande raiſon de A B à B C, que de G B à B C. Mais en diuiſant, comme G B eſt à B C, ainſi D E à E F (G C eſtant poſée à B C, comme D F, à E F,) il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A B, à B C, que de D E à E F. Ce qui eſt propoſé.



o 10. 5.

p 17. 5.

SCHOLIE.

Que ſi A C a moindre raiſon à B C, que D F à E F, auſſi en diuiſant, A B aura moindre raiſon à B C, que D E à E F : Car ſoit poſée G C à B C, comme D F à E F ; Il y aura auſſi moindre raiſon de A C à B C, que de G C à B C. q Parquoy A C ſera moindre que G C. Donc oſtant B C commune, reſtera A B, moindre que G B : r partant il y aura moindre raiſon de A B à B C, que de G B à B C : s Mais en diuiſant, comme G B à B C, ainſi D E à E F, (eſtant poſée G C, à B C, comme D F à E F.) Donc il y aura auſſi moindre raiſon de A B à B C, que de D E à E F. Ce qui eſt propoſé.

q 10. 5.

r 10. 5.

s 17. 5.

THEOREME. 30. PROP. 30.

Si la compoſée de la premiere auec la ſeconde, a plus grande raiſon à la ſeconde,

que la compoſée de la tierce auec la quarte à la quarte. Par conuerſion de raiſon, la premiere auec la ſeconde, aura moindre raiſon à la premiere, que la tierce auec la quarte à la tierce.

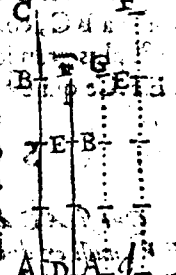
Que A C, ait plus grande raiſon à B C, que D F, à E F. Ie dis par conuerſion de raiſon, que A C, a moindre raiſon à A B, que D F, à D E.

Car A C, ayant plus grande raiſon à B C, que D F à E F, t en diuiſant A B, aura plus grande raiſon à B C, que D E à E F. Donc par conuerſion de raiſon il y aura moindre raiſon de B C à A B, que de E F à v D E, & en compoſant il y aura moindre raiſon de la toute A C, à A B, que la toute D F, à D E. Ce qui eſt propoſé.

t 29. 5.

v 26. 5.

28.



SCHOLIE.

Semblablement, ſi A C a moindre raiſon à C B, que D E à E F. Par conuerſion de raiſon, A C, aura plus grande raiſon à A B, que D F à D E. Car puis qu'il y a moindre raiſon de A C, à B C, que de D F, à E F; il y aura plus grande raiſon de D F, à E F, x 30. 3. *que de A C à B C. Donc par conuerſion de raiſon, il y aura moindre raiſon de D F à D E, que A C à A B, c'eſt à dire, qu'il y aura plus grande raiſon de A C, à A B, que de D F à D E. Ce qui eſt propoſé.*

THEO

THEOREME 31. PROP. 31.

S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles en nombre; & qu'il y ait plus grande raison de la premiere des premieres à la seconde, que de la premiere des dernieres à la seconde. Semblablement, qu'il ait plus grande raison de la seconde des premieres à la tierce, que de la seconde des dernieres à la tierce: En raison egale, il y aura aussi plus grande raison de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, & qu'il y ait plus grande raison de A à B, que de D à E, & de B à C, que de E à F. Je dis qu'en raison egale, il y aura plus grande raison de A à C, que de D à F.

Car soit posée G à C, comme E à F. Donc il y aura aussi plus grande raison de B à C, que de G à C. Parquoy B sera plus grande que G. Partant [z] il y aura plus grande raison de A à G, moindre que de A à B, plus grande. Mais la raison de A à B, est posée plus grande que de D à E: Donc il y aura encor plus grande raison de A à G, que de D à E.



[y] 10. 5.

[z] 8. 5.

Soit posée derechef H à G, comme D à E: Il y aura donc aussi plus grand

raiſon de A, à G, que de H à G: a Partant A ſera plus grande que H. b Donc A plus grande, aura plus grande raiſon à C, que H moindre à la meſme C; Mais comme H eſt à C, ainſi D eſt à F, en raiſon egale (puis que comme D eſt à E, ainſi H eſt à G, & comme E eſt à F, ainſi G à C.) Donc il y aura auſſi plus grande raiſon de A à C, que de D à F. Ce qui eſt propoſé.

a 10. 5.
b 8. 5.
c 22. 5.

SCHOLIE.

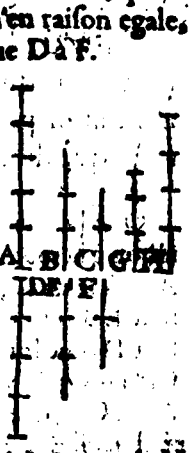
Semblablement on demonſtrera, que ſi la premiere des premieres, a moindre raiſon à la ſeconde; que la premiere des dernieres à la ſeconde: mais la ſeconde des premieres a moindre raiſon à la 3. que la 2. des dernieres à la 3. auſſi en raiſon egale, la 1. des premieres aura moindre raiſon à la tierce, que la premiere des ſecondes à la tierce.

THEOREME 32. PROP. 22.

S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles en nombre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la ſeconde des dernieres à la tierce: Pareillement, qu'il y ait plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la ſeconde: En raiſon egale, il y aura auſſi plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, & que A ait plus grande raison à B, que E à F, & B à C, que D à E. Ie dis qu'en raison egale, A aura plus grande raison à C, que D à F.



Car soit posée G à C, comme D à E. Donc B aura aussi plus grande raison à C, que G à C: [c] Partant B, sera plus grande que G; [d] Parquoy il y aura plus grande raison de A à G, moindre que de la mesme A à B plus grande. Mais il y a plus grande raison de A à B, que de E à F. Donc il y aura encore plus grande raison de A à G, que de E à F. Soit posée derechef H à G, comme E à F. Il y aura donc plus grande raison de A à G, que de H à G. [e] Donc A sera plus grande que H, parquoy [f] A aura plus grande raison à C, que H moindre, à la mesme C: [g] Mais comme H à C, ainsi D à F, en raison egale (D estant à E, comme G à C, & comme E à F, ainsi H à G:) Il y a donc aussi plus grande raison de A à C, que de D à F. Ce qui est proposé.

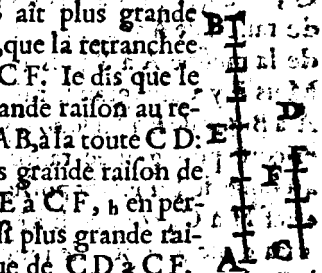
c 10. 5.
d 8. 5.
e 10. 5.
f 8. 5.
g 25. 5.

SCHOLIE.

Semblablement on monstrera, que si les raisons des premieres sont moindres; aussi la raison des extremes sera moindre, &c.

THEOREME 33. PROP. 37.

S'il y a plus grande raison du tout au tout, que du retranché au retranché: Il y aura aussi plus grande raison du reste au reste, que du tout au tout.



Que la toute A B ait plus grande raison à la toute C D, que la retranchée A E, à la retranchée C F. Ie dis que le reste E B, aura plus grande raison au reste F D, que la toute A B, à la toute C D: Car puis qu'il y a plus grande raison de A B à C D, que de A E à C F, h en permutant il y aura aussi plus grande raison de A B à A E, que de C D à C F. i Donc par conuersion de raison, il y aura moindre raison de A B à E B, que de C D à F D. k Donc en changeant il y aura aussi moindre raison de A B à C D, que de E B à F D, sçauoir le reste E B, aura plus grande raison au reste F D, que la toute A B, à la toute C D. Ce qui est proposé.

h 27. 5.

i 30. 5.

k 27. 5.

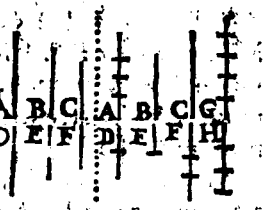
SCHOLIE

Que si A B a moindre raison à C D, que A E à C F, le reste E B aura aussi moindre raison au reste F D, que A B à C D. Comme il appert par la demonstration.

THEO

THEOREME 34. PROP. 34.

S'il y a tant de grandeurs que l'on voudra, & d'autres egales à icelles en nombre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la premiere des dernieres, que de la ſeconde à la ſeconde, & de la ſeconde à la ſeconde, que de la tierce à la tierce, & ainſi de ſuitte: Toutes les premieres enſemble auront plus grande raiſon à toutes les dernieres enſemble, que toutes les premieres, la premiere oſtée à toutes les dernieres, la premiere auſſi oſtée; Mais moindre raiſon que la premiere des premieres, à la premiere des dernieres: & finalement auſſi plus grande raiſon que la derniere des premieres à la derniere des dernieres.



Soient premierement trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, & ſoit la raiſon de A à D, plus grande que de B à E, & de B à E que de C à F. Ie dis que A, B, C enſemble, ont plus grande raiſon à D, E, F enſemble, que B, C enſemble, à E, F enſemble; mais moindre que A à D: Et finalement, plus grande que C à F.

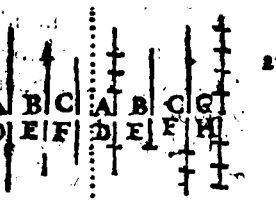
Car puis qu'il y a plus grande raison de A à B, que de B à E, en permutant il y aura plus grande
l 27. 5. raison de A à B, que de D à E : m Donc en compo-
m 28. 5. sant, il y aura plus grande raison de A, B, ensemble à B, que de D, E ensemble à E, n & en permu-
n 27. 5. tant derechef, il y aura plus grande raison de A, B, ensemble à D E, ensemble, que de B à E : Partant, la toute A, B, ayant plus grande raison à la toute
o 33. 5. D, E, que la retranchée B, à la retranchée E : o la restante A, aura aussi plus grande raison à la restante D, que la toute A, B, à la toute D E. Semblablement, il y aura plus grande raison de B à E, que de la toute B, C, à la toute E F : donc il y aura encore plus grande raison de A, à D, que de la
p 27. 5. toute B, C, à la toute E, F, p Donc en permutant il y aura plus grande raison de A à B, C, que de D
q 28. 5. à E, F, q Donc en componant, il y a plus grande raison de la toute A, B, C, à B, C, que de la toute D,
r 27. 5. E, F, à E F : r Et en permutant derechef il y a plus grande raison des toutes A, B, C, ensemble aux toutes D, E, F, ensemble, que de B, C à E F, Ce qui est premierement proposé.

Partant, y ayant plus grande raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de la retranchée B C,
s 33. 5. à la retranchée E F, s Il y aura aussi plus grande raison de la restante A, à la restante D, que de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, Ce qui est secondement proposé.

7. 5. Mais d'autant qu'il y a plus grande raison de B
28. 5. à E, que de C à F : t En permutant il y aura aussi plus grande raison de B à C, que de E à F : Et en componant, plus grande raison de la toute B C à C, que de la toute E, F à F : Et en permutant derechef, plus grande raison de B, C à E F, que de C à F.

Mais

Mais il y a plus grande raiſon de A, B, C, à D, E, F, comme il eſt monſtré, que de B C à E F : Donc il y aura encore plus grande raiſon des toutes A, B, C, aux toutes D, E, F, que de la derniere C, à la derniere F. Ce qui eſt tiercement propoſé. 27. 5.



Soient puis apres quatre grandeurs de part & d'autre auec la meſme hypotheſe : c'eſt à dire, ſoit auſſi plus grande raiſon de C 3. à F 3. que de G 4. à H 4. Ie dis qu'il s'enſuit la meſme choſe : Car comme il eſt deſia monſtré en trois grandeurs, il y a plus grande raiſon de B à E, que de B, C, G, à E, F, H : Donc il y aura encore plus grande raiſon de A à D, que de B, C, G, à E, F, H : [v] Donc en changeant il y aura plus grande raiſon de A à B, C, G, que de D à E, F, H. [x] Et en compoſant, plus grande raiſon de A, B, C, G, à B, C, G, que de D, E, F, H, à E, F, H : [y] Et en changeant plus grande raiſon de A, B, C, G, à D, E, F, H, que de B, C, G, à E, F, H. Ce qui eſt premierement propoſé. v 27. 5. x 28. 5. y 27. 5.

Donc, y ayant plus grande raiſon de la toute A, B, C, G, à la toute D, E, F, H, que de la retranchée B, C, G, à la retranchée E, F, H, [z] la reſtante A, aura plus grande raiſon à la reſtante D, que la toute A, B, C, G, à la toute D, E, F, H : Ce qui eſt ſecondement propoſé. z 33. 5.

Mais comme il eſt demonſtré en trois grandeurs, d'autant qu'il y a plus grande raiſon de B, C, G, à E, F, H, que de G à H ; & plus grande de A, B, C, G, à D, E, F, H, que de B, C, G, à E, F, H :

comme il a eſté monſtré ; il y aura beaucoup plus grande raiſon de A, B, C, G, à D, E, F, H, que de la derniere G, à la derniere H. Ce qu'eſt tiercement propoſé.

En la meſme façon, on conclura le meſme en 5. grandeurs par 4. & en 6. par 5. &c. Comme il eſt monſtré en 4. par 3.

Fin du cinquieſme Liure.



LIVRE

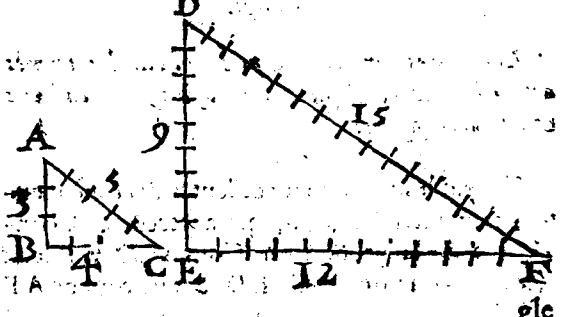
LIVRE SIXIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

I. Semblables figures rectilignes, sont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au sien, & les costez qui sont autour des angles egaux, proportionaux.

COMME les triangles A B C, D E F, seront dicts semblables, s'ils sont equiangles; c'est à dire, que l'angle A, soit egal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'an-



gle

gle F : Et ſemblablement que les coſtez autour des angles egaux ſoient proportionaux : ſçauoir eſt, comme A B, eſt à A C, ainſi D E, ſoit à D F, & comme A B, à B C, ainſi D E, à E F : & comme A C, à C B, ainſi D F, à F E.

Que ſi chacun des angles de l'vne des figures eſt egal à chacun des angles de l'autre ; mais les coſtez à l'entour des angles egaux ne ſont proportionaux, ou au contraire ; telles figures ne ſeront dictes ſemblables, comme ſont le quarré, & le quarré long. Car icelles figures ont les angles egaux, ſçauoir eſt, droicts : mais les coſtez de l'vne ne ſont proportionaux aux coſtez de l'autre. Ceux du quarré ayans raiſon d'egalité, & ceux du quarré long, autour de l'angle droict, raiſon d'inegalité. D'où il appert que toutes les figures rectilignes, equiangles & equilatteres, ayans les coſtez & les angles egaux en nombre, ſont ſemblables, combien qu'elles ſoient inegales.

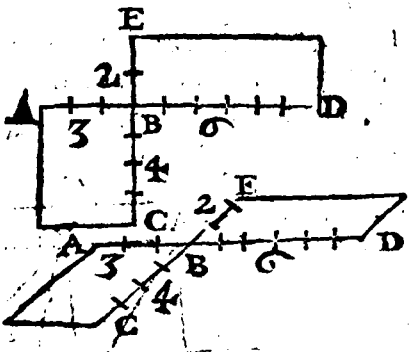
2. Les figures ſont reciproques, quand les raiſons antecedentes & conſequentes, ſont en l'vne & en l'autre figure.

Ou ainſi.

Les figures ſont reciproques, quand les termes antecedens & conſequens des raiſons, ſont en l'vne & en l'autre figure.

Car par les raiſons antecedentes & conſequentes, faut entendre les termes antecedens & conſequens de la proportion. Comme s'il y a deux rectangles ou non, A C, E D, & que comme A B

eſt



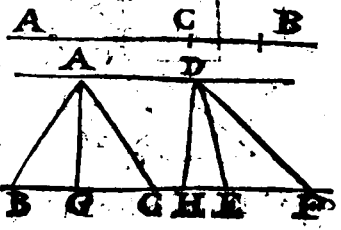
eſt à B D, ainſi E B eſt à B G, icelles figures ſeront dites reciproques : D'autant qu'en l'vne eſt le terme antecedent de la premiere raiſon, ſçauoir A B, & le conſequent de la ſeconde raiſon, ſçauoir B C: Et en l'autre eſt le terme conſequent de la premiere raiſon B D, & l'antecedent de la ſeconde E B: Telles figures ſont auſſi dites egales entr'elles, comme il ſera cy-apres demonſtré.

3. Vne ligne droicte eſt dite eſtre coupée, ſelon la moyenne & extreme raiſon, lors que la toute eſt au plus grand ſegment, comme le plus grand ſegment eſt au moindre.

Si quelconque ligne droicte comme A B, eſt diuiſée de telle ſorte au poinct C, inegalement, que la toute A B, ſoit au plus grand ſegment A C, comme iceluy meſme plus grand ſegment A C, eſt au plus petit C B : elle ſera dite eſtre diuiſée ſelon la moyenne & extreme raiſon ; Laquelle diuiſion Euclide enſeignera à la 30. Prop. de ce liure.

4. La

4. La hauteur de quelconque figure, est la ligne perpendiculaire, menée du sommet sur la base.



Si du sommet A, du triangle A B C, l'on mene A G, perpendiculaire sur la base B C, la quantité d'icelle perpendiculaire sera la hauteur ou altitude du triangle A B C; De mesme aussi la perpendiculaire D H, menée du sommet D, du triangle D E F, sur la base E F, prolongée de la part de B, sera la hauteur d'iceluy triangle D E F. Partant, si les perpendiculaires de deux figures, menées des sommets sur leurs bases, (soit que les bases soient prolongées ou non) sont egales: telles figures seront dites auoir mesme hauteur. Or telles perpendiculaires seront egales, quand les bases des figures, & les sommets seront constituez entre mesmes paralleles, comme sont A G, D H.

Car puis que les angles A G H, D H G, inclines, & de mesme part, sont egaux à deux droicts, ains pour mieux dire droicts: [a] A G, D H, seront paralleles; mais A D, G H, sont aussi paralleles: D'autant que les triangles sont posez estre constituez entre mesmes paralleles: donc A D, H G, sera parallelogramme, [b] & partant les costez A G, D H, seront egaux: Donc iceux triangles seront dicts auoir mesme hauteur. Que si aux mesmes triangles l'on pose C & F, pour les sommets, & A B, D E,

a 28. 1.

b 34. 1.

D E, pour les baſes, iceux triangles ne ſeront pas dits auoir meſme hauteur : Car la perpendiculaire menée de F, à la baſe D E, n'eſt pas egale à la perpendiculaire menée de C, ſur la baſe A B : ces triangles ne pouuans eſtre conſtituez entre meſmes parallèles, comme il eſt manifeſte.

5. Vne raiſon eſt dicte eſtre compoſée de raiſons, quand les quantitez des raiſons multipliées entr'elles, font quelque raiſon.

D'autant que le Denominateur de quelconque raiſon exprime la quantité de la grandeur antecedente, au reſpect de la conſequente, (comme le Denominateur de la raiſon quadruple, à ſçauoir, 4. monſtre qu'en toute raiſon quadruple la grandeur antecedente contient quatre fois la conſequente : mais le Denominateur de la raiſon ſubquadruple à ſçauoir $\frac{1}{4}$. demonſtre que la grandeur antecedente eſt la quatrieſme partie de la conſequente, &c. (le Denominateur a de couſtume d'eſtre appellé par les Geometres, la quantité de la raiſon ; de ſorte que c'eſt meſme choſe que la quantité de quelque raiſon, & le Denominateur d'icelle.) Donc cette definition nous enſeigne qu'vne raiſon eſt dicte eſtre compoſée de deux ou pluſieurs raiſons, quand les Denominateurs ou quantitez d'icelles multipliées entr'elles, feront icelle raiſon : (ou comme traduict Zambert) feront la quantité ou denominateur d'icelle raiſon : Comme la raiſon duodecuple eſt dite eſtre compoſée de la double & ſextuple:

sextuple : D'autant que le denominateur de la raison duodecuple, à sçauoir douze, est produit de la multiplication du denominateur de la raison double, sçauoir de deux, par le denominateur de la sextuple : c'est à dire par six. Ainsi la mesme raison duodecuple est dicte estre composée de la triple & de la quadruple : Car de la multiplication de 3. par 4. est produit le denominateur 12. de la raison duodecuple. Semblablement, la raison trigecuple est dicte estre composée de la double, triple & quintuple. Car les denominateurs d'icelles 2.3.5. multipliez entr'eux, produisent 30. denominateur d'icelle raison trigecuple. Ainsi la raison double est dicte estre composée de la sesquialtere & sesquitierce : D'autant que du denominateur de la sesquialtere, qui est $1\frac{1}{2}$. multiplié par $1\frac{1}{3}$. denominateur de la sesquitierce est produit 2. denominateur de la double.

Derechef, la mesme raison double est composée de la sesquiseptiéme, & de la supertripartiente quatriémes : car les denominateurs de ces raisons $1\frac{1}{7}$. $1\frac{1}{4}$. multipliez entr'eux, produisent 2. denominateurs de la double. Semblablement, la mesme raison double sera dicte estre composée de la subsequiquarte, & de la double sesquialtere : D'autant que les denominateurs d'icelles $\frac{4}{5}$. & $2\frac{1}{2}$. multipliez entr'eux, produisent pareillement le mesme denominateur de la raison double, sçauoir 2. &c.

Donc, si on propose tant de grandeurs qu'on voudra d'ordre A, B, C, D, sçauoir A à B, en raison double, B à C, triple, & C à D, quintuple, la raison des extremes A & D, sera trigecuple.

decuple, laquelle sera dite estre composée des raisons moyennes : Car si on multiplie le denominateur de A à B, qui est 2. par celuy de B à C 3. l'on aura 6. denominateur de la raison de A à C. Donc A à C, a raison sextuple. Derechef, multipliant 6. denominateur de la raison de A à C, par celuy de C à D, 5. l'on aura 30. denominateur de la raison de A à D. Parquoy A sera à D, en raison tridecuple, &c.

60. 30. 10. 2.
A, B, C, D.

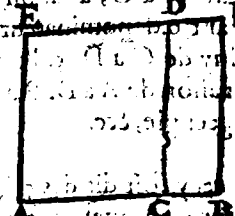
Et cecy soit dit des 5. Definitions d'Euclide sur ces 6. liure, ausquelles sera adiousté la suiuante, pour rendre plus intelligibles, tant les 27. 28. 29. & 30. Prop. de ce 6. liure, que de plusieurs autres du 10. qui est telle.

6. Vn parallelogramme estant appliqué selon quelque ligne droicte, est dit defaillir d'icelle, d'vn parallelogramme, quand il n'occupe pas toute ladite ligne ; mais est dict exceder, quand il occupe vne plus grande ligne, que celle, selon laquelle il est appliqué : En sorte toutefois que le parallelogramme excedant ou defaillant, ait mesme hauteur que le parallelogramme, duquel il defaut ou excede, & constituë auec iceluy vn seul parallelogramme.

Soit la ligne A B, sur laquelle soit constitué le parallelogramme A D, n'occupant toute la ligne A B, mais laissant C B : ayant acheué le parallelo-

gramme A F, le parallelogramme A D, appliqué selon la ligne A B, sera dit defaillir d'icelle, du parallelogramme C F : de sorte que C F sera appellé le defaut.

Derechef, soit A C, sur laquelle soit constitué le parallelogramme A F, ayant le coſté A B, plus grand que A C, auquel soit menée C D, parallele à B F, le parallelogramme A F, appliqué selon A C, sera dit excoder A C, du parallelogramme C F, en sorte que C F, soit dit l'excez.



Or ce defaut ou excez aux rectangles, peut estre quarré, ou quarré long : & aux parallelogrammes non rectangles, rhombe ou rhomboïde, comme il est manifeste.

SCHOLIE.

Clauius, qui a tiré cette Definition, tant de la 27. qu'autres suiuantes Propoſitions de ce liure, a manqué à la fin d'icelle, où il dit Ita tamen vt parallelogrammum deficiens, aut excedens, eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituanque cum eo totum vnum parallelogrammum. *C'eſt à dire : En ſorte toutefois que le parallelogramme defaillant, ou excedant, ait meſme hauteur que le parallelogramme appliqué, & conſtituë auec iceluy vn ſeul parallelogramme.* Au lieu qu'il

qu'il doit dire : *En sorte toutefois, que le parallelogramme defaillant, ou excedant, ait mesme hauteur que l'excez ou defaut, &c.* Car le parallelogramme defaillant ou excedant, est celuy mesme qui est appliqué : donc il ne doit dire qu'il doit auoir mesme hauteur que luy mesme, & constituer auec luy mesme vn seul parallelogramme, attendu qu'il ne se peut faire autrement : mais bien qu'il doit estre de mesme hauteur que le defaut ou excez.

Or que le parallelogramme defaillant ou excedant, soit celuy mesme qui est appliqué, & l'autre qui constitue vn parallelogramme auec luy, soit le defaut ou excez ; il appert assez tant par le texte d'Euclide, que le comment de Theon.

Πάντων δὲ τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραλληλογράμμων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁ μείζων τε καὶ ὁ μείων τοῖς ἀπὸ τῆς ἡμισείας λειπομένοις, μείζων δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον ὅμοιον ὂν, τῷ ἐλλείμματι. C'est à dire, de tous les parallelogrammes appliquez selon vne mesme ligne droicte, & defaillans de figures parallelogrammes semblables, & semblablement posées au parallelogramme qui est descrit sur la moitié, le plus grand est celuy qui est appliqué sur la moitié, estant semblable au defaut. Et Theon : παραβεβλήσθω, φησὶ, ἐπὶ τῆς α β, εὐθείας τὸ α δ, παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, &c. Et soit appliqué selon la ligne droicte A B, le parallelogramme A D, defaillant d'vne figure parallelogramme, &c.

Henrion Copiste, fait la mesme faute, copiant touſiours ce qu'il trouue, soit qu'il entende le sens, ou

non. Toutefois ledit Copiste, ou plustost son Traducteur, voulant corriger cette faute à la derniere Edition qu'il a faite des six premiers liures, en a faite vne semblable, en disant. En sorte toutefois, qu'iceluy parallelogramme defaillant ou excedant, ait deux angles communs auec le parallelogramme appliqué sur toute la ligne proposée; *c'est à dire, qui ait deux angles communs auec luy-mesme, qui est vne asnerie bien manifeste, le parallelogramme defaillant ou excedant, estant le mesme parallelogramme appliqué. Mais d'autant qu'il n'estoit aucun besoin d'inuenter cette Definition, attendu que la 27. 28. & 29. Propositions, se peuuent tout aussi facilement entendre, que si elle n'y estoit point (comme nous soustiendrons à qui voudra dire le contraire) nous n'en parlerons dauantage.*

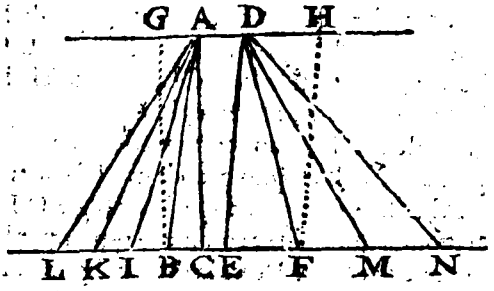
THEOREME I. PROP. I.

Les triangles & les parallelogrammes qui ont mesme hauteur, sont entr'eux comme leurs bases.

Soient deux triangles A B C, D E F, ayans mesme hauteur, desquels les bases sont B C, E F. Semblablement soient deux parallelogrammes, C G, E H, aussi de mesme hauteur, & sur les mesmes bases B C, E F. Ie dis que le triangle A B C, est au triangle D E F, & le parallelogramme C G, au parallelogramme E H, comme la base B C, est à la base E F; C'est à dire, que si la base B C, est prise pour premiere grandeur, la base E F, seconde: mais le triangle A B C, ou le parallelogramme

C G

C G troiſieſme, & le triangle D E F, ou le parallelogramme E H 4. les equimultiples de la 1. & 3. grandeur ſeront toutes deux plus grandes, ou toutes deux plus petites ou egales que les equimultiples de la 2. & 4. comme veut la ſixieſme Definition du cinquieſme liure.



Car ſoient conſtituez, tant les triangles que les parallelogrammes, entre meſmes paralleles G H, L N: [c] (Alors ils auront meſme hauteur, puiſque eſtans conſtituez entre meſmes paralleles, les perpendiculaires menées des ſommets ſur les baſes ſeront egales, comme il eſt dit en la 4. Definition,) & de B L, ſoient priſes B I, I K, K L, chacune egale à la baſe B C. c 4. d.

Semblablement de F N, ſoient priſes F M, M N, chacune egale à E F; & des ſommets A & D, ſoient menées les droictes lignes A I, A K, A L, D M, D N: [d] les triangles A B C, A I B, A K I, A L K, eſtans conſtituez ſur baſes egales & entre meſmes paralleles, ſeront egaux entr'eux: par meſme raiſon les triangles D E F, D F M, D M N, ſeront auſſi egaux entr'eux. d 38. 1.

Or d'autant que C L contient autant de parties

egales à B C, que le triangle A C L, contient de triangles egaux au triangle A B C, comme il est monstré, C L sera autant multiple de C B, que le triangle A C L, l'est du triangle A B C. Pareillement, d'autant que E N, contient autant de parties egales à E F, que le triangle D E N, contient de triangles egaux, au triangle D E F, comme nous auons monstré, E N sera auant multiple de E F, que le triangle D E N, l'est du triangle D E F. Mais d'autant que si la base C L, est egale à la base E N, [e] necessairement le triangle A C L, sera egal au triangle D E N, estans entre mesmes paralleles: & partant, si C L est plus grande que E N, le triangle A C L, sera plus grand que le triangle D E N: & si moindre, moindre: comme il appert par la 9, commune sentence. Donc la droicte ligne C L, & le triangle A C L, equimultiples de la premiere grandeur B C, & de la troisiesme A B C, defaudront tous deux de la droicte ligne E N, & du triangle D E N, equimultiples de la seconde grandeur E F, & de la quatriesme D E F, ou seront tous deux egaux, ou tous deux plus grands, estans prises les grandeurs comme elles s'entre-respondent: [f] Parquoy il y aura mesme raison de la 1. B C, à la 2. E F, que de la 3. A B C, à la 4. D E F, sçauoir du triangle au triangle. Doric comme la base à la base; ainsi le triangle au triangle. Ce qui est proposé.

e 38. 1.

f 6. d. 5.

Pour la seconde partie: D'autant que [g] comme le triangle A B C, est au triangle D E F; ainsi le parallelogramme C G, [h] (qui est double du triangle A B C) au parallelogramme E H, [i] (qui est double du triangle D E F,) il est manifeste que le parallelogramme [k] sera aussi au parallelogramme, comme la

g 15. 5.

h 34. 1.

i 34. 1.

k 11. 5.

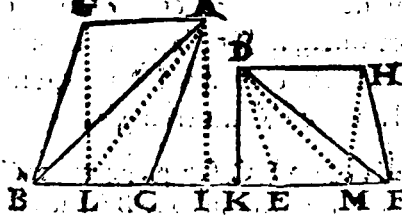
la base à la base. Ce que l'on peut aussi prouuer par le mesme discours, dont nous auons vsé en la demonstration des triangles; si premierement des poincts I, K, L, l'on mene des paralleles à B G, & aussi de M, N, à F H. Donc les triangles & les parallelogrammes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy le Theoreme suiuant pris de Commandin.

Les triangles & les parallelogrammes, constituez sur bases egales, ou sur vne mesme base, sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles A B C, D E F, & deux parallelogrammes A B, D F, ayant les bases egales B C, E F. Ie dis que le triangle A B C, est au triangle D E F, & le parallelogramme A B, au parallelogramme D F, comme la hauteur A I, à la hauteur D K.



Car posant I L, K M, egales à B C, E F: & menant L A, M D, le triangle A L I, sera egal à A B C, 38. 5. estant

estant sur bases egales L I, B C, & entre mesmes paralleles A G, I B. En la mesme maniere le triangle
m 7. 5. D K M, sera egal à D E F: m Donc comme A B C,
n 1. 6. à D E F: ainsi A L I, à D K M; n Mais comme A L I, à D K M, ainsi A I, à D K: (car posant A I, D K, pour bases, les hauteurs L I, K M, seront egales.) Donc A B C, sera aussi à D E F, comme A I, à D K. Ce qui est proposé.

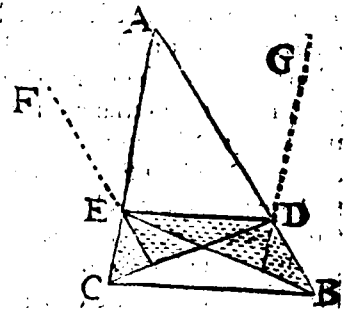
o 15. 5. Mais d'autant que, o comme A B C, est à D E F, ainsi le parallelogramme A B, double du triangle
p 34. 1. A B C, est au parallelogramme D F, p double de D E F, le parallelogramme A B, sera aussi au parallelogramme D F, comme A I, à D K. Ce que l'on peut aussi monstrer, menant L G, M H: l'on conclura le mesme, si les triangles & les parallelogrammes sont constituez sur vne mesme base, &c.

THEOREME 12. PROP. 2.

Si à l'vn des costez d'vn triangle, l'on mene quelque ligne droicte parallele, elle coupera les costez du triangle proportionellement: Et si les costez sont coupez proportionellement, la ligne droicte conioignant les poincts des sections, sera parallele à l'autre costé du triangle.

Au triangle A B C, soit premierement la ligne droicte D E, parallele au costé B C. Ie dis que les costez A B, A C, sont coupez proportionellement aux poincts D & E: c'est à dire, que A D, est à D B, comme A E, à E C.

Car



Car ayant mené les droictes lignes C D, B E, & les triangles D E B, D E C, constituez sur la base D E, & entre mesmes paralleles D E, B C, seront egaux entr'eux : Partant, comme le triangle A D E, est au triangle D E B, ainsi le mesme A D E, sera au triangle D E C: Mais comme A D E, est à D E B, ainsi la base A D, est à la base D B. (Puis que ces triangles sont de mesme hauteur comme il appert,) si par le poinct E, on mene la ligne E F, parallele à A B: (Et par mesme raison, comme le triangle A D E) au triangle D E C, ainsi la base A E, à la base E C, (A E D, D E C, estans entre mesmes paralleles A C, D G.) Donc comme A D, est à D B, ainsi A E, est à E C, puis que ces deux raisons sont de mesme à la raison du triangle A D E, au triangle D E B, & du mesme triangle A D E, au triangle D E C. Ce qui est proposé. q 37. 1. 7. 5. r 1. 6. s 11. 5.

Secondement, que la droicte ligne D E, coupe les costez A B, A C, proportionellement. Ie dis que D E, est parallele à l'autre costé C B.

Car derechef ayant mené B E, C D; comme la base A D, sera à la base D B; ainsi le triangle A D E, au triangle D E B, puis qu'ils sont de mesme hauteur : Mais comme A D, est à D B, ainsi A E, à E C, par l'hypothese. Donc comme le triangle A D E, sera au triangle D E B: ainsi A E, sera t 16. 5.

à E C. Mais derechef, comme la base A E, est à la base E C, ainsi le triangle A D E, au triangle D E C, estant de mesme hauteur. v Donc comme le triangle A D E, est au triangle D E B: ainsi le mesme triangle A D E, au triangle D E C. x Donc les triangles D E B, D E C, seront egaux: Et partant, puis qu'ils sont constituez sur mesme base, y ils seront aussi entre mesmes paralleles. Donc D E est parallele à B C. Ce qui est proposé: Partant, si à l'vn des costez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

v 11. 5.

x 9. 5.

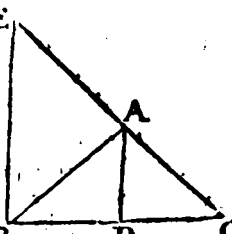
y 39. 1.

THEOREME 3. PROP. 3.

Si vn angle d'vn triangle est coupé en deux parties egales, & que la ligne droicte qui coupe l'angle, coupe aussi la base, les segments de la base auront mesme raison entr'eux, que les autres costez du triangle. Et si les segments de la base ont mesme raison entr'eux que les autres costez du triangle, la ligne droicte menée du sommet au poinct de la section, coupe l'angle du triangle en deux egalement.

Soit le triangle A B C, dont l'angle B A C, soit coupé en deux egalement, par la ligne droicte A D, qui coupe aussi la base au poinct D. Ie dis premierement, que comme B A, est à A C, ainsi B D, est à D C.

Car



Car ſoit menée B E, parallele à D A, rencontrant C A, prolongée vers E. Or elles ſe rencontreront, puis que les angles C & C B E, ſont moindres que deux droicts, [z] car C, & C D A, ſont moindres que deux droicts; [a] & C D A, eſt egal à C B E, l'externe à l'interne: C & C E B, ſeront pareillement moindres que deux droicts, & l'angle E B A, [b] ſera egal à ſon alterne B A D, & l'angle E, egal à l'externe D A C. Donc puis que les deux angles B A D, D A C, ſont egaux par l'hypotheſe; les angles E B A & E, ſeront egaux entr'eux: [c] partant les lignes A B, A E, egales entr'elles [d].

z 17. 1.
a 29. 1.
b 29. 1.
c 6. 1.
d 7. 5.

Donc, comme E A, ſera à A C, ainſi B A, ſera à la meſme A C: [e] Mais comme E A, eſt à A C, ainſi B D, eſt à D C, puis qu'au triangle B E C, la droicte ligne D A, eſt parallele au coſté B E. Donc comme B A, ſera à A C, ainſi B D, ſera à D C. Ce qui eſt propoſé.

e 2. 6.
15. 1.

Secondement, ſoit comme B A, à A C, ainſi B D, à D C. Ie dis que la droicte ligne A D, coupe l'angle B A C, en deux egalement: Car ſoit menée derechef la droicte ligne B E, par le poinct B, parallele à D A, rencontrant C A, prolongée au poinct E. D'autant donc que comme B A: eſt à A C, ainſi B D, eſt à D C, par l'hypotheſe: [f] mais comme B D, eſt à D C, ainſi E A, eſt à A C: (puis qu'au triangle B C E, la ligne A D eſt parallele

f 2. 6.

g 11. 5. lele au costé B E) g comme B A, sera à A C, ainsi
h 9. 5. E A à la mesme A C. h Donc B A, & A E, seront
i 5. 1. egales entr'elles, i partant les angles A B E & E,
k 29. 1. sont egaux: k donc puis que l'angle A B E, est egal à son alterne B A D, & l'angle E, egal à son externe D A C, les deux B A D, D A C, seront egaux entr'eux: Ce qui est proposé. Donc si l'angle d'vn triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

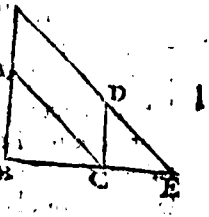
THEOREME 4. PROP. 4.

Des triangles equiangles, les costez qui sont autour des angles egaux, sont proportionaux; Et les costez qui soustiennent les angles egaux, sont homologues, ou de mesme raison.

Soient les triangles equiangles A B C, D E C, c'est à dire, que les angles A B C, D C E, soient egaux, & A & D: semblablement A C B, & E: Ie dis, que comme le costé A B, est à B C, ainsi D C, à C E, & comme B C à C A, ainsi C E à E D; Et finalement, comme A B à A C, ainsi D C à D E: Car ainsi les costez à l'entour des angles egaux, sont proportionaux: & les costez qui soustiennent les angles egaux, sont homologues, ou de mesme raison: c'est à dire, que tous les antecedens sont opposez à angles egaux, & les consequens pareillement.

Soient constituez B C, C E, en ligne droicte, en sorte que l'angle externe D C E, soit egal à l'interne A B C. Pareillement l'externe A C B, egal à l'interne

l'interne D E C : & d'autant que les deux angles A B C, A C B, sont moindres que deux droicts : mais D E C, est egal à A C B, les deux angles B & E, seront moindres que deux droicts : parquoy B A, E D, prolongées de la part de A & D, se rencontreront. Soient donc icelles prolongées, & se rencontrent au poinct F.



l 11. 6.

Mais d'autant que l'angle externe D C E, est egal à l'interne & oppose A B C, m C D, B F, seront paralleles, & par mesme raison C A, E F, aussi paralleles, l'angle externe A C B, estant egal à l'interne D E C. Donc A C D F, est parallelogramme : n partant A F, egale à C D, & C A, à D F. Donc d'autant qu'au triangle B E F, la ligne A C, est parallele à E F, o A B, sera à A F, c'est à dire à D C, son egale, comme B C à C E. Donc en changeant comme A B, à B C, ainsi D C, à C E.

m 28. 1.

n 34. 1.

o 2. 6.

Derechef, puisqu'au mesme triangle B E F, la ligne C D, est parallele au costé B F, comme B C, sera à C E, ainsi F D, c'est à dire C A, (qui est egale à F D) à E D. p Donc en changeant comme B C, à C A, ainsi C E, à E D ; partant, puis que comme A B, à B C, ainsi D C, à C E, & comme B C, à C A, ainsi C E, à E D : en raison egale A B, sera à C A, comme D C à E D : Ce qui est proposé. Donc des triangles equiangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

p 22. 5.

COROLLAIRE 1.

D'icy il s'ensuit, que si en vn triangle on mene vne ligne parallele à vn des costez, elle ostera vn triangle

triangle semblable au tout : Comme au triangle F B E, où la ligne C D, est menée parallele à B F. Ie dis que le triangle D C E, est semblable au triangle F B E : Car iceux sont equiangles, q puis que les angles E D C, E C D, sont egaux aux extremes F & B, chacun au sien, & l'angle E, commun, r partant, comme il est demonstré, ils ont les costez autour des angles egaux proportionaux : Donc, selon la definition, ils sont semblables.

q 29. 1.

r 4. 6.

COROLLAIRE 2.

Il s'ensuit encore, que si deux triangles equiangles, c'est à dire, qui ont les costez proportionaux, sont disposez selon vn angle, en sorte que deux costez de mesme raison soient paralleles, les autres costez se rencontreront directement ; comme aux triangles cy-dessus, où A B, D C, & A C, D E estans paralleles, les autres B C, C D, se rencontrent directement, comme il est manifeste par la 14. Prop. du 1. liu. tous les angles au point C, estans monstrez egaux aux trois angles du triangle A B C, c'est à dire, à deux droicts, par la 32. Prop. du 1. liure. Ce qu'Euclide demonstre encore à la 32. doc. liure.

SCHOLIE.

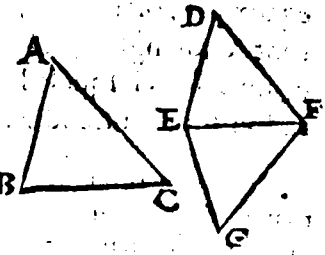
Herrion Copiste, a obmis ce premier Corollaire, ce qu'il ne deuoit faire, attendu qu'il s'en sert aux demonstrations, & le cite, sans à la 4. Proposition du 15. liure, qu'autres Propositions, & ce faisant il confirme ses demonstrations par des choses qu'il n'a demonstrées.

THEO

THEOREME 5. PROP. 5.

Si deux triangles ont les costez proportionaux, iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, sous lesquels les costez de mesme raison sont soustendus.

Soient deux triangles A B C, D E F, qui ayent les costez proportionaux : & soit A B à B C, comme D E à E F, & comme B C à C A : ainsi E F à F D, & finalement, comme A B à A C, ainsi D E à D F. Ie dis que ces triangles sont equiangles ; à sçauoir, que l'angle A, est egal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F : ainsi les costez homologues ou de mesme raison, sont opposez aux angles egaux.



Car soit fait l'angle F E G, egal à l'angle B, & E F G, egal à C, les deux lignes E G, F G, se rencontreront au poinct G. Et [f] l'autre angle G, sera egal à l'autre angle A. Donc les triangles A B C, G E F, sont equiangles : [t] Partant, comme A B à B C, ainsi G E à E F. Mais comme A B à B C, ainsi D E à E F, par l'hypothese : [v] Donc comme G E à E F, ainsi D E à la mesme E F : parquoy G E, D E, seront egales.

[f] 32. 1.

[t] 4. 6.

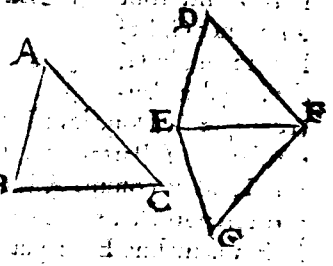
[v] 11. 5.

Derechef,

x 4. 6. Derechef, puis que B C x est à C A, comme E F à
y 11. 5. F G : y mais comme B C, est à C A, ainsi E F, à F D,
par l'hypothese : Comme E F, sera à F G, ainsi la
z 9. 5. mesme E F, sera à F D, z donc F G, & F D, seront
egales. Partant puis que les costez G E, G F, sont
egaux aux costez D E, D F, chacun au sien, & la ba-
a 8. 1. se E F, a commune, les angles G & D, seront egaux:
b 4. 1. b Donc les autres angles G E F, G F E, seront egaux
aux autres D E F, D F E, chacun au sien. Parquoy
puis que l'angle G est egal à l'angle A, aussi D son
egal, sera egal à A, par mesme raison D E F, egal à
B, & D F E, egal à C. Ce qui est proposé. Donc si
deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 6. PROP. 6.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez autour d'iceux angles egaux proportionaux, iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, sous lesquels les costez de mesme raison sont soustendus.



Soit l'angle B, du triangle A B C, egal à l'angle E, du triangle D E F : & soient les costez A B, B C, proportionaux aux costez D E, E F; c'est à dire, soit A B, à B C, comme D E, à E F. Ie dis que

les

les autres angles ſont egaux aux autres angles, ſçauoir l'angle A, egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F: ainſi les angles egaux ſont oppoſez aux coſtez homologues ou de meſme raiſon.

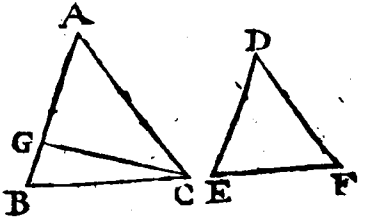
Car ſoit faict l'angle F E G, egal à B, & E F G, egal à C, le triangle G E F, ſera equiangle, au triangle A B C, comme il eſt monſtré en la precedente Propoſition. [c] Partant, comme A B à B C, ainſi G E à E F: mais comme A B à B C, ainſi D E à E F, par l'hypotheſe. [d] Donc comme D E à E F, ainſi G E à la meſme E F. Donc D E, G E, ſeront egales: parquoy, puis que les coſtez D E, E F, ſont egaux aux coſtez G E, E F, & les angles contenus d'iceux auſſi egaux, (car l'angle B, auquel l'angle G E F eſt fait egal, eſt egal à D E F par l'hypotheſe: donc les deux angles au poinct E ſeront egaux) [e] les autres angles D, & E F D ſeront egaux aux autres G, & E F G. Donc puis que l'angle G eſt egal à l'angle A, & E F G egal à C, les angles D, & E F D, ſeront auſſi egaux aux angles A & C: & partant les triangles A B C, D E F, ſeront equiangles, ce qui eſt propoſé. Donc ſi deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 4. 6.
d 11. 5.
9. 5.
e 4. 1.

THEOREME 7. PROP. 7.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & à l'entour d'vn autre angle les coſtez proportionaux: Mais des autres enſemble, l'vn & l'autre ſoit moindre, ou non moindre qu'vn droict: les triangles ſeront equiangles, & auront les angles egaux à l'entour deſquels les coſtez ſont proportionaux.

Soit l'angle A, du triangle A B C, egal à l'angle D, du triangle D E F, & les costez A C, C B, à l'entour de l'angle A C B, proportionaux à D F, F E, à l'entour de l'angle F, c'est à dire, soit A C à B C, comme D F à F E: à telle condition toutefois, que chacun des autres angles B & E, soit moindre qu'vn droict ou non moindre. Ie dis qu'iceux triangles sont equiangles, à sçauoir, que les angles A C B, & F, à l'entour desquels les costez sont proportionaux, & les angles B & E sont egaux.



Car soit premierement tant B que E, moindre qu'vn droict: cela estant, si les angles A C B & F sont egaux, la Proposition est manifeste: Mais si A C B & F, ne sont egaux, soit A C B plus grand que F, & soit fait A C G, egal à F. Donc puis que A, est posé egal à D, [f] l'autre angle A G C, sera egal à E. Partant, les triangles A G C, D E F, seront equiangles. [g] Parquoy comme A C, sera à C G, ainsi D F à E F. Mais comme D F à F E, ainsi A C à C B, par l'hypothese. [h] Donc comme A C à C G, ainsi la mesme A C à C B: [i] Et partant C G, C B, seront egales, [k] & les angles C B G, C G B, seront egaux.

f 32. 1.
g 34. 6.
h 11. 5.
i 9. 5.
k 5. 1.
13. 1.

Donc puis que l'angle B, est posé moindre qu'vn droict C G B, sera aussi moindre qu'vn droict, & partant A G C, sera plus grand qu'vn droict: Puis que A G C, C G B, sont egaux à deux droicts. Or l'angle A G C, est monstré egal à l'angle E: Donc l'angle E, sera aussi plus grand qu'vn droict: Mais

il eſt moindre qu'vn droit par l'hypotheſe. Ce qui eſt impoſſible.

Secondement, ſoit tant l'angle B, que E, non moindre qu'vn droict; comme auparauant l'angle B, ſera egal à C G B; & partant C G B, ſera non moindre qu'vn droit: & par ainſi les angles C B G, C G B, au triangle B C G, ne ſeront pas moindres que deux droits: mais plus grands ou egaux à deux droits, ce qui eſt abſurde; [l] Car ils ſont moindres que deux droits: donc les angles A C B & F, ne ſont pas inegaux, mais egaux, & partant [m] les autres angles B & E ſont egaux; Ce qui eſt propoſé. Donc ſi deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

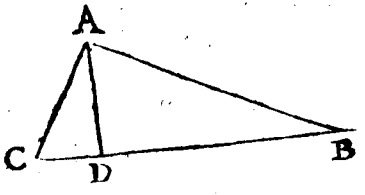
[l] 17. 1.

[m] 32. 1.

THEOREME 8. PROP. 8.

Si au triangle rectangle, l'on mene vne ligne perpendiculaire de l'angle droict, ſur la baſe, les triangles qui ſont de part & d'autre de la perpendiculaire, ſont ſemblables au tout, & entr'eux.

Au triangle A B C, l'angle B A C, ſoit droict, duquel ſoit menée la perpendiculaire A D, ſur la baſe C B. Ie dis que les triangles A D B, A D C, ſont ſemblables à tout le triangle A B C, & entr'eux.



Car puis qu'aux triangles A B C, D B A, les angles B A C, & A D B, ſont droicts, & l'angle B commun, [n] les autres A C B, & D A D, ſeront egaux. Donc le triangle D B A, eſt equian-

[n] 32. 1.

o 4. 6. gle au triangle A B C, o & partant ils auront les costez à l'entour des angles egaux proportionaux, &c. C'est à dire, que C B, sera à B A, comme B A à B D, & comme B A à A C: ainsi B D à D A, & comme B C à C A, ainsi B A à A D: car ainsi les costez de mesme raison sont opposez aux angles egaux, comme veut la quatriesme Proposition de ce liure. Parquoy le triangle A D B, est semblable à tout le triangle A B C. Par mesme raison on monstrera que le triangle A D C, est semblable au mesme triangle A B C: Car les angles B A C, & A D C, sont droicts, & l'angle C commun; p Partant les autres angles A B C, & C A D, sont egaux, q parquoy comme B C à C A, ainsi C A à C D, & comme C A à A B, ainsi C D à D A, & comme C B à B A, ainsi C A à A D: car ainsi les costez de mesme raison sont opposez aux angles egaux, par la quatriesme Proposition du sixiesme.

p 21. 1.

q 4. 6.

Tout de mesme, l'on demonstrera que les triangles A D B, A D C, sont semblables entr'eux: puis que les angles A D B, A D C, sont droicts, & A B D, C A D, sont monstrez egaux, & aussi les angles B A D, A C D, egaux. r Et partant, comme B D à D A, ainsi D A à D C; & comme D A à A B, ainsi D C à C A, & comme A B à B D, ainsi C A à A D. Donc si au triangle rectangle l'on mene vne ligne perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

r 4. 6.

COROLLAIRE.

De cette Proposition il est euident, que la perpendiculaire menée de l'angle droict sur la base, au triangle rectangle, est moyenne proportionelle entre les deux segments de la base. Semblablement

vn

vn chacun des costez qui contiennent l'angle droict, est moyen proportionel entre toute la base, & le segment de la base qui est adiacent, ou touche iceluy costé.

Car il est demonstré que comme B D est à D A, ainsi D A est à D C : & partant D A, est moyenne proportionelle entre B D & C D. Semblablement comme C B est à B A, ainsi B A à B D ; & par ainsi B A est moyenne proportionelle entre C B, B D. Finalement, il est demonstré que comme B C est à C A, ainsi C A est à C D. Et partant C A est moyenne proportionelle entre B C, & C D. Ce qui est proposé.

SCHOLIE.

" *Le Copiste & son Traducteur, ont adiousté ces mots à cette 8. Proposition.* Elle coupera iceluy triangle en deux autres triangles, *ce qui n'est pas au texte d'Euclide, comme s'ensuit.*

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι, τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. C'est à dire, au triangle rectangle, si de l'angle droict on mene vne ligne perpendiculaire sur la base, les triangles qui sont à la perpendiculaire, (ou de part & d'autre de la perpendiculaire) sont semblables au tout, & entr'eux. *Donc le texte n'est pas comme ils le pretendent traduire, & ainsi ces maroufles, ostent, adiousten, transposent ou desguisent les traductions & trauaux des autres, afin d'en faire leur propre en les copiant : Et en la seconde Proposition de ce liure cy dessus, ils adiousten ces mots.* Laquelle coupe

les deux autres costez, elle les coupera, &c. *Ce qui n'est pas au texte, comme il appert.*

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν, ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς, *&c. C'est à dire.* Si à l'vn des costez d'vn triangle l'on mene vne ligne parallele, elle coupera les costez du triangle proportionellement, &c.

En la 4. 6. & 7. Propositions, là où Euclide dit: αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας; *C'est à dire*, qui sont autour des angles egaux: *Le Copiste dit*, au long des angles egaux. *Ce vilain a esté encore si impudent, de copier 9. Propositions que i'ay adiousties à la fin du 5. liure, apres celles d'Euclide, lesquelles auparauant n'auoient esté encore traduites d'aucun, & les mettre en sa 3. Edition des 6. premiers liures, auec tout ce qu'il a copié ailleurs en ma traduction, & fait ainsi des collections de tout ce qui est traduit, & neantmoins se plaint en son Onologie, de ce que ie l'ay appellé Copiste; en quoy il a grand tort, estant recognen & tenu de tous les doctes pour le plus franc Copiste, que iamais fut Secretaire de S. Innocent.*

Et qu'ainsi ne soit, estant chez le sieur Enleaume, il copia plusieurs escrits ou collections d'iceluy, qu'il fit imprimer par apres, & l'intitula, Memoires Mathematiques, *dont il fit present d'vn exemplaire audit Enleaume, lequel en fut tellement faſché (cela estant sorty de son estude, à son deceu & mal en ordre, n'y ayant apporté la derniere main, & venu en lumiere sous le nom de Henrion) que de despit il le iette deuant ledit Henrion dedans le feu, & le fit bruſler en sa presence, luy reprochant qu'il estoit bien effronté de copier ainsi ses escrits.*

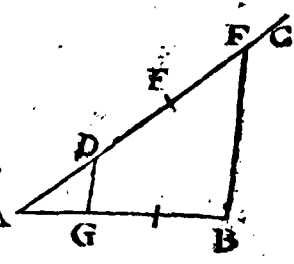
Cela

Cela eſtant ainſi paſſé, ledit Henrion s'aſſocia auec vn nommé Dimanche (lequel ſe nomme encore autrement) lequel Dimanche fit quelques remarques en correction, ſur la traduction de Monſieur Donnot, auec pluſieurs Demonſtrations, Scholies & Corollaires tirez de Clauius, que ledit Dimanche inſera en la traduction dudit Donnot pour la deſguiſer, & bailla le tout à Henrion pour le faire imprimer ſous ſon nom; & depuis Dimanche & Henrion ont ainſi continué, à ſçauoir Dimanche à traduire & colliger, & Henrion à copier, & faire imprimer & vendre. Et voila comme ce bel oyſeau ſe pare des plumes des autres.

PROBLEME 1. PROP. 9.

D'vne ligne droicte donnée, en oſter vne partie demandée.

Soit la ligne droicte donnée A B, de laquelle il faut oſter la tierce partie, ou autre telle que l'on voudra.



De A, ſoit menée A C, faiſant angle quelconque auec A B, comme C A B; Et de A C, ſoient priſes autant de parties egales, de telle grandeur qu'on voudra, que la partie à ſouſtraire denote, (car A C, doit eſtre auſſi grande qu'il ſera de beſoin) comme en l'exemple

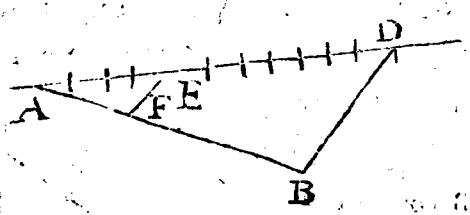
propoſé, il faut prendre trois parties egales A D, D E, E F: puis ſoit conioincte F B, à laquelle par le poinct D, ſoit menée D G, parallele à F B. Ie dis que A G, eſt la troiſieſme partie demandée de A B.

Car puis qu'au triangle A B F, D G, eſt parallele au coſté F B: [f] comme F D, à D A, ainſi B G, à G A, [t] donc en compoſant comme F A à D A, ainſi B A à G A: mais F A eſt triple de A D par la conſtruction; Donc B A, ſera auſſi triple de A G: & partant A G, ſera la tierce partie demandée de A B. Donc d'vne ligne droicte donnée, &c. Ce qu'il falloit faire.

[f] 2. 6.
[t] 18. 5.

SCHOLIE.

Mais ſi de A B, on vouloit oſter vne partie non aliquote, mais vne partie qui en contienne pluſieurs, leſquelles ne ſont vne partie aliquote, comme $\frac{4}{11}$. de A B: Il faudra prendre 11. parties egales en A C,



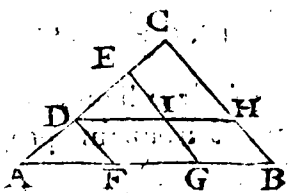
comme iuſques à D, & ayant mené D B, faut mener E F, parallele à icelle, du poinct E, terme des quatre parties A E, la ligne A F, ſera la partie requiſe: Car derechef comme D A à A E, ainſi B A à A F: Et par conuerſion de raiſon, comme A E à A D, ainſi A F à A B: mais A E eſt $\frac{4}{11}$. de A D, par la conſtruction:

conſtruction : donc A F, ſera meſme partie de A B: Ce qui eſt propoſé. Semblablement on oſtera quelconque autre partie non aliquote, &c.

PROBLEME 2. PROP. 10.

Couper vne ligne droicte donnée, non coupée : ſemblablement à vne ligne droicte donnée & coupée.

Soit la ligne droicte A B, qu'il faut couper ſemblablement comme la ligne droicte A C, eſt coupée aux poincts D & E ; c'eſt à dire en parties proportionelles, aux parties A D, D E, E F. Soient conioinctes les deux lignes données au poinct A, faiſant angle quelconque B A C, & ſoit conioincte la ligne droicte B C, puis de D & E ſoient menées D F, E G, paralleles à B C. Ie dis que A B, eſt coupée ſemblablement à F & G, comme A C eſt coupée par D, E : [v] c'eſt à dire, comme A D à D E, ainſi A F à F G. Donc les parties A F, F G, ſont proportionelles à A D, D E. Que ſi on mene D H, parallele à F B, coupant E G au poinct I. [x]



v 2. 6.

x 2. 6.

Derechef, comme D E ſera à E C, ainſi D I à I H : c'eſt à dire, ainſi F G à G B : [y] D'autant que F G eſt egale à D I, & G B à I H, parquoy les parties F G, G B, ſeront auſſi proportionelles à D E, E C. Et eſt la meſme raiſon s'il y auoit d'auantage

y 34. 1.

de parties,&c. Partant nous auons coupé,&c. Ce qu'il falloit faire.

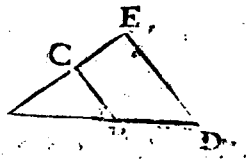
SCHOLIE.

Par ce Probleme on diuisera vne ligne en tant de parties egales que l'on voudra, comme si l'on vouloit diuiser A B en 11. parties egales, soit menée A C, faisant angle auec A B, & en A C, soient prises 11. parties egales, sçauoir A D, & menée D B, puis de tous les poincts de diuision, soient menées sur A B, des lignes paralleles à D B, comme est E F, l'on aura le requis. Voyez la figure du Scholie precedent.

PROBLEME 3. PROP. 11.

A deux lignes droictes données, trouuer la troisiesme proportionelle.

Soient deux lignes droictes A B, A C, disposées en sorte qu'elles facent angle quelconque A, auxquelles il faut trouuer la troisiesme proportionelle, c'est à dire, comme A B est à A C, ainsi A C soit à vne troisiesme.



Soit prolongée A B, posée antecedente à D, & soit prise B D, egale à A C, consequente ou moyenne : puis ayant mené B C par D, soit menée D E parallele à B C, rencontrant A C prolongée à E. Ie dis que C E, est la troisiesme proportionelle, c'est à dire, que comme A B est à A C, ainsi A C à C E.

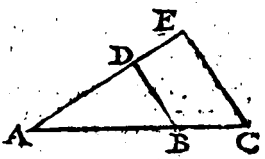
Ce

Car puis qu'au triangle A D E, B C eſt parallele à D E, [z] comme A B ſera à B D, ainſi A C ſera à C E: [z] 2. 6.
[a] Mais comme A B à B D; ainſi la meſme A B à A C, [a] 7. 5.
égale à B D: Donc comme A B à A C, ainſi A C à C E, ce qui eſt propoſé. Donc à deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 4. PROP. 12.

A trois lignes droictes données, trouuer la quatrieſme proportionelle.

Soient les trois lignes droictes données A B, B C, A D, auſquelles il faut trouuer la quatrieſme proportionelle: ſçauoir comme A B à B C, ainſi A D à la quatrieſme. Soient diſpoſées les deux premieres ſelon vne ligne droicte, laquelle ſoit A C: Mais la troiſieſme A D, auec la premiere A B, faſſe vn angle quelconque A, puis ſoit conioincte B D,



à laquelle par C ſoit menée C E, parallele, rencontrant A D prolongée à E. Ie dis que D E, eſt la quatrieſme proportionelle.

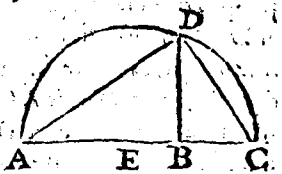
Car puis qu'au triangle A C E, B D, eſt menée parallele au coſté C E, [b] comme A B ſera à B C, [b] 2. 6.
ainſi A D à D E: Partant D E, eſt la 4. proportionelle; parquoy à trois lignes droites données, &c. Ce qu'il falloit faire.

PRO

PROBLEME 5. PROP. 13.

A deux lignes droictes données, trouuer la moyenne proportionelle.

Soient deux lignes droictes A B, B C, ausquelles il faut trouuer la moyenne proportionelle. Estant disposées selon la ligne droicte A C : soit diuisée A C en deux egalement au poinct E, & du poinct E, comme centre à l'interualle E A, ou E C, soit descrit le demy-cercle A D C : puis du poinct B à A C, soit menée la perpendiculaire B D, iusques à la circonference à D. Ie dis que B D, est moyenne proportionelle entre A B, & B C.



Car ayant mené A D, C D, [c] l'angle A D C, sera droict au demy-cercle : & puis que de l'angle droict du triangle rectangle A D C, la perpendiculaire D B, est menée sur la base A C, icelle B D, sera moyenne [d] proportionelle entre A B, B C. Donc à deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit faire.

c 31 1.

d Coroll. 8. 6.

SCHOLIE.

Par cette demonstration il est manifeste, que la ligne droicte menée de quelconque poinct du diametre du cercle à la circonference, perpendiculaire à iceluy diametre, est moyenne proportionelle entre les segments du diametre faits par la perpendiculaire. Car il sera semblablement demonstré, ayant mené les

lignes

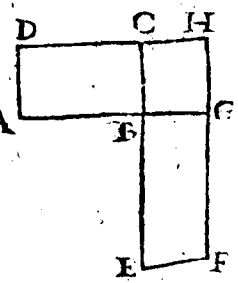
lignes des extremitez du diametre au poinct de la circonference, d'où eſt menée la perpendiculaire.

THEOREME 9. PROP. 14.

Les coſtez qui ſont autour des angles egaux, des parallelogrammes egaux, qui ont vn angle egal à vn angle, ſont reciproques : Et les parallelogrammes qui ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez autour des angles egaux reciproques, ſont egaux.

Soient deux parallelogrammes egaux A C, B F, ayans les angles A B C, E B G, egaux. Ie dis que les coſtez d'alentour d'iceux angles, ſont reciproques, c'eſt à dire, comme A B, à B G, ainſi E B, à B C.

Car ſoient conioincts iceux parallelogrammes ſelon les angles egaux: de ſorte que A B, B G, faſſent vne ligne droicte: E B, B C, [e] feront auſſi vne ligne droicte, comme il eſt euident: & ſoient prolongées D C, F G, iuſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent à H.



e 2. c. f. 13. & 14. 1.

D'autant donc que les parallelogrammes D B, B F ſont egaux: [f] comme D B ſera à B H, ainſi B F, au meſme B H: mais comme D B à B H, [g] ainſi la baſe A B, à la baſe B G. D'autant que les parallelogrammes

f 7. 5.

g 1. 6.

grammes sont de mesme hauteur : semblablement comme B F à B H, ainsi la base E B à la base B C.

h 11. 5. h Donc comme A B à B G, ainsi E B à B C. Ce qui est proposé.

Au contraire, soient les costez à l'entour des susdits angles egaux reciproques, sçauoir comme A B à B G, ainsi E B à B C. Ie dis que les parallelogrammes D B, B F, sont egaux.

Soit fait la mesme construction : puis que A B

i 1. 6. est à B G, comme E B à B C : i mais comme A B à B G, ainsi D B à B H, & comme E B à B C, ainsi B F

k 11. 5. au mesme B H, k pareillement D B, sera à B H,

l 9. 5. comme B F, au mesme B H : l Et partant les parallelogrammes D B, B F, seront egaux. Donc les costez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

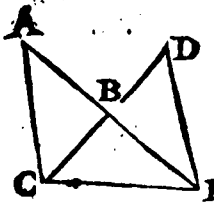
THEOREME 10. PROP. 15.

Les costez qui sont autour des angles egaux des triangles egaux, & qui ont vn angle egal à vn angle, sont reciproques: Et les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les costez qui sont autour des angles egaux reciproques, sont egaux.

Soient deux triangles egaux A B C, D B E, ayans les angles au poinct B egaux. Ie dis que les costez qui sont à l'entour d'iceux angles sont reciproques : C'est à dire, comme A B, à B E, ainsi D B, à B C.

Soient conioints iceux selon les angles egaux, de sorte que A B, B E, fassent vne ligne droicte, cela estant, D B, B C, feront aussi vne ligne droicte, comme

comme il eſt dit à la precedente : & ſoit menée C E: d'autant que les triangles A B C, D B E, ſont egaux, comme A B C, ſera à B C E, ainſi D B E, au meſme B C E: mais comme le triãgle A B C,



7. 5.

au triangle B C E, [m] ainſi la baſe A B à la baſe B E, eſtans iceux de meſme hauteur, & ſemblablement comme D B E à B C E, ainſi eſt la baſe D B, à la baſe B C; [n] Donc comme A B à B E, ainſi D B à B C. Ce qui eſt propoſé. m 1. 6. n 11. 5.

Maintenant ſoient les coſtez autour des angles egaux au poinct B, reciproques, à ſçauoir, comme A B à B E : ainſi D B à B C. Ie dis que les triangles A B C, D B E, ſont egaux.

Soit faicte la meſme conſtruction : D'autant que comme A B eſt à B E, ainſi D B à B C : mais comme A B à B E, [o] ainſi le triangle A B C, au triangle B C E, & comme D B à B C, ainſi le triangle D B E, au meſme triangle B C E. [p] Donc comme A B C, ſera à B C E, ainſi D B E, ſera au meſme B C E, & partant les triangles A B C, D B E, ſeront egaux. Donc les coſtez qui ſont autour des angles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. o 1. 6. p 11. 5.

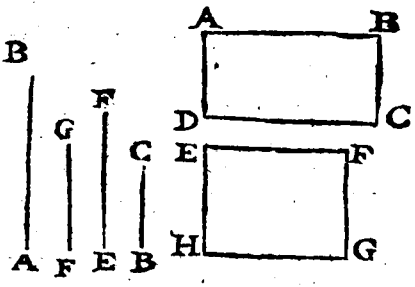
THEOREME 11. PROP. 16.

Si quatre lignes droictes ſont proportionelles, le rectangle contenu ſous les extremes, eſt egal au rectangle contenu ſous les moyennes : Et ſi le rectangle contenu ſous les extremes, eſt egal au rectangle contenu

contenu sous les moyennes ; Icelles quatre lignes droictes seront proportionelles.

Soient les quatre lignes droictes A B, F G, E F, B C, proportionelles, à sçauoir comme A B, à F G, ainsi E F à B C : & soit le rectangle A C, contenu sous les extremes A B, B C, & le rectangle E G, contenu sous les moyennes E F, F G. Ie dis qu'iceux rectangles A C, E G, sont egaux : Car puis que les angles B & F sont egaux estans droits, & que A B, est à F G, comme E F à B C. Iceux costez qui sont autour des angles egaux B & F, seront reciproques.

¶ 14. 6. ¶ Partant les parallelogrammes A C, E G, seront egaux. Ce qui est proposé.



Au contraire, soient les rectãgles A C, E G, egaux. Ie dis que les quatre lignes A B, F G, E F, B C, sont proportionelles, sçauoir, comme A B à F G, ainsi E F, à B C.

Car puis que les rectangles A C, E G sont egaux, ayans les angles B & F egaux, sçauoir

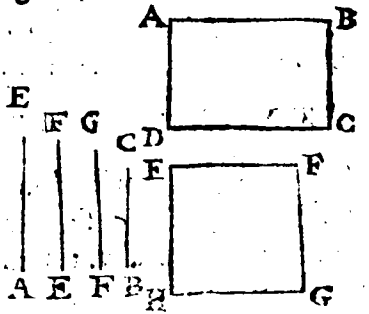
: 14. 6. droicts, les costez qui sont autour d'iceux angles seront reciproques : à sçauoir, comme A B à F G, ainsi E F à B C : partant si quatre lignes droites, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO

THEOREME 12. PROP. 17.

Si trois lignes droictes ſont proportionelles : le rectangle contenu ſous les extremes eſt egal au quarré de la moyenne : Et ſi le rectangle contenu ſous les extremes, eſt egal au quarré de la moyenne ; les trois lignes droictes ſeront proportionelles.

Soient trois lignes droictes proportionelles, A B, E F, B C : ſçauoir, comme A B à E F, ainſi E F, à B C : & ſoit le rectangle A C, contenu ſous les extremes A B, B C, & le quarré de la moyenne E F, ſoit E F G H. Ie dis que le rectangle A C, & le quarré E G ſont egaux.



Car ſoit priſe la ligne F G, egale à E F : les quatre lignes droictes A B, E F, F G, B C, ſeront proportionelles : à ſçauoir, comme A B à E F, ainſi F G à B C : Et le quarré E G, ſera contenu ſous les moyennes E F, F G, eſtans E F, F G, egales : Parquoy le rectangle A C, contenu ſous les extremes A B, B C, eſt egal au quarré E G : c'eſt à dire, au rectangle contenu ſous les moyennes E F, F G. Ce qui eſt propoſé. ſ 16. 6.

Mais soient egaux le rectangle A C, & le quarré E G. Ie dis que comme A B est à E F, ainsi E F est à B C : Car les rectangles A C, E G, estans egaux : comme A B, sera à E F, ainsi F G à B C : [t] Mais comme F G à B C, ainsi E F, egale à icelle, F G, est à la mesme B C ; Partant, comme A B à E F, ainsi E F à B C. Donc si trois lignes droictes, &c. Ce qu'il fallait demonstrer.

t 16. 6. y 7. 5.

COROLLAIRE.

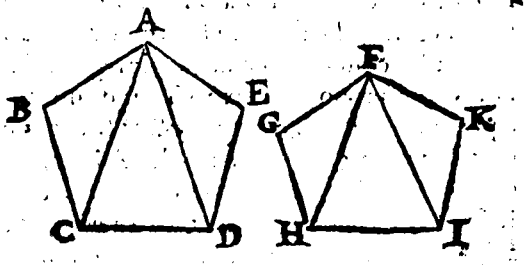
De la derniere partie de ce Theoreme, il s'ensuit que toute la ligne droicte est moyenne proportionelle entre deux autres quelconques lignes droictes, qui contiennent vn rectangle egal au quarré d'icelles : car de ce que les droictes lignes A B, B C, contiennent vn rectangle egal au quarré de la droicte ligne E F, il a esté monstré que comme A B est à E F, ainsi E F, est à B C. Parquoy E F est moyenne proportionelle entre A B, & B C.

PROBLEME 6. PROP. 18.

Sur vne ligne droicte donnée, descrire vne figure rectiligne semblable ; & semblablement posée à vne figure rectiligne donnée.

Soit la ligne droicte donnée C D, sur laquelle il faut descrire vne figure rectiligne semblable, & semblablement posée à la figure rectiligne H I K F G. De quel angle qu'on voudra, comme de F, soient menées à chacun des angles opposez, les lignes droictes F H, F I, lesquelles diuisent le rectiligne

ligne en trois triangles F G H, F H I, F I K. Puis soit fait l'angle D C A, egal à l'angle I H F: & l'angle C D A egal à H I E. Or A C, A D, se rencontreront



à A, estans les angles A C D, A D C, moindres que deux droicts, estans faits egaux à F H I, F I H, (qui sont moindres que deux droicts) & l'autre C A D, sera egal à l'autre H F I, & le triangle C A D, equiangle au triangle H F I. v 17. 1.

Derechef, l'angle A D E, soit fait egal à F I K, & D A E, egal à I F K. x D'autant que les deux angles K I F, K F I, sont moindres que deux droicts, les deux E A D, E D A, egaux à iceux, seront pareillement moindres que deux droicts. Et partant A E, D E, se rencontreront au poinct E, & le triangle A E D, sera equiangle au triangle F K I, par la mesme raison. x 32. 1. y 17. 1.

D'auantage, soit fait le triangle A B C, equiangle au triangle F G H, par mesme raison; & ainsi des autres, s'il y a d'auantage de triangles. Ie dis que le rectiligne A B C D E, est semblable, & semblablement posé au rectiligne F G H I K. Car puis que l'angle A C D, est faict egal à F H I, & A C B, à F H G, le tout B C D, sera egal à G H I: Et par mesme raison C D E, est egal à H I K, & les autres egaux aux autres, comme il appert par la constru-

ction, puis que chacune partie de l'vn, est faicte egale à chacune des parties de l'autre : partant le rectiligne A B C D E, sera equiangle à F G H I K.

y 4. 6. y Or d'autant que comme C D est à D A, ainsi

z 22. 5. H I à I F, & comme A D à D E, ainsi I F à I K, z est raison egale C D sera à D E, comme H I à I K: partant les costez autour des angles egaux C D E,

a 4. 6. H I K, sont proportionaux : a Tout de mesme, les costez autour des angles egaux E & K, sont proportionaux, à cause des triangles A E D, F K I,

b 4. 6. equiangles. b Dereches E A est à A D, comme K F à F I, & A D à A C, comme F I à F H, & A C

c 22. 5. à A B, comme H F à F G. c Donc en raison egale E A sera à A B, comme K F à F G : Parquoy les costez autour des angles egaux E A B, K F G, sont proportionaux, & ainsi des autres : Partant, puis que les rectilignes sont equiangles, & ont les costez autour des angles egaux proportionaux, ils sont semblables, & semblablement descrits : Donc sur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

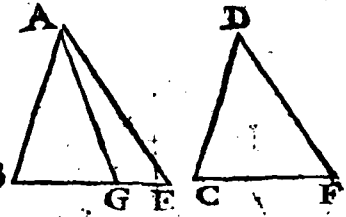
THEOREME 13. PROP. 19.

Les triangles semblables, sont entr'eux, en raison doublée de leurs costez de mesme raison.

Soient les triangles semblables A B E, D C F, ayans les angles B & C egaux. Item E & F, & comme A B à B E, ainsi D C à C F. Ie dis qu'ils sont entr'eux en raison doublée de leurs costez de mesme raison B E & C F, ou A B, D C, ou A E, D F, c'est à dire, si on trouue la 3. proportionelle B G, le triangle A B E, sera au triangle D C F, comme, B E est à B G : Puis que par la 10. Definition du 5. la raison doublée est telle. Car soit donc B G, 3. pro-

portionelle,

portionelle, & soit conioincte A G. D'autant que comme A B est à B E, ainsi D C à C F: en changeant comme A B, sera à D C, ainsi B E à C F: mais comme B E à C F, ainsi C F à B G, par la construction; Donc comme A B à D C, ainsi C F à B G: partant puis que les triangles A B G, D C F, ont les costez autour des angles egaux B & C reciproques; ils seront egaux entr'eux. Donc comme le triangle A B E, sera au triangle D C F, ainsi le mesme triangle A B E, sera au triangle A B G: Mais comme le triangle A B E, est au triangle A B G, ainsi la base B E, à la base B G, estant de mesme hauteur. Donc comme le triangle A B E, est au triangle D C F, ainsi B E, est à G.



11. 6.

d 11. 5.

e 15. 6.

f 7. 5.

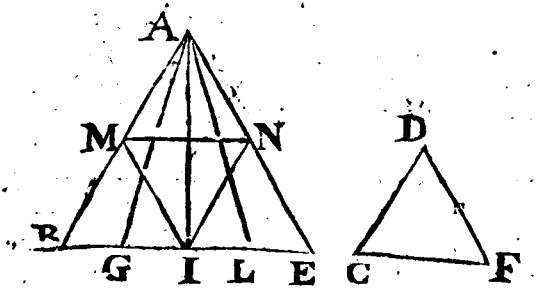
g 1. 6.

Or puis que les trois lignes B E, C F, B G, sont continuellement proportionelles, la raison de la premiere B E, à la 3. B G, sera dite doublée de la raison de B E, premiere à C F 2. Donc aussi le triangle A B E, sera au triangle D C F, en raison doublée du costé B E, au costé C F. Donc les triangles semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

D'où il s'ensuit que s'il y a 3. l. propott. comme la 1. à la 3. ainsi le triang. descrit sur la 1. sera au triangle semblable, & semblablement descrit sur la 2. &c.

Ce qui est aussi facile à conceuoir par cette derniere figure, où la 3. proportionelle B G, estant le quart de la base B E, ou bien B E estant quadruple de la 3. proportionelle B G, le triangle A B E, est



aussi quadruple du triangle A B G, comme il appert par la 38. du 1. G I, I L, L E, estans egales à B G, & partant aussi quadruple du triangle D C F, comme il est monstré : & ce qui est aussi manifeste, le triangle A B E estant encore diuisé en quatre autres triangles A M N, M B I, M I N, I N E, chacun desquels est egal au triangle D C F, ce qui est facile à entendre par ces figures, lesquelles i'ay bien voulu icy adiouster, pour faciliter le sens & intelligence de cette Proposition, laquelle a besoin d'estre bien entendue, afin d'entendre la suiuante, & autres cy-apres.

THEOREME 14. PROP. 20.

Les polygones semblables se diuisent en nombre egal de triangles semblables, & proportionaux à leurs touts : & les polygones sont l'vn à l'autre, en raison doublée de leurs costez de mesme raison.

Soient les polygones A B C D E, F G H I K, ayans les angles egaux B A E, G F K. Item, les angles B

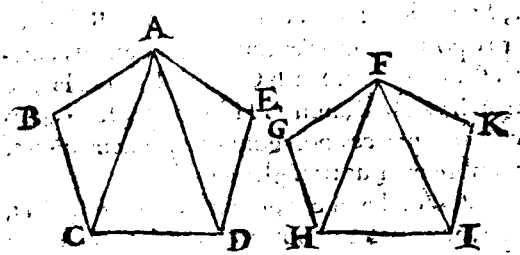
&

& G, & ainſi de ſuitte, & qu'ils ayent auſſi les coſtez proportionaux à l'entour d'iceux angles, ſçauoir eſt, comme A B à B C, ainſi F G à G H; & comme B C, à C D, ainſi G H à H I, &c. Ie dis premierement que ces polygones ſe peuuent diuiſer en nombre egal de triangles ſemblables.

Car des angles A & F, ſoient menées A C, A D, F H, F I, aux angles oppoſez C, D, H, I, ils ſeront diuiſez en nombre egal de triangles. Et d'autant que les angles B & G ſont poſez egaux, & les coſtez autour d'iceux proportionaux, [b] les triangles A B C, F G H, ſeront equiangles, ayans les angles B A C, G F H, B C A, & G H F, oppoſez aux coſtez homologues egaux: [i] Et partant auront les coſtez autour des angles egaux proportionaux, & par ainſi ſeront ſemblables: par meſme raiſon, les triangles A E D, F K I, ſeront ſemblables, ayans les angles E A D, K F I, A D E, & F I K, egaux. Et d'auantage, [k] puis que comme A C à C B, ainſi F H à H G, à cauſe de la ſimilitude des triangles A B C, F G H: Mais comme B C à C D, ainſi G H à H I, par l'hypotheſe, pour la ſimilitude des polygones en raiſon egale, comme A C à C D: ainſi F H à H I. Et d'autant que l'angle B C D, eſt poſé egal à G H I: mais le retranché B C A, eſt monſtré egal au retranché G H F, le reſtant A C D, ſera egal au reſtant F H I. Partant puis que les triangles A C D, F H I, ont les angles A C D, F H I egaux, & les coſtez autour d'iceux proportionaux: Ils ſeront equiangles, & partant ſemblables, & ainſi des autres, s'il y en a d'auantage.

b 6. 6.
i 4. 6.
k 4. 6.
l 22. 5.
m 6. 6.

Secondement, ie dis que les triangles ſont proportionaux à leurs touts: c'eſt à dire, que chacun des triangles en vn des polygones, a telle raiſon



à ſon triangle, correſpondant en l'autre Polygone, que tout le polygone à tout le polygone : Car d'autant que les triangles A B C, F G H, ſont ſemblables, ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée de leurs coſtez, de meſme raiſon A C, F H : & par meſme diſcours les triangles A C D, F H I, ſont en raiſon doublée des meſmes coſtez A C, F H. Parquoy comme le triangle A B C, eſt au triangle F G H, ainſi le triangle A C D, ſera au triangle F H I, puis que la raiſon de l'vn & l'autre, eſt la raiſon doublée du coſté A C, à F H : ſemblablement on conclura que le triangle A D E, eſt au triangle F I K, comme le triangle A C D, au triangle F H I : & ainſi de ſuitte, s'il y auoit d'autres triangles. Donc les triangles de l'vn des polygones ſont proportionaux aux triangles de l'autre : de ſorte que les triangles de l'vn, ſont antecedens des proportions, & les triangles de l'autre conſequens. Or comme vn des antecedens eſt à vn des conſequens, [m] ainſi tous les antecedens, ſont à tous les conſequens. Donc comme chacun des triangles d'vn des polygones eſt à ſon triangle, correſpondant de l'autre polygone, ainſi tout le polygone, ſera à tout le polygone : partant les triangles ſeront proportionaux à leurs touts.

[m] 12. 5.

Finalement,

Finalement, ie dis que les polygones sont entr'eux en raiſon doublée de leurs coſtez de meſme raiſon, c'eſt à dire, ſi aux coſtez homologues, pour exemple, A B, F G, on trouue la troiſieſme proportionelle, que le polygone A B C D E, ſera au polygone F G H I K, comme la ligne A B premiere, eſt à la 3. proportionelle trouuée. Car puis que comme le triangle A B C, eſt au triangle F G H, ainſi le polygone A B C D E, au polygone F G H I K. Mais le triangle A B C, eſt au triangle F G H, en raiſon doublée [n] du coſté A B, au coſté F G, pareillement les polygones ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée [o] des meſmes coſtez A B, F G. Donc ſemblables polygones, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[n] 19. 6.
[o] 11. 5.

COROLLAIRE.

De cecy il eſt manifeſte, que s'il y a trois lignes proportionelles, comme la premiere ſera à la troiſieſme, ainſi le polygone deſcrit ſur la premiere, ſera au polygone ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la ſeconde: Ou bien le polygone deſcrit ſur la ſeconde, ſera au polygone ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la troiſieſme, comme la premiere eſt à la troiſieſme. Ce qui eſt euident, ayant eſté demonſtré que le polygone eſt au polygone, comme la premiere A B, eſt à la troiſieſme proportionelle.

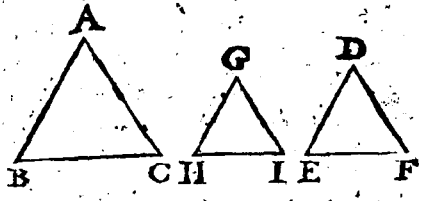
THEORÈME 15. PROP. 21.

Les figures rectilignes ſemblables à vne meſme figure rectiligne, ſont auſſi ſemblables entr'elles.

Soient les figures rectilignes A B C, & D E F, ſemblables à G H I. Ie dis qu'elles ſont ſemblables entr'elles.

Car puis que les angles de A B C, ſont egaux à ceux de p G H I, à cauſe de la ſimilitude, & ceux de D E F, à ceux de G H I, pour la meſme cauſe; q les

p 1. d. 6.
q 1. 6. ſ.



angles de A B C, ſeront egaux aux angles de D E F. Derechef, à cauſe de la meſme ſimilitude, les coſtez de A B C, ſont proportionaux à ceux de G H I, ſçauoir ceux qui ſont autour des angles egaux. Item, les coſtez de D E F, ſont proportionaux aux coſtez de G H I, pour la meſme cauſe. r Donc les coſtez de A B C, ſeront auſſi proportionaux aux coſtez de D E F, ſçauoir ceux qui enuironnent angles egaux: partant ſelon la definition A B C, & D E F, ſeront ſemblables. Donc les figures rectilignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

r 11. 5.

THEOREME 16. PROP. 22.

Si quatre lignes droictes ſont proportionelles, les figures rectilignes ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſur icelles, ſeront proportionelles; Et ſi les figures rectilignes ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſur telles lignes droictes, ſont proportionelles,

portionelles, icelles lignes droictes seront aussi proportionelles.

Soient premierement quatre droictes lignes A B, C D, E F, G H, proportionelles, sçauoir comme A B à C D, ainsi E F à G H, & soient constituées deux figures rectilignes quelconques sur A B, C D, semblables, & semblablement descrites A B I, C D K, pareillement sur E F, G H, soient constituez deux autres rectilignes quelconques E M, G O. Ie dis que ces figures sont proportionelles, à sçauoir, comme A I B, à C D K, ainsi E M à G O.

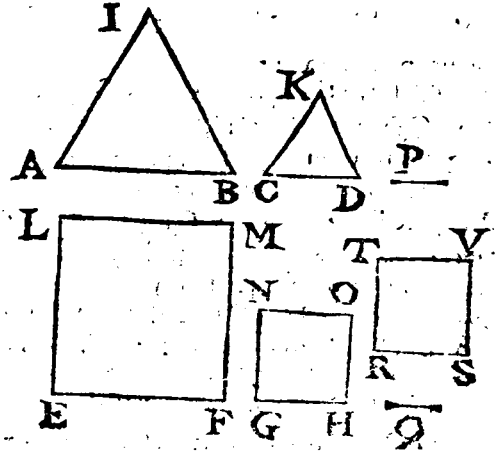
Car [f] à A B, C D, soit trouuée la troisiesme proportionelle P; & à E F, G H, la troisiesme proportionelle Q. [t] En raison egale, comme A B, sera à P, ainsi E F à Q: mais comme A B est à P, ainsi [v] le rectiligne A B I, est au rectiligne C D K, semblable & semblablement descrit: par mesme raison, comme E F est à Q, ainsi le rectiligne E M, au rectiligne G O. Donc [x] comme A B I à C D K, ainsi E M à G O. Ce qui est proposé.

f 11. 6.
t 22. 5.
v *Coroll.* 20. 6.
x 11. 5.

Secondement, soient les rectilignes A B I, C D K, E M, G O, proportionaux. Ie dis que les quatre lignes droictes A B, C D, E F, G H, sont proportionelles, à sçauoir comme A B à C D, ainsi E F à G H.

Car aux trois lignes A B, C D, E F, [y] soit trouuée la quatriesme proportionelle R S, sur laquelle soit descrit le rectiligne R V, semblable, & semblablement posé au rectiligne E M, & partant [z] au rectiligne G O. D'autant que comme A B à C D, ainsi E F à R S: pareillement, comme il est desia monstré, comme A B I, sera à C D K, ainsi E M à R V,

y 12. 6.
z 21. 6.



R V, mais comme A B I, à C D K, ainſi E M à G O.
a 11. 5. Donc comme E M à R V, ainſi E M à G O, [a] partant
b 9. 5. R V, G O, ſeront egaux, leſquels eſtans ſemblables & ſemblablement poſez, ils ſeront neceſſairement conſtituez ſur lignes droictes egales R S, G H, comme nous monſtrerons incontinent,
c 7. 5. [c] partant comme E F ſera à R S, ainſi E F à G H. Mais E F eſt à R S, comme A B à C D, par l'hypotheſe.
d 11. 5. [d] Donc comme A B à C D, ainſi E F à G H. Partant ſi quatre lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer,

LEMME.

Or que les rectilignes egaux, ſemblables & ſemblablement deſcrits, comme ſont G O, R V, ſoient conſtituez ſur lignes droictes egales, on le monſtrera ainſi. Car ſi G H, R S, ſont inegales, ſoit G H plus grande. Donc puis qu'à cauſe de la ſimilitude des rectilignes, comme G H, eſt à H O, ainſi

ainsi R S à S V,& que G H est posée plus grande que R S : pareillement H O, sera plus grande que S V,& partant le rectiligne G O,plus grand que le rectiligne R V, puis que R V, peut estre constitué au dedans d'iceluy : Ce qui est absurde, estant contre l'hypothese. Donc G H,R S,ne seront pas inegales.Ce qui est proposé.

SCHOLIE.

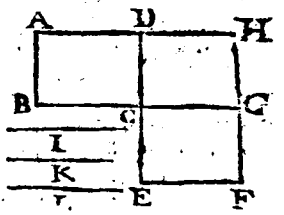
Semblablement, s'il y a trois lignes droictes proportionelles, les rectilignes semblables & semblablement descrits sur icelles, seront proportionaux, &c. Car si l'on prend la ligne du milieu & son rectiligne deux fois, l'on aura quatre lignes proportionelles. Donc par mesme moyen quatre rectilignes proportionaux, comme demonstre icy Euclide. Donc puis que ce qui est descrit sur la seconde est egal, voire mesme chose que ce qui est descrit sur la tierce, ce qui est proposé est manifeste.

THEOREME 17. PROP. 23.

Les parallelogrammes equiangles, sont l'vn à l'autre en raison composée de celles de leurs costez.

Soient les parallelogrammes equiangles A C, C F, ayans les angles B C D,E C G, egaux. Ie dis que la raison de A C à C F,est composée de la raison de B C à C G,& D C à C E : C'est à dire,si on prend trois lignes droictes I, K, L, de sorte que I soit à K,comme B C à C G,& K à L,comme D C à C E,le parallelogramme A C,sera au parallelogramme C F,comme I,à L, qui est la raison composée de I à K, & de K à L, par la 5.definition de ce liure.

Car



Car soient disposez les parallelogrammes selon les angles egaux au poinct C, de sorte que B C, C G, facent vne seule ligne droicte: ce qu'estant ainsi : puis que les angles B C D, E C G, sont egaux, E C, C D, feront aussi vne ligne droicte, comme nous auons monstré à la 14. & soient prolongées A D, F G, au poinct H, faisant le parallelogramme C H : Et soit prise quelconque droicte ligne I, & à B C, C G, & I, soit trouuée la 4. proportionelle K. Item, aux trois D C, C E, & K, la 4. proportionelle L : [e] D'autant que comme B C à C G, ainsi A C à C H : mais comme B C à C G, ainsi I à K, comme il est monstré : Pareillement [f] comme A C à C H, ainsi I à K.

12. 6.

e 1. 6.

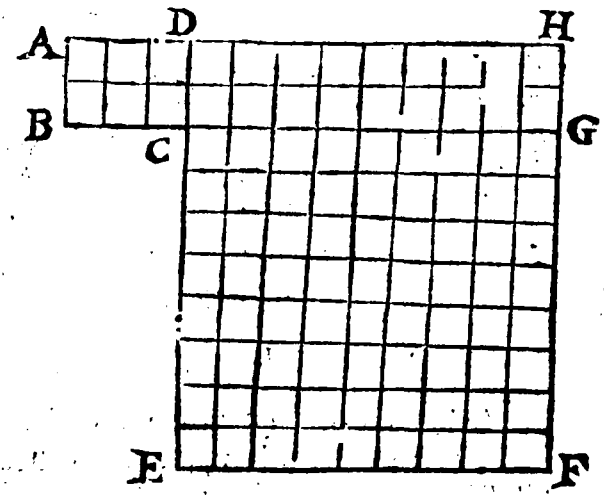
f 11. 5.

Par la mesme raison on monstrera, que comme H C est à C F, ainsi K est à L : Car comme D C à C E, [g] ainsi H C à C F. Donc puis que K est posé à L, comme D C à C E, pareillement H C, sera à C F, comme K à L : [h] Donc en raison egale A C, sera à C F, comme I à L : mais la raison de I à L, est composée des raisons de B C à C G, & D C à C E, par la cinquiéme Definition du sixiéme liure. Donc la raison du parallelogramme A C, au parallelogramme C F, est composée de ces mesmes raisons. Donc les parallelogrammes equiangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

g 1. 6.

h 22. 5.

Ce qui est facile à comprendre par cette figure ainsi diuisée en parties egales, où le costé B C est 3. C G 9. D C 2. & C E 8. & en diuisant C G par B C,



B C, ſçauoir 9. par 3. l'on aura 3. au quotient 3. pour le denominateur ou quantité de la raiſon de C G à C B, & diuiſant auſſi C E 8. par D C 2. l'on aura 4. au quotient pour le denominateur de la raiſon de C E à C D, leſquels denominateurs 4. & 3. multipliez l'vn par l'autre, produiſent 12. pour la raiſon du parallelogramme C F, au parallelogramme C A, c'eſt à dire, que C F, contient C A 12. fois, ou bien que A C eſt la 12. partie de C F, comme il eſt manifeſte, tant par cette figure, que de ce qui eſt demonſtré.

SCHOLIE.

Le meſme ſera demonſtré plus briefuement en cette maniere, eſtans conioints les parallelogrammes

comme

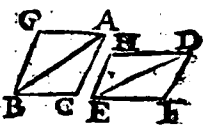
comme auparauant : D'autant que comme A C est à C H, ainsi B C à C G, & comme C H à C F, ainsi D C à C E : Mais la raison de A C à C F, est composée des raisons entremoyennes A C à C H, & C H à C F, par la definition, la mesme raison de A C à C F, sera aussi composée des raisons de B C à C G, & de D C à C E, lesquelles sont egales à icelles moyennes. Ce qui est proposé.

Nous adiousterons icy quelques Theoremes assez vtiles, pris de Commandin.

I.

Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, sont en raison composée des costez qui contiennent l'angle egal.

Soient les triangles A B C, D E F, ayans l'angle C egal à F. Ie dis que la raison de A B C à D E F, est composée des costez, c'est à dire de la raison de B C à E F, & de A C à D F: ou de la raison de B C à D F & de A C à E F. Car ayant accomply les parallelogrammes C G, F H, ils seront equiangles : [f] partant leur raison sera composée des costez. [k] Donc puis que les triangles A B C, D E F, leurs moitiez [l] ont mesme raison qu'iceux. La raison de A B C à D E F, sera aussi composée des raisons des costez B C, A C, aux costez E F, D F.



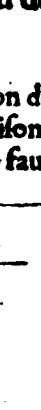
f 23. 6.
k 34. 1.
l 15. 5.

2. Compoſer

II.

Composer vne raison de deux, ou de plusieurs raisons.

Il sera facile à colliger de la demonstration de cette 23. Proposition. Car soient les trois raisons A à B, C à D, & E à F, proposées en lignes. Il faut composer vne raison d'icelles:[m] Comme A à B, ainsi G, soit fait à H, & comme C à D, ainsi H à I, & comme E à F, ainsi I à K. Ie dis que la raison de G à K, est composée des trois raisons données, car icelle estant composée des raisons de G à H, H à I, & de I à K, par la 5. definition de ce liure, elle sera aussi composée des raisons de A à B, C à D, & de E à F; puis que celles-là sont prises egales à celles-cy,



[m] 12. 6.

III.

Oster vne moindre raison d'vne plus grande.

Soit la raison de A à B, moindre qu'il faut oster de celle de C à D plus grande: [n] Soit fait comme A à B, ainsi C à E, & soit E terme moyen, entre C & D. Ie dis que la raison de A à B, est ostée de celle de C à D, & que la restante est E à D: Car puis que la raison de C à D est composée de celles de C à E, & E à D, si la



[n] 12. 6.

raiſon de C à E : c'eſt à dire, de A à B, eſt oſtée, reſtera la raiſon de E à D,&c.

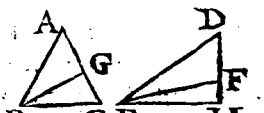
IV.

Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, ſont en meſme raiſon, que les rectangles contenus ſous les coſtez comprenans l'angle egal.

Soient les triangles A B C, D E F, ayans l'angle A egal à D. Ie dis que A B C, eſt à D E F, comme le rectangle ſous A B, A C, au rectangle ſous E D, D F. Car ayant mené B G, E H, perpendiculaires à A C, D F, les triangles A B G, D E H, ſeront [o] equiangles.

o *Coroll.* 1. 32. 1.

[p] Donc comme G B à B A, ainſi H E à E D : mais comme G B à B A, [q] ainſi le rectangle ſous B G, A C, au rectangle ſous A B, A C, (car G B, B A, eſtans poſées pour baſes, la hauteur d'iceux ſera la meſme A C) ſemblablement comme H E à E D, ainſi le rectangle ſous E H, D F, au rectangle ſous D E, D F. [r] Donc le rectangle ſous B G, A C eſt au rectangle ſous A B, A C, comme le rectangle ſous E H, D F, au rectangle ſous D E, D F. Et en changeant le rectangle ſous B G, A C eſt au rectangle ſous E H, D F, comme le rectangle ſous A B, A C, au rectangle ſous D E, D F. Mais comme le rectangle ſous E G, A C, eſt au rectangle ſous E H, D F, [ſ] ainſi le triangle A B C, eſt à D E F, [t] les triangles eſtans moitiez des rectangles : (car ils ont meſmes baſes auec iceux A C, D F, & meſmes hauteurs B G, E H,



p 4. 6.

q 1. 6.

r 11. 5.

ſ 15. 5.

t 41. 1.

E H, partant ſont entre meſmes paralleles.) Donc A B C, ſera auſſi à D E F, comme le rectangle ſous A B, A C, au rectangle ſous D E, D F. Ce qui eſt propoſé.

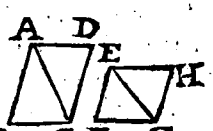
COROLLAIRE.

D'où il s'enſuit, que les parallelogrammes equiangles ſont auſſi en meſme raiſon, que les rectangles contenus ſous leurs coſtez, eſtans doubles de tels triangles.

V.

Les parallelogrammes equiangles entr'eux, ſont en meſme raiſon, que les rectangles contenus ſous les coſtez d'iceux, contenans l'angle egal.

Soient les parallelogrammes B D, F H, equiangles entr'eux, dont les angles B & F ſont egaux: Ie dis que comme B D eſt à F H, ainſi le rectangle ſous A B, B C, au rectangle ſous E F, F G: car ayant mené les diametres A C, E G, ſouſtendans les angles egaux B & F, les triangles A B C, E F G, auront l'angle B egal à F: partant (comme nous auons demonſtré) comme le triangle A B C ſera à E F G, ainſi le rectangle ſous A B, B C, au rectangle ſous E F, F G. v v 15.5.



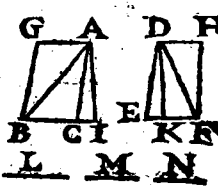
Donc puis que les parallelogrammes B D, F H, ſont en meſme raiſon que les triangles A B C, E F G, x x 34.1. ceux-là eſtans doubles de ceux-cy, y comme B D y 11.5.

ſera à F H, ainſi pareillement le rectangle ſous A B, B C, au rectangle ſous E F, F G. Ce qui eſt propoſé.

VI.

Les triangles & les parallelogrammes, ſont entr'eux en raiſon compoſée, de la raiſon des baſes, & de la raiſon des hauteurs.

Soient les triangles A B C, D E F, & les parallelogrammes C G, E H, donc les hauteurs ſont A I, D K. Ie dis que leur raiſon eſt compoſée de celle de la baſe B C, à E F, & de la hauteur A I, à D K: Car ſoient premierement les hauteurs egales, & les baſes auſſi egales, ou bien inegales: Et ſoit faite comme B C, à E F, ainſi L à M: mais comme A I à D K, ainſi M à N. Ce qu'eſtant, M ſera egale à N, d'autant que A I, eſt auſſi poſée egale à D K. [a] Parant L ſera à N, comme L à M, c'eſt à dire, comme B C à E F: [a] Mais comme B C à E F, ainſi le triangle A B C, à D E F, & le parallelogramme C G à E H, parallelogramme. [b] Donc auſſi comme L à N, ainſi A B C, à D E F, & C G à E H: mais la raiſon de L à N, eſt compoſée de la raiſon de L à M, c'eſt à dire de la raiſon de la baſe B C, à la baſe E F, & la raiſon de M à N, c'eſt à dire de la hauteur A I, à la hauteur D K. Donc la raiſon du triangle A B C, à D E F, & du parallelogramme C G, au parallelogramme E H, eſt compoſée de meſmes raiſons. Ce qui eſt propoſé.



a 7. 5.

a 1. 6.

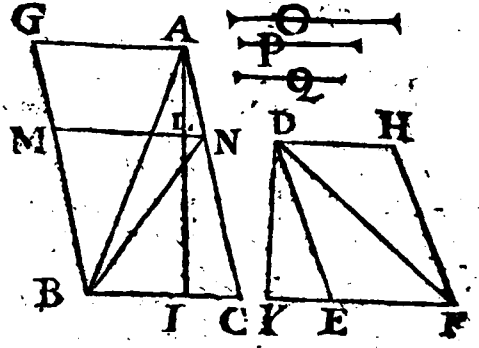
b 11. 5.

Soient maintenant A I, D K, inegales, & A I plus grande, mais les baſes B C, E F, egales ou inegales,

gales, soit fait comme A I, à D K, ainsi O à P, & comme B C à E F, ainsi P à Q; & prise I L, egale à D K, & par L, soit menée L M, parallele à B C, coupant A C à N, & conjointe B N. D'autant que le triangle A B C, est à N B C, & le parallelogramme C G, à C M, comme la hauteur A I, à I L, ou à D K, egale à I E, c'est à dire comme O à P, comme il est monstré à la 1. Prop. de ce liure par Com. les triangles & les parallelogrammes ayans mesme base B C: & comme le triangle N B C, à D E F, & le parallelogramme C M, à E H, ainsi la base B C à E F: (ayant mesme hauteur) c'est à dire, ainsi P à Q: [d] En raison egale A B C, sera à D E F, & C G à E H, comme O à Q. Partant la raison de O à Q, estant composée de la raison de O à P, c'est à dire de la raison de la hauteur A I, à la hauteur D K, & de la raison de P à Q: c'est à dire de la raison de la base B C, à la base E F. De ces mesmes raisons sera composée la raison du triangle ABC, au triangle D E F, & du parallelogramme C G, au parallelogramme E H. Ce qui est proposé.

[c] 1. 6.

[d] 22. 6.



Semblablement on monstrera que la raison du triangle D E F, dont la hauteur est moindre, au triangle A B C, & du parallelogramme E H à C G, est composée de la raison de la base B F à B C, & de la raison de la hauteur D K, à la hauteur A I: car si comme E F est à B C, ainsi Q est faict à P, & comme D K à A I, ainsi P à O, & le reste soit faict
e 1. 6. comme parauant: le triangle D E F, sera à N B C, & le parallelogramme E H, au parallelogramme C M, comme E F à B C, c'est à dire, comme Q à P.

Item, le triangle N B C, au triangle A B C, & le parall. C M à C G, comme L I, ou D K à A I, c'est à dire, comme P à O, comme il est monstré à la 1.
f 22. 5. Proposition de ce liure par Com.t Donc en raison egale, comme D E F, sera à A B C, & E H à C G, ainsi Q à O. Partant puis que la raison de Q à O, est composée de la raison de Q à P, c'est à dire de la raison de la base E F, à la base C B: & de la raison de P à O, c'est à dire de la raison de la hauteur D K, à la hauteur A I: la raison de D E F, à A B C, & de E H à C G, sera aussi composée des mesmes raisons. Ce qui est proposé.

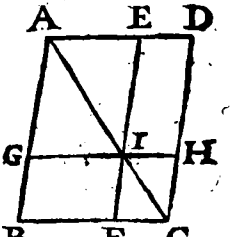
THEOREME 18. PROP. 24.

Les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre de tout parallelogramme, sont semblables à leur tout, & entr'eux.

Soit le parallelogramme A B C, auquel soit mené le diametre A C, & par quelconque poinct d'iceluy, comme par I, soient menées E F, G H, paralleles aux costez A B, A D. Ie dis que les parallelogrammes E G, F H, à l'entour du diametre, sont semblables au tout B D, & entr'eux.

Car

Car ils sont equiangles au tout, d'autant que l'angle A, est commun au parallelogramme G E, & au tout B D, g & l'externe A E I, egal à l'interne D, & l'externe A G I, egal à l'interne B, & E I G, externe, egal à l'interne I F B, c'est à dire à B C D, egal à iceluy I F B; parquoy le parallelogramme E G, est equiangle à B D: Par mesme raison F H, est equiangle au mesme B D.



g 29. 1.

Or que E G, F H, ayent aussi les costez autour des angles egaux proportionaux aux costez du tout B D: il sera ainsi demonstré. h Puis que le triangle A G I, est equiangle à A B C, & le triangle A E I, equiangle au triangle A D C, comme A B sera à B C, ainsi A G à G I, & par ainsi les costez autour des angles egaux, B & G seront proportionaux. Derechef, i comme B C à C A, ainsi G I à I A: semblablement comme C A à C D, ainsi I A, à I E. k Donc en raison egale, comme B C, à C D, ainsi G I à I E, & partant les costez autour des angles egaux B C D, G I E, sont proportionaux.

h 29. 1. *ou Coroll.* 4. 6.

i 4. 6.

k 22. 5.

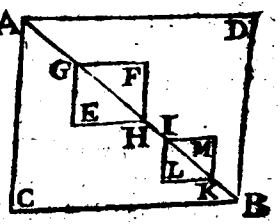
L'on monstrera semblablement que les costez autour des autres angles egaux, sont proportionaux. Donc par la premiere Definition de ce liure, le parallelogramme E G, sera semblable à tout le parallelogramme B D, & par mesme raison le parallelogramme F H, semblable au mesme B D, & partant semblables aussi entr'eux. Donc les parallelogrammes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

l 22. 6.

SCHOLIE.

Henrion a adiousté à cette Proposition, ces mots: Ayans vn angle commun au total. *Ce qu'il ne deuoit faire, n'estant au texte d'Euclide, comme il appert.* Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμα, ὅμοια ἀλλήλοις: *C'est à dire; De tout parallelogramme, ou en tout parallelogramme, les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, sont semblables entr'eux, & au tout. Or ce qui l'a incité à corriger ainsi Euclide, a esté, comme ie croy, ce qui est en suitte de la Demonstration de Clauius, qui dit.* Intelligenda autem sunt parallelogramma, circa diametrum totius esse talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifestum est ex forma demonstrationis: *C'est à dire; Mais il faut entendre que les parallelogrammes à l'entour du diametre du total, soient tels qu'ils ayent vn angle commun auec le total, comme il est manifeste par la forme de la demonstration.*

Ce qui ne doit toutefois estre ainsi restraint, veu que l'on peut demonstrer sans cette restriction, que les parallelogrammes à l'entour du diametre du total, n'ayans aucun angle commun auec le tout, & ayans les costez paralleles à ceux du total, sont semblables entr'eux, & au total. Car soit le parallelogramme C D, & son diametre A B, autour duquel soient



soient constituez E F, L M, parallelogrammes. Iceux sont semblables entr'eux, & au total; car G E, A C, estans parallelez, & A B tombant sur icelles, les angles = C A G, E G B, sont egaux, l'externe à l'interne, & aussi C B H, & E H G, estans C B, E H aussi parallele. = Donc C, sera aussi egal à E, parquoy A C B, G E H, seront equiangles, & semblablement A D B, G F H, & auront les costez autour des angles egaux proportionaux, sçavoir comme A C à C B, ainsi G E à E H, & comme C B à B A, ainsi E H à H G, & comme A B à B D, ainsi G H, à H F. Donc en raison egale, comme C B à B D, ainsi E H à H F, & ainsi des autres. Donc tous les angles de E F, seront egaux à ceux de C D, chacun au sien, estans les 2. au poinct A, egaux aux 2. au poinct G, & les 2. au poinct B; egaux aux 2. au poinct H, & les costez autour des angles egaux proportionaux. Ainsi E F, sera semblable à C D, par les mesmes raisons L M, sera semblable au mesme C D, & par. tous semblables entr'eux, & au total.

m 29. 1.
n 32. 1.
o 4. 6.
p 22. 5.
q 1. d. 6.
r 21. 6.

PROBLEME 7. PROP. 25.

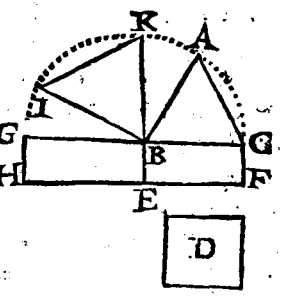
Descrire vne figure rectiligne, semblable à vne figure rectiligne donnée, laquelle soit egale à vne autre proposée.

Soient deux rectilignes A B C, & B, il faut constituer vn rectiligne semblable à A B C, & egal à l'autre B. Sur C B, costé du rectiligne A B C, auquel on en doit faire vn semblable, soit constitué le parallelogramme C E, en quelconque angle egal au rectiligne A B C: Et sur B E, soit fait le parallelogramme B H, egal à B, ayant l'angle E B G,

s 44. 1.
t 45. 1.

egal à B C F,& les lignes C B,B G,ſeront vne ſeule ligne droicte,comme il eſt monſtré à la 45. Propoſition du premier liure.

t 13. 6.



Maintenant ſoit trouuée la moyenne proportion B K,entre C B,B G, ſur laquelle ſoit conſtitué le rectiligne B I K, ſemblable & ſemblablement poſé au rectiligne A B C. Ie dis que B I K, eſt egal à l'autre rectiligne B.

18. 6.

Car puis que C B,B K,B G,ſont proportionelles v comme C B,premiere,eſt à B G 3. ainſi le rectiligne ſur la 1. C B,au rectiligne B I K,ſur la 2. B K, ſemblable,& ſemblablement deſcrit: x Mais comme C B à B G, ainſi le parallelogramme C E, au parallelogramme B H, de meſme hauteur. y Donc comme C E à B H, ainſi A B C à B I K, z mais comme C E à B H,ainſi A B C à B: D'autant que A B C,& C E,ſont egaux,& B H,& B auſſi egaux, a donc comme A B C à B, ainſi A B C à B I K. b Donc B, & I B K, ſeront egaux: mais K I B, eſt ſemblable,& ſemblablement poſé à A B C, par la conſtruction: donc nous auons deſcrit, &c. Ce qu'il falloit faire.

v *Coroll.* 19. *ou* 20. 6.
x 1. 6.
y 11. 5.
z 7. 5.
a 11. 6.
b 9. 5.

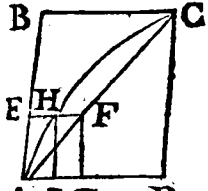
THEOREME 19. PROP. 26.

Si d'vn parallelogramme, l'on retranche vn parallelogramme, ſemblable au tout,& ſemblablement poſé, ayant vn angle commun

mun auec le tout : Il consiste à l'entour d'vn mesme diametre auec le tout.

Du parallelogramme B D, soit retranché le parallelogramme E G, semblable, & semblablement posé au tout B D, & ayant l'angle E A G, commun auec iceluy. Ie dis que E G, consiste à l'entour de A C, diametre du tout B D.

Car soient menées A F, C F, lesquelles si elles font vne ligne droicte : il est euident que E G sera à l'entour d'vn mesme diametre auec B D. Que si elles ne font vne ligne droicte, soit menée A C, diametre de tout le parallelogramme B D, coupant le costé E F, au poinct H, par lequel soit menée H I, parallelogramme à F G. Or d'autant que les parallelogrammes B D, E I, sont à l'entour d'vn mesme diametre A H C, [c] ils seront semblables, & semblablement posez. [d] Partant, comme B A à A D, ainsi E A à A I : mais comme B A à A D, ainsi E A est à A G : d'autant que B D, E G, sont semblables par l'hypothese, & semblablement posez. [e] Donc comme E A à A I, ainsi E A à A G, & partant A I, A G seront egales, la partie à son tout, ce qui est absurde. Donc A F, F C, font vne seule ligne droicte, c'est à dire, les parallelogrammes B D, E F, consistent à l'entour d'vn mesme diametre. Ce qu'il falloit demonstrer : Que si l'on dict que la droicte ligne A H C, coupe le costé F G, il aduiendra la mesme absurdité, &c.



c 24. 6.

d 1. d. 6.

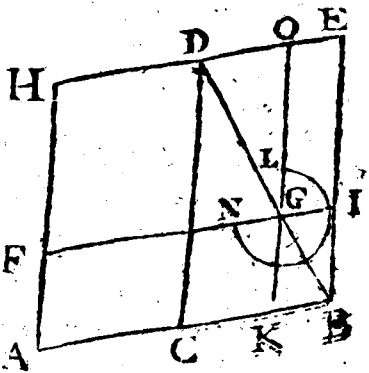
e 11. 5. 9. 5.

THEO

THEOREME 20. PROP. 27.

De tous les parallelogrammes appliquez, ſelon vne meſme ligne droicte, & defaillans de figures parallelogrammes ſemblables, & ſemblablement poſées à celuy qui eſt deſcrit ſur la moitié: Le plus grand eſt celuy-là, lequel eſt appliqué ſur l'autre moitié, & ſemblable au defaut.

Soit la ligne A B, diuiſée en deux egalement à C, & ſur la moitié C B, ſoit conſtitué vn parallelogramme quelconque C E, duquel le diametre ſoit B D. Donc ſi le parallelogramme A B E H, eſt acheué, le parallelogramme A D, conſtitué ſur la moitié A C, ſera appliqué ſelon A B, & defaillant du parallelogramme C E, & ſemblable, au defaut C E. Ie dis que le parallelogrãme A D, appliqué à la moitié A C, & defaillãt du parallelogramme C E, eſt le plus grand de tous ceux qui ſont appliquez ſelon la ligne A B, & defaillent de parall. ſemblables, & ſemblablement poſez à C E.



Car

Car ayant pris le poinct contingent G, au diametre B D, par lequel ayant mené les droictes lignes F G I, K G, paralleles à A B, B E, le parallelogramme F K, ſera appliqué ſelon A B, & defaillant du parallelogramme K I, [f] qui eſt ſemblable à C E, & ſemblablement poſé, eſtant autour d'vn meſme diametre auec C E. [g] Mais d'autant que les complements C G, G E, ſont egaux, ſi on adiouſte le commun K I, C I, & K E, ſeront egaux: [h] mais C I, eſt egal à C F, eſtant ſur baſes egales A C, C B, donc C F, & K E, ſeront auſſi egaux. Et ayant adiouſté le commun C G, le parallelogramme A G, & le gnomon L N, ſeront egaux.

f 24.6.

g 43.7.

h 36. 1.

Partant, puis que C E, eſt plus grand que le gnomon L N: (car il contient le parallelogramme G D, plus que le gnomon) A D, [i] egal à C E, à cauſe des baſes egales A C, C B, ſera auſſi plus grand que A G, du meſme parallelogramme D G: ſemblablement on monſtrera que A D, eſt plus grand que tous autres parallelogrammes qui ſont appliquez ſelon A B, en ſorte que le poinct G, ſoit entre les poincts B & D, c'eſt à dire, qui occupent vne ligne plus grande que la moitié A C; mais ont moindre altitude que A D, pourueu que les defauts ſoient ſemblables à C E.

i 36.1.

Autrement, l'on demonſtrera A D, eſtre plus grand que A G, en cette maniere: [k] *les parallelogrammes F D, D I, ſont egaux, puis que les baſes H D, D E, ſont egales: mais D I eſt plus grand que G E: c'eſt à dire, que le complement C G (lequel eſt egal à G E) du parallelogramme D G. Donc F D, ſera auſſi plus grand que C G, du meſme parallelogramme D G: & partant, adiouſtant le commun C F, A D,*

k 36. 1.

43. 1.

A D, ſera plus grand que A G, du meſme parallelogramme D G.

THEOREME 21. PROP. 28.

A vne ligne droicte donnée, appliquer vn parallelogramme, egal à vne figure rectiligne donnée ; defaillant d'vne figure parallelogramme, laquelle ſoit ſemblable à vn autre parallelogramme donné. Mais il faut que la figure rectiligne donnée, à laquelle il en faut appliquer vne egale, ne ſoit plus grande que celle qui eſt appliquée à la moitié de la ligne donnée ; les defauts eſtans ſemblables à celuy qui eſt appliqué ſur la moitié, & à celuy qui doit defaillir d'vn ſemblable.

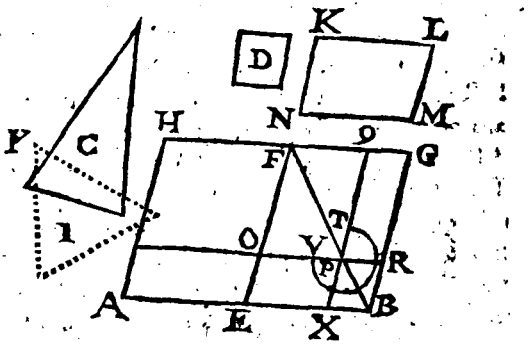
Soit la ligne donnée A B, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal au rectiligne donné C, defaillant d'icelle ligne A B, d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre parallelogramme donné D.

La ligne A B, eſtant coupée en deux egalement au poinct E, ſur la moitié E B, [1] ſoit deſcrit le parallelogramme E G, ſemblable, & ſemblablement poſé à D, & ſoit accomply le tout B H. Si donc A F eſt egal à C, eſtant appliqué à A B, defaillant du parallelogramme E G, qui eſt faict ſemblable à D : l'on aura le requis. Mais ſi A F, eſt plus grand que C : (car il ne doit eſt moindre, puis que par la propoſition precedente, c'eſt le plus grand de tous

[1] 18.6.

les

les appliquez, les defauts eſtans ſemblables, l'on n'en pourroit appliquer aucun à A B, egal à C, mais tous ſeroient moindres. Parquoy Euclide a adiouſté (Mais il faut que le rectiligne donné, &c.)



E G, egal à iceluy, ſera auſſi plus grand que C, ſoit donc plus grand de I, comme il eſt monſtré en ſuitte de la 45. du premier, & ſoit conſtitué K M, ſemblable, & ſemblablement poſé à D, ou à E G: mais egal à l'excez I, de ſorte que E G, ſoit egal à C, & à K M enſemble, & partant plus grand que K M. Donc puis que comme G F à F E, ainſi N K à K L, à cauſe de la ſemblance, les coſtez G F, F E, ſeront auſſi plus grands que N K, K L: car s'ils eſtoient egaux à iceux, ou moindres, E G ſeroit pareillement egal à N L, ou moindre, comme il appert.

Ayant donc retranché F O, F Q, egales à K N, K L, & ayant fait le parallelogramme O Q, il ſera egal à K M, & ſemblable, & ſemblablement poſé à iceluy, & partant à E G: [n] Et auſſi à l'entour d'vn meſme diametre que E G, lequel diametre [n] 26. 6.

mettre soit B F,& ayant prolongé Q P,O P,le parallelogramme A P, sera appliqué à la ligne A B, defaillant de P B,ᵉ qui est semblable,& semblablement posé à E G,& partant aussi à D. Ie dis que A P,est egal au rectiligne C, Car puis que P G est egal à P E,le complement au complement. Si on adiouste le commun P B,le parallelogramme B Q, sera egal à E R, c'est à dire à E S, lequel est egal à E R: Les bases A E,E B estans egales. Parquoy si aux egaux A O, B Q, on adiouste le commun E P: A P, sera egal au gnomon T V: mais le gnomon T V, est egal au rectiligne C, (car puis que le parallelogramme E G,est egal à C,& N L,ensemble, si on oste les egaux Q O,L N,le gnomon T V,demeurera egal à C:) Donc A P,sera aussi egal au mesme C. Donc à la ligne A B,&c. Ce qu'il falloit faire.

ᵉ 24. 6.

ᵖ 36. 1.

THEOREME 9. PROP. 29.

A vne ligne droicte donnée, appliquer vn parallelogramme egal, à vne figure rectiligne donnée, excedant icelle d'vn parallelogramme semblable à vn autre dõné.

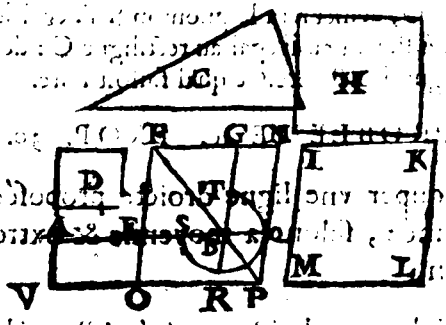
Soit la ligne droicte donnée A B, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal au rectiligne donné C, excedant A B, d'vn parallelogramme semblable à vn autre parallelogramme donné D.

Soit diuisée A B,en deux egalement à E: Et sur la moitié E B,soit descrit le parallelogramme E G, semblable à D, & semblablement posé: ᵠ puis soit

ᵠ 18. 6.

ᵠ 14. 2.

soit faict le quarré H, egal au rectiligne C, & au parallelogramme E G : auquel soit faict le paral- [t] 25. 6.
lelogramme I L, egal, mais semblable à E G, & semblablement posé : parquoy I L, sera plus grand que E G, puis qu'il est egal au quarré H, qui est faict egal à C, & à E G ensemble. Donc puis qu'à

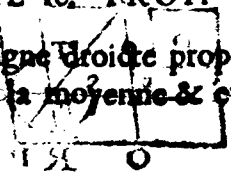


cause de la similitude de M K, E G, comme M I à I K, ainsi E F à F G, les costez M I, I K, seront aussi plus grands que E F, F G. Car si I M, I K estoient egales à E F, F G, ou moindres, M K, seroit egal à E G, ou moindre, comme il est manifeste. Donc ayant prolongé F E, F G, en sorte que F O, F N, soient egales à I M, I K, & ayant accomply le parallelogramme O N : celuy-cy sera semblable, & semblablement posé à E G, puis qu'il est egal à M K, & semblable, & semblablement posé. Parquoy O N, [26. 6.
E G, sont constituez à l'entour d'vn mesme diametre F P : ayant prolongé A B, G B à Q, & R & P O, iusques à ce qu'elle contienne auec A V, parallele à F C, au poinct V : le parallelogramme A P, sera applique à la ligne A B, l'excedant du parallelogramme Q R, [t] lequel est semblable à E G, [t] 24. 6.
& partant à D.

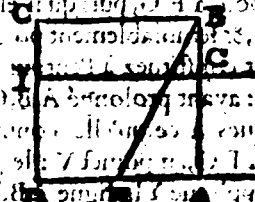
v 36. 1. x 43. 1. Ie dis donc que A P, est egal au rectiligne C: v Car puis que A O, E R sont egaux, x & E R est egal au complement B N; A O sera aussi egal à B N. Donc adiouſtant le commun O Q, A P sera egal au gnomon S T: mais ledit gnomon est egal au rectiligne C: (Car puis que M K, c'est à dire O N, est egal à C, & E G ensemble, si on oste le commun E G, demeurera le gnomon S T, egal à C.) Donc A P, sera aussi egal au rectiligne C: donc à vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 10. PROP. 30.

Couper vne ligne droicte proposée & terminée, selon la moyenne & extreme raison.



Soit la ligne droicte terminée A B, qu'il faut couper selon la moyenne & extreme raison. y 29. 6. Ayant descrit sur icelle le quarré A C, au coſté D A, soit appliqué le rectangle D H, egal au quarré A C, excedant D A, du parallelogramme A H, semblable à icelluy quarré: en sorte que A H, sera pareillement quarré, attendu que le quarré seulement, est semblable au quarré. Mais que I H, coupe A B au poinct C. Ie dis que A B, est coupée selon la moyenne & extreme raison.



Car puis que le rectiligne D H, & le quarré A C sont egaux, si on oste le commun

commun A I, F G, & G C, demeureront egaux, lesquels ayans les angles egaux A G H, B G I, à sçauoir droicts, [z] les costez qui sont autour d'iceux, seront reciproques, à sçauoir I G, c'est à dire A B, son egale est à G H, c'est à dire à A G, egale à G H, comme A G est à G B. Parquoy la toute A B, est au plus grand segment A G, comme ledit segment A G est au plus petit G B. A B est coupée selon la moyenne & extreme raison par la definition. Dont nous auons coupé, &c. Ce qu'il falloit faire. z 14.6.

Autrement, nous demonstrerons que A B, est coupée au poinct G, selon la moyenne & extreme raison: puis qu'il y a trois lignes données A B, A G, G B, & que le rectangle G C, contenu sous la 1. A B, & la 3. G B, est egal au quarré de la moyenne A G: [a] Icelles seront proportionelles, à sçauoir comme A B 1. est à A G 2. ainsi A G 2. sera à G B 3. Donc par la definition, A B est coupée au poinct G, selon la moyenne & extreme raison. a 17.6.

Autrement nous ferons tout le Probleme: [b] soit diuisée A B, au poinct G en sorte que le rectangle contenu sous la toute A B, & le segment G B, soit egal au quarré de l'autre segment A C. Ie dis que A B est coupée à G, selon la moyenne & extreme raison. [c] Car derechef, comme auparauant A B, A G, G B, seront proportionelles. Donc la proposition est manifeste. b 11. 2. c 17.6.

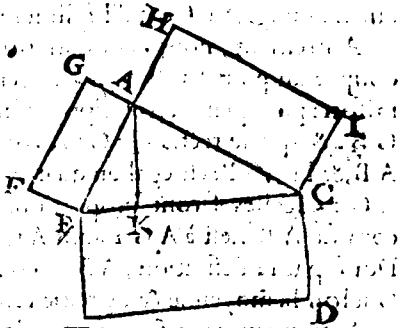
THEOREME 21. PROP. 31.

Aux triangles rectangles, la figure decrite sur le costé qui soustient l'angle droict, est egale aux deux figures des costez qui contiennent l'angle droict,

semblables à icelle, & semblablement deserites.

Soit le triangle rectangle A B C, ayant l'angle A droict: & soit descrit sur B C, quelconque figure rectiligne B D, [d] à laquelle sur les costez B A, A C, soient constituées A F, A I, semblables, & semblablement descrites. Ie dis que B D, est egale aux deux A F, A I.

d 18. 6.



Car ayant mené la perpendiculaire A K, du poinct A sur B C, [e] comme B C sera à C A, ainsi C A, sera à C K. Parquoy comme B C 1. à C K 5. ainsi la figure B D, descrite sur la premiere, sera à la figure C H, sur la 2. [f] semblable, & semblablement descrite, & par conuersion de raison, comme C K à B C, ainsi la figure C H à la figure B D: semblablement on monstrera que comme B K est à B C, ainsi la figure B G, est à la figure B D, puis que les trois lignes B C, B A, B K, sont proportionelles.

e *Coroll.* 8. 6.

f *Coroll.* 19. ou 20. 6.

Donc, d'autant que comme C K premiere grandeur, est à B C 2. ainsi C H 3. est à B D 4. Item, comme B K 5. grandeur, est à B C 2. ainsi B G 6. est à B D 4. [g] Comme la premiere C K, auec la 5. B K, sera à la 2. B C: ainsi la 3. C H, auec la 6. B G, sera à B D 4. mais C K 1. & B K 5. ensemble, font egales

g 24. 5.

à la

à la 2. B C : Donc la 3. C H, & la 6. B G ensemble seront pareillement egales à la 4. B D. Ce qui est proposé.

Autrement, [h] puis que le triangle K A C, est semblable au triangle A B C, & que leurs costez B C, C A, sont de mesme raison : (car comme B C à C A, au triangle A B C, ainsi A C à C K, au triangle A C K,) [i] le triangle K A C, sera au triangle A B C, en raison doublée de C A à B C : [k] Mais la figure C H, est à la figure B D, aussi en raison doublée de C A à B C : [l] Donc le triangle K A C, sera au triangle A B C, comme la figure C H à la figure B D : par mesme raison on monstrera que comme le triangle K A B, est au triangle A B C, ainsi la figure B G à la figure B D.

h 8. 6.
i 19. 6.
k 19. ou 20. 6.
l 11. 5.

Derechef, d'autant donc que comme K A C, premiere grandeur, est à A B C 2. ainsi C H 3. est à B D 4. Item, comme K B A 5. à A B C 2. ainsi B G 6. à B D 4. [m] Comme K A C 1. auec K B A 5. sera à la 2. A B C : ainsi C H 3. & B G 6. ensemble, sera à la 4. B D. Mais K A C, K B A, 1. & 5. ensemble sont egales à la 2. A B C : donc C H, B G 3. & 6. ensemble seront pareillement egales à B D 4. Ce qui est proposé.

m 24. 5.

Autrement, comme le quarré de A C 1. grandeur, est au quarré de B C 2. grandeur, ainsi la figure C H 3. grandeur, à la figure B D 4. grandeur : [n] Puis qu'elles sont toutes en raison doublée des costez A C, B C, semblablement comme le quarré de A B 5. grandeur, est au quarré de B C seconde grandeur, ainsi la figure B G 6. grandeur, est à la figure B D 4. grandeur, [o] partant comme la premiere grandeur auec la 5. à sçauoir le quarré de A C auec le quarré de A B, sera à la 2. c'est à dire,

n 19. ou 20. 6.
o 24. 5.

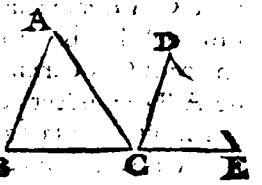
au quarré de B C : ainsi la 3. grandeur auec la 6. à sçauoir la figure C H, auec la figure B G, est à la
47. 1. 4. à sçauoir à la figure B D : Mais les quarrez de A C, A B, ensemble sont egaux au quarré de B C, donc les figures C H, B G ensemble seront aussi egales à la figure B D. Ce qui est proposé. Donc aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 22. PROP. 32.

Si deux triangles qui ont deux costez proportionaux à deux costez, sont disposez (*composez*) selon vn angle, en sorte que leurs costez de mesme raison soient aussi paralleles : les autres costez d'iceux triangles se rencontreront directement.

Soient les deux triangles A B C, D C E, ayans les costez A B, A C, proportionaux à D C, D E, sçauoir comme A B à A C, ainsi D C à D E; & soient disposez selon l'angle A C D, de sorte que les costez de mesme raison A B, D C; & A C, D E, soient paralleles entr'eux : dis que les autres costez B C, C E, feront vne ligne droicte.

Car puisque A B, D C
p 29. 1. sont paralleles, l'angle
A, sera egal à A C D
alterne : & par mesme
raison l'angle D sera
egal au mesme A C D.

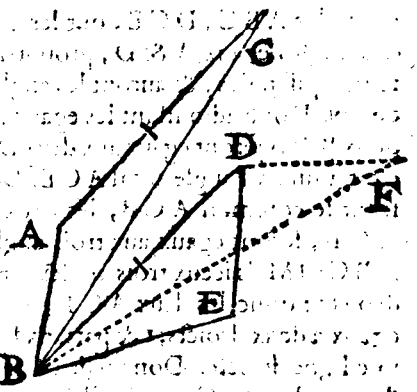


Et partant A & D
seront egaux entr'eux : d'autant donc que les triangles

triangles A B C, D C E, ont les costez à l'entour des angles egaux A & D, proportionaux : Ils se- 6. 6.
ront equiangles, & auront les angles B & D C E, egaux. Donc adiouſtant les egaux A, & A C D, les deux B & A ſeront egaux aux deux D C E, & A C D: c'eſt à dire, à l'angle total A C E. Derechef, adiouſtant le commun A C B, les deux angles A C E, A C B, ſeront egaux aux trois angles du triangle A B C: q Mais iceux trois angles ſont egaux à deux q 32. 1.
droicts : donc les deux A C E, & A C B, ſeront egaux à deux droicts, r & partant B C, C E, feront r 14. 1.
vne ligne droicte. Donc ſi deux triangles qui ont deux costez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

*Nous remarquerons icy, que cette Propoſition ne ſe peut entendre que des triangles equiangles (laquelle nous auons demonſtrée à la 4. Prop.) comme il eſt facile à colliger de cette demonſtration, par laquelle il eſt manifeſte que ſi l'angle A n'eſtoit egal à l'angle D, A B, A C, eſtans proportionaux à D C, D E, il ſeroit impoſſible que les autres costez B C, C E, ſe rencontraſſent directement, ou bien que les costez homologues A B, D C, & A C, D E, fuſſent paralleles, comme nous monſtrerons auſſi par cette figure, où ayant mené B A, E D, paralleles entr'elles, & A C, B D, auſſi pa- 31. 1.
ralleles entr'elles : en ſorte que B A ſoit à A C, comme E D à D B, & conioint les lignes droictes B C, B E, les triangles B A C, & B D E, ſeront compoſez ſelon l'angle C B D, ayant les costez de meſme raiſon A B, D E, & auſſi A C, B D paralleles, & neanmoins les autres costez B E, B C, ne ſe rencontrent directement, comme il eſt manifeſte, & ne ſe pouuant diſpoſer ſelon vn angle, en ſorte que les autres costez*



se rencontrãs directement, les costez de mesme raison soient paralleles, & ce d'autant que les angles E D B, & B A C, contenus d'iceux costez proportionaux ne sont egaux : & partant, chacun ne seroit egal à son alterne, comme il est monstré, & comme il est aussi manifeste, en faisant l'angle B D F, egal à l'angle A, & menant la ligne D F, egale à D E, & soignant la ligne B F ; lors les triangles B A C, B D F, ayans les costez B A, A C, proportionaux à F D, D B, & les

6. 6. *angles A & B D F, contenus d'iceux costez, egaux, ils seront equiangles, & estans disposez au poinct B, selon vn angle, en sorte que B A soit parallele à F D, & C A à B D, les autres costez B C, B F, se rencontreront directement, comme nous auons monstré cy-deuant, d'autant que les triangles B A C, B D F sont equiangles. Donc il ne se peut rien conclure de cette Proposition que des triangles equiangles.*

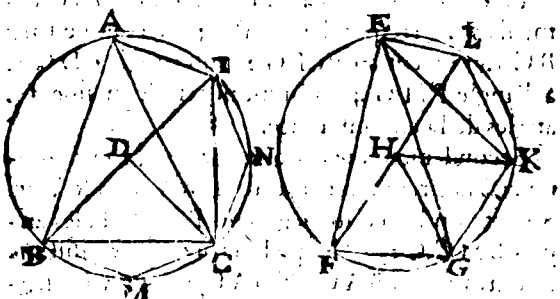
Or cette Proposition ne se pouuant entendre que des triangles equiangles, comme nous auons demonstré ; il s'ensuit manifestement qu'elle est contre-inutile ; attendu que tout ce qu'est proposé par icelle, se conclud par la 4. Proposition de ce 6. liure, comme nous auons cy demonstré.

THEO

THEOREME 23. PROP. 33.

Aux cercles egaux, les angles ont mesme raison entr'eux, que les circonferences sur lesquelles ils sont appuyez, soit qu'ils soient appuyez estans constituez aux centres ou aux circonferences : En outre les secteurs sont aussi de mesme entr'eux, d'autant qu'ils sont constituez au centre.

Soient deux cercles egaux A B C, E F G, dont les centres soient D & H, & soient les angles B D C, F H G au centre, ou B A C, F E G à la circonference: Ie dis que comme l'arc B C, est à l'arc F G, ainsi l'angle B D C, est à l'angle F H G, & l'angle B A C, à l'angle F E G, & en outre le secteur B D C, au secteur F H G.



Car ayant mené les droictes lignes B C, F G, soient appliquées aux cercles C I, egale à B C, & G K, K L, chacune egale à F G, & soient menées les droictes lignes I D, K H, L H. Donc d'autant que B C, C I sont egales, les arcs B M C, C N L, seront pareillement egaux : & partant les angles B D C, C D I,

[f] 1. 4.

[t] 28. 3.

[v] 27. 3.

CDI, seront egaux ; par mesme raison les arcs FG,GK,KL,& les angles FHG, GHK, KHL,
27.& 28.3. seront egaux. Donc l'angle BDI, sera autant multiple de l'angle BDC, que l'arc BCI, est multiple de l'arc BC. Par la mesme raison l'angle FHL, sera autant multiple de l'angle FHG, que l'arc FGL, l'est de l'arc FG : puis que les angles BDI, FHL, sont diuisez chacun en autant de parties egales que les arcs BI, FL, sur lesquels ils sont appuyez : partant si l'arc BCI, est egal à l'arc FGKL,
x 27.3. x de necessité l'angle BDI, sera egal à l'angle FHL, & si l'arc est plus grand que l'arc, l'angle sera plus grand que l'angle, & si plus petit, plus petit. Parquoy l'arc BCI, & l'angle BDI, equimultiples de la 1. & 3. grandeur, BC, BDC, seront ensemble, ou plus grands, ou egaux, ou plus petits, que l'arc FGKL, & l'angle FHL, equimultiples de la 2. grandeur FG, & de la 4. FHG, s'ils sont pris com-
y 6. d. 5. me ils s'entrerespondent. y Parquoy comme l'arc BC 1. grandeur, à l'arc FG 2. ainsi l'angle BDC 3. à l'angle FHG 4. On monstrera le mesme des angles de la circonference.

Secondement, ie dis que comme la circonference, à la circonference, ainsi le secteur au secteur. Soient constituez aux segments BC, CI, les an-
z 27. 3. gles BMC, CNI, z lesquels seront egaux, insistans aux arcs egaux BAC, CBAI, parquoy les seg-
a 24. 3. ments BMC, CNI, seront semblables ; a & partant egaux entr'eux, estans constituez sur lignes droictes egales BC, CI. Donc adioustant les trian-
b 4. 1. gles BDC, CDI, b qui sont pareillement egaux, les secteurs BDC, CDI, seront faicts egaux. Parquoy le secteur BDI, sera autant multiple du secteur BDC, que l'arc BCI l'est de l'arc BC. Semblablement,

blablement, le secteur F H L, sera monstré autant multiple du secteur F H G, que l'arc F G K L, l'est de l'arc F G, Mais d'autant que si l'arc B C I, est egal à l'arc F G K L, aussi le secteur B D I, est egal au secteur F H L ; (comme il a esté monstré aux secteurs B D C, C D I,) & si plus grand, plus grand: & si moindre, moindre ; partant l'arc B C I, & le secteur B D I, equimultiples de la 1. grandeur B C, & de la 3. B D C, defaudront ensemble de l'arc F G K L, & du secteur F H L, equimultiples de la 2. grandeur F G, & de la 4. F H G, ou ensemble seront egaux ou excederont, s'ils sont pris comme ils s'entrerespondent. Partant, comme l'arc B C 1. grandeur, est à l'arc F G 2. ainsi le secteur B D C 3. au secteur F H G 4. Donc aux cercles egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. c 6. d. 6.

COROLLAIRE 1.

Il est manifeste de cecy, que le secteur est au secteur, comme l'angle est à l'angle : Car la raison de l'vn & de l'autre ; sçauoir de l'angle B D C, à l'angle F H G, & du secteur B D C, au secteur F H G, est de mesme à la raison de l'arc B C, à l'arc F G. Parquoy elles seront de mesmes entr'elles. d d 11. 5.

COROLLAIRE. 2.

Il est pareillement manifeste que comme l'angle au centre est à quatre droicts, ainsi l'arc qui soustend iceluy angle, est à toute la circonference. Et au contraire, comme quatre angles droicts sont à l'angle qui est au centre, ainsi toute la circonference est à l'arc qui soustend ledit angle.

Car comme l'angle au centre, est à l'angle droict au centre, ainsi l'arc qui soustend iceluy angle, est au quart de la circonference du cercle, ou au quadrant e e 33. 6.

drant qui ſouſtend iceluy angle droict. Parquoy, comme l'angle au centre ſera [f] au quadruple de l'angle droict : c'eſt à dire à quatre droits, ainſi l'arc ſouſtendu à iceluy angle, ſera au quadruple du quadrant : c'eſt à dire à toute la circonference, par ce que nous auons demonſtré à la 22. Propoſition du liure 5. Ce qui eſt premierement propoſé.

f 33. 6.

D'autant donc que comme l'angle au centre eſt à quatre droits, ainſi l'arc qui ſouſtend iceluy angle, eſt à toute la circonference ; par conuerſion de raiſon, comme quatre angles droicts, à l'angle au centre : ainſi toute la circonference ſera à l'arc qui ſouſtend iceluy angle au centre. Ce qui eſt ſecondement propoſé.

g 33. 6.

Mais cecy peut auſſi eſtre ainſi demonſtré : puis que comme l'angle droict au centre, eſt à l'angle au centre. Ainſi le quadrant ou quarte partie de la circonference qui ſouſtend iceluy angle droict, eſt à l'arc qui ſouſtend iceluy angle au centre non droict. Pareillement comme le quadruple de l'angle droict, c'eſt à dire quatre droits, ſera à l'angle au centre, par ce que nous auons monſtré à la 22. Prop. du 5. liure : ainſi le quadruple du quadrant, c'eſt à dire, toute la circonference ſera à l'arc qui ſouſtend iceluy angle. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE.

En ſuitte de cette Propoſition, nous demonſtrerons icy les Theoremes ſuiuans.

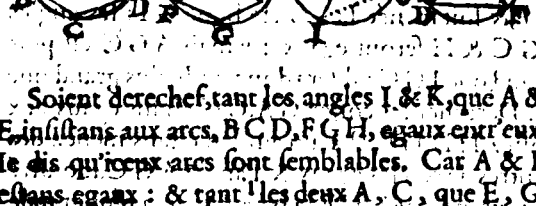
I.

Les angles qui ſont appuyez ſur ſemblables arcs de cercles, ſoit qu'ils ſoient aux

aux centres ou aux circonferences, ſont egaux entr'eux : Et au contraire, les arcs auſquels *inſiſtent* angles egaux, ſoit aux centres ou aux circonferences, ſont egaux.

Aux cercles A B C D, E F G H, dont les centres ſont I & K, ſoient les arcs B C D, F G H, ſemblables, ſur leſquels ſoient appuyez les angles I & K, aux centres, & A E, aux circonferences : Ie dis que tant ceux là que ceux cy, ſont egaux entr'eux. Car ſoient conſtituez en iceux cercles les angles C, & G, [h] qui ſeront egaux : mais tant les deux C & A, que les deux G & E, ſont egaux à deux droits : oſtant donc les egaux B C D, & G H, A & E, demeureront egaux, deſquels I & K, eſtans doubles, ils [k] ſeront auſſi egaux. Ce qui eſt propoſé.

h 10. d. 3.
i 22. 3.
i 20. 3.
k 6. c. 5.



Soient derechef, tant les angles I & K, que A & E, inſiſtans aux arcs, B C D, F G H, egaux entr'eux. Ie dis qu'iceux arcs ſont ſemblables. Car A & E eſtans egaux : & tant [l] les deux A, C, que E, G, eſtans egaux à deux droits, les reſtes C, G, ſeront egaux, [m] partant les ſegments auſquels ils ſont B C D, F G H, ſont ſemblables. Mais ſi I & K ſont egaux aux centres, leurs moitiez [n] A & E, ſont auſſi egaux. Donc, comme auparauant, les arcs B C D, F G H, ſont ſemblables. Ce qu'il falloit demonſtrer.

l 23. 3.
m 10. d. 3.
n 7. c. 5.

II.

Aux cercles egaux, ſi on prend circonferences inegales, moindres que le demy-cercle, la plus grande circonference ſouſtiendra vne plus grande ligne. Mais aux ſegments plus grands que le demy-cercle la plus petite ligne ſouſtiendra vne plus grande circonference que la plus grande.

Aux cercles egaux A B C, D E F, dont les centres ſont G, H, ſoient les arcs moindres que le demy-cercle A C, D F, & ſoit A C plus grand, & D F plus petit: & partant A B C moindre, & D E F, plus grand. Ie dis que la ligne droicte menée de A à C, eſt plus grande que la droicte ligne menée de D à F. Car apres auoir mené les lignes droictes G A, G C, A C, H D, H F, puis que l'arc A C, eſt poſé plus grand que l'arc D F, ſoit retranché G I, egal à D F, & ſoit menée la droicte ligne G I: les angles
o 27. 3. I G C & H ſeront egaux: o mais A G C eſt plus grand que I G C: il ſera donc auſſi plus grand que H. Derechef, les coſtez G A, G C, eſtans egaux aux coſtez H D, H F, chacun au ſien, eſtans menez des centres de cercles egaux, & l'angle A G C, monſtré plus grand que D H F, la baſe A C, ſera plus grande que la baſe D F, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. Soit veuë la 2. figure.

Fin du ſixieſme Liure.

LIVRE

LIVRE SEPTIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. L'vnité, eſt ſelon laquelle vne chacune choſe, de celles qui ſont, eſt dite vne,

EVCLIDE a traicté iuſques icy, de la premiere partie de la Geometrie, ſçauoir de celle-là laquelle conſidere les plans : Il reſte l'autre partie, laquelle traicte des ſolides. Mais auparauant il luy a eſté neceſſaire de traicter des lignes commenſurables & incommenſurables : d'autant que la cognoiſſance d'icelles eſt requiſe à l'explication & demonſtration des proprietez de pluſieurs corps ſolides, & principalement de ceux que l'on nomme reguliers ; de ſorte que ſans icelles, le traicté des ſolides auroit eſté imparfaict, & d'auantage, que ſans celles lignes pluſieurs coſtez, tant des plans que des ſolides, ſi l'on veut reduire la Geometrie en vſage & pratique, ne peuuent eſtre exprimez ny entendus : car pluſieurs des

costez, sont ces lignes que les Grecs apppellent ἄλογοι, c'est à dire irrationelles, ou si elles ne sont irrationelles, elles sont incommensurables en longitude entr'elles, partant ne sont exprimées par les nombres.

Or d'autant que l'explication & intelligence de ces lignes, est comme enueloppée & conioincte auec les nombres, en sorte que sans iceux ne peuuent estre cogneues, il a esté besoin de traicter des nombres auparauant. C'est pourquoy en ce septiesme liure, & aux deux suiuans, il explique les affections & proprietez des nombres, entant qu'ils peuuent seruir à la Geometrie, afin qu'au 10. liure, auec plus de facilité & plus amplement, il face les demonstrations des lignes commensurables, & incommensurables.

Commençant donc, selon sa coustume, par les principes, il definit premierement l'vnité; enseignant que c'est celle, selon laquelle, chaque chose de celles qui sont, est dite, vne: car selon l'vnité, nous auons de coustume d'appeller vn corps, vn corps: vn animal, vn animal: vne pierre, vne pierre, & ainsi des autres choses. Au reste, l'vnité ne reçoit aucune diuision aux nombres, tout de mesme que le poinct aux grandeurs.

2. Nombre, est vne multitude composée d'vnitez.

C'est à dire, que si on pose tant d'vnitez que l'on voudra ensemble, la collection d'icelles, s'appelle, nombre: d'où il est manifeste, qu'en tout nombre il y a autant de parties, qu'il y a d'vnitez qui le constituent: de sorte que l'vnité est partie

de

de chacun nombre denommée par iceluy nombre, duquel elle eſt partie. Comme le nombre 8. composé de huict vnitez, ſe diuiſe en autant de parties, ſçauoir en huict vnitez, chacune deſquelles eſt dite partie huictieſme du nombre huict, &c. D'où il s'enſuit que tous les nombres ſont commenſurables entr'eux, puis qu'ils ſont tous meſurez par vne meſme meſure, ſçauoir par l'vnité, comme il eſt dit. Ce qui ne peut pas conuenir à toutes les grandeurs, comme il ſera monſtré au 10. liure.

3. **Vn nombre, eſt partie d'vn autre nombre, le plus petit du plus grand, lors que le plus petit, meſure le plus grand.**

Cette Definition eſt ſemblable à celle du cinquieſme liure, par laquelle Euclide definit la partie de la quantité continuë. Car comme là, icy il definit la partie aliquote, laquelle eſt dite meſurer exactement ſon tout. Comme 6. eſt dit partie de 18. d'autant qu'il le meſure exactement ſans qu'il reſte rien. Semblablement chacun de ces nombres, 3. 4. 6. 8. eſt partie de 576. puiſque chacun le meſure exactement. Or toute partie prend ſon nom du nombre par lequel elle meſure vn autre, comme 6. eſt dite ſeptieſme partie de 42. d'autant que 6. meſure 42. par 7. c'eſt à dire, eſt contenu en 42. ſept fois exactement, & ainſi des autres.

4. Mais vn nombre, eſt dit parties d'vn autre plus grand, quand le plus petit ne meſure le plus grand.

Comme 4. ne ſera dit partie de 6. d'autant que 4. plus petit ne meſure 6. preciſément : mais ſera dit ſes deux parties de 6. ſçauoir $\frac{2}{3}$ & 5. ſera dit parties de 18. ſçauoir $\frac{5}{18}$ d'autant que l'vnité qui eſt leur commune meſure, eſt contenuë cinq fois en 5. & dix-huict fois en 18.

5. Vn nombre eſt dit multiple d'vn autre plus petit, lors que le plus petit meſure le plus grand.

Tout ainſi qu'vn nombre, qui en meſure preciſément vn plus grand, eſt dit partie du plus grand, auſſi le plus grand, qui eſt meſuré par le plus petit, eſt dit multiple du plus petit ; & tout ainſi auſſi qu'vn nombre qui n'en meſure exactement vn plus grand, n'eſt dit partie du plus grand, mais parties, auſſi le plus grand ne ſera dit multiple du plus petit, par lequel il n'eſt meſuré. Comme 4. eſt partie de 24. d'autant qu'il meſure 24. preciſément, & pareillement 24. eſt dit multiple de 4. puis qu'il eſt meſuré de 4. Et 30. multiple de 6. d'autant que 6. meſure 30. &c.

6. Nombre pair, eſt celuy qui peut eſtre diuiſé en deux egalement.

Comme tous les nombres ſuiuans 4. 10. 40. 100. 1000. ſont dits nombres pairs, d'autant que chacun

chacun peut estre diuisé en deux parties egales, dont les moitiez seront 2.5.20.50.500.

7. Mais nombre impair, est celuy qui ne se peut diuiser en deux egalement, ou qui differe du nombre pair de l'vnité.

Comme tous ces nombres icy, 5.11.15.37.101. sont appellez nombres impairs, d'autant qu'ils ne peuuent estre diuisez en deux egalement: ou bien d'autant qu'ils sont differens de l'vnité des nombres pairs 4.10.14.36.100. &c.

8. Nombre pairement pair, est celuy qu'vn nombre pair mesure par vn nombre pair.

Comme 32. sera dit pairement pair, d'autant que 8. nombre pair, le mesure par 4. qui est aussi nombre pair: 24. sera aussi dit nombre pairement pair, puis que 4. nombre pair, le mesure par 6. nombre pair, &c.

9. Et nombre pairement impair, est celuy qu'vn nombre pair mesure, par vn nombre impair.

C'est à dire, que si vn nombre pair mesure vn nombre pair, par vn nombre impair, le mesuré sera appellé pairement impair. Comme 30. que 2. nombre pair mesure par 15. nombre impair. Et 6. nombre pair, mesure le mesme 30. par 5. nombre impair, &c.

10. Mais nombre impairement impair, est celuy lequel vn nombre impair, mesure par vn nombre impair.

Comme 45. lequel est mesuré de 9. nombre impair par 5. nombre aussi impair, est dit nombre impairement impair : Et 15. aussi, qui est mesuré de 5. par 3. Et ceux-cy 9.21.25.27.33.35. &c. sont dits impairement impairs.

11. Nombre premier, est celuy lequel l'vnité seule mesure.

C'est à dire, que si vn nombre ne peut estre mesuré par aucun autre, mais par l'vnité seulement, en sorte qu'il ne puisse estre dit pairement pair, ou pairement impair, ou impairement impair, iceluy sera appellé nombre premier, comme sont ceux-cy, 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31.&c. Car la seule vnité les mesure.

12. Nombres premiers entr'eux, sont ceux-là, lesquels ont la seule vnité pour commune mesure.

C'est à dire, que si deux ou plusieurs nombres sont proposez, & qu'il ne se puisse trouuer aucun nombre qui mesure chacun d'iceux precisément, outre la seule vnité, iceux seront dicts premiers entr'eux, comme 15. & 8. ou 3. & 5. sont premiers entr'eux, d'autant qu'il n'y a que l'vnité qui soit commune mesure d'iceux, &c.

13. Nombre

13. **Nombre composé, est celuy lequel quelque nombre peut mesurer.**

Les Geometres appellent nombre composé, celuy que quelque autre nombre mesure outre l'vnité. Comme 15. qui est mesuré par 3. & 5. Or il est manifeste que tous les nombres pairs, outre le binaire, sont nombres composez, estans tous mesurez par 2. d'où il s'ensuit que tous les nombres premiers, outre le binaire, sont impairs, le binaire estant le premier des pairs.

14. **Mais nombres composez entr'eux, sont ceux-là lesquels sont mesurez par quelque nombre, comme commune mesure.**

Deux ou plusieurs nombres, lesquels sont mesurez par quelque nombre, outre l'vnité, comme par leur commune mesure, sont dits composez entr'eux, jaçoit que chacun de soy ne soit composé. Comme 15. & 24. sont composez entr'eux, d'autant que 3. mesure l'vn & l'autre, comme commune mesure: aussi 7. 21. & 35. sont composez entr'eux; car le premier d'iceux mesure soy-mesme, & les deux autres, encore qu'il soit premier de soy.

15. **Vn nombre est dit en multiplier vn autre, quand il en est produit quelqu'vn, qui est composé autant de fois du multiplié, qu'il y a d'vnitez au multipliant.**

Comme 6. ſera dit multiplier 8. quand 8. ſera compoſé autant de fois, qu'il y a d'vnitez au multipliant 6. ſçauoir ſix fois, & qu'il ſera procreé vn autre nombre, ſçauoir 48. Auſſi en changeant 8. ſera dit multiplier 6. ſi on poſe 6. huict fois, ſçauoir autant qu'il y a d'vnitez en 8. & que l'on fera le meſme 48. Ainſi vn nombre ſera dit eſtre produict de deux nombres, ſe multiplians l'vn l'autre, comme 63. de 7. & 9. &c.

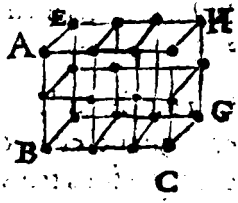
16. Mais quand deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre, en produiſent quelqu'vn, celuy qui eſt produict, eſt appellé plan. Et les nombres qui ſe multiplians l'vn l'autre, ſeront dits coſtez d'iceluy.

Tout nombre produict de la mutuelle multiplication de 2. nombres, eſt appellé plan, d'autant que ſes vnitez eſtans diſpoſées en long & en large, repreſentent vn parallelogramme rectangle, les coſtez duquel ſont les deux nombres ſe multiplians, comme il a eſté dit au ſecond liure. Comme 24. produict de 4. par 6. eſt dit nombre plan, duquel les coſtez ſont 4. & 6. d'autant que ſes vnitez diſpoſées en long & large, repreſentent vn parallelogramme rectangle, &c.

17. Quand trois nombres ſe multiplians l'vn l'autre, en produiſent quelqu'vn, celuy qui eſt procreé, ſera appellé ſolide.

solide. Et les nombres qui se multiplient l'vn l'autre, seront appellez costez d'iceluy.

Comme d'autant que ces trois nombres 2.3.4. se multiplians l'vn l'autre produisent 24. car 2. par 3. produict 6. & 6. par 4. produict 24. ou bien 2. par 4. fait 8. & 8. par 3. fait 24. ce nombre 24. sera appellé solide; & les nombres 2.3.4. sont les costez. D'autant que ses vnitez disposées en long, large & profondité, representent quelque figure solide, appellée parallelipipede, comme il sera exposé au liu. 11. dont les 3. dimensions sont exprimées par les 3. nombres qui se multiplient. Car si on multiplie 2. par 4. on aura 8. pour le nombre de la base B G, du solide A C, longue de 4. vnitez, & large de 2. & si cette base est multipliée par 3. on produira tout le nombre du solide 24. haut de 3. vnitez, &c.



18. Nombre quarré, est celuy qui est egalement egal, ou qui est contenu sous deux nombres egaux.

C'est à dire, produict de deux nombres egaux, multipliez l'vn par l'autre.

Ce nombre plan, qui est egalement egal, c'est à dire, qui selon ses vnitez disposées en long & en large, refere vn parallelogramme rectangle, dont la longitude est egale à la latitude, de sorte que tous ses costez sont egaux, ou qui est produict de

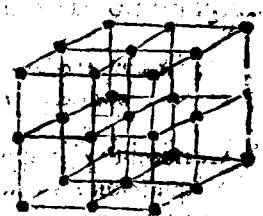
2. nombres egaux, & partant est contenu sous iceux, est appellé quarré, comme 25. contenu sous 5. & 5. c'est à dire, produit de la mutuelle multiplication des deux 5. l'vn par l'autre. Car ses vnitez estans redigées en forme plane, il represente vn quarré parfaict, ayant 5. vnitez à chaque costé, partant egalement égal.

Mais l'vn ou l'autre des costez de la multiplication desquels il est produit, est appellé racine du quarré.

19. Nombre cube, est celuy qui est egalement egal egalement; ou qui est contenu sous trois nombres egaux.

Ou produict de trois nombres egaux multipliez l'vn par l'autre.

Il appelle cube ce solide, qui est egalement égal egalement, c'est à dire, duquel les vnitez disposées en long, large & profond, representent vn cube Geometrique, en sorte que toutes ses dimensions, sçauoir longitude, latitude, hauteur ou profondité, soient egales; ou qui est produict de trois nombres egaux, comme 27. qui est contenu sous ces trois nombres 3. 3. 3. car 3. fois 3. font 9. & 3. fois 9. font 27. Car toutes ses vnitez redigées en forme de solide representent vn cube Geometrique; y ayant 3. selon chacune dimension. Et chacun de



ces

ces trois nombres, est appellé des Geometres costé du cube, & de plusieurs Arithmeticiens, racine cubique.

20. Les nombres sont proportionaux: Quand le premier est autant multiple du second, ou mesme partie, ou mesmes parties, que le troisiesme du quatriesme.

Ou bien, quand le premier contient autant de fois le second; & en outre vne mesme partie d'iceluy, ou mesmes parties, que le troisiesme le quatriesme.

Afin de comprendre tous les nombres proportionaux, en tout genre de proportion d'inegalité, (comme sont tous les nombres inegaux.) Nous auons adiousté ces mots, tant à cause qu'ils se peuuent entendre de ce qu'a dit Euclide, que pour rendre cette Definition plus intelligible, (ou bien quand le premier contient autant de fois le second: & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy, que le troisiesme le quatriesme.) Car la vulgaire Definition d'Euclide (laquelle Clauius pense estre corrompuë) comprend seulement les nombres proportionaux, en la proportion multiple & submultiple, & aux autres proportions de moindre inegalité. Car en la proportion multiple, il y a quatre nombres proportionaux, quand le premier est autant multiple du second, que le troisiesme du quatriesme, & en la submultiple, quand le premier est mesme partie du second, que le troisiesme du quatriesme, & aux au-

tres

tres proportions de moindre inegalité. Quand le premier eſt meſmes parties du ſecond que le troiſieſme du quatrieſme, comme veut la Definition d'Euclide : mais par icelle l'on ne peut comprendre quels ſont les nombres proportionaux en la raiſon ſuperparticuliere, ſuperpartiente, multiple ſuperparticuliere, & multiple ſuperpartiente : car en toutes ceux-cy, le premier nombre n'eſt pas autant multiple du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ny meſme partie, ny meſmes parties: Mais le premier contient le ſecond, & le troiſieſme le quatrieſme egalement, ſçauoir vne fois ou plus : & en outre vne meſme partie d'iceluy, ou meſmes parties, comme il eſt manifeſte par la Definition 4. du liure 5.

Parquoy ces nombres 12.4.9.3. ſont proportionaux, eſtant le premier autant multiple du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ſçauoir triple. Item 4.12.3.9. Car 4. eſt telle partie de 12. ſçauoir tierce, que 3. de 9. Derechef, 6.8.9.12. ſont proportionaux, d'autant que 6. eſt meſmes parties de 8. que 9. de 12. ſçauoir les $\frac{1}{4}$. Finalement, 7.6.14.12. & 7.4.14.8. & 11.5.22.10. & 12.5.24.10. ſont nombres proportionaux : car au premier exemple, le premier nombre, contient vne fois le ſecond, & le troiſieſme, vne fois le quatrieſme, & en outre la $\frac{1}{2}$. partie. Au ſecond exemple, le premier contient vne fois le ſecond, & le troiſieſme le quatrieſme, & en outre $\frac{1}{4}$. parties. Au troiſieſme exemple deux fois, & $\frac{1}{5}$. partie. Et au dernier, le premier contient deux fois le ſecond, & le troiſieſme le quatrieſme, & en outre, $\frac{2}{5}$. parties, & autrement les nombres ne ſeront nullement proportionaux. Donc toutes & quantes

quantes fois que 4. nombres ſont poſez proportionaux, il faudra accorder, que ſi les plus grands ſont comparez aux moindres, le premier & le troiſieſme, ſeront equimultiples du 2. & du 4. ou bien le premier & le troiſieſme contiendront egalement le 2. & le 4. & en outre meſme partie, ou meſmes parties: Et au contraire, ſi le 1. & le 3. ſont accordez equimultiples: ou bien que le 1. ſoit dit contenir autant de fois le 2. que le 3. le 4. & en outre meſme partie ou meſmes parties, on colligera que les nombres ſont proportionaux. Que ſi on compare les moindres aux plus grands, & qu'ils ſoient dits auoir meſme proportion, il faudra confeſſer que le premier eſt meſme partie du 2. que le 3. du 4. ou meſmes parties; & au contraire ſi le premier eſt poſé meſme partie du 2. que le 3. du 4. ou meſmes parties, on conclura qu'iceux nombres ſont proportionaux.

Mais Euclide definit ſeulement ces nombres proportionaux là, leſquels ont meſme proportion d'inegalité. Car s'il eſt queſtion de la proportion ou raiſon d'egalité, il eſt manifeſte que le 1. doit eſtre egal au 2. & le 3. au 4. afin qu'ils ſoient dits proportionaux.

Or de cette Definition on collige manifeſtement que les nombres egaux ont meſme raiſon à vn meſme, & au contraire vn meſme aux egaux. Item, que les nombres qui ont meſme raiſon à vn meſme, ou auſquels vn meſme nombre a meſme raiſon, ſont egaux.

Car puis que les nombres egaux ſont equimultiples, ou meſme partie, ou meſmes parties d'vn meſme; ou le contiennent egalement, & en outre meſme partie ou meſmes parties. Item puis qu'vn

qu'vn meſme nombre eſt equimultiple de nombres egaux, ou meſme partie, ou meſmes parties, ou contient iceux egalement, & en outre meſme partie, ou meſmes parties d'iceux : il eſt manifeſte que nombres egaux ont meſme raiſon à vn meſme, ou vn meſme à nombres egaux, ſelon cette Definition.

Derechef, d'autant que les nombres qui ont meſme raiſon à vn meſme, ſont equimultiples d'iceluy, ou meſme partie, ou meſmes parties, ou le contiennent egalement, & en outre meſme partie, ou meſmes parties. Et vn nombre qui a meſme raiſon à quelques-vns, eſt equimultiple d'iceux, ou meſme partie, ou meſmes parties, ou les contient egalement, & en outre meſme partie, ou meſmes parties d'iceux : ſelon cette Definition, il eſt manifeſte que les nombres qui ont meſme raiſon à vn, ou auſquels vn meſme à meſme raiſon, ſont egaux entr'eux.

Semblablement, l'on infere qu'il y a plus grande raiſon d'vn plus grand nombre à vn meſme, que d'vn plus petit. Et au contraire, vn meſme a plus grande raiſon à vn plus petit qu'à vn plus grand. Item, que celuy des nombres qui a plus grande raiſon à vn meſme, eſt le plus grand, & celuy auquel vn meſme, a plus grande raiſon eſt le plus petit : toutes leſquelles choſes ſont faciles, entendant bien cette Definition.

Clauius dit icy, que cette Definition conuient auſſi aux nombres rompus, ſoit qu'il y ait des nombres entiers conioincts auec iceux, ou non: Car pour exemple, ces quatre nombres ſont proportionaux $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ le premier eſtant autant multiple du ſecond, que le 3. du 4. ſçauoir double, ce qui

appert,

appert, si on reduit les deux premiers en mesme denomination, sçauoir à $\frac{6}{12}$ & $\frac{3}{12}$, & les deux derniers à $\frac{2}{4}$ & $\frac{1}{4}$. Semblablement, ces quatre sont proportionaux, $2\frac{1}{3}$ $4\frac{8}{11}$ $1\frac{1}{4}$ $2\frac{5}{10}$, puis que le premier est telle partie du 2. que le 3. du 4. sçauoir la moitié: ce qui est manifeste, les reduisant en mesme denomination, sçauoir à $\frac{14}{6}$ $\frac{12}{8}$ & $\frac{5}{4}$ & $\frac{10}{4}$. En quoy Clauius se trompe lourdement, ne considerant pas, qu'à proprement parler, il n'y a point de nombres rompus, ou fractions, l'vnité estant indiuisible, selon Euclide, & la fraction se faisant en la chose nombrée, & non aux nombres, sçauoir quand on diuise quelque tout en autres parties egales, & d'vn autre nom, comme nous auons monstré en nostre Arithmetique, lesquelles parties estans appliquées aux nombres, ou les nombres appliquez à icelles, sont pour lors nombres absolus, c'est à dire entiers, comme aux exemples cy-dessus, où il dit que $\frac{6}{3}$ est double de $\frac{3}{1}$. Il faut entendre que ces nombres 6. & 3. sont pris absolument, & comme nombres entiers, sans auoir esgard au nom: car l'on compare seulement le nombre au nombre, sans comparer le nom au nom: c'est à dire, au Denominateur, & faut entendre le mesme des autres: Car ces chose ainsi reduites ne sont plus fractions; puis que fractions sont ainsi dites, seulement en comparaison de leur tout ainsi diuisé en parties d'vn autre nom: mais ces parties appliquées aux nombres, sont nombres entiers: & ainsi l'entend Euclide.

21. Les

21. Les nombres plans, ſemblables & ſolides, ſont ceux-là qui ont les coſtez proportionaux.

Afin qu'vn nombre plan ſoit ſemblable à vn nombre plan, il n'eſt pas neceſſaire que deux coſtez de l'vn, tels que l'on voudra, ſoient proportionaux à deux coſtez de l'autre, tels que l'on voudra; mais ſuffit que l'vn ait deux coſtez, quels qu'ils ſoient proportionaux à deux quelconques coſtez de l'autre.

Comme les nombres plans 24. & 6. ſont ſemblables, d'autant que les coſtez de celuy-là, 6. & 4. ſont proportionaux, aux coſtez de celuy-cy, 3. & 2. combien que les autres coſtez de ce premier 8. & 3. ou 12. & 2. ne ſoient proportionaux à ceux-cy 3. & 2.

Semblablement, il n'eſt pas requis, qu'afin que deux nombres ſolides ſoient ſemblables, que 3. des coſtez de l'vn, tels qu'on voudra, ſoient proportionaux à 3. de l'autre, tels qu'on voudra; mais ſuffit que trois coſtez ſoient proportionaux à trois coſtez, quels qu'ils ſoient, car ainſi, ils ſont reduits en forme de ſolide, ſelon leurs vnitez, & leurs longitudes, latitudes & altitudes ſeront proportionelles. Comme les nombres ſolides 192. & 24. ſont ſemblables, les coſtez de celuy-là, 8. 6. 4. eſtans proportionaux aux coſtez de celuy-cy, 4. 3. 2. combien que les autres coſtez de ce premier 12. 8. & 2. ou 16. 4. 3. ne ſoient proportionaux à ceux-cy, 4. 3. 2. &c.

22. Nombre

22. Nombre parfaict, eſt celuy-là qui eſt egal à toutes ſes parties aliquotes.

C'eſt à dire, que ce nombre-là, auquel toutes ſes parties priſes enſemble ſont egales, (ſçauoir toutes ſes parties aliquotes) eſt appellé des Mathematiciens nombre parfaict, comme 6. 28. 496. Car le premier contient ces 3. parties aliquotes, 1. 2. 3. leſquelles toutes enſemble font 6. Toutes celles du ſecond ſont 1. 2. 4. 7. 14. la ſomme deſquelles faict 28. Et celles du troiſiéme 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 148. toutes leſquelles aſſemblées font 496. &c.

Que ſi toutes les parties aliquotes d'vn nombre priſes enſemble, ſont plus grandes qu'iceluy, il ſera dit abondant, ſi moindres, il ſera appellé diminué.

D'où il appert que ce mot, partie, eſt pris par Euclide, pour partie aliquote ſeulement: car autrement tout nombre ſeroit nombre parfaict, tout nombre eſtant egal à toutes ſes parties, ſi chaque nombre plus petit, peut eſtre dit parties d'vn plus grand, ſoit qu'il le meſure ou non.

A ces Definitions d'Euclide, nous adiouſterons les ſuiuantes, apres quelques Interpretes.

23. Vn nombre eſt dit meſurer vn nombre par celuy-là, lequel multipliant, ou eſtant multiplié, produit le meſme nombre.

Comme 4. ſera dit meſurer 12. par 3. d'autant

que 4.multiplié par 3.produict 12. Item,3.ſera dit meſurer le meſme 12.par 4.puis que 4. multipliant 3.produit 12.&c.

24. Proportion, ou raiſon de nombres, eſt vne habitude d'vn nombre à vn autre, ſelon ce que l'vn eſt multiple de l'autre, ou partie, ou parties, ou bien le contient vne fois, ou quelques-fois, & en outre quelque partie,ou parties d'iceluy.

Comme ſi on compare 20.auec 4.ſelon ce que 20.eſt multiple de 4.ſçauoir quintuple, cette comparaiſon ou habitude ſera dite raiſon, comme il eſt dit à la 3.Definition du 5.liu.où Euclide a parlé de la raiſon en general.

25. Deux nombres ſont dits termes ou racines de la proportion,auſquels l'on n'en peut trouuer deux plus petits en la meſme raiſon ou proportion.

26. Quand trois nombres ſont proportionaux, le premier eſt dit auoir au troiſieſme la raiſon doublée de celle du premier au ſecond: Et quand il y en a quatre, le premier eſt dit eſtre au quatrieſme en raiſon triplée, du premier au ſecond: Et ainſi d'vn meſme ordre,vn de plus,iuſques à ce que la proportion ſoit acheuée.

27. S'il y a tant de nombres que l'on voudra

voudra d'ordre, la raiſon du premier au dernier, eſt dicte eſtre compoſee des raiſons du premier au ſecond, & du ſecond au troiſieſme, & du troiſieſme au quatrieſme, & ainſi d'ordre, iuſques à ce que la proportion ſoit acheuée.

PETITIONS OV DEMANDES.

1. A tout nombre donné, en pouuoir prendre tant que l'on voudra d'egaux ou multiples.

2. A tout nombre donné en pouuoir prendre vn plus grand.

Combien que le nombre ne puiſſe eſtre diminué infiniment, mais paruient à l'vnité indiuiſible, il peut neantmoins eſtre augmenté infiniment par la continuë addition de l'vnité. Parquoy quelconque nombre eſtant propoſé l'on en peut trouuer vn plus grand, ſçauoir celuy qui eſt produit de l'addition de l'vnité, ou de pluſieurs vnitez, au nombre donné.

COMMVNES SENTENCES.

1. Les nombres equimultiples de nombres egaux, ou d'vn meſme nombre, ſont egaux entr'eux.

2. Les nombres, desquels vn mesme nombre est equimultiple, ou desquels nombres egaux sont equimultiples, sont egaux entr'eux.

3. Les nombres qui sont mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux, ou d'vn mesme nombre, sont egaux entr'eux.

4. Les nombres, desquels vn mesme nombre ou nombres egaux, sont mesme partie, ou mesmes parties, sont egaux entr'eux.

5. L'vnité mesure tout nombre, par les vnitez qui sont en iceluy, c'est à dire, par le mesme nombre.

Car l'vnité estant prise autant de fois, qu'il y a d'vnitez au nombre proposé, constituë iceluy: c'est pourquoy elle le mesure par les vnitez qui sont en iceluy, c'est à dire, par le mesme nombre constitué de ses vnitez.

6. Tout nombre mesure soy-mesme par l'vnité.

Puis que chacun nombre pris vne fois est egal à luy-mesme, il est manifeste que tout nombre se mesure soy-mesme par l'vnité.

7. Si vn nombre multipliant vn nombre, en produit quelqu'vn, le multipliant mesurera

mesurera le produict, par le multiplié: mais le multiplié mesurera le mesme par le multipliant.

Car que B, multipliant A, produise C. Ie dis que A, mesure C par B, & B mesure le mesme C par A: Car [a] puis que B, estant autant de fois composé qu'il y a d'vnitez en A, constituë C, il est manifeste que B mesure C par A, & par mesme raison A, mesure le mesme par B, puis que B multipliant le mesme A, produit le mesme C, comme il sera demonstré à la 16. Proposition de ce liure.

A 4 B 3
C 12

[a] 15.def.

8. Si vn nombre en mesure vn autre, celuy par lequel il le mesure, mesure le mesme par les vnitez qui sont au mesurant: c'est à dire, par le mesme nombre mesurant.

Comme d'autant que le nombre 6. mesure 18. par 3. iceluy 3. mesurera le mesme 18. par 6. c'est à dire par les vnitez qui sont en 6. Car puis que 6. mesure 18. par 3. le nombre 18. sera [b] produit de la multiplication de 6. par 3. ou de 3. par 6. Donc par le precedent axiome 3. mesurera 18. par 6.

[b] 15.def.

9. Si vn nombre mesurant vn nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, il produira celuy-là lequel il mesure.

Car, que le nombre A, mesure C par B. Ie dis que A multipliant B, ou multiplié de B, produira C: c Car A est dit mesurer C par le nombre, lequel multipliant, ou estant multiplié, produit C. Donc A estant posé, mesurer C par B; il est manifeste que A multipliant B ou estant multiplié par iceluy, produira C.

c 25. def.

A .... 4 B ... 3
C 12

10. Le nombre qui mesure tant d'autres nombres que l'on voudra, mesure aussi le composé d'iceux.

Que le nombre A, mesure B C, & C D. Ie dis qu'il mesure aussi leur composé B D. Car puis

A ..14. 20.
B....4 E...4 C....4 F....4 G....4 D.

que A mesure B C, C D, tant B C, que C D, sera multiple de A, diuisant donc B C, selon les parties B E, E C, egales à A, & C D, selon C F, F G, G D, egales à A; B D, composé de toutes les parties B E, E C, C F, F G, G D, egales à A, sera multiple de A. Donc A mesure B. Ce qui est proposé.

11. Le nombre, qui mesure quelconque autre nombre, mesure aussi tout nombre que celuy-là mesure.

Que le nombre A mesure B, & B mesure C D. Ie dis que A mesure aussi C D: Car puis que B mesure C D, iceluy C D, sera multiple de B. Diuisant donc

donc C D, en C E, E D egaux à B; A mesurera C E, E D; puis que A est posé mesurer B, nombre egal, tant à C E, que à E D. Donc A mesurera aussi C D, composé de C E, E D. Ce qui est proposé.

A ... 3
B 9
C ..... 9 E ..... 9. D d 10. c. s.

12. Le nombre, qui mesure le tout & le retranché, mesure aussi le reste.

Que A, mesure le tout B C, & le retranché B D. Ie dis qu'il mesurera aussi D C reste. Car puis que A mesure B C, & B D, tant B C, que B D, sera multiple de A, ou B D sera egal à A. Donc ayant diuisé tant B C, que B D, en parties egales à A, le reste D C, sera vne seule partie de B C, egale à A, ou plusieurs: partant D C, sera egal à A, ou multiple d'iceluy. Donc A, mesurera D C. Ce qui est proposé.

A ... 3
B ..... 9 D ... 3 C
B ..... 9 D ..... 6 C
B ... 3 D 6

Tout ce qui a esté adiousté cy-dessus, outre les Definitions d'Euclide, est pour rendre les demonstrations cy-apres plus intelligibles: toutes lesquelles choses icy adiousteés, sont fondées sur tout ce qu'a dit Euclide par cy-deuant.

THEOREME 1. PROP. 1.

Si de deux nombres inegaux proposez; on retranche tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le re-

stant no mesure iamais son precedent, iusques à ce que l'on ait pris l'vnité : les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inegaux proposez A B, C D, le moindre desquels C D, soit retranché tant de fois que l'on pourra du plus grand A B: & reste E B, qui soit osté de C D, aussi autant de fois qu'il sera possible, & le reste F D, de E B : & qu'en ceste alternative soustraction, le nombre restant, ne mesure iamais le precedent duquel il a esté soustrait, iusques à ce que l'on paruienne à l'vnité G B, qui mesure le nombre precedent F D. Ie dis que les nombres A B, C D, sont premiers entr'eux, c'est à dire qu'ils ont la seule vnité pour commune mesure.

Car s'ils ne sont premiers entr'eux, ils seront mesurez par quelque nombre, lequel soit H, commune mesure d'iceux outre l'vnité. D'autant donc que H mesure C D, & C D; A E, (C D, estant partie de A E, ou egal à iceluy, puis qu'estant osté de A B, reste E B) [e] H mesurera aussi A E. Mais H mesure le tout A B. [f] Il mesurera donc aussi le reste E B. Mais E B mesure C F. [g] Donc H mesurera le mesme C F: & partant puis qu'il mesure le tout C D, [h] il mesurera aussi le reste F D, & puisque F D, mesure E G, [i] H mesurera aussi E G. Mais H mesuroit le tout E B, [k] donc H mesurera pareillement l'vnité restante G B, le tout sa partie, ce qui est absurde. Donc aucun nombre

A ..... 10 E .. 2 G 1. B
C ... 3 F .. 2 D
H .....

e 11.c.s.
f 12.c.s.
g 11.c.s.
h 12.c.s.
i 11.c.s.
k 12.c.s.

outre

outre l'vnité, ne mesurera AB, CD : & partant seront premiers entr'eux. Parquoy si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin demonstre icy la Proposition suiuante.

Si de deux nombres proposez, & composez entr'eux, on soustrait tousiours le moindre du plus grand alternatiuement ; l'on ne paruiendra pas iusques à l'vnité.

Car si on paruenoit à l'vnité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux : Ce qui est absurde estans posez, composez entr'eux. l 1. 1.

De ces choses nous cognoistrons, si deux nombres quelconques estans proposez, seront premiers entr'eux ou non. Car si ostant tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, le reste ne mesure son precedent iusques à ce que l'on ait pris l'vnité, ils seront m premiers entr'eux : autrement ils seront composez entr'eux, &c. m 1. 7.

THEOREME 1. PROP. 2.

Trouuer la plus grande commune mesure de deux nombres donnez, non premiers entr'eux.

Soient proposez deux nombres AB, CD, non premiers entr'eux, desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure. Soit retranché le plus petit CD, de AB, plus grand, autant de fois qu'il

sera possible, & reste E B, lequel soustrait de C D, laisse F D, & ainsi de suitte, tousjours le plus petit soit retranché du plus grand, par vne soustraction alterne, par laquelle on paruiendra à vn nombre qui mesurera le precedent. Car si on paruenoit à l'vnité. [n] A B, C D, seroient premiers entr'eux : ce qui est contre l'hypothese. Que l'on paruienne donc à F D, lequel soustrait du precedent tant que faire se peut, ne reste rien. Ie dis que F D, est la plus grande commune mesure de A B, C D.

A ..... 16 E ..... 6 B
C ..... 6 F .. D
G .....

n 1. 7.

Car qu'il les mesure tous deux, nous le monstrerons ainsi. D'autant que F D, mesure E B ; & [o] E B, mesure C F, [o] F D mesurera le mesme C F, & [p] mesurant soy-mesme, [p] il mesurera aussi le tout C D, composé des deux C F, F D. Mais C D mesure [q] A E, [q] donc F D, mesurera aussi A E. Et puis que [r] F D, mesure aussi E B, [r] il mesurera le tout A B, composé de A E, E B. Donc F D mesure les deux nombres A B, & C D. Il est aussi la plus grande commune mesure : car s'il n'est ainsi, en soit vne autre plus grande que F D, comme G, s'il se peut faire.

o 11. c. s.
p 10. c. s.
q 11. c. s.
r 10. c. s.

D'autant donc que G mesure A B, & C D estant la commune mesure ; & C D, mesure A E ; [f] celuy G [f] mesurera aussi A E, [t] & partant E B : mais E B mesure C F. [v] Donc G mesurera aussi C F, [x] il mesurera donc aussi le reste F D, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc vn plus grand que F D, ne mesure A B, C D, & partant F D, est leur plus grande commune mesure.

f 11. c. s.
t 12. c. s.
v 11. c. s.
x 12. c. s.

Mais si le moindre nombre C D, mesure le plus grand

grand A B, en telle sorte qu'estant soustrait d'iceluy tant de fois qu'il sera possible, il ne reste rien, C D sera la plus grande commune mesure des deux, attendu qu'il mesure soy-mesme, comme il appert par cette figure. Donc de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A ..... 10 B
C ..... 5 D

COROLLAIRE.

De cette demonstration il est manifeste, que le nombre qui en mesure deux autres, mesure aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

Cecy est colligé de celle partie, par laquelle il est monstré que F D, est la plus grande commune mesure de A B, C D. Car il est monstré que si G mesure A B, C D, il mesure aussi F D, leur plus grande commune mesure.

SCHOLIE.

Par ce qui est dit cy-deuant, nous trouuerons facilement auec Campanus, si tant de nombres proposez que l'on voudra, sont premiers entr'eux ou non. Car soient trois nombres proposez: Schol. 1. 7.

Premierement, i'experimente, si A & B sont premiers entr'eux, que s'ils sont premiers entr'eux, les trois A, B, C, ne seront composez entr'eux, ne pouuans auoir aucune commune mesure, outre l'vnité, puis que A & B, sont premiers entr'eux.

A 10
B 7
C 5

Mais

2. 7. *Mais si A & B sont composez entr'eux, soit trouuée leur plus grande commune mesure D, que si D mesure le nombre C, il est euident que les trois A, B, C, seront composez entr'eux, ayans D pour commune mesure.*

Que si D, plus grande commune mesure de A & B, ne mesure C; C & D seront premiers entr'eux ou non: si premiers, les trois A, B, C, ne seront composez entr'eux, mais premiers.

A ..... 18.
B ..... 12.
C ..... 9.
D ... 3.

Car s'ils sont dits estre composez entr'eux, de sorte qu'ils ayent vn nombre pour commune mesure; icelle mesurera D; ỳ *plus grande commune mesure de A & B, & mesurant aussi C: C, D, ne seront premiers entr'eux: Ce qui est contre l'hypothese.*

ỳ Coroll. 2. 7.

Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois A, B, C, seront composez entr'eux. ẓ

ẓ 2. 7.

Car ayant trouué E, plus grande commune mesure de C & D:

21. c. s.

Puis que E mesure D, & D mesure A & B, E mesurera aussi les mesmes A & B: parquoy puis que E mesure pareillement C, le nombre E, mesurera les trois A, B, C: & partant seront composez entr'eux. Ce qui est proposé.

A 9
B 6
C 5
D ...

Semblablement, nous examinerons si plus de trois nombres sont premiers entr'eux, ou composez. Car s'il y a quatre nombres proposez: il

A 16
B 12
C 6
D ... 4 E .. 2

faudra

faudra premierement faire l'experience de trois, s'il y en a cinq, faudra faire l'experience de quatre, &c. Et faut faire au reste selon ce que nous auons dit, de trois nombres proposez.

PROBLEME 2. PROP. 3.

Trouuer la plus grande commune mesure de trois nombres donnez, non premiers entr'eux.

Soient proposez trois nombres non premiers entr'eux A,B,C, dont il faut trouuer la plus grande commune mesure.

Soit trouué D, la plus grande commune mesure de A & B: si D, mesure aussi C,

A ..... 16 D 4
B ..... 12 E .. 2 2. 7.
C .... 6 F .....

il est manifeste que D est la plus grande commune mesure des trois A,B,C. Car si vn plus grand nombre que D, est dit mesurer les trois A B C, le mesme, [a] mesurera aussi D, plus grande commune mesure de A & B, le plus grand, le plus petit, ce qui est impossible. Mais si D ne mesure C, au moins D & C seront composez entr'eux. Car A,B,C estans composez, quelconque commune mesure d'iceux, mesurera aussi D plus grande commune mesure de A & B. Donc puis qu'icelle commune mesure, mesure aussi C; D & C seront composez entr'eux, & soit E, leur grande commune mesure. [b] Ie dis que E est la plus grande commune mesure des trois A,B,C. Car d'autant que E mesure C & D, mais D mesure A & B; E mesurera les mesmes A & B, & partant il mesurera les trois A,B,C.

a *Coroll.* 2. 7.

b 2. 7.

Or

Or que E soit la plus grande commune mesure, il est euident : car, s'il se peut faire, soit F, commune mesure d'iceux, plus grande que E. D'autant que F mesure A & B [c] il mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure ; mais F mesure aussi C: donc F, mesurant D & C, mesurera pareillement E, leur plus grande commune mesure, le plus grand nombre le moindre. Ce qui est impossible : donc vn plus grand nombre que E, ne mesure A, B, C, & partant E, est leur plus grande commune mesure. Donc de trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A ..... 16 D 4
B ..... 12 E ... 2
C ..... 6 F .....

c *Coroll.* 2. 7.

COROLLAIRE.

Il est manifeste de cette demonstration, qu'vn nombre qui en mesure trois mesure pareillement leur plus grande commune mesure.

Cela est aussi colligé de la derniere partie de la demonstration, où il est monstré que puis que F mesure A, B, C, qu'il mesurera E, leur plus grande commune mesure, &c.

Semblablement, s'il y a plus de trois nombres proposez, non premiers entr'eux, pour trouuer leur plus grande commune mesure, ce Probleme aura lieu. Car s'il y a quatre nombres, il faudra premierement trouuer la plus grande commune mesure de trois. Et si 5. de 4. &c. Et faudra operer au reste, comme il a esté dit de trois nombres.

THEO

THEOREME 2. PROP. 4.

Tout nombre plus petit, eſt partie ou parties, de tout nombre plus grand.

Soient deux nombres propoſez, A plus petit, & B plus grand. Ie dis que A eſt partie, ou parties de B. Car ſoient premierement A & B premiers entr'eux. D'autant que chaque vnité de A, eſt partie de B, il eſt manifeſte que A eſt parties de B, ſçauoir autant de parties qu'il y a d'vnitez en A.

A 7
B 10

Secondement, ſoient A & B, non premiers entr'eux, mais compoſez, & que A meſure B, cela eſtant, [d] il appert que A eſt partie de B.

A 5
B 10

d 3.d.7.

Mais ſi A ne meſure B, [e] ſoit trouué C, leur plus grande commune meſure : & ſoit diuiſé A ſelon les parties A D, D E, E F, chacune egale à C, [f] D'autant que C eſt partie de B, puis qu'il le meſure, A D ſera auſſi partie de B : ſemblablement D E & E F ; & partant tout le nombre A, eſt parties de B, à ſçauoir autant de parties que C, eſt contenu de fois en A F : donc tout nombre plus petit, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

e 2. 7.

f 3. d.

A .. 2 D .. 2 E .. 2 F
B 10
C .. 2

THEOREME 3. PROP. 5.

Si vn nombre eſt telle partie d'vn nombre,

bre, qu'vn autre l'eſt d'vn autre : l'vn & l'autre enſemble ſera telle partie de l'vn & l'autre enſemble, qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

C'eſt à dire : Si de quatre nombres, le premier eſt telle partie du ſecond, que le 3. du 4. le premier & 3. enſemble ſeront telle partie du 2. & du 4. enſemble, que le premier l'eſt du ſecond.

Soient quatre nombres A, B C ; D, E F, & ſoit A 1. telle partie de B C 2. que D 3. l'eſt de E F 4. Ie dis que l'vn & l'autre A & D, 1. & 3. enſemble, eſt telle partie de l'vn & l'autre B C 2. & E F 4. enſemble, que A ſeul, eſt partie de B C ſeul, ou D de E F.

A ..... 6 D 4
B ..... 6 G ..... 6 C E .... 4 H .... 4 F

Car ayant diuiſé les nombres B C, & E F, ſelon les parties B G, G C, E H, H F, egales à A & à D, il y aura en B C, autant de parties egales à A, qu'en E F, d'egales à D, puis que A eſt telle partie de B C, que D l'eſt de E F.

D'autant donc que A & B G ſont egaux : ſi l'on adiouſte à iceux les egaux D, & E H, A & D enſemble ſeront egaux à B G, & E H enſemble : ſemblablement A & D enſemble, ſeront egaux à G C, & H F enſemble. Et ainſi de ſuitte, s'il y auoit d'auantage de parties en B C, & E F : & partant l'vn & l'autre A & D enſemble, ſeront meſme partie de l'vn & de l'autre B C, & E F enſemble, que A l'eſt de B C, ou D de E F. Donc ſi vn nombre eſt, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Commandin a demonſtré ce Theoreme ſuiuant.

Si vn nombre eſt autant multiple d'vn nombre, qu'vn autre l'eſt d'vn autre, l'vn & l'autre enſemble ſera autant multiple de l'vn & l'autre enſemble, qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

Soit A autant multiple de B, que C de D. Ie dis que A & C enſemble, ſera autant multiple de B & D enſemble, que A de B.

Car A eſtant multiple de B, & C autant multiple de D ; B ſera quelque partie de A & D meſme partie de C.

A 8
B 4
C 6
D ... 3

Donc B, D, enſemble, ſera meſme partie de A, C, enſemble, que A de B : partant A & C enſemble, ſera autant multiple de B & D enſemble, que A de B. Ce qu'il falloit demonſtrer. Ce que l'on doit auſſi entendre de pluſieurs, &c. 5. 7.

THEOREME 4. PROP. 6.

Si vn nombre eſt telles parties d'vn nombre, qu'vn autre l'eſt d'vn autre : l'vn & l'autre enſemble, ſera telles parties de l'vn & l'autre enſemble, qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

C'est à dire : Si de 4. nombres le 1. est telles parties du 2. que le 3. du 4. le 1. & 3. ensemble seront telles parties du 2. & 4. ensemble que le 1. du 2.

Soit le nombre A B, 1. mesmes parties de C 2, que D E 3. l'est de F 4. Ie dis que l'vn & l'autre A B 1. & D E 3. ensemble, sont mesmes parties de C 2. & F 4. ensemble, que A B de C, ou D E de F.

Car ayant diuisé A B, D E, selon les parties A G, G B, D H, H E, des nombres C & F; A B contiendra autant de parties de C, que D E, de F, puis que A B, est telles parties de C, que D E l'est de F. Donc d'autant

A ... 3 G ... 3 B
C 9
D ... 4 H ... 4 E
F 12

7. 5. 7. que A G est telle partie de C, que D H de F, & l'vn & l'autre A G, D H ensemble, sera telle partie de l'vn & l'autre C & F ensemble, que A G l'est de C, ou D H de F. Par mesme raison G B, H E ensemble, seront mesme partie de C & F, ensemble que G B l'est de C, ou H E de F : & ainsi de suitte, s'il y a d'auantage de parties en A B, D E : partant l'vn & l'autre A B, D E ensemble, sera mesmes parties de l'vn & l'autre C & F ensemble, que A B l'est de C, ou D E de F. Donc si vn nombre est telles parties, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 5. PROP. 5.

Si vn nombre est telle partie d'vn nombre, que le retranché du retranché: le reste sera aussi telle partie du reste, que le tout l'est du tout.

Soit

Soit le nombre A B, mesme partie de C D, que le retranché A E, l'est du retranché C F. Ie dis que le reste E B, est mesme partie du reste F D, que le tout A B, du tout C D.

Car soit pris G C, duquel E B soit telle partie que A E, l'est de C F, ou le tout A B, du tout C D. D'autant que A E, est mesme partie de C F, que E B, de G C, [h] l'vn & l'autre A E, E B ensemble, sera telle partie de C F, h 5. 7.

G C ensemble, que A .... 4 E .. 2 B
A E l'est de C F; G .... 4 C ..... 8 F .... 4 D
c'est à dire, que le
tout A B, l'est du tout C D: & partant A B, estant telle partie tant de F G, que de C D, iceux F G, C D seront egaux entr'eux; ostant donc le commun C F; G C, F D demeureront egaux: donc E B sera telle partie de F D, que de G C, c'est à dire que le tout A B, du tout C D. Donc si vn nombre est telle partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons aussi le Theoreme suivant pris de Commandin.

Si vn nombre est autant multiple d'vn nombre, que le retranché du retranché; le reste sera aussi autant multiple du reste, que le tout, du tout.

Soit A B, autant multiple du tout C D, que le retranché A E, du retranché C F. Ie dis que le reste E B, est autant multiple du reste F D, que le tout A B, du tout C D.

Car A B, A E eſtans equimultiples de C D, C F, au contraire, le tout C D, ſera meſme partie du tout A B, que C F, retranché de A E retranché, [i] parquoy le reſte F D, ſera meſme partie du reſte E B, que le tout C D, du tout A B. Partant, au contraire E B ſera autant multiple de F D, que le tout A B, du tout C D. Ce qui eſtoit propoſé.

A ..... 6 E .... 4 B
C ... 3 F .. 2 D

i 7. 7.

THEORÉME 2. PROP. 2.

Si vn nombre eſt telles parties d'vn autre nombre, que le retranché du retranché, le reſte ſera auſſi telles parties du reſte, que le tout, l'eſt du tout.

Soit le nombre A B, meſmes parties de C D, que le retranché A E, du retranché C F. Ie dis que le reſte E B, ſera meſmes parties du reſte F D, que le tout A B, l'eſt du tout C D.

Car ſoit pris G H, egal à A B; G H ſera donc auſſi meſmes parties de C D, que A B, de C D, c'eſt à dire, que A E, de C F.

A ..... 6 K ..... 6 E .... 4 B
C ..... 18 F ..... 6 D
G ..... 6 L .. 2 I ..... 6 M .. 2 H

Ayant donc diuiſé G H, ſelon G I, I H, parties de C D, & A E, ſelon A K, K E, parties de C F, le nombre des parties G I, I H, ſera egal au nombre des parties A K, K E, & tant G I, que I H, ſera telle partie de C D, que A K, ou K E, l'eſt de C F. Et puis que C D, eſt plus grand que C F, tant G I, que

que I H, partie de C D, sera plus grand que A K, ou K E, partie de C F.

Ayant donc pris G L, I M, egaux à A K, K E; G L sera mesme partie de C F, que A K, du mesme C F, ou que G I, de C D, & partant le tout G I, estant mesme partie du tout C D, que le retranché G L, du retranché C F, [k] le reste L I, sera telle partie du reste F D, que le tout G I, du tout C D: Ainsi M H, sera monstré mesme partie de F D, que le tout G I, ou I H, du tout C D. Donc puis que tant G I, que I H est mesme partie de C D, que L I, & M H, de F D, l'vn & l'autre G I, I H, ensemble, seront telles parties de C D, que L I, & M H, ensemble de F D. Mais G H, est mesmes parties de C D, que A B, du mesme C D, (A B, G H estans egaux.) Donc L I, M H ensemble, seront mesmes parties de F D, que A B, de C D. Mais d'autant que si des egaux A B, G H, l'on oste les egaux A K, K E, & G L, I M, le reste E B, sera egal au reste L I, & M H ensemble: & partant le reste E B, sera mesmes parties du reste F D, que le tout A B, du tout C D: à sçauoir que L I, M H ensemble du mesme F D. Donc si vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[k] 7. 7.

THEOREME 7. PROP. 9.

Si vn nombre est telle partie d'vn nombre, qu'vn autre est partie d'vn autre; Aussi en changeant, le premier sera telle ou telles parties du troisiesme, que le second du quatriesme.

C'eſt à dire : Si de 4. nombres le 1. eſt telle partie du 2. que le 3. du 4. auſſi en changeant le 1. ſera telle partie ou parties du 3. que le 2. du 4.

Soit le nombre A, telle partie de B C, que D de E F, eſtans A & B C, moindres que D, & E F, chacun au ſien.

Ie dis qu'en changeant A, ſera telle ou telles parties de D, que B C eſt partie ou parties de E F.

Car ayant diuiſé B C, E F, ſelon les parties B G, G C, chacune egale à A, & E H, H F, chacune egale à D:

A....4
B....4 G....4 C
D.....6
E.....6 H.....6 F

le nombre des parties de B C, ſera egal au nombre des parties de E F. Mais B G, G C, eſtans egaux entr'eux, & moindres que E H, H F, auſſi egaux entr'eux, d'autant que le tout B C, eſt moindre que le tout E F, par l'hypotheſe, B G, ſera meſme partie
1 5. ou 6. 7. de E H, ou meſmes parties que G C, de H F, & partant B G, G C enſemble, ſçauoir B C, 2. ſera meſme partie, ou meſmes parties de E H, H F enſemble, c'eſt à dire E F 4. que B G, de E H: c'eſt à dire, que A 1. l'eſt de D 3. Donc ſi vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 8. PROP. 10.

Si vn nombre eſt telles parties d'vn nombre, qu'vn autre eſt parties d'vn autre: Auſſi en changeant le premier ſera telles parties ou partie du troiſieſme, que le ſecond du quatrieſme.

C'eſt

C'eſt à dire : Si de 4. nombres le 1. eſt telles parties du 2. que le 3. du 4. auſſi en permutant le 1. ſera telle ou telles parties du 3. que le 2. du 4.

Soit le nombre A B, telles parties de C, que D E l'eſt de F. Ie dis qu'en changeant A B, ſera telles parties ou partie de D E, que C l'eſt de F, eſtans A B, & C, moindres que D E, & F, chacun au ſien.

Car ayant diuiſé A B, D E, ſelon A G, G B, parties de C, & D H, H E, parties de F, il y aura autant de parties en A B, qu'en D E, & tant A G, que G B, ſera telle partie de C, que D H, ou H E, de F. Donc en changeant A G, ſera meſme partie ou parties de D H, & G B, de H E, que C de F: & partant A G, ſera meſme partie ou parties de D H, que G B, de H E. Donc A G, G B enſemble, c'eſt à dire A B 1. ſera meſme partie ou parties de D H, H E enſemble, c'eſt à dire de D E 3. que A G, de D H, c'eſt à dire que C 2. de F 4. Donc ſi vn nombre eſt telles parties, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A .. 2 G :: 2 B	*ſi 5. ou 6. 7.*
C 6	
D ..... 5 H ..... E	
F 15	

THEOREME 9. PROP. 11.

Si comme le tout eſt au tout, ainſi le retranché eſt au retranché; auſſi le reſte ſera au reſte, comme le tout au tout.

Soit le tout A B, au tout C D, comme le retranché A E, au retranché C F. Ie dis que le reſte E B, eſt au reſte F D, comme le tout A B, eſt au tout C D.

Car puis que A B, est à C D, comme A E, est à C F, estant plus petit que C D, sera mesme partie ou mesmes parties de C D, que A E, de C F. Donc le reste E B, sera mesme partie ou parties du reste F D, que A B, de C D. Partant E B, sera à F D, comme A B, à C D. Ce qu'il falloit demonstrer.

A .... 4 E .. 2 B
C ..... 8 F .... 4 D

o 20. d. 7.
p 7. ou 8. 7.
q 20. d. 7. conuer.

SCHOLIE.

Cette demonstration a lieu, quand A B, est moindre que C D: mais si A B est plus grand que C D, il sera neantmoins ainsi demonstré: car C D mesure A B, ou non, s'il le mesure: d'autant que comme A B est à C D, ainsi A E, à C F, A B, sera autant multiple de G D, que A E de C F. Partant le reste E B, autant multiple du reste F D, que le tout A B, du tout C D: Donc le reste E B, sera au reste F D, comme le tout A B au tout C D.

A ..... 8 E ..... 6 B
C .... 4 F ... 3 D

r 20. d. 7.
s Sch. 7. 7.
t 20. d. conuer.

Mais que C D, ne mesure A B: Derechef, d'autant que comme A B, à C D, ainsi A E à C F, v C D sera mesmes parties de A B, que C F de A E, x donc le reste F D, sera telles parties du reste E B, que le tout C D, du tout A B, y parquoy le reste E B, sera au reste F D, comme le tout A B, au tout C D. Ce qu'il falloit demonstrer.

A ..... 6 E ... 3 B
B .... 4 F .. 2 D

v 20. d. 7.
x 8. 7.
y 20. d. conuer.

PROBLEME 10. PROP. 12.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra proportionaux: comme vn des antecedens ſera à vn des conſequens: ainſi tous les antecedens ſeront à tous les conſequens.

Soient tant de nombres que l'on voudra A, B, C, D, E, F, proportionaux: à ſçauoir comme A à B, ainſi C à D, & comme C à D, ainſi E à F. Ie dis que tous les antecedens A, C, E, enſemble, ſont à tous les conſequens, B D F enſemble, comme A, ſeul antecedent eſt à B, ſeul conſequent.

A .... 4 C .. 2 E ... 3
B ..... 8 D .... 4 F 6

D'autant donc qu'à cauſe de la meſme proport. A eſt [z] telle partie ou telles parties (A, C, E, eſtans moindres) de B, que C de D, & E de F, [a] A & C enſemble, ſera telle partie ou parties de B & D enſemble, que A de B, ou E de F.

z 20. d. 7.
a 5. ou 6. 7.

Derechef, d'autant que A & C enſemble, comme vn eſt meſme partie ou meſmes partie, de B & D enſemble, comme vn que E, de F, les deux A & C enſemble, comme vn, & F enſemble, ſeront meſme partie ou meſmes parties des deux B & D enſemble, comme vn & F enſemble, que A de B. [b] Partant y aura meſme raiſon de A, C, E, enſemble, à B, D, F, enſemble, que de A, à B.

b 20. d. 7

SCHOLIE.

Cette demonstration a aussi lieu seulement, quand les antecedens sont moindres que les conseiquens: Que s'ils sont plus grands, il sera aussi demonstré: Car B mesurera A, ou non,

s'il le mesure, nous dirons ainsi. D'autant que A est à B, comme C à D; A [c] *sera autant multiple de B, que C de D.* [d] *Donc A & C ensemble, sera autant multiple de B, D, ensemble, que A de B.* [e] *Donc comme A à B, ainsi A, C, ensemble: à B, D, ensemble.*

A ..... 9 C 6
B ... 3 D .. 2

c 20. d. 7.
d Scho. 5. 7.
e 20. d. conuert.

Que si B ne mesure A, nous argumenterons ainsi. D'autant que comme A est à B, ainsi C à D; B sera [f] *telles parties de A que D de C, donc B & D ensemble, seront telles parties de A, C, ensemble, que B de A; partant comme A à B; ainsi A, C, ensemble, à B, D, ensemble.*

A ..... 9 C ... 3
B ..... 6 D .. 2

f 20. d. 7.
20. d. 7. conuert.

Nous demonstrerons le mesme; encore qu'il y ait plusieurs nombres, ayant premierement demonstré le suiuant.

Les raisons des nombres, qui sont de mesme à vne mesme raison, sont aussi de mesme entr'elles.

Soit comme A à B; ainsi C à D: mais comme C à D, ainsi E à F. Ie dis que comme A à B, ainsi E à F. Car soit A plus grand que B: d'autant que comme A à B, ainsi C à D, B sera telle partie

A ..... 9 C ... 3 E 6
B ..... 6 D .. 2 F ... 4

20. d. 7.

ou parties de A, que D de C. Derechef, C eſtant à D, comme E à F, telle ou telles parties que D eſt de C, telle ou telles parties F ſera de E. Donc telle ou telles parties que B, eſt de A; F ſera meſme partie ou parties de E: donc comme A à B, ainſi E à F. g 20. d. 7 conuer.

Mais ſoit A, moindre que B, puis que comme A eſt à B, ainſi C à D; telle partie ou parties que A, ſera de B, telle partie ou parties C ſera de D. Derechef, C eſtant à D, comme E à F, E ſera telle partie ou parties de F, que C de D: donc A eſt telle partie ou parties de B, que E eſt de F: donc comme A eſt à B, ainſi E à F. Ce qu'il falloit demonſtrer. h 20. d. conuer.

A	.....	6	C	..	2	E 4
B	.....	9	D	...	3	F 6

Cecy eſtant demonſtré, ſoient les nombres proportionaux A, B, C, D, E, F, ſçauoir comme A à D, ainſi B à E, & C à F. Semblablement nous demonſtrerons, que comme A eſt à D, ainſi A B, à D E, & d'autant que comme A à D, ainſi C à F: par ce que nous venons de demonſtrer, comme A B à D E, ainſi C à F: ainſi nous demonſtrerons que comme A B, à D E, ainſi A B C, à D E F: donc comme A à D, ainſi A, B, C, à D, E, F, & ainſi des autres nombres, autant qu'il y en aura de proportionaux. Cecy reſpõd à ce qui eſt demonſtré des grãdeurs 12. 5.

A	.....	8	B	.....	6	C 4
D	....	3	E	...	3	F .. 2

THEOREME 12. PROP. 13.

Si quatre nombres ſont proportionaux: auſſi en changeant ils ſerõt proportionaux.

Soit A à B, comme C à D, Ie dis qu'en changeant A ſera à C, comme B à D.

Car,

i 20. d. ou 10. 7. Car, d'autant que A est à B, comme C à D, i A est mesme partie ou parties de B, que C, de D. Donc en changeant A, sera mesme partie ou k 20. d. parties de C, que B de D; & k partant, comme A sera à C, ainsi B sera à D. Ce qu'il falloit demonstrer.

A .. 2
B 4
C 6
D 12

SCHOLIE.

Cette demonstration a aussi lieu, quand les antecedens sont moindres que les consequens, & que A est moindre que C; mais s'ils sont plus grands, & A soit plus grand que B, & moindre que C, nous dirons ainsi: D'autant que comme A à B, ainsi C à D, l 20. d. *B sera mesme partie ou parties de A,* m 9. ou 10. 7. *que D de C.* m *Donc en permutant B sera mesme partie ou parties de D, que A de C.* n *Donc comme A à C,* n 20. d. 7. conuert. *ainsi B à D. Que si A est plus grand que B & que C, on dira* o 9. ou 10. *ainsi. D'autant que comme A à B, ainsi C à D; D sera mesme partie ou parties de C, que B de A: Donc en permutant C, sera mesme partie ou parties de A, que D de B.* o 20. d. 7. con. *Donc comme A à C, ainsi B à D. Finalement, si A est moindre que B, & plus grand que C, on argumentera ainsi. D'autant que comme A à B, ainsi C à D, C,* p 20. d. 7. *est mesme partie ou parties de D,*

A 4
B 8
C .. 2
D 4

que

que A de B. Donc en changeant D ſera meſme partie ou parties de B, que C de A. q Donc comme A eſt à C, ainſi B à D. Ce qu'il falloit demonſtrer. q 20. 7. *conuert.*

THEOREME 12. PROP. 14.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra d'vne part, & autant d'vne autre; leſquels ſoient pris de deux en deux, & en meſme raiſon; auſſi en raiſon egale ils ſeront en meſme raiſon.

Soient tant de nombres que l'on voudra A,B,C, & autant d'autres D,E,F,& ſoit comme A à B, ainſi D à E,& comme B à C, ainſi E à F. Ie dis qu'en raiſon egale, comme A eſt à C, ainſi D eſt à F.

Car d'autant que comme A eſt à B, ainſi D eſt à E, r en changeant comme A, ſera à D, ainſi B ſera à E; Semblablement puis que comme B eſt à C, ainſi E à F, en changeant comme B ſera à E, ainſi C à F. r 13. 7.

A ..... 12 D 9
B ..... 8 E 6
C ..... 4 F 2

Donc comme A eſt à D, ainſi C ſera à F. (Car puis que l'vne & l'autre raiſon de A à D, & de C à F, eſt de meſme à la raiſon de B à E, comme il a eſté demonſtré, ſ icelles ſeront auſſi de meſme entr'elles,) ſ *Sch.* 12. 7. & partant en changeant comme A, ſera à C, ainſi D, ſera à F. Ce qu'il falloit demonſtrer. t 13. 7.

THEOREME 13. PROP. 15.

Si l'vnité meſure quelque nombre, & qu'vn

qu'vn autre nombre en meſure autant de fois quelqu'autre ; auſſi en changeant l'vnité meſurera le troiſieſme nombre, autant de fois que le ſecond meſurera le quatrieſme.

Que l'vnité A, meſure B C, autant de fois que D meſurera E F. Ie dis qu'en permutant B C, meſurera E F, autant de fois que A meſure D.

Car ayant diuiſé B C, ſelon les vnitez B G, G H, H C, & E F, ſelon les parties E I, I K, K F, chacune egale à D, Il y aura en E F, autant de parties egales à D, qu'il y a d'vnitez en B C : donc B G, ſera meſme partie de E I, que G H de I K, & H C de K F : Donc comme B G à E I, ainſi G H à I K, & H C à K F : partant comme B G à E I, ainſi B G, G H, H C, à E I, I K, K F, tous les antecedens, à tous les conſequens, c'eſt à dire B C à E F : donc B C ſera meſme partie de E F, que B G, de E I, c'eſt à dire que A de D. Partant ſi l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A. 1
B. 1 G. 1 H. 1 C
D. . 2
E . . 2 I . . 2 K . . 2 F

v 3. d, 7.
x 12. 7.

THEOREME 14. PROP. 16.

Si deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre en produiſent quelques-vns, les produits d'iceux ſeront egaux entr'eux.

Que les deux nombres A & B, ſe multiplians l'vn l'autre faſſent C & D, ſçauoir que A multipliant

pliant B, faſſe C, & B multipliant A, faſſe D. Ie dis que C & D, ſont egaux entr'eux.

Car d'autant que A multipliant B, produit C, y B ſera autant en C, que l'vnité en A: & partant meſurera C, autant de fois que l'vnité meſure A. z Donc en permutant A, meſurera C, autant de fois que l'vnité meſurera B: Derechef, puis que B multipliant A, produit D,

y 15. d. 7.
z 15. 7.
15. d.

A ſera autant de fois en D, que l'vnité en B, & partant meſurera D, autant de fois que l'vnité meſure B: mais A meſuroit auſſi C, autant de fois, que l'vnité meſure B, donc A meſure C & D egalement: partant C & D ſont egaux entr'eux: Donc ſi, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Vnité 1.
A ... 3 B 4
C 12
D 12

THEOREME 12. PROP. 14.

Si vn nombre en multipliant deux autres, en produit quelques-vns, les produits d'iceux auront meſme raiſon entr'eux, que les multipliez.

Soit le nombre A, lequel multipliant B & C, faſſe D & E. Ie dis que comme B eſt à C, ainſi D eſt à E.

Car d'autant que A multipliant B, faict D, B ſera autant de fois contenu en D, que l'vnité en A: Semblablement C, ſera autant de fois en E, que l'vnité au meſme A: & partant, B meſurera

15. d.

Vnité 1.
A ... 3
B .. 2 C 4
D ..... 6 E 12

autant

autant de fois D, que C mesure E. Donc B sera
a 20. d. telle partie de D, que C de E : [a] & partant comme
b 13. 7. B sera à D, ainsi C sera à E, [b] & en changeant comme B à C, ainsi D à E. Donc si vn nombre multipliant, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 16. PROP. 18.

Si deux nombres multiplians quelque nombre, en produisent quelques-vns: les produits d'iceux auront mesme raison, que les multiplians.

Que les nombres A & B, multiplians C, facent D & E. Ie dis que comme A est à B, ainsi D à E.

Car puis que D est produit de C, multiplié par A, A .. 2 B 4
c 16. 7. c le mesme D sera produit C ... 3
de A, multiplié par C: D ..... 6 E 12
Semblablement E estant produit de C par B, le mesme E sera produit de B
17. 7. par C. D'autant donc que le mesme nombre C multipliant A & B, faict D & E, comme A sera à B, ainsi D sera à E. Donc si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Encore qu'Euclide propose ce Theoreme & le precedent, de deux nombres seulement, il l'entend neantmoins de tant de nombres que l'on voudra : puis que la demonstration de tant que l'on voudra, est la mesme demonstration de deux, repetée autant de

foie

fois qu'il eſt beſoin, prenant touſiours les nombres de deux en deux.

Qu'ainſi ne ſoit, que A multipliant tant de nombres que l'on voudra B, C, D, ou B, C, D, multipliant A, faſſent E, F, G. Ie dis que les produits E, F, G, ſont en meſme raiſon que les multipliez ou multiplians B, C, D: car E, F, eſtans produits de A en B, C, ou de B C en A, il y aura meſme raiſon de E à F, que de 17. ou 18.
B à C: ſemblablement F, G, eſtans produits de A en C, D, ou de C, D en A, il y aura meſme raiſon de F à G, que de C à D: & ainſi de ſuiure, s'il y a d'auantage de nombres: parquoy E, F, G, ſont en meſme raiſon que B, C, D. Donc ſi un nombre en multiplie deux, ou tant que l'on voudra, ou ſi deux ou tant que l'on voudra un multiplient un, les produits auront meſme raiſon, que les multiplians, ou multipliez.

A B C D E F G
1 2 3 4 6 9 12

Campanus & Clauius diſent en leur Scholie, qu'ils ont accommodé ce Theoreme & le precedent, à tant de nombres que l'on voudra: mais s'ils auoient bien entendu Euclide, ils auroient trouué qu'Euclide meſme les y a accommodez premier qu'eux, puis que ce qu'il a propoſé de deux, eſt monſtré de tant que l'on voudra, eſtant repeté, & n'en pouuant faire de demonſtration que de deux à la fois, qui eſt la raiſon pour laquelle Euclide ne l'a propoſé que de deux, &c.

Henrion Copiſte, qui chante touſiours comme les autres, quoy qu'ils diſent, fait de meſme.

THEOREME 17. PROP. 19.

Si quatre nombres sont proportionaux, le produit du premier & du quatriesme sera egal au produict du second & du troisiesme nombre : & si le nombre produict du premier & du quatriesme est egal au produict du second & du troisiesme ; iceux quatre nombres seront proportionaux.

Soient quatre nombres proportionaux A, B, C, D : sçauoir comme A à B, ainsi C à D, & que A premier, multipliant D 4. faſſe E & B 2. multipliant C 3. faſſe F. Ie dis que E & F sont egaux entr'eux.

Car derechef, que A multipliant C, faſſe G; D'autant que A multipliant C & D, faict G & E, comme C sera à D : c'est à dire, comme A à B, ainsi G sera à E.

Derechef, d'autant que A & B, multipliant C, sont G & F, f comme A sera à B, ainsi G sera à F. Partant, g comme G sera à E, ainsi le meſme G sera à E, donc E, F seront egaux, par ce qui est en suitte de la 20. Definition.

e 17. 7.
f 18. 7.
g *Sch.* 12. 7.

A ... 3 B ... 2
C ... 6 D ... 4
E ... 12
F ... 12
G ... 18

Maintenant soit E, produict de A 1. par D 4. egal à F, produict de B 2. par C 3. Ie dis que les 4. nombres

nombres A,B,C,D, ſont proportionaux, à ſçauoir comme A à B, ainſi C à D.

Soit derechef produit G de A, multiplié par C: d'autant que A, multipliant C & D, faict G & E, comme C ſera à D, ainſi G à E ou à F, egal à E. Car G a meſme raiſon à E & F egaux, comme il eſt monſtré à la 20. Definition.

Derechef, d'autant que A & B, multiplians C, font G & F, comme A à B, ainſi le meſme G à F: partant les raiſons de A à B, & C à D, eſtans de meſme à la raiſon de G à F, elles ſeront de meſme entr'elles; & par ainſi comme A ſera à B, ainſi C à D. Donc ſi quatre nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. *Sch.* 12. 7.

THEOREME 18. PROP. 20.

Si trois nombres ſont proportionaux, le produict des extremes eſt egal au produict de celuy du milieu. Et ſi le produict des extremes eſt egal au produict de celuy du milieu; iceux trois nombres ſeront proportionaux.

Soient trois nombres proportionaux A, B, C, à ſçauoir A à B, comme B à C. Ie dis que le produict de A 1. multiplié par C 3. eſt egal au produict de B, moyen par ſoy-meſme.

Car ſoit pris D egal à B, comme A ſera à B, ainſi D ſera à C: & partant le produict de A par C, ſera egal au

A 9
B ..... 6 D 6
C 4

19. 7.

produict de B, par D, c'est à dire de B, par soy-mesme.

Maintenant soit le produict de A premier, par C 3, egal au produict de B, moyen multiplié par soy-mesme. Ie dis que A, B, C, sont proportionaux.

Car derechef, soit pris D, egal à B: comme A sera à B, ainsi D à C, & le produict de A par C, sera egal au produict de B par D, egal à B, c'est à dire de B par soy-mesme. Partant les trois nombres A, B, C, sont proportionaux. Donc si trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBLEME 19. PROP. 21.

Les nombres plus petits de tous ceux qui ont mesme raison auec iceux, mesurent egalement les nombres qui ont mesme raison auec iceux; à sçauoir le plus grand, le plus grand, & le plus petit, le plus petit.

Soient les nombres A B, & C D, les plus petits en la mesme raison que deux autres E & F, à sçauoir que A B, soit à C D, comme E à F. Ie dis que A B, & C D, mesurent egalement E & F, sçauoir A B plus grand, E plus grand, & C D plus petit, F plus petit: c'est à dire A B antecedent, E antecedent, & C D consequent, F consequent.

A... 3 G... 2 B
C... 2 H... 1 D
E..... 10
F..... 6

15. 7. Car puisque A B est à C D, comme E à F; l'en changeant

changeant comme A B, à E, ainſi C D à F, & partant A B, C D, eſtans moindres que E & F, = A B, m 20. d.
ſera telle ou telles parties de E, que C D de F.
Mais ils ne peuuent eſtre parties : car, s'il ſe peut
faire, ſoient diuiſez A B, C D, en A G, G B, & C H,
H D, parties de E & F, les parties A G, G B, ſeront
egales en nombre à C H, H D ; & partant A G,
ſera meſme partie de E, que C H de F. Donc com-
me A G, ſera à E, ainſi C H, ſera à F, & en chan- n 20. dq
geant comme A G, ſera à C H, ainſi E à F, ou A B
à C D : & partant A G, G H, moindres que A B,
C D, auront meſme raiſon que A B, C D. Ce qui 13. 7.
eſt impoſſible, puis que A B, C D, ſont les plus
petits en leur proport. par l'hypotheſe. Donc A B,
& C D, ne ſeront meſmes parties de E & F. Partant
meſme partie, parquoy A B, C D, meſureront E &
F egalement. Donc les plus petits nombres, &c.
Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 20. PROP. 22.

S'il y a trois nombres d'vne part, & autant d'vne autre, leſquels ſoient pris de deux en deux, & en meſme raiſon, & que leur proportion ſoit troublée : auſſi en raiſon egale, ils ſeront en meſme raiſon.

Soient trois nombres A, B, C, & autant d'autres D, E, F, leſquels ſoient pris deux à deux, & en meſme raiſon, & ſoit leur proportion troublée, ſçauoir comme A eſt à B, ainſi E à F, & comme B eſt à C, D à E. Ie dis qu'en raiſon egale, comme A eſt à C, ainſi D eſt à F.

Car puis que comme
A est à B, ainsi E est à F, A ..... 4 D 12
o le produict de A 1. par B ... 3 E 8
F 4. sera egal au produict C ... 2 F 6
de B 2. par E 3. Et puis
que B est à C, comme D à E, le produict de C, par
D, sera egal au mesme produict de B, par E. Et
partant le produict de A 1. par F 4. sera egal au
p.19.7. produict de C 2. par D 3. Donc il y aura mesme
raison de A 1. à C 2. que de D 3. à F 4. Partant s'il y
a 3. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

D'autant que de ces six moyens d'argumenter és proportions, qu'Euclide a expliquez aux grandeurs, & demonstré au 5. liure, il en demonstre icy deux seulement és nombres, sçauoir celuy qui est pris de la raison permutée, Prop. 13. & celuy de l'egalité, Prop. 14. & 22. de ce liure: il ne sera hors de propos, de demonstrer icy les quatre autres moyens d'argumenter en nombres, comme ont faict autres Interpretes.

I.

Si quatre nombres sont proportionaux En raison inuerse, ou en changeant, ils seront aussi proportionaux.

Soit comme A à B, ainsi C à D. Ie dis qu'en changeant, ou en raison inuerse, comme B sera à A, ainsi D à C.

A ..... 6 C ... 3
B ..... 4 D .. 2

Car

Car A estant à B, comme C à D, q en permutant A sera à C, comme B à D. Derechef, B estant à D, comme A à C, en changeant B, sera à A, comme D à C. Ce qui est proposé. q 13. 7.

II.

Si les nombres composez sont proportionaux, iceux estans diuisez seront aussi proportionaux.

Soit comme A B à C B, ainsi D E à F E. Ie dis qu'en diuisant comme A C, sera à C B, ainsi D F à F E.

Car A B, estants à C B, comme D F à F E, r en changeant comme le tout A B, au tout D E; ainsi le retranché C B, au retranché F E: & partant comme le tout A B, au tout D E, ainsi le reste A C, au reste D F, c'est à dire A C à D F, comme C B à F E. Donc s en permutant comme A C à C B, ainsi D F à F E. Ce qui est proposé. r 13. 7. s 13. 7.

A ..... 6 C ... 3 B
D .... 4 F .. 2 E

En cette maniere on demonstrera la diuision de la raison conuerse & contraire, comme au 5. diure. Car soit premierement, comme A B à C B, ainsi D E à F E. Ie dis que par diuision de raison conuerse, que comme C B, à A C, ainsi F E à D F. Car A B estant à C B, comme D E à F E, en diuisant A C, sera à C B, comme D F à F E, & en changeant comme C B à A C, ainsi F E à D F. Ce qui est proposé.

Soit finalement comme A C à A B, ainsi D F à D E. Ie dis que par diuision de raison contraire,

que comme A C est à C B, ainsi D F à F E. Car d'autant que comme A C à A B, ainsi D F à D E, en raison conuerse, comme A B à A C, ainsi D E à D F; Donc en diuisant, comme C B à A C, ainsi F E, à D F, & en raison conuerse, comme A C à C B, ainsi D F à F E. Ce qui est proposé.

III.

Si les nombres diuisez sont proportionaux; iceux estans composez, seront aussi proportionaux.

Soit comme A B à B C, ainsi D E à E F. Ie dis qu'en composant, que comme A C, sera à B C, ainsi D F à E F.

t 13.7. Car A B, estant à B C, comme D E à E F. t En
v 12.7. permutant comme A B à D E, ainsi B C à E F, v & partant A B, B C, ensemble, sera à D E, E F ensem-
x 13.7. ble, comme B C à E F, x & en changeant A B, B C, ensemble, A ..... 6 B ... 3 C
c'est à dire le tout A C à B C, D ... 4 E ... 2 F
comme D E, E F ensemble,
c'est à dire le tout D F à E F. Ce qui est proposé.

Semblablement, la composition de raison conuerse, & contraire, sera icy demonstrée, comme au 5. liure.

Car soit premierement comme A B à B C, ainsi D E à E F. Ie dis que par composition de raison conuerse, que comme A C à A B, ainsi D F à D E: car puisque comme A B à E C, ainsi D E à E F, par conuersion de raison, comme B C à A B, ainsi E F à D E, & en composant, comme A C à A B, ainsi D F à D E. Ce qui est proposé.

Secondement,

Secondement, soit derechef comme A B à B C, ainsi D E à E F. Ie dis que par composition de raison contraire, comme A B à A C, ainsi D E à D F. Car A B estant à B C, comme D E à E F, en raison conuerse, comme B C à A B, ainsi E F à D E. Donc en composant comme A C à A B, ainsi D F à D E; & par conuersion de raison, comme A B, à A C, ainsi D E à D F. Ce qui est proposé.

IIII.

Si les nombres composez sont proportionaux, par conuersion de raison, iceux seront aussi proportionaux.

Soit comme A B à C B, ainsi D E à E F. Ie dis que par conuersion de raison, comme A B à A C, ainsi D E à D F.

Car A B, estant à C B, comme D E à F E, en permutant comme le tout A B, au tout D E, ainsi le retranché C B, au retranché F E, & partant comme le tout A B, au tout D E, ainsi le reste A C, au reste D F. Donc en permutant, comme A B & A C, ainsi D E à D F. Ce qui est proposé.

A ..... 6 C ... 3 B
D .... 4 F .. 2 E

x 11. 7.

THEOREME 21. PROP. 23.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux.

Soient les nombres A & B, premiers entr'eux.

Ie dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison qu'iceux.

Car s'il n'est ainsi, soient, s'il est possible, C & D, plus petits en la mesme raison D'autant que C & D sont plus petits, en la mesme raison de A & B,

y 21. 7. y C mesurera A, & D mesurera B egalement; & partant A.....7 B....5
selon vn mesme nombre, C....D....E..
lequel soit E, de sorte que
C mesure autant de fois A, & D autant de fois B, que l'vnité est en E. Donc puis que l'vnité mesure

z 15. 7. E, & C mesure A egalement, z en changeant l'vnité mesurera C, & E mesurera A egalement. Derechef, puis que l'vnité mesure E, & D le nombre B egalement: aussi en changeant l'vnité mesurera B egalement: partant puis que E mesure A & B, iceluy E sera commune mesure d'iceux: parquoy ils ne seront premiers entr'eux: mais composez, ce qui est impossible, & contre l'hypothese. Donc A & B sont les plus petits en la mesme raison. Donc les nombres premiers, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 22. PROP. 24.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison auec iceux. Ie dis qu'ils sont premiers entr'eux, c'est à dire qu'ils n'auront aucun nombre pour commune mesure, outre l'vnité.

Car

Car s'ils ne ſont premiers, ils auront vne commune meſure, laquelle ſoit C: donc que C meſure A, autant de fois que l'vnité eſt en D: & B autant de fois que l'vnité eſt en E.

D'autant donc que C eſt contenu autant de fois en A, que l'vnité eſt en D (puis qu'il meſure A ſelon D,) & que le meſme C, eſt contenu autant de fois en B, que l'vnité eſt en E: * D & E multiplians C, produiront A & B. Parquoy il y aura meſme raiſon de A à B, que de D à E: partant puis que D & E, parties de A & B ſont plus petits qu'iceux A & B; A & B ne ſeront les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec eux; ce qui eſt abſurde. Donc A & B ſont premiers entr'eux. Et partant les plus petits nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A ..... 8 B 5
C ..
D ..... E ..... * 9.e.ſ.

THEOREME 23. PROP. 25.

S'il y a deux nombres premiers entr'eux: le nombre qui en meſure vn d'iceux, ſera premier à l'autre.

Soient les deux nombres A & B, premiers entr'eux, & que C meſure A. Ie dis que C eſt premier à l'autre B.

A ..... 6 B 5
C ..... 3 D .....

Car ſi B & C ne ſont premiers entr'eux, ils auront quelque nombre pour commune meſure, lequel ſoit D, s'il eſt poſſible.

D'autant donc que D meſure C, & C meſure A, D meſurera auſſi A: mais il meſure auſſi B. Donc A & B ne ſont premiers entr'eux, ayans D pour * 11.e.ſ.

commune

commune mesure : ce qui est impossible & contre l'hypothese : donc C sera premier à B. Partant s'il y a deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 24. PROP. 26.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre nombre, le produit d'iceux sera aussi premier à cét autre.

Soit l'vn & l'autre nombre A & B, premier à C, & soit D produit de A, multiplié par B, ou de B, par A. Ie dis que D sera aussi premier à C.

Car si C & D ne sont premiers entr'eux, soit E leur commune mesure, mesurant D, autant de fois qu'il y a d'vnitez en F. D'autant donc que E, est autant de fois en D, qu'il y a d'vnitez en F, c F multipliant E, produira D. Et au contraire E, multipliant F, produira le mesme D : mais D est produit de A par B. Donc puis que le nombre produit de E 1. par F 4. est mesme que celuy de A 2. par B 3. il y aura mesme raison de E 1. à A 2. que de B 3. à F 4. Mais d'autant que A & C sont premiers entr'eux, & E est posé mesurer C, d E sera premier à A, & partant E & A estans premiers entr'eux, seront les plus petits de leur raison. Donc ils mesureront également B & F, qui ont la mesme raison, à sçauoir E, mesurera B, & A mesurera F. Partant puis que E mesure l'vn & l'autre B & C

c 9. e. s.
16. 7.
19. 7.
d 25. 7.
23. 7.
21. 7.

A .....7 B ...3
C 8
D 21
E ---- F----

B & C, B & C ne seront premiers entr'eux : ce qui est absurde & contre l'hypothese. Donc D sera premier à C, partant si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 25. PROP. 27.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le produict de l'vn d'iceux sera premier à l'autre.

Soient A & B premiers entr'eux, & C produict de A par soy-mesme. Ie dis que C, est premier au restant B.

Car soit pris D egal à A, il sera aussi premier à B: Donc A & D estans premiers à B, « le produit de A, multiplié par D, c'est à dire de A par soy-mesme, à sçauoir C, sera premier au mesme B. Ainsi le produit de B par soy-mesme, sera monstré premier à A. Partant si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. « 26. 7.

A .... 4 B 5
C 16
D 4

THEOREME 26. PROP. 28.

Si deux nombres sont premiers à deux autres nombres, l'vn & l'autre à l'vn & à l'autre : Les produits d'iceux seront aussi premiers entr'eux.

Soit l'vn & l'autre nombre A & B premier, à l'vn & à l'autre C & D, & soit produit E de A par B & F,

B & F, produit de C par D. Ie dis que E & F ſont premiers entr'eux.

g 26.7. Car puis que tant A que B eſt premier à C, E g produit d'iceux, ſera premier au meſme C. Derechef, A & B eſtans premiers à D, E, produit d'iceux, ſera auſſi premier au meſme D. D'autant donc que C & D ſont

A	5
B	3
E	15
C	4
D	2
F	8

h 26.7. premiers à E; h F, produit d'iceux, ſera auſſi premier à E. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 27. PROP. 29.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, & l'vn & l'autre ſe multipliant ſoy-meſme, en faict quelqu'vn; les produicts d'iceux ſeront premiers entr'eux. Et ſi les nombres propoſez au commencement, multiplians iceux produicts, en font quelques-vns, iceux ſeront auſſi premiers entr'eux: Et cecy aduiendra touſiours enuiron les extremes.

Soient A & B premiers entr'eux, & C produict de A par ſoy-meſme, & D produit de B, auſſi par ſoy-meſme. Ie dis que C, D, ſont auſſi premiers entr'eux: & ſi derechef E eſt le produict de C par A & F, de D par B. Ie dis que E, F, ſont auſſi premiers entr'eux.

i 27.7. Car puis que A, B, ſont premiers entr'eux, i C produict de A, par ſoy-meſme, ſera premier à l'autre

tre B : & semblablement
B & C estans premiers A ... 3 B .. 2
entr'eux, D produict de C ..... 9 D ... 4
B par soy-mesme, sera E 27 F, 8
aussi premier à C : & G 81 H, 16 27. 7.
partant les deux pro-
duits C, D, premiers entr'eux. Derechef, d'autant
que A & B sont premiers entr'eux, [k] C produict [k] 27. 7.
de A par soy-mesme sera premier à B : & D pro-
duict de B par soy-mesme premier à A : mais C
est aussi monstré premier à D. Donc l'vn & l'autre
A, C, sera premier à l'vn & l'autre B D, [l] & partant [l] 28. 7.
E, produict de A par C, sera premier à F, produict
de B par D. Que si encore G est le produict de A
par E, & H de B par F : Puis que A & C sont pre-
miers à B ; [m] E, produict d'iceux sera aussi premier [m] 26. 7.
à B : par mesme raison E sera premier à A : D'au-
tant donc que l'vn & l'autre A, E, est premier à l'vn
& l'autre B, F, [n] le nombre G, produict de A en E, [n] 28. 7.
sera premier à H, produict de B en F, & ainsi de
suitte, s'il y en a d'auantage. Donc si deux nom-
bres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 28. PROP. 30.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, l'vn & l'autre ensemble sera premier à chacun d'iceux : Et si l'vn & l'autre ensemble est premier à quelqu'vn d'iceux, les nombres proposez au commencement seront aussi premiers entr'eux.

Soient A B, B C, premiers entr'eux. Ie dis que l'vn

l'vn & l'autre ensemble A C, sera premier à A B, & à B C.

Car si A C, A B, ne sont premiers entr'eux, ils se-
12. c. s. ront mesurez par quelque nombre, outre l'vnité, lequel soit D, s'il est possible.

Donc puis que D mesure le A..... B..... C tout A C, & le retranché D.... A B, il mesurera aussi le reste B C, donc A B, B C, ne seront premiers entr'eux, puis que D les mesure. Ce qui est absurde & contre l'hypothese. Donc A C, sera premier à A B, & à B C.

Soit maintenant A B, B C, ensemble, premier à quelqu'vn d'iceux, sçauoir à A B. Ie dis que A B, B C, sont premiers entr'eux: autrement ils seront
10. c. s. mesurez par quelque nombre outre l'vnité, lequel soit D. Donc D, mesurant A B, B C, mesurera aussi le composé d'iceux A C: & partant A C, A B, ne sont premiers entr'eux, ce qui est absurde & contre l'hypothese. Donc A B, B C, sont premiers entr'eux. Et semblablement, si A C, est premier à B C. Donc si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de decy, que le nombre lequel estant composé de deux autres, est premier à vn d'iceux, il sera aussi premier à l'autre. Car si A C, est premier à A B, iceux A B, B C, seront premiers entr'eux, par la seconde partie de cette Proposition. Donc A C, sera aussi premier à B C, par la premiere partie de la mesme Proposition. Ce qui estoit proposé.

THEO

THEOREME 29. PROP. 31.

Tout nombre premier, eſt premier à tout autre nombre, lequel il ne meſure point.

Soit le nombre A, premier, lequel ne meſure B. Ie dis que A eſt premier à B, c'eſt à dire que A & B ſont premiers entr'eux, encore que B ſoit nombre compoſé.

Car autrement ils ſeront meſurez par quelque nombre, outre l'vnité, lequel ſoit C, s'il eſt poſſible. Donc C, ne ſera le meſme que A; A eſtant poſé ne meſurer B. Donc A eſtant meſuré par vn autre nombre C; A ne ſera premier, ce qui eſt impoſſible, & contre l'hypotheſe. Donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....5 B.....8
C.....

THEOREME 30. PROP. 32.

Si deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre, en font quelqu'autre, & que quelque nombre premier meſure leur produit, il meſurera auſſi vn des nombres propoſez au commencement.

Soient A & B, leſquels ſe multiplians l'vn l'autre faſſent C, lequel ſoit meſuré par D, nombre premier. Ie dis que D, meſurera à tout le moins l'vn d'iceux A, B, s'il ne les meſure tous deux.

Car que D ne mesure A, mais qu'il mesure C, autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. De sorte que C, soit produict de D par E, lequel C est produict de A par B.

A....4 B.....6
C.....24
D...3 E.....8

D'autant donc que C, produict de D 1. par E 4. o 19. 7. est egal au produict de A 2. par B 3. o il y aura mesme raison de D 1. à A 2. que de B 3. à E 4. p 31. 7. p Mais D premier estant premier à A, puis qu'il ne q 23. 7. le mesure q D & A seront les plus petits de leur r 21. 7. raison : r partant mesureront egalement B & E, à sçauoir D plus petit, mesurera B plus petit, & A plus grand, E plus grand. Donc si D ne mesure A, il mesurera B : semblablement on monstrera que si D ne mesure B, au moins qu'il mesurera A. Donc si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 31. PROP. 33.

Tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre A composé. Ie dis que quelque nombre premier le mesure.

s 13. d. Car estant composé, il s sera mesuré par quelque nombre, lequel soit B : que si B est premier, la proposition est manifeste. Mais si B est composé, il sera aussi mesuré par quelque nombre, lequel soit C, qui sera premier ou composé : si premier, puis qu'il mesure B, & B mesure A, t iceluy t 11. s. f. C premier, mesurera aussi A. Donc A sera mesuré par

par vn nombre premier.

Mais si C est composé, il sera mesuré par vn autre nombre,

A.....18
B.....6 C...3

Or d'autant qu'vn nombre ne se diminuë infiniment, on viendra enfin à quelque nombre qu'aucun autre ne mesurera, & partant à vn nombre premier, lequel mesurant tous les precedens, ᵛ il mesurera aussi le nombre composé A. ᵛ 11. c.s.

THEOREME 32. PROP. 34.

Tout nombre est premier, ou bien mesuré par quelque nombre premier.

Soit vn nombre tel qu'on voudra A. Ie dis qu'il est premier, ou bien qu'il est mesuré par quelque nombre premier.

Car puis que tout nombre est premier ou composé, si A est premier, la proposition est manifeste : mais s'il est composé, ˣ il sera mesuré par quelque nombre premier. Partant tout nombre est premier, ou est, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....9 ˣ 33. 7.

THEOREME 33. PROP. 35.

Tant de nombres que l'on voudra estans donnez, trouuer les plus petits nombres, qui ont la mesme raison auec iceux.

Soient proposez tant de nombres qu'on vou-

dra A, B, C, en quelque proportion que ce ſoit, il faut trouuer les plus petits, qui ont la meſme raiſon.

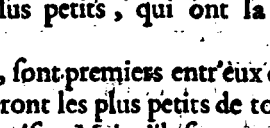
Car ou A,B,C, ſont premiers entr'eux ou non, ſi premiers, y ils ſeront les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon; Mais s'ils ſont compoſez, ² ſoit trouué D, leur plus grande commune meſure, lequel meſure iceux A, B, C, par E, F, G. Ie dis que E, F, G, ſont les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon de A, B, C; Car d'autant que D meſure A, B, C, par E, F, G, ª D multipliant E, F, G, produira A, B, C, ᵇ donc E, F, G, auront meſme raiſon que A, B, C.

y 23. 7.

² 21. 7.

ª 9. c. ſ.

ᵇ Sch. 18. 7.



Ie dis auſſi que E, F, G, ſont les plus petits: car s'il n'eſt ainſi, ſoient H, I, K, plus petits en la meſme raiſon, leſquels meſureront A, B, C, egalement, Qu'ils les meſurent donc par L, cela eſtant ainſi, ᶜ L multipliant H, I, K, produira A, B, C, ᵈ & en changeant L meſurera A, B, C, par H, I, K. D'autant donc que E 1. multipliant D 4. & H 2. multipliant L 3. produict le meſme A, ᵉ comme E 1. à H 2. ainſi L 3. ſera à D 4. Mais E eſt plus grand que H, donc L ſera plus grand que D: & partant puis que L meſure A, B, C; D ne ſera plus grande commune meſure des nombres A, B, C. Ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc E, F, G, ſont les plus petits en la raiſon de A B C. Partant s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

21. 7.

ᶜ 9. c. ſ.

ᵈ 8. c. ſ.

ᵉ 19. 7.

COROL

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte de cecy, que la plus grande commune meſure de tant de nombres qu'on voudra, les meſure par les plus petits nombres de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux. Car il a eſté monſtré que E, F, G, par leſquels D, plus grande commune meſure de A, B, C, meſure iceux A, B, C, ſont les plus petits en la raiſon de A, B, C, & ainſi de tous autres.

SCHOLIE.

Par ce que deſſus, nous pourrons trouuer les deux plus petits nombres qui ſont en meſme raiſon, que tant de nombres continuellement proportionaux que l'on voudra. Comme ſi on propoſe A, B, C, D, E, continuellement proportionaux, ſoit qu'ils ſoient les moindres en la continuation de la raiſon de A à B ou non : nous en trouuerons deux les plus petits en la meſme raiſon, ſi par ce Probleme nous prenons F & G, les plus petits en la raiſon de A à B, ſçauoir ceux par leſquels I, plus grande commune meſure d'iceux les meſure.

A. 16. *B* 24. *C* 36. *D* 54. *E* 81.
I, 8.
F, 2. *G*, 3.

Au ſurplus, il aduient quelquefois qu'vn d'iceux nombres E, F, G, trouué par cette propoſition eſt l'vnité, ſçauoir quand D, plus grande commune meſure, eſt egal à vn d'iceux A, B, C, comme il appert

par cét exemple.

Or il est manifeste que les nombres E, F, G, alors trouuez, sont plus petits en la continuation de leurs proportions, puis qu'il ne se peut donner vn nombre moindre que l'unité.

A...3 B.....6 G.....9
D...3
E.1 F..2 G...3

PROBLEME 4. PROP. 36.

Deux nombres estans donnez, trouuer le plus petit nombre lequel ils mesurent.

Soient les deux nombres proposez A & B, il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils peuuent mesurer.

Soient premierement A & B, premiers entr'eux, & se multiplians l'vn l'autre facent C. Ie dis que C, est le requis. Or

qu'ils le mesurent il est manifeste. A...4 B.....5
C.....20

Car C estant produict de A par B, ou de B par A; [f] A mesurera C par B, & B le mesme C par A. Donc A & B mesurent C. Et si C n'est le plus petit; que A & B en mesurent vn autre plus petit, sçauoir D, s'il est possible, & que A mesure D, par E & B, le mesme D par F, [g] ainsi D sera produict, tant de A par E, que de B par F, & au contraire. D'autant que le mesme D est produict de A 1. par E 4. & de B 2. par F 3. Comme A 1. sera à B 2. ainsi F 3. à E 4.

D---------
E------F----

f 7. c.f.

9. c.f.

g 19.7.

Donc

Donc A & B (eſtans poſez premiers entr'eux, [h] & partant les plus petits en leur raiſon) ils meſureront E & F l'vn comme l'autre, à ſçauoir A meſurera F, & B meſurera E. Mais d'autant que A multipliant B & E, faict C & D; C ſera à D, comme B à E: & partant puis que B meſure E, comme il eſt monſtré: C meſurera auſſi D, le plus grand le plus petit. Ce qui eſt impoſſible. Partant C eſt le plus petit de tous ceux qui meſurent A & B. h 23. 7. 11. 7. 17. 7.

Secondement, ſoient A & B, non premiers entr'eux, [i] & ſoient trouuez C & D, les plus petits en la meſme raiſon, afin qu'il y ait quatre nombres proportionaux, ſçauoir comme A à B, ainſi C à D; par ainſi le produict de [k] A 1. par D 4. ſera egal au produict de C 2. par B 3. lequel produict ſoit E. Ie dis que E eſt le plus petit nombre que meſurent A & B: qu'ils le meſurent, il eſt manifeſte; car E eſtant produict tant de A en D, que de B en C, [l] tant A que B, meſurera E. Et s'il n'eſt le plus petit, que A & B en meſurent vn autre plus petit que E, ſçauoir F. Or que A meſure F par G, & B le meſme F par H, donc [m] F ſera le produict tant de A par G, que de B par H. i 35. 7. k 19. 7.

A....4 B.....6
C..2 D...3
E.....12
F--------
G--H--

l 17. c. 7. m 9. c. 7.

D'autant donc que le meſme F eſt faict de A 1. en G 4. & de B 2. en H 3. comme A 1. à B 2. ainſi H 3. à G 4. Partant C & D, eſtans les plus petits en la raiſon de A à B, ou de H à G, [n] ils meſurent H & G egalement, ſçauoir C meſurera H, & D meſurera G: mais d'autant que A multipliant D & G, faict E & F, [o] E ſera à F, comme D à G, & 19. 7. n 21. 7. o 17. 7.

partant D mesurant G, comme il est monstré, E mesurera aussi F, le plus grand, le plus petit : ce qui est impossible. Donc E est le plus petit. Partant deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

Si le plus petit nombre mesure le plus grand, le plus grand sera le requis, &c.

COROLLAIRE.

D'icy il s'ensuit, que si deux nombres multiplient les plus petits ayans la mesme raison, le plus grand le plus petit, & le plus petit le plus grand, le produict sera le plus petit nombre qu'iceux mesurent.

Car C & D, estans posez les plus petits en la raison de A à B, il a esté demonstré que E, produict de A, plus petit, par D plus grand, & de B plus grand, par G plus petit, est le plus petit nombre mesuré par A & B.

THEOREME 33. PROP. 37.

Si deux nombres mesurent quelque autre nombre. Le plus petit qu'ils mesurent, mesurera aussi le mesme nombre.

Que les deux nombres A & B, en mesurent quelque autre C D, & soit E, le plus petit que A & B mesurent. Ie dis que E, mesurera C D.

Car si E, ne mesure C D, ayant osté E, de C D, tant de fois que l'on pourra, il restera vn nombre moindre que E, qu'il reste F D, plus petit que E, s'il est possible, de sorte que E, mesure le retranché

ché O F. D'autant donc
que tant A que B, mesu- A...2 B...3
re E, & E mesure C F, p C——F—D p 11.c.s.
tant A que B, mesurera E.....6
aussi C F. Donc puis que
A & B, mesurent le tout C D, & le retranché C F,
q ils mesureront aussi le reste F D. Or F D est plus, q 12.c.s.
petit que E : donc E n'est le plus petit nombre
que A & B mesurent. Ce qui est contre l'hypo-
these. Donc si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit
demonstrer.

PROBLEME 5. PROP. 38.

Trois nombres estans donnez, trouuer le plus petit nombre qu'ils mesurent.

Soient trois nombres proposez A, B, C, il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils peuuent mesurer.

Soit r D, le plus petit que A & B, mesurent ; C r 36.7.
le mesurera ou non, s'il le
mesure : Ie dis que c'est le A...3 B....4 C.....6
plus petit que les trois D.....12
A, B, C, mesurent : autre- E——
ment soit E, plus petit
que D, mesuré par A, B, C : donc A & B mesurant E,
moindre que D : D ne sera le plus petit mesuré
par A & B, ce qui est contre l'hypothese.

Si C ne mesure D, soit s E le plus petit, mesuré s 36.7.
par C, D. Ie dis qu'il sera le plus petit que A, B, C,
mesurent. Car A, B, mesurant D, & D, mesurant E, t 11.c.s.
A, B, mesureront aussi E, mais C mesure pareille-

meſure E. Donc les trois A, B, C, meſurent E. Et ſi on dit que E ne ſoit le plus petit, ſoit F moindre que E, meſuré par A, B, C, s'il eſt poſſible: Donc puis que A & B, meſurent F; D, plus petit meſuré par iceux, ▼ meſurera auſſi F & C, D, meſurant F: (car A, B, C, le meſurent) E, le plus petit nombre, meſuré par C, D, meſurera pareillement F, le plus grand le plus petit: ce qui eſt abſurde. Partant E eſt le plus petit que A, B, C, meſurent. Donc trois nombres eſtans, &c. Ce qu'il falloit faire.

A..2 B...3 C....4
D.....6
E.....12
F——

▼ 37.7.

COROLLAIRE.

D'icy il s'enſuit, que ſi trois nombres meſurent quelque nombre, que le moindre nombre qu'ils meſurent, meſure auſſi ce meſme nombre. Car en la derniere partie de cette demonſtration, de ce que A, B, C, eſtoient poſez meſurer F, il a eſté demonſtré que E, qui eſt le moindre nombre, meſuré par iceux, meſure auſſi F.

SCHOLIE.

En cette maniere, plus de trois nombres eſtans donnez, nous trouuerons le plus petit nombre qu'ils meſurent. Car ſi quatre nombres ſont donnez, faut faire la queſtion de trois, ſi cinq, faut trouuer le plus petit que quatre meſurent, & faire au reſte comme il eſt dit de trois, &c.

THEO

THEOREME 34. PROP. 39.

Si vn nombre mesure vn autre nombre: celuy lequel il mesure, aura vne partie denommée du mesurant.

Que le nombre B, mesure le nombre A. Ie dis que A, aura vne partie denommée de B.

Car que B mesure A, autant de fois qu'il y a d'vnitez en C. D'autant donc que l'vnité mesure C, & B mesure A, egalement: x en changeant l'vnité mesurera B, & C mesurera A egalement, & partant l'vnité sera mesme partie de B, que C de A, y mais l'vnité est vne partie de B, denommée du mesme B: donc C sera vne partie de A, denommée par B. Partant si vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....12
B....4 C...3

x 15. 7.

y 2. d. 7.

THEOREME 35. PROP. 40.

Si vn nombre a vne partie quelconque, le nombre denommé de cette partie le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B, par laquelle le nombre C est denommé. Ie dis que C mesure A.

Car puis que B, partie de A, est denommée de C, mais l'vnité est vne partie de C, denommée du

du mesme C ; l'vnité mesurera C, & B mesurera A egalement. [z] Donc en changeant l'vnité mesurera B, & C mesurera A egalement. Donc si vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....15
B...3 C.....5

z 15.7.

PROBLEME 6. PROP. 41.

Trouuer le plus petit nombre, qui ait les parties données.

Soient les parties données A, B, C, il faut trouuer le plus petit nombre, ayant les mesmes parties.

Soient D, E, F, denommez des parties A, B, C, & [a] soit G le plus petit que D, E, F, mesurent. Ie dis que G est le plus petit, ayant les parties données A, B, C. Car puis

D..2 *A, seconde.*
E...3 *B, tierce.*
F....4 *C, quarte.*
G.....12
H------

a 38.7.

que D, E, F, mesurent G, [b] G aura les parties denommées par D, E, F, c'est à dire, les parties A, B, C, estans denommées de D, E, F. Ie dis que G, est aussi le plus petit ayant telles parties.

b 39.1.

Car s'il n'est ainsi, qu'vn autre plus petit que G, ait les mesmes parties A, B, C, lequel soit H. D'autant donc que H, a les parties A, B, C, les nombres D, E, F, denommez d'icelles parties A, B, C, mesureront H : donc H estant moindre

40.7.

que

que G ; G ne ſera le plus petit nombre meſuré par D, E, F : Ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc vn plus petit nombre que G, n'aura pas les parties données A, B, C : Mais G ſera le plus petit. Partant nous auons, &c. Ce qu'il falloit faire.

FIN DV SEPTIESME LIVRE, des Elements d'Euclide.



LIVRE

LIVRE HVICTIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

THEOREME 1. PROP. 1.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, & que les extremes ſoient premiers entr'eux; ils ſont les plus petits de tous ceux qui ont meſme raiſon auec iceux.

SOIENT tant de nombres que l'on voudra, A, B, C, continuellement proportionaux; & ſoient les extremes A & C premiers entr'eux. Ie dis que A, B, C, ſont les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon qu'iceux.

Car s'il n'eſt ainſi, ſoient D, E, F, plus petits qu'iceux en la meſme raiſon, s'il eſt poſſible. D'autant donc qu'il y a tant de nombres

A.....8 D----
B.....12 E----
C.....18 F----

que

que l'on veut d'vne part A,B,C, & autant d'autre, D,E,F, lesquels pris de deux en deux, sont en mesme raison, c en raison egale, comme A sera à C, c 14.7.
ainsi D à F: d Mais A & C, sont les plus petits de d 23.7.
leur raison, estans premiers entr'eux par l'hypothese. e Donc tant A que C, mesurera D & F ega- e 21.7.
lement, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc A, B, C, sont les plus petits de leur raison. Partant s'il y a tant, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBLEME 1. PROP. 2.

Trouuer tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, les plus petits en vne raison donnée.

Soient A & B, les plus petits de leur raison, il faut premierement trouuer trois nombres les plus petits en la raison donnée de A à B.

Que A, multipliant soy-mesme produise C, & multipliant B, produise
D & B, par soy-mesme, A 2. B 3.
fasse E. Ie dis que C, D, C 4. D 6. E 9.
E, sont les plus petits F 8. G 12. H 18. I 27,
en la raison de A à B,
& sont continuellement proportionaux.

Car d'autant que A, multipliant A & B, faict C & D: comme A est à B, ainsi C à D. Detechef, puis que B, multipliant A, B, faict D, & E: f comme A f 17.7.
est à B, ainsi D à E: donc C, D, E, sont continuellement proportionaux en la raison de A à E. Ils sont aussi les plus petits.

Car

Car d'autant que les extremes C & E, sont produicts de A & B, multipliez chacun par soy-mesme.

g 24.7. g Mais A & B, sont premiers entr'eux, estant

h 29.7. les plus petits de leur raison, h les extremes C & E, seront aussi premiers entr'eux. Donc C, D, E, sont les plus petits en la raison de A, B, C.

1. 8. Secondement, que A, multipliant les trois nombres C, D, E, produise F, G, H, & B, multipliant E, face I. Ie dis que les quatre nombres F, G, H, I, sont les plus petits en la mesme raison donnée de A à B, & continuellement proportionaux.

Sch. 18.7. Car puisque A multipliant C, D, E, a produict F, G, H, F, G, H auront mesme raison que C, D, E, c'est à dire que A, B. Derechef, puis que A & B, multipliant E, ont faict H & I,

i 18.7. i comme A à B, ainsi H à I. Donc F, G, H, I, sont continuellement proportionaux en la raison donnée de A à B.

A 2	B 3.	
C 4,	D 6.	E 9,
F 8.	G 12.	H 18. I 27.

Ils sont aussi les plus petits:

k 24.7. Car A & B estans les plus petits en leur raison, k ils seront premiers entr'eux: mais C & E, sont produits de A & B par eux-mesmes, & F & I sont aussi produits de A & B, en C, E, sçauoir F, de A en C, &

l 29.7. I de B, en F, l F, I, extremes seront aussi premiers entr'eux. Partant F, G, H, I, sont les plus petits de

1. 8. leur raison, qui est la raison de A à B. Par mesme raison nous en trouuerons cinq ou six, &c. Donc nous auons trouué, &c. Ce qu'il falloit faire.

AVTRE DEMONSTRATION.

Soit la raison donnée de C à D; s'ils ne sont

m 7. les plus petits de leur raison, m soient pris d'autres

tres qui soient les plus petits en la mesme raison A & B.

A 2. B 3. 2. 3.

C 4. D 6. E 9. 4. 6. 9.

F 8. G 12. H 18. I 27. 8.12.18.27.

K 16. L 24. M 36. N 54. O 81. 16.24.36.54.81.

P 32. Q 48. R 72. S 108. T 162. V 243. 32.48.72.108.162.

A multipliant soy-mesme fait C, & multipliant B, fait D, B se multipliant fait E. Donc puis que A multipliant A, & B fait C, & D, les [n] produits seront en la raison des multipliez, c'est à dire en la raison de A à B. Et B multipliant A & B, a fait D, E, donc D, E, seront comme A à B. [n] 17. 7.

Derechef, A multipliant C, D, E, fait F, G, H, qui seront en la raison de C, D, E, multipliez, c'est à dire de A à B. Et d'autant que A, B, multiplians E, font H & I, donc H, I, seront en la raison de A à B, par la 18. du 7. liure.

Derechef, A multipliant F, G, H, I, a fait K, L, M, N, qui seront en la raison de F, G, H, I: c'est à dire de A à B. Et puis que A, B, multipliant I, a fait N, O; N, O, seront en la raison de H à I, c'est à dire de A à B, & ainsi des autres. Partant, premierement trois les plus petits sont contin. propor, puis 4. en apres 5, & puis 6, & ainsi l'on en trouuera tant que l'on voudra. 18. 7.

Or qu'ils soient les plus petits en la raison donnée, on le monstrera ainsi. D'autant que C, E, sont procreez de A & B, par eux mesmes: mais A & B, [o] sont premiers entr'eux, estans les plus petits de leur raison. [p] Donc C, E, seront premiers entr'eux: & partant C, D, E, estans continuellement propor- [o] 24. 7. [p] 29. 7.

tionaux, seront les plus petits de leur raison: ainsi
q 29.7. F, I, q sont premiers entr'eux, & F, G, H, I, estans continuellement proportionaux, ils seront les plus
1. 8. petits de leur raison.

En apres, il faut monstrer que A, C, F, K, P, B, D, G, L, Q, E, H, M, R, sont continuellement proportionaux. En cette sorte; comme A à B, ainsi C à D: & en changeant, comme A à C, ainsi B à D, & comme C à D, ainsi F à G, & en permutant C est à F, comme D à G: & ainsi des autres K, P, L, Q. En apres, comme D à E, ainsi G à H, & en changeant comme D à G, ainsi E à H: Mais comme G à H, ainsi L à M, & en permutant, comme G à L, ainsi H à M: Mais comme L à M, ainsi Q à R, en permutant comme L à Q, ainsi M à R. Puis comme H à I, ainsi M à N, & en permutant comme H à M, ainsi I à N: Mais comme M à N, ainsi R à S, & en permutant, comme M à R, ainsi N à S. Donc A, C, F, K, P; B, D, G, L, Q; E, H, M, R, sont continuellement proportionaux: semblablement on monstrera que B, E, I, O, V; A, D, H, N, T; C, G, M, S; F, L, R, sont continuellement proportionaux, &c.

A 1. B 3.	1. 3.
C 4. D 6. E 9.	4. 6. 9.
F 8. G 12. H 18. I 27.	8. 12. 18. 27.
K 16. L 24. M 36. N 54. O 81.	16. 24. 36. 54. 81.
P 32. Q 48. R 72. S 108. T 162. V 243.	32. 48. 72. 108. 162.

Finalement, il faut monstrer que les moyens proportionaux peuuent estre procreez de la mul-

tiplication

tiplication des extremes entr'eux : comme D, eſt faict de A en B : G eſt produict de A en D, & de B en C ; d'autant que comme A à B, ainſi C à D, donc le produict des extremes A, D, eſt egal au produict des moyens. 19. 7.

Derechef, comme A à B, ainſi D à E, donc le contenu ſous A, E, eſt egal au contenu ſous B, D, ſçauoir H, donc H peut eſtre fait de A en E, & qui plus eſt, y a eſté faict par la conſtruction.

En apres, comme A à B, ainſi F à G ; mais A multipliant G, a faict L : donc B multipliant F, fera L. Derechef, A extreme multipliant I, autre extreme, a faict N, par la conſtruction. Et combien que M ſoit faict de A en H, par la conſtruction, il ſe peut neantmoins faire de C en E : D'autant que comme A à C, ainſi E à H : Mais M eſt faict de A en H, donc M ſera faict auſſi de C en E. Finalement comme A à B, ainſi K à L : mais A multipliant L, par la conſtruction, a faict Q. Donc B multipliant K, fera Q. Et comme A à F, ainſi E à M : mais A multipliant M, a faict R, donc E multipliant F fera R. Et comme A eſt à C, ainſi I à N ; mais A multipliant N, a faict S : donc C multipliant I, fera S ; & T, par la conſtruction, a eſté fait de A en O, & ainſi de ſuitte on pourra prouuer que les moyens proportionaux ſont faits de la multiplication des extremes.

COROLLAIRE I.

Il s'enſuit de ces propoſitions, que ſi trois nombres ſont continuellement proportionaux, & les plus petits de leur raiſon, les extremes ſeront quarrez : & ſi 4. ſont continuellement proportionaux,

les extremes ſeront cubes. Car C,E,extremes,ſont produits de A & B, chacun par ſoy-meſme : Et F & I,extremes des quatre ſont produits de A & B, multipliez chacun par ſon quarré C & D,&c.

COROLLAIRE. 2.

Il s'enſuit auſſi que les extremes des nombres continuellement proportionaux, trouuez les plus petits en la raiſon donnée, par cette Propoſition, ſont premiers entr'eux, ayant eſté demonſtré que C E,F I,ſont premiers entr'eux.

1 24. & 29. 7.

COROLLAIRE 3.

Il appert auſſi que deux nombres les plus petits en la raiſon donnée, meſurent tous les moyens quelconques des plus petits en la meſme raiſon, eſtans produicts de la multiplication d'iceux par quelques autres nombres, comme D, moyen qui eſt produict de A par B,& G,H, moyens de A,par D,& E,ou de B,par C,D,&c.

SCHOLIE.

Il s'enſuit d'icy,que tant A C F K,que B E I Q V, ſont continuellement proportionaux depuis l'vnité. Car A meſurant ſon produict C, 1 *C aura vne partie denommée de A,mais l'vnité eſt partie de A,denommée de A.Donc l'vnité ſera meſme partie de A,que A,de C. Donc comme l'vnité à A,ainſi A à C,ainſi des autres.*

1 39.7.

THEOREME 2. PROP. 3.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, les plus petits de tous ceux qui ont la mesmo raison auec iceux; les extremes seront premiers entr'eux.

Soient A,B, C, D, les plus petits de leur raison continuellement proportionaux. Ie dis que les extremes A & D, sont premiers entr'eux.

Car soient [t] trouuez E,F, les plus petits, en la raison de A à B, ou B à C, ou C à D; [v] E, F seront premiers entr'eux. Puis soient trouuez les trois G, H,I, les plus petits en la raison de E à F, & aussi les quatre K,L,M,N, & ainsi de suitte, iusques à ce que K,L,M, N, soient egaux en nombre à A, B, C, D. D'autant que A,B,C,D,

sont les plus petits de leur raison : & K, L,	A,8. B,12. C,18. D,27. E,2. F,3.
M, N, egaux en nombre à iceux, estans aussi les plus petits en la	G,4. H,6. I,9. K,8. L,12. M,18. N,27.

mesme raison, ils seront egaux à iceux chacun au sien, sçauoir A à K, & D à N. [x] Or K, & N, sont premiers entr'eux. Donc A, & D, sont aussi premiers entr'eux. Donc s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[t] 35.7.
[v] 23. 7.
[x] *Coroll.* 2. 8.

PROBLEME 2. PROP. 4.

Estans données tant les raisons que l'on voudra, és plus petits nombres d'icelles, trouuer tant de nombres qu'on voudra, continuellement proportionaux, les plus petits selon les raisons données.

Soient premierement données les deux raisons de A à B, & de C à D, aux plus petits nombres d'icelles: il faut trouuer trois nombres continuellement proportionaux, & les plus petits selon icelles raisons.

y 36.7. Ayant y trouué E, le plus petit nombre mesuré par B, C 2. & 3. soit trouué F, autant de fois mesuré par A, que E par B, & G, autant de fois mesuré par D, que E par C: F, E, G, seront continuellement proportionaux, les plus petits selon les raisons données.

A,6. B,5. C,4. D,3.
H,4. F,24. E,20. G,15.
I---K---L---

Car d'autant que A & B, mesurent egalement F & E; c'est à dire par vn mesme nombre, qu'ils le mesurent par H. Cela estant, z A & B, multiplians H, produiront F & E. Parquoy comme A à B, ainsi F à E. Semblablement C & D, mesurans egalement E, G, comme C à D, ainsi E sera à G. Donc F, E, G, sont contin. proport. selon les raisons de A à B, & de C à D.

z 9. c. f. 18. 7.

Ie dis qu'ils sont aussi les plus petits: car s'il n'est ainsi, soient I, K, L, plus petits en icelles raisons, chacun

chacun au sien, s'il est possible. D'autant donc que A & B, sont les plus petits en leur raison, [a] iceux mesureront egalement I & K, estans en mesme raison, sçauoir B, consequent, mesurera K consequent. Par la mesme raison C, D, mesureront egalement K & L, sçauoir C antecedent, K antecedent. Donc B & C mesurans K, [b] E plus petit mesuré par B & C, mesurera aussi K, le plus grand le plus petit. Ce qui est absurde. Donc F, E, G, sont les plus petits. a 21.7. b 37.7.

Soient trois raisons données aux plus petits nombres de A à B, C à D, & de E à F: Et il faut trouuer quatre nombres les plus petits, continuellement proportionaux, selon les raisons données. [c] Ayant trouué derechef G le plus petit, que mesurent B & C 2. & 3. soit trouué H, autant de fois mesuré par A, que G par B: & I autant de fois mesuré par D, que G par C: cela estant E mesurera I, ou non. Qu'il le mesure premierement, & autant de fois que I est mesuré par E, soit K autant de fois mesuré par F. Ie dis que, H, G, I, K, sont contin. proport: & les plus petits selon les raisons données, comme il a esté monstré. c 36.7.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L---D---N---O---

Maintenant que E ne mesure I, [d] & ayant trouué K, le plus petit que E & I, mesurent, soit L autant de fois mesuré par G, & M par H, que K par I, & soit aussi N, autant de fois mesuré par F, que K par E. Ie dis que M, L, K, N, sont les plus petits, selon les raisons données. d 36.7.

Car H, G, I, mesurans M, L, K, egalement, com-

me cy-deuant M
sera à L, comme A,6.B,5. C,4. D,3. E,2. F,7.
H à G, & L à K, H,24. G,20. I,15.
comme G à I: M,48. L,40. K,30. N,105.
mais par la mes- O---P---Q---R---
me raison H est I
à G, comme A à B, & G à I, comme C à D, (A, B, mesurant H, G, & C, D; G, I, egalement.) Donc
e *Sch.*12.7. comme e A à B, ainsi M à L, & comme C à D, ainsi L à K. Mais comme E à F; K est aussi à N: (E, F, mesurans egalement K, N.) Donc M, L, K, N, sont continuellement proportionaux, selon les raisons données.

Ils sont aussi les plus petits, car s'il n'est ainsi, soient Q, P, Q, R, plus petits selon les mesmes raisons, s'il est possible. D'autant donc que A, B,
f 21.7. sont les plus petits de leur raison, f ils mesureront egalement O, P, en la mesme raison, sçauoir B, consequent, mesurera P, consequent. Et par mesme raison C, D, mesureront P, Q, egalement: sçauoir C, antecedent, P, antecedent: parquoy B, C, mesu-
g 37.7. rans P, g G plus petit nombre, mesure par B, C, mesurera le mesme P.

Or estant monstré que comme G à I, ainsi L à K: c'est à dire, ainsi P à Q, en changeant comme G à P, ainsi I à Q: & partant G, mesurant P, I mesurera
h 21.7. Q: mais E mesure aussi Q, h puis que E, F, les plus petits de leur raison mesurent egalement Q, R, en la mesme raison, sçauoir E, antecedent, Q, antece-
37.7. dent. Donc I, E, mesurans Q; K, plus petit nombre mesuré par I, E, mesurera aussi Q, le plus grand le plus petit. Ce qui est absurde. Parquoy M, L, K, N, sont les plus petits: & ainsi de suitte, s'il y a d'auantage de raisons données aux plus petits

nombres, &c. Donc eſtans données, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 3. PROP. 5.

Les nombres plans ſont l'vn à l'autre en raiſon compoſée de leurs coſtez.

Soient deux nombres plans A, B, & les coſtez de A, ſoient C, D, & ceux de B, ſoient E, F. Ie dis que la raiſon de A à B, eſt compoſée des raiſons des coſtez, ſçauoir de la raiſon de C à E, & de D à F.

Car que D, multipliant E, produiſe G. D'autant que D multipliant C, a produict A & G: A ſera à G, comme C à E: 17.7.

& puis que E multipliant D, F, a produict G, B, G ſera à B, comme D à F. 17.7.

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 8.

Partant A, G, B, ſont continuellement proportionaux, ſelon les raiſons de C à E, & de D à F, coſtez. Mais k la raiſon de A à B, eſt compoſée des raiſons de A à G, & de G à B: donc la meſme raiſon de A à B, ſera compoſée des raiſons de C à E, & de D à F, coſtez. Donc les nombres plans, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. k 27. d. 7.

THEOREME 4. PROP. 6.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, & que le premier ne meſure le ſecond,

aussi pas vn autre ne mesurera pas vn autre.

Soient A,B,C,D, contin.proport.& que A 1. me mesure B 2. Ie dis que pas vn autre n'en mesurera pas vn autre.

Car qu'aucun ne mesure son prochain suiuant, il est manifeste,d'autant que A, B, C, D, sont continuellement proportionaux, & que A ne mesure B, il ne sera partie d'iceluy, mais parties: [m] parquoy B,qui est les mesmes parties de C,ne mesurera aussi C,ny C,D.Ie dis aussi que pas vn autre n'en mesurera pas vn autre, comme A ne mesurera C. [n] Car ayant trouué F, G, H, les plus petits en la raison de A à B,ou de A,B,C,en raison egale, comme A à C, ainsi F à H. Mais puis que comme A est à B,ainsi F à G,& que A ne mesure B; F ne mesurera aussi G : Parquoy F ne sera l'vnité, autrement F mesureroit G, l'vnité mesurant tout nombre. Donc [o] F & H estans premiers entr'eux, & F n'estant l'vnité, F ne mesurera H : & partant A ne mesurera aussi C. Car il est monstré que comme A à C,ainsi F est à H : semblablement on monstrera que B ne mesurera D, prenant quatre nombres en la raison de A à B,& les plus petits,& que pas vn autre n'en mesurera pas vn autre, &c. Donc s'il y a,&c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54.
F, 4. G, 9. H, 9.

l 3. & 4. d. 7.
m 20.d.7.
n 2. 8. ou 35.7.
o 3. 8.

THEOREME 5. PROP. 7.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, & que

que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, A, B, C, D, E, & que A premier, mesure E dernier. Ie dis que A 1. mesurera aussi B 2.

Car si A n'est dit mesurer B 2. A,3,B,6. C,12. D,24. E,48.

p aussi pas vn autre, n'en mesurera pas vn autre: partant A premier, ne mesurera E dernier. Ce qui est absurde, A estant posé mesurer E. Donc s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. p 6. 8.

THEOREME 6. PROP. 8.

Si entre deux nombres tombent des nombres moyens proportionaux, en proportion continuë: autant qu'il en tombera entre iceux, de moyens continuellement proportionaux, il en tombera autant de moyens continuellement proportionaux entre deux autres qui auront la mesme raison.

Soient A & B, & qu'entre iceux tombent les moyens C, D, continuellement proportionaux, & soit comme A à B, ainsi E à F. Ie dis qu'il tombera autant de nombres moyens continuellement proportionaux entre E & F, qu'entre A & B.

Car ayant pris G, H, I, K, les plus petits en la raison de A à C, & egaux en nombre à A, C, D, B: en 2. 8.

raison

raison egale, comme A sera à B: & partant comme
q 3. 8. me E à F, ainsi G à K: q parquoy G à K, estans
premiers entr'eux, puis qu'ils sont les extremes des
r 23.7. plus petits nombres, r & par ainsi les plus petits
f 21.7. de leur raison: f G mesurera E egalement, & K,
mesurera F. Donc autant de fois que G & K, mesurent E, F, soient

deux autres nombres L, M, autant de fois mesurez par H, I: de sorte	A, 24.	C, 36.	D, 54. B, 81.
	G, 8.	H, 12.	I, 18. K, 27.
	E, 32.	L, 48.	M, 72. F, 108.

que G, H, I, K, mesurent E, L, M, F, egalement cha-
t 9. c. f. cun le sien. t Parquoy G, H, I, K, multiplians le
nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, ils pro-
v Sch. 18. 7. duiront E, L, M, F: v donc E, L, M, F, seront en
mesme raison que G, H, I, K: mais G, H, I, K, sont
continuellement proportionaux: donc E, L, M, F,
le seront aussi, & estans egaux en nombre à A, B,
C, D, il tombera autant de moyens proportionaux
entre E & F, qu'entre A & B: Partant si entre, &c.
Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Il est manifeste de ceste demonstration, que non seulement il tombe autant de moyens proportionaux entre E & F, qu'entre A & B: mais aussi que la proportion de E, L, M, F, est la mesme que de A, C, D, B, estant demonstré que la proportion de E, L, M, F, est la mesme que celle de G, H, I, K, qui sont en mesme raison que A, C, D, B, par la construction: donc E, L, M, F, sont aussi en mesme proportion que A, C, D, B.

Il appert aussi de ce Theoreme, qu'entre nombres,

en raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, qu'il ne peut tomber vn nombre moyen proportionel. Car la raison double, és moindres nombres, estant trouuée entre le binaire & l'vnité, & la superparticuliere entre nombres differens seulement de l'vnité; & la superbipartiente entre nombres, dont la difference est le binaire.

Si entre deux nombres en raison double, superparticuliere, ou superbipartiente tombe vn moyen proportionel. x *Il en tombera aussi entre le binaire & l'vnité, ou entre les nombres differens de l'vnité seulement, ou du binaire, sçauoir entre deux nombres plus petits, qui ont la mesme raison qu'iceux, ce qui ne se peut faire. Car il est manifeste qu'entre l'vnité & le binaire, ny entre deux nombres differens de l'vnité seulement, ne tombe aucun nombre, sans s'en faut qu'il y puisse tomber vn nombre moyen proportionel.* x 8. 8.

Semblablement, entre deux nombres differens du binaire, tombe seulement vn nombre qui differe de l'vn & de l'autre de l'vnité, lequel nous demonstrerons ne pouuoir nullement estre moyen proportionel entre iceux, en ceste maniere.

Que A B, & C D, different entr'eux du binaire (soit que C D, soit vnité, & A D, ternaire ou non,) entre lesquels tombe E F, moindre que A B, de l'vnité, & plus grand que C D, de l'vnité. Ie dis que E F, n'est moyen proportionel entre A B, C D.

Car si on dit que

A B, est à E F, comme E F, à C D: estans A G, egal à E F, de A B, afin que le re-	*A..2 G. B A.....6 G B*	
	E.H.F E.....5 H.F	
	C. D C.....5 D	

ste

ste soit l'vnité G B, & de E F, E H, egal à C D, afin qu'il reste aussi l'vnité H F. Pareillement, comme le tout A B, sera au tout E F, ainsi le retranché A G, au retranché E H; A G, E H, estans egaux à E F, C D, par la construction. Donc le reste G B, sera aussi au reste H F, c'est à dire l'vnité à l'vnité, comme le tout A B, au tout E F, le plus grand au plus petit. Ce qui est absurde. Donc E F, n'est moyen proportionel entre A B, & C D.

Donc entre nombres de raison triple, ne peut tom-
8. 8. ber vn moyen proportionel: Autrement il en tomberoit aussi entre 3. & 1. qui sont les plus petits de la raison triple, qui different entr'eux du binaire, ce que nous venons de demonstrer ne se pouuoir faire.

Semblablement, entre les nombres de raison quin-
y 8. 8. tuple ne peut tomber vn moyen proportionel. y Car il en tomberoit aussi vn moyen proport. entre 5. & 1. plus petits nombres de la raison quintuple. Ce que nous monstrerons ne se pouuoir faire. Car qu'il en tombe vn moyen proportionel entre le quinaire A B, & l'vnité C, sçauoir le binaire ou le ternaire D. En sorte que A B, soit à D, comme D à C: & en changeant C à D, comme D à A B: & d'autant que l'vnité C, mesure D: D, mesurera aussi A B. Mais le binaire, ou le ternaire D, mesure aussi le senaire A E, donc D,
z 11. c. s. mesure aussi le tout A E, & le retranché A B. z Et partant D, mesurera aussi B E, vnité restante: ce qui est absurde.

A.....5 B.E
D..2 D..3
C.

Derechef, qu'il tombe, s'il se peut faire, vn moyen proportionel entre le quinaire A E, & l'vnité C, sçauoir D, quaternaire. Donc nous monstrerons comme

comme auparauant, que D, mesure le quinaire A B : mais le quaternaire D, mesure aussi le quaternaire A E : donc D, mesure le tout A B, & le retranché A E, & partant le nombre D, mesurera aussi l'vnité restante E B : Ce qui est absurde. Donc entre 5. & l'vnité ne tombera aucun moyen proportionel, ny entre quelconques nombres en raison quintuple.

A..4 E B
D..4
C.
11. *c. 5.*

PROBLEME 7. PROP. 9.

Si deux nombres sont premiers entre-eux, & entre iceux tombent des nombres moyens continuellement proportionaux; autant qu'il tombera de nombres moyens, continuellement proportionaux entr'eux, il en tombera autant entre vn chacun d'iceux & l'vnité.

Soient deux nombres A & B, premiers entr'eux, entre lesquels tombent C D, continuellement proportionaux. Ie dis qu'il en tombera autant entre A, & l'vnité, de continuellement proportionaux, & autant entre B, & l'vnité, qu'entre A & B. 35. 7.

Car ayant posé l'vnité, soient trouuez E, F, les plus petits en la raison de A à C : & soient pris les 3. G, H, I, en la mesme raison, puis les 4. K, L, M, N; & ainsi de suitte, iusques à ce que les nombres pris soient autant qu'A, C, D, B. Or A, B, extremes, estans premiers entr'eux, A, C, D, B, seront les 2. 8. 1. 8.

plus

plus petits en la raiſon de E à F : mais K, L, M, N, qui ſont autant que A, C, D, B, ſont auſſi les plus petits en la meſme raiſon, par la conſtruction, donc K, L, M, N, ſont egaux à A, C, D, B, chacun au ſien, à ſçauoir K à A, & N à B, afin qu'il n'y en aye de plus petits, que les plus petits.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnité 1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

Mais (comme il eſt manifeſte par la demonſtration de la 2. Propoſition 8.) E, multipliant ſoymeſme, a produit G, & multipliant G, a produit K;
a 7. c. ſ. E, a meſurera G par E, & G meſurera K auſſi par E:
b 5. c. ſ. b mais l'vnité meſure E par E : donc l'vnité meſure E, & E meſure G, & G meſure K egalement, & partant l'vnité eſt meſme partie de E, & E de G,
20. d. que G de K. Partant l'vnité & E, G, K, ſont continuellement proportionaux : ſemblablement l'vnité & F, I, N, ſont continuellement proportionaux. Donc tant E, G, K, que F, I, N, auec l'vnité eſtans egaux en nombre à K, L, M, N, il tombera autant de nombres continuellement proportionaux entre l'vnité & K, ou A ſon egal ; & entre l'vnité & N, ou B ſon egal : qu'entre A & B. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 8. PROP. 10.

Si entre deux nombres & l'vnité tombent des nombres continuellement, proportionaux, autant qu'il en tombe de cõtinuellement

nuellement proportionaux entre chacun d'iceux & l'vnité, il en tombera autant de continuellement proportionaux entre iceux.

Soient deux nombres A,B,& l'vnité C,& qu'entre l'vnité C & A tombent quelques nombres continuellement proportionaux D, & E, & entre l'vnité C & B, tombent F,G. Ie dis qu'il en tombera autant de continuellement proportionaux entre A & B.

Car soit H produict de D en F,& I produict de D en H, & K produict de F en H. C estant à D, comme D à E,& D à E, comme E à A: A,8. I,12. K,18. B,27.
e & C mesurant D par les vnitez qui sont en D : D mesurera E, E, 4. H, 6. G, 9. e 5. c. s.
D,2. F,3. C, 1.
aussi par les vnitez qui sont en D,& E mesurera A, aussi par les vnitez qui sont en D,[d] donc D par soy, produira E,& E par D, produira A. Semblablement F par soy, produira G,& G par F produira B. d 9. c. s.

D'autant donc que D multipliant D ,& F produit E & H,[e] comme D à F, ainsi E à H : par mesme raison, puis que F, multipliant F & D, a faict H & G, comme D à F, ainsi H à G : Donc E,H,G, seront continuellement proportionaux. e 17. 7.

Derechef, D multipliant E & H, a faict A & I, donc comme E [f] sera à H, ainsi A à I, & puis que D & F multiplians H, sont I & K,[g] comme D sera à F, ainsi I à K.[h] Semblablement K sera à B, comme H à G. Donc A,I,K,B, sont continuellement proportionaux, partant entre A & B, tombent deux f 17. 7. g 18. 7. h 17. 7.

moyens

moyens continuellement proportionaux, sçauoir autant qu'entre A & l'vnité, ou B & la mesme vnité. Donc si entre deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 9. PROP. 11.

Entre deux nombres quarrez il y a vn nombre moyen proportionel: & le quarré est au quarré en raison doublée, du costé au costé.

Soient deux nombres quarrez A, B, & leurs costez C, D. Ie dis qu'entre A & B, il y a vn nombre moyen proportionel: & que le quarré A, est au quarré B, en raison doublée du costé C, au costé D.

Car soit E, produict de C en D, ou de D en C.

i 18.d. D'autant que C par soy-mesme a faict A, [i] nombre quarré, & par D a

k 17.7. faict E, [k] comme C A, 9. E, 21. B, 49.
est à D, ainsi A à E. C, 3. D, 7.

18.d. Derechef, puis que D multipliant C a faict E, & multipliant soy-mesme a faict B nombre quarré, comme C sera à D,

17.7. ainsi E à B. Donc A, E, B, seront continuellement proportionaux en la raison des costez C & D. Donc entre A & B, tombe vn nombre moyen proportionel E.

Secondement puis que A, E, B, sont continuel-

l 26.d.7, 10.p.5. lement proportionaux, [l] A 1. sera à B 3. en raison doublée de A 1. à E 2. qui est la mesme raison du costé C, au costé D. Donc entre deux nombres quarrez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO

THEOREME 10. PROP. 12.

Entre deux nombres cubes, il y a deux nombres moyens proportionaux : Et le cube est au cube en raison triplée, du costé au costé.

Soient deux nombres cubes A & B, & leurs costez C, D. Ie dis qu'entre A & B, tombent deux moyens continuellement proportionaux : & que le cube A, est au cube B, en raison triplée du costé C, au costé D.

Car que C se multipliant face E, & D se multipliant face F; & C, D se multiplians l'vn l'autre facent G, & multiplians G, facent H, I.

D'autant que C multipliant C, & D a faict E, G, comme C sera à D, ainsi E à G.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

m 17. 7.

Semblablement puis que D multipliant D, C, a fait G & F, comme C est à D, ainsi G à F; partant E, F, G, sont continuellement proportionaux en la raison de C à D. n 17. 7.

Derechef, d'autant que C multipliant E, a faict A cube, & multipliant G à faict H par la construction A sera à H, comme E à G, c'est à dire comme C à D : semblablement puis que par la construction D multipliant G, a faict I, & multipliant F a faict B cube, I sera à B, comme G à F, c'est à dire comme C à D. Mais H est aussi à I, comme C à D, d'autant que C, D, multiplians G, ont

o 19. d. o 17. 7. p 19. d. q 17. 7. r 18. 7.

ont faict H & I : donc A,H,I,B,ſont continuellement proportionaux en la raiſon de C à D. Donc entre les cubes A & B,tombent deux moyens proportionaux H & I.

Secondement,d'autant que A,H,I,B, ſont continuellement proportionaux, A. 1. ſera à B 4. en raiſon triplée de A 1.à H 2. c'eſt à dire du coſté C, au coſté D : car C eſt à D,comme A à H.Donc entre deux cubes,&c.Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 11. PROP. 13.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que chacun multipliant ſoy-meſme en faſſe quelques-vns, les produicts d'iceux ſeront proportionaux. Et ſi les nombres pris au commencement multiplians leurs produits en font quelques-vns, iceux faicts ſeront auſſi proportionaux, & touſiours cela aduiendra enuiron les extremes.

Soient A,B,C,continuellement proportionaux, leſquels multipliez chacun par ſoy meſme,faſſent D,E,F,& que A,B,C, multiplians derechef D,E,F, faſſent G,H,I,& ainſi de ſuitte. Ie dis que D,E,F, & G,H,I, ſont continuellement proportionaux.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.

Car

Car que A & B, se multipliants l'vn l'autre facent N, & B, C facent O; puis A multipliant N, E face P, & Q, & B, multipliant O, F, face R, S.

D'autant que A, multipliant A, & B, a faict D, N, [f] comme A à B, ainsi D à N, par la mesme raison, puis que B multipliant A & B, a faict N, E, comme A est à B, ainsi N à E: donc D, N, E, sont continuellement proportionaux en la raison de A à B. [f] 17.7.

Derechef, puis que B, multipliant B, & C, a faict E & O, [t] comme B à C, ainsi E à O: semblablement, puis que C multipliant B, & C, a faict O & F, comme B à C, ainsi O à F. Partant E, O, F, sont continuellement proportionaux en la raison de B à C, ou de A à B: Donc D, N, E, estans continuellement proportionaux en la mesme raison: en raison egale comme D à E, ainsi E à F: Donc D, E, F, sont continuellement proportionaux. [t] 17.7.

En apres, puis que A, multipliant D, N, E, a faict G P Q; [v] G, P, Q, seront en mesme raison que D, N, E: c'est à dire que A à B. Et puis que A & B multipliants E, ont faict Q H, [x] comme A à B, ainsi Q à H. Donc G, P, Q, H, sont proportionaux, en la raison de A à B: semblablement, puis que B multipliant E, O, F, a faict H, R, S, [y] H, R, S, seront proportionaux en la raison de E, O, F: c'est à dire de B à C, ou de A à B. [v] *Sch.* 18.7. [x] 18.7. [y] *Sch.* 18.7.

Finalement, puis que B, C, multipliants F, ont faict S, I, [z] S sera à I, comme B à C, ou A à B. Partant H, R, S, I, sont proportionaux en la raison de A à B: donc puis que G, P, Q, H, sont aussi en continuelle proportion en la raison de H, R, S, I, en raison egale, comme G sera à H, ainsi H à I. [z] 18.7.

Partant G,H, I, ſont continuellement proportionaux. Donc s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 12. PROP. 14.

Si vn nombre quarré meſure vn nombre quarré, auſſi le coſté meſurera le coſté: Et ſi le coſté meſure le coſté, auſſi le quarté meſurera le quarré.

Soit A nombre quarré, dont le coſté eſt C, meſurant B, nombre quarré, dont le coſté eſt D. Ie dis que C, coſté de A, meſurera D, coſté de B.

Car que C, D, ſe multiplians l'vn l'autre, faſſent E. D'autant que C, multipliant C D, a faict A, E,[a] comme C ſera à D, ainſi A à E: ſemblablement, puis que D multipliant C, D, a faict E, B,[b] E ſera à B, comme C à D: c'eſt à dire comme A à E: Donc A, E, B, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de C à D. Mais A premier meſure B dernier, donc A 1. meſurera auſſi E 2. Partant puis que C eſt à D, comme A à E, & A meſure E: donc le coſté C, meſurera le coſté D.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

a 17.7.
b 17.7.
7. 8.

Secondement, que le coſté C meſure le coſté D. Ie dis que le quarré A, meſure le quarré B.[c] Car comme il a eſté demonſtré, A, E, B, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de C à D: mais C meſure D: donc A meſurera E, & E meſurera B:[d] Donc A meſurera auſſi B. Partant ſi vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 11.8.
d 11.c.1.

THEO

THEOREME 13. PROP. 15.

Si vn nombre cube, mesure vn nombre cube; aussi le costé mesurera le costé: Et si le costé mesure le costé, aussi le cube mesurera le cube.

Soit A, nombre cube, dont le costé est C, mesurant B nombre cube, dont le costé est D. Ie dis que C costé de A, mesurera D, costé de B.

Car que C, D, chacun multipliant soy-mesme face E, F, & le multiplians l'vn l'autre facent G: & finalement multiplians G, facent H, I.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

D'autant que comme il appert par la demonstration de la 12. Prop. 8. tant E, G, F, que A, H, I, B, sont continuellement proportionaux en la raison de C à D: Mais A premier mesure B dernier, * A 1. mesurera aussi H 2. Donc A estant à H, comme C à D: C costé, mesurera aussi D costé. * 7. 8.

Maintenant que le costé C, mesure le costé D. Ie dis que le cube A, mesurera le cube B. Car par les raisons cy-dessus, comme C à D, ainsi A à H; A, H, I, B, estans contin. proport. en la raison de C à D, comme il est monstré en la 12. Proposition 8. Parquoy C, costé mesurant le costé D, aussi A mesurera H: mais H mesure I, & I mesure le cube B, (estans contin. proport.) † Donc A mesurera aussi le cube B: Donc si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. † 11. c. 8.

THEOREME 14. PROP. 16.

Si vn nombre quarré ne meſure vn nombre quarré, auſſi le coſté ne meſurera le coſté ; Et ſi le coſté ne meſure le coſté, auſſi le quarré ne meſurera le quarré.

Soient les nombres quarrez A & B, & leurs coſtez C & D ; & que A quarré, ne meſure le quarré B. Ie dis que le coſté C, ne meſurera auſſi le coſté D.

Car, s'il eſt poſſible, que le coſté C, meſure le
g 14. 8. coſté D : g Donc le quarré
A, meſurera le quarré B, A, 16. B, 81.
ce qui eſt abſurde : car il C, 4. D, 9.
eſt poſé ne le meſurer:
parquoy C coſté, ne meſurera le coſté D.

Maintenant : Ie dis que ſi le coſté C, ne meſure
14. 8. le coſté D, qu'auſſi le quarré A, ne meſurera le quarré B. Car ſi A eſt dict meſurer B ; le coſté C meſurera auſſi le coſté D, ce qui eſt abſurde : car il eſt poſé ne le meſurer. Partant le quarré A, ne meſurera le quarré B : Donc ſi vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 15. PROP. 17.

Si vn nombre cube ne meſure vn nombre cube, auſſi le coſté ne meſurera le coſté ; Et ſi le coſté ne meſure le coſté, auſſi le cube ne meſurera le cube.

Soient

Soient les nombres cubes A & B, & leurs costez C & D, & que A ne mesure B. Ie dis que le costé C, ne mesure le costé D.

Car que le costé C mesure le costé D, s'il est possible. [h] Donc le cube A, mesurera le cube B, ce qui est absurde : car il est posé ne le mesurer: Donc C ne mesure D.

A, 8.	B, 27.	h 15. 8.
C, 2.	D, 3.	

Maintenant que le costé C, ne mesure le costé D. Ie dis que le cube A, ne mesurera le cube B. Car si A, est dict mesurer B; [i] le costé C mesurera aussi le costé D, ce qui est absurde; Car il est posé ne le mesurer. Donc le cube A, ne mesure le cube B. Parquoy si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. i 15. 8.

THEOREME 16. PROP. 18.

Entre deux nombres plans semblables, il y a vn nombre moyen proportionel; Et le plan est au plan en raison doublée des costez homologues, ou de semblable raison.

Soient les nombres A, B, plans semblables, & les costez de A soient C, D, & les costez de B soient E, F: ([k] lesquels costez sont proportionaux,) de sorte que C, D, se multiplians font A, & E, F, font B, & comme C est à D, ainsi E est à F. Ie dis qu'entre A & B, tombe vn moyen proportionel, & que le plan A, est au plan B, en raison doublée des costez homologues C E, D F. k 21. d. 7.

Car que D E, se multiplians l'vn l'autre facent G. D'autant que comme C est à D, ainsi E à F, en changeant C sera à E, comme D à F: & puis que D multipliant C, E, a faict A & G, l A sera à G, comme C à E: c'est à dire comme D à F. Et puis que E multipliant D, F, a faict G & B, m G sera à B, comme D à F. Donc A, G, B, sont continuellement proportionaux en la raison de C à E, ou de D à F: donc entre A & B, il y a vn moyen proportionel G.

A; 12.G, 18.B, 27.
C, 6.D, 12.E, 9.F, 3.

l 17.7.

m 17.7.

Mais d'autant que A, G, B, sont continuellement proportionaux. A n est à B, en raison doublée de A à G, c'est à dire de C à E, ou de D à F. Donc le plan A, est au plan B, en raison doublée de C à E, ou de D à F, costez de mesme raison. Donc entre deux nombres plans, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

n 26.d.7.

THEOREME 17. PROP. 19.

Entre deux nombres solides semblables, il y a deux nombres moyens proportionaux; Et le solide est au solide en raison triplée, du costé homologue au costé homologue, ou de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A, B, les costez de A soient C, D, E, & de B soient F, G, H: o C, D, E, sont proportionaux à F, G, H, sçauoir comme C à D, ainsi F à G, & comme D à E, ainsi G à H. Ie dis qu'entre A & B, se trouuent deux moyens

o 21.d.

moyens proportionaux, & A est à B, en raison triplée des costez homologues C, F, ou D, G, ou E, H.

Car que C D, se multiplians l'vn l'autre facent I; & F, G facent K, & D, F facent L: finalement E, H multiplians L, facent M, N. D'autant donc que C, D, E, sont proportionaux à F, G, H, en changeant ils seront aussi proportionaux, sçauoir comme C à

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

F, ainsi D à G, & E à H. Et puis que D multipliant C, F, a fait I, L, p comme C à F, ainsi I à L. Pareillement puis que F multipliant D; G, a faict L & K; comme D est à G, ainsi L à K. Parquoy I, L, K, sont continuellement proportionaux en la raison de C à F, ou de D à G, ou de E à H. p 17.7.

Et d'autant que A solide, est produit de la mutuelle multiplication des costez C, D, B: & l'est fait de C en D, ou de D en C; E multipliant I fera A: semblablement B solide, estant fait de la mutuelle multiplication de F, G, H, & K de F en G, ou de G en F: H multipliant K fera B.

Parquoy puis que E multipliant I & L, a faict A & M; q A sera à M, comme I à L: c'est à dire comme C à F, ou D à G, ou E à H. Par mesme raison, puis que H multipliant L, K, a faict N & B, r N sera à B, comme L à K: c'est à dire comme C à F, ou D à G, ou E à H. Mais M est à N, comme E à H, puis que E, H multipliant L, ont faict M & N; donc A, M, N, B, sont continuellement proportionaux en la raison de C à F, ou de D à G, ou E à H. q 17.7. r 17.7. s 18.7.

à H. Partant entre A & B solides semblables, tombent deux nombres moyens continuellement proportionaux.

t 10. d. 5. ou 26. d. 7. Secondement, puis que A, M, N, B, sont continuellement proportionaux, t A est à B, en raison triplée de A à M: mais A est à M, comme C à F, ou D à G, ou E à H: donc A sera à B en raison triplée de C à F, ou de D à G, ou de E à H, costez de semblable raison. Donc entre deux solides, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 18. PROP. 20.

Si entre deux nombres tombe vn nombre moyen proportionel: iceux nombres seront plans semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombe vn moyen proportionel C. Ie dis que A & B sont plans semblables.

Car ayant pris D, E, les plus petits en la raison
y 21. 7. de A, C, B; y D & E, mesureront egalement A & C. Qu'ils les mesurent

par F, ils mesureront	A, 18. C, 24. B, 32.
aussi egalement C, B,	D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

en la mesme raison:
x 9. c. f. que ce soit par G. x Donc F multipliant D, & F,
y 9. c. f produira A & C, y & G multipliant D E, produira C, B.

D'autant donc que E multipliant F & G, a produict C, B,
z 17. 7. z comme C sera à B, ainsi F à G: mais
comme C à B, ainsi estoit D à E. Donc D sera à E, comme F à G; & en permutant comme D à F,

ainsi

ainſi E à G : mais d'autant que F multipliant D, a faict A : A ſera nombre plan, & ſes coſtez ſeront D F. Semblablement puis que G multipliant E, a faict B : B ſera auſſi plan, duquel les coſtez ſeront E, G. Et iceux coſtez eſtans monſtrez proportionaux, ſçauoir comme D à F, ainſi E à G ; [a] A & B ſeront plans ſemblables. Donc ſi entre deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. a 21. d. 7.

THEOREME 19. PROP. 21.

Si entre deux nombres tombent deux moyens proportionaux ; iceux ſeront ſolides ſemblables.

Soient A & B, entre leſquels tombent deux moyens proportionaux C & D. Ie dis que A & B, ſont nombres ſolides ſemblables.

Car [b] ſoient pris E, F, G, les plus petits en la raiſon de A, C, D, B. D'autant qu'entre E & G, tombe vn moyen proportionel F, [c] E & G ſeront plans ſemblables. Soient

H I, coſtez de E & K, L de G. Et d'autant que E, F, G, meſurent A, C, D, également [d] eſtans les plus petits en la meſme raiſon, qu'ils les meſurent par M. [e] Et puis que E, F, G, meſurent auſſi C, D, B, par la meſme raiſon, que ce ſoit par N, de ſorte que M multipliant E, F, G, faſſe A, C, D : & N, multipliant auſſi E, F, G, faſſe C, D, B. Or E eſt produict de ſes coſtez H, I, multipliez l'vn par l'autre : & G eſt produict des coſtez K & L. Donc A eſt produict de H, I, M, entr'eux, &

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3, N, 3.

b 2. 8.
c 20. 8.
d 21. 7.
e 21. 7.

h 21. d.7. B de K,L,N : partant [b] A est nombre solide, ayant les costez H,I,M,& B aussi solide, ayant les costez K,L,N : Mais puis que M & N multiplians F, font
i 18.7. C & D, comme il est monstré, [i] C sera à D, comme
k 17.7. M à N : mais [k] C, D, sont en mesme raison que E, F, puis que N multipliant E, F, a faict C, D, & aussi E,F, sont en mesme raison que H, K, ou I, L. Donc H sera à K, & I à L, comme M à N, & en changeant H sera à I, comme K à L, & I à M, comme L à N : donc les costez H,I,M, sont proportio-
l 21.d.7. naux aux costez K, L, M. [l] Partant les nombres A & B sont solides semblables : Dont si entre deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 20. PROP. 22.

Si trois nombres sont continuellement proportionaux, & que le premier soit quarré ; Aussi le troisiesme sera quarré.

Soient trois nombres A,B, C, continuellement proportionaux, & que A 1. soit quarré. Ie dis que C 3. sera aussi quarré.

Car puis qu'entre A & C, tombe vn moyen
m 20.8. proportionel : [m] A & C
seront plans semblables; B,9.B,54.C,324.
partant A estant quarré,
C semblable à iceluy, sera aussi quarré : Donc s'il y a trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO

THEOREME 21. PROP. 23.

Si quatre nombres ſont continuellement proportionaux, & que le premier ſoit cube, auſſi le quatrieſme ſera cube.

Soient quatre nombres A, B, C, D, continuellement proportionaux, & que A 1. ſoit cube. Ie dis que D 4. ſera auſſi cube.

Car puis qu'entre A & D, tombent deux moyens proportionaux B & C, A & D ſeront ſolides ſemblables. Partant, A eſtant cube, D ſemblable à iceluy, ſera auſſi cube. Donc ſi quatre nombres ſont continuellement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. n 21. 8.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

SCHOLIE.

D'autant que comme nous auons dit à la 22. Definition du 7. liure. Deux nombres plans ou ſolides peuuent eſtre ſemblables, pourueu que deux coſtez quels qu'ils ſoient de l'vn, ſoient proportionaux à deux de l'autre, quels qu'ils puiſſent eſtre, encore que deux quelconques coſtez que l'on voudra de l'vn, ne ſoient proportionaux a deux quels que l'on voudra de l'autre, l'on pourra nier à bon droict, que de deux nombres plans ſemblables, ſi l'vn eſt quarré, que l'autre ſoit auſſi quarré, & de deux nombres ſolides ſemblables, ſi l'vn eſt cube, l'autre ſoit auſſi cube, ce qui eſt neantmoins accordé en ces deux demonſtrations precedentes. Car ces deux

nombres

nombres 36. & 64. estans proposez semblables, il suffit qu'à deux costez du 1. 3 & 12. on trouue deux costez du dernier proportionaux, comme 4. & 16. d'où il s'ensuit qu'encore que le premier soit quarré, ayant deux costez egaux 6. & 6. quelqu'vn pourroit douter, mesme nier, que l'autre eust aussi deux costez proportionaux, aux deux costez egaux du premier, c'est à dire aussi egaux entr'eux, & partant estre quarré. Comme il est aussi manifeste de ces deux costez du premier 4. & 9. ou 2. ou 18. ausquels ne correspondent deux autres costez au dernier proportionaux à iceux.

Donc si à ces deux costez du premier, l'on ne trouue deux costez au dernier proportionaux, encore bien que ces nombres soient semblables, l'on ne sera tenu d'accorder sans demonstration qu'il y puisse auoir deux costez au dernier proportionaux à ces deux 6. & 6. & aussi egaux entr'eux. Ce qu'il faut aussi entendre des solides. C'est pourquoy nous auons icy mis ces deux demonstrations de Clauius.

Soient trois nombres A, B, C, continuellement proportionaux, & que A premier soit quarré. Ie dis que C 3. sera quarré.

Car ayant pris trois nombres D, E, F, les plus petits en la raison de A à B, & de B à C: [f] D mesurera A, & F mesurera C egalement: & les extremes D, F [g] estans quarrez, & A estant quarré par l'hypothese, il tombera entre A & D quarrez vn moyen proportional comme G. Mais d'autant qu'en raison egale, comme A à C,

f 21. 7.

g 1. Coroll. 2. 8.

A,36. B,48. C,64.
G,18. H,32.
D,9. E,12. F,16.
L,64. K,8. I,4.

A à C, ainsi D à F : & en permutant comme A à D, ainsi C à F. Il tombera aussi vn moyen proportionel entre C & F, comme H. Donc F 1. mesurant C dernier, il mesurera aussi H 2. *Mais ayant pris I, costé du quarré F, que I mesure le nombre K, autant de fois que F mesure H, en sorte que H à F, & K à I, ait mesme raison multiple. Et soit pareillement L quarré de K : partant puis que le quarré L, est en quarré F, en raison doublée du costé K au costé I : c'est à dire de H à F ; mais C à F, est aussi en raison doublée de la mesme raison de H à F, par la definition, puis qu'en changeant C, H, F, sont aussi proportionaux, L sera à F, comme C à F : & partant L & C sont egaux. Donc L estant quarré par la construction C sera aussi quarré.* o 7. 8. 11. 8.

Soient quatre nombres A, B, C, D, continuellement proportionaux, & que A 1. soit cube. Ie dis que D 4. sera cube aussi.

Car ayant trouué quatre nombres E, F, G, H, les plus petits en la raison de A à B, de B à C, & de C à D ; E mesurera A, & H mesurera D egalement : & E, H extremes des quatre plus petits, estans cubes, & A estant aussi cube par l'hypotese, entre E, A cubes, p 21. 7. q Coroll. 1. 2. 8.

A, 64.	*B*, 160.	*C*, 400.	*D*, 1000.
K, 32.			*M*, 500.
I, 16.			*L*, 250.
E, 8.	*F*, 20.	*G*, 50.	*H*, 125.
P, 1000.	*O*, 10.	*N*, 5.	

12. 8.

tomberont deux moyens proportionaux, lesquels soient I, K : mais d'autant qu'en raison egale, comme A à D, ainsi E à H, & en changeant comme A à E, 8. 8.

ainsi D à H: il tombera aussi entre H, D, deux moyens
r 8.8. proportionaux qui soient L, M. Donc r puis que H premier, mesure D dernier, il mesurera aussi L 2.

Apres, ayant pris N, costé du cube H, que N mesure autant de fois O, que H mesure L, en sorte que L soit à H, & O à N, en mesme raison multiple.
f 12.8. Soit aussi P cube de O: partant f puis que le cube P, est au cube H, en raison triplée du costé O, au costé N, c'est à dire de L à H: & D est aussi à H, en raison triplée de L à H, par la definition, puis qu'en changeant D, M, L, H, sont aussi proportionaux, P sera à H, comme D à H. Parant P, D seront egaux. Donc P estant cube par la construction, D sera cube aussi. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 22. PROP. 24.

Si deux nombres sont en mesme raison l'vn à l'autre, que nombre quarré à nombre quarré: & que le premier soit quarré, le second sera aussi quarré.

Soient deux nombres A & B, lesquels ayent mesme raison l'vn à l'autre, que le nombre quarré C, au nombre quarré D, & que A premier soit quarré. Ie dis que B second est aussi quarré.

t 11.8. Car d'autant que C & D sont quarrez, t il tombera entr'eux vn moyen proportionel, lequel soit
v 8.8. E. v Il en tombera donc

aussi vn entre A & B, qui — A, 36. F, 48. B, 64.
sont en la mesme raison, — C, 9. E, 12. D, 16.
lequel soit F. D'autant
donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement

lement proportionaux,& A premier, eſt quarré, [x] x 22. 8.
B troiſieſme ſera auſſi quarré. Partant ſi deux
nombres,&c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte de ce qu'il eſt demonſtré ey-
deſſus, que la proportion de tout nombre quarré,
à quelconque nombre non quarré que ce ſoit,
ne peut eſtre exhibée en deux nombres quarrez.
Car ſi ainſi eſtoit, [y] les deux premiers nombres y 24. 8.
qui ont la meſme raiſon que les quarrez de la pro-
portion exhibée ſeroient auſſi quarrez, puis que
le premier eſt poſé quarré. Ce qui eſt abſurde, car
le ſecond eſt poſé non quarré. D'où s'enſuit que
les nombres qui ſont en raiſon double, ne ſont en-
tr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.
Car tous ces nombres doubles icy, 4. 8. 16. 32. 64.
128. &c. ſeroient quarrez. Car le premier 4. eſtant
quarré, [z] 8 ſeroit auſſi quarré, & auſſi 16. & 32. &c. z 24. 8.
ce qui eſt impoſſible. Car entre 4. & 8. entre 8.
& 16. entre 16. & 32. &c. tomberoit vn moyen
proportionel s'ils eſtoient quarrez: veu que toutef-
fois il eſt monſtré au Scholie de la 8. Propoſition
de ce liure, qu'entre aucuns nombres de propor-
tion double, il ne peut tomber de moyen propor-
tionel.

Semblablement, les nombres qui ſont en raiſon
quintuple, n'auront meſme raiſon que nombre
quarré à nombre quarré: car ſi ainſi eſtoit, [a] il tom- a 11. 8.
beroit entr'eux vn moyen proport. Donc il en 18. 8.
tomberoit auſſi vn moyen proport. entre 5. & 1. qui
ſont les plus petits nombres en la raiſon quintu-
ple: [b] mais nous auons monſtré le contraire. b *Sch.* 18. 8.

THEOREME 23. PROP. 25.

Si deux nombres ont meſme raiſon l'vn à l'autre, qu'vn nombre cube à vn nombre cube, & que le premier ſoit cube, auſſi le ſecond ſera cube.

Soit A à B, comme le cube C au cube D, & que A premier ſoit cube. Ie dis que B ſecond, ſera auſſi cube.

c 12.8. Car d'autant que A eſt à B, comme C à D: mais entre C & D cubes, tombent deux moyens pro-
8. 8. portionaux, leſquels ſoient E & F. Donc entre A & B, tomberont auſſi deux moyens proportionaux, qui ſoient G & H. Donc d'autant que les quatre nombres A, G, H, B, ſont continuellement proportionaux, & A 1. eſt cube, d B 4. ſera auſſi cube. Parant ſi deux nombres ont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

d 23. 8.

COROLLAIRE.

Il eſt auſſi manifeſte, par ce qui eſt monſtré cy-deſſus, que la raiſon de quelconque nombre cube que ce ſoit, à quelconque nombre non cube, que ce ſoit, ne ſe peut reſoudre en deux nombres cubes.

25. 8. Car ſi elle s'y retrouuoit, les deux premiers nombres ayans la meſme raiſon que les cubes de la proportion trouuée, ſeroient auſſi cubes, puis

que

que le premier eſt poſé cube. Ce qui eſt abſurde: car le ſecond eſt poſé non cube.

THEOREME 24. PROP. 26.

Les nombres plans ſemblables, ont meſme raiſon entr'eux, que nombre quarré à nombre quarré.

Soient les nombres A & B, plans ſemblables. Ie dis que A eſt à B, comme vn nombre quarré à vn nombre quarré.

Car puis que A & B ſont plans ſemblables, e il tombera entr'eux vn moyen proportionel, lequel ſoit C. e 18.8.

Donc ayant pris les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raiſon

de A, C, B, les extremes	A, 20. C, 30. B, 45.	1. *Coroll.* 2.
D & F ſeront quarrez	D, 4. E, 6. F, 9.	8.

partant puis qu'en raiſon egale A eſt à B, comme D à F: il eſt manifeſte que A ſera à B, comme vn nombre quarré à vn nombre quarré, ſçauoir comme le nombre quarré D, au nombre quarré F. Donc les nombres plans ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Mais la converſe de cette Propoſition eſt vraye auſſi, laquelle nous demonſtrerons ainſi, priſe de Commandin.

Les nombres plans qui ont meſme proportion entr'eux, que nombre quarré à vn nombre quarré, ſont plans ſemblables.

Que les nombres plans A,B, ayent mesme raison entr'eux que les quarrez C,D. Ie dis que A,B, sont plans semblables.

Car d'autant qu'entre les quarrez C, D, tombe vn moyen f proportionel : & comme C est à D, ainsi A à B, g il tombera aussi vn moyen proportionel entre A & B. h

f 11.8.
g 8.8.
h 20.8.

A, 8. B, 18.
C, 16. D, 36.

Parquoy A & B, sont plans semblables.

Il appert de cecy que les nombres plans, qui ne sont semblables, n'ont pas mesme raison entr'eux, que nombre quarré à nombre quarré : car s'ils auoient mesme raison, ils seroient plans semblables, comme il est demonstré : Ce qui est absurde: Car ils sont posez non semblables.

THEOREME 25. PROP. 27.

Les nombres solides semblables ont mesme raison entr'eux, qu'vn nombre cube à vn nombre cube.

Soient les nombres A & B, solides semblables. Ie dis que A est à B, comme vn nombre cube à vn nombre cube.

Car d'autant que A & B sont solides semblables : i entre iceux il tombera deux moyens proportionaux, lesquels soient C & D. Et ayant pris les quatre nombres E, F, G, H, les plus petits en la raison

i 19.8.

A, 16. C, 24. D, 36. B, 54.
E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

k *Coroll.* 1, de A, C, D, B, k les extremes E & H seront cubes. Parant puis qu'en raison

raiſon egale A eſt à B, comme E à H, il appert que A ſera à B, comme le nombre cube E à vn autre nombre cube, à ſçauoir H. Donc les nombres ſolides ſemblables ont meſme raiſon entr'eux que, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons apres Clauius icy la conuerſe de cette Propoſition.

Les nombres qui ſont l'vn à l'autre, comme nombre cube à nombre cube, ſont ſolides ſemblables.

Car que A & B ayent meſme raiſon entr'eux, que les cubes C & D. Ie dis que A, B ſont ſolides ſemblables. Car A eſtant à B, comme C à D; l & l 12. 8.
qu'entre C, D cubes, il tombe deux moyens proportionaux, m il en tombera auſſi deux entre A & m 8. 8.
B. Donc A, B, ſont ſolides ſemblables. 21. 8.

De toutes ces choſes il eſt manifeſte, qu'aucuns nombres en raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente ne ſont
plans ſemblables ou ſolides. A, 16. B, 54.
Car s'ils eſtoient plans ſem- C, 64. D, 216.
blables, n il tomberoit vn n 18. 8.
moyen proportionel entr'iceux. o Ce qui eſt ab- o Sch. 8. 8.
ſurde. Ils ne ſeront auſſi ſolides ſemblables, ne 8. 8.
pouuant tomber entr'iceux deux moyens proportionaux: car autrement il en tomberoit auſſi deux
p entre les plus petits de la meſme raiſon, ce qui p Sch. 8. 8.
ne ſe peut, eſtans ſeulement differens entr'eux de l'vnité ou du binaire, entre leſquels deux moyens proportionaux ne peuuent tomber.

Ainsi, deux quelconques nombres premiers ne sont plans semblables ou solides, ne pouuans auoir les costez proportionaux. Car quelconque nombre plan, qui est nombre premier, a seulement pour costez soy & l'unité, bien qu'improprement.

Comme ces nombres plans 19. & 23. ont pour costez 1. & 19. 1. & 23. estans produicts de la multiplication d'iceux costez, lesquels ne sont proportionaux comme il appert. Mais quelconque nombre solide, estant aussi nombre premier, a seulement deux autres pour costez, & soy-mesme. Comme ces solides 29. & 47. ont pour costez 1. 1. 29. & 1. 1. 47. estans produicts de la multiplication d'iceux; or il est manifeste qu'iceux ne peuuent estre aussi proportionaux.

Donc si deux quelconques nombres premiers entr'eux, qui ne sont quarrez ou cubes, (combien qu'aucun d'iceux ne soit premier) ne peuuent estre plans semblables ou solides: Car si deux tels nombres premiers entr'eux estoient dits plans ou solides semblables, il tomberoit entr'eux vn ou deux moyens proportionaux; parquoy les deux extremes estans posez premiers entr'eux, tous les trois ou quatre seroient premiers entr'eux, aucune commune mesure ne les pouuant mesurer, à cause des deux extremes premiers entr'eux. Partant ils seront les plus petits continuellement proportionaux: Donc les deux extremes seront quarrez ou cubes. Ce qui est absurde, n'estans quarrez ny cubes par l'hypothese.

A, 16. B, 54.
C, 64. D, 16.

q 18. & 19. 8.

r 23. 7. & 23. 8.

Il s'enſuit de ces choſes, que ſi deux nombres ſont plans ou ſolides ſemblables, deſquels le moindre ſoit premier, le moindre meſurera le plus grand, autrement ils ſeroient premiers, & partant ne ſeroient plans ou ſolides ſemblables, comme il eſt demonſtré : ce qui eſt contre l'hypotheſe. 31. 7.

D'où il appert, que deux nombres premiers entr'eux, dont le moindre eſt premier, ne ſont plans ou ſolides ſemblables : car autrement le moindre meſureroit le plus grand, comme il a eſté dit : parquoy meſurant auſſi ſoy-meſme, ils ne ſeroient premiers entr'eux, mais compoſez : ce qui eſt contre l'hypotheſe.

Dont il ſera facile de trouuer deux nombres plans ou ſolides non ſemblables. Car prenant deux nombres en raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, ou deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, deſquels l'vn ny l'autre ne ſoit quarré ou cube, par ce qui a eſté dit, iceux ſeront plans ou ſolides non ſemblables.

Derechef, quelconques deux nombres, dont l'vn eſt quarré, l'autre non, ſont plans diſſemblables, comme 16. & 20. Car s'ils eſtoient plans ſemblables, [f] ils ſeroient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. [g] Donc 16. eſtant quarré, 20. ſeroit auſſi quarré. Ce qui eſt abſurde, eſtant poſé non quarré.

A, 16. B, 54.
C, 64. D, 216.

[f] 26. 8.
[g] 24. 8.

Semblablement, quelconques deux nombres, dont l'vn eſt cube, & l'autre non cube, ſont ſolides

27.8. non semblables, comme 27. & 40. Car s'ils estoient
25.8. solides semblables, ils seroient entr'eux, comme nombre cube à nombre cube. Donc 27. estant cube, 40. seroit aussi cube : ce qui est absurde ; car il est posé non cube.

FIN DV HVICTIESME LIVRE, des Elements d'Euclide.



LIVRE

LIVRE NEVFIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

THEOREME 1. PROP. 1.

Si deux nombres plans ſemblables ſe multiplians l'vn l'autre en produiſent quelqu'vn : Le produict ſera quarré.

SOIENT deux nombres plans ſemblables A, B, & que A multipliant B, ou B multipliant A, faſſe C. Ie dis que C eſt nombre quarré.

Car ſoit D produict de A, par ſoy-meſme, D ſera nombre quarré. Donc d'autant que A multipliant A, & B, a produict D & C, x comme A ſera à B, D ſera à C. Mais entre A & B, plans ſemblables, y tombe vn moyen proportionel, z il en tombera donc auſſi vn entre D & C, lequel ſoit E, afin que D, C, E, ſoient continuellement proportionaux : Mais D

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

x 17.7.
y 18.8.
z 8.8.

premier,

premier, est quarré par la construction; [a] Donc C 3. sera aussi quarré. Partant si deux nombres plans, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 22.8.

THEOREME 2. PROP. 1.

Si deux nombres se multiplians l'vn l'autre, font vn quarré: iceux sont plans semblables.

Que les deux nombres A & B se multiplians l'vn l'autre, fassent C, nombre quarré. Ie dis que A, B, sont plans semblables.

Car soit D produict de A, par soy-mesme, D sera quarré. D'autant donc que A, multipliant A & B a produict D & C, [b] comme A est à B, ainsi D est à C. [c] Mais entre D & C nombres quarrez, il tombe vn moyen proportionel. [d] Donc entre A & B, tombera aussi vn moyen proportionel: [e] partant A & B sont plans semblables. Donc si deux nombres se multiplians, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

b 17.7.
c 11.8.
d 8.8.
e 20.8.

THEOREME 3. PROP. 3.

Si vn nombre cube se multipliant soy-mesme, en produict quelqu'vn: Le produict sera cube.

Que le nombre cube A, se multipliant soy-mesme face B. Ie dis que B est nombre cube.

Car

Car soit pris C, costé de A, cube, & soit D, le produict de C, par soy-mesme, & par ainsi le cube A, sera produict de C par D. D'autant donc que C multipliant soy-mesme a faict D, f iceluy C mesurera D, par C: & mais l'vnité mesure aussi C par C. g Donc l'vnité sera mesme partie de C, denommée de C, que C de D: & partant, h comme l'vnité à C, ainsi C à D. f 7. c. s. g 5. c. s. h 20. d.

Derechef, d'autant que C multipliant D a faict A, i D mesurera A par C: Mais C mesure D par C. Donc C sera mesme partie de D, que D est de A. k i 7. c. s. k 20. d.

partant comme C à D,	E, 16.	D, 4.
ainsi D à A: mais com-	F, 32.	C, 2.
me C est à D, ainsi l'vnité	B, 64.	Vnité.
estoit à C. Donc comme		

l'vnité est à C, ainsi C à D, & D à A. Donc entre l'vnité & A, tombent deux moyens proportionaux C & D. l 7. c. s.

Mais d'autant que A mesure B par A: (car A se multipliant faict B,) m & l'vnité mesure A par A, l'vnité sera mesme partie de A, que A de B; n & partant l'vnité sera à A, comme A à B. Donc puis qu'entre l'vnité & A, tombent deux moyens proportionaux C & D; o il en tombera autant entre A & B, qui soient E & F. m 5. c. s. n 20. d. o 8. 8.

Donc puis que les quatre nombres A, E, F, B, sont continuellement proportionaux, & A premier est cube, B 4. sera pareillement cube: Donc si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 23. 8.

THEO

THEOREME 4. PROP. 4.

Si vn nombre cube multipliant vn nombre cube, en faict quelqu'vn : le produict sera cube.

Que le nombre cube A, multipliant nombre cube B, faſſe C. Ie dis que C eſt cube.

p 3. 9. Car que A ſe multipliant faſſe D, p D ſera cube. Et d'autant que A multipliant A, & B, a faict D & C, q comme A, ſera à B, ainſi D ſera à C. Mais entre les cubes A & B, tombent deux moyens proportionaux. r Donc entre D & C, tóbera auſſi deux moyens proportionaux, ſ partant D eſtant cube, C, ſera auſſi cube. Donc ſi vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

q 17. 7.
r 12. 8.
8. 8.
ſ 23. 8.

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

THEOREME 5. PROP. 5.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produict vn cube : le multiplié ſera auſſi cube.

Que le nombre cube A, multipliant B, faſſe G nombre cube. Ie dis que B, eſt auſſi nombre cube.

Car ſoit D, produict de A, multiplié par ſoy-meſme : t D ſera cube. D'autant donc que A multipliant A, & B, a faict D & C, v comme A ſera à B, ainſi D à C:

t 3. 9.
v 17. 7.

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

mais [x] entre les cubes D & C, tombe deux moyens proportionaux. [y] Donc entre A & B, tomberont auſſi deux moyens proportionaux. [z] Et partant A eſtant cube, B ſera auſſi cube. Donc ſi vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. x 12. 8. y 8. 8. z 22. 8.

THEOREME 6. PROP. 6.

Si vn nombre ſe multipliant ſoy-meſme faict vn cube, iceluy ſera auſſi cube.

Soit le nombre A, lequel ſe multipliant ſoy-meſme faſſe B, nombre cube. Ie dis que A eſt auſſi cube.

Car ſoit C produict de B par A, C ſera nombre cube, comme il eſt manifeſte. D'autant donc que A, 8. B, 64. C, 512. B cube multipliant vn autre nombre, ſçauoir A, a produict C, nombre cube, A ſera auſſi cube. Donc ſi vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 19. d. 5. 9.

THEOREME 7. PROP. 7.

Si vn nombre compoſé multipliant quelque nombre, en faict quelqu'autre : le produit ſera ſolide.

Soit le nombre compoſé A, lequel multipliant quelque nombre, B faſſe C. Ie dis que C ſera ſolide.

Car puis que A eſt compoſé, quelque autre nombre, outre l'vnité, le meſurera : Donc que D 13. d.

meſure

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

mesure A par E, cela estant, [a] D multipliant E, produira A. Donc puis que B multipliant le mesme A a faict C; C sera produict de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B: Et partant C sera solide, duquel les costez sont D, E, B. Donc si vn nombre compose, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [a] 9. c. f. [17] d.

THEOREME 8. PROP. 8.

Si depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra sont continuellement proportionaux: le troisiesme depuis l'vnité est quarré, & tous les autres qui en laissent vn. Mais le quatriesme est cube, & tous les autres qui en laissent deux, & le septiesme est cube & quarré ensemble: & tous les autres qui en laissent cinq.

Soient, tant de nombres que l'on voudra, depuis l'vnité continuellement proportionaux, sçauoir A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Ie dis que le troisiesme depuis l'vnité, est quarré: Et tous les autres qui en intermettent ou laissent vn, comme sont D, F, H, K, M: mais le quatriesme est cube, & tous les autres qui en laissent deux, comme F, I, M, & le septiesme F, est cube & quarré ensemble, & tous ceux qui en laissent cinq, sçauoir M.

Vnité.

Vnité. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

Car d'autant que l'vnité est à A, comme A à B, l'vnité mesurera A, & A mesurera B egalement : [b] Mais l'vnité mesure A par A, donc A mesurera aussi B par A : [c] donc A multipliant A, produira B, partant B est quarré. b 5. c. f. c 9. c. f.

Or d'autant [d] que B, C, D, sont continuellement proportionaux, & B est quarré : D sera aussi quarré : semblablement, puis que D, E, F, sont continuellement proportionaux, & que D est quarré, F sera aussi quarré, & tous les autres qui en laissent vn. d 22. 8.

Derechef, d'autant que l'vnité est à A, comme B à C, l'vnité mesurera A, & B mesurera C egalement : [e] Mais l'vnité mesure A par A : donc B mesurera C aussi par A. [f] Et partant B multipliant A, produira C. Donc puis que A se multipliant soy-mesme faict B, & multipliant B faict C, [g] C sera cube. e 5. c. f. f 9. c. f. g 17. d. 7.

Mais d'autant que C, D, E, F, sont continuellement proportionaux, & que C premier est cube, F 4. [h] sera aussi cube. Par mesme raison, puis que F, G, H, I, sont continuellement proportionaux, & que F est cube, I sera aussi cube ; & tous les autres qui en laissent deux. h 23. 8.

Finalement d'autant que F 7. depuis l'vnité est monsteré quarré & cube : icelluy sera cube & quarré ensemble, & en la mesme maniere M 7. depuis F, laissant G, H, I, K, L, sera cube & quarré ensemble, & aussi tous les autres qui en laissent cinq. Donc si

depuis l'vnité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 9. PROP. 9.

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy qui suit apres l'vnité soit quarré, aussi tous les autres seront quarrez; Et si celuy qui est apres l'vnité est cube, aussi tous les autres seront cubes.

Soient tant de nombres que l'on voudra depuis l'vnité continuellement proportionaux, A, B, C, D, E, F, & premierement que A, prochain de l'vnité, soit quarré. Ie dis que tous les autres sont quarrez.

Car puis que A, B, C, D, E, F, sont continuellement proportionaux depuis l'vnité, [i] B 3. depuis l'vnité est quarré, & tous les autres qui en laissent vn, sçauoir D & F. Et d'autant que A, B, C, sont

i 8. 9.

Vnité. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

continuellement proportionaux, & que A est quarré par l'hypothese : [k] C 3. sera aussi quarré: Semblablement prenant C, D, E, continuellement proportionaux, puis que C 1. est quarré, E 3. sera aussi quarré: Partant tous les nombres A, B, C, D, E, F, sont quarrez, & ainsi des autres, &c.

k 22. 8.

22. 8.

Maintenant que A, proche de l'vnité soit cube. Ie dis que les autres sont cubes.

Vnité.

Vnité. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

Car d'autant que depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F, ſont continuellement proportionaux, [l] C qua- l d. 8. 9.
trieſme depuis l'vnité eſt cube, & tous les autres qui en laiſſent deux, ſçauoir E. Or que les autres B, D, E, ſoient auſſi cubes, nous le monſtrerons ainſi.

D'autant que l'vnité eſt à A, comme A à B, l'vnité meſurera A, & A le nombre B, egalement: [m] Mais l'vnité meſure A, par le meſme A. Donc A m 5. c. ſ.
meſurera B auſſi par A: [n] Partant A multipliant n 9. c. ſ.
ſoy meſme produira B: [o] mais A eſt cube, donc B o 3. 9.
ſera auſſi cube. Et d'autant que A B C D, ſont continuellement proportionaux, & que A eſt cube, [q] q 23. 8.
auſſi D ſera cube: d'auantage, puis que B, C, D, E, ſont continuellement proportionaux, & que B eſt cube: [r] E ſera auſſi cube: donc A, B, C, D, E, F, ſont r 23. 8.
tous cubes, & ainſi de ſuitte s'il y en auoit d'auantage. Donc ſi depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 10. PROP. 10.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy qui eſt apres l'vnité ne ſoit quarré, auſſi pas vn autre ne ſera quarré, outre le troiſieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en laiſſent vn: Et ſi celuy qui eſt apres l'vnité n'eſt cube, auſſi

aucun autre ne sera cube, outre le quatriesme, depuis l'vnité, & tous les autres qui en laissent deux.

Soient depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux A, B, C, D, E, F, G, H, I, & premierement que A, proche de l'vnité, ne soit quarré. Ie dis qu'aucun autre ne sera quarré excepté B, le 3. depuis l'vnité, & tous les autres qui en laissent vn, sçauoir D, F, H.

Vnité. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

Car si outre ceux-cy, il y en a d'autres quarrez, soit E quarré: [8. 9.] D'autant donc que D est quarré, & que comme D est à E, ou E à F, ainsi A est à B: & en raison conuerse, comme E à D, ou F à E, ainsi B à A; B sera à A, comme le nombre quarré E, au nombre quarré D, ou comme le quarré E, au quarré E: mais B 3. depuis l'vnité est quarré. [8. 9. & 24. 8.] Donc A premier apres l'vnité sera quarré. Ce qui est absurde: car il n'est quarré par l'hypothese: donc E ne sera quarré. Par les mesmes raisons nous monstrerons qu'aucun autre n'est quarré outre les susdits.

Soit maintenant A proche de l'vnité non cube. Ie dis qu'aucun autre n'est cube, outre C, quatriesme depuis l'vnité, & tous ceux qui en laissent deux, [8. 9.] sçauoir F, I. Car si quelqu'autre est cube, que ce soit D: Donc puis que F est cube, & qu'en raison egale, comme D est à F, ainsi A à C, puis que D E F, Et A B C sont en mesme raison, & en raison conuerse; comme F à D, ainsi G à B; C sera A, comme le

le nombre cube F, au nombre cube D. [v] Mais C [4] depuis l'vnité est cube : [x] Donc A 1. apres l'vnité, sera aussi cube. Ce qui est contre l'hypothese donc D n'est pas cube, par les mesmes raisons on monstrera qu'aucun autre, outre les susdits, ne peut estre cube. Partant si depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[v] 8. 9.
[x] 25. 8.

THEOREME 11. PROP. 11.

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux ; le plus petit mesure le plus grand, par quelqu'vn de ceux qui sont entre les nombres proportionaux.

Soient depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, A, B, C, D, E, F, G. Ie dis que chacun moindre mesure chaque plus grand, comme C mesure G, par quelqu'vn des nombres, A, B, C, D, E, F.

Vnité. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

Car d'autant qu'en raison egale ; comme C est à G, ainsi l'vnité est à D : (Car C, D, E, F, G, sont en mesme raison continuë que l'vnité, & A, B, C, D,) [y] l'vnité mesurera D : & C, le nombre G, egalement : [z] Mais l'vnité mesure D, par le mesme D. Donc G mesurera aussi G par D : par mesme raison E mesurera F par A ; puis que comme E est à F, ainsi l'vnité est à A, &c. Ainsi A mesurera G par F, puis

[y] 20. d.
[z] 5. c. s.

qu'en raison egale, comme A est à G, ainsi l'vnité à F, &c. & ainsi de suitte : partant si depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

De ce qui est demonstré cy-dessus, il appert que le plus grand nombre est autant esloigné du plus petit qui le mesure, que le nombre par lequel le plus petit mesure le plus grand l'est de l'vnité ; attendu qu'il y doit auoir mesme raison du plus petit au plus grand que de l'vnité à iceluy, par lequel le plus petit mesure le plus grand, comme il est manifeste par la demonstration.

Vnité 1. *A*, 3. *B*, 9. *C*, 27. *D*, 81. *E*, 243. *F*, 729. *G*, 2187.

Partant B, mesurera F par D, & C mesurera F par C, à sçauoir par soy-mesme, &c. D'autant qu'entre B & F y a trois nombres, & entre l'vnité & D trois aussi : & tant entre C & F, qu'entre l'vnité & C, y a deux nombres interposez.

Derechef, il appert de cecy que chacun de ces nombres multiplié par soy-mesme, produira vn nombre, lequel entre les nombres proportionaux, sera autant esloigné d'iceluy multiplié, que le mesme l'est de l'vnité. Mais si vn nombre en multiplie vn plus grand, le produict sera autant esloigné du plus grand, que le moindre l'est de l'vnité. D'autant que si vn nombre qui mesure vn nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, celuy la lequel il mesure est produict. Donc C multipliant soy mesme produira F, puis que F est autant esloigné de E, que C l'est de l'vnité. 9. c. 1.

l'vnité. Et partant C mesurera F par C, comme nous auons dit: Semblablement B multipliant D, fera le mesme F, d'autant que D mesura F par B, &c. & ainsi des autres.

THEOREME 12. PROP. 12.

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres continuellement proportionaux que l'on voudra, tous les nombres premiers qui mesurent le dernier, les mesmes mesureront aussi celuy qui est proche de l'vnité.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, depuis l'vnité A, B, C, D. Ie dis que tous les nombres premiers qui mesurent le dernier D, les mesmes mesureront aussi A, prochain de l'vnité.

Vnité. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 5.

Car soit E nombre premier, lequel mesure le dernier D. Ie dis que E mesurera aussi A: Car s'il ne le mesure, [a] iceluy E sera premier à A. [a] 31.7.
D'autant donc que A & E sont premiers entr'eux, & A se multipliant soy-mesme faict B, [b] comme il [b] *Sch.* 11.9.
appert: [c] B sera premier à E. Donc puis que A & [c] 27.7.
B sont premiers à E, [d] & C, est produict de A en B, [d] *Sch.* 11.9
[e] C sera premier à E. [e] 26.7.

Derechef, puis que A & C sont pareillement premiers à E, [f] & que D est produict de A en C, [g] [f] *Sch.* 11.9
D sera premier à E: donc E ne mesure D. Ce qui [g] 26.7.
est contre l'hypothese. Donc E mesure A. Partant

si depuis l'vnité il y a tant de nombres continuellement proportionaux &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Partant, aucun nombre premier plus grand que celuy qui est proche de l'vnité, ny aucun moindre, ne mesurant celuy qui est proche de l'vnité ne mesurera le dernier : car s'il le mesuroit, il mesureroit aussi celuy qui est proche de l'vnité, comme il est demonstré. Ce qui est contre l'hypothese.

SCHOLIE.

Hention a copié ainsi cette Proposition de la traduction Françoise.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, autant de nombres premiers mesureront le nombre d'apres l'vnité, qu'il y en aura qui mesureront le dernier.

Ce qui n'est conforme à la demonstration ny au texte d'Euclide, comme s'ensuit. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁπόσοι ἂν ὦσι ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὁπωσοῦν ἄρτιοι ἀριθμοὶ μετρῶσι, καὶ τὸν αὐτῶν τινὰ ὁ ἐγγὺς τῆς μονάδος μετρήσει. *C'est à dire, si depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra sont proportionaux, par quelconques nombres premiers qu'est mesuré le dernier, par les mesmes sera mesuré celuy qui est proche de l'vnité :* ou bien, *tous les nombres premiers qui mesurent le dernier, les mesmes mesureront celuy qui est proche de l'vnité, &c.* non autant, &c.

comme

comme dit Heuvion : Car il s'enſuiuroit, ſelon ſon dire, que ſi quelques nombres premiers meſurent le dernier, qu'aucuns d'autres nombres premiers, (car autant peuuent n'eſtre pas les meſmes) quels qu'ils ſoient, meſureront celuy qui eſt proche de l'vnité, ce qui eſt faux ; Mais les meſmes ſeulement qui meſurent le dernier, meſureront celuy qui eſt proche de l'vnité, comme dit Euclide, & comme il eſt demonſtré.

THEOREME 13. PROP. 13.

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy d'apres l'vnité ſoit premier : aucun autre ne meſurera le plus grand, outre ceux qui ſont entre les proportionaux.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité A B C D, dont A proche de l'vnité, ſoit premier. Ie dis qu'aucun autre nombre ne meſurera D plus grand, outre A, B, C.

Vnité. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
H---- G---- F---- E----

Car que quelqu'autre comme E, meſure D, s'il eſt poſſible, E ſera premier ou compoſé : ſi premier, & meſurant D extreme, il meſurera auſſi A premier, proche de l'vnité : ce qui eſt abſurde, donc E n'eſt premier : mais compoſé, [i] & partant meſuré par quelque nombre premier, qui

12. 9.

[i] 33. 7.

ne peut eſtre autre que A : car E meſurant D, tout nombre premier meſurant E, meſurera auſſi D;
k 12.9. mais meſurant D plus grand, k il meſurera auſſi A premier, proche de l'vnité, ce qui eſt abſurde. Donc autre nombre premier que A ne meſure E:
l *Sch.* 11.9. Donc que A meſure E par F. l Donc A multipliant
m 17.7. F faict E, D : m Et partant E ſera à D, comme F à C. Parquoy E meſurant D; F meſurera C, & ſemblablement on monſtrera que F n'eſt premier ; mais compoſé, lequel ſera demonſtré comme auparauant eſtre ſeulement meſuré par A premier.

Vnité. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
H--- G--- F--- E---

n *Sch.* 11.9. Que A meſure donc F par G : n Donc A multi-
o 17.7. pliant G, B, produict F, C, o parquoy F ſera à C; comme G à B ; mais F meſure C, donc G meſure auſſi B.
p 12.9. Derechef, ſi G eſt premier meſurant B : p il meſurera auſſi A premier, ce qui eſt abſurde. Don G eſt compoſé, lequel ſera ſeulement meſuré par A, comme il a eſté demonſtré de E. Que A
q *Sch.* 11.9. meſure donc G par H, parquoy A q multipliant A
17. 7. H, fera B, G. Donc comme G à B, ainſi H à A ; mais G meſure B, donc H meſurera auſſi A premier, parquoy H eſt egal au meſme A.

Mais A eſt moyen proportionel entre H & G,
r 20.7. r puis que B, produict des extremes G H, eſt egal au meſme B, quarré de A moyen. Ce qui eſt impoſſible : partant aucun nombre ne meſurera D
s 11.9. plus grand, outre A B C, deſquels le moindre meſure touſiours le plus grand. Donc ſi depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THE

THEOREME 14. PROP. 14.

Le plus petit nombre mesuré par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que par ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A, le plus petit nombre, que peuuent mesurer les nombres premiers B, C, D. Ie dis qu'aucun autre nombre premier, outre B, C, D ne mesure A.

Car, s'il est possible, que E, nombre premier, different de B, C, D, mesure A par F. D'autant que E, mesure A
par F, [t] E, A, 30. B, 2. C, 3. D, 5. t 9. e. s.
multipliant E--- F---
F, fera A, [v] v 32. 7.

Parquoy chacun des nombres B, C, D, mesurera l'vn des deux E, F. Ils ne mesureront pas E premier autre qu'iceux. Donc F, qui est plus petit que A, ce qui est absurde : Car A est posé le plus petit qui puisse estre mesuré par les nombres B, C, D, premiers. Donc le plus petit nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Demonstration en nombres, des dix premiers Theoremes qu'Euclide a demonstrez en lignes au second liure, par Barlaam Moyne.

THEO

THEOREME I.

Si deux nombres sont proposez, l'vn desquels soit diuisé en tant de nombres que l'on voudra, le nombre plan faict des deux nombres proposez au commencement, est egal aux nombres plans, faits du nombre non diuisé, & de chacune des parties du nombre diuisé.

Soient deux nombres A B, & C, desquels A B, soit diuisé en A D, D E, E B; & soit F produict de C, en A B: & G H, de C, en A D, & H I, de C, en D E, & I K, de C, en E B. Ie dis que F, est egal à G H, H I, I K, c'est à dire à tout G K, composé des trois.

A...3 D..2.E.B C..2.
F.....12.
G.....6 H....4 I..2 K

7. def. Car puis que C, multipliant A B, à faict F, A B, mesurera F par C: c'est à dire A B, sera partie de F, denommée de C: Semblablement A D, sera partie de G H, & D E, de H I, & E B, de I K, denommée de C, sçauoir mesme partie que A B, de F. Mais par ce qui est demonstré à la 5. Proposition du 7. liure: le tout A B, estant mesme partie du tout G K, que A D, de G H; le tout A B, sera aussi mesme partie du tout G K, que A B, de F: Partant 4.c.l. F & G K, sont egaux. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO

THEOREME II.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, les deux nombres plans qui ſont faicts du tout, & d'vne chacune partie, ſont egaux enſemble, au quarré faict du tout.

Soit A B, diuiſé en A C, C B. Ie dis que les nombres produicts du tout A B, par A C, C B, parties d'iceluy, ſont egaux enſemble au nombre quarré du tout A B. Car ſoit pris D, egal à A B, & le nombre faict de D, c'eſt à dire de A B, en A B, ſçauoir le quarré de A B, ſera egal aux nombres faicts de D, c'eſt à dire de A B, en A C, & en C B: Ce qui eſt propoſé.

D.....6.
A....4 C..2 B
2 1. *Theor.* *Sch.* 14. 9.

Que ſi A B, eſt diuiſé en plus de deux parties, A C, C D, D B. Il ſera demonſtré en la meſme maniere. Car ſemblablement le nombre faict de E, c'eſt à dire de A B, en A B, ſçauoir le quarré de A B, eſt egal aux nombres faicts de E, c'eſt à dire de A B, en chacune partie, A C, C D, D B.

E.....6.
A...3 C..2 D B

THEOREME III.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties: le nombre plan faict du tout, & d'vne des parties, eſt egal au plan qui eſt faict des parties, & au quarré faict de la partie premierement priſe.

Soit

Soit A B, diuisé en A C, C B. Ie dis que le nombre produict du tout A B, en la partie A C, est egal au contenu sous les parties A C, C B, & au quarré de la dicte partie A C.

D....4
A....4 C.....4 B

Car ayant pris le nombre D, egal à la partie A C: a le nombre fait de D, c'est à dire de A C, en A B, (ou ce qui est le mesme) de A B, en A C, est egal aux nombres faicts de D: c'est à dire de A C, en C B, & de D, c'est à dire de A C, en A C, c'est à dire au quarré de A C. Ce qui est proposé.

a 1. *Theor. Sch.* 14. 9.

THEOREME IV.

Si vn nombre est diuisé en deux nombres: le quarré faict du tout, est egal aux quarrez faicts des parties, & à deux fois le nombre plan contenu sous icelles parties.

Soit A B, diuisé en A C, C B. Ie dis que le nombre quarré faict de A B, est egal aux quarrez des parties A C, C B, & à deux fois le nombre faict de la partie A C, en la partie C B. b Car le nombre quarré de A B, est egal aux nombres faicts de A B, en A C, & en C B. Mais le nombre faict de A B, en

A.....C....B

c A C, est egal au nombre produict de A C, en C B, auec le quarré de A C. Semblablement le nombre faict de A B, en C B, est de mesme egal au nombre produict de A C, en C B, auec le quarré de C B. Donc le nombre quarré faict de A B, est egal aux nombres quarrez des parties A C, C B, auec deux

b 2. *Theor. Sch.* 14. 9.

c 3. *Theor. Sch.* 14. 9.

fois

fois le nombre faict de A C, en C B. Ce qui estoit proposé.

THEOREME V.

Si vn nombre pair est diuisé en deux parties egales, & en deux inegales, le nombre plan contenu sous les parties inegales, auec le nombre quarré, du nombre moyen entre les deux sections, est egal au quarré qui est produict de la moitié du nombre.

Soit A B, nombre pair diuisé en deux parties egales A C, C B : & en deux inegales A D, D B. Ie dis que le nombre contenu sous les parties inegales du tout A D, D B, auec le quarré du nombre moyen C D, (qui est l'excez entre la moitié A C, ou C B, & l'vne ou l'autre des parties inegales A D, D B) est egal au quarré faict de la moitié C B.

Car le nombre q. de C B, *d* estant egal au q. des parties C D, D B, & à deux fois le nombre plan contenu sous C D, D B : mais le nombre de C B, en D B, *e* estant faict egal au nombre contenu sous C D, D B, vne fois, & au q. de D B : si on prend ce nombre de C B, en D B, pour le q. de D B, & le nombre faict de C D, en D B,

le nombre q. de C B, estant 8
aussi egal au q. restant de A.....5. C...3 D..2 B
C D, & à l'autre nombre fait
de C D, D B, vne fois, & au nombre C B, c'est à dire au nombre produict de A C, en D B. *f* Mais le nombre fait du tout A D, en D B, est egal aux nombre faicts de C D, en D B, & de A C, en D B. Donc le q. de C B, sera egal au q. de C D, & au

d 4. *Theor.*
e 3. *Theor.*
f 1. *Theor. preced.*

nombre

nombre faict de A D, en D B : c'eſt à dire le nombre faict de A D, en D B, auec le q. de C D, ſera egal au q. de C B. Ce qui eſt propoſé.

THEOREME VI.

Si vn nombre pair eſt diuiſé en deux parties egales, & qu'on luy adiouſte quelqu'autre nombre, le nombre faict du tout auec l'adiouſté, & l'adiouſté, auec le quarré de la moitié du nombre, eſt egal au quarré du nombre compoſé de la moitié & de l'adiouſté.

Car que A B, ſoit diuiſé egalement en A C, C B, & ſoit adiouſté à iceluy B D. Ie dis que le produict du tout A B, & de l'adiouſté B D, comme d'vn, c'eſt à dire de A D, en D B, adiouſté, auec le q. de la moitié C B, eſt egal au q. faict de C B, moitié, & de l'adiouſté B D, comme d'vn, c'eſt à dire au q. de C D.

g 4. *Theor. Sch.* 9. 14. Car g le q. de C D, eſtant egal aux deux quarrez des parties C B, B D, & au nombre contenu ſous C B, B D, deux fois, à ſçauoir aux quarrez des parties C B, B D, & au nombre contenu ſous C B, B D, & A C, B D. Mais le nombre faict de A D, h en B D, eſtant egal aux nombres contenus ſous C B, B D, & ſous A C, B D, & ſous B C, B D, c'eſt à dire au q. de B D ; ſi on prend ce nombre faict de A D, en B D, pour le q. de la partie B D, auec les nombres faicts de C B, en B D, & de A C, en B D, le q. de C D, ſera auſſi egal à l'autre q. de C B, & au nombre faict de A D, en B D ; c'eſt à dire, le nombre faict de A D, en B D,

h 1. *Theor. Sch.* 9. 14.

A....4 C.... B..2 D

auec

auec le quarré de C B, eſt egal au quarré de C D. Ce qui eſt propoſé.

THEOREME VII.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, le quarré du tout, auec le quarré de l'vne des parties eſt egal à deux fois le nombre faict du tout en ladite partie, & au quarré de l'autre partie.

Soit A B, diuiſé en deux A C, C B. Ie dis que le q. du tout A B, auec le q. de C B, eſt egal à deux fois le nombre, faict du tout A B, en ladite partie C B, & au q. de l'autre partie A C.

Car le q. du tout A B, eſtant egal aux quarrez des parties A C, C B, & [k] à deux fois le nombre faict de A C, en C B, ſi le q. de C B commun, eſt adiouſté, les quarrez de A B, C B, enſemble, ſeront egaux aux trois quarrez de A C, C B, & C B, & à deux fois le nombre faict de A C, en C B: mais le nombre faict de A B, en C B, eſt egal au [l] nombre faict de A C, en C B, & au q. de C B: & partant deux fois le nombre faict de A B, en C B, eſt egal à deux fois le nombre faict de A C, en C B, & à deux fois le q. de C B. Donc ſi au lieu du nombre qui eſt faict deux fois de A C, en C B, auec deux fois le q. de C B, on prend le nombre faict de A B, en C B, deux fois, les quarrez des nombres A B, C B, enſemble ſont egaux à deux fois le nombre faict de A B, en C B, & au q. de l'autre partie A C. Ce qui eſt propoſé.

8
A.....5 C...3 B

[k] 4. *Theor. preced.*

[l] 3. *Theor. preced.*

T. THEO

THEOREME VIII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties, quatre fois le nombre plan faict du tout en vne partie, auec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

Soit A B diuisé en A C, C B. Ie dis que le nombre plan, faict quatre fois du tout A B, en la partie C B, auec le q. de l'autre partie A C, est egal au q. du nombre composé du tout A B, & de la partie premierement dicte C B.

Car soit posé B D, egal à ladite partie C B: le q. du tout A D, composé de A B, & B D, ou de ladite partie C B, [m] estant egal aux quarrez des nombres A B, B D, & à deux fois le nombre faict de A B, en B D, c'est à dire aux quarrez de A B, C B, & à deux fois le nombre de A B, en C B, & les quarrez de A B, C B, ensemble [n] estans egaux à deux fois le nombre contenu sous A B, C B, & au q. de A C: Si au lieu des quarrez de A B, C B, on prend deux fois le nombre fait de A B, en C B, auec le quarré de A C: le quarré faict de A D, sera egal au nombre fait de A B, en C B, quatre fois, & au q. de l'autre partie A B, Ce qui est proposé.

A ... C ... B ... D

[m] 1. *Theor. preced.*

[n] 7. *Theor. preced.*

THEO

THEOREME IX.

Si vn nombre pair est diuisé en deux parties egales, & en deux inegales : les quarrez des parties inegales ensemble, sont doubles des quarrez ensemble, faicts de la moitié du nombre, & de la section du milieu.

Soit diuisé A B, en parties egales A C, C B, & en non egales A D, D B. Ie dis que les quarrez des parties inegales A D, D B, sont doubles des quarrez de A C moitié, & C D nombre moyen (qui est l'excez entre la moitié A C, ou C B, & l'vne ou l'autre des parties inegales A D, D B.) Car puis que le q. du nombre A D, o est egal aux quarrez de A C, C D, & a deux fois le nombre de A C, en C D : si on adiouste le commun q. de la partie D B, les quarrez des parties A D, D B, seront egaux aux quarrez des parties A C, C D, D B, & à deux fois le nombre fait de A C, c'est à dire de C B, en C D : Mais les quarrez faicts de C B, c'est à dire de A C, & C D, p sont egaux au quarré de D B, & à deux fois le nombre fait de C B, en C D. Donc si au lieu du quarré de D B, auec le produit de C B, en C D, deux fois, on prend les quarrez de A C, C D : les quarrez des parties A D, D B, seront egaux à deux fois les quarrez des parties, A C, C D : & partant les quarrez des parties A D, D B, seront doubles des quarrez faicts des parties A C, C D. Ce qui est proposé.

o 4. Theor. prec.

A.....5 C..3 D..B

p 7. Theor. prec.

THEOREME X.

Si vn nombre pair est diuisé en deux parties egales, & qu'on luy en adiouste quelqu'autre : le quarré du nombre, composé du tout & de l'adiousté, & le quarré de l'adiousté ensemble sont doubles, du quarré faict de la moitié, & de celuy qui est faict du nombre composé de la moitié & de l'adiousté.

Soit A B, nombre pair, diuisé en deux parties egales A C, C B, & à iceluy A B, soit adiousté B D. Ie dis que le q. de A D, composé de tout A B, & de l'adiousté B D, & le q. du nombre adiousté B D, les deux ensemble sont doubles des quarrez de A C, moitié, & de C D, composé de C B, B D, moitié & adiousté.

q 4. *Theor. prec.* Car le q. de A D, q estant egal aux quarrez des parties A C, C D, & à deux fois le nombre plan de A C, c'est à dire de C B, en C D, si on adiouste la commun q. de B D : les quarrez de A D, B D, seront egaux aux quarrez des parties A C, C D, B D, & à deux fois le nombre plan de C B, en C D. Mais les

r 7. *Theor. prec.* quarrez de C B, C D, r sont egaux au q. de B D, & à deux fois le nombre plan de C B, en C D : & le q. de A C, est egal au q. de C B. Donc si au lieu du q. de B D, & de deux fois le nombre plan de C B, en C D, on prend les quarrez des nombres de C B, C D : c'est à dire de A C,

A....4 C....4 B..2 D

C D,

C D, les quarrez de A D, B D, seront egaux aux quarrez de A C, C D, deux fois. Parquoy les quarrez de A D, B D, seront doubles des quarrez de A C, C D. Ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

Il faut icy entendre qu'au 5. 6. & 9. & 10. Theoremes, la demonstration ne se pourra faire, si les nombres proposez ne sont pairs (ce que nous auons obserué au texte, disant. *Si vn nombre pair est diuisé en deux parties egales, &c.*) D'autant que selon Euclide, tout nombre impair ne se peut diuiser egalement, comme il appert de cette 6. & 7. Definition d'Euclide.

Ἄρτιός δέ ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος: Le nombre pair est celuy qui se diuise en deux egalement: περισσὸς δέ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ: Mais le nombre impair est celuy qui ne se diuise en deux egalement, ou qui differe du nombre pair de l'vnité. Ce que n'a pas obserué Clauius, qui a aussi pris ces 10 Theoremes de Barlaam Moyne; encore que ledit Clauius dise les auoir inuentez, comme il appert de ce qu'il dit. *Quod idem & Barlaam Monachum fecisse, à nonnullis est traditum.* Ce qui est faux neantmoins, attendu que si Clauius les eust faicts de luy-mesme, sans les prendre d'aucun, il eust bien recogneu que les 5. 6. 9. & 10. que nous auons alleguez, ne se peuuent faire qu'aux nombres pairs: Ce qu'a fort bien obserué ledit Moyne Barlaam; les autres qui ont traduict de Clauius ont fait les mesmes fautes.

Nous aduertirons encore icy le Lecteur, que ces 10. Theoremes ſe pourront encore plus facilement entendre par nos figures diuiſées en parties egales, que nous auons miſes au ſecond liure.

Or le Theoreme qui reſpond à la enziesme Propoſition du ſecond liure à ſçauoir: Diuiſer vn nombre en telle ſorte, que le nombre plan fait du tout, & de l'vne des parties, ſoit egal au nombre quarré de l'autre partie, *ne ſe peut faire par les nombres, ce qui ſera ainſi demonſtré. Car (s'il eſt poſſible) ſoit diuiſé AB, en AC, CB, en ſorte que le nombre plan fait du tout AB, en la partie CB, ſoit egal au quarré de l'autre partie AC. Donc quatre fois le nombre fait de AB, en CB, ſera quadruple du quarré de AC, parant quatre fois le nombre plan de AB, en CB, auec le quarré de AC, ſera quintuple du quarré de la partie AC. Mais quatre fois le nombre plan de AB, en CB, auec le quarré de AC, eſt quarré (eſtant egal au quarré fait du nombre compoſé de AB, & de CB: Donc les deux nombres quarrez (ſçauoir celuy qui eſt fait de AB, en CB, quatre fois auec le quarré de AC; Et le quarré AC,) ont meſme raiſon que 5. à 1. ou 25. à 5. Ce qui eſt abſurde: Donc le nombre AB, ne peut eſtre diuiſé, en ſorte que le nombre plan fait du tout en vne des parties, ſoit egal au quarré de l'autre partie. Ce qui eſtoit propoſé.*

A-----C----B

1 Theor. 8. prec.

Coroll. 24. 8.

THEO

THEOREME 15. PROP. 15.

Si trois nombres sont continuellement proportionaux, & les plus petits de tous deux qui ont la mesme raison auec iceux. Le composé de deux tels qu'on voudra d'iceux, sera premier au restant.

Soient trois nombres A B C, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux. Ie dis que le composé de deux quels qu'on voudra d'iceux, comme de A & B, est premier à C restant, & le composé de B C, premier à A, & de A C, premier à B.

Car ayant [t] pris D E, les plus petits en la mesme raison, il appert par la demonstration de la 2. Prop. 8. que A est q. de D, & C q. de E, & B, produit de D en E. [v] Et le composé de D E, multiplié par D, produira vn nombre egal au composé de A B: [x] Mais D E, estans premiers entr'eux, [y] le composé d'iceux sera premier à E, [z] & partant aussi premier à C, quarré de E, & par la mesme raison D, sera premier à C, & le nombre produit du composé de D E, multiplié par D, sera aussi premier à C, lequel produit est monstré egal au composé de A B: donc le composé de A B, est premier à C.

t *Sch.* 35. 7.
v *Theor.* 3. *Sch.* 14. 9.
A, 9. B, 12. C, 16.
D, 3. E, 4.
x 2 47.
y 30. 7.
z 27. 7. 26. 7.

Derechef, le composé de D E, estant premier tant à D, qu'à E, le produict d'iceluy composé, multiplié par E, sera aussi premier à D: mais le mesme produict est egal à C, quarré de E, & à B,

a *Theor.* 3. *Sch.* 14. 9.

ensemble produict de D en E : donc le composé de
b 27.7. B C, sera aussi premier à D.[b] Et partant premier à A, quarré de D.

c 24.7. Finalement, [c] puis que D E sont premiers entr'eux,
d 30.7. [l] & premiers à leur composé, B produict
e 26.7. d'iceux,[e] sera aussi premier à leur composé.[f] Et le
f 27.7. produict du composé de D E, multiplié par luy
g *Theor.* 4. mesme sera premier à B : [g] Mais le mesme produict
Sch. 14.9. est egal à A & C, & à deux fois B, ensemble, donc
10. *c. f.* le composé de A & C, & de deux fois B, est premier à B : ostant donc deux fois B, le reste composé de A C, sera premier à B. Car s'il n'estoit ainsi, ils seroient composez entr'eux, & leur commune mesure mesurant le composé de A C, & B, mesureroit aussi le composé de A C, & de deux fois B. Parquoy le composé de A C, & de deux fois B, ne seroit premier à B, ce qui est absurde, estans demonstrez premiers entr'eux. Partant le composé de A C, est premier à B. Donc si trois nombres sont, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 16. PROP. 16.

Si deux nombres sont premiers entr'eux : comme le premier est au second, ainsi le second ne sera pas à quelqu'autre.

Soient A & B premiers entr'eux. Ie dis que comme A est à B, ainsi B n'est à vn autre : c'est à dire qu'à deux nombres premiers, il n'y a point de troisiesme proportionel.

Car, s'il est possible, comme A est à B, qu'ainsi B soit à vn autre, sçauoir à C.

D'autant

D'autant que A & B, ſont premiers entr'eux, A, 5. B, 7. C---- [b] & les plus petits qui ſoient en la meſme raiſon : Ils meſureront egalement B & C en la meſme raiſon : ſçauoir A meſurera B, & B meſurera C : mais A ſe meſure auſſi ſoy-meſme. Donc A, meſurera A & B, premiers entr'eux, ce qui eſt abſurde. Donc comme A eſt à B, ainſi B n'eſt à C. h 23.7. i 21.7.

Semblablement, comme B eſt à A, ainſi A ne ſera à quelqu'autre. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 17. PROP. 17.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux ; & que les extremes ſoient premiers entr'eux, comme le premier ſera au ſecond, ainſi le dernier ne ſera à quelqu'autre.

Soient continuellement proportionaux tant de nombres que l'on voudra A B C D, deſquels les extremes A D, ſont premiers entr'eux. Ie dis que comme A eſt à B, ainſi D ne ſera à quelqu'autre.

Car s'il n'eſt ainſi, comme A eſt à B, qu'ainſi D ſoit à quelqu'autre, à ſçauoir à E: A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E---- D'autant donc que comme A eſt à B, ainſi D à E, en permutant comme A à D, ainſi B à E. Mais A, D eſtans premiers

k 23.7. miers entr'eux,[k] ſont les plus petits de leur raiſon:
l 21.7. [l] Donc ils meſureront B & E egalement, ſçauoir A, meſurera B, & D meſurera E. Mais comme A eſt à B, ainſi B eſt à C: donc puis que A meſure B, auſſi
m 11.c.f. B meſurera C: [m] & partant A meſurera auſſi C: & d'autant que comme B eſt à C, ainſi C à D: mais B meſure C, auſſi C meſurera D: Parquoy
n 11.c.f. A meſurant C, [n] meſurera pareillement D, & A meſuré auſſi ſoy-meſme: Donc A, meſure A & D premiers entr'eux; ce qui eſt impoſſible, donc comme A eſt à B, ainſi D n'eſt à quelqu'autre, ſçauoir à E. Semblablement comme D eſt à C, ainſi A n'eſt à vn autre: partant s'il y a, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBLEME 1. PROP. 18.

Deux nombres eſtans donnez; conſiderer, s'il eſt poſſible de trouuer vn troiſieſme proportionel à iceux.

Soient les deux nombres A & B, donnez, il faut conſiderer ſi l'on peut trouuer vn troiſieſme proportionel à iceux: car ou les nombres A & B ſont
o 16.9. premiers entr'eux, ou non: ſi premiers, [o] il ne ſe peut trouuer de troiſieſme proportionel. S'ils ne ſont premiers que

B, multipliant ſoy-meſme, faſſe C, ou — A, 4. B, 7.
A meſure C, ou — A, 4. B, 6. D, 9. C, 36.

non: s'il le meſure, ſoit par D. Ie dis qu'il ſe peut trouuer vn troiſieſme proportionel qui eſt D.
p 9.c.f. Car puis que A meſure C par C, [p] C ſera le produit

produit de A par D: mais le meſme C eſt produit de B par ſoy-meſme. Donc C, contenu ſous les extremes A & D, eſt egal au produit du milieu B, multiplié par ſoy-meſme, q donc les trois A, B, D, q 20.7. ſont continuellement proportionaux, ſçauoir comme A à B, ainſi B à D: Donc D ſera le troiſieſme proportionel.

Mais ſi A ne meſure C. Ie dis que l'on ne pourra trouuer vn troiſieſme proportionel.

Car s'il n'eſt ainſi, ſoit D, troiſieſme proportionel. D'autant que comme A eſt à B, ainſi B à D, le nombre produict de A & D extremes ſera egal A,6. B,4. D,00. C,16. 20.7. au produict B, moyen multiplié par ſoy-meſme: c'eſt à dire à C. Donc puis que C eſt fait de A par D: r A meſurera C r 7. c. f. par D: ce qui eſt abſurde, eſtant poſé ne le meſurer. Donc on ne peut trouuer vn troiſieſme proportionel à A & B, puis que A premier, ne meſure C, produict de B ſecond, par ſoy-meſme, &c. Donc deux nombres eſtans donnez, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 2. PROP. 19.

Trois nombres eſtans donnez, conſiderer, s'il eſt poſſible, d'en trouuer vn quatrieſme, proportionel à iceux.

Soient les trois nombres donnez A, B, C, continuellement proportionaux ou non: ſçauoir ſi on peut trouuer vn quatrieſme proportionel, c'eſt à dire, comme A eſt à B, ainſi C eſt à vn autre.

Que

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

Que B multipliant C, faſſe D, A meſurera D ou non : qu'il le meſure par E. Ie dis que E eſt le 4. proportionel.

f 9. c. ſ. Car puis que A meſure D par E, f D ſera le produict de A par E : mais D eſt auſſi produict de B par C, par la conſtruction. Donc le produict des extremes A & E, eſt egal au produict des moyens

t 19. 7. B, C. t Donc comme A à B, ainſi C à E.

Mais ſi A ne meſure D. Ie dis que l'on ne pourra trouuer vn quatrieſme proportionel : car autrement ſoit E, quatrieſme proportionel, s'il eſt poſſible. D'autant donc que les quatre nombres A, B, C, E, ſont

A, 4. B, 6. C, 9. E.... D, 54.
A, 3. B, 14. C, 10. E.... D, 40.

v 19. 7. continuellement proportionaux, v le nombre contenu ſous les extremes A & E, ſera egal au nombre contenu ſous les moyens B C, ſçauoir à D. Donc puis que D eſt faict de A, multiplié par E,

x 7. c. ſ. x iceluy A meſurera D par E, contre l'hypotheſe : ſemblablement nous examinerons ſi comme A eſt à B, ainſi C eſt à vn autre : donc trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 18. PROP. 20.

Les nombres premiers ſont en plus grande multitude, que quelconque multitude de nombres premiers propoſez.

C'eſt

C'eſt à dire, que ſi on propoſe tant de nombres premiers que l'on voudra, il s'en trouuera encore d'autres.

Soient tant de nombres premiers propoſez que l'on voudra A, B, C. Ie dis qu'il y a encore d'autres nombres premiers : Car [y] ayant pris D, le plus petit que peuuent meſurer A, B, C, & qu'on luy adiouſte l'vnité E F, le tout D F, eſt premier ou non : s'il eſt premier, l'on a le requis : car A, B, C, & D, F, ſont en plus grand nombre que la multitude propoſée, A, B, C.

y 38. 9.

A, 2. B, 3. C, 5.
30. 1.
D ----- E F

Mais ſi D F n'eſt premier, [z] il ſera meſuré par quelque nombre premier, ſoit par G. Ie dis que G, n'eſt pas vn des nombres propoſez A, B, C : car s'il eſtoit vn d'iceux, puis que A, B, C, meſurent D E ; G meſureroit auſſi D E. Donc meſurant le tout D F, & le retranché D E, il meſureroit auſſi le reſtant E F, ſçauoir vn nombre, l'vnité, ce qui eſt impoſſible.

z 33. 7.

A, 3. B, 5. C, 7.
105. 1.
D----- E F
35
G----- 12. c. ſ.

Donc G premier, n'eſt vn des propoſez A, B, C : partant A, B, C, G, premiers, ſont en plus grand nombre que les propoſez A, B, C, & ainſi à l'infiny l'on pourra trouuer d'autres nombres premiers. Donc les nombres premiers, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO

THEOREME 19. PROP. 21.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra sont adiouſtez, le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres pairs que l'on voudra A B, B C, C D. Ie dis que tout le composé A D, eſt pair.

Car d'autant * que tout nombre pair peut eſtre diuiſé en deux parties égales, les moitiez de A B, B C, C D, ſeront la moitié du tout A D: mais toutes les moitiez enſemble ſont egales à toutes les autres moitiez enſemble, partant A D, eſt pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

* 6. 7.

6 4 8
A....., B.... C.....D

THEOREME 20. PROP. 22.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra, ſont adiouſtez; & que la multitude d'iceux ſoit pair: le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres impairs que l'on voudra; deſquels la multitude A B, B C, C D, D E, ſoit pair. Ie dis que le tout eſt pair.

Car puis que A B, B C, C D, D E, ſont impairs, vn chacun ſera different du nombre pair de l'vnité, ſelon la defini-

3 5 7 9
A... B..... C..... D..... E
24

tion. Parquoy si d'vn chacun l'on retranche l'vnité, vn chacun des restans sera pair : [b] partant le composé d'iceux sera pair : Mais la multitude des vnitez retranchées est aussi pair. [c] Donc le tout composé A E, sera pareillement pair. Partant si tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. b 21.9. c 21.9.

THEOREME 21. PROP. 23.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra sont adioustez, & que la multitude d'iceux soit impair : le tout sera aussi impair.

Soient adioustez tant de nombres impairs que l'on voudra, desquels la multitude, comme A B, B C, C D, est impair. Ie dis que le tout composé A D, est impair.

Car puis que le nombre impair differe du nombre pair de l'vnité par la definition : ayant retranché l'vnité E D, du nombre impair C D, le reste C E sera pair. [d] Mais d 22. 9.

A C, composé des 3 5 7
impairs A B, B C, A... B..... C..... E.D
pairs en multitude, 15
est pair : [e] Donc aussi e 21.9.

A E, composé des pairs A C, C E, sera pair. Partant si l'on adiouste l'vnité E D, le tout A D sera impair, puis que l'impair differe du pair de l'vnité par la definition. Donc si tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO

THEOREME 22. PROP. 24.

Si d'vn nombre pair l'on retranche vn nombre pair, le reste sera aussi pair.

Du nombre pair A B, soit retranché le nombre pair C B. Ie dis que le restant A C, est aussi pair.

Car si A C n'est pair, soit retranchée l'vnité A D, le reste D C demeurera pair (puis que le nombre impair differe du nombre pair de l'vnité.)



f 21.9. f Partant le composé D B sera pair : Donc adioustant l'vnité A D, au composé D B, pair, le tout A B, sera impair : ce qui est impossible, car il est pair par l'hypothese. Donc A C, ne sera impair.

THEOREME 23. PROP. 25.

Si d'vn nombre pair l'on retranche vn nombre impair, le reste sera aussi impair.

De A B, nombre pair, soit retranché C B, impair. Ie dis que le reste A C, sera impair. Car de C B, ayant retranché l'vnité C D, le reste D B, sera pair. Donc d'autant que le tout A B est posé pair, le reste A D sera pair. Ayant donc osté l'vnité C D, le restant A C sera impair. Donc si d'vn nombre pair l'on oste vn, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



g 24.9.

THEO

THEOREME 24. PROP. 26.

Si d'vn nombre impair l'on retranche vn nombre impair, le reste sera pair.

Du nombre impair A B, soit retranché le nombre impair C B. Ie dis que le reste A C est pair.

Car ayant retranché l'vnité des nombres impairs A B, C B : les restans A D, C D, seront pairs. D'autant donc que du nombre pair A D, le nombre pair G D, est retranché : le reste A C, sera pair : donc si d'vn nombre impair, on retranche vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

4 6 1
A ... C ..... D. B

[a] 24. 9.

THEOREME 25. PROP. 27.

Si d'vn nombre impair l'on retranche vn nombre pair, le reste sera impair.

Soit A B, nombre impair, duquel soit retranché le pair C B. Ie dis que le restant A C, est impair: car de l'impair A B, soit retranché l'vnité A D : le reste D B, sera pair : duquel C B, pair estant retranché, le reste D C, sera aussi pair : Partant l'vnité A D, adiouſtée, A C, sera impair.

1 4 6
A D ... C ..... B

[i] 24. 9.

Donc si d'vn nombre impair l'on, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 26. PROP. 28.

Si vn nombre impair multipliant vn nombre pair, en faict quelqu'vn : le produict sera pair.

Soit le nombre A impair, lequel multipliant B nombre pair, faisse C. Ie dis que C est pair: Car puis que C est produict de A par B : iceluy C, sera composé d'autant de nombres egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A.

A..... 3
B..... 4
C..... 12

Mais B est pair : donc C sera composé d'autant de nombres pairs egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A, & partant [k] C sera pair. Donc si vn nombre impair multipliant, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

k 21. 9.

SCHOLIE.

Semblablement si vn nombre pair multiplie vn nombre pair, le produict sera pair. Car derechef C sera composé d'autant de nombres pairs egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A, &c. figure suiuante.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit aussi qu'vn nombre pair multiplié par soy-mesme, produira vn nombre pair, comme il est manifeste, si on pose les nombres pairs A & B egaux.

A..... 4
B..... 4
C..... 16

THEO

THEOREME 27. PROP. 29.

Si vn nombre impair multipliant vn nombre impair, en faict quelqu'vn, le produict ſera impair.

Soit faict le nombre C, de A, impair, multipliant B impair. Ie dis que C eſt impair.

Car puis que C eſt produict de A en B, iceluy C ſera compoſé d'autant de nombres egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A. Partant, puis que tant A que B eſt nombre impair; C ſera compoſé d'autant de nombres impairs, egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A, nombre impair, parquoy la multitude d'iceux ſera impair.

3 5
A... B.....
15
C.....

Donc C ſera nombre impair: partant ſi vn nombre impair. Ce qu'il falloit demonſtrer. 1 23. 9.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cecy qu'vn nombre impair multiplié par ſoy-meſme, produict vn nombre impair: comme il eſt manifeſte, ſi les nombres impairs A & B ſont poſez egaux.

3 3
A... B...
C.....
9

SCHOLIE.

Campanus a auſſi demonſtré les deux Theoremes ſuivans,

Vn nombre impair mesurant vn nombre pair, il le mesure par vn nombre pair.

Que le nombre A impair, mesure le nombre pair B, par C. Ie dis que C est pair.

m 29. 9. *Car si C est impair, B m produit de A impair, par C, pair, sera impair: ce qui est absurde, car il est pair par l'hypothese. Donc C est pair.*

3 4
A ... C ....
12
B .....

Vn nombre impair mesurant vn nombre impair: il le mesure par vn nombre impair.

Que le nombre A impair, mesure le nombre impair B, par C. Ie dis que C est impair: car si C est

n 28. 9. *pair 33 n B produit de A impair par C pair, sera A, 3. C, 5. B, 15. pair; ce qui est absurde, puis que B est posé impair. Donc C est impair.*

THEOREME 28. PROP. 30.

Si vn nombre impair mesure vn nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre A impair, lequel mesure B, nombre pair. Ie dis que A mesurera aussi la moitié de B.

Car que A mesure B par C, par la Proposition antecedente, demonst. de Camp. le nombre C sera pair.

pair. Et partant aura vne moitié. Parquoy puis que A mesure B par G: ° C mesurera aussi B par A : & par ainsi C, sera vne partie de B, dénommée de A, comme il est enseigné à la 3. Definition du 7. liure. Mais d'autant que comme C est à sa moitié, ainsi B est aussi à sa moitié : & en changeant comme C à B, ainsi la moitié de C, à la moitié de B. Mais C est vne partie de B, dénommée de A, comme il est monstré, aussi la moitié de C, sera vne partie de la moitié de B, dénommée de A : p partant A mesurera la moitié de B. Donc si vn nombre impair mesure vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

3 4
A ... C ....
12
B .....

° 8. c. s.

p 40. 7.

THEOREME 29. PROP. 31.

Si vn nombre impair est premier à quelque nombre : Il sera aussi premier au double d'iceluy.

Soit le nombre impair A, premier au nombre B, duquel le double soit C. Ie dis que A est aussi premier à C.

Car si A & C ne sont premiers entr'eux, ils seront mesurez par quelque nombre, lequel soit D, lequel sera necessairement impair : car s'il est pair, mesurant A impair, ⁹ A, produict de D pair,

5 8
A..... B .....
16
C..... D---

q 28. 9.

multiplié par le nombre par lequel il le meſure, ſera pair. Ce qui eſt abſurde, car A eſt poſé impair: partant D impair, meſurant C pair, (car C eſt pair puis qu'il a vne moitié B,) r meſurera auſſi B, ſa moitié: mais il meſure auſſi A. Donc D, meſure iceux A, B, premiers entr'eux. Ce qui eſt abſurde, donc A eſt premier à C: donc ſi vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

r 30.9.

THEOREME 30. PROP. 32.

De tous les nombres qui ſuiuent le binaire, en progreſſion double; vn chacun eſt pairement pair ſeulement.

Soient tant de nombres doubles que l'on voudra depuis le binaire A, ſçauoir B, C, D, E. Ie dis que B, C, D, E, ſont tant ſeulement pairement pairs. Qu'il ſoit ainſi, il eſt manifeſte: car ayant poſé l'vnité: puis que A eſt binaire, & B, C, D, E, doubles depuis le binaire, iceux ſeront continuellement proportionaux, depuis l'vnité, ſçauoir en proportion double. ſ Donc A meſurera vn chacun d'iceux B, C, D, E, & chacun moindre meſurera

ſ 11.9.

Vnité. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

le plus grand ſuiuant par quelqu'vn d'iceux A, B, C, D, E, leſquels eſtans tous pairs, à ſçauoir doubles depuis le binaire, vn nombre pair meſurera vn chacun d'iceux B, C, D, E, par vn nombre pair: partant chacun ſera pairement pair ſelon la definition.

Or

Or qu'ils soient pairement pairs tant seulement, il est manifeste : Car puis que A, B, C, D, sont continuellement proportionaux depuis l'vnité, & que A, prochain de l'vnité, est nombre premier, à sçauoir binaire, [t] aucun autre ne mesurera vn chacun d'iceux, excepté iceux A, B, C, D, E, lesquels estans tous pairs, vn nombre pair mesurera chacun d'iceux par vn nombre pair tant seulement. Donc des nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [t] 13. 9.

THEOREME 31. PROP. 33.

Si vn nombre a sa moitié impair, icelluy est pairement impair, tant seulement.

Soit le nombre A, duquel B, moitié, est impair. Ie dis que A, est seulement pairement impair.

Car d'autant que B, impair, est moitié de A, le nombre binaire C, mesurera A, nombre pair, par icelle moitié C, impair; [v] Donc A, est pairement impair. [v] 9. d.

Ie dis aussi qu'il l'est seulement : car soit B, moitié de A & C, binaire. Si A n'est pairement impair seulement, il sera aussi pairement pair. Donc quelque nombre pair le mesurera par vn nombre pair. Que D pair, le mesure par E aussi pair [x] par ainsi A, sera produit de D par E : mais le mesme A est produit de C binaire, par B, moitié de A. Donc le nombre produit de C 1. par B 4. est egal à celuy qui est produit de D 2. par E 3. parainsi comme C à D, ainsi [x] 9. 8. s. [y] 19. 7.

10
A .....
5 2
B..... C..
D— E—

E à B. Mais C binaire, mesure D, nombre pair: donc E, nombre pair, mesurera aussi B, impair: ce qui est absurde. Donc A n'est pairement pair, il est donc seulement pairement impair. Donc si vn nombre a vne moitié, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME. 33. PROP. 34.

Si vn nombre pair n'est de ceux qui sont doubles depuis l'vnité, & n'a sa moitié impair: Il est pairement pair, & pairement impair.

Soit A, de ceux qui ne sont doubles depuis l'vnité, & que sa moitié soit pair: Ie dis que A est pairement pair, & pairement impair. Qu'il soit pairement pair, il est euident: Car puis que sa moitié est pair, le binaire qui est pair, le mesurera par icelle moitié: parant sera pairement pair. 9. d.

Il est aussi pairement impair: car iceluy A, estant diuisé en deux egalement, & sa moitié derechef diuisée en deux, & ainsi de suite, l'on paruiendra enfin à vn nombre impair (premier qui est binaire, puis qu'il n'est de ceux qui sont doubles depuis l'vnité) lequel mesurera A par vn nombre pair. Car s'il le mesuroit par vn nombre impair, puis qu'vn nombre impair multipliant vn nombre impair, faict vn nombre impair, A seroit impair. Ce qui est impossible, puis qu'il est posé pair. Donc puis qu'vn nombre impair mesure A, par a 29. 9.

vn

vn nombre pair, & qu'vn nombre pair le mesure aussi par vn nombre pair, A sera pairement pair, & pairement impair. Donc si vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 33. PROP. 35.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que l'on retranche tant du second que du dernier, vn nombre egal au premier: comme l'excez du second sera au premier, ainsi l'excez du dernier sera à tous les anteceden.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux A, B C, D, E F: & que de B C second, & de E F dernier, on retranche C G & F H, egal un chacun au premier A. Ie dis que comme le reste B G, sera à A, ainsi E H, sera à A, B C, & D ensemble.

Car soit retranché F I, egal à B C, & F K, egal à D. D'autant que

F I, est egal à B C,
& le retranché F H, est egal au retranché C G,
le reste I H, sera egal au reste B G.



Mais d'autant que comme A est à B C, ainsi B C est à D, & D à E F: & par conuersion de raison comme E F, à D, ainsi D à B C, & B C à A: mais K F est egal à D, &

I F, à B C, & H F, à A. Pareillement, comme E F, ſera à K F, ainſi K F, à I F, & I F, à H F. Donc en diuiſant comme E K, à K F, ainſi K I à I F, & I H, à H F,
b 12.7. & [b] partant auſſi tous les nombres B K, K I, I H, ſeront à tous les nombres K F, I F, H F, c'eſt à dire le tout E H, à D, B C, & A, enſemble, (auſquels K F, I F, H F, ont eſté pris egaux) comme I H, à H F; c'eſt à dire comme B G, à A: car B G, & A, ſont egaux à I H, & H F. Donc s'il y a tant, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 34. PROP. 36.

Si depuis l'vnité l'on prend tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, en proportion double, iuſques à ce que le tout compoſé, ſoit faict nombre premier; & qu'iceluy tout multiplié par le dernier en faſſe quelqu'vn: Le produict ſera nombre parfaict.

Soient A, B, C, D, contin. proport. depuis l'vnité, & en proportion double, le compoſé deſquels & de l'vnité ſoit E, nombre premier, & que E multiplié par D dernier, faſſe F. Ie dis que F, eſt nombre parfaict.

Soient pris E, G, H, I, en proportion double, depuis E, & egaux en multit. à A, B, C, D. D'autant donc que A, B, C, D, & E, G, H, I, ſont egaux en multitude, & pris de deux en deux ſont en meſme
c 14.7. raiſon, eſtans tous en proportion double, en raiſon egale, [c] comme A ſera à D, ainſi E à I: [d] &
d 19.7.

partant

partant le produict de A 1. par I 4. ſera egal au produict de D 2. par E 3. Mais F, eſt le produict de D en E : donc F, ſera auſſi le produict de A en I. [c] Donc I meſurera F, par A binaire : parquoy F, ſera double de I ; & partant E, G, H, I, F, ſont continuellement proportionaux en raiſon double. Soient retranchez de G 2. & F dernier, K & L, egaux à E 1. deſquels les excez ſont M, & N. c 7. c.ſ.

Vnité. A 1 B 4 C 8 D 16
E 31. G 62 H 124 I 248 F 496
K 31. M 31. L 31.
O P N 465.

[f] Comme M, ſera à E, ainſi N, ſera à tous ſes antecedens E, G, H, I, enſemble : Mais M, eſt egal à E, eſtant moitié de G, double de E. Donc N ſera egal à E, G, H, I, enſemble : Mais L eſt egal à l'vnité, & à A, B, C, D, enſemble eſtant poſé egal à E, ou K. Donc le tout L N, c'eſt à dire F, eſt egal à l'vnité & aux nombres A, B, C, D, E, F, G, H, I, enſemble. [g] Parquoy, puis que l'vnité & chacun des nombres A, B, C, D, E, F, G, H, I, meſure F, (car puis que F eſt faict de E en D : [h] D meſurera F, & partant l'vnité & A, B, C, qui meſurent D, meſureront auſſi F : Et derechef, puis que I, comme il eſt monſtré meſure F, E, G, H, qui meſurent I, [i] à cauſe de la proportion double, meſureront auſſi F) & aucun autre ne meſurera F, comme nous monſtrerons incontinent. L'vnité & A, B, C, D, E, F, G, H, I, ſeront toutes les parties que F peut auoir ; auſquelles toutes enſemble, F eſtant monſtré egal, [k] icelluy F, ſera nombre parfaict. f 35. 9. g 7. c.ſ. h 11. c.ſ. i 11. c.ſ. k 22. d. 7.

Et

Et s'il est possible que quelqu'autre mesure F, outre les susdits, sçauoir O par P, l soit estant F, sera le produict de O par P: mais le mesme F, est aussi produict de E par D: partant le nombre produict de E premier par D, est mesme que le produict de P par O. m Donc comme E à P, ainsi D à D.

l 9. c. s.

m 19. 7.

n Mais puis que A, B, C, D, sont continuellement proportionaux depuis l'vnité, & que A proche de l'vnité est premier, aucun autre ne mesurera D dernier, outre ceux de la proportion A, B, C. Or O est different de A, B, C, par l'hypothese: donc O ne mesurera D. Mais comme O à D, ainsi E à P. Donc E aussi ne mesurera P: o Partant E estant premier, E & P seront premiers entr'eux, p & par ainsi les plus petites de leur raison: parquoy E mesurera O, & P mesurera D egalement, estans en la mesme raison. q Mais aucun nombre ne mesure D, excepté A, B, C: donc P sera mesme qu'vn d'iceux A, B, C.

n 13. 9.

o 31. 7.

p 23. 7. 21. 7.

q 13. 9.

Qu'il soit mesme que B, & soient pris E, G, H, doubles depuis E, en telle multitude que B C D, r en raison egale, comme B à D, ainsi E à H: s Mais le produict de B en H, est egal au produict de D, en E, & le produict de D en E, a esté monstré egal au produict de P en O. Donc le nombre faict de P par O, est le mesme que de B par H: t Donc comme P à B, ainsi H à O: mais P estoit mesme que B: donc H sera mesme que O, ce qui est absurde: car O a esté posé autre qu'aucun des nombres A, B, C, D, E, G, H, I. Donc A, B, C, D, E, G, H, I, seuls mesurent le nombre F, lequel ils composent: Donc si depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

r 14. 7.

s 19. 7.

t 19. 7.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Nous remarquerons icy, que Clauius dit au Scholie de la 19. Proposition de ce 9. liure, que ce qui est demonstré par la 16. 17. 18. & 19. Propositions du mesme liure, se doit entendre des nombres entiers. Car par les fractions (dit-il) à deux ou trois nombres proposez tels que l'on voudra, encore qu'ils soient premiers entr'eux, ou les extremes (s'il y en a plus de 2.) premiers entr'eux; l'on peut trouuer vn autre nombre proportionel: Mais il se trompe lourdement, n'y ayant point de fractions ou nombres rompus, puis que selon Euclide, l'vnité est indiuisible: Et voicy vn exemple qu'il apporte.

A ces deux nombres premiers 3. & 8. si le 9. du 3. sçauoir 64. est diuisé par le 1. nombre 3. le quotient sera 21. & $\frac{1}{3}$. pour le 3. proport. & ainsi ces 3. nombres 3. 8. & 21. $\frac{1}{3}$. sont entier. proport. ce qui est faux: d'autant que 8. contient 3. deux fois, & en outre les $\frac{2}{3}$ de 3. sçauoir deux vnitez de 3. mais 21. & $\frac{1}{3}$ ne contient pas 8. de la mesme façon, d'autant que 8 ne se diuise en 3. precisément, & que l'vnité, comme nous auons dit, est indiuisible.

Il est bien vray que 21. $\frac{1}{3}$ estant pris pour vne quantité continue, & semblablement les deux autres 3. & 8. comme 3. toises ou choses semblables, 8. & 21. $\frac{1}{3}$ estans reduits en mesmes parties egales, & appliquées aux nombres qui seroient pour lors 9. 24. & 64. tels nombres seroient proport. mais pour tout cela 21. $\frac{1}{3}$ ne seroit pas 3. proport. aux 2. nombres proposez 3. & 8. premier entr'eux, comme dit Clauius. Et de plus, Euclide n'entend parler en ces trois liures pre-

cedens

cedens que des nombres Arithmetiques, & non de la quantité continuë, en laquelle arrivent les fractions, & non aux nombres, mais seulement aux choses nombrées, quand on les subdivise en autres parties, que l'on appelle fractions, entant qu'elles sont comparées à leur tout, divisé en certain nombre de parties egales, lesquelles s'expliquent neantmoins par les nombres entiers; c'est à dire, par les nombres desquels traitte Euclide: & lors que telles quantitez continues sont reduites en mesmes parties egales ne sont plus fractions, & les nombres comparez à telles choses sont comparez entr'eux comme nombres entiers, & pris absolument, sans les referer à aucun tout: & toutes les demonstrations & operations qui se peuuent faire des fractions vulgaires, dont traite l'Arithmetique, se font toutes par les nombres entiers & Arithmetiques, desquels traite Euclide en ces 7. 8. & 9. liures. Nous rapporterions encore icy plusieurs autres resueries de Chasles qu'il a mises à la fin du 9. liure touchant les fractions; mais d'autant que tout cela n'est neccessaire, nous n'en parlerons d'auantage.

FIN DV NEVFIESME LIVRE des Elements d'Euclide.

LIVRE

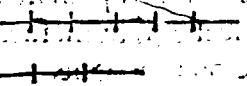
LIVRE DIXIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. **Commensurables grandeurs sont celles-là, lesquelles sont mesurées par vne mesme commune mesure.**

EVCLIDE, selon sa coustume, commence icy par l'explication des termes, dont il doit vser : Et declare premierement quelles grandeurs sont dites commensurées, & quelles commensurables, definissant que celles-là sont dites commensurables, lesquelles sont mesurées par vne mesme commune mesure ou grandeur. Comme les deux grandeurs A & B, lesquelles vne mesme mesure, comme C, mesure : (car repetée six fois mesure A, & repetée trois fois mesure B) seront dictes commensurables.



En

En la meſme maniere, vne ligne de 20 palmes, & vne de 13. ſeront dictes commenſurables, puis que tant la ligne d'vne palme, que celle de demie palme, &c. les meſure toutes deux. Semblablement les ſuperficies ſont dictes commenſurables, leſquelles ſont meſurées par vne meſme ſuperficie, & les corps ſolides ſont auſſi dicts commenſurables, leſquels ſont meſurez par vn meſme corps ou ſolide.

2. Mais les grandeurs incommenſurables, ſont celles-là leſquelles n'ont aucune commune meſure.

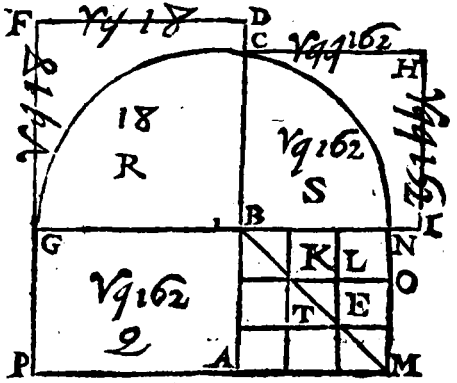
Telles grandeurs ſont le diametre de quelconque quarré, & le coſté du meſme quarré dont il eſt le diametre, d'autant qu'il n'y a aucune commune grandeur qui les puiſſe meſurer l'vn & l'autre, comme il ſera demonſtré par Euclide, à la derniere Propoſition de ce liure. Il y a auſſi pluſieurs autres lignes incommenſurables, c'eſt à dire qui n'ont aucune commune meſure; pluſieurs deſquelles il explique en ce liure, & enſeigne la maniere de les trouuer. Derechef, les ſuperficies & les ſolides ſont dits incommenſurables, leſquels n'admettent aucune commune meſure.

3. Les lignes droictes ſont commenſurables en puiſſance, quand les quarrez d'icelles ſont meſurez par vn meſme eſpace ou ſuperficie.

Des lignes droictes, les vnes ſont commenſu-

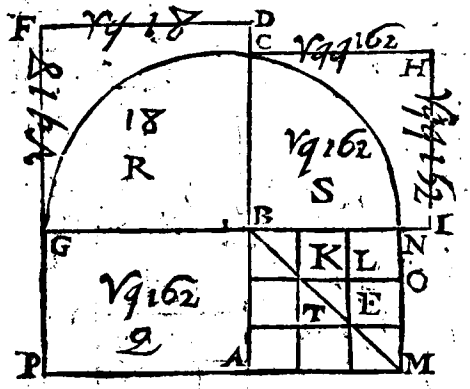
rables

rables en longitude, ſçauoir, celles qui ſont meſurées par vne meſme ligne, & ſont dictes ſimplement ou abſolument commenſurables, quelques autres ſont dictes incommenſurables : c'eſt à dire, qui n'ont aucune commune meſure, comme il a eſté expoſé 1. & 2. Definition.



Derechef, des lignes qui ſont incommenſurables en longitude, les vnes le ſont de telle ſorte, que les quarrez d'icelles ſont commenſurables, comme vne ligne de deux toiſes, & vne autre qui ſera 7 q. 8. (c'eſt à dire, de laquelle le q. contiendra huict toiſes,) ſont dictes commenſurables en puiſſance, leurs quarrez 4. & 8. eſtans meſurez par vne meſme ſuperficie. Ainſi vne ligne de trois toiſes, & vne de ſix, ſeront auſſi commenſurables en puiſſance, puis que leurs quarrez 9. & 36. ſont meſurez par vne meſme ſuperficie, ſçauoir par vne, ou par ſix.

Item, vne ligne qui ſera ȳqq. de 20. & vne qui ſera ȳqq.125. ſont commenſurables en puiſſance: car leurs qq. ȳq.20. & ȳq.125. ſont commenſurables, eſtans comme 5. à 2. & ȳq.5. ſera en ȳq.20. 2. fois & en ȳq.125. 5. fois. Ce que l'on entendra plus



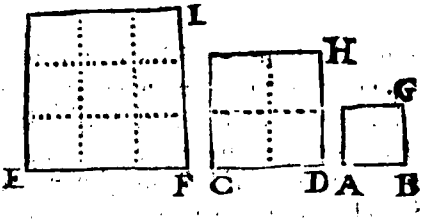
facilement par cette figure, où la ligne A B, eſt 3. & ſon q. A N, 9. dont le diametre eſt B M, auquel A B eſt incommenſurable, comme il a eſté dict à la ſeconde Definition, & ayant mené B D, egale au
v 47. 1. diametre B M, & deſcrit le q. B F, iceluy ſera 18. v eſtant double du q. de B A, & ſon coſté ſera ȳq.18. commenſurable en puiſſance à B A: car E meſure l'vn & l'autre q. ſçauoir A N, 9. fois & B F, 18. fois, E triplé meſure auſſi B F, 6. fois, & A N, 3. fois.

Maintenant ſi on entend que le quarré E, faiſe ȳq.6. le q. de la ligne A B, ſera ȳq.486. Et le quarré de B D, ſera ȳq. 1944. & ȳq. 6. meſurera l'vn & l'autre,

l'autre, & 7q.54. triple de 7q.6. mesurera aussi ces deux quantitez.

4. Mais les lignes droictes sont incommensurables en puissance, quand les quarrez d'icelles ne peuuent estre mesurez par aucune commune mesure.

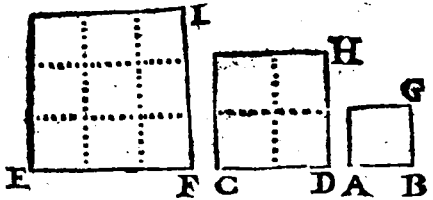
Les autres lignes incommensurables, dont les quarrez sont aussi incommensurables, sont dictes incommensurables en puissance, comme vne ligne de deux toises, & vne ligne qui sera 7.6. seront incommensurables en puissance, n'y ayant aucun commun espace qui puisse mesurer leurs quarrez 4.& 7.6. ainsi 7q.8.& 7qq.12. sont aussi incommensurables en puissance, d'autant qu'aucune superficie ne mesure leurs qq.8.& 7q.12.



Derechef, comme en la figure de la 3. Definition, la superficie rect. P B, soit 7q.162. à laquelle * soit faicte egale la superficie quarrée B H, la ligne G B, ou B D, son egale, sera incommensurable en puissance à B C, ou B I; car B C, est moyenne proportionelle entre G B, B A, ou B N, egale à B A. Donc G B, B C, B N, estans continuellement pro- * 14. ✱ 17.6.

y 20.6. portionelles, y G D, q. de G B, eſt à B H, q. de B C, comme G B premier, à B N 3. Mais G B, eſt incommenſurable à B N, comme il a eſté dit en la 2. Definition. z Donc le q. de G B, qui eſt G D, ſera incommenſurable au q. de B C, c'eſt à dire à B H: partant G B, B C, ou B I, ſon egale, ſont incommenſurables en puiſſance: c'eſt à dire, que leurs quarrez ſont incommenſurables. Et perſonne ne doit trouuer cecy eſtrange, que cette demonſtration ſoit appuyée ſur des Propoſitions cy-apres, attendu qu'elle n'eſt neceſſaire pour la demonſtration d'aucune d'icelles.

z 10.



Or toutes les lignes droictes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance, puis que le quarré de leur commune meſure, meſure les quarrez d'icelles, comme il appert par cette figure. Car comme A B, meſure C D, E F, ainſi ſon quarré A G, meſure C H, E I, non pas que toutes les lignes droictes commenſurables en puiſſance, le ſoient auſſi en longitude, comme appert par la figure de la 3. Definit. où les lignes A B, B D, ſont monſtrées incommenſurables en longitude, leſquelles ſont monſtrées commenſurables en puiſſance, & comme il ſera auſſi demonſtré en ce liure.

3. Les

5. Ces choſes eſtans ainſi, il eſt monſtré c. à d. manifeſte, qu'à toute ligne droicte propoſée, infinies lignes droictes en multitude, ſont commenſurables & infinies incommenſurables : les vnes en longitude & puiſſance, les autres en puiſſance ſeulement. Or que cette ligne droicte propoſée ſoit appellée rationelle.

Si on propoſe quelque ligne droicte de grandeur cogneuë & determinée, de toutes les lignes comparées auec icelle, quelques-vnes ſeront commenſurables en longitude & puiſſance à icelle, quelques-vnes en puiſſance ſeulement. Item, quelques-vnes ſeront incommenſurables en longitude ſeulement à icelle ; & quelques-vnes en longitude & puiſſance, comme il ſera monſtré en ce liure.

Mais cette ligne propoſée, à raiſon de laquelle les autres ſont dictes commenſurables ou incommenſurables, eſt dite des Grecs ῥητὴ ; c'eſt à dire rationelle, d'autant qu'elle eſt touſiours poſée de grandeur cogneuë, & que ſelon icelle on ratiocine : mais les autres comparées auec icelle, ne ſont pas touſiours cogneuës : combien que ſelon icelles priſes ſeparément elles ſoient cogneuës, chacune d'icelles pouuant eſtre diuiſée en telles parties égales que l'on voudra.

6. Et les lignes droictes commenſurables à cette ligne rationelle, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement; ſoient appellées auſſi rationelles.

Il enſeigne que les autres lignes commenſurables comment que ce ſoit, à la ligne dicte rationelle, ſont auſſi rationelles, non par ſuppoſition, comme icelle; mais eſtant qu'eſtans comparées auec icelle, elles ſe trouuent commenſurables à icelle en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement.

7. Et les lignes incommenſurables à cette ligne rationelle, ſoient appellées irrationelles.

Puis qu'en la precedente Definition Euclide a appellé les lignes commenſurables en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement à la rationelle propoſée, rationelles, il eſt manifeſte par cette Definition, que celles qui ſont incommenſurables à la rationelle propoſée en longitude & puiſſance, & non en longitude ſeulement, ſont irrationelles.

8. Et le quarré deſcrit de la rationelle propoſée, ſoit appellé rationel.

Tout ainſi que la ligne qui eſt poſée pour cogneuë & determinée, eſt dicte rationelle: tout de meſme le quarré deſcrit d'icelle, eſt appellé rationel, d'autant qu'il eſt auſſi cogneu & certain, & en

en comparaiſon d'iceluy les autres ſuperficies ſont dictes commenſurables ou incommenſurables.

9. Et les figures commenſurables à ce quarré rationel, ſoiēt appellées rationelles.

Toutes les ſuperficies planes commenſurables au quarré de la rationelle propoſée, ſont dictes rationelles, non toutefois par poſition comme iceluy: mais entant qu'eſtans comparées audit quarré, elles ſont trouuées commenſurables à iceluy, ou incommenſurables. Tout ainſi auſſi que les lignes comment que ce ſoit commenſurables à la ligne poſée rationelle, ſont appellées rationelles.

10. Mais les figures incommenſurables au quarré rationel, ſoient appellées irrationelles, ou ſourdes.

Ainſi que les lignes incommenſurables à la ligne poſée rationelle, ſont dictes irrationelles: auſſi les ſuperficies planes incommenſurables au quarré de la ligne rationelle, ſont appellées irrationelles.

11. Et les lignes droictes qui peuuent icelles figures irrationelles, ſoient dictes irrationelles & ſourdes; ſçauoir ſi elles ſont quarrées, leurs coſtez ſoient irrationaux; mais ſi ce ſont autres rectilignes quelconques, les lignes qui peuuent des quarrez egaux à icelles figures irrationelles, ſoient irrationelles.

Il appelle les lignes qui peuuent des eſpaces incommenſurables au quarré de la ligne rationelle, irrationelles : de ſorte que ſi ces eſpaces irrationaux ſont quarrez, leurs coſtez ſeront dits irrationaux : s'ils ne ſont quarrez, mais ſont autres rectilignes, les lignes droictes qui deſcriuent des quarrez egaux à iceux eſpaces incommenſurables, ſeront dictes irrationelles : car vne ligne droicte eſt dicte pouuoir vne figure, quand le quarré deſcrit d'icelle ligne, eſt egal à icelle figure.

En ſuitte de ces Definitions d'Euclide nous adiouſterons icy (apres Commandin) vne demande, & trois communes ſentences, dont vſe Euclide en ce liure.

DEMANDE.

Que l'on puiſſe multiplier quelconque grandeur tant de fois, qu'elle puiſſe exceder quelconque grandeur propoſée de meſme genre.

Car deux grandeurs inegales de meſme genre eſtans propoſées, la plus grande n'eſtant infinie, & la moindre pouuant eſtre augmentée infiniment: il eſt manifeſte que la moindre peut eſtre multipliée tant de fois, qu'elle excede la plus grande: Ce qui appert auſſi par la cinquieſme Definition du cinquieſme liure.

COMMVNES SENTENCES, ou Notions.

1. Vne grandeur meſurant tant de grandeurs que lon voudra, meſure auſſi la grandeur compoſée d'icelles.

2. Vne

2. Vne grandeur qui mesure quelconque grandeur : mesure pareillement toute autre grandeur que celle-là mesure.

3. Vne grandeur mesurant toute vne grandeur, & la retranchée d'icelle, mesure aussi le reste.

Ces communes sentences sont monstrées en nombres au septiesme liure, aux trois dernieres communes sentences, qui est la mesme chose qu'aux grandeurs, &c.

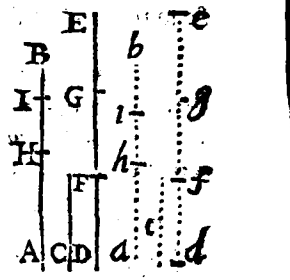
Faut entendre que les Propositions sont notées en la marge par deux nombres, & que le superieur denote l'ordre de Theon : & l'inferieur l'ordre de Campanus : que s'il n'y a qu'vn seul nombre ; c'est à dire, qu'ils ne differens, &c.

THEOREME 1. PROP. 1.

Deux grandeurs inegales estans proposées, si de la plus grande l'on retranche plus de la moitié, & du reste encore plus de la moitié, & que cela se fasse touſiours ainsi en continuant, il demeurera enfin quelque grandeur plus petite que la moindre grandeur proposée.

Soient deux grandeurs inegales A B, & C, proposées, dont A B, est la plus grande. Ie dis que si de A B, on retranche plus de la moitié, & du reste encore plus de la moitié, & ainsi touſiours en continuant, il restera enfin quelque grandeur moindre que C, plus petite grandeur proposée.

Car ſoit C, multipliée tant de fois que le produict excede A B,& ſoit D E,produict : de ſorte que D E, ſoit multiple de C, & prochainement plus grande que A B : Et ſoit diuiſée D E,ſelon les parties D F, F G, G E, chacune egale à C, & de A B, ſoit retranché plus de la moitié A H, & du reſte H E, auſſi plus de la moitié H I,& ainſi touſiours, iuſques à ce que les parties de A B,ſoient egales en nombre à celles de D E. Soient donc A H, H I, I B,autant que D F,F G,G E.



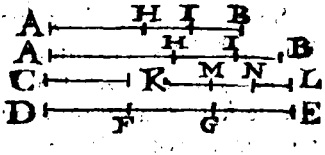
D'autant que D E,eſt plus grande que A B,& que de D E,on a oſté D F, moins que la moitié (ou la moitié,ſi D E,eſtoit ſeulement double de C) & de A B, plus de la moitié A H, le reſte F E, ſera plus grand que le reſte H B.

Derechef,F E eſtant plus grande que H B : ſi de F E,on oſte la moitié F G, (ou moins que la moitié, ſi F E, eſtoit plus grande que le double de C:) Mais de H B, plus de la moitié H I, le reſte G E, ſera pareillement plus grand que le reſte I B ; Mais G E, eſt egale à C : donc C, ſera auſſi plus grande que I B, derniere partie de A B. Partant de A B, il demeure vne grandeur plus petite que C. Donc deux grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Il en aduiendra de meſme, ſi on oſte la moitié A H, & du reſte H B, la moitié H I. Car ſemblablement I B reſte, ſera plus petite que G E, c'eſt à dire que C.

Autrement,

Autrement, ayant faict la construction comme auparauant, soit prise K L, autant multiple de I B, que D E, de C. Donc K L, estant diuisée en K M, M N, N L, parties egales, chacune à I B, il y aura autant de parties en K L, qu'en D E: mais A H, estant plus grande que H B (ou egale, si on oste seulement



la moitié de A B) & H B, plus grande que I B: A H, sera aussi plus grande que I B, c'est à dire que K M.

Derechef, d'autant que H I, est plus grande que I B, ou egale: mais I B, est egale à M N: H I, sera aussi plus grande que M N, ou egale à icelle: & partant la toute A I, sera plus grande que K N, parquoy adiouſtant les egales I B, N L, la toute A B, sera plus grande que la toute K L: Mais D E, est plus grande que A B. Donc D E, sera encore bien plus grande que K L: parquoy D E estant à C, comme K L, est à I B. (Car K L, est prise autant multiple de I B, que D E, de C:) [a] pareillement C, sera plus grande que I B: & par ainsi I B, reste plus petite que C. Ce qu'il falloit demonstrer. a 14. 5.

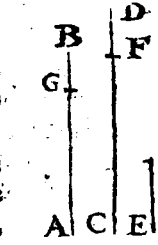
THEOREME 2. PROP. 2.

Deux grandeurs inegales estans proposées, si l'on retranche touſiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, &

& que la grandeur restante ne mesure iamais sa precedente; Icelles grandeurs seront incommensurables.

Soient deux grandeurs inegales proposées A B, C D, desquelles la moindre A B, soit retranchée de la plus grande C D, & le reste de C D, soit retranché de A B, & ainsi touſiours alternatiuement la moindre soit ostée de la plus grande, & que le reste ne mesure iamais sa grandeur precedente. Ie dis que A B, C D, sont incommensurables.

Car autrement elles seront mesurées par quelque commune mesure, laquelle soit E, s'il est possible. Donc E sera egale à A B, ou moindre. Et ayant osté A B, de C D, tant de fois que l'on pourra, qu'il reste F D, moindre que A B, de sorte que A B, mesure C F.



Derechef, ayant osté F D, de A B, qu'elle laisse G B, moindre qu'icelle F D: de sorte que F D, mesure A G, & soit faict ce retranchement touſiours ainsi: [b] Il demeurera enfin de C D, ou A B, de quelque grandeur moindre que E.

b. 1. 10.

Car d'autant que A B, ostée de C D, laisse F D, moindre que soy, C F, retranchée, sera plus grande que la moitié de C D: car si C F, estoit la moitié, ou moindre que la moitié de C D: A B, pourroit encor estre retranchée de C D. Semblablement A G, retranchée de A B, sera plus grande que la moitié de A B: & aduiendra touſiours ainsi. Retranchant donc touſiours plus de la moitié, il

reste

restera enfin quelque grandeur moindre que E. Soit donc G B, reste moindre que E. 1. 10.

D'autant que E, mesure A B, & A B, mesure C F, c E mesurera aussi C F. Mais E mesure la toute C D. d Donc E, mesurera aussi le reste F D, & F D, mesure A G: e donc E mesurera aussi A G. Mais E, mesure la toute A B. f Donc E mesurera aussi le reste G B, la plus grande la plus petite. Ce qui est absurde. Donc aucune grandeur ne mesurera A B, C D: Partant seront incommensurables. Donc si deux grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. c 2. c. s. d 3. c. s. e 2. c. s. f 3. c. s.

PROBLEME 1. PROP. 3. iij.

Deux grandeurs commensurables estans données, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient deux grandeurs commensurables proposées A B, C D, dont il faut trouuer la plus grande commune mesure. D'autant que A B, C D, sont commensurables de la plus grande C D, soit ostée A B, moindre, tant de fois que l'on pourra, & qu'il reste E D, & de A B, soit ostée E D, aussi tant de fois que l'on pourra, & reste F B. Et faisant touſiours ainsi alt. restera enfin quelque grandeur qui mesurera la precedente, autrement A B, C D, seroient incommensurables contre l'hypot. Que F B, mesure donc E D. Ie dis que F B, est la plus grande commune mesure de A B, C D.



Car

Car puis que E B, mesure E D, & E D, mesure
k 2.c.f. A F,[k] F B, mesurera A F: mais F B, mesure soy-mes-
1.c.f. me: elle mesurera donc aussi la toute A B: [l] partant
l 2.c.f. F B, mesurera aussi C E, qui est mesurée de A B.
m 1.c.f. Donc puis que F B, mesure aussi E D, [m] la mesme F B, mesurera la toute C D: elle mesure donc A B, & C D, partant est leur commune mesure. Ie dis qu'elle est la plus grande.

Car s'il n'est ainsi, soit G, la plus grande commune mesure, s'il est possible: D'autant donc que
n 2.c.f. G mesure A B, & C D, & que A B, mesure C E, [n] G
o 3.c.f. mesurera aussi C E. Mais G mesure C D, [o] donc G mesurera aussi E D, reste, (puis que G mesure la toute C D, & la retranchée C E:) mais E D, mesu-
p 2.c.f. re A F. [p] Donc G mesurera aussi A F, & mesurant la toute A B, elle mesurera aussi le reste F B, plus pe-
3. c.f. tite que soy: ce qui est absurde: Donc F B, est la plus grande commune mesure de A B, C D.

Or si la moindre A B, mesure la plus grande, de sorte qu'estant retranchée de C D, il ne reste rien: A B, sera la plus grande commune mesure des deux, puis que A B, mesure soy-mesme, partant deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cette demonstration il est manifeste, qu'vne grandeur laquelle mesure deux grandeurs, mesure aussi leur plus grande commune mesure, comme l'on peut colliger de cette partie de la demonstration, par laquelle il est monstré que F B, est la plus grande commune mesure de A B, C D: car là il est monstré que si G mesure A B, C D, qu'elle mesure aussi leur plus grande commune mesure F B.

PRO

PROBLEME 2. PROP. 4.

Trois grandeurs commensurables estans données, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient trois grandeurs commensurables proposées A B C, desquelles il faut trouuer la plus grande commune mesure.

Soit premierement [q] trouuée D, plus grande commune mesure de A, B, si D mesure aussi C, il appert que D, est la plus grande commune mesure des trois A B C. [q] 3.10.

Car si vne grandeur plus grande que D, mesure A B C, la mesme [r] mesurera aussi D plus grande commune mesure de A & B, la plus grande la plus petite, ce qui est absurde. Mais si D, ne mesure C, au moins C & D seront commensurables. [r] *Coroll.* 3. 10.



Car puis que A B C, sont commensurables, quelconque commune mesure d'icelle mesurera [f] D, plus grande commune mesure de A, B : donc icelle commune mesure mesurant aussi C : D & C seront commensurables. [t] Soit donc E plus grande commune mesure de C, & D. Ie dis que E, est la plus grande commune mesure de A B C ; Car d'autant que E mesure D, & C : Et D mesure A & B, [v] E mesurera aussi A, B, Mais E mesure aussi C : donc E, est la commune mesure de A B C. Ie dis [f] *Coroll.* 3. 10. [t] 3. 10. [v] 2. c. f.

que

que E, eſt auſſi plus grande commune meſure d'icelles : car autrement ſoit F, plus grande commune meſure que E.

x *Coroll.* 3. 10. D'autant donc que F meſure A & B, x elle meſurera auſſi D, le plus grande commune meſure:

y *Coroll.* 3. 10. Mais F, meſure auſſi C, elle y meſurera donc auſſi E, plus grande commune meſure de C & D: ſçauoir la plus grande la plus petite : Ce qui eſt abſurde : Donc E, eſt la plus grande commune meſure de A B C. Partant trois grandeurs, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il eſt auſſi manifeſte qu'vne grandeur qui meſure trois grandeurs, meſure auſſi la plus grande commune meſure d'icelles. Car il a eſté demonſtré que puis que F, meſure A B C, elle meſurera auſſi leur plus grande commune meſure E.

Semblablement, s'il y a plus de trois grandeurs commenſurables données, on trouuera leur plus grande commune meſure. Comme s'il y en a quatre, l'on fera premierement la queſtion de trois, ſi cinq, on fera la queſtion de quatre, &c. Et ce meſme Corollaire aura lieu.

THEOREME 3. PROP. 5.

V.

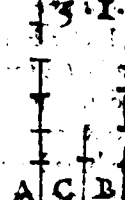
Les grandeurs commenſurables ont meſme raiſon l'vne à l'autre, que nombre à nombre.

Soient les grandeurs A & B, commenſurables. Ie dis qu'elles ſont entr'elles comme vn nombre eſt à vn autre nombre.

Car

Car [a] soit C, leur plus grande commune mesure, & autant de fois que C mesure A, que l'vnité F, mesure autant de fois vn nombre comme D, & autant de fois que C mesure B, que l'vnité mesure aussi le nombre E. a 3.10.

[a] D'autant donc que la grandeur C, & l'vnité F, mesurent la grandeur A, & le nombre D egalement, la grandeur A, contiendra C, autant de fois que le nombre D, contient l'vnité. Partant comme A à C, ainsi le nombre D, à l'vnité. Mais comme C est à B, ainsi l'vnité est à E: (puis que C mesure B, & l'vnité mesure E, egalement.) [b] Donc en raison egale A sera à B, comme le nombre D, au nombre E, partant les grandeurs commensurables sont entr'elles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. b 22.5.



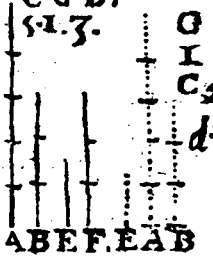
THEOREME 4. PROP. 6.

Si deux grandeurs ont mesme raison entr'elles que nombre à nombre: Elles seront commensurables.

Que les deux grandeurs A & B, ayent mesme raison entr'elles que les nombres C, D. Ie dis qu'elles sont commensurables.

Car que la grandeur A soit entendue estre diuisée en autant de parties egales, que C contient d'vnitez, à vne desquelles parties soit egale la grandeur E, & soit quelqu'autre grandeur F, mesurée autant de fois par E, que l'vnité mesure le nõbre D.

D'autant que E est autant de fois en A, que l'vnité au nombre C, la grandeur A, & le nombre C, contiendront E, & l'vnité egalement : partant A sera à E, comme C à l'vnité. Mais E est à F, comme l'vnité à D, (E mesurant F, & l'vnité mesurant D egalement,) donc, en c raison egale, A sera à F, comme le nombre C, au nombre D. Mais A est aussi à B, comme le nombre C, au nombre D, par l'hypothese : d Donc comme A à B, ainsi A à F : e Partant B & F sont egales : donc E mesurant F, mesurera aussi B, egale à F : Mais E mesuroit aussi A : partant E mesure A & B, f donc A B, sont commensurables. Partant si deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



c 22. 5.
d 11. 5.
e 9. 5.
f 1. d.

Autrement soit entenduë la grandeur A, diuisée en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C, à vne desquelles parties soit egale la grandeur E.

D'autant donc que comme E à A, ainsi l'vnité au nombre C, (E mesurant A, & l'vnité le nombre C egalement.) Mais A est posée à B, comme le nombre C, au nombre D. Donc en raison egale, g comme E à B, ainsi l'vnité à D, mais l'vnité mesure le nombre D : donc E mesurera B, & E mesure aussi A : h donc A & B ayant E pour commune mesure, seront commensurables. Ce qui est proposé. Soit veuë la seconde partie de la figure.

g 22. 5.
h 1. d.

COROL

COROLLAIRE.

De la premiere demonſtration de ce Theoreme, il appert comment on pourra trouuer vne ligne droicte, à laquelle quelconque autre ligne droicte propoſée, ſoit comme nombre à nombre. Car (*voyez la premiere figure*) ſoit trouuée vne ligne, à laquelle ſoit la ligne propoſée A, comme le nombre C, au nombre D: Faut diuiſer A en autant de parties egales, qu'il y a d'vnitez en C, & prendre F, contenant autant des meſmes parties de A, qu'il y a d'vnitez en D: par ainſi A ſera à F, comme le nombre C au nombre D. Comme il eſt demonſtré.

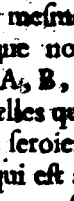
Il appert auſſi par quel moyen on trouuera vne ligne droicte, au quarré de laquelle ſoit le quarré d'vne autre ligne droicte donnée comme nombre à nombre: comme pour exemple: ſoit trouuée vne ligne, au quarré de laquelle ſoit le quarré de la ligne A, comme le nombre C, au nombre D, ſoit premierement trouuée F, à laquelle ſoit A, comme C à D, comme il eſt dit, puis ſoit trouuée la moyenne proportionelle entre A & F: ſi A, la ligne trouuée, & F eſtant continuellement proportionelles, le quarré de A, ſera au quarré la moyenne: comme A à F: Mais A eſt à F, comme le nombre C, au nombre D. Donc le quarré de A, ſera au quarré de la moyenne proportion, comme le nombre C au nombre D.

i 13. 6.
k *Coroll.* 20. 6.

vij. THEOREME 5. PROP. 7.

Les grandeurs incommenſurables n'ont pas meſme raiſon entr'elles, que nombre à nombre.

Soient les grandeurs incommenſurables A & B. Ie dis qu'elles n'ont meſme raiſon l'vne à l'autre, que nombre à
16.10. nombre. Car ſi A, B, auoient meſme raiſon entr'elles que nombre à nombre, elles ſeroient commenſurables. Ce qui eſt abſurde, eſtans poſées incommenſurables. Donc A & B, ne ſont entr'elles comme nombre à nombre. Partant les grandeurs incommenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



viij. THEOREME 6. PROP. 8.

Si deux grandeurs n'ont meſme raiſon entr'elles que nombre à nombre, icelles grandeurs ſeront incommenſurables.

Soient les grandeurs A & B, n'ayans meſme raiſon entr'elles que nombre à nombre. Ie dis qu'elles ſont incommenſurables.
m 5. 10. Car ſi elles eſtoient commenſurables, m elles ſeroient l'vne à l'autre, comme nombre à nombre.

Ce

Ce qui eſt abſurde, n'eſtans entr'elles comme nombre à nombre par l'hypotheſe. Donc A & B, ne ſont commenſurables : Partant ſi deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOREME 7. PROP. 9.

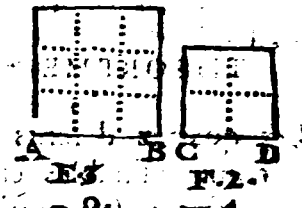
Les quarrez deſcrits de lignes droictes commenſurables en longitude, ont meſme raiſon entr'eux, que nombre quarré à nombre quarré. Et les quarrez qui ont meſme raiſon entr'eux que nombre quarré à nombre quarré, auront auſſi les coſtez commenſurables en longitude. Mais les quarrez deſcrits de lignes droictes incommenſurables en longitude, n'ont meſme raiſon entr'eux, que nombre quarré à nombre quarré : Et les quarrez qui n'ont meſme raiſon entr'eux que le nombre quarré à nombre quarré, n'auront les coſtez commenſurables en longitude.

Soient premierement les lignes droictes A B, C D, commenſurables en longitude, ie dis que le quarré de A B, eſt au quarré de C D, comme nombre quarré à nombre quarré.

Car AB, CD, estans commensurables en longi-
11 5.10. tude n AB, sera à CD, comme nombre à nombre, & soit comme le nombre E, au nombre F. Et les quarrez de E & F, soient G & H.

o 20.6. Donc puis que AB, est à CD, comme E à F: o Mais le quarré de AB, est au quarré de CD, en raison doublée du costé AB, au costé

p 11.8. CD. Et p le nombre quarré G, est au nombre quarré H, aussi en raison doublée du costé E, au costé F, le quarré de AB, sera au quarré de CD, comme le nombre quarré G, au nombre quarré H: D'autant que ces deux raisons sont doubles de raisons egales. Ce qui est proposé.



Secondement, soit le quarré de AB, au quarré de CD, comme le nombre quarré G, au nombre quarré H. Ie dis que AB, CD, sont commensurables en longitude. Car soient E, F, costez de G & H.

D'autant donc que le quarré de AB, est au quarré de CD, comme le nombre quarré G, au
q 20.6. nombre quarré H. q Mais le quarré de AB, est au quarré de CD, en raison double du costé AB, au
r 11.8. costé CD. r Et le nombre quarré G, au nombre quarré H, aussi en raison doublée du costé E, au costé F. Donc AB, sera à CD, comme E à F: leurs
6. 10. raisons doublées estans egales: partant AB, CD, sont commensurables en longitude.

Tiercement,

Tiercement, ſoient A, & B, incommenſurables en longitude. Ie dis que leurs quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Car ſi le quarré de A, eſtoit au quarré de B, comme nombre quarré à nombre quarré, A & B, ſeroient commenſurables en longitude, comme il a eſté monſtré, ce qui eſt contre l'hypotheſe : Donc le quarré de A, n'eſt au quarré B, comme *n. q. à n. q.* Ce qui eſt propoſé.

Finalement, que les quarrez de A & B, ne ſoient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Ie dis que A & B, ſont incommenſurables en longitude. Car s'il n'eſt ainſi, leurs quarrez ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, comme il eſt demonſtré : Ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc A, B, ne ſont commenſurables en longitude : ce qui eſt propoſé. Parant les quarrez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



COROLLAIRE.

De ces choſes ainſi demonſtrées, il eſt manifeſte que les lignes droictes commenſurables en longitude, ſont auſſi commenſurables en puiſſance : Mais que celles qui ſont commenſurables en puiſſance, ne le ſont pas toutes en longitude. Et que celles qui ſont incommenſurables en longitude, ne le ſont pas toutes en puiſſance. Mais les incommenſurables en puiſſance, le ſont toutes en longitude.

f 9. 10. Car les quarrez des f lignes commensurables en longitude, estans entr'eux comme nombre q. à nombre q. c'est à dire comme nombre à nombre t 6. 10. simplement; t iceux seront commensurables, v & v 3. d. partant leurs costez commensurables en puissance. Donc les lignes droictes commensurables en longitude, le sont aussi toutes en puissance.

En apres, puis que les lignes dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre q. à nombre q. x 3. d. mais simplement comme nombre à nombre, x y 9. 10. sont commensurables en puissance, y (leurs quar- z 9. 10. rez estans commensurables:) z mais non en longitude. Il est manifeste que les lignes commensurables en puissance, ne le sont pas tousiours en longitude, mais seulement les lignes commensurables en puissance, dont les quarrez sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, sont aussi commensurables en longitude, comme il appert par la seconde partie de ce Theoreme.

Derechef, d'autant que les lignes dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre q. à nombre q. mais seulement comme nombre à nombre, sont incommensurables en longitude, mais commensurables en puissance, comme il est dit: il appert que les lignes incommensurables en longitude, ne le sont pas toutes en puissance, mais seulement les 4. d. lignes incommensurables en longitude, dont les 8. 10. quarrez ne sont entr'eux comme nombre à nombre, sont aussi incommensurables en puissance, leurs quarrez estans incommensurables.

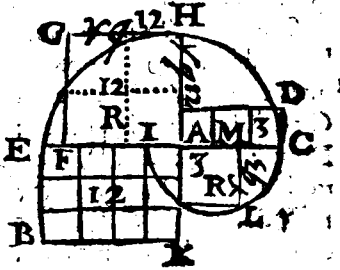
Finalement, il est manifeste que les lignes incommensurables en puissance, le sont aussi en longitude: car si elles estoient commensurables en longitude, elles le seroient en puissance, comme il

est

eſt euident de la premiere partie de ce Corollaire. Ce qui eſt abſurde ; eſtans poſées incommenſurables en puiſſance.

SCHOLIE.

Pour mieux entendre les deux premieres parties de ce Theoreme, faut ſçauoir que les lignes droictes commenſurables en longitude, dont les quarrez ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ne ſont pas ſeulement celles qui ſont explicables par nombre ; mais auſſi celles qui ne s'y peuuent expliquer, pour l'intelligence dequoy, nous mettrons icy ces deux ſuperficies rectangulaires A B, de douze pieds, ou autres meſures : & A D, de trois pieds, leſquelles ſont commenſurables la moindre meſurant la plus grande quatre fois preciſément, & ayant fait le q. A G, egal au rect. A B, & A L, egal à A D, le q. A G, ſera 12. & A L, 3. & leurs coſtez ſeront 3q.12. & 3q.3, *leſquelles ne ſe peuuent expliquer par aucun nombre, eſtant la 3q. du coſté de 12. plus de 3. & moins que 4. & la 3q. de 3. plus de 1. & moins que 2. Et neantmoins A G, 12. eſtant quadruple de A L, 3. ſon coſté A H, ſera double du coſté A M, comme nous auons monſtré en ſuite de la 4. Prop. du 2. liure. Et partant commenſurables.*

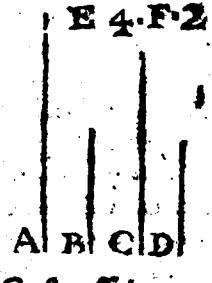


xj. x. THEOREME 8. PROP. 10.

Si quatre grandeurs sont proportionelles, & que la premiere soit commensurable à la seconde, la troisiesme sera aussi commensurable à la quatriesme. Et si la premiere est incommensurable à la seconde, la troisiesme sera aussi incommensurable à la quatriesme.

Soient quatre grandeurs A,B,C,D, proportionelles, & soit A 1. commensurable à B 2. Ie dis que C 3. sera commensurable à D 4.

Car d'autant que A & B sont commensurables, a 5.10. a elles seront entr'elles comme nombre à nombre.



Soit donc A à B, comme le nombre E, au nombre F: mais comme A est à B, ainsi C est à D, par l'hypothese: Donc C, sera aussi à D, comme le nombre E, au nombre b 6.10. F. b Partant C & D, sont commensurables entr'elles.

Soit maintenant A, incommensurable à B. Ie dis que C est aussi incommensurable à D. Car puis que A & B, sont incommensurables: c 7.10. c A ne sera à B comme nombre à nombre: mais comme A est à B, ainsi C à D, par l'hypothese: Donc C ne sera à D, comme nombre d 8.10. à nombre. d Partant C & D, sont incommensurables entr'elles. Donc si quatre grandeurs sont proportionelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

LEMME.

Trouuer deux nombres plans, lesquels n'ayent mesme raison entr'eux que nombre quarré à nombre quarré.

Puis c que les nombres plans semblables ont mes- c 26.8.
mé raison entr'eux que nombre quarré à nombre quarré, tous les nombres plans dissemblables sont tels que requiert ce Lemme. Et tous les nombres premiers sont tels, & les nombres en raison double, superparticuliere, ou superpartiente. Et mesme tous les nombres pris deux à deux, dont l'vn est quarré, & l'autre non, comme 16. & 30. car s'ils estoient plans semblables, f ils seroient entr'eux comme nombre f 26.8.
quarré à nombre quarré. Et l'vn estant quarré comme 16. l'autre 30. le seroit aussi: ce qui est absurde: Car il est posé non quarré. 16. 30.

PROBLEME 4. PROP. 11. X. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables à vne ligne droicte proposée: à sçauoir, l'vne en longitude seulement, & l'autre en longitude & puissance.

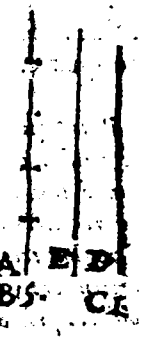
C. à D. à la ligne droicte, appellée rationelle.

Soit la ligne droicte proposée A, à laquelle il faut premierement trouuer vne ligne droicte incommensurable en longitude seulement.

Soient

g *Lemme prec.* Soient g trouuez deux nombres B, C, n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré,

h *Coroll. 6. 10.* h puis soit trouuée la ligne D, au quarré de laquelle soit le quarré de A, comme le nombre B au nombre C. Ie dis que D est incommensurable à A en longitude seulement. Car le quarré de A, estant au quarré de D, comme le nombre B, au nombre C: Mais B & C, ne sont nombres quarrez: donc le quarré de A, ne sera au quarré de D, comme nombre quarré à nombre quarré:



i *9. 10.* i donc A & D, seront incommensurables en longitude. Et puis que les quarrez de A & D, sont entr'eux comme nombre à nombre,

k *6. 10.* ils seront commensurables. k Partant A & D, commensurables en puissance, elles seront donc incommensurables en longitude seulement.

Maintenant pour trouuer vne ligne droicte incommensurable en longitude & puissance à la ligne proposée A, l soit trouuée E, moyenne proportionelle entre A & D. Ie dis que E, est acquise. Car A, E, D, estans continuellement proportionnelles, le m quarré de A sera au quarré de E, comme A à D: mais A est incommensurable en longitude

m *Coroll. 20. 6.*

n *10. 10.* à D, comme il est monstré: n Donc le quarré de A sera incommensurable au quarré de E: Partant A, E, sont incommensurables en puissance par la

o *Coroll. 9. def. 10.* o & par consequent aussi en longitude. Parquoy nous auons trouué deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

l *13. 6.*

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Les nombres pris eſtans 5. & 4. le moyen proportionnel entr'eux ſera 4 4/5. qui exprime la longitude de D. Mais entre 5. & 4 4/5. le moyen proportionnel eſt 4 99/100. ſon quarré de E. ſi on conſere maintenant 5. & 4 4/5. il eſt manifeſte qu'ils ſont incommenſurables en longitude, & non en puiſſance, comme 25. & 20. eſtans commenſurables. Mais 5. & 4 99/100. ſont incommenſurables en longitude & puiſſance.

THEOREME 91 PROP. xij. viij.

Les grandeurs commenſurables à vne meſme grandeur, ſont auſſi commenſurables entr'elles.

Soit l'vne & l'autre grandeur A & B, commenſurables à C. Ie dis que A & B ſont commenſurables entr'elles.

Car puis que A & C, ſont commenſurables, [x] A ſera à C, comme nombre à nombre, & ſoit comme le nombre D, au nombre E. Et C B, eſtans auſſi commenſurables, C ſera à B, comme nombre à nombre. x 5. 10.



Soit donc comme le nombre D 10 E 8.
F, au nombre G, & y, ſoient trouuez les trois nombres H I K, F 5 G 4. y 4. 8.
H 25 I 20 K 16
continuellement proportionnaux,

& les plus petits en la raiſon de D à E, & de F à G. Et H ſera à I, comme D à E : c'eſt à dire, comme A à C, & I à K, comme F à G, c'eſt à dire comme C à B.

Donc A eſtant à C, comme H à I, & C à B, comme I à K : en raiſon egale A ſera à B, comme H à K : Partant A & B, ſeront commenſurables, z 6.10. z eſtans entr'elles comme le nombre H, au nombre K. Donc les grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

xij. THEOREME 10. PROP. 13.

S'il y a deux grandeurs, & que l'vne ſoit commenſurable à vne meſme grandeur, & l'autre incommenſurable : Icelles grandeurs ſeront incommenſurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, deſquelles A ſoit commenſurable à C, & B incommenſurable à la meſme C. Ie dis que A & B ſont incommenſurables entr'elles.

Car ſi B, eſt dit eſtre commenſurable à A ; C eſtant poſée commenſurable à la meſme A : B & C ſeroient commenſurables entr'elles : Ce qui eſt abſurde, eſtans poſées incommenſurables entr'elles. Donc A n'eſt commenſurable à B. 12. 10. Partant s'il y a deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

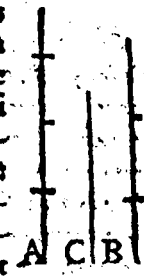


THEO

THEOREME 11. PROP. 14. xiij. vij.

S'il y a deux grandeurs commensurables, & que l'vne d'icelles soit incommensurable à quelque grandeur ; l'autre sera aussi incommensurable à la mesme.

Soient deux grandeurs commensurables A & B, desquelles A soit incommensurable à quelque autre grandeur C. Ie dis que B, sera aussi incommensurable à la mesme C. Car si B est dite estre commensurable à C, & partant aussi C commensurable à B, [a] A & C seroient commensurables entr'elles: Ce qui est absurde, estans posées incommensurables. Donc B, C, sont incommensurables entr'elles : Partant si deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



[a] 12. 10.

SCHOLIE.

De ce Theoreme les Interpretes d'Euclide colligent le suivant, fort utile à ce qui est demonstré cy-apres.

Les grandeurs commensurables à des grandeurs incommensurables entr'elles, seront aussi incommensurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, incommensurables, ausquelles C & D, soient commensurables,

seqvnir

Sçauoir C à A, & D à B. Ie dis que C & D ſont incommenſurables entr'elles. Car d'autant que A & C ſont commenſurables, & A eſt incommenſurable à B,

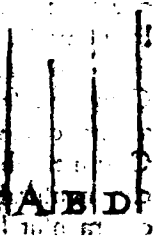
b 14. 10. *b la reſtante C, ſera auſſi incommenſurable à B.*

Derechef, d'autant que D & B, ſont poſées commenſurables, & B eſt monſtrée incommenſurable à C:

c 14. 10. *c la reſtante D, ſera pareillement incommenſurable à la meſme C. Ce qui eſt propoſé. Voyez ceſte figure cy-deſſous.*

SCHOLIE.

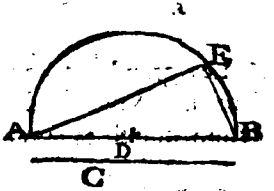
Soient incommenſurables entr'elles 99. 8. & 99. 27. auſquelles ſoient commenſurables 99. 32. & 99. 147. à ſçauoir la premiere à la premiere, & la derniere à la derniere: 99. 32. & 99. 147. ſeront auſſi incommenſurables entr'elles, comme il appert.



LEMME.

Deux lignes droictes inegales eſtans données, trouuer de combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient deux lignes droictes inegales propoſées A B, & C, dont A B, eſt la plus grande: Il faut trouuer de combien A B, peut plus que C.



Soit diuiſee A B, en deux egalement au poinct D, &

& de D, comme centre, & à l'interualle D A, ou D B, soit descrit le demy-cercle A E B : & auquel soit accommodée la droicte ligne A E, egale à C, & conioincte E B. le dis que A B, peut plus que C, du q. de E B, car puis que l'angle E, est droit au demy-cercle : & le q. de A B, est egal aux quarrez de A E, E B. Partant A B pourra plus que A E : c'est à dire que C, du quarré de la ligne E E. Ce qui est proposé. d 1. 4. e 31. 3. f 47. 1.

SEMBLABLEMENT.

Deux lignes droictes egales ou inegales, estans proposées, trouuer vne autre ligne droicte pouuant icelles.

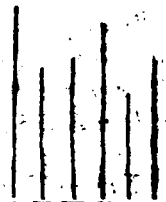
Soient les deux lignes droictes A E, E B, lesquelles estans constituées à angle droict au poinct E, & ayant mené A B : icelle A B, pourra les deux A E, E B : le quarré de A B, estant egal aux deux quarrez de A E, E B. 47. 1.

THEOREME 12. PROP. 15. xiv. xij.

Si quatre lignes droictes sont proportionelles, & la premiere peut plus que la seconde, du quarré d'vne ligne qui soit commensurable en longitude à icelle. La troisiesme pourra plus aussi que la quatriesme du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude ; Et si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'vne ligne incommensurable en

longitude à icelle. La troiſieſme pourra auſſi plus que la quatrieſme du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle.

Soient les quatre lignes droictes A, B, C, D, proportionelles, & que A premiere, puiſſe plus que B 2. du q. de la droicte ligne E, & C 3. plus que D 4. du q. de la droicte ligne F. Ie dis que ſi E eſt commenſurable en longitude à A, que F ſera auſſi commenſurable en longitude à C. Et ſi E eſt incommenſurable en longitude à A : F ſera incommenſurable en longitude à C.



Car puis que A eſt à B, comme C à D : g auſſi comme le q. de A ſera au q. de B, ainſi le q. de C au q. de D : Mais le q. de A eſt egal aux quarrez de B, E. par l'hypotheſe, & le q. de C, aux quarrez de D, F, donc comme les quarrez de B, E, enſemble, ſeront au q. de B, ainſi les quarrez de D F, au q. de D : & en diuiſant, comme le q. de E, au quarré de B : ainſi le quarré de F, au quarré de D. h

g 22.6.

h 22.6.

Donc comme E eſt à B, ainſi F à D : & en changeant comme B à E, ainſi D à F : Donc A eſtant à B, comme C à D, & B à E, comme D à F, en raiſon egale, comme A ſera à E, ainſi C ſera à F. Partant, ſi A eſt commenſurable en longitude à E, auſſi C ſera commenſurable à F en longitude. Et ſi incommenſurable incommenſurable. Donc ſi quatre lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

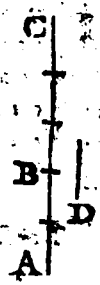
i 10.10.

PRO

PROBLEME 13. PROP. 16. xv, ix.

Si deux grandeurs commensurables sont composées, la toute sera aussi commensurable à chacune d'icelles : Et si la toute est commensurable à vne d'icelles, les grandeurs proposées au commencement seront commensurables entr'elles.

Soient composées les deux grandeurs commensurables A B, B C. Ie dis que la toute A C, est aussi commensurable à chacune d'icelles.



Car soit D, commune mesure de A D, B C. D'autant donc que D, mesure A B, B C, elle[1] mesurera aussi la toute A C : Donc puis que D, mesure A C, & A B : A C, & A B, seront commensurables. Semblablement puis que D, mesure A C, & B C : A C, & B C, seront aussi commensurables. Donc A C, sera commensurable à chacune d'icelles A B, B C, [k] 3. 10. [l] 1. c. 5.

Soit maintenant la toute A C, commensurable à vne d'icelles, A B, B C, desquelles elle est composée, sçauoir à A B. Ie dis que A B, B C, sont commensurables entr'elles. [m] Car soit D, commune mesure de A C, A B. Donc D mesurant la toute A C, & la retranchée A B : [n] elle mesurera aussi le reste B C. Partant A B, B C, seront commensurables entr'elles, D mesurant l'vne & l'autre, &c. Donc si deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [m] 3. 10. [n] 3. c. 5.

COROLLAIRE.

D'icy il s'enſuit, que ſi vne grandeur compoſée de deux eſt commenſurable à vne d'icelles, qu'elle ſera auſſi commenſurable à l'autre. Comme ſi A C, eſt commenſurable à A B, elle ſera auſſi commenſurable à B C, reſtante. Car comme il eſt monſtré en la derniere partie de ce Theoreme : D, commune meſure de la toute A C, & de A B, retranchée, ° meſurera le reſte B C. Partant A C, B C, ſont commenſurables.

° 3. c. f.

SCHOLIE.

Soient A B, 99. 8. & B C, 99. 18. commenſurables: A C, 99. 50. compoſée d'icelles, ſera auſſi commenſurable à chacune des deux. Car 99. 50. eſt à 99. 8. comme 5. à 2. nombre à nombre, & 99. 50. eſt 99. 18. comme 5. à 3. ° *Partant elles ſont commenſurables en longitude.*

° 6. 10.

xvj. ix. THEOREME 14. PROP. 17.

Si deux grandeurs incommenſurables ſont compoſées, la toute ſera auſſi incommenſurable à chacune d'icelles : Et ſi la toute eſt incommenſurable à vne d'icelles, les grandeurs propoſées au commencement, ſeront incommenſurables.

Soient compoſées les deux grandeurs incommenſurables A B, B C. Ie dis que la toute A C, eſt

auſſi

aussi incommensurable à chacune d'icelles A B, B C ; car s'il n'est ainsi, elle seroit commensurable, à tout le moins à vne : Soit donc commensurable à A B, s'il est possible : [q] & soit D, leur commune mesure. Donc puis que D, mesure la toute A C, & la retranchée A B, [r] elle mesurera aussi le reste B C. Donc A B, B C, seront commensurables, ayans D pour commune mesure. Ce qui est absurde : car elles sont posées incommensurables.



q 3. 10.

r 3 a. f.

Soit maintenant la toute A C, incommensurable à vne d'icelles, sçauoir à A B. Ie dis que A B B C, sont incommensurables. Car s'il n'est ainsi, [s] la toute A C, sera commensurable à chacune d'icelles A B, B C : ce qui est absurde & contre l'hypothese. Donc A B, B C, sont incommensurables. Ainsi on demonstrera A C, A B, incommensurables. Donc si deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

s 16. 10.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ces demonstrations, que si vne grandeur composée de deux, est incommensurable à vne d'icelles, qu'elle l'est aussi à l'autre. Comme si A C est incommensurable à A B, elle le sera pareillement à B C. Car si A C, estoit commensurable à B C : [t] A C seroit aussi commensurable au reste A B. Ce qui est absurde : car elles sont posées incommensurables. Donc A C, n'est commensurable à B C. Ce qui est proposé.

t Coroll. 16. 10.

SCHOLIE.

Il eſt manifeſte que ſi ces nombres incommenſurables 8. & 98.28. ſont compoſez: tout le compoſé 8.p. 98.28. ſera incommenſurable à chacun d'iceux. Semblablement 98.10. & 98. 27. ſi chacun eſt conferé auec le compoſé 98.27.p.98.10. & ainſi des autres.

LEMME 1.

Si à vne ligne droicte l'on applique vn parallelogramme deffaillant d'vne figure quarrée, le parallelogramme appliqué eſt egal au rectangle, lequel eſt contenu ſous les ſegmens de la ligne droicte, faicts par l'application.

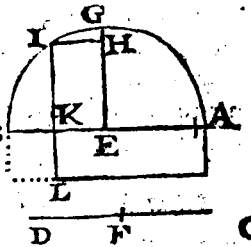
Ce Lemme eſt facile par la 28. Propoſition du ſixieſme diure

LEMME 2.

Deux lignes droictes inegales eſtans données, appliquer à la plus grande vn parallelogramme, egal au quart du quarré de la plus petite: deffaillant d'vne figure quarrée.

Cecy ſe peut faire par la 28. du 6. & en ceſte maniere. Soit la droicte ligne A B, plus grande, & C D, plus petite. Il faut faire le requis. Sur A B, ſoit deſcrite le demy-cercle A G B, & ayant coupé C D, en deux egalement au poinct F, ſoit priſe E H, egale à C F, ou à D F, & du poinct H, ſoit menée H I, parallele à B E, & du poinct I, ſoit menée I K L, parallele à G E,

&



& ayant pris K L, egale à K B, soit acheué le rectangle AL, & le quarré LB. Ie dis que le rectangle LA, est egal au quart du quarré de C D: & est appliqué à la droicte ligne A B, deffaillant de la figure quarrée L B.[v] [v] Sch. 13.

Car d'autant que K I, est moyenne proportionelle entre A K, K B,[x] le rectangle A L, contenu sous les extremes A K, K B, sera egal au quarré de K I, c'est à dire au quarré de E H:[y] (car E H, est egale à K I:) c'est à dire au quarré de C F, qui est la quarte partie du quarré de C D. Ce qui estoit proposé. 6. [x] 17. 6. [y] 34. 1. Coroll. 4. 2.

Le mesme se fera ainsi par les nombres.

Soit A B 20. C D 18. puis que I H, est moyenne proportionelle entre G H, & le reste du diametre: I H, sera 79. 19. ou K E, son egale. Donc B K, sera 10. —— 79. 19. mais K A 10. p. 79. 19. Et soit multipliée A K, par K B, le rectangle L A, sera 81. Mais le quarré de C D, est 324. Dont la quarte partie 81. est egale au rectangle L A. Or L B est quarré, car le rectangle sous A B, K L, est 100. —— 79. 7600. Mais le rectangle L A, estant osté d'iceluy, demeure l'espace L B, 119. —— 79. 7600. lequel est quarré, comme monstre l'Analyse, dont le costé est 10. —— 79. 19.

LEMME 3.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & qu'à la

plus grande l'on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarrée, les segments faicts par cette application seront inegaux.

Soient les lignes droictes A B, C D, & le reste faict, ainsi qu'il est dit en la precedente figure. Ie dis que B K, n'est egal à A K. Car s'ils estoient egaux, puis que par le Lemme premier, le parallelogramme appliqué à A B, deffaillant de la figure quarrée descrite de K B, est egal au rectangle contenu sous les segments A K, K B, & le rectangle contenu sous A K, K B, soit quarré, ledit parallelogramme sera vn z *Sch. 4. 2. quarré descrit de A K, moitié de A B: & z partant le quarré de A B, sera quadruple du mesme parallelogramme. Mais le quarré de C D, est aussi quadruple du mesme parallelogramme appliqué, c'est à dire de la quatriesme partie du quarré de C D, par l'hypothese. Donc les quarrez de A B, C D, sont egaux: & partant les lignes droictes A B, C D, egales. Ce qui est absurde: car elles sont posées inegales.*

xviii. xiij. THEOREME 15. PROP. 18.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande l'on applique vn parallelogramme, egal à la quatriesme partie du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarrée, & qu'il diuise icelle plus grande en parties commensurables en longitude: la plus grande pourra plus que la moindre du quarré d'vne ligne qui luy

sera

ſera commenſurable en longitude. Et ſi la plus grande peut plus que la plus petite, du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude, & qu'on applique vn parallelogramme ſur la plus grande egal au quart du quarré de la plus petite defaillant d'vne figure quarrée, il diuiſera icelle en parties commenſurables en longitude.

Soient deux lignes droictes inegales A B, & C, & à la plus grande A B, ſoit appliqué vn parallelogramme egal à la quatrieſme partie du quarré de C, defaillant de A B, d'vne figure quarrée, & ſoit contenu ſous A D, D B, & qu'il faſſe les ſegments A D, D B, commenſurables en longitude. Ie dis que A B, peut plus que C, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude. D'autant que A D, eſt plus grande que D B: Soit diuiſée A B, en deux egalement au poinct E, & ſoit priſe E F, egale à E D, cela eſtant, puis que les toutes E A, E B ſont egales, & les retranchées E F, E D, pareillement, les reſtes A F, B D, ſeront auſſi egales. *Lemme 3. 18.*

Et d'autant que A B, eſt diuiſée egalement par E, & inegalement à D, le rectangle ſous A D, D B, auec le q. de E D, ſera egal au q. de E B: Et partant 4. fois le rectangle ſous A D, D B, & 4. fois le q. de E D, ſera egal à 4. fois le q. de E B; Mais le q. de C, eſt egal à 4. fois le rectangle ſous A D, D B: (le rect. ſous A D, D B, eſtant poſé egal au quart du q. de C) & le q. de F D, eſt egal à 4. fois le q. de E D, moitié de F D, & le quarré de A B, egal à 4. fois le quarré *5. 2.* *a Sch. 4. 2.*

de E B, moitié de A B. Donc les quarrez de C, & F D, sont egaux au quarré de A B. Parquoy A B peut plus que C, du quarré de F D. Ie dis aussi que F D, est commensurable en longitude à A B. Car A D, D B, estans posées commensurables en longitude, b la toute A B, sera aussi commensurable en longitude à sa partie D B. Mais la composée de D B, A F, est aussi commensurable en longitude à D B, (la composée de A F, D B egales, estant double de B D.) Donc A B, & la composée de A F, D B estant commens. en longit. chacune à D B, c A B, & la composée de A F, D B, seront commens. en long. entr'elles.



b 16. 10.

c 12. 10.

Partant A B, composée de A F, D B, comme d'vne, & de F D, estant commens. en longit. à la composée de A F, D B, sa partie : la mesme A B, sera d commens. en longit. à la restante F D. Donc A B, peut plus que C, du quarré de F D, commens. en longitude à A B.

d Coroll. 16. 10.

Maintenant que A B, puisse plus que C, du q. d'vne ligne commens. en longit. à icelle, & soit appliqué à icelle vn parallelogramme, comme dit est, faisant les segmens A D, D B. Ie dis que A D, D B, sont commensurables en longitude entr'eux : Car demeurant la mesme construction l'on demonstrera pareillement que A B, peut plus que C, du q. de F D. Parquoy A B, estant posée pouuoir plus que C, du q. d'vne ligne droicte commensurable en longitude à icelle : A B, sera commensurable en longitude à F D.

Donc la toute A B, composée de F D, & A F, D B, comme d'vne, estant commensurable en longitude

à F D,

à F D, la mesme A B, [e] sera aussi commens. en long. à la restante composée de A F, D B : mais la composée de A F, D B, est aussi commensurable en longitude à D B, (estant double d'icelle :) [f] donc A B, D B, estans commens. en longit. à la composée de A F, D B, seront commensurables entr'elles. Partant la toute A B, composée de A D, D B, estans commensurables en longitude à D B : A D, D B, seront commens. en longit. entr'elles. Donc s'il y a, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

e *Coroll.* 16. 10.

f 12. 10.

SCHOLIE.

Soit A B, 30. *C*, 24. *les segmens* [g] *de A B, sont* 6. *&* 24. *&* [h] *celle par laquelle la plus grande peut plus que la moindre, est* 18. *commensurable en longitude à* 30.

g l. 2.

Lemme 17. 10.

h 47. 1.

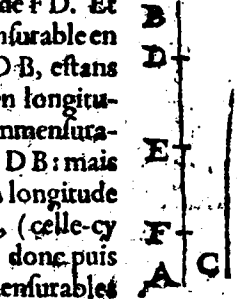
THEOREME 16. PROP. 19. xviij. xiiij.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande l'on applique vn rectangle egal à la quarte partie du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarrée ; & qu'il diuise icelle en parties incommensurables en longitude ; la plus grande pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui sera incommensurable en longitude à icelle. Et si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne incommensurable en longitude à icelle, & qu'on applique

plique à la plus grande vn parallelogramme egal à la quarte partie du quarré de la moindre, defaillant d'vne figure quarrée, il diuisera icelle en parties incommensurables en longitude.

2. *Lemme* 17. 19. Soient deux lignes droictes inegales A B, & C, & à A B, plus grande, soit appliqué vn parallelogramme egal à la quarte partie du quarré de la moindre C, defaillant d'vne figure quarrée, lequel faſſe en A B, les parties A D, D B, incommensurables en longitude. Ie dis que A B, peut plus que C, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommensurable en longitude.

Car ayant faict la conſtruction comme en la precedente, nous monſtrerons comme là, que A B, peut plus que C, du quarré de F D. Et ie dis que F D, eſt incommensurable en longitude à A B: car A D, D B, eſtans poſées incommensurables en longitude, [i] la toute A B, ſera incommensurable en longitude à ſa partie D B: mais D B, eſt commensurable en longitude à la compoſée de A F, D B, (celle-cy eſtant double de celle-là,) donc puis que de deux lignes commensurables D B, & la compoſée de A F, D B, l'vne, ſçauoir D B, eſt incommensurable en longitude à A B: [k] la reſtante compoſée de A F, D B, ſera auſſi incommensurable en longitude à A B. Partant A B, compoſée de A F, D B, comme d'vne, & de F D, eſtant incommensurables en longitude à la compoſée de A F, D B, la meſme A B, [l] ſera auſſi incommenſurable en



i 17. 10.

k 14. 10.

l *Coroll.* 17. 10.

en longitude au reste F D : donc A B, peut plus que C, du quarré de F D, qui luy est commensurable en longitude.

Maintenant, que A B, puisse plus que C, du q. d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude, & qu'on applique à A B, vn parallelogramme egal au quart du q. de C, defaillant d'vne figure quarrée, & faisant en A B, les parties A D, D B. Ie dis que A D, D B, sont incommens. en longitude.

Car demeurant la mesme construction, nous monstrerons, comme auparauant ; que A B, peut plus que C, du q. de F D : parquoy puis que A B, est posée pouuoir plus que C, du q. d'vne ligne qui luy est incom. en long. A B, sera incom. en long à F D : donc la toute A B, comp. de F D, & de A F, D B, comme d'vne, estant incom. en long. à F D. La mesme A B, [m] sera incom. en longit. au reste comp. de A F, D B : mais la comp. de A F, D B, est commens. en long. à D B : (celle-là estant double de celle-cy :) Donc puis que de deux lignes commens. sçauoir la composée de A F, D B, & D B : Icelle composée de A F, D B, est incommens. en long. à A B, [n] la restante D B, sera incommens. en longit. à la mesme A B : parquoy la toute A B, composée de A D, D B, estant incommens. en longit. à D B, [o] icelles A D, D B, seront incommens. en longit. entr'elles. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[m] *Coroll.* 17. 10.

[n] 14. 10.

[o] 17. 10.

SCHOLIE.

Soit A B, 30. & C, 14. Donc les segments A D, D B, seront 15 p. 29. 176. & 15. — 29. 176. incommens. entr'eux, [p] *comme il appert : Et F D, par laquelle*

[p] 2. *Lemme* 17. 10.

laquelle la plus grande peut plus que la moindre eſt 79.704. incommenſ. en longit. à 30. Il aduient de meſme de 12. & 79. 96. Car les ſegmens du plus grand ſont 6.p.79.12.& 6.——79.12.& ce dont le plus grand peut plus que le moindre, eſt 79.48. incommenſ. en longit. à 12.

Iuſques icy Euclide a traitté des grandeurs rationelles & irrationelles. Il traictera des rationelles & mediales cy-apres.

LEMME 1.

Eſtant monſtré que les lignes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance: Mais que celles qui ſont commenſurables en puiſſance, ne le ſont pas touſiours en longitude. Il eſt euident que s'il y a quelque ligne droite commenſ. en longit. à la rationelle propoſée, qu'elle doit eſtre appellée rationelle & commenſurable à icelle, non en longitude ſeulement, mais auſſi en puiſſance. Car les lignes commenſurables en longitude, le ſont touſiours en puiſſance.

Mais s'il y a quelque ligne commenſ. en puiſſ. & longit. à la rationelle propoſée, elle ſera auſſi dicte rationelle & commenſ. à icelle en longit. & puiſſ. Et ſi derechef il y a quelque ligne commenſ. en puiſſ. à la rationelle propoſée, laquelle luy ſoit incommenſ. en longit. elle ſera dite rationelle commenſ. en puiſſance ſeulement à icelle.

LEMME 2. DE PROCLVS.

Il appelle rationelles, les lignes commenſurables en longitude & puiſſance, à l'expoſée rationelle, ou en puiſſance

puiſſance ſeulement. Il y a auſſi d'autres lignes qui ſont incommenſ. en longit. à l'expoſée : mais commenſ. en puiſſ. ſeulement : Et partant ſont dites derechef rationelles & commenſ. entr'elles, entant que rationelles commenſ. dis-je entr'elles en longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement : Et ſi en longit. elles ſont dites rationelles commenſ. en longit. entr'elles, afin que l'on les entende auſſi commenſ. en puiſſ. Mais ſi elles ſont commenſ. en puiſſ. ſeulement entr'elles, ſeront dites rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement entr'elles.

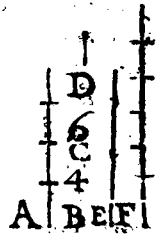
SCHOLIE.

De ces choſes l'on peut colliger qu'il y a trois ſortes de lignes rationelles commenſ. en longit. entr'elles. Car de deux lignes rationelles commenſ. en longit. entr'elles, l'une eſt egale à la rationelle propoſée : & partant toutes deux commenſurables en longitude à la rationelle, ou l'une ny l'autre ne luy eſt egale, & toutesfois toutes deux commenſurables en longitude, à icelle rationelle propoſée. Ou finalement l'une & l'autre eſt commenſurable à l'expoſée rationelle en puiſſance ſeulement. Or l'on trouvera ces trois ſortes de lignes comme s'enſuit.

Soit A rationelle propoſée, diviſée en quatre parties egales, ſçavoir en autant qu'il y a d'unitez au nombre B. Et prenant quelqu'autre nombre C, ſoit D, egale à une des parties de A, & autant de fois que D meſure A, qu'elle meſure auſſi quelqu'autre E, autant de fois. Et autant de fois que l'unité eſt en C, que D en meſure auſſi quelqu'autre F.

D'autant donc que A, E, ſont compoſées de parties egales

egales en multitude, & chacune deſquelles parties eſt egale à D, icelles ſeront egales. Derechef, D meſurant les trois A, E, F, elles ſeront commenſ. en longit. Parquoy E, F, eſtant commenſ. en longit. à la rationelle propoſée A, ſont rationelles. Mais elles ſont monſtrées commenſ. en longit. entr'elles, eſtant D leur commune meſure : Donc E F,



ſont trouuées rationelles, commenſurables en longitude entr'elles, & à l'expoſée rationelle A, l'vne deſquelles, ſçauoir E, eſt egale à icelle A.

Maintenant qui D, meſure deux quelconques lignes C, E, par deux nombres F, G, differens de B: en ſorte que l'vne ny l'autre C, E, ne ſoit egale à A, les trois A, C, E, ſeront commenſ. en longit. comme a eſté dit, ayant D pour commune meſure. Donc C, E, ſont ration. commenſ. en longitude à la ration. propoſée A: & le ſont auſſi entr'elles. Donc deux lignes rationelles ſont trouuées, ſçauoir C, E, commenſ. en longit. entr'elles; & à la rationelle propoſée A, Dont l'vne ny l'autre n'eſt egale à A, expoſée rationelle.

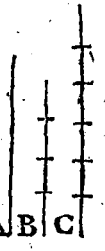


q 11.10. Finalement, ſoit trouuée B, incommenſ. en long. ſeulement à la ration. expoſée A, & ayant coupé B, en tant de parties egales que l'on voudra, ſoit priſe C, compoſée de tant de parties egales que l'on voudra, chacune deſquelles ſoit egale à vne des parties de B. Cela eſtant, B, C, ſeront commenſurables en longitude, & chacune ſera commenſ. en puiſſance ſeulement

ment à A. Car A, B, estant commens. en puiss. le q. de A, sera commens. au q. de B : mais le q. de C, est aussi commens. au q. de B, estant B, C, commens. en longit. & partant en puiss. [r] Donc les quarrez de A & C, seront aussi commens. entr'eux. Parquoy C, est commens. en puiss. à A : & puis que des deux B, C, commens. en longit. l'une, sçauoir B, est incommens. en longit. à A: [s] l'autre C, sera aussi incommens. en long. à la mesme A. Donc C, est seulement commens. en puiss. à A, & puis que B, C, commens. en puiss. à la ration. exposée A, sont ration. L'on aura trouué deux lignes ration. B, C, commens. en longit. entr'elles. Mais commens. en puiss. seulement à la rationelle exposée A. Ce qui est proposé.

[r] 12. 10.

[s] 14. 10.



Que si on desire trouuer quelconques lignes ration. commens. en longit. entr'elles (voyez la seconde figure) soit prise quelconque mesure D, & soient composées tant de lignes que l'on voudra A, C, E, d'autant de parties egales à D, qu'il y a d'unitez en autant de nombres ineaux B, F, G : Car A, C, E, ayans D pour commune mesure, seront commens. en longitude.

Au reste, il est manifeste que toutes les lignes rationelles ne sont pas seulement commensurables à vne exposée rationelle, mais aussi le sont entr'elles. [t] *Car d'autant que les ration. sont celles qui sont commens. à la ration. proposée en longit. & puiss. ou en puiss. seulement :* [v] *mais celles-là lesquelles sont commens. à vne mesme, sont aussi commens. entr'elles. Il appert que quelconques lignes rationelles sont commensurables entr'elles.*

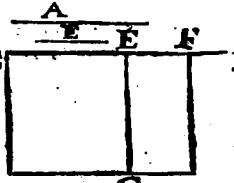
[t] 6. d.

[v] 12. 10.

LEMME 3.

S'il y a deux lignes droictes propoſées, comme la premiere ſera à la ſeconde : ainſi le quarré faict de la premiere ſera au rectangle contenu ſous les deux : & comme la ſeconde à la premiere, ainſi le rectangle contenu ſous icelles au quarré de la premiere.

Soient les deux lignes A, E. Ie dis que comme A eſt à E, ainſi le quarré de A, au rectangle ſous A, E. De C D, ſi grande qu'il ſera de beſoin, ſoit priſe C E, egale à A, & du reſte E D, ſoit auſſi priſe E F, egale à E, & ſoit deſcrit C G, quarré de C E, & accomply le rectangle G F, contenu ſous C E, E F : D'autant donc que



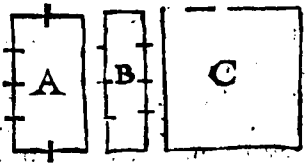
a 1. 6. *comme C E, à E F, c'eſt à dire A à E, ainſi le parallelogramme C G, c'eſt à dire le quarré de A, eſt au parallelogramme G F, contenu ſous A & E : la Propoſition eſt manifeſte. Semblablement comme E, à A, ainſi le rectangle F G, au quarré G C. Ce qui eſt propoſé.*

LEMME 4.

L'eſpace ou ſuperf. commenſurable à vne eſpace rationel, eſt auſſi rationel.

Soit l'eſpace A, commenſurable à l'eſpace rationel B. Ie dis que A eſt rationel : car ſoit C, quarré de la rationelle

rationelle proposée : [b] *d'autant que B est rationel, il sera commensurable au quarré rationel C, & G commensurable à B : mais A est*



b 9.d.

aussi commensurable à B. Donc A & C, [c] *estans commensurables à B, seront commensurables entr'eux. Partant l'espace A, estant commensurable à C quarré de la rationelle proposée,* [d] *est rationel. Ce qu'il falloit demonstrer.*

c 12.10.

d 6.d.

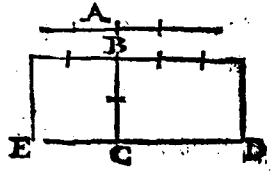
THEOREME 17. PROP. 20. xix. xv.

Le rectangle contenu sous deux lignes rationelles commensurables en longitude, selon quelqu'vne des manieres deuant dictes, est rationel.

Soit la rationelle exposée A, & le rectangle B D, contenu sous B C, C D, rationelles commensurables en longitude, selon quelqu'vne des manieres [e] cy-deuant dites. Ie dis qu'iceluy est rationel.

e *Sch.* 19. 10.

Car de l'vne d'icelles, comme de B C, soit descrit le quarré B E: D'autant donc que B C, est rationel commensurables à la rationelle proposée A, ou en longitude & puissance, ou en puissance seulement : [f] son quarré B E, sera commens. au q. de



f 3.d.

g 9. d. A : Mais le q. de A eſt rationel, g donc B E, commenſ. à iceluy, ſera rationel : mais B C, c'eſt à dire E C, C D, eſtans commenſ. en longit. (car elles ſont poſées ration. commenſ. en longit. entr'elles.) Et
h 1. 6. comme h E C, eſt à C D, ainſi E B à B D : i E B, B D,
i 10. 10. ſeront auſſi commenſ. k Parquoy B D, commenſ. à
k 1. *Lemme* 49. 10. l'eſpace rationel B E, eſt auſſi rationel. Donc le rectangle contenu ſous deux lignes ration. commenſ. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit B C 3. & C D 4. le plan B D, ſera 12. ou bien ſoit la ligne B C, yq. 3. & C D, yq. 12. le rectangle B D, contenu ſous B C, C D, ſera yq. 36. c'eſt à dire 6. Semblablement ſi on poſe B C, yq. 8. & C D, yq. 18. le plan fait d'iceux eſt yq. 144. c'eſt à dire 12. tous leſquels plans ſont rationaux, ces nombres ayans meſme raiſon entr'eux que nomb. q. à nomb. q.

xx. xvj. THEOREME 18. PROP. 21.

Si vn rectangle rationel eſt appliqué à vne ligne rationelle : il fait la latitude rationelle commenſurable en longitude à la ligne à laquelle il eſt appliqué.

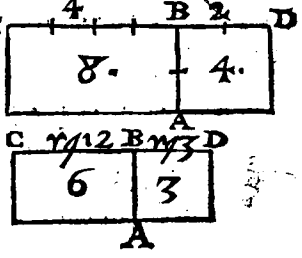
C'eſt à dire, ſi vn rectangle rationel a vn coſté rationel, il aura auſſi l'autre coſté rationel, & iceux coſtez ſeront entr'eux commenſ. en long.

l 45. 1. Soit la rationelle A B, l à laquelle ſoit appliqué le rectangle rationel A C, faiſant la latitude B C.

Ie

le dis que B C, eſt rationelle commenſurable en longitude à A B.

Car ſur A B, ſoit deſcrit le quarré A D, [m] lequel ſera rationel: mais comme le rectangle C A, eſt au quarré A D: [n] ainſi C B, eſt à B D, ou à B A, ſon egale. Or le rectangle A C, & le quarré A D, ſont rationaux: & partant commenſ. Donc [o] C B, & B D, ou B A, ſeront commenſ. en long. Mais A B, eſt rationelle: donc B C ſera auſſi rationelle. Partant ſi vn eſpace rationel, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



m 8. d.

n 1. 6.

o 10. 10.

SCHOLIE.

Soit l'eſpace A C, 6. & la ligne droicte A B, γq. 3. C B, ſera γq. 12. laquelle eſt commenſ. en longit. à γq. 3. eſtant double d'icelle. Derechef ſoit A C, 12. & la ligne droicte A B, γq. 8. C B. ſera γq. 18. & γq. 18. eſt à γq. 8. comme 3. à 2. Car ſi γq. 18. eſt diuiſée par γq. 8. le quotient ſera γq. 2. $\frac{1}{4}$. c'eſt à dire γq. $\frac{9}{4}$. qui eſt $\frac{1}{2}$.

LEMME 1.

Vne ligne droicte pouuant vn eſpace irrationel eſt irrationelle.

Soit quelconque ligne droicte pouuant vn eſpace irrationel, c'eſt à dire, que le quarré d'icelle ſoit egal à

quelque ſuperficie irrationelle. Ie dis qu'icelle ligne
q 20. 10. *eſt irrationelle. Car autrement le q quarré d'icelle ſera rationel : Ce qui eſt abſurde, eſtant poſé irrationel: Donc elle eſt irrationelle. Ce qui appert auſſi par la vnzieſme Definition.*

LEMME 2.

Trouuer deux lignes droictes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement.

r 11. 10. *Soit trouuée r vne ligne droite incommenſurable en longitude ſeulement à vne ligne droite rationelle propoſée, icelles ſeront les requiſes : Car eſtans com-*
ſ 6. d. *menſurables en puiſſance ſeulement, elles ſ ſeront auſſi rationelles.*

Et ſi à la ligne trouuée ou trouue encore vne autre ligne commenſurable en puiſſance ſeulement moindre
t 11. 10. *ou plus grande que la rationelle propoſée, t les trois*
12. 10. *ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement.* v *Et*
v 6. d. *partant rationelles.*

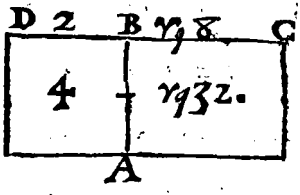
xxj. xix. THEOREME 19. PROP. 22.

Le rectangle contenu ſous deux lignes droictes rationelles, commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt irrationel : & la ligne droicte pouuant iceluy eſt irrationelle. Soit icelle appellée mediale.

Soit le rectangle A C, contenu ſous les deux lignes rationelles A B, B C, commenſurables en puiſſance ſeulement. Ie dis que A C eſt irrationel,

&c

& la ligne qui peut iceluy eſt auſſi irrationelle, & icelle ſoit appellée mediale: Car ſur AB, rationelle ſoit deſcrit le quarré AD.



[x] Donc AD, ſera rationel. Et d'autant que AB, ou DB, ſon egale, eſt incommenſurable en longitude à BC, & que comme DB, eſt à BC, [y] ainſi DA, eſt à AC: [z] AD, ſera auſſi incommenſurable à AC: mais le quarré AD, eſt rationel: donc [a] le rectangle AC, ſera irrationel. [b] Partant la ligne droicte qui peut le rectangle AC: c'eſt à dire de laquelle le quarré eſt egal à AC, eſt irrationelle. Soit icelle appellée mediale, ou moyenne proportionelle entre AB, BC: d'autant que le quarré d'icelle [c] eſt egal au rectangle AC, contenu ſous AB, BC. Donc le rectangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

x 8. d.
y 1. 6.
z 10. 10.
a 10. d.
b *Lem.* 1. 21. 10.
c 17. 6.

SCHOLIE.

Il faut icy entendre que toute ligne moyenne proportionelle, entre deux lignes rationelles commenſ. entr'elles, en puiſſ. ſeulement, ſera appellée mediale. [d] *Car puis que le q. d'icelle eſt egal au rect. contenu ſous telles lignes ration. lequel nous auons monſtré irrationel, le coſté d'iceluy, ſçauoir la moyenne proportionelle entre icelles ration. ſera irration. laquelle ſera appellée mediale. D'où nous deſcrirons facilement la ligne mediale, diſans que:*

d d. 17. 6.

C'eſt vne ligne irrationelle moyenne proportionelle entre deux lignes rationelles commenſ.

entr'elles en puiſſance ſeulement. Ou bien celle-là qui peut vn rectangle contenu ſous deux lignes rationelles commenſurables entr'elles en puiſſance ſeulement. Car cette ſeule ligne ſera appellée en ce lieu mediale.

Et le quarré d'icelle, ou rect. irration. qu'elle peut, eſt auſſi medial, d'autant qu'il eſt moyen proportionel entre les quarrez d'icelles lignes ration. commenſ. entr'elles en puiſſ. ſeulement : tout de meſme qu'icelle eſt moyenne proport. entre icelles lignes ration. Or tout rect. medial n'eſt pas touſiours contenu ſous deux lignes ration. commenſ. en puiſſ. ſeulement, comme eſt le medial A C, comme il ſera monſtré à la 25. & 26. de ce liure.

Soit la ligne droicte A B, 2. & B C, 7 9. 8. le rect. A C ſera 7 9. 32. lequel eſt irrationel, il ſera auſſi appellé mediał. Or la ligne qui peut iceluy qui eſt 7 9 9. 32. eſt appellée mediale.

xxij. xx. THEOREME 20. PROP. 23.

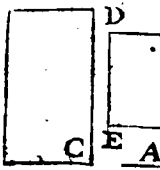
Le quarré d'vne ligne mediale appliqué à vne ligne rationelle, faict la latitude rationelle, & incommenſurable en longitude à la ligne à laquelle il eſt appliqué.

45. 1. Soit la mediale A, & la rationelle B C, à laquelle ſoit appliqué le rectangle B D, egal au quarré de la mediale A, faiſant la latitude ou coſté C D. (Ou pour l'appliquer plus briefuement que par la

c 11. 6. 45. du 1. aux deux lignes B C, & c A, ſoit trouuée la troiſieſme

troisiesme proport. C D, le rectangle B D, contenu sous B C, C D, [f] sera egal au quarré de A) Ie dis que C D, est rationelle, incommensurable en longitude à B C. f 17.6.

Car d'autant que A est mediale, [g] elle peut vn rectangle contenu sous deux lignes ration. commens. en puiss. seulement: lequel soit E G, sous E F, F G, ration. mais elle peut aussi B D: Donc B D, & E G, sont egaux: [h] & estans equiangles, ils auront les costez reciproques autour des angles egaux, sçauoir comme B C, à E F, ainsi F G, C D: Partant comme [i] le quarré de B C, au quarré de E F, ainsi le quarré de F G, au quarré de C D: mais le quarré de B C est commensurable au quarré de E F, B C, E F, estans ration. [k] donc le quarré de F G, est aussi commensurable au quarré de C D, donc B F G, C D, sont au moins commensurables en puissance: mais F G, est posée ration. donc C D, sera aussi rationelle.



g 22.10.
h 14.6.
i 22.6.
k 10.10.

Ie dis aussi qu'elle est incommens. en longitude à B C. Car d'autant que E F, F G, sont ration. commens. en puiss. seulement: & comme E F, à F G, [l] ainsi le q. de E F, au rect. E G, [m] le q. de E F, sera incommens. au rect. E G: & partant aussi au rectangle B D.

l 3. *Lemme* 19.10.
m 10.10.

Mais le quarré de E F, est commensurable au quarré de C D, (E F, C D, estans monstrées rationelles.) Donc le [n] quarré de C D, & le rectangle B D, sont incommensurables: mais le [o] quarré de C D, est au rectangle B D, comme C D, à B C. [p] Donc C D, B C, sont incommensurables en longi-

n 13.10.
o 3. *Lemme* 19.10.
p 10.10.

tude : Donc C D, eſt rationelle commenſurable en puiſſance ſeulement à la rationelle B C, c'eſt à dire incommenſurable en longitude. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

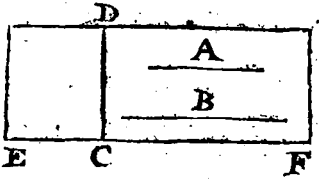
Soit le quarré de A, yq. 40. & B C, 2. Donc ſi l'on applique à B C, yq 40. la latitude qu'elle fera, c'eſt à dire, l'autre coſté C D, ſera yq. 10. leſquels ſont entr'eux, comme 5. à 2. qui n'eſt comme nombre quarré à nombre quarré, & partant incommenſurables en longitude, mais commenſurables en puiſſance. Derechef, ſoit C B, yq. 5. à laquelle yq. 40. appliquée fera yq. 8. pour la latitude ou coſté C D, qui ſont entr'eux, comme 5. à 8. & partant commenſurables en puiſſance ſeulement, comme il eſt dit.

THEOREME 21. PROP. 24.

La ligne droicte commenſurable à vne ligne mediale, eſt auſſi mediale.

Soit A, mediale, & à icelle A, ſoit B commenſurable. Ie dis que B eſt mediale.

Car ſoit expoſée C D, rationelle, à laquelle ſoit q 45. 1. appliqué le rectãgle D E, egal au quarré de la mediale A, faiſant la latitude E C : r 13. 10. donc E C, eſt rationelle incommenſurable en longitude à C D. Derechef, à C D, ſoit appliqué le rectangle



rectangle D F, egal au quarré de B, faisant la latitude C F. Donc d'autant que A & B, sont posées commensurables, leurs quarrez, c'est à dire les rectangles D E, D F, egaux à iceux, seront commensurables, [f] mais comme E D, à D F, ainsi la ligne E C, est à C F. [t] Donc E C, C F, sont commensurables en longitude. Mais E C, est demonstrée rationelle & incommensurable en longitude à C D: [v] donc C F, est aussi rationelle, & incommensurable en longitude à C D. Donc D C, C F, sont rationelles commensurables en puissance seulement, [x] & partant la ligne droicte B, pouuant le rectangle D F, contenu sous icelles C D, C F, est mediale. Ce qu'il falloit demonstrer.

[f] 1. 6. [t] 10. 10. [v] 14. 10. [x] 22. 10.

COROLLAIRE.

De cette demonstration, il est manifesté qu'vn espace medial commensurable à vn espace medial, est aussi medial: car apres qu'il a esté demonstré que D F, est commensurable au rectangle medial D E, de là on a monstré que D F, est aussi medial, contenu sous les rationelles C D, C F, commensurables en puissance seulement.

SCHOLIE.

Soit A, 99. 48. & B, 99. 243. C D, 3. Donc E C, sera 99. 5. $\frac{1}{3}$. mais D F, 99. 27. lesquelles sont entr'elles comme 4. à 9. Mais si A estoit 99. 12. & B, 99. 27. & C D, 3. E C, seroit 99. 1 $\frac{1}{3}$. & C F, 99. 3. lesquelles sont comme 2. à 3.

LEMME

LEMME 1.

Ce qui a eſté dit des lignes rationelles au Lemme de la 19. Prop. ſera icy dit des mediales : ſçauoir que la ligne droite commenſ. en longit. à vne mediale, ſera auſſi mediale & commenſ. à icelle, non ſeulement en longit. mais auſſi en puiſſ. Car vniuerſellement les lignes commenſ. en longit. ſont auſſi commenſ. en puiſſ. mais s'il y a quelque ligne droite commenſ. en longit. & puiſſ. à vne ligne mediale, elle ſera dite mediale commenſ. à icelle en longit. & puiſſ. Que ſi quelque ligne eſt commenſ. à vne mediale en puiſſ. & incommenſ. à icelle en longit. elle ſera auſſi dite mediale commenſ. en puiſſ. ſeulement à icelle.

LEMME 2.

Trouuer deux lignes droites mediales commenſurables en longitude : ſemblablement en trouuer deux commenſurables en puiſſance ſeulement.

Soit vne mediale A, à laquelle ſoient trouuées deux lignes droictes commenſurables B & C : celle-là en longitude, & celle-cy en puiſſance, l'vne & l'autre B, C, commenſurables à la mediale A, ſera mediale. Donc puis que A & B, ſont commenſurables en longitude, & A, C, en puiſſance ſeulement; les lignes A, B, ſeront trouuées mediales commenſ. en longit. & A, C, auſſi mediales commenſ. en puiſſ. ſeul. Ce qui eſt propoſé.

10. 14.

A ——————

B ——————

C ——————

SCHOLIE.

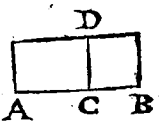
SCHOLIE.

Combien que toute ligne droite commenſ. à vne mediale, ſoit mediale; toutefois toute ligne mediale n'eſt pas commenſ. à quelconque ligne mediale que ce ſoit: d'autant que deux mediales ſe peuuent trouuer, leſquelles ſont totalement incommenſ. ſçauoir eſt en longit. & puiſſ. comme il eſt manifeſte par la 36. Prop. de ce liure, par laquelle eſt monſtrée la maniere de trouuer deux mediales incommenſurables en longitude & puiſſance.

THEOREME 22. PROP. 25.

Le rectangle contenu ſous deux lignes droictes mediales, commenſurables en longitude, eſt medial.

Soit le rectangle A D, contenu ſous les mediales A C, C D, commenſurables en longitude. Ie dis que A D, eſt medial: Car ſur la mediale C D, ſoit deſcrit le quarré B D, lequel ſera medial. Et d'autant que comme A C, eſt à C B, ainſi A D, à D B: Mais A C, C B: c'eſt à dire A C, C D, ſont commenſurables en longitude, A D, D B, ſeront auſſi commenſurables. Partant l'eſpace A D, commenſurable à l'eſpace medial, [a] eſt medial: donc le rectangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 1. 6.



a *Coroll.* 24 10.

SCHOLIE.

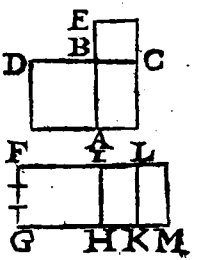
SCHOLIE.

Soient les mediales commenſ. en longit. A C, γqq. 32. & C D, γqq. 2. le rect. A D, contenu ſous icelles, ſera γqq. 64. c'eſt à dire γqq. 8. Car γqq. 32. & γqq. 2. ſont commenſ. en longit. ſçauoir comme 2. à 1. Car ſi on diuiſe γqq. 32. par γqq. 2. le quotient ſera γqq. 16. c'eſt à dire 2.

xxv. xxiij. THEOREME 23. PROP. 26.

Le rectangle contenu ſous deux lignes droictes mediales commenſurables en puiſſance ſeulemẽt, eſt rationel ou medial.

Soit le rectangle A C, contenu ſous les mediales A B, B C, commenſurables en puiſſance ſeulement. Ie dis que A C, eſt rationel ou medial.



Car de A B, B C, mediales, ſoient deſcrits les quarrez A D, C E, [a] leſquels ſeront mediaux. Et ſoit expoſée la rationelle F G, [b] à laquelle ſoient appliquez les rectangles F H, H L, L M, egaux à A D, A C, C E : F M, ſera vn ſeul rectangle. Et A D, C E, eſtans mediaux, leurs egaux rectangles F H, L M, ſeront auſſi mediaux, leſquels appliquez à [c] F G, K L, rationelles (car K L, eſt egale à F G) & faiſant les latitudes G H, K M, [d] les lignes G H, K M, ſeront rationelles incommenſurables en longitude à F G, ou K L. Et d'autant

a *Sch.* 22. 10.
b 45. 1.
c 34. 1.
d 25. 10.

rant que A B, B C, ſont commenſurables en puiſſance entr'elles, leurs quarrez A D, C E, & partant leurs egaux rectangles F H, L M, ſeront commenſurables. [e] Mais comme F H, à L M, ainſi G H, à K M: [f] Donc G H, K M, ſeront commenſurables en longitude. e 1. 6. f 10. 10.

Donc puis qu'il eſt monſtré que G H, K M, ſont rationelles & commenſurables en longitude entr'elles, & commenſurables en puiſſance ſeulement à la rationelle propoſée, eſtans monſtrées incommenſurables en longitude à icelle; [g] le rectangle ſous G H, K M, ſera rationel. [h] Et d'autant que comme D B, eſt à B C, ainſi A D, à A C: & comme A B, à B E, ainſi A C, à C E: (D B, B C, eſtans egales à A B, B E, chacune à la ſienne) comme A D, ſera à A C, ainſi A C, à C E: Partant A D, A C, C E, ſeront proportionaux: Parquoy F H, H L, L M, leurs egaux rectangles ſont continuellement proportionelles: [i] mais G H, H K, K M, ſont en meſme raiſon que les rect. F H, H L, L M, elles ſeront donc proport. [k] & le rectangle contenu ſous G H, K M, eſt egal au quarré de H K: mais le rectangle ſous G H, K M, eſt monſtré rationel: donc le quarré de H K, ſera auſſi rationel: donc H K, ſera rationelle, [l] & partant commenſurable à F G, expoſée rationelle, ou à ſon egale H I, ſçavoir en longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeul. Et ſi H K, eſt commenſ. en longit. à H I: c'eſt à dire à ſon egale F G, [m] le rect. I K, ou ſon egale A C, ſera rationel, & ſi en puiſſance ſeulement, [n] le rect. I K, ſera medial ou ſon egal A C: donc le rect. A C, contenu ſous A B, A C, mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement eſt rationel ou medial. Partant le rect. contenu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. g 20. 10. h 1. 6. i 1. 6. k 17. 6. l 6. d. m 20. 10. n 22. 10.

SCHOLIE.

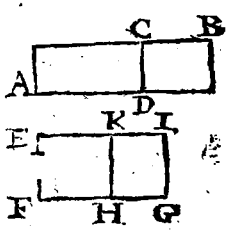
SCHOLIE.

Soient A B, B C, mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, & ſoit A B, γqq. 54. & B C, γqq. 24. le rect. ſous icelles ſera 1296. i. 6. qui eſt rationel. Derechef, ſoit A B, γqq. 128. B C, γqq. 72. le rect. d'icelles ſera γqq. 9216. i. γqq. 6. medial. Or que γqq. 54. & γqq. 24. Item γqq. 128. & γqq. 72. ſoient commenſ. en puiſſ. ſeulement, il appert; car ſi on diuiſe γqq. 54. par γqq. 24. le quotient ſera γqq. $\frac{9}{4}$. i. γqq. $\frac{3}{2}$. Donc γqq. 54. ſera à γqq. 24. comme γq. 3. à γq. 2. Derechef, ſi γqq. 128. eſt diuiſée par γqq. 72. prouiendra γq. $\frac{4}{3}$. Partant γqq. 128. & γqq. 72. ſeront entr'elles, comme γq. 4. à γq. 3. Ce qui ſera auſſi manifeſte par la 28. & 29. Propoſitions.

xxvj. xxij. THEOREME 24. PROP. 27.

Vne eſpace ou figure mediale, n'excede pas vne figure mediale, d'vne figure rationelle.

Soit A B, figure mediale, laquelle excede la mediale A C, de la figure D B. Ie dis que D B, n'eſt pas rationelle.



Car ſoit D B, rationelle, s'il eſt poſſible: & ſoit expoſée la rationelle E F, ſur laquelle ſoit appliqué le rectangle E G, egal à la mediale A B, & le rectangle E H, egal à la

45. 1.

mediale

mediale A C, par ainſi le reſte H I, ſera egal à la rationelle D B. Et E G, E H, ſeront mediaux, eſtans egaux aux mediaux A B, A C, & H I, rationel, eſtant egal à la figure rationelle D B, & E G, E H, eſtans appliquez ſur la rationelle E F, [a] ils auront les autres coſtez F G, F H, rationaux incommenſurables en longitude à E F. a 23.10.

Derechef, puis que H I, ration. eſt appliqué à la ration. E F, [b] c'eſt à dire à H K, ſon egale, la ligne H G, ſera ration. commenſ. en longit. à la meſme E F, ou H K. Mais F H, eſt ration. incomm. en long. à E F; [d] Donc F H, eſt incomm. en long. à H G; [e] mais comme F H, à H G, ainſi le q. de F H, au rect. contenu ſous F H, H G: [f] donc le q. de F H, eſt incommenſurable au rectangle contenu ſous F H, H G. Mais les quarrez de F H, H G, ſont commenſ. entr'eux, (car l'vn & l'autre ſont deſcrits ſur les ration. F H, H G,) & [g] partant les deux quarrez F H, H G, enſemble ſont commenſ. au q. de F H; Et deux fois le rect. ſous F H, H G, eſt commenſ. au rect. F H, H G, l'vne eſtant double de l'autre. Donc les deux q. de F H, & H G, enſemble [h] ſont incommenſ. à deux fois le rect. ſous F H, H G. Donc le compoſé des quarrez F G, H G, & du rect. deux fois ſous F H, H G; c'eſt à dire le q. de F G, egal [i] à iceux quarrez & rect. [k] eſt incommenſ. au compoſé des quarrez F H, H G, [l] lequel eſt rationel, eſtant commenſ. au q. ration. de F H. b 34.1. c 21.10. d 14.10. e *Lemme* 3.19.10. f 10.10. g 16.10. h *Sch.* 14.10. i 4.2. k 17.10. l *Lem.* 4. 19.10.

Donc puis que le q. de F G, eſt incomm. au compoſé des deux quarrez F H, H G, qui eſt ration. [m] il ſera auſſi irration. [n] & F G, irration. Ce qui eſt abſurde; car elle a eſté monſtrée ration. comm. en long. à E F. Donc H I, ou ſon egal D B, n'eſt pas ration. donc vne figure, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. m 10.d. n 11. d.

SCHOLIE.

Soit A D, C B, prises pour vne seule ligne, 799. 19683. mais A D, 799.3888. & C D, 799.1875. Donc le rect. A B, sera 79.6075. & A C, 79.2700. estant celuy-cy de celuy-la, restera D B, 79.675. L'on trouuera le mesme rect. estant A D, de A D, C B, comme d'vne, & multipliant la restante C B, 799. 243. par D C, le rectangle D B, sera aussi 79.675, Et si la rationelle E F, est 3. F H, sera 79.300. & H G, 79.75. Or que D B, soit medial, il est manifesté par les nombres.

AVTRE SCHOLIE.

Vne figure rationelle, excede vne figure rationelle d'vne figure rationelle. Car que E G, figure rationelle excede E H, rationelle de H I. Ie dis que H I, est
p 9. d. *ration, car E G, E H, estant ration. o elles seront com-*
p 12.10. *mens. au q. de la ration, E F, p & partant commens. ent'elles. Donc le tout E G, composé de E H, K G,*
q Cor. 16. 10. *estant commens. à E H, q il sera aussi commens. a l'autre partie K G. Mais E G, est rationel: r Donc K G,*
r Lemme 4. 19. 10. *sera aussi rationel. Ce qui est proposé.*

xxvj.

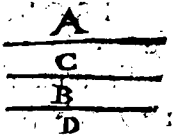
PROBLEME 4. PROP. 28.

Trouuer deux lignes mediales, commensurables en puissance seulement, contenant vn rectangle rationel.

s Lemme 2. Soient exposées s les deux rationelles A, B, commensurables

mensurables en puissance seulement, [t] & soit trouué C, moyenne proportionelle entre A & B, & comme A est à B, [n] ainsi C, soit à D. Ie dis que C D, sont mediales commensurables en puissance seulement, lesquelles contiennent vn rectangle rationel. t 13. 6. v 12. 6.

Car puis que A, B, sont posées rationelles commensurables en puissance seulement, [x] le rectangle contenu sous A, B, sera irrationel, appellé mediale. [y] Mais C, peut iceluy rectangle, partant elle sera mediale: Et puis que comme A est à B, ainsi C à D, & A B, sont commensurables en puissance seulement, [z] C, D, seront aussi commensurables en puissance seulement: & partant D, commensurable à la mediale C, sera aussi mediale: donc nous auons trouué C D, mediales, commensurables en puissance seulement. Ie dis qu'elles contiennent vn rectangle rationel. Car puis que A, est à B, comme C à D, en changeant A sera à C, comme B à D: mais comme A à C, ainsi C à B; Donc C sera aussi à B, comme B à D: partant B, moyenne proportionelle entre C & D, pourra le rectangle contenu sous C D: mais le quarré de B, ligne rationelle, est rationel: donc le rectangle sous C D, sera aussi rationel. Partant nous auons trouué C D, mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent vn rectangle rationel. Ce qu'il falloit faire. x 22. 10. y 17. 6. z 10. 10. 24. 10. 17. 6.



SCHOLIE.

Soit A, 799.20. B, 799.32. pareil C, moyenne proportionelle sera 799.240. Et A estant à B comme C à D, D sera 799.86. $\frac{2}{3}$. Mais 799.240. & 799.86. $\frac{2}{3}$. sont commens. en puiss. seulement comme 5. à 3. & le rect. venant sous iceux est 799.20736. c'est à dire 12. reul au q. de 799.12. qui est aussi 12. Semblablement si A estoit 799.20. & B, 799.80. C, seroit 799.32000. & D, 799.1280. & le rectangle sous C D, est 799.40960000. c'est à dire 80. reul au q. de 799.80. qui est aussi 80.

xxviij. o

PROBLEME 5. PROP. 29.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en puissance seulement: lesquelles contiennent vn rectangle medial.

a 2. *Lemme* 21. 10.
b 13. 6. 12. 6.

Soient a prises les trois rationelles A, B, C, commens. en puiss. seulement: b & entre A & B, soit trouuée la moyenne proport. D, puis soit faict comme B à C, ainsi D à E. Ie dis que D & E sont mediales commens. en puiss. seulement, & contiennent vn rect. medial.

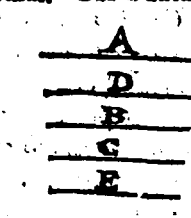
c 17. 6. 22. 10.

Car puis que A & B sont ration. commens. en puiss. seulement, le rectangle sous A & B, & partant le q. de D egal c à iceluy, sera irrationel, lequel est dit medial, & la ligne D, pouuant iceluy mediale.

Et puis que B, est à C, comme D à E, & B C, sont ration. commens. en puiss. seulement, D, & E sont aussi commens. en puiss. seulement. Donc puis

que

que D eſt mediale, d E, commenſ. en puiſſ. ſeule- d 24.10.
ment à D, ſera auſſi mediale. Ie dis que D & E, contiennent vn rectangle medial. Car d'autant que B eſt à C, comme D à E, en changeant comme B, ſera à D, ainſi C à E; mais comme B à D, ainſi D à A: donc comme D ſera à A, ainſi C ſera à E. e Donc le rectangle contenu ſous D & E, eſt egal au rectangle ſous A C: mais le rectangle contenu ſous A, C, rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt irrationel & medial: f Donc le rectangle ſous D E, eſt auſſi medial, donc D, E, ſont les mediales requiſes. Ce qu'il falloit faire.



e 16.6

f 22.10.

SCHOLIE 1.

Soit A 20. B 99. 200. C 99. 80. Partant D, moyenne proport. ſera 99. 80000. Mais comme B à C, ainſi D à E, laquelle ſera 99. 12800. Or 99. 80000. & 99. 12800, ſont comme 5 à 2. & partant commenſ. en puiſſance. Et le rectangle contenu ſous icelles eſt 99. 1024000000. c'eſt à dire 99. 32000. egal au rectangle contenu ſous 20. & 99. 80.

SCHOLIE 2.

Ce Probleme eſt neceſſaire à ce qui eſt cy-apres.

Trouuer deux nombres plans ſemblables.

Soient pris quatre nombres quelconques proportionaux,

tionaux, A, B, C, D,
ſçauoir que A ſoit à C,
comme B à D.

A, 6. C, 12.

Or A multipliant B, B, 4. D, 8.
faſſe E, & C multipliant
D, faſſe F, E, F, ſeront E, 24. F, 96,
nombres plans ſemblables, attendu qu'ils ont les coſtez proport. comme il eſt manifeſte par la conſtruction.

g 28.29. prop. Or g puis qu'il a eſté demonſtré au 9. liure : que ſi vn nombre impair, ou vn nombre pair, multiplie vn nombre pair, il ſera produict vn nombre pair. Mais ſi vn nombre impair multiplie vn nombre impair, il produira vn nombre impair. Il eſt manifeſte par quelle maniere l'on pourra trouuer deux nombres pairs ſemblables, leſquels ſoient tous deux nombres plans, ou tous deux impairs, ou bien l'vn ſoit pair, & l'autre impair.

Car ſi les coſtez pris ſont nombres pairs, leurs plans ſeront auſſi pairs : mais ſi les nombres ſons impairs, leurs plans ſeront auſſi impairs : mais ſi les coſtez d'vn des nombres ſont nombres impairs & les coſtez de l'autre ſont pairs, le nombre plan de ceux-là ſera impair : mais de ceux-cy pair. Semblablement ce ſeront plans pairs, ſi vn chacun a vn coſté nombre pair, & l'autre impair, &c.

LEMME 1.

Trouuer deux nombres quarrez tels que le compoſé des deux, ſoit auſſi nombre quarré.

h Scho. prec. Soient h trouuez deux nombres plans ſemblables A B, & C, tous deux pairs, ou tous deux impairs.

Et d'autant que ſi on oſte vn nombre pair d'vn nombre pair, ou d'vn nombre impair vn nombre pair, le reſte eſt pair ; ayant oſté B D, de A B, lequel D B, ſoit egal à C, le reſte A D, ſera pair, lequel diuiſé en deux egalement à E. Ie dis que le nombre faict de A B, en B D, [k] lequel eſt nombre quarré, compoſé auec le quarré du nombre E D, faict vn nombre quarré. [i] 24. & 26. 9. [k] 1. 9.

Car d'autant que le nombre A D, eſt diuiſé en deux egalement par E, & à iceluy eſt adiouſté D B, [l] le nombre produict de A B, en B D, auec le quarré du nombre D E, eſt egal au quarré du nombre E B. Donc les deux nombres quarrez, ſçauoir celuy qui eſt faict de A B, en B D, & le quarré du nombre D E, compoſez, ſont vn nombre quarré, ſçauoir celuy qui eſt produict de B E. Ce qui eſt propoſé.

A ..5.. E..5.... D..8..... B 18.
C 8

[l] 6. Theo. 14. 9. ou 6. 2.

COROLLAIRE.

De ce qui eſt dit cy-deſſus, il eſt manifeſte que lors que A B, & C, ſont ſemblables, en la meſme maniere l'on a trouué les deux quarrez des nombres B E, E D : l'excez deſquels, ſçauoir le nombre faict de A B, en B D, eſt auſſi nombre quarré.

Mais ſi on prend les nombres A B, & C, non ſemblables, & neantmoins tous deux pairs ou impairs : en la meſme maniere l'on aura trouué les deux quarrez des nombres B E, E D, l'excez deſquels, ſçauoir le nombre qui eſt faict de A B, en B D, n'eſt pas nombre q. Car s'il eſtoit nombre q. les nombres A B, B D, c'eſt à dire A B, & C, ſeroient [i] 2. 9.

plans ſemblables. Ce qui eſt abſurde : car ils ſont poſez non ſemblables.

SCHOLIE.

Partant, s'il faut trouuer deux nombres quarrez, l'exces deſquels ſoit auſſi nombre q. nous prendrons comme auparauant, deux nombres plans ſemblables, tous deux pairs ou impairs, comme A B, & C, & ferons au reſte comme il eſt dit au Lemme prochain 1. Car les quarrez de B E, E D, ſont les requis. Car le q. de B E, excede le q. de E D, du nombre produict de A B, en B D, qui eſt auſſi quarré.

Mais s'il faut trouuer 2. quarrez, dont l'exces ne ſoit q. il faudra prendre deux nombres A B, & C, non ſemblables, tous deux pairs ou impairs, & faire du reſte comme il eſt dit : Car il ſera monſtré ſemblablement que le q. de B E, eſt egal au q. de D E, auec le nombre produit de A B, en B D: partant l'exces des quarrez de B E, & E D, eſt le nombre produit de A B, en B D, lequel n'eſtant quarré: (car s'il eſtoit quarré, A B, B D, ſeroient plans ſemblables : ce qui eſt contre l'hypotheſe) l'on a trouué le requis.

A..5..E..5..D..8..B

C.....8

Nous ferons ce dernier plus facilement, ſi nous diuiſons quelconque nombre quarré en deux nombres, l'vn deſquels ſoit quarré, & l'autre non. Comme ſi 36.

eſt

est diuisé en 16. nombre q. & 20. non q. le nombre q. 36. excedera le nombre q. 16. du nombre 20. non q. Pareillement 36. estant diuisé en 25. & 11. le quarré 36. excedera le quarré 25. du nombre non quarré 11. & ainsi des autres.

LEMME 2.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le composé d'iceux soit nombre non quarré.

Soient m trouuez deux nombres plans semblables A B, & C pairs ou impairs, & soit faicte la construction en sorte que le quarré fait de la multiplication des nombres semblables A B, D B, l'vn par l'autre, auec le q. de D E, soit egal au q. de B E, puis soit retranché de D E, l'vnité E F. Donc le q. de D F, sera moindre que le q de D E, puis que le costé D F, est moindre que le costé D E. Ie dis que les nombres quarrez, l'vn desquels est fait de A B, en B D, & l'autre de D F, par soy-mesme; composez ne font pas vn nombre quarré. m *Lemme preced.*

Car si le composé d'iceux est q. il sera plus grand que le q. de B F, ou egal ou moindre, ce qui ne se peut. Car s'il est plus grand que le q. de B F, le co-

A.2.H..2 I.1 E.F.1 G..3.D...8.....B
C.....8

sté d'iceluy sera plus grand que le costé B F: partant egal au nombre B E, ou plus grand. (Car il ne sera moindre, puis qu'entre B E, B F, differens de l'vnité, il n'y a point de milieu, afin de ne diuiser l'vnité: mais ledit costé seroit milieu entr'eux,

s'il estoit posé plus grand que B F, & moindre que B E.) S'il est dit egal, de sorte que le nombre quarré, composé du q. de A B, en B D, & du q. de B F: soit egal au q. de B E, puis que le nombre produict de A B, en B D, auec le q. de D E: [n] est monstré egal au mesme q. de B E, le nombre de A B, en B D, auec le q. de D F, sera egal au nombre faict de A B, en B D, auec le q. de D E: ostant donc le commun, sçauoir celuy de A B, en B D, le restant q. de D F, sera egal au restant q. de D E: & partant le costé D F, egal au costé D E, la partie à son tout. Ce qui est impossible: Donc le costé du q. composé des quarrez, dont l'vn est fait de A B, en B D, & l'autre de D F, par soy-mesme, n'est egal au nombre B E. Mais il n'est aussi plus grand: car, s'il est possible, soit egal à B I, qui soit plus grand que B E: de sorte que ce dit nombre q. composé, soit egal au q. de B I.

n *Lemme prec.*

A. 2. H. 2 I. 1 E. F. 1 G. 3. D. 8..... B C.....8

D'autant donc que le q. de B I, plus grand costé, est plus grand que le q. de B E, moindre costé: Pareillement le composé des quarrez, dont l'vn est produict de A B, en B D, & l'autre de D F, par soy-mesme (puis que ce composé est posé egal au q. de B I) sera plus grand que le q. de B E. Mais le q. de B E, [o] est monstré egal au nombre faict de A B, en B D, auec le q. de D E.

o *Lemme prec.*

Ostant donc le commun de A B, en B D, le restant q. de D F, sera plus grand que le restant q. de D E; & partant le costé D F, plus grand que le costé D E, la partie que le tout. Ce qui est impossible: donc le costé du q. composé des quarrez de A B, en B D, &

de

de D F, par soy-mesme, n'est pas plus grand que le costé B E : mais il est aussi monstré qu'il n'est pas egal, ny plus petit que B E. Donc ce dit quarré composé, n'est pas plus grand que le quarré B F.

Mais, s'il est possible, soit le nombre de A B, en B D, auec le q. de D F, egal au q. de B F : & soit mis le nombre A H, double de l'vnité E F. D'autant que le tout A D, est double du tout E D (car A D, est diuisé en deux egalement par E) & le retranché A H, double de l'vnité retranchée E F : p le reste H D, sera aussi double du reste F D, & partant H D, est diuisé en deux egalement à F : q Parquoy le nombre fait de H B, en B D, auec le q. de D F, est egal au q. de B F. Mais le nombre fait de A B, en B D, auec le q. de D F, est posé egal au mesme q. de B F. Donc le nombre faict de H B, en B D, auec le q. de D F, est egal à celuy qui est faict de A B, en B D, auec le q. de D F : & ayant osté le commun q. de D F, le nombre faict de H B, en B D, demeurera egal à celuy qui est faict de A B, en B D.

p 7. 7.

q 6. *Theo.* 14. 9.

Partant, puis que H B, A B, multiplians vn mesme nombre, B D, produisent nombres egaux, r & que les multiplians ont mesme proportion que les produicts, H B, sera egal à A B, la partie au tout, ce qui est impossible. Donc le nombre de A B, en B D, auec le q. de D F, n'est egal au q. de B F.

r 18. 7.

Soit finalement, s'il est possible, le nombre de A B, en B D, auec le q. D F, moindre que le q. de B F : & partant le costé d'iceluy, moindre que le costé de B F, lequel soit B G : de sorte que le nombre de A B, en B D, auec le q. de D F, soit egal au q. de B G. Or soit pris A I, double de E G. D'autant donc que le tout A D, est double du tout E D, & le retranché A I, du retranché E G. Derechef, le reste I D, sera

double

A.2. H.. 2 I.1 E. F.1 G.3.. D.... 8..... B C.....8

double du reste G D : & partant I D, sera diuisé en G, en deux egalement : [f] Donc le nombre produict de I B, en B D, auec le q. de D G, est egal au q. de B G. Mais le nombre faict de A B, en B D, auec le q. de D F, est posé egal au mesme q. de B G. Donc le nombre faict de I B, en B D, auec le q. de D G, est egal au nombre faict de A B, en B D, auec le q. de D F : ostant donc les quarrez de D G, D F : dont le q. de D G, est le moindre ; demeurera celuy qui est fait de I B, en B D, plus grand que celuy de A B, en B D, la partie que le tout, ce qui est absurde.

[f] *Theo. 6. 14. 9.*

* Donc le nombre faict de A B, en B D, auec le q. de D F, n'est moindre que le q. de B F. Mais il est aussi monstré n'estre plus grand, ny egal. Donc le nombre faict de A B, en B D, auec le q. de D F, n'est pas nombre q. Ce qui est proposé.

SCHOLIE 3.

De ces choses nous trouuerons facilement deux nombres, tels que le composé des deux n'ait mesme proportion à l'vn ny à l'autre d'iceux, que nombre quarré à nombre quarré. Car si on trouue deux nombres quarrez selon le Lemme precedent, tels que le composé d'iceux ne soit quarré. Iceluy n'aura mesme proportion à l'vn ny l'autre desdits quarrez, que nombre quarré à nombre quarré.

Nous obtiendrons la mesme chose, si nous diuisons quelconque nombre quarré en deux nombres non quarrez : mais le quarré total n'aura mesme pro-

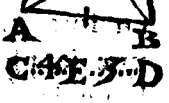
portion

portion à l'vn ny à l'autre de ceux ausquels il est diuisé, que nombre q. à nombre q.

PROBLEME 6. PROP. 30. xxix. xvij.

Trouuer deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement, en sorte que la plus grande puisse plus que la moindre du quarré d'vne ligne droite commensurable en longitude à icelle.

Soit exposée la rationelle A B, [t] & soient trouuez deux nombres quarrez C D, C E, desquels l'excez E D, ne soit quarré, [v] puis comme le nombre C D, est au nombre D E: ainsi le quarré de A B, soit au quarré de quelque ligne A F, & soit accommodée A F, au demy-cercle descrit sur A B, & conioincte F B. D'autant que l'angle F, [x] est droict au demy-cercle, [y] le quarré de A B, sera egal aux deux quarrez de A F, F B: c'est à dire que A B, pourra plus que A F, du quarré de F B, & le quarré de A B, estant au quarré de A F, comme C D, à D E, nombre à nombre. [z] Iceux quarrez de A B, A F, seront commensurables: Et puis que le quarré de A B, est rationel, estant descrit sur la rationelle A B, le quarré de A F, sera aussi rationel: & partant A F, ration. donc A B, A F, sont ration. & commensurable au moins en puissance, & les quarrez de A B, A F, n'estans entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré, icelles A B, A F, seront incommensurables en longitude: mais elles sont



t *Sch.* 2. 29. 10.
v *Coroll.* 6. 10.
x 31. 3.
y 47. 1.
z 6. 10.

sont monstrées commensurables en puissance: donc A B, A F, sont rationelles commensurables en puissance seulement.

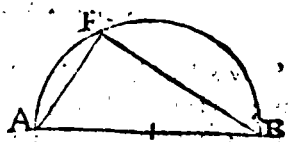
Maintenant, puis que comme C D, est à D E, ainsi le quarré de A B, est au quarré de A F, par conuersion de raison, comme le nombre quarré C D, sera au nombre quarré C E, ainsi le quarré de A B, au quarré de B F: (car comme C D, excede E D, par C E, nombre quarré, ainsi le quarré
9. 10. A B, excede le quarré de A F, du quarré de F B,) Partant les lignes droictes A B, B F, sont commensurables en longitude: Donc nous auons trouué A B, A F, rationelles commensurables en puissance seulement, telles que A B, plus grande, peut plus que A F, du quarré de B F, commensurable en longitude à icelle. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 7. PROP. 31.

xxx. xviij. **Trouuer deux lignes rationelles, commensurables en puissance seulement, en sorte que la plus grande puisse plus que la plus petite, du quarré d'vne ligne incommensurable en longitude à icelle.**

Soit exposée la rationelle A B, [a] & trouuez les
a *Lemme* 29. 10. deux nombres quarrez C E, E D, tels que C D, composé d'iceux, ne soit nombre quarré. Ou soit diuisé C D, nombre quarré, en deux nombres non quarrez C E, E D: ainsi le tout ne sera à aucun d'iceux,

d'iceux, comme nombre quarré à nombre quarré. [b] Puis soit trouuée A F, au quarré de laquelle soit le quarré de A B, comme C D, est à D E, & soit accommodée A F, au demy-cercle descrit sur A B, & soit conioincte F B. [c] Donc A B, pourra plus que A F, du quarré de F B. Et A B, A F, seront rationelles commensurables en puissance seulement. Comme il appert par la demonstration precedente.



b *Coroll.* 6. 10.

c 31. 3.

47. 1.

Mais d'autant que par conuersion de raison (comme cy-deuant) comme C D, à C E, ainsi le quarré de A B, est au quarré de B F: mais C D, C E, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: pareillement les quarrez de A B, B F, ne seront entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, [d] Partant les lignes A B, F B, sont incommensurables en longitude. Donc nous auons trouué deux rationelles A B, A F, commensurables en puissance seulement, telles que A B, plus grande, peut plus que A F, moindre du quarré de F B, incommensurable en longitude à icelle. Ce qu'il falloit faire.

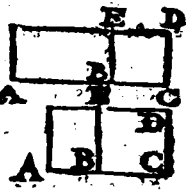
d 9. 10.

LEMME

LEMME.

S'il y a deux lignes droictes inegales, comme la plus grande sera à la plus petite, ainsi le rectangle contenu sous icelles, est au quarré de la plus petite.

Soient deux lignes droictes inegales A B, B C, constituées directement, dont A B, est plus grande. Ie dis que comme A B est à B C, ainsi le rectangle sous A B, B C, est au quarré de C B. Car soit descrit le quarré de B C, & soit acheué le rectangle A D, le rectangle A E, sera contenu sous A B, B C, puis que E B, est egale à B C:



1. 6. *Il est donc manifeste que comme A B, est à B C, ainsi le rectangle A E, est au quarré B C.*

Semblablement, comme la moindre à la plus grande, ainsi le rectangle contenu sous icelles, est au quarré de la plus grande, comme il est manifeste, par la seconde figure, en laquelle A B, est moindre que B C.

xxvj. xiv. xv.

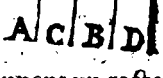
PROBLEME 8. PROP. 32.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, lesquelles contiennent vn rectangle rationel, en sorte que la plus grande puisse plus que la plus petite, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle.

Soient

Soient trouuées A & B, rationelles commen- a 30.10.
surables en puissance seulement, telles que A, plus grande, puisse plus que B moindre, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle, [b] & b 13. 6.
soit C, moyenne proport. entre A & B, & comme 12. 6,
A est à B, ainsi C soit à D.

D'autant que A, B, sont rationelles commens. en puissance seulement: [c] le rect. sous A, B, est irra- c 12.10.
tionel, & la ligne C, pouuant iceluy, mediale: Et A estant à B, comme C à D, & A, B, commens. en puiss. seulement: [d] C, D, seront d 10.10.
aussi commens. en puiss. seulement, [e] partant D, commens. e 24.10.
à la mediale C, est mediale. Donc on a trouué deux mediales C, D, commens. en puiss. seulement. Ie dis qu'elles comprennent vn rectangle rationel: car puis que A est à B, comme C à D, aussi en changeant A sera à C, comme B à D: mais comme A est à C, ainsi C est à B: C sera pareillement à B, comme B à D. Partant le rectangle sous C, & D, sera egal au quarré de B: Parquoy le q. de 17.6.
B, rationelle estant rationel, le rectangle sous C & D, son egal sera aussi rationel: donc C, D, contiennent vn rectangle rationel.



Mais d'autant que A est à B, comme C à D: & A peut plus que B, du q. d'vne ligne commens. en longitude à icelle par la construction: [f] C pourra f 15.10.
aussi plus que D, du q. d'vne ligne qui luy est commens. en longitude. Donc nous auons trouué deux mediales C, D, commens. en puiss. seulement, qui contiennent vn rectangle rationel, & la plus grande C, peut plus que la moindre D, du quarré d'vne

ligne commensurable en longitude à icelle. Ce qu'il falloit faire.

g 31.10. Mais si ꝛ A, B, sont trouuées rationelles commens. en puiss. seulement, de sorte que A puisse plus que B, du q. d'vne ligne incommensurable en longitude à icelle, & que le reste soit faict comme auparauant, on monstrera semblablement que C, D, sont mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent vn rect. rationel : en sorte que C, peut plus que B, du q. d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude.

SCHOLIE.

Soit A, 8. & B, γq. 28. le rect. sous icelles sera γq. 1792. & la ligne droite C, sera γγq. 1792. mediale. Et soit comme 8. à γq. 28. ainsi γγq. 1792. à vne autre, qui soit D, icelle sera à γγq. 343. Donc γγq. 1792. & γγq. 343. sont deux mediales commens. en puissance seulement qui contiennent vn rationel, sçauoir 28. & la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne commens. en longitude à icelle.

Car si du q. de la plus grande l'on oste le q. de la moindre : c'est à dire, si de γq. 1792. on oste γq. 343. restera γq. 567. & γγq. 1792. & γγq. 567. sont deux mediales commens. en longit. entr'elles, estant comme 4. à 3. Car diuisant l'vne par l'autre en prouient γγq. $3\frac{13}{81}$. qui est $1\frac{1}{3}$. c'est à dire $\frac{4}{3}$.

Derechef, soit A 8. B γq. 20. le rect. sous icelles, sera γq. 1280. & la ligne droicte C γγq. 1280. & soit comme 8. à γq. 20. ainsi γγq. 1280. à vne autre, sçauoir à D, icelle D sera γγq. 125. Donc γγq. 1280. &

γγq. 125.

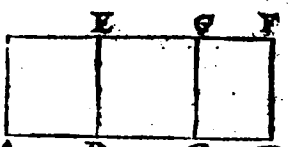
γγγ.125. ſont deux mediales cont. vn rect. rationel, ſçauoir 20. & la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle.

Mais ſoit A 3. & B γγ.6. le rect. ſous icelles ſera γγ.54. & la ligne droicte C γγγ. 54. Et comme 3. à γγ.6. ainſi γγγ.54. ſoit à vne autre, cét autre ſera γγγ.24. Donc γγγ.54 & γγγ.24 ſont deux mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, qui contiennent vn rectangle rationel, ſçauoir 6. & la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude.

LEMME.

S'il y a trois lignes droictes propoſées, comme la premiere ſera à la troiſieſme : ainſi le rectangle contenu ſous la premiere & la ſeconde, à celuy qui eſt contenu ſous la 2. & la 3.

Soient trois lignes droictes conſtituées directement, A B, B C, C D. Ie dis que comme A B 1. eſt à C D 3. ainſi le rectangle contenu ſous A B, B C, eſt au rectangle ſous B C, C D.



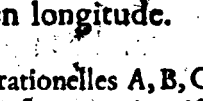
Car ſur B C, ſoit deſcrit le quarré B C G E, & ſoit acheué le rectangle A F : A E, ſera contenu ſous A B, B C : & C F, ſous B C, C D, puis que B E, C G, ſont egales chacune à B C. Or il eſt manifeſte que 1. 6. *A E, eſt à C F, comme A B, à C D.*

xxxij. xxvj.

PROBLEME 9. PROP. 33.

Trouuer deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement ; leſquelles contiennent vn rectangle medial en ſorte que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude.

h 30. 10. Soient trouuées h les trois rationelles A, B, C, commenſ. en puiſſ. ſeulement, en ſorte que A puiſſe plus que C, du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude : i premierement A C, rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, en ſorte que la plus grande puiſſe plus que la moindre du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en long. & B, commenſ. en puiſſ. ſeulement à l'vne & à l'autre, k puis ſoit priſe D, moyenne proport. entre A, B : l & comme D à B, ainſi C ſoit à E.



i *Lem.* 2. 21. 10.

k 13. 6.

l 12. 6.

m *Lem. pr.* n 17. 16. o 16. 6. p *Lem.* 3. 19. 10. q 10. 10. D'autant que comme A eſt à C, m ainſi le rect. ſous A, B, eſt au rect. ſous B C : n mais le q. de D, eſt egal au rect. ſous A B : Et le rect. ſous D E, eſt egal au rect. ſous B C : o puis que D B, C E, ſont proport. Pareillement, comme A à C, ainſi le q. de D, ſera au rect. ſous D, E. p Mais comme le q. de D, eſt au rect. de D E, ainſi D eſt à E. Donc comme A eſt à C, ainſi D à E : mais A, C, ſont commenſ. en puiſſ. ſeulement : q donc D, E, le ſeront auſſi. Mais d'autant que D, pouuant le rect. de A, B, rationelles commenſ.

commenſ. en puiſſ. ſeulement, eſt irrationelle & mediale, r E, commenſ. à D, ſera auſſi mediale. Nous auons donc trouué deux mediales D, E, commenſ. en puiſſ. ſeulement. 22. 10. r 24. 10.

Et d'autant que le rectangle ſous D E, eſt monſtré egal au rect. de B, C, f medial, (puis que B, C, ſont ration. commenſ. en puiſſ. ſeulement) le rect. ſous D E, ſera auſſi medial. f 22. 10.

Finalement, puis que nous auons monſtré que comme A eſt à C, ainſi D à E: mais A peut plus que C, du q. d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. par la conſtruction, t D pourra auſſi plus que E, du q. d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude. t 15. 10.

Nous auons donc trouué deux mediales D E, commenſurables en puiſſ. ſeulement, qui contiennent vn rectangle medial, & la plus grande D, peut plus que la plus petite E, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude. Ce qu'il falloit faire.

Mais ſi les rationelles ſuſdites auoient eſté trouuées, en ſorte que A peuſt plus que C, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longitude à icelle, la mediale D, pourroit plus que E, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle: & ayant acheué la conſtruction comme auparauant, l'on demonſtrera ſemblablement que D E, ſont trouuées mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, contenant vn rectangle medial, en ſorte que la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle, &c.

SCHOLIE.

Soit A 8. B γ9.48. C γ9.28. le rectangle ſous A B, ſera γ9.3072. & la droite ligne D γ99.3072. qui eſt mediale. Soit comme A à C, ainſi D à vne autre qui ſoit E : E ſera γ99.588. Donc γ99.3072. & γ99.588. ſont deux mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement cont. vn medial, & la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne commenſ. en longitude à icelle.

Car oſtant le moindre du plus grand, c'eſt à dire de γ9.3072. γ9.588. le reſte ſera γ9.972. & γ99.3072. & γ99.972. ſont deux mediales commenſ. en longitude entr'elles, ſçauoir comme 4. à 3. Car diuiſant γ99.3072. par γ99.972. le quotient ſera $\gamma 99.\ 3\frac{1}{3}$. qui $1\frac{1}{3}$, c'eſt à dire $\frac{4}{3}$.

Derechef, ſoit A 8. B γ9.48. C γ9.20. D ſera auſſi γ99.372. ſoit comme A à C, ainſi D à vne autre, qui ſoit E : E ſera γ99.300. Donc γ99.3072. & γ99.300. ſont deux mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, contenant vn medial, la plus grande pouuant plus que la moindre du quarré d'vne ligne qui eſt incommenſurable en longitude à icelle. Mais ſoit A γ9.6. B γ9.3. C γ9.2. D ſera γ99.18. Et ſoit comme A à C, ainſi γ99.18. à vne autre qui ſoit E : E ſera γ99.2. Donc γ99.18. & γ99.2. ſont deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, qui contiennent vn rectangle medial, dont la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle.

LEMME

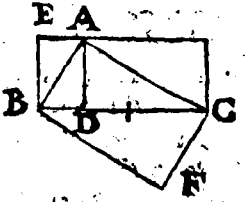
LEMME 1.

Soit le triangle A B C, ayant l'angle B A C, droict, duquel soit menée la perpendiculaire A D. Ie dis que le rectangle contenu sous C B, B D, est egal au quarré de A B : Et le rectangle contenu sous B C, C D, est egal au quarré de A C : Et le rectangle sous B D, D C, est egal au quarré de A D. Finalement, le rectangle contenu sous B C, A D, est egal au rectangle contenu sous A B, A C.

D'autant que A B, v est moyenne propert. entre C B, B D: le rectangle contenu sous C B, B D, x sera egal au quarré de A B, par la mesme raison, le rectangle sous B C, C D, sera egal au quarré de A C, puis que A C, est moyenne propert. entre B C, C D.

v Coroll. 8. 6.

x 17. 6.



De rechef, d'autant que A D, est moyenne propert. entre B D, D C, semblablement le rect. sous B D, D C, sera egal au quarré de A D.

Finalement, d'autant y que les triangles A B C, A B D, sont semblables, comme B C, sera à A C, ainsi A B, sera à A D. Donc le rect. contenu sous B C, A D, sera egal au rect. contenu sous A B, A C. Ce qui sera aussi monstré ainsi. Soit acheué le rectangle C E, contenu sous B C, A D: Semblablement le rect. A F, contenu sous A B, A C. z

y 8. 6.

16. 6.

z 41. 1.

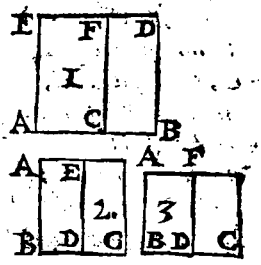
D'autant donc que le rectangle C E, eſt double du triangle A B C, & que le rectangle A F, eſt double du meſme triangle, iceux rectangles C E, A F, ſeront egaux entr'eux. Ce qui eſt propoſé.

LEMME 2.

Si vne ligne droicte eſt coupée en deux parties inegales, comme la plus grande partie eſt à la plus petite, ainſi le rectangle ſous la toute, & la plus grande partie, eſt au rectangle ſous la toute & la moindre partie.

Soit coupée A B, en deux parties inegales par C, & ſoit A C, la plus grande partie. Ie dis que comme A C, eſt à C B, ainſi le rect. ſous A B, A C, eſt au rect. ſous A B, C B.

Car ſur A B, ſoit deſcrit le quarré A B, D E, & ſoit menée C F, parallele à A E, le rect. A F, ſera contenu ſous A B, A C, & C D, ſera contenu ſous A B, C B, puis que tant A E, que C F, eſt egale à A B. [a] *D'autant donc que comme A C, eſt à C B, ainſi A F, à C D: la propoſition eſt manifeſte.*



a 1. 6.

Semblablement, comme la moindre partie B C, à la plus grande C A, ainſi B F, contenu ſous A B, B C, la toute & la moindre partie eſt à C E, contenu ſous A B, C A, la toute & la plus grande partie.

LEMME

LEMME 3.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & que la plus petite ſoit coupée en deux parties egales : le rectangle contenu ſous icelles lignes, ſera double de celuy qui eſt contenu ſous la plus grande ligne, & ſous la moitié de la moindre.

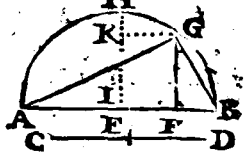
Soient deux lignes droictes inegales A B, B C, contenant l'angle droit A B C, & ſoit coupé B C, moindre, en deux egalement au poinct D. Ie dis que le rect. ſous A B, B C, eſt double du rect. ſous AB, BD. Car ſoit acheué le rect. A C, contenu ſous A B, B C, & ſoit menée D E, parallele à A B: B E, ſera contenu ſous A B, & B D, moitié de la moindre. [b] *D'autant que A C, eſt double de B E, puis que la baſe B C, eſt double de la baſe B D : la propoſition eſt enidente.* b 1. 6.

Semblablement, ſi B C, (laquelle ſoit plus grande) eſt coupée en deux egalement, le rect. contenu ſous A B, B C, eſt double de celuy qui eſt contenu ſous A B, moindre, & B D, moitié de la plus grande, comme il appert par la 2. figure. Voyez la figure 2. & 3. precedentes.

PROBLEME 10. PROP. 34.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, leſquelles faſſent le compoſé de leurs quarrez rationel: mais le rectangle contenu ſous icelles medial.

c 31.10. Soient c trouuées deux rationelles A B, C D, commensurables en puissance seulement, telles que la plus grande A B, puisse plus que la plus petite C D, du q. d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude. Et ayant coupé C D, en deux
d *Lem.* 17. egalement à E: d soit appliqué à A B, vn rect. egal
10. au q. de C E, c'est à dire egal au quart du q. de C D, defaillant d'vne figure quarrée, & soit celuy qui est contenu sous A F, F B; & ayant descrit le demy-cercle A G B, soit menée F G à angles droicts, & coniointes A G, G B.



D'autant que A B, peut plus que C D, du q. d'vne ligne qui luy est incommens. en longit. & qu'on a appliqué à A B, vn rect. contenu sous A F, F B, egal au quart du q. de C D, de-
e 19.10. faillant d'vne figure q. e A F, sera incommens. en
f *Lem.* 2. longit. à F B. f
33.10. Mais comme A F, à F B, ainsi le rectangle sous
g *Lem.* 1. A B, A F, au rectangle sous A B, F B: g mais le
33.10. rectangle sous A B, A F, est egal au q. de A G, & le rect. sous A B, F B, egal au q. de B G, puis que l'an-
h 31. 3. gle A G B est droict h au demy-cercle: donc comme A F, à F B, ainsi le q. de A G, au q. de G B: & partant puis que A F, F B, sont incommens. en long.
i 10. 10. i les quarrez de A G, G B, seront incommens.
k 4. d. k Donc les lignes A G, G B, sont incommens. en puiss. Et d'autant que le q. de la rationelle A B, est
l 47. 1. rationel, l & egal aux quarrez de A G, G B, le com-
m *Lem.* 1. posé des quarrez de A G, G B, est aussi rationel.
33. 10. Derechef, d'autant que le rect. sous A F, F B, m

qui

qui eſt faict egal au q. de C E, n eſt egal au q. de F G (puis que l'angle A G B, eſt droict, & F G, perpendiculaire à A B) les quarrez de F G, C E, ſeront egaux, & partant les lignes F G, C E, egales : parquoy C D, double de C E, ſera auſſi double de F G: o. Donc le rect. ſous A B, C D, ſera double du rect. ſous A B, F G, mais le rectangle contenu ſous les rationelles A B, C D, commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt medial ; Donc le rectangle ſous A B, F G, commenſurable à iceluy, eſtant ſa moitié, p eſt auſſi medial. Mais le rectangle contenu ſous A G, G B, q eſt egal au rectangle contenu ſous A B, F G. Donc le rectangle contenu ſous A G, G B, eſt auſſi medial : mais le compoſé des quarrez de A G, G B, eſt monſtré rationel. Donc nous auons trouué deux lignes droictes A G, G B, incommenſ. en puiſſ. qui font le compoſé de leurs quarrez rationel, & le rectangle contenu ſous icelles medial. Ce qu'il falloit faire.

n 17. 6.

o *Lem.* 3. 33. 10. 22. 10.

p *Coroll.* 24. 10.

q *Lem.* 1. 33. 10.

SCHOLIE.

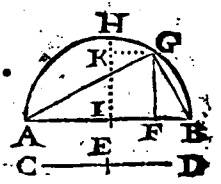
Soit A B, 12. & C D, γγ 9. 6. & ſoit A B, diuiſée en A F, F B, faiſant A C, 6. p. γγ 9. 12. & F B 6. —— γγ 9. 12. Partant F G, moyenne proport. entre A F, F G, ſera γγ 9. 24. Dont la double C D, eſt γγ 9. 96. Donc C D, faiſant γγ 9. 96. F G ſera γγ 9. 24. Et A F, 6 p. γγ 9. 12. F B. ſera 6. —— γγ 9. 12. Partant A G ſera γγ 9. 72. p. γγ 9. 1728, & G B, γγ 9. 72. —— γγ 9. 1728. Partant A G, G B, ſont les requiſes : car elles ſont incommenſ. en puiſſ. cont. vn rect. medial, qui eſt γγ 9. 3456. & le compoſé de leurs quarrez 144. eſt rationel.

PRO

xxxiv. xxviij. PROBLEME II. PROP. 35.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, leſquelles faſſent le compoſé de leurs quarrez Medial: Et le rectangle contenu ſous icelles Rationel.

r 32.10. Soient [r] trouuées deux mediales A B, C D, commenſ. en puiſſ. ſeulement, contenant vn rect. rationel: en ſorte que A B, plus grande, puiſſe plus que C D, moindre, du q. d'vne ligne incommenſ. à icelle en longit. Et ſoit faict au reſte comme en la 34. Propoſition, l'on monſtrera ainſi qu'en icelle 34. Prop. que A C, G B ſont incommenſ. en puiſſ. Et le q. de la mediale



f 47.1. A B ([f] egal aux quarrez de A G, G B) eſtant medial, le compoſé d'iceux quarrez de A G, G B, ſera auſſi medial.

Derechef, comme en la 34. Prop. le rect. ſous A B, C D, ſera monſtré double du rect. ſous A B, F G: & partant commenſ. Parquoy le rect. ſous A B, C D, eſtant rational par la conſtruction, le rectangle ſous A B, F G, commenſ. à iceluy, ſera auſſi

t 1. *Lemme* 23. 10. rational: [t] mais le rect. ſous A G, G B, eſt egal au rectangle ſous A B, F G: donc le rect. ſous A G, G B, eſt auſſi rational.

Or le compoſé des quarrez de A G, G B, eſt monſtré

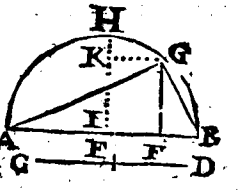
monstré medial. Donc A G, G B, sont trouuez incommens. en puiss. faisant le composé de leurs quarrez medial : mais le rectangle sous icelles rationel. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit la ligne A B, γγ.864. C D, γγ.384. E D, ou F C, son egale, sera γγ.24. & A F, γγ.54. p. γγ.6. F B, γγ.5— —γγ.6. Donc A G, sera γγ. (γγ.126.p.γγ.72.) Mais G B, γγ. (γγ.216.— —γγ. 72.) incommensurables en puissance, faisans le composé de leurs quarrez, sçauoir γγ.864 medial, & le rect angle sous icelles rationel.

PROBLEME 12. PROP. 36. xxxvi. xxix.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu sous icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez.



Soient [v] trouuées A B C D, mediales, commens. en puiss. seulement, contenant vn rect. medial, en sorte que A B, plus grande, puisse plus que C D, moindre, du quarré d'vne ligne incommensurable en longitude à icelle : & ayant faict au reste comme en la 34. Proposition. Ie dis que A G, G B, sont les lignes requises. v 33.10.

Car

Car comme en la 24.Prop. l'on monſtrera que A G, G B, ſont incommenſurables en puiſſance. Et d'autant que le q.de A B, mediale, eſt medial, (x eſtant egal aux quarrez de A G, G B,) le compoſé des quarrez de A G, G B, ſera auſſi medial. Derechef,le rectangle ſous A B,C D,eſt double du rectangle ſous A B,F G, (y comme il eſt monſtré,) & partant commenſurables; Donc par la conſtruction le rectangle ſous A B, C D, eſtant medial, le rect.ſous A B,F G, (c'eſt à dire le rect.ſous A G, G B,z ſon egal) eſt auſſi medial: mais A B,eſtant poſée incommenſ. en longit. à C D, & C E, eſt commenſ. en longit.à la meſme C D: C D eſtant double de C E,a A B, C E, ſeront incommenſ. en longitude.

x 47.1.
y 34.10.
z 1. *Lem.* 33.10.
*Cor.*24.10.
a 13.10.

Mais comme A B,à C E,b ainſi le quarré de A B, au rectangle ſous A B, C E: c'eſt à dire au rect. ſous A B,F G,c'eſt à dire ſous A G,G B: c (car les rectangles ſous A B, F G, & ſous A G, G B, ſont egaux:) donc d le quarré de A B, eſt incommenſ. au rectangle ſous A G,G B. Partant A G,G B,ſont trouuées incommenſ.en puiſſance: faiſans le compoſé de leurs quarrez medial, & le rectangle ſous icelles medial, & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez. Ce qu'il falloit faire.

b 3. *Lem.* 19.10.
c 1.*Lemme* 33.10.
d 10.10.

SCHOLIE.

*Soit A B,*γγ.720. *C D,*γγ.320. *Donc C E,ou ſon egale F G,ſera* γγ.20. *& A F,* γγ.45.*p.*γγ.5. *Mais F B,* γγ.45.——γγ.5. *& A G,* γ.γ. (γγ.180. *p.* γγ.60.) *& G B,* γ.γ. (γγ.180.——γγ.60. *leſquelles ſont incommenſurables en longitude, faiſans le*

compoſé

composé de leurs quarrez medial, & le rectangle medial, &c.

De ce Probleme nous obtiendrons facilement le suivant.

Trouuer deux lignes mediales incommensurables en longitude & puissance.

D'autant qu'il a esté demonstré, que tant le composé des quarrez de AG, GB, que le rectangle sous icelles est medial, & iceluy rectangle est incommensurable au composé desdits quarrez: la ligne qui peut iceluy composé medial, & la ligne qui peut le rectangle medial, seront aussi mediales incommensurables, tant en longitude qu'en puissance.

Car si elles estoient commensurables en puissance, leurs quarrez seroient aussi commensurables: c'est à dire le composé des quarrez de AG, GB, & le rectangle sous AG, GB: ce qui est contre l'hypothèse. Partant, si on prend AB, qui peut le composé des quarrez de AG, GB, & vne autre ligne droicte pouuant le rectangle sous AG, GB: c'est à dire la moyenne proport. entre AG, GB, l'on aura trouué deux mediales incommensurables en longitude & puissance. Ce qui est proposé.

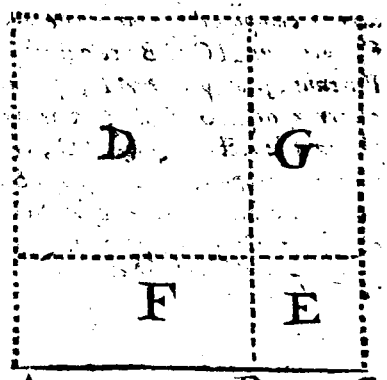
ICY

ICY COMMENCENT les ſizaines des lignes irrationelles par compoſition.

xxxvj. xxx. **THEOREME 25. PROP. 37.**

* Si deux lignes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement ſont compoſées : la toute ſera irrationelle. Soit icelle appelle de deux noms.

e *Lemme* 2.21.10. Soient compoſées deux rationelles trouuées, A B, B C, commenſ. en puiſſ. ſeulement. Ie dis que la toute A C, eſt irrationelle.



Car A B, eſtant incommenſurable en longitude à B C: f & comme A B, à B C, ainſi le rectangle ſous A B, B C, au quarré de B C : g ſçauoir F à E, e rectangle ſous A B, B C, ſera incommenſurable au quarré de B C. Mais deux fois le rectangle ſous A B, B C, eſt

f *Lem.* 3.10. *ou* 1.6.

g 10.10.

est commensurable à iceluy rectangle, sous A B, B C, sçauoir F & G ensemble, à G, ou F, & le q. de A B, est commensurable au quarré de B C, sçauoir D à E, (estans rationaux,) [h] parquoy le composé des quarrez de A B, B C, est commensurable au q. de B C. [i] Partant le composé de deux fois le rectangle sous A B, B C, & le composé des quarrez de A B, B C, sont incommensurables. Parquoy le q. de A C, composé des quarrez de A B, B C, & de deux fois le rectangle sous A B, B C : ([k] car le quarré de A C, est egal à iceux deux quarrez de A B, B C, & aux deux rectangles sous A B, B C, comme il appert) [l] est incommensurable au composé des quarrez de A B, B C : mais le composé des quarrez de A B, B C, est rational, estant monstré commensurable au quarré de la rationelle B C, Donc le quarré de A C, incommensurable au quarré de la rationelle B C, est [m] irrationel : Partant A C, sera irrationelle. Or soit icelle ligne appellée de deux noms, ou comme disent les autres, Binome, d'autant qu'elle est composée de deux noms, c'est à dire de deux lignes rationelles A B, B C, commensurables en puissance seulement. Donc si deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement, sont composées, la toute sera irrationelle. Ce qu'il falloit demonstrer.

h 16. 10.
i Sch. 14. 10.
k 4. 2.
l 17. 10.
m 10. d.



SCHOLIE.

Soit A B 2. B C, 7q. 3. A C, sera 2. p. 7q. 3. & son quarré 7. p. 7q. 48. Car le quarré de A B, est 4. & le quarré de B C, 3. mais le rectangle sous A B, B C, 7q. 12. dont le double est 7q. 48.

Partant deux lignes irrationelles ſont procreées de deux rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. [a] *Car la moyenne proportionelle entre icelles eſt irrationelle, laquelle eſt appellée mediale:* [o] *& la compoſée d'icelles eſt irrationelle, laquelle eſt appellée de deux noms ou Binome.*

a 22.10.
o 37.10.

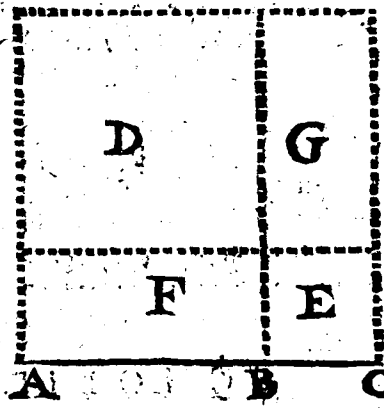
THEOREME 26. PROP. 38.

xxxvij. xxxj.

Si deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, contenant vn rectangle rationel ſont compoſées; la toute ſera irrationelle. Or ſoit icelle appellée premiere de deux mediales.

p 28.10.

Soient compoſées deux mediales P trouuées A B, C D, commenſ. en puiſſ. ſeulement contenant vn rectangle rationel. Ie dis que la toute A C, eſt irrationelle: q car A B, eſt à B C comme le rect. ſous AB, BC, eſt au quarré de B C, r & A B, B C, incommenſurables en longitude, le rectangle ſous A B, B C, ſera incom



q *Lem.* 31. *m* 16. 10.

r 10.10.

incommensurable au quarré de B C, sçauoir F à E. Mais deux fois le rectangle sous A B, B C, est commensurable au rectangle sous A B, B C, & le composé des quarrez de A B, B C, est commensurable au quarré de B C : (car A B, B C estans commensurables en puissance, leurs quarrez seront commensurables, & partant le composé d'iceux sera commensurable au quarré de B C :) Donc deux fois le rectangle sous A B, B C, & le composé des quarrez de A B, B C, sont incommensurables. Donc le composé des quarrez de A B, B C, & de deux fois le rectangle sous A B, B C, (qui est le quarré de A C) est incommensurable au composé de deux fois le rectangle sous A B, B C, Mais le rectangle sous A B, B C, est commensurable à deux fois le rectangle sous A B, B C, estant moitié d'iceluy. Donc le quarré de A C, est incommensurable au rectangle sous A B, B C, mais le rectangle sous A B, B C, est posé rationel. Donc le quarré de A C, est irrationel : Et partant A C, sera irrationelle. Mais soit icelle appellée premiere de deux mediales, ou comme disent les autres, bimediale premiere Donc si deux mediales commensurables en puissance seulement sont composées, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

f 16. 10.
t *Sch.* 14. 10.
v 4. 2.
x 17. 10.
y 13. 1.
z 10. d. 11. d.

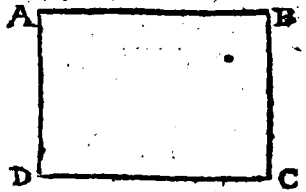
SCHOLIE.

Soit la ligne A B, γγ 54. B C, γγ 24. la ligne totale A C, sera γγ 54. p. γγ 24. irrationelle appellée premiere de deux mediales, ou bimediale premiere.

LEMME.

Le rectangle contenu ſous vne ligne rationelle, & vne irrationelle eſt irrationel.

Soit le rectangle A B C D, contenu ſous A B rationelle, & B C irrationelle. Ie dis qu'icelluy rectangle eſt irrationel : car ſ'il eſt dit eſtre rationel, eſtant appliqué à la rationelle A B, il feroit la latitude B C rationelle, Ce qui eſt abſurde : car B C, eſt poſée irrationelle. Donc le rectangle A C n'eſt rationel ; mais irrationel. Ce qui eſt propoſé.



21.10.

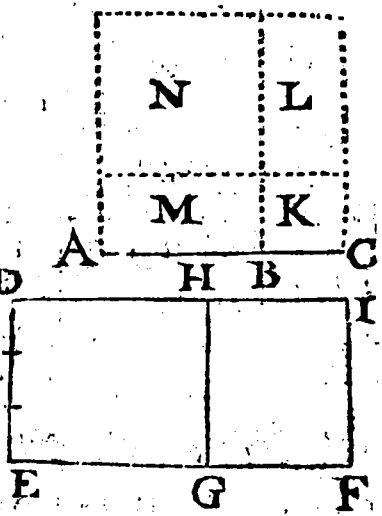
xxxviij. xxxij. THEOREME 27. PROP. 39.

Si deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, contenant vn rectangle medial, ſont compoſées : la toute ſera irrationelle : & ſoit icelle appellée ſeconde de deux Mediales.

a 29.19. Soient compoſées deux mediales a trouuées A B, B C, commenſurables en puiſſance ſeulement, contenant vn rectangle medial. Ie dis que la toute A C, eſt irrationelle.

Car ſoit expoſée la Rationelle D E, à laquelle ſoit

soit appliqué le rect. DF, egal au q. de AC; & DG, egal au composé des quarrez de AB, BC, sçauoir N, K, & le q. de AC, (ou DF, son egal rectangle) [c] estant egal aux 2. quarrez de AB, BC; & à deux fois le rect. sous AB, BC, le reste HF, sera egal au rect. sous AB, BC, deux fois, sçauoir à M, L, mais le rect. sous AB, BC, estant posé medial, le double d'iceluy, qui luy est commens. [d] sçauoir HF, sera aussi medial.



b 45. 1.

c 4. 2.

d *Coroll.* 24. 10.

Derechef, puis que les quarrez de AB, BC, Mediales cómens. en puiss. sont commens. [e] leur composé, sçauoir DG, sera commens. à chacun d'iceux; & estans Mediaux, [f] DG, sera Medial. Donc puis que les Mediaux DG, HF, sont appliquez à la Rationelle DE, & HG, son egale, [g] les latitudes EG, GF, seront rationelles incommens. en longit. à DE. Derechef, AB, BC, estans incommens. en longit. Et comme AB, à BC, ainsi le q. de AB, au rectang. sous AB, BC, sçauoir N, à L, [h] le q. de AB, sera incommensurable au rectang. sous AB, BC: Mais le

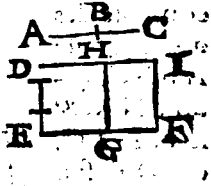
e 16. 10.

f *Coroll.* 24. 10.

g 34. 1. g 23. 10.

h 3. *Lem.* 19. 10. & 1. 6.

composé des quarrez de A B, B C, est monstré commens. au q. de A B: & deux fois le rect. sous A B, B C, est commens. au rect. sous A B, B C, estant double d'iceluy. Donc le composé des quarrez de A B, B C, & deux fois le rect. sous A B, B C, ou leurs egaux rect. [i] D G, H F, sont incommens. [k] Parquoy D G estant à H F, comme E G, à G F, [l] E G, G F seront incommens. en longit. Et estans monstrées Rationelles, elles seront Rationelles commens. en puiss. seulement, [m] Partant la toute E F, sera Irrationelle: parquoy [n] le rect. D F, sous D E, Rationelle, & E F Irrationelle, sera Irrationel, & le q. de A C, egal à iceluy D F, est aussi Irrationel. Parquoy A C est Irrationelle. Soit appellée seconde de deux Mediales, ou Bimediale seconde. Donc si deux Mediales commensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



i *Sch.* 14. 10.
k 1. 6.
l 10. 10.
m 17. 10.
n *Lemme* 38. 10.

SCHOLIE.

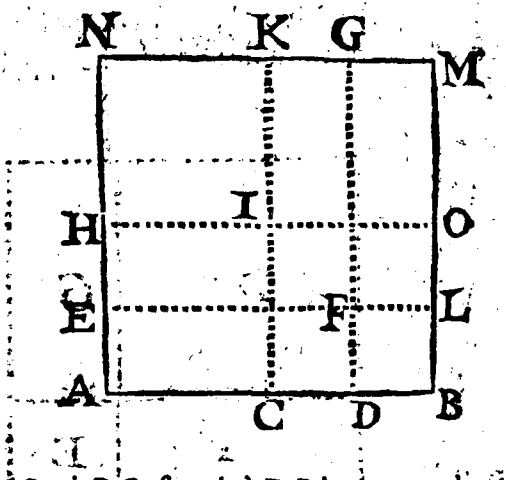
Soit la ligne A B, 999. 18. B C, 999. 8. la ligne totale A C, sera 1999. 18. p. 999. 8. Dont le quarré est 99. 50. p. 99. 48. laquelle ligne A C, est Irrationelle, nommée seconde de deux Mediales, ou Bimediale seconde.

LEMME.

Si vne ligne droicte est coupée en deux inegalement, le composé des quarrez des parties sera plus grand, que deux fois le rectangle contenu sous

sous icelles parties, du quarré de la ligne, dont la plus grande partie excede la moindre.

Soit A B, coupée à D, non egalement, & soit A D la plus grande partie, en laquelle soit prise D C, egale à D B, de sorte que A C, soit l'excez par lequel A D, excede D B, ou D C, egale à D B. Ie dis que les quarrez de A D, D B, ensemble, sont plus grands que deux fois le rect. sous A D, D B, du q. de A C, 7. 2. *qui est H K. Car les quarrez de A D, D C, estans egaux à deux fois le rect. sous A D, D C, & au q. de*



A C; & D C, est egale à D B, les quarrez de A D, D E seront aussi egaux à deux fois le rect. sous A D, D B, & au q. de A C: partant les quarrez de A D, D B, sont plus grands que deux fois le rect. sous A D, D B, du q. de A C. Ce qui est proposé. Ce qui est aussi intelligible par cette figure.

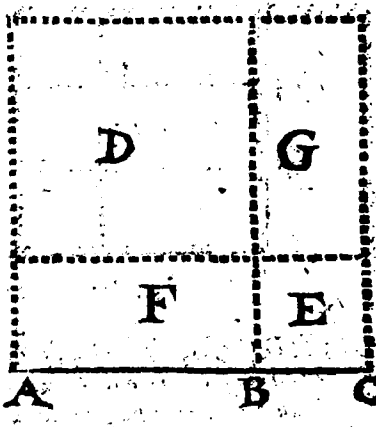
COROLLAIRE.

De là s'enſuit que les quarrez des parties inegales ſimplement, ſont plus grands que deux fois le rectangle ſous les parties inegales.

xxix. xxxiij. **THEOREME 28. PROP. 40.**

Si deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, faiſans le compoſé de leurs quarrez Rationel, & le rectangle contenu ſous icelles Medial, ſont compoſées: la toute ſera Irrationelle: Soit icelle appellée Majeure.

Soient cõpoſées deux lignes droictes ° 34.10. trouuées AB, BC, incommenſ. en puiſſ. faiſant le compoſé de leurs quarrez Rationel: mais le rectangle ſous icelles Medial. Ie dis que la toute A C eſt Irrationelle.



Car d'autant que le rectangle ſous A B, B C, eſt

poſé

posé medial, deux fois le rectangle sous A B,B C, commenſ. à iceluy, p ſera auſſi mediał, & partant Irrationel. Or le composé des quarrez de A B,B C, eſt posé Rationel: q Donc deux fois le rectangle ſous A B; B C, ſera incommenſurable à iceluy: Partant le quarré de A C, composé des quarrez de A B,B C, & de deux fois le rectangle A B,B C, ſera incommenſ. au composé des quarrez de A B,B C: & ce composé des quarrez de A B,B C, eſtant posé Rationel; r le quarré de A C, incommenſurable à iceluy ſera Irrationel; ſ & A C, Irrationelle: ſoit icelle appellée Majeure. Partant ſi, &c. Ce qu'il falloit faire.

p *Coroll.* 24. 10.
q 10. *d.* 17.
10.
r 10. d.
ſ 11. d.

SCHOLIE.

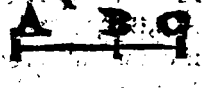
Soit la ligne A B ry. (32. p. ry. 704.) & B C ry. (32. —— ry. 704.) Donc la toute A C, ſera ry. (32. p. ry. 704.) p. ry. (32. —— ry. 704.) laquelle eſt Irrationelle, appellée ligne Majeure.

PROBLEME 29. PROP. 41. XL. XXXIV.

Si deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance ſont compoſées, leſquelles faſſent le composé de leurs quarrez Medial: Mais le rectangle contenu ſous icelles Rationel; la toute ſera Irrationelle. Soit appellée pouuant vn Rationel & vn Medial.

Soient compoſées deux lignes droictes * trou- x 35. 10.

uées A B, B C, incommensen puiss. faisant le composé de leurs quarrez Medial : mais le rectangle contenu sous icelles Rationel. Ie dis que la toute A C, est Irrationelle.



Car le composé des quarrez de A B, B C, estant Medial mais deux fois le rectangl: sous A B, B C, Rationel, sa moitié, sçauoir le rectangle vne fois sous A B, B C, y 10. d. estant posé Rationel, y le composé des quarrez de A B, B C, est incommensurable à deux fois le rectangle sous A B, B C. z 17.10. z Donc le composé des quarrez de A B, B C, & deux fois le rectangle sous 10.d. A B, B C : c'est à dire le quarré de A C, est incommensurable à deux fois le rectangle sous A B, B C, 11.d. lequel estant Rationel, comme a esté dit, le quarré de A C, incommensurable à iceluy est Irrationel, & partant A C Irrationelle soit dite pouuant vn Rationel & vn Medial. Donc si deux lignes droictes incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

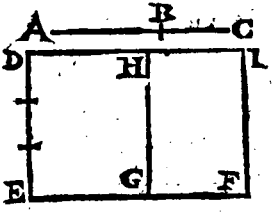
Soit la ligne A B, γq. (q.13.$\frac{1}{2}$.p.γq.4.$\frac{1}{2}$.) & B C,
xlij. *γq. (q.13.$\frac{1}{2}$.——γq.4.$\frac{1}{2}$.) afin que la toute A C soit*
xxxv. *γq. (γq.13.$\frac{1}{2}$.p.γq.4.$\frac{1}{2}$.p.γq.γq.13.$\frac{1}{2}$.——γq.4.$\frac{1}{2}$.)*

THEO

THEOREME. 30. PROP. 42.

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance sont composées, lesquelles fassent le composé de leurs quarrez Medial, & le rectangle contenu sous icelles Medial ; & incommensurable au composé de leurs quarrez : la toute sera Irrationelle : Soit icelle appellée pouuant deux Mediaux.

Soient composées deux lignes droictes,[a] trouuées A B, B C, incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez Medial, & le rectangle contenu sous icelles medial & incommensurable au composé de leurs quarrez. Ie dis que la toute AC, est irrationelle. [a] 36. 10.



Car soit exposée D E Rationelle, [b] à laquelle soit appliqué le rect. D F, egal au quarré de A C, & D G, egal au composé des quarrez de A B, B C. Et le quarré de A C, [c] estant egal au composé des quarrez de A B, B C, & à deux fois le rect. sous A B, B C, le reste H F, sera egal à deux fois le rect. sous A B, B C. [b] 45. 1. [c] 4. 2.

Mais

Mais puis que tant le compoſé des quarrez de A B, B C, c'eſt à dire le rectangle D G, que le rect. ſous A B, B C : [d] & partant le compoſé de deux fois le rectangle ſous A B, B C : c'eſt à dire H F, (luy eſtant commenſurable) eſt poſé medial, D G, H F, appliquez à la Rationelle D E, feront les latitudes E G, G F, Rationelles incommenſurables en longitude à D E.

d *Coroll.* 24. 10.

23. 10.

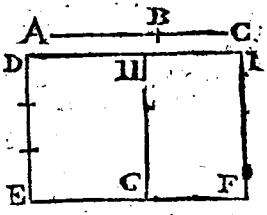
Derechef, le compoſé des quarrez de A B, B C: c'eſt à dire le rectangle D G, eſtant poſé incommenſurable au rectangle ſous A B, B C, & deux fois le rectangle ſous A B, B C, ſçauoir H F, eſtant commenſurable au meſme rectangle ſous A B, B C, (luy eſtant double) e D G, H F, ſeront incommenſ.

e 13. 10.

f 1. 6.

g 10. 10.

Parquoy E G, [f] eſtant à G F, comme D G, à H F, [g] E G, G F ſeront incommenſ. en longit. & eſtans monſtrées rationelles, icelles E G, G F ration. commenſ. en puiſſ. ſeulement : [h] partant la toute E F, compoſée d'icelles, eſt irrationelle : donc le rectangle D F, contenu ſous D E, Rationelle, & E F, Irrationelle, [i] eſt irrationel. Et partant le quarré de A C, egal à iceluy, eſt auſſi irrationel, & la ligne A C, pouuant iceluy eſt irrationelle. Soit dite pouuant deux mediaux. Donc ſi deux lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



h 37. 10.

i *Lem.* 38. 10.

SCHOLIE.

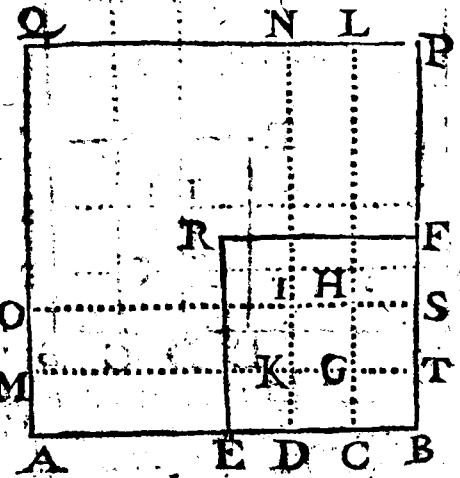
SCHOLIE.

Soient A B, B C, incommenſ. en puiſſ. dont les quarrez adiouſtez font vn medial, & le rectangle ſous icelles medial, ſçauoir, A B γ9. (γ9.5.p.γ9.2.) & B C γ9. (γ9.5.——γ9.2.) A C ſera γ9. (γ9.5.p.γ9.2.) p. γ9 5.——γ9.2.) &c.

LEMME.

Si vne ligne droicte eſt coupée en parties inegales, & derechef en autres parties inegales, les quarrez des parties plus inegales enſemble, ſeront plus grands que les quarrez des parties moins inegales enſemble.

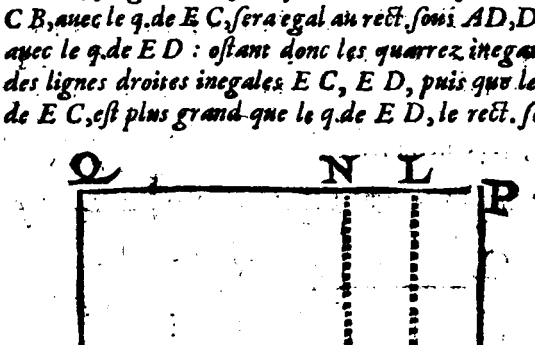
Soit coupée A B, inegalement à C, & derechef



inegalement à D, & ſoient les premieres parties A C, C B.

C B, plus inegales que les dernieres A D, D B. Ie dis que les quarrez de A C, C B, ensemble, qui sont M L, C T, sont plus grands que les quarrez de A D, D B, ensemble, sçauoir O N, D S: Car ayant diuisé A B, en deux egalement à E, le poinct D, tombera entre E C, ou A E. Qu'il tombe premierement entre E C: D'autant donc que le rect. sous A C, C B, auec le q. de E C, [k] *est egal au q. de E B, sçauoir à E F. Semblablement le rect. sous A D, D B, sçauoir A I, auec le q. de E D, est egal au mesme q. de E B, le rect. sous A C, C B, auec le q. de E C, sera egal au rect. sous A D, D B, auec le q. de E D: ostant donc les quarrez inegaux, des lignes droites inegales E C, E D, puis que le q. de E C, est plus grand que le q. de E D, le rect. sous*

k 5. 2.

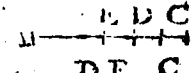


A C, C B, sera moindre que le rect. sous A D, D B: & partant deux fois le rect. sous A C, C B, sçauoir A G, G P, sera moindre que deux fois le rect. sous A D, D B, sçauoir A I, I P.

Mais

Mais d'autant que deux fois le rect. sous AC, CB, auec les quarrez de AC, CB, sont egaux au q. de AB, & pareillement deux fois le rect. sous AD, DB, auec les quarrez de AD, DB, sont egaux au mesme q. de AB, deux fois le rect. sous AC, CB, auec les quarrez de AC, CB, seront egaux à deux fois le rect. sous AD, DB, auec les deux quarrez de AD, DB. Parquoy puis que deux fois le rectangle contenu sous AC, CB, a esté monstré moindre que deux fois le rect. sous AD, DB, les quarrez restans de AC, CB, sçauoir ML, CT, seront plus grands que les autres quarrez de AD, DB, qui sont ON, DS. Ce qui est proposé. 1 4. 2.

Maintenant que D, tombe entre AE, d'autant que les parties AC, CB, sont posées plus inegales que AD, DB: AD, (qui est la plus petite des dernieres) sera plus grande que CB, (qui est la moindre des premieres) & partant puis que AE, EB, sont egales, la restante EC, sera plus grande que la restante DE: m partant le rect. sous AC, CB, auec le quarré de EC, estant egal au q. de EB. Semblablement, le rect. sous AD, DB, auec le q. de DE, estant egal au q. de AE: c'est à dire au mesme q. de EB; le rect. sous AC, CB, auec le q. de EC, sera egal au rect. sous AD, DB, auec le q. de DE: Donc nous demonstrerons comme de premier, que les quarrez de AC, CB, sont plus grands que les quarrez de AD, DB. Ce qui est proposé. m 5. 2.



xlij. xxxvj.
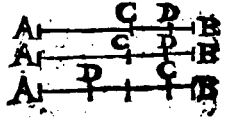
THEOREME 31. PROP. 43.

La ligne de deux noms, peut estre diuisée en ses noms, à vn poinct seulement.

Soit

Soit A B, de deux noms ou binome, diuiſée au poinct C, en ſes noms, de ſorte que A C, C B, ſoient Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, ſelon la 37. Prop. 10. Ie dis que A B, ne peut eſtre diuiſée en d'autres noms à vn autre poinct : c'eſt à dire en d'autres lignes que A C, C B, qui ſoient Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement.

Car, s'il eſt poſſible, ſoit diuiſée derechef en ſes noms à D. Il eſt manifeſte que A B, n'eſt diuiſée à C en deux egalement



car A C, C B, ſeroient commenſ. en longit. contre l'hypotheſe, ny ſemblablement à D. Donc A C, eſt coupée tant à C, qu'à D, inegalement : partant A C, C B, ſont parties moins inegales que A D, D B, ou plus inegales. [n] Parquoy les quarrez de A C, C B, ſeront moindres que les quarrez de A D, D B, ou plus grands : (car les parties A D, D B, ne ſeront egales aux parties A C, C B, chacune à la ſienne, ſçauoir la plus grande à la plus grande, & la moindre à la moindre, de quelque part que tombe le poinct D, (autrement A B, ſeroit diuiſée à la ſeconde diuiſion au meſme poinct qu'à la premiere.)

n *Lemme* 42. 10.

Mais d'autant que ſi de choſes egales on oſte choſes inegales, [q] l'excez des reſtantes eſt egal à l'excez des retranchées : mais les quarrez de A C, C B, auec deux fois le rect. ſous A C, C B, ſont egaux aux quarrez de A D, D B ; auec deux fois le rect. ſous A D, D B. [r] Puis que tant ceux-là que ceux-cy ſont egaux au q. de A B : il s'enſuit que l'excez du compoſé des quarrez de A C, C B, &

q *Coroll.* 2. 1.

r 4. 2.

du

du composé des quarrez de A D, D B, sera egal, ou le mesme que du composé de deux fois le rectangle sous A C, C B, & de deux fois le rectangle sous A D, D B.

Mais l'excez des composez des quarrez de A C, C B, & A D, D B, est rationel : (car A C, C B, estans rationelles, & partant leurs quarrez rationaux, & leur composé [a] estant commensurable à chacun d'iceux, sera rationel ;) par la mesme raison le composé des quarrez de A D, D B, sera rationel. [b] Donc puis qu'vn rationel, excede vn rationel, d'vn rationel : Il est manifeste que l'excez des composez des quarrez de A C, C B, & de A D, D B, est rationel. Donc l'excez de deux fois le rect. sous A C, C B, & de deux fois le rect. sous A D, D B, est aussi rationel. [c] Mais le rect. sous A C, C B, estant medial deux fois le rect. sous A C, C B, commens. à icelluy [d] est aussi medial. Semblablement deux fois le rect. sous A D, D B, est aussi medial ; [e] Parquoy vn medial n'excedant vn medial d'vn rationel, l'excez de deux fois le rect. sous A C, C B, & de deux fois le rect. sous A D, D B, ne sera espace rationel. Mais nous auons monstré qu'il est rationel, ce qui est absurde. Donc A B, ne peut estre diuisée en ses noms à vn autre poinct qu'à C. Partant est diuisée en ses noms à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit demonstrer. Cette demonstration est aussi facile à entendre par la figure cy-apres.

[a] 16. 10.
[b] b *Sch.* 27. 10.
[c] 22. 10.
[d] d *Coroll.* 24. 10.
[e] 27. 10.

SCHOLIE.

Henrion Copiste, dit en la demonstration de cette Proposition. Si A D, & D B, sont parties plus gran-

des que A C, C B, par le Lemme qui suit la 42. Proposition 10. le composé des quarrez de AC, & C B, sera plus grand que le composé des quarrez de A D, & D B, &c. *Ce qui est absurde.*

Car si A D, & D B, (comme il dit) sont parties plus grandes que A C, & C B: au contraire le composé des quarrez de A D, & D B, sera plus grand que le composé des quarrez de AC, & C B, chacun des premiers descrits sur les lignes plus grandes, estant plus grand que chacun des derniers descrits sur lignes moindres, & ce qu'il dit ne conuient nullement audit Lemme qu'il cite.

D'auantage, selon le Lemme allegué, les parties qu'il veut dire, sçauoir A D, & D B, ne peuuent estre plus grandes que A C, & C B: car si cela estoit, la toute A B, composée de A D, & D B, plus grandes, seroit plus grande que la mesme A B, composée de A C, & C B, moindres: ce qui est ridicule de dire, qu'vne chose soit plus grande qu'elle mesme. Mais il deuoit dire, que si A D, & D B, sont parties moins inegales que A C, & C B, le composé des quarrez de AC, & C B, parties plus inegales, est plus grand que le composé des quarrez de A D, & D B, parties moins inegales, comme veut le Lemme cité, &c.

Quant à moy ie croy, que s'il entendoit bien ce qu'il dit, ou plustost ce qu'il doit dire, qu'il auroit corrigé ses fautes à la seconde Edition de son liure.

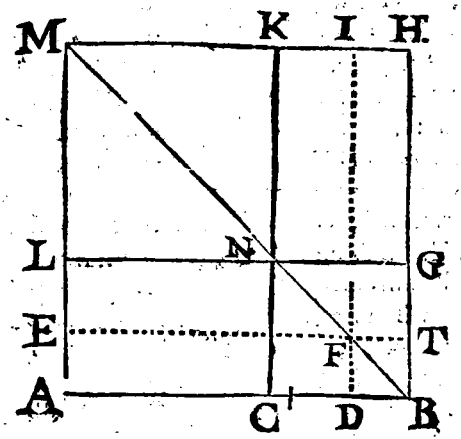
THEO

THEOREME 32. PROP. 44.

xliij. xxxviij.

La ligne de deux Mediales premiere, est diuisée en ses noms à vn poinct seulement.

Soit A B, Bimediale premiere, ou de deux Mediales premiere, diuisée en ses noms par le poinct C, en sorte que A C, C B, soient mediales commensurables en puissance seulement, contenant vn rectangle Rationel, comme il est dit. Ie dis que 38. 10.
A B, ne peut estre diuisée en ses noms à vn autre poinct.



Car, s'il est possible, soit icelle aussi diuisée à D, en sorte que A D, D B soient Mediales commens. en puissance seulement, & contenant vn rectangle Rationel. De quelque part que tombe le poinct D, l'on monstrera comme en la precedente, que

l'exces de deux fois le rectangle ſous A C, C B ; & de deux fois le rectangle ſous A D, D B, eſt le meſme que l'exces des compoſez des quarrez de A C, C B, & de A D, D B. Mais l'exces deſdits rectangles eſt rationel : (car le rectangle ſous A C, C B, eſtant rationel, deux fois le rectangle ſous A C, C B, commenſurable à iceluy, eſt auſſi rationel, & ſemblablement deux fois le rectangle ſous A D, D B, ſera rationel : & vne figure rationelle ; [g] excedant vne figure rationelle, d'vne figure rationelle, l'exces de deux fois le rectangle ſous A C, C B, & de deux fois le rectangle ſous A D, D B, eſt rationel.) Donc l'exces des compoſez des quarrez de A C, C B, & des quarrez de A D, D B, eſt rationel : A C, C B, eſtans mediales commenſurables en puiſſance, leurs quarrez L K, C G, ſeront mediaux & commenſurables. [h] Parquoy leur compoſé ſera commenſurable à chacun d'iceux ; [k] & partant medial : par la meſme raiſon le compoſé des quarrez de A D, D B, qui ſont E I, D T, eſt medial, [l] & vn eſpace medial n'excedant pas vn medial d'vn rationel, l'exces des compoſez des quarrez de A C, C B, & de A D, D B, ne ſera rationel : mais nous l'auons monſtré rationel : ce qui eſt abſurde. Donc A B, premiere de deux mediales ou bimediale premiere, ne peut eſtre diuiſée en ſes noms à vn autre poinct que C. Partant eſt diuiſé en ſes noms à vn poinct ſeulement. Ce qu'il falloit demonſtrer.

g *Sch.* 27. 10.

h 16. 10.

Coroll. 24. 10.

k 23. 10.

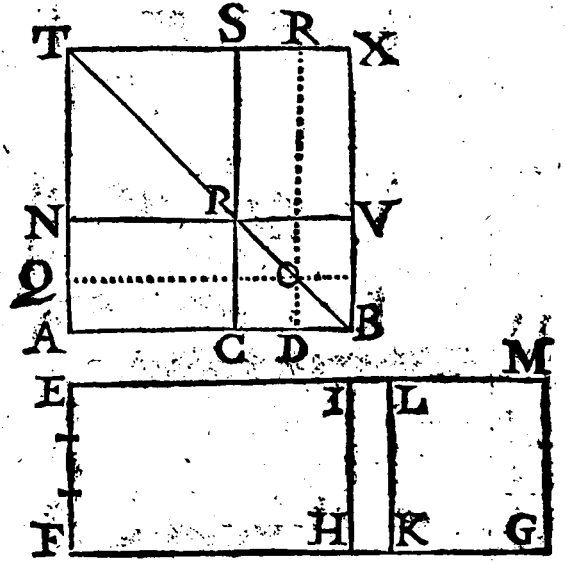
l 24. 10.

THEO

THEOREME 33. PROP. 45. xliv. xxxviij.

La ligne de deux Mediales seconde, est diuisée en ses noms à vn poinct seulement.

Soit la ligne A B, de deux mediales seconde, ou bimediale seconde, diuisée en ses noms au poinct C, de sorte que A C, C B, soient mediales commen-

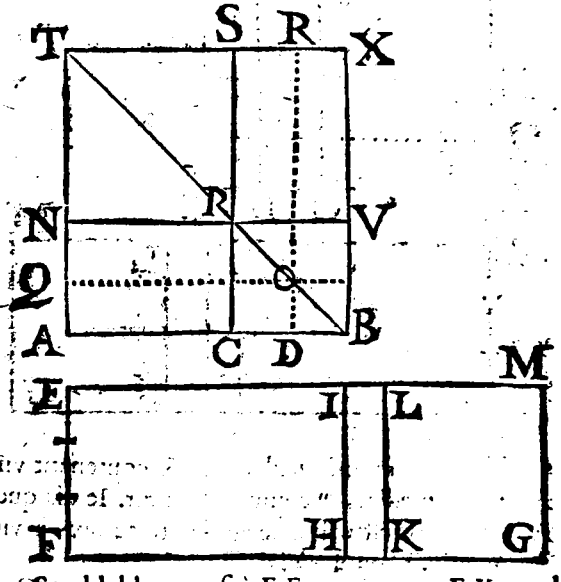


surables en puissance seulement, & contenant vn rectangle medial, [m] comme il est dit. Ie dis que A B, ne peut estre diuisée en d'autres noms à vn autre poinct, comme à D. m 39. 10.

Car, s'il se peut faire, soit diuisée à D, en sorte que A D, D B, soient aussi mediales, commensurables en puissance seulement, & contiennent vn rectangle medial. Nous demonstrerons comme à la 43. que les quarrez de A C, C B, qui sont N S, C V, sont plus grands ou plus petits que les quarrez de A D, D B, sçauoir Q R, O B.

n 45. 1. Soit exposée E F, rationelle, à laquelle soit n appliqué le rectangle E G, egal au quarré de A B, & E H, egal aux quarrez de A C, C B, donc le reste I G, sera egal à deux fois le rectangle sous A C, C B,

o 4. 2. o puis que le quarré de A B, est egal à iceux quarrez de A C, C B, & deux fois le rectangle sous A C, C B, & comme il appert par cette figure.



Semblablement, si à E F, on applique E K, egal aux

aux quarrez de A D, D B, le reſte L G, ſera egal à deux fois le rectangle ſous A D, D B. Et puis que les quarrez de A C, C B, ſont inegaux aux quarrez de A D, D B, les rectangles E H, E K, qui leur ſont egaux, ſeront auſſi inegaux: & partant F H, F K, ſeront inegales.

Derechef, les quarrez de A C, C B, eſtans plus grands que [p] deux fois le rectangle contenu ſous A C, C B, E H, ſera plus grand que I G, & partant E H, plus grand que la moitié de E G, & la ligne F H, plus grande que la moitié de F G: par meſme raiſon F K, ſera monſtrée plus grande que la moitié de F G: donc les parties F H, H G, ſont inegales aux parties de F K, K G, chacune à la ſienne. Mais d'autant que A C, C B, ſont mediales commenſurables en puiſſance, leurs quarrez ſont mediaux & commenſurables. Donc le compoſé [q] d'iceux E H, ſera commenſurable à vn chacun d'iceux, [r] & partant medial: par meſme raiſon E K ſera medial. Donc [ſ] E H, E K, appliquez à la rationelle E F, font les latitudes F H, F K, rationelles incommenſ. en longitude à E F.

[p] *Lem.* 39. 10.

[q] 16. 10.

[r] *Coroll.* 10.

[ſ] 23. 10.

Semblablement, puis que le rectangle ſous A C, C B, eſt poſé medial, deux fois le rectangle ſous A C, C B, commenſ. à iceluy, [t] i. I G eſt auſſi medial: donc eſtant appliqué à la rationelle H I, H G ſera rationelle [v] incommenſ. en longitude à H I.

[t] *Coroll.* 24. 10.

[v] 23. 10.

Semblablement nous monſtrerons L G eſtre medial, & K G rationelle incommenſurable en longitude à K L.

Derechef, puis que A C, C B, ſont incommenſurables en longitude, & que comme A C, à C B, [x] ainſi le quarré de A C, au rectangle ſous A C, C B,

[x] 1. *Lem.* 3. 19. 10.

le quarré de A C, ſera incommenſurable au rect. ſous A C, C B. Mais le compoſé des quarrez de A C, C B, eſt commenſurable au quarré de A C: (car AC, C B, eſtans commenſurables en puiſſance, c'eſt à dire, leurs quarrez eſtans commenſurables, y le compoſé d'iceux ſera commenſurable à chacun d'iceux, ſçauoir au quarré de A C. Mais deux fois le rectangle ſous A C, C B, eſt commenſurable au rectangle ſous A C, C B: Donc le compoſé des quarrez de A C, C B; c'eſt à dire le rectangle z E H, eſt incommenſurable à deux fois le rectangle ſous A C, C B; c'eſt à dire à I G.

10. 10.
y 16. 10.
z Sch. 14. 10.

Partant puis que E H, a eſt à I G, comme F H, à H G; b F H, H G, ſeront incommenſ. en longitude; mais elles ſont monſtrées rationelles, & partant rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement. c Donc la toute F G eſt irrationelle, qui eſt appellée de deux noms, & diuiſée en ſes noms au poinct H. Semblablement nous demonſtrerons auſſi que F G, de deux noms, eſt diuiſée en autres noms à vn autre poinct K: d ce qui eſt impoſſible. Donc A B, bimediale ſeconde, n'eſt diuiſée en ſes noms à vn autre poinct que C. Partant eſt diuiſée en ſes noms à vn poinct ſeulement. Ce qu'il falloit demonſtrer.

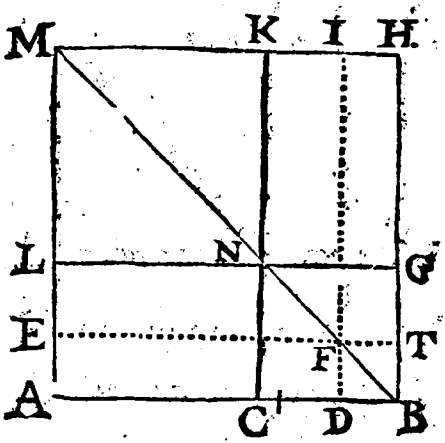
a 1. 6.
b 10. 10.
c 37. 10.
d 43. 10.

THEO

THEOREME 36. PROP. 45. xlv. xxxix.

La ligne Mejeure eſt diuiſée en ſes noms à vn poinct ſeulement.

Soit la ligne majeure A B, diuiſée en ſes noms au poinct C, en ſorte que A C, C B, ſoient incommenſurables en puiſſance, faiſant le compoſé de leurs quarrez rationel, & le rectangle ſous icelles medial. Ie dis A B, ne peut eſtre diuiſée à vn autre poinct, en d'autres noms, ſçauoir leſquels ſoient lignes incommenſurables en puiſſance, faiſant le compoſé de leurs quarrez rationel, & le rectangle ſous icelles medial. 40. 10.



Car, s'il ſe peut faire, ſoit diuiſée en d'autres noms par D, comme [c] il a eſté demonſtré, l'exces [c] 43. 10.

du composé des quarrez A C, C B, & du composé des quarrez de A D, D B, est le mesme que celuy de deux fois le rectangle sous A C, C B, & de deux fois le rectangle sous A D, D B : mais l'exces des composez desdits quarrez est rationel : (car puis que l'vn & l'autre composé est posé rationel, l'exces [f] d'iceux sera aussi rationel) donc l'exces de deux fois le rectangle sous A C, C B, & de deux fois le rect. sous A D, D B, est rationel. Mais d'autant que le rect. sous A C, C B, est posé medial, deux fois le rect. [g] de A C, C B, est aussi medial, estans commensurables : semblablement le rect. sous A D, D B, deux fois est medial. [h] Donc puis qu'vn medial n'excede vn medial d'vn rationel, l'exces de deux fois le rect. sous A C, C B, & de deux fois le rect. sous A D, D B, ne sera pas rationel: Mais nous auons monstré qu'il est aussi rationel; ce qui est absurde. Donc A B, ne se peut pas diuiser en ses noms à vn autre poinct que C. Partant elle se diuise en ses noms à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit démonstrer.

f *Sch.* 27. 10.

g *Coroll.* 24. 10.

h 27. 10.

xlvj. xl.

THEOREME 35. PROP. 47.

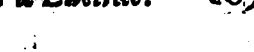
La ligne pouuant vn Rationel & vn Medial, est diuisée en ses noms à vn poinct seulement.

Soit A B, pouuant vn rationel & vn medial diuisée en ses noms, au poinct C, en sorte que A C, C B, soient incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles [i] rationel. Ie dis que A B,

i 41. 30.

ne

ne peut estre diuisée en d'autres noms à vn autre poinct, lesquels soient aussi lignes incommensurables en puissance, faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu sous icelles rationel.



Car soit diuisée en d'autres noms, s'il est possible, à D: de quelque part que tombe le poinct D, nous monstrerons comme en la 43. Propositon, que l'exces de deux fois le rectangle sous A C, C B, & de deux fois le rectangle sous A D, D B, est le mesme que l'exces du composé des quarrez de A C, C B, & du composé des quarrez de A D, D B: mais l'exces desdits rectangles est rationel [k] comme il est monstré. Donc l'exces du composé des quarrez de A C, C B, & de A D, D B, est aussi rationel: mais les composez d'iceux quarrez sont posez mediaux: [l] Donc l'exces d'iceux ne sera rationel, vn medial n'excedant vn medial d'vn rationel: mais il est monstré rationel, ce qui est absurde. Donc A B, n'est diuisée en ses noms à vn autre poinct que C. Partant à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit demonstrer.

[k] 44. 10.

[l] 27. 10.

THEOREME 36. PROP. 48. xlvij. xlj.

La ligne pouuant deux Mediaux, est diuisée en ses noms à vn poinct seulement.

Soit A B, pouuant deux mediaux, diuisée en ses noms à C, en sorte que A C, C B, soient incommen

commenſurables, faiſans le compoſé de leurs quarrez medial, & le rectangle ſous icelles medial, & incommenſurable [m] au compoſé de leurs quarrez. Ie dis que A B, ne peut eſtre diuiſée à vn autre poinct en d'autres noms, qui ſoient auſſi lignes incommenſurables en puiſſance, faiſant ce qui eſt dit.

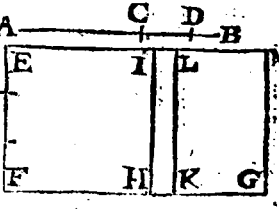
m 42. 10.

Car, s'il eſt poſſible, ſoit diuiſée en d'autres noms par D: faiſant la meſme conſtruction qu'en la 45. Propoſition: nous demonſtrerons comme en icelle que les parties F H, H G, ſont inegales aux parties F K, K G, chacune à la ſienne. D'autant donc que le compoſé des quarrez de A C, C B, eſt poſé medial, E H, ſon egal, eſt auſſi medial: & puis que le rectangle ſous A C, C B, eſt auſſi poſé medial, I G, egal au double d'iceluy [n] eſt medial, eſtans commenſurables. Donc E H, I G, mediaux, appliquez à la rationelle E F, font F H, H G, rationelles, incommenſurables en longitude à E F: (car H I, eſt egale à E F:) ainſi nous prouuerons que F K, K G, ſont rationelles incommenſurables en longitude à E F: mais puis que le compoſé des quarrez de A C, C B, c'eſt à dire, E H, eſt incommenſurable à deux fois le rectangle ſous A C, C B, par l'hypotheſe: c'eſt à dire I G: [o] Et comme E H, à I G, ainſi F H, à H G; F H, H G, ſont [p] incommenſurables en longitude: mais elles ſont monſtrées rationelles. Donc F H, H G, ſont

n *Coroll.* 24. 10.

o 1. 6.

p 10. 10.



rationelles

rationelles commensurables en puissance seulement. Donc la toute F G est rationelle, appellée de deux noms, & diuisée en ses noms à H ; mais nous monstrerons que F G, est aussi diuisée en d'autres noms à vn autre poinct K, ce qui est demonstré impossible. ¶ Donc A B, pouuant deux mediaux n'est diuisée en ses noms à vn autre poinct qu'à C. Donc à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit demonstrer. ¶ 43. 10.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne Rationelle estant exposée, & vne ligne de deux noms, (laquelle ils appellent Binome) diuisée en ses noms, de laquelle le plus grand nom puisse plus que le moindre, du quarré d'vne ligne droicte qui luy est commensurable en longitude.

1. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la Rationelle exposée : la toute soit appellée, premiere de deux noms, ou binome premier.

2. Mais si le moindre nom est commensurable en longitude à la Rationelle exposée : Soit appellée seconde, de deux noms, ou binome second.

3. Que si l'vn ny l'autre d'iceux noms n'est commensurable en longitude à la Rationelle exposée : Soit appellée troisiesme de deux noms, ou binome troisiesme.

Derech-,

Derechef, ſi le plus grand nom peut plus que le moindre, du quarré d'vne ligne droite, qui luy ſoit incommenſurable en longitude.

4. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la Rationelle expoſée : Soit appellée quatrieſme de deux noms, ou binome quatrieſme

5. Mais ſi le moindre nom eſt commenſurable en longitude à la Rationelle expoſée : Soit appellée cinquieſme de deux noms.

6. Que ſi l'vn ny l'autre d'iceux noms n'eſt commenſurable en longitude à la Rationelle expoſée : Soit appellée ſixieſme.

Theon appelle icy les Definitions des Binomes, ſecondes Definitions, à cauſe des premieres qui ſont au commencement de ce liure 10. d'Enclide, encore qu'elles ſoient, peut-eſtre, de luy; de Theon, dis-je, & non d'Enclide.

xlviij. xlij. **PROBLEME 13. PROP. 49.**

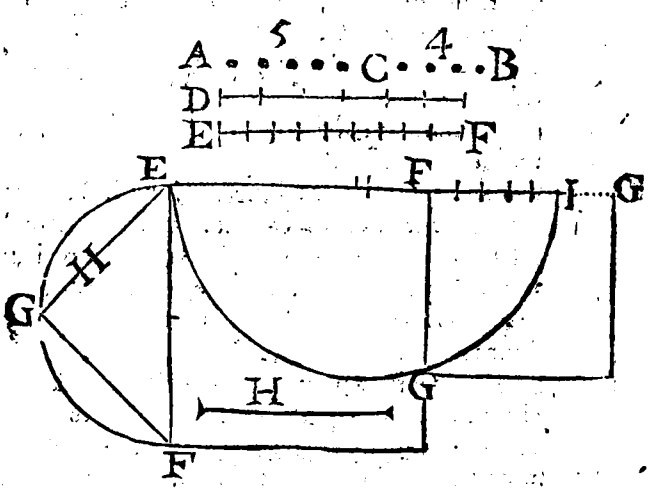
Trouuer vne ligne premiere de deux noms, ou Binome premier.

t *Sch.* 29. 10. Ayant t trouué deux nombres quarrez A B, C B, dont l'excez A C ne ſoit quarré : de ſorte que A B, C B, ſoient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Mais A B, A C, ne ſoient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, & ſoit expoſée vne ligne rationelle D, à laquelle ſoit priſe

E F,

E F, commensurable en longitude, E F, commensurable à D rationelle, sera aussi rationelle ; puis soit F G, au quarré de laquelle soit le quarré E F, comme le nombre A B, au nombre A C. (Ce qui sera aussi facile, en diuisant E F, en autant de parties egales, qu'il y a d'vnitez en A B, & prenant F I, de 5. telles part. & F G, moyenne proportionelle entre icelles, comme il appert par cette figure.) Ie dis que E G totale, est binome premier.

Coroll. 6. 10.



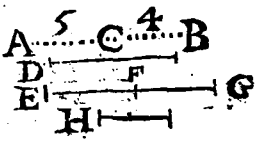
Car puis que les quarrez de E F, F G, estans entr'eux comme les nombres A B, A C, sont commensurables, E F, F G, seront commensurables, au moins en puissance : mais E F, est monstrée rationelle : donc F G l'est aussi : & A B, n'estant à A C comme nombre quarré à nombre quarré, les q. à de E F, F G, ne seront entr'eux comme nombre q. à nombre q. Donc E F, F G, sont incommensurables

6. 10.

9. 10.

en

en longitude,& partant rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, & la toute E G eſt irrationelle,appellée de deux noms.Ie dis qu'elle eſt auſſi premiere. Car le q.de E F,eſtant au q.de F G, comme A B, à A C, nombre à nombre, & A B eſtant plus grand que A C, le q. de E F, ſera plus grand que le quarré de F G. Qu'il ſoit donc plus grand du q.de H: & comme il appert par la figure. *Lem.14.18.* D'autant que comme le nombre A B, eſt au nombre A C, ainſi le quarré de E F,au quarré de F G, par conuerſion de raiſon, comme A B, ſera à C B: (ſçauoir à l'excez, donc A B antecedent, excede A C conſequent:) ainſi le quarré de E F,eſt au quarré de H,ſçauoir à l'excez,donc l'antecedent quarré de E F,excede le conſequent quarré de F G. Mais A B, C B, ſont nombres quarrez: donc les quarrez de E F,& H,ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : partant E F, & H,ſont commenſurables en longitude.Donc puis que le plus grand nombre E F, peut plus que le moindre F G, du quarré de H, commenſurable en longitude à icelle: & le meſme E F, eſt auſſi commenſurable en longitude à D,rationelle expoſée: E G,ſera premiere de deux noms, ou binome premier,ſelon la definition. Donc nous auons trouué vn binome premier.Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

SCHOLIE.

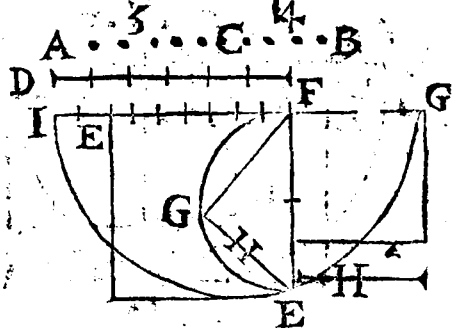
Soit la ligne Rationelle proposée D, 8. & E F, soit 6. & comme A B, 9. nombre quarré est à A C, 5. nombre non quarré: ainsi 36. quarré E F, 6. soit à vn autre, sçauoir au quarré de F G, qui sera trouué de 20. Donc F G, sera 7 9. 20. & E G, toute, sera 6 p. 7 9. 20. Binome premier, comme il est manifeste de ce qui est dit cy-dessus.

PROBLEME 14. PROP. 50.

xlix. xliij.

Trouuer vne ligne, seconde de deux noms, ou Binome second.

Ayant trouué deux nombres quarrez A B, C B, comme en la precedente, & estant exposée la rationelle D; soit prise F G, commensurable en lon-

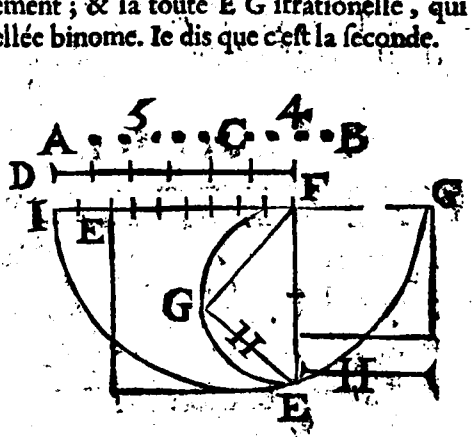


gitude à icelle; F G, sera donc aussi rationelle: Et comme le nombre A C, est au nombre A B, [v] soit

v *Coroll.* 6

le quarré de F G, au quarré de E F. Ce qui sera facile comme en la precedente, en prenant vne ligne comme F 1. de 9. telles parties, que F G, en est 5. & F E, moyenne proportionelle entre icelles, comme il appert par cette figure. Ie dis que E G est binome second.

Car les quarrez de F G, E F, estans entr'eux comme les nombres A C, A B, y 6.10. ceux seront commensurables, & les lignes F G, E F, commensurables, au moins en puissance, & F G est monstrée rationelle: donc E F l'est aussi. Mais puis que A C, ny A B, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, les quarrez de F G, E F, ne le seront z 9.10. aussi comme nombre quarré à nombre quarré. Et partant E F, F G, incommensurables en longitude, & par ainsi rationelles commens. en puissance 37. 10. seulement; & la toute E G irrationelle, qui est appellée binome. Ie dis que c'est la seconde.



Car puis que le q. de F G, est au q. de E F, comme le nombre A C, au nombre A B, & par conuer. de raison

faiſon le q. de E F, au q. de F G, comme A B, à A C; & que A B, eſt plus grand que A C : le q. de E F, ſera plus grand que le q. de F G. [a] Qu'il ſoit donc plus grand du q. de H, comme il appert par cette figure. Nous monſtrerons & comme en la precedente, que H eſt commenſurable en longitude à E F. Or puis que le plus grand nom E F, peut plus que le moindre F G, du q. de H, commenſurable à icelle en longitude : & le moindre nom F G, eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſée D, E G, par la definition, ſera la ſeconde de deux noms. Donc nous auons trouué vn binome ſecond. Ce qu'il falloit faire. a *Lem.* 14. 10.

SCHOLIE.

Soit la ligne F G, priſe pour ſecond nom 5. nombre Rationel, & ſoit fait comme A C, 5. au nombre quarré A B, 9. ainſi 25. quarré du nombre pris, ſoit à vn autre, ſçauoir à 45. quarré de E F : Donc E F, ſera 7 q. 45. Partant la toute E G, ſera 7 q. 45 p. 5. Binome ſecond.

PROBLEME 15. PROP. 51.

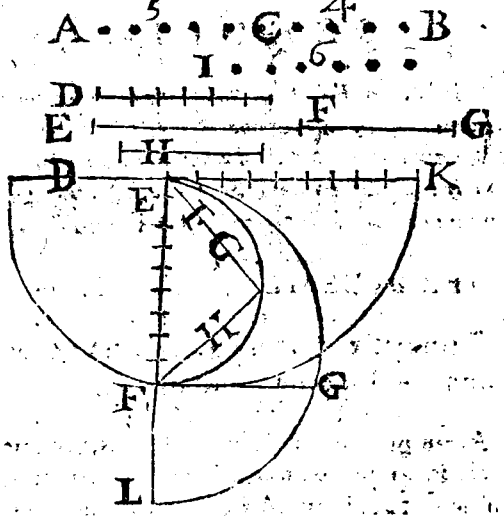
Trouuer vne troiſieſme ligne de deux noms : ou Binome troiſieſme.

Ayant pris deux nombres A B, C B, comme en la 49. Propoſition, ſoit pris vn autre nombre I, qui ne ſoit à A B, ny à A C, comme nombre quarré à nombre quarré. Ce que l'on fera, prenant I, nombre non quarré, prochainement plus grand que A C : cela eſtant, il ne ſera à A B, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef, n'estant quarré prochain plus grand que A C, il sera different de 1. de A C, ou de 2. Donc entre I & A C, il ne b tombera vn moyen proportionel, partant ne seront plans semblables: & ne seront entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Maintenant soit proposée D rationelle; & comme I à A B, ainsi le q. de D, soit au q. de E F. Ce qui sera facile aussi en prenant E K, de 9. telles parties que D en est 6, & E F, moyenne proportionelle entre les deux D, & E K. Donc les quarrez de D, & E F, seront commens. & D, & E F

b *Sch.* 8, 8.

c *Coroll.* 6. 10.



commens. au moins en puissance, & D estant rationelle, E F le sera aussi. Et d'autant que I n'est à A B, c'est à dire le q. de D, n'est au q. de E F, comme

quarré

quarré à nombre quarré, [d] D & E F, seront incommensurables en longitude. [d] *Coroll.* 9. 10.

Derechef, soit F G, au q. de laquelle soit le q. de E F, comme A B, à A C. [e] Ce que l'on fera, en diuisant E F, en 9. parties egales, & faisant F L de 5. telles parties, puis prenant F G, moyenne proportionelle entre E F, F L, comme il appert par la figure. Iceux quarrez seront commens. & E F, I G, au moins commens. en puiss. Donc E F, estant monstrée rationelle, F G sera aussi rationelle: & d'autant que A B, n'est à A C: c'est à dire le q. de E F, n'est au q. de F G, comme nombre quarré à nombre quarré E F, F G, [f] seront incommens. en longitude. Donc E F, F G, sont rationelles commensurables en puissance seulement: [g] partant la toute E G, irrationelle appellée de deux noms. Ie dis que c'est la troisiesme. [e] 6. 10. [f] 9. 10. [g] 37. 10.

Car puis que comme I est A B, ainsi le quarré de D, au quarré de E F, & comme A B, à A C, ainsi le q. de E F, au q. F G, en raison egale comme I à A C, ainsi le q. de D, au q. de F G; Mais I, & A C, ne sont entr'eux comme nombre q. à nombre q. Donc les quarrez de D, & F G, ne seront aussi comme nombre q. à nombre q. Donc [h] D, & F G, sont incommens. en long. Mais d'autant que comme A B, à A C, ainsi le quarré de E F, au quarré de F G: Mais A B, est plus grand que A C, donc le quarré de E F, sera plus grand que le quarré de F G; [i] qu'il soit donc plus grand du quarré de H. Nous monstrerons comme en la 49. Proposition, que H est commensurable en longitude à E F. D'autant donc que le plus grand nom E F, peut plus que le moindre F G, du quarré de H, commensurable en longitude à icelle, & que l'vne ny l'autre [h] 9. 10. [i] *Lem.* 14. 10.

lij. xlvij. PROBLEME 17. PROP. 53.

Trouuer vne cinquieſme ligne de deux noms.

Ayant trouué deux nombres A C, C B, comme en la precedente, ſoit fait la conſtruction comme en la 50. c'eſt à dire, ſoit priſe F G, commenſurable en longitude à l'expoſée rationelle D. Il ſera monſtré comme en la 50. Prop. que E G eſt binome, ie dis auſſi que c'eſt le cinquieſme : car on demonſtrera comme en la meſme 50. que le quarré de E F, ſera plus grand que le quarré F G. Qu'il ſoit donc plus grand du quarré de H.

Mais d'autant que par conuerſion de raiſon (comme il eſt monſtré en la 49. comme A B, eſt à C B, ainſi le quarré de E F, eſt au quarré de H) il ſera monſtré comme en la precedente, que E F, & H, ſont incommenſurables en longitude. Partant puis que le plus grand nom E F, peut plus que le moindre F G, du quarré de H, incommenſurable en longitude à icelle, & le moindre nom F G, eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſée D, par la definition E G, ſera binome cinquieſme. Donc nous auons trouué le requis. Ce qu'il falloit faire. Voyez la figure precedente.

SCHOLIE.

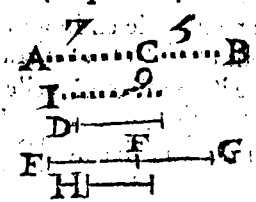
SCHOLIE.

Soit la ligne D, Rationelle, exposée, & soit F G, moindre nom. 2. & comme le nombre A C, 6. est au nombre quarré A B, 9. ainsi 4. quarré de F G, 2. soit à un autre, sçauoir au quarré de E F, qui sera trouué de 6. Donc E F, sera γq. 6. pour le plus grand nom. Partant la toute A G, sera γq. 6. p. 2. binome cinquiesme.

PROBLEME 18. PROP. 54. liij. xlvij.

Trouuer vne ligne sixiesme de deux noms, ou binome sixiesme.

Ayant trouué deux nombres A C, C B, plans non semblables, l'vn ny l'autre desquels ne soit quarré, & le composé d'iceux A B, ne soit aussi quarré, & ne soit à l'vn ny l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, (ce que l'on fera, diuisant quelque nombre non quarré en deux nombres premiers entr'eux.[m] Car ainsi le tout sera premier à chacun d'iceux,[n] & partant ne sera à aucun d'iceux comme nombre quarré à nombre quarré.) Et soit pris quelconque autre nombre I, qui ne soit à A B, ny à A C, comme nombre quarré à nombre quarré, & soit vne Rationelle proposée D; & comme I est à A B, ainsi



m 30.7.

n *Sch.* 27.

lij. xlvij. PROBLEME 17. PROP. 53.

Trouuer vne cinquieſme ligne de deux noms.

Ayant trouué deux nombres A C, C B, comme en la precedente, ſoit fait la conſtruction comme en la 50. c'eſt à dire, ſoit priſe F G, commenſurable en longitude à l'expoſée rationelle D. Il ſera monſtré comme en la 50. Prop. que E G eſt binome, ie dis auſſi que c'eſt le cinquieſme : car on demonſtrera comme en la meſme 50. que le quatré de E F, ſera plus grand que le quatré F G. Qu'il ſoit donc plus grand du quarré de H.

Mais d'autant que par conuerſion de raiſon (comme il eſt monſtré en la 49. comme A B, eſt à C B, ainſi le quarré de E F, eſt au quarré de H) il ſera monſtré comme en la precedente, que E F, & H, ſont incommenſurables en longitude. Partant puis que le plus grand nom E F, peut plus que le moindre F G, du quarré de H, incommenſurable en longitude à icelle, & le moindre nom F G, eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſée D, par la definition E G, ſera binome cinquieſme. Donc nous auons trouué le requis. Ce qu'il falloit faire. Voyez la figure precedente.

SCHOLIE.

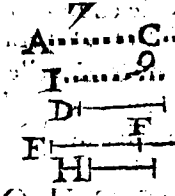
SCHOLIE.

Soit la ligne D, Rationelle, exposée, & soit F G, moindre nom 2. & comme le nombre A C, 6. est au nombre quarré A B, 9. ainsi 4. quarré de F G, 2. soit à vn autre, sçauoir au quarré de E F, qui sera trouué de 6. Donc E F, sera γq. 6. pour le plus grand nom. Partant la toute A G, sera γq. 6. p. 2. binome cinquiesme.

PROBLEME 18. PROP. 54. liij. xlvij.

Trouuer vne ligne sixiesme de deux noms, ou binome sixiesme.

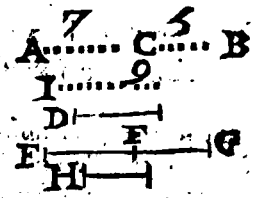
Ayant trouué deux nombres A C, C B, plans non semblables, l'vn ny l'autre desquels ne soit quarré, & le composé d'iceux A B, ne soit aussi quarré, & ne soit à l'vn ny l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, (ce que l'on fera, diuisant quelque nombre non quarré en deux nombres premiers entr'eux.[m] Car ainsi le tout sera premier à chacun d'iceux,[n] & partant ne sera à aucun d'iceux comme nombre quarré à nombre quarré.) Et soit pris quelconque autre nombre I, qui ne soit à A B, ny à A C, comme nombre quarré à nombre quarré, & soit vne Rationelle proposée D; & comme I est à A B, ainsi



m 30. 7.

n *Sch.* 27.

ò *Coroll. 6. 10.* ſoit fait le quarré de D, ° au quarré de E F, & le reſte comme en la 51. Nous monſtrerons comme en icelle que D & E F, ſont incommenſurables en longitude, & que la toute E G eſt binome. Ie dis auſſi que c'eſt la ſixieſme. Car il ſera demonſtré comme en la 51. Propoſition, que D & F G, ſont incommenſurables en longitude, & que le quarré de E F, eſt plus grand que le quarré de F G. Soit donc plus grand du quarré de H. Nous demonſtrerons auſſi comme en la 49. que par conuerſion de raiſon, comme A B, eſt à C B, ainſi le quarré de E F, eſt au quarré de H. Donc puis que A B, n'eſt à C B, & partant le quarré de E F, au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré : ꝑ 9. 10. E F & H, ſeront incommenſurables en longitude. Donc puis que le plus grand nom E F, peut plus que le moindre F G, du quarré de H, incommenſurable en longitude à icelle, & aucune d'icelles E F, F G, n'eſt commenſurable en longitude à l'expoſée Rationelle D, ſelon la definition E G, ſera binome ſixieſme. Donc nous auons trouué vn binome ſixieſme. Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Soit D, Rationelle, propoſée 9. & comme I, 9. eſt à A B, 11. ainſi le quarré de D, qui eſt 144. ſoit à vn autre, ſçauoir au quarré de E F, qui ſera trouué de 192. Donc E F, ſera 14. 192. plus grand nom. Derechef,

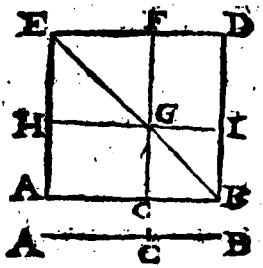
comme

comme A B, 12. à A C, 7. ainſi le quarré de E F, 192. ſoit à vn autre, ſçauoir au quarré du moindre ligne F G, on trouuera 112. Donc F G ſera 99. 112. & la toute E G ſera 99. 192. p. 99. 112. binome ſixieſme.

LEMME.

Si vne ligne droicte eſt coupée, comme l'on voudra, le rectangle contenu ſous les parties eſt milieu proportionel entre les quarrez d'icelles parties. Item, le rectangle contenu ſous la toute & vne partie, eſt milieu proportionel entre le quarré de la toute, & le quarré de ladite partie.

Soit coupée A B, comment que ce ſoit, à C, & ſur icelle ſoit deſcrit le quarré A D, & ſoit mené le diametre B E, & par C, ſoit auſſi menée E F, parallele à B D, ou A E, coupant le diametre par G, & par G, ſoit menée I H, parallele à A B: F H, C I, ſeront les quarrez des parties A C, C B; & l'vn & l'autre des rectangles D G, G A, ſera contenu ſous leſdites parties. Mais les rectangles C D, A I, ſont contenus ſous la toute A B, & la partie C B. Ie dis que D G, eſt milieu proportionel entre les quarrez F H, C I: Mais C D eſt milieu proportionel entre les quarrez A D, C I.

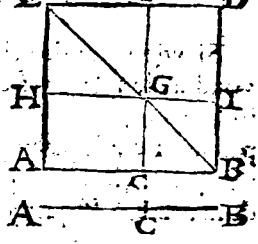


Car d'autant que comme H G, à G I, [r] *ainſi tant* [r] 1. 6.

le

le rectangle F H, eſt à D G, que A G, à C I; comme
[43.1. F H, ſera à D G, ainſi A G, à C I: Mais A G, eſt egal à D G. Donc comme F H eſt à D G, ainſi D G à C I: donc D G, eſt milieu proportionel, entre les quarrez F H, C I.

[1.6. De rechef, d'autant que comme A B, eſt à C B, ainſi tant A D, eſt à C D; que A I, à C I: comme A D, ſera à C D; ainſi A I, à C I: mais A I, eſt egal à C D. Donc comme A D, à C D, ainſi C D, ſera auſſi à C I; donc C D, eſt milieu proportionel entre les quarrez A D, C I. Semblablement A F, ſera milieu proportionel entre les quarrez A D, F H.



liv. viij. THEOREME 37. PROP. 55.

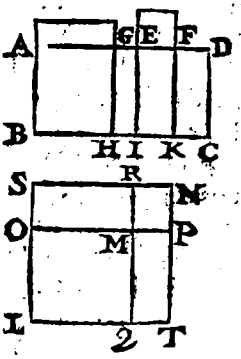
Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vne ligne premiere de deux noms; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt irrationelle, laquelle eſt appellée de deux noms.

Soit l'eſpace ou rectangle A C, contenu ſous la Rationelle A B, & ſous A D, premiere de deux noms, ou binome premier. Ie dis que la droicte ligne qui peut l'eſpace A C, eſt irrationelle, appellée binome.

Car ſoit A E, le plus grand nom de A D. Donc

A F, E D,

AE, ED, seront rationelles commensurables en puissance seulement, selon la definition, & AE, pourra plus que ED, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle, & AE, sera commensurable à la rationelle exposée AB. Soit coupée ED, en deux egalement à F: D'autant donc que AE, peut plus que ED, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle: si on applique à AG, vn rectangle egal au quart du quarré de ED, c'est à dire au quarré de EF, contenu sous AG, GE: & defaillant d'vne figure quarrée, il diuisera icelle en parties commensurables en longitude: donc AG, GE, sont commensurables en longitude entr'elles. Maintenant soient menées GH, EI, FK, paralleles à AB, DC: & soit le quarré LM, egal au parallelogramme AH, & le quarré MN, egal au parallelogramme GI; & soient conioincts iceux quarrez au poinct M, en sorte que MO, MP, facent vne ligne droicte OP: donc MQ, MR, feront aussi vne ligne droicte QR, comme il appert. Et ayant acheué le rectangle LN, OM, MP, estans egales à QM, MR, (à cause des quarrez LM, MN:) & partant la toute OP, à la toute QR; & OP, estant aussi egale, tant à



v *Lem.* 2. 17. 10.

x 18. 10.

y 14. 2.

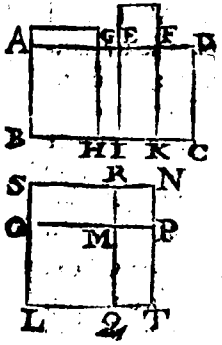
z 15. 13. & 14. 1.

a 34. 1.

SN,

S N, qu'à L T, & Q R, à L S, T N, le rectangle L N, ſera equilatere, & partant quarré.

Mais le rectangle ſous A G, G E, eſtant fait egal au quarré de E F, [b] comme A G, à E F; ainſi E F, à G E: & [c] partant comme A H, à E K, ainſi E K à G I; donc E K, eſt moyen proportionel entre A H, G I, c'eſt à dire entre leurs egaux quarrez L M, M N. [d] Mais T M, eſt moyen proportionel entre L M, M N. Donc T M, eſt egal à E K: donc M S eſtant egal à T M, [e] & F C egal à E K, M S ſera auſſi egal à F C. Parquoy tout le quarré L N, ſera egal à tout le rectangle A C: partant la toute O P, peut l'eſpace A C: contenu ſous A B rationelle, & A D *binome premier*. Ie dis que O P eſt irrationelle, appellée Binome. Car puis que A G, G E, ſont monſtrées commenſurables en longitude, la toute A E, ſera commenſurable en longitude à chacune d'icelles: mais A E (eſtant le plus grand nom de A D, Binome premier) eſt commenſurable en longitude à la rationelle A B: donc A G, G E, ſont commenſurables en longitude à la meſme A B, [f] comme il appert; partant A B eſtant rationelle, A G, G E, ſeront rationelles: donc [g] les rectangles A H, G I, contenus ſous les rationelles commenſurables en longitude, ſont rationaux, & auſſi leurs egaux quarrez



b 17. 6.
c 1. 6.
d *Lem.* 54. 10.
e 43. 1.
36. 1.
36. 10.
f 12. 10.
g 20. 10.

quarrez L M, M N, & partant O M, M P, ſeront rationelles.

Et A E, eſtant incommenſurable en longitude à E D, & A G, monſtrée commenſurable en longitude à A E, & E F, commenſurable en longitude à E D, eſtant moitié d'icelle, [h] A G, E F, ſeront incommenſurables en longitude entr'elles : [i] parquoy A H, E K, eſtans en meſme raiſon que A G, E F, [k] c'eſt à dire leurs egaux L M, M T, ſont incommenſurables. Donc O M, M P, ſont incommenſurables en longitude ([l] ayant meſme raiſon que L M, M T. Mais O M, M P, ſont monſtrées rationelles, elles ſont donc rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. Parquoy la toute O P, pouuant l'eſpace A Ç, eſt irrationelle, appellée Binome. Donc ſi vn eſpace eſt contenu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

h *Sch.* 14. 10.
i 1. 6.
k 10. 10.
l 37. 10.

SCHOLIE.

Soit la Rationelle A B, 5. & A D, 4. p. 79. 12. E F, ou F D ſera 79. 3. & ſi à A E on applique vn parallelogramme egal au quarré de E F, defaillant d'vne figure quarrée, A G ſera 3. & G E 1. partant A H, ſera 15. G I, 5. & E K, ou F C 79. 75. Parquoy le tout A C ſera 20. p. 79. 300. tels eſpaces ſont par les recens, appellez binomiaux, ou de deux noms.

Trouuer le coſté ou racine quarrée de l'eſpace Binomial.

Soit l'eſpace Binomial 20. p. 79. 300. dont il faut trouuer le coſté, ſoit diuiſé le plus grand nom en deux telles parties, que le produict d'icelles ſoit

egal

egal au quart du quarré du moindre nom, sçauoir à 75. la plus grande partie sera 15. & la moindre 5, Ie dis que γq.15.p.γq.5. sera le costé du quarré egal à 20.p.γq.300. Car la ligne de deux noms, sçauoir γq.15.p.γq.5. estant diuisée en deux parties, le quarré de la toute sera egal aux quarrez des parties, & à deux fois le rectangle sous icelles parties. Donc le quarré de γq.15. est 15. & celuy de γq.5. est 5. & le rectangle sous γq.15. & γq.15. est 75. Donc le double est γq.300. & le tout fait 20.p.γq.300. egal au quarré de γq.15.p.γq.5. Donc γq.5.p.γq.5. sera le costé du quarré de l'espace Binomial 20.p.γq.300. & ainsi des autres.

lix.
xlix. THEOREME 38. PROP. 56.

Si vn espace est contenu sous vne ligne Rationelle, & vne ligne seconde de deux noms : la ligne droicte pouuant iceluy espace est irrationelle, laquelle est appellée premiere de deux mediales.

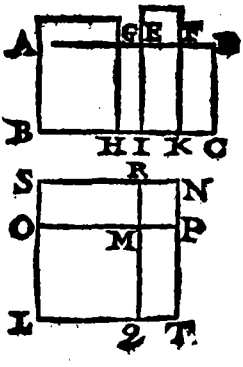
Soit l'espace A C, contenu sous la Rationelle A B, & A D, binome second. Ie dis que la ligne droicte pouuant A C, est irrationelle, appellée premiere de deux mediales, ou bimediale premiere.

Car soit A E, plus grand nom de A D, donc A E, E D, sont rationelles commensurables en puissance seulement, selon la definition. Et A E, peut plus que E D, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle ; & E D, sera commensurable en longitude à la rationelle, exposée A B. Soit coupée E D, en deux egalement à F ; & ayant faict le

geske

reſte comme en la precedente ; l'on demonſtrera comme en icelle que O P, peut l'eſpace contenu ſous A B, rationelle, & A D, binome ſecond. Ie dis que O P eſt irration. appellée bimediale premiere.

Car A E, eſtant incommenſurable en longitude à E D, moindre nom de A D, bi ſoit le ſecond; commenſurable en longitude à A B, rationelle, [a] A E, A B, ſont incommenſurables en longitude. Et A G, G E, eſtans [b] monſtrées cõmenſurables en longitude, [c] la toute A E, ſera commenſurable en longitude à chacune d'icelles. Parquoy A E, plus grand nom de A D eſtant rationelle, A G, G E, ſeront auſſi rationelles. Donc puis que tant A G, que G E, eſt commenſurable en longitude à A E ; Mais A E, incommenſurable en longitude à A B rationelle, [d] l'vne & l'autre A G, G E, eſt incommenſ. en longitude à la meſme A B : Donc tant A B, A G, que A B, G E, ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement: [e] partant les rectangles A H, G I, ou leurs egaux quarrez L M, M N, ſont mediaux : & partant O M, M P, mediales : Mais A G, G E eſtans commenſurables en longitude, [f] A H, G I, eſtant en meſme raiſon, & partant leurs egaux quarrez L M, M N, ſeront commenſurables : donc O M, M P, ſont commenſurables, au moins en puiſſance.



a 13.10.

b 55.10.

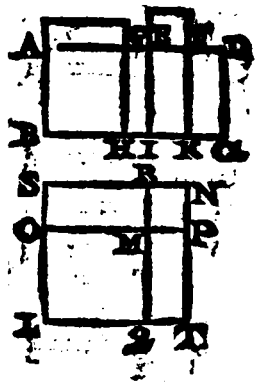
c 16.10.

d 14.10.

e 22.10.

f 10.10.

Et puis que A E, E D, sont incommens. en longitude, & A G est monstrée commens. en longit. à A E : Et E F, est commensurable en longitude à E D, estant moitié d'icelle, h A G, E F, seront incommensurables en longitude. Donc A H, E K, ayant mesme raison, i ou leurs egaux rectangles L M, M F, sont incommensurables : k & partant O M, M P, sont incommensurables en longitude, ayant mesme raison, Donc O M, M P, estans monstrées mediales & commensurables, elles seront mediales commensurables en puissance seulement.



Finalement, E D, moindre nom estant commens. en longit. à A B, c'est à dire à E I: mais E F, est aussi commensurable en longitude à E D, l E I, E F, seront commensurables en longit. parquoy E I estant rationelle, E F, sera aussi rationelle. Donc m E K, est rectangle rationel : mais M T, contenu sous O M, M P, est egal à E K, donc M T, est rationel : partant O M, M P, sont mediales commensurables en puissance seulement, contenant vn rectangle rationel : n & par ainsi O P est irrationelle, appellée bimediale premiere. Donc si vn espace est contenu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

h *Sch.* 14. 10.
i 10. 10.
k 1. 6.
l 12. 10.
m 20. 10.
n 38. 10.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Soit AB,6.& AD,γγ.12.p.3. EF, ou FD,1.$\frac{1}{2}$.& ſi à AE on applique vn parallelogramme egal au quarré de EF, defaillant d'vne figure quarrée AG, ſera γγ.6.$\frac{1}{4}$ GE, γγ.$\frac{1}{4}$. Donc le parallelogramme AH eſt γγ.243. GK, γγ.27. & EL, 9. & le tout AC γγ.432.p.18. On peut trouuer ſa racine ſans diuiſion γγ.432. en deux parties, telles que le produict d'icelles parties ſoit egal au quart du quarré de 18. c'eſt à dire à 81. comme il eſt dit, la plus grande partie ſera γγ.108 p. γγ. 27. leſquelles eſtans aſſemblées feront γγ. 243. mais la moindre partie ſera γγ.108.—γγ. 27. & ayant oſté γγ. 27. de γγ. 108. demeure γγ.108.—γγ.27. Donc la plus grande partie eſt γγ.243. & la moindre γγ.27. Parquoy la racine de l'eſpace binomial γγ. 432. p. γγ. 18. ſera γγγ. 243. p. γγγ.27.

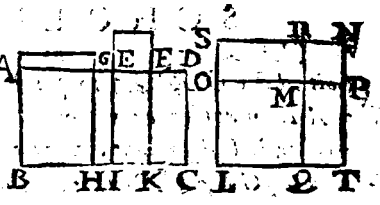
THEOREME 39. PROP. 57. lvj. 1.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle,& vne ligne troiſieſme de deux noms : la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt irrationelle ; laquelle eſt appellée ſeconde de deux mediales.

Soit l'eſpace AC, contenu ſous AB, rationelle, & AD, binome troiſieſme. Ie dis que la droicte ligne pouuant AC eſt irrationelle, appellée bimediale ſeconde.

Car ſoit AE, plus grand nom de AD. Donc

A E, E D, ſe-
ſont rationel-
les commenſ.
en puiſſ. ſeule-
ment ſelon la
definition. Et
A E, pourra
plus que E D,



du quarré d'vne ligne commenſurable longi à icelle; & l'vne ny l'autre A E, E D, ne ſera commenſurable en longitude à la rationelle poſée A B.

Soit coupée E D, en deux egalement à F, & ſoit faict au reſte comme en la 55. Propoſition, l'on demonſtrera ainſi qu'en icelle 55. Propoſition, que O P, peut l'eſpace A C. Et comme en la precedente 56. Propoſition, que O M, M P, ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement; puis que A E eſt poſée incommenſurable en longitude à A B, rationelle, comme la meſme A E, eſtoit là incommenſurable en longitude à A B. Mais E D, E F, eſtans commenſurables en longitude, & E D, incommenſurable en longitude à la rationelle A B:
o 14.10. c'eſt à dire E I: o E F ſera auſſi incommenſurable en longitude à E I: mais E F, E I ſont rationelles, E F, eſtant moitié de E D rationelle; & E I, egale à la rationelle A B. Donc E F, E I, ſont rationelles
p 22.10. commenſurables en puiſſance ſeulement. p Partant E K eſt medial: donc M T ſon egal, eſt auſſi medial, contenu ſous O M, M P, mediales: partant O M, M P, eſtans mediales commenſurables en puiſſance ſeulement contenant vn eſpace medial:
q 22.10. q O P ſera irrationelle, appellée bimediale ſeconde. Donc ſi vn eſpace eſt contenu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Soit AB,6. AD,yy.18.p.yy.10.EF sera yy.2 11/13. Et si à AE on applique vn parallelogramme contenu sous AG,GE,egal au quarré de EF,defaillant d'vne figure quarrée, AG, sera yy.12. 1/2. & GE 1/2. partant AH,est yy.450.GK,yy.18.& EL, yy.90. Et tout le parallelogramme AC est 648. p. yy.360. Soit diuisée yy. 648. en deux parties telles que leur contenu soit egal au quart du quarré de yy.360.c'est à dire à 90.la plus grande partie sera yy.450. & la moindre yy.18.Donc la racine en vostre deuxiesme, AC,yy.648 p.yy.360.est yy.450.p.yy.18.

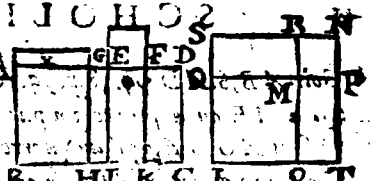
THEOREME 40. PROP. 58.

Si vn espace est contenu sous vne ligne Rationelle, & vne ligne quatriesme de deux noms: la droicte ligne pouuant iceluy espace est irrationelle, laquelle est appellée Majeure.

Soit l'espace ou rectangle AC, contenu sous AB rationelle, & AD binome quatriesme. Ie dis que la ligne pouuant AC est irrationelle, appellée Majeure.

Car soit AE, le plus grand nom de AD: donc AE, ED seront rationelles commensurables en puissance seulement selon la definition, & AE, pourra plus que ED, du quarré d'vne ligne incommensurable à icelle en longitude, & AE, sera commensurable en longitude à AB. Car ayant

coupé E D en deux egalement à F, soi faict le reste comme en la 55. Proposition. Donc A G, G E, seront incommensurables en longitude. Maintenant on demonstrera comme en la 55. Proposition que O P, peut l'espace A C. Ie dis que O P est irrationelle, appellée majeure. Car A G, G E, estant incommensurables en longitude: A H, G I, ayans mesme raison, sont incommensurables; & partant leurs egaux quarrez L M, M N, incommensurables. Parquoy O M, M P, sont incommensurables en puissance. Mais A E plus grand nom estant commensurable en longitude à A B rationelle, sera aussi rationelle: & le rect. A I sous icelles rationelles: lequel estant egal au composé des quarrez L M, M N, iceluy composé de L M, M N, est rationel.



r 19.10.

s 10.10.

t 20. 10.

Et d'autant que E D, moindre nom, est incommens. en longit. à la rationelle A B; E F sa moitié sera aussi incommensurable en longitude à A B: & E F est rationelle, estant commensur. à E D rationelle. Donc E F, A B, sont rationelles commens. en puissance seulement: parquoy E N contenu sous icelles, & partant M T son egal, contenu sous O M, M P, est medial, parquoy O P, M P, estans incommens. en puissance, & faisans le composé de leurs quarrez L M, M N, rationel, & le rect. M T, sous icelles medial: la toute O P sera irrationelle, laquelle est appellée majeure. Donc si vn espace, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

v 21.10.

x 40. 10.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Soit A B,6.& A D,6. p. 7q.24. E F, ſera 7q.6. ayant appliqué à A E, vn parallelogramme contenu ſous A G, G E, egal au quarré de E F, defaillant d'vne figure quarrée A G, ſera 3. p. 3q.3. & G E,3. ——7q.3. Donc A H eſt 18. p. 7q.108. & G K 18. ——7q.108 & E K, ou F C, 7q.216. & le tout A C 36.p.7q.864. Donc ſi on diuiſe 36. en deux parties telles que leur produit ſoit egal à 216.la plus grande partie ſera 18. p. 3q. 108. & la moindre 18.——7q. 108.partant la 7q. de l'eſpace binom. 36.p.7q.864. eſt (18.p.7q.108.) p.7q.(18.——7q.108.

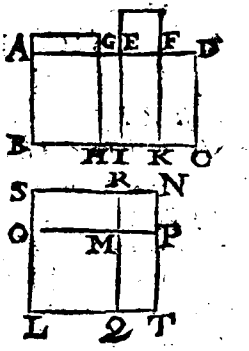
THEOREME 41. PROP. 59. lviij. lij.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vne cinquieſme de deux noms; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt Irrationelle, laquelle eſt appellée pouuant vn Rationel & vn Medial.

Soit l'eſpace A C, contenu ſous A B, Rationelle, & A D binome cinquieſme. Ie dis que la droicte ligne qui peut A C, eſt Irrationelle, appellée pouuant vn Rationel & vn Medial.

Car ſoit A E, plus grand nom de A D: Donc par la definition A E, E D, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: & A E, peut plus que E D; du quatré d'vne ligne incommenſ. en longitude à icelle: & E D eſt commenſ. en longit. à

A B, exposée rationelle. Soit coupée E D en deux egalement à F, & soit fait comme en la 55. Propos. y donc A G, G E, seront incommensur. en longit. Et comme en la 55. Prop. on monstrera que O P, peut l'espace A C. Ie dis que O P est irrationelle, appellée, pouuant vn Rationel & vn Medial. Car comme en la precedente Proposition, O M, M P, seront incommensurables en puissance. Et A E, plus grand nom estant rationelle, & incommensurable en longitude à la rationelle A B: A E, A B, seront rationelles commensurables en puissance seulement : [z] parquoy le rectangle A I sous icelles est medial. Mais A I est egal au composé des quarrez L M, M N : donc icelluy composé sera medial.



y 19.10.

z 22.10.

Derechef, E D estant posée rationelle commensurable en longitude à la rationelle A B, estant le moindre nom de A D, binome 5. E F, moitié de E D, sera aussi commens. en longit. à A B, & rationelle. [a] Donc E K, contenu sous E I, E F, rationelles commens. en longit, & partant son egal rectangle M T, sous O M, M P, est rationel. Parrant O M, M P, estans incommensurables en longitude, & faisant le composé de leurs quarrez L M, M N, medial : mais le rect. M T, sous icelles rationel, [b] la toute O P sera irration. dite pouuant vn rationel & vn medial. Donc si vn espace est contenu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 20.10.

b 41.10.

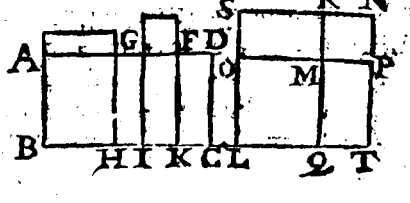
SCHOLIE.

SCHOLIE.

Soit AB,6. AD, racine quarrée 24,p.4. EF sera 2 & à AE, soit appliquée le parallelogramme sans AG, GE, egal au q. de EF, defaillant d'vne figure q. AG sera 72.6.p.72.2. GE 72.6. —— 72.2. Et AH, 72.216.p.72.72. GK, 72.216. —— 72.72. FK, 120. & le tout AC, 72.864.p.24. Donc si on diuise 72.864. en deux telles parties que leur produict soit egal à 144. la plus grande partie sera 72.216.p.72.72. & la moindre 72.216. —— 72.72. la racine quarrée de l'espace binom. AC, 72.864.p.24. est 72. (72.216.p. 72.72.) p. 72. (72.216. —— 72,72.)

THEOREME 42. PROP. 60. lix. liij.

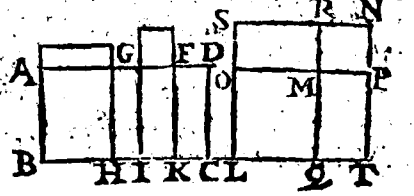
Si vn espace est contenu sous vne ligne Rationelle, & vne ligne fixiesme de deux noms; la droicte ligne pouuant iceluy espace est irrationelle, laquelle est nommée pouuant deux mediaux.



Soit le rectangle, ou espace AC, contenu sous AB rationelle, & AD binome fixiesme. Ie dis que la droicte ligne pouuant AC, est irrationelle, dite pouuant deux mediaux.

Car ſoit A E le plus grand nom : donc A E, E D, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, ſelon la definition : & A E, pourra plus que E D, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & l'vne ny l'autre A E, E D, ne ſera commenſurable en longitude à A B rationelle. Ayant faict comme és precedentes, [c] A G, G E, ſeront incommenſurables en longitude.

c 19.10.



Et on monſtrera comme en la 58. Prop. que O P peut l'eſpace A C, & comme en la 58. Prop. que O M, M P, ſont incommenſurables en puiſſance.

Derechef comme en la precedente le compoſé des quarrez L M, M N, ſera medial : mais comme en la 58. Prop. M T, ſous O M, M P ſera auſſi medial. Et d'autant que de A E, E F, celle-là eſt incommenſ. en longit. à E D, & celle-cy commenſ. à E D, [d] A E, E F ſeront incommenſ. en longit. [e] donc A I, E K ſont incommenſ. [f] ayans meſme raiſon que A E, E F. Parquoy le compoſé des quarrez L M, M N, egal à A I, & M T, egal à E K, ſont incommenſ. Donc O M, M P, eſtans incommenſ. en puiſſ. & faiſans le compoſé de leurs quarrez L M, M N medial, & M T rect. ſous icelles medial, & incommenſ. au compoſé de leurs quarrez. [g] La toute O P ſera irrarion. laquelle eſt dite pouuant deux mediaux : donc ſi vn eſpace eſt contenu ſous, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

d 15.10.
e 10.10.
f 1.6.
g 42.10.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Soit AB 5. AD, rq. 10 p. rq. 8. EF sera rq. 2. si à AE, on applique le parallelogramme sous AG, GE, egal au quarré de EF, & defaillant d'vne figure quarrée, AG, sera rq. 2. $\frac{1}{2}$ p. rq. $\frac{1}{2}$. GE, rq. 2. $\frac{1}{2}$. —— rq. $\frac{8}{2}$. & AH, rq. 62. $\frac{1}{2}$. p. rq. 12. $\frac{1}{2}$. GK, rq. 62. $\frac{1}{2}$. —— rq. 12. $\frac{8}{2}$. & EK rq. 50. & le tout AC, rq. 250. p. rq. 200. soit diuisée rq. 250. en deux telles parties que leur produit soit egal à 50. la plus grande partie sera rq. 62. $\frac{1}{2}$. p. rq. 12. $\frac{1}{2}$. & la moindre rq. 62. $\frac{1}{2}$. —— rq. 12. $\frac{1}{2}$. Donc la racine quarrée d'iceluy espace binomial, rq. 250. p. rq. 200. est rq. (rq. 62. $\frac{1}{2}$. p. rq. 12. $\frac{1}{2}$. p. rq. 62. $\frac{1}{2}$. —— rq. 12. $\frac{1}{2}$.)

THEOREME 43. PROP. 61. lx. liiij.

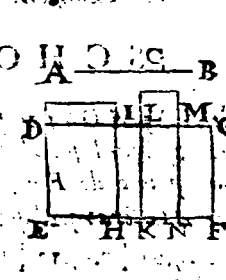
Le quarré d'vne ligne de deux noms, ou binome, appliqué sur vne ligne Rationelle, faict la latitude, binome premier.

Soit AB binome, dont AC est le plus grand nom, & sur DE rationelle proposée, soit appliqué le rect. DF, egal au q. de AB, faisant DG, latitude. Ie dis que DG, est binome premier. h 45. 1.

Car DE rationelle, soit appliqué DH, egal au q. de AC: & à HI, soit appliqué IK, egal au q. de CB: donc le reste LF, sera egal à deux fois le rectangle sous AC, CB: les i quarrez de AC, CB, & deux fois le rect. sous AC, CB, estans egaux au q. de AB: tout ainsi que le rect. DF, est egal au mesme q. de AB par la construction. i 4. 2.

Soit

Soit diuisée L G en deux egalement à M, & menée M N, parallele à L K, G F: l'vn & l'autre rect. L N, M F, sera egal au rect. sous A C, C B. [k] Et A C, C B estans rationelles commensurables en puissance seulement, la toute A B estant binome, les quarrez de A C, C B, seront rationaux, & partant commensurables. [l] Et leur composé estant commensurable à chacun d'iceux, icelluy composé sera aussi rationel, auquel D K estant egal par la construction, D K sera aussi rationel: & puis qu'iceluy D K est appliqué à la rationelle D E, il fera la latitude D L, rationelle & commensurable en longitude à D E.



k 37. 10.

l 16. 10.

Derechef, puis que A C, C B sont rationelles commensurables en puissance seulement, [m] le rectangle sous icelles sera medial, & partant deux fois le rectangle sous A C, C B, commensurable à icelluy: c'est à dire L F [n] sera medial. Donc L F appliqué à L K, rationel, [o] fait la latitude L G, rationelle incommensurable en longitude à L K, c'est à dire à D E; mais D L est monstrée commensurable en longitude à D E, [p] donc D L, L G, sont incommensurables en longitude. Donc icelles sont rationelles commensurables en puissance seulement, [q] & partant D G est binome, ou de deux noms. Ie dis qu'elle est premiere.

m 22. 10.

n *Coroll.* 24. 10.

o 23. 10.

p 13. 10.

q 37. 10.

[r] Car le rectangle sous A C, C B, estant milieu proportionel entre les quarrez de A C, C B, L N, sera aussi milieu proportionel entre D H, H K, partant

r *Lem.* 54. 10.

tant D I, L M, I L, ayant meſme raiſon que D H, L N, I K, L M, ſera auſſi moyenne proport. entre D I, I L. [t] Partant le rect. ſous D I, I L, ſera egal au quarré de L M. Et les quarrez de A C, C B, eſtans commenſ. puis que A C, C B, ſont poſées commenſ. en puiſſ. D H, I K, egaux à iceux ſeront commenſ. [v] Donc D I, I L, ayant meſme raiſon ſeront commenſurables en longitude. t 17. 7. v 10. 10.

Mais puis que D K, eſt plus grand que L F, [x] les quarrez de A C, C B eſtans plus grands que deux fois le rectangle ſous A C, C B, D L, ſera plus grande que L G, ([y] D L, L G, ayant meſme raiſon que D K, L F.) Donc puis que D L eſt plus grande que L G, & à D L, eſt appliqué le rectangle ſous D I, I L, egal au quarré de L M; c'eſt à dire au quart du quarré de L G, moindre, & defaillant d'vne figure quarrée; (car le rectangle ſous D I, I L, eſt monſtré egal au quarré de L M,) & D L, eſt diuiſé à I, en D I, I L, commenſurables en longitude, comme il eſt demonſtré. [z] Donc D L, plus grande, pourra plus que L G, moindre du quarré d'vne ligne commenſurable en longitude à icelle: parquoy D G, eſtant monſtrée de deux noms, & que D L plus grand nom, peut plus que le moindre L G, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, & que le meſme D L plus grand, eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſée D E: par la definition D G ſera premiere de deux noms. Donc le quarré d'vne ligne de deux noms, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. x *Lem.* 39. y 1. 6. z 18. 10.

SCHOLIE.

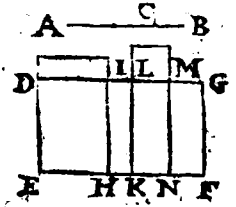
SCHOLIE.

Soit A B, 79.15. p. 79.5. & D E, 5. D H ſera 15. & I K 5. & L N, 79.75. & M F, 79.75. Partant ſi à D E on applique D H, il fera la latitude D I, 3. & ſi on applique I K, il fera I L, 1. Queſi à la meſme on applique L N, ſçauoir 79.75. il fera la latitude L M, racine quarrée 3. & M G ſera auſſi racine quarrée 3. Donc la toute D G eſt 4. p. racine quarrée 12. premiere de deux noms.

lxj. lv. THEOREME 44. PROP. 62.

Le quarré d'vne ligne premiere de deux mediales appliqué ſur vne ligne Rationelle, faict la latitude ſeconde de deux noms.

C'eſt à dire Binome ſecond.



Soit A B, premiere de deux mediales, dont le plus grand nom eſt A C.
a 45. 1. [a] Et à la rationelle D E, ſoit appliqué le rectangle D F, egal au quarré de A B, faiſant la latitude ou coſté D G. Ie dis que D G eſt binome ſecond.

Car ſoit faict comme en la precedente, de ſorte que D H, I K ſoient derechef egaux aux quarrez de A C, C B, & L N, M F, egaux chacun au rectangle

ſous

ſous A C,C B. D'autant donc que A C,C B,compoſant A B bimediale premiere, [b] ſont mediales commenſ.en puiſſ. ſeulement, contenant vn rect. rationel: les quarrez de A C,C B,& partant leurs égaux rect.D H,I K, ſont commenſ. & mediaux,[c] & partant le tout D K, eſtant commenſurable à chacun d'iceux D H,I K [d] ſera auſſi medial,lequel eſtant appliqué à D E rationelle, [e] ſa latitude D L ſera rationelle incommenſurable en longitude à D E. b 38.10. c 16.10. d *Coroll.* 24.10. e 23.10.

Derechef, le rectangle ſous A C, C B, eſtant rationel, le double d'iceluy,ſçauoir L F,ſera auſſi rationel; lequel eſtant appliqué à L K rationelle, [f] ſa latitude L G, ſera rationelle commenſurable en longitude à L K, c'eſt à dire à D E. Donc puis que L G eſt commenſurable en longitude à D E, & D L incommenſurable en longitude à D E, [g] D L,L G ſeront incommenſurables en longitude, & eſtans monſtrées rationelles, elles ſeront rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. [h] Et partant la toute D G eſt de deux noms.Et comme en la precedente on monſtrera que D L eſt le plus grand nom,& peut plus que L G moindre du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude,& le moindre nom L G,eſtant monſtré commenſurable en longitude à la rationelle expoſée D E, ſelon la definition, D G ſera ſeconde de deux noms,ou binome ſecond.Donc le quarré d'vne ligne premiere de deux mediales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. f 21.10. g 13.10. h 37.10.

SCHOLIE

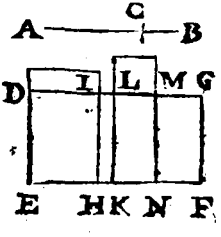
SCHOLIE.

Soit A B, γ 99.48. p. γ 99.27. & D E 4. D H, ſera γ 1. *γ 9.48. & I K, γ 9.27. L N, ou F M 6. Donc ſi à D E on applique D H, la latitude D I, ſera γ 9. de 3. & ſi à la meſme on applique I K; I L ſera γ 9.1. $\frac{11}{16}$. ainſi L N appliqué, ſera L M 1. $\frac{1}{2}$. c'eſt à dire A G, egal à iceluy. Et D I, I L, c'eſt à dire γ 9. 3. & γ 9.1. $\frac{11}{16}$. eſtans commenſurables en longitude, la toute D L ſera γ 9.9. $\frac{1}{16}$. Donc la toute D G ſera γ 9.9. $\frac{1}{16}$. p. 3. ſeconde de deux noms.*

lxij. lvj. 1. THEOREME 45. PROP. 63.

Le quarré d'vne ligne ſeconde de deux mediales, appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude, binome troiſieſme.

Soit A B, ſeconde de deux mediales, ou bimediale ſeconde, dont le plus grand nom eſt A C, i 45.1. & à la rationelle D E ſoit appliqué le rectangle D F, egal au quarré de A B, faiſant la latitude D G. Ie dis que D G eſt binome troiſieſme.



Car ayant faict la conſtruction comme en la 61. D'autant que A C, C B, faiſant la toute A B, bimediale ſeconde, k ſont mediales commenſurables en k 39.10.

puiſſance

puiſſance ſeulement, contenant vn medial; les quarrez de A C, C B, & partant leurs egaux rectangles D H, I K, ſont commenſurables & mediaux. Parquoy le tout D K, [l] eſtant commenſurable à chacun d'iceux, [m] ſera auſſi medial: & eſtant appliqué à la rationelle D E, [n] fera la latitude L D, rationelle, incommenſurable en longitude à D E. l 16.10. m *Coroll.* 24.10. n 23.10.

Derechef, le rect. ſous A C, C B eſtant medial, le double d'iceluy, ſçauoir L F, ſera auſſi medial, lequel eſtant appliqué à la rationelle L K, [o] l'autre coſté ou latitude L G ſera rationelle incommenſ. en longit. à L K, c'eſt à dire à D E. Et puis que A C eſt incommenſ. en longit. à C B: & comme A C, à C B, [p] ainſi le quarré de A C, au rect. ſous A C, C B: [q] le quarré de A C, eſt auſſi incommenſ. au rect. ſous A C, C B. Mais le compoſé des quarrez de A C, C B, [r] eſt commenſur. au quarré de A C, (eſtans iceux quarrez commenſurables, deſcrits de lignes poſées commenſurables en puiſſance,) & deux fois le rect. ſous A C, C B, eſt commenſ. au rect. ſous A C, C B, eſtant double d'iceluy. Donc le compoſé des quarrez de A C, C B, c'eſt à dire le rect. D K, [s] eſt incommenſ. à deux fois le rect. ſous A C, C B, c'eſt à dire au rect. L F. Donc D L, L G, ayans meſme raiſon que D K, L F, [t] ſont incómenſ. en longit. Mais elles ſont monſtrées rationelles: donc D L, L G, ſont rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement: partant [v] la toute D G eſt binome. Et comme en la 61. Propoſition, on monſtrera que D L eſt le plus grand nom, & peut plus que L G, moindre, du quarré d'vne ligne, qui luy eſt commenſurable en longitude, & l'vné ny l'autre D L, L G, eſtant monſtrée n'eſtre commenſurable en longitude à la rationelle propoſée par la definition

o 23.10. p *Lemme* 3.19.10. q 10.10. r 16.10. s *Sch.* 14. 10. t 10.10. v 37 10.

D G, ſera binome troiſieſme. Partant le quarré d'vne ligne ſeconde deux mediales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

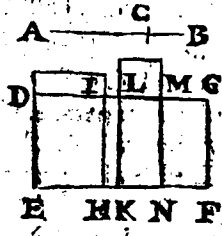
SCHOLIE.

Soit A B, γ99.72.p.γ99.8. & D E, 4. D H ſera γ9.7.2 I K, γ9.8. L N, ou M F, γ9.4. Donc ſi à D E on applique D H, la latitude D I, ſera γ9.4 1/2. mais ſi on applique I K, la latitude I L ſera γ9. 1/2 & ſi à L N, ou M F eſt appliqué L M, ou M G ſera γ9.1 1/2. Mais ſi D I, I L ſont adiouſtez, c'eſt à dire γ9.4 1/2 & γ9. 1/2 D L ſera γ9.8. Donc la toute D G, eſt γ9.8. p.γ9.6. binome troiſieſme.

lxiij. lxv. ## THEOREME 46. PROP. 64.

Le quarré d'vne ligne Majeure, appliqué à vne ligne rationelle, faict la latitude binome quatrieſme.

Soit la Majeure A B, dont le plus grand nom eſt
x 25.1. A C: * & à la rationelle D E, ſoit appliqué le rect. D F, egal au quarré de A B, faiſant la latitude D G. Ie dis que D G, eſt binome quatrieſme.



Cat ſoit faicte la conſtruction comme en la 61. Propoſition. D'autant que A C, C B, faiſans la majeure,
y 45. 10. A B, ſont incommenſ. en puiſſ. & font le compoſé de leurs quarrez rationel, & le rect. ſous icelles

medial:

medial : D K egal au composé d'iceux quarrez sera aussi rationel ; mais L F, double du rect. sous A C, C B, medial. D'autant donc que D K est appliqué à la rationelle D E, [z] D L sera rationelle commens. en longit. à D E, Semblablement, L F medial, estant appliqué à la rationelle L K, [a] L G sera rationelle incommens. en longit. à L K, c'est à dire à D E. Donc puis que D L est commens. en longit. à D E, & L G incommensurable : D L, L G seront incommensurables en longitude : mais elles sont monstrées rationelles : donc D L, L G, sont rationelles commensurables en puissance seulement, [b] partant D G, est binome.

z 21.10.
a 23.10.
13.10.
b 37.10.

Maintenant, comme il est monstré en la 61. Prop. le rect. sous D I, I L, est egal au quarré de L M : mais d'autant que les quarrez de A C, C B sont incommens. (estans A C, C B incommens. en puiss.) leurs egaux rectangles D H, I K, seront aussi incommens. [c] & partant D I, I L, estans en mesme raison, sont incommens. en longit.

c 10.10.

Mais, comme il est monstré en la 61. Proposit. D L est plus grande que L G, & à D L, on a appliqué vn rectangle contenu sous D I, I L, egal au quarré de L M, c'est à dire à la quarte partie du quarré de L G, defaillant d'vne figure quarrée, lequel diuise D L à I, en parties incommens. en longit. [d] D L, pourra plus que L G, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longit. Parquoy D L (plus grand nom de D G binome) estant monstrée commens. en longitude à D E, rationelle proposée : D G, par la definition sera binome quatriesme : donc le quarré d'vne ligne majeure, appliqué à vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

d 19.10.

Soit A B, γq. (10. p. γq. 37. $\frac{1}{2}$.) p. γq. 10.——γq. 37. $\frac{1}{2}$. & D E, 5. D H sera 10. p. γq. 37. $\frac{1}{2}$. I K, 10.——γq. 37. $\frac{1}{2}$. L N, ou M F, γq. 62. $\frac{1}{2}$. Parant si à D E on applique D H, faisant la latitude D I; D I sera 2. p. γq. 1. $\frac{1}{2}$. Mais si on applique I K faisant la latitude I L, icelle sera 2.——γq. 1. $\frac{1}{2}$. & si on applique L N, ou M F, L M, ou M G, sera γq. 2. $\frac{1}{2}$. que si on compose D I, I L, c'est à dire 2. p. γq. 1. $\frac{1}{2}$. & 2.——γq. 1. $\frac{1}{2}$. D L sera 4. parquoy la toute D G est 4. p. γq. 10. binome 4.

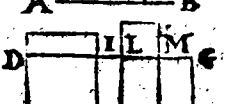
lxiiij. lviij.

THEOREME 47. PROP. 65.

Le quarré d'vne ligne, pouuant vn Rationel & vn Medial, appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude Binome cinquiesme.

Soit A B, pouuant vn rationel & vn medial, dont le plus grand nom est à A C, & à D E rationelle, soit appliqué le rectangle D F, egal au quarré de A B, faisant la latitude de D G. Ie dis que D G est 5. de 2. noms ou binome cinquiesme. Soit faict comme en la 62. Proposition.

15. 2.



D'autant

D'autant donc que A C, C B, qui font A B, pouuant vn rationel & vn medial, ſont incommenſurables en puiſſance, faiſans le compoſé de leurs quarrez medial, & rectangle ſous icelles rationel: D K, egal au compoſé des quarrez de A C, C B, ſera medial: & L N, egal au rectangle ſous A C, C B: & partant le double d'iceluy, ſçauoir L F, ſera rationel. Donc D K medial, appliqué à D E rationelle, f faict D L, latitude rationelle, incommenſurable en longitude à D E rationelle: mais L F rationel, appliqué à la rationelle L K, g fait la latitude L G, rationelle commenſ. en longit. à L K, c'eſt à dire à D E. h 40. 10. f 23. 10. g 21. 10. h 13. 10.

D'autant donc que L G, eſt commenſurable en longitude à D E rationelle, & D L incommenſurable en longitude, D L, L G, ſeront incommenſurables en longitude, parquoy D L, L G, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: i & partant D G eſt binome. i 37. 10.

Maintenant on monſtrera comme en la 61. que le rectangle ſous D L, L L, eſt egal au quarré de L M: & comme en la precedente, que D L eſt le plus grand nom, & peut plus que L G, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude. Parquoy le moindre nom L G, eſtant monſtré commenſurable en longitude à la rationelle expoſée D E, par la definition D G, ſera binome cinquieſme. Donc le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

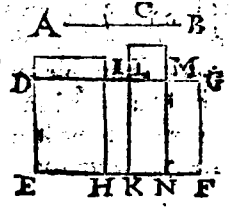
SCHOLIE.

Soit A B, γq.(γq.125.p.5.) p.γq.(γq.125.——5.)& D E ſoit 5. D H ſera γq.125.p.5. I K, γq.125.——5. L N, ou M F 10. Et ſi à D E on applique D H, faiſant la latitude D I; D I ſera γq.5. p.1. Et ſi on applique I K, faiſant I L; I L ſera γq.5.——1. Et ſi on applique L N, ou M F, L M, ou M G ſera 2. & D I; I L eſtans adiouſtées, ſçauoir γq.5.p.1.& γq.5.——1, D L ſera γq.20. Donc la toute D G, eſt γq.20.p.4. binome cinquieſme.

lxv. lix. THEOREME 48. PROP. 66.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux Mediaux, appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude, binome ſixieſme.

Soit A B, pouuant deux mediaux, dont le plus grand nom eſt A C; & à D E rationelle, ſoit appliqué le rectangle D F, egal au quarré de A B, faiſant la latitude D G. Ie dis que D G eſt binome ſixieſme.



k 45.1.

Car ayant faict la conſtruction comme en la 61. Propoſition: d'autant que A C, C B faiſans A B, pouuant deux mediaux, ſont incommenſurables en puiſſance, & font le compoſé de leurs quarrez medial, & le rectangle ſous icelles

10.

medial & incommensurable au composé de leurs quarrez : tant D K, egal à iceluy composé, que L F egal à deux fois le rectangle sous A C, C B, est medial : & D K, L F, mediaux, estans appliquez à la rationelle D E : leurs latitudes D L, L G, seront rationelles incommensurables en longitude à D E rationelle. [m] l 23.10. m 42.10

Et d'autant que le composé des quarrez de A C, C B, est incommensurable au rectangle, sous A C, C B ; & deux fois le rectangle sous A C, C B, est commensurable à iceluy rect. sous A C, C B, estant double d'iceluy : [n] le composé desdits quarrez, c'est à dire D K, est incommensurable à deux fois le rect. sous A C, C B, c'est à dire à L F. Parquoy D L, L G, ayans mesme raison que D K, L F, [o] sont incommensurables en longitude. Donc D L, L G, sont rationelles commens. en puiss. seulement, [p] partant D G, est binome. n 13.10. o 10.10. p 37.10.

Et on demonstrera, comme en la precedente, que D L, est le plus grand nom, & peut plus que L G, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & estant monstré que D L, ny L G, n'est commensurable en longitude à D E, rationelle exposée, par la definition D G sera binome sixiesme. Donc le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit A B, 79. (79.252. p. 79.72.) p. 79. (79.252.——79.72.) & D E 6. D H sera 79.252. p. 79.72. I K, 79.252.——79.72. L N, ou M F 79.180. Et à D E, soit appliqué D H, la latitude

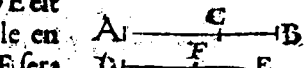
C I, sera 7 9. 7. p. 7 9. 2. Derechef, soit appliqué L K, la latitude I L: sera 7 9. 7. 7 9. 2. Finalement, soit appliqué L N, ou M F, L M, ou M G, sera 7 9. 4. Donc la toute D G, est 7 9. 28. p. 7 9. 29. binome dixiesme.

lxvj. li. THEOREME 49. PROP. 67.

La ligne commensurable en longitude à la ligne de deux noms, ou binome, est aussi ligne de deux noms, & de mesme ordre.

Soit A B, ligne de deux noms, ou binome quelconque, diuisée en ses noms, dont le plus grand est A C, & le moindre C B: & soit D E, commensurable en longitude à A B. Ie dis que D E est aussi binome, & de mesme ordre que A B.

12. 6. 19. 5. Car comme la toute A B, est à la toute D E, ainsi la retranchée A C, soit à la retranchée D F: donc le reste C B, sera au reste F E, comme la toute A B, à la toute D E.



Et d'autant que D E est posée commensurable en longitude à A B, D F, sera aussi commensurable en longitude à A C, & F E, à C B. Mais A C, C B, noms de A B, binome, sont rationelles, donc D F, F E, sont aussi rationelles.

10. 10. 37. 10.

Derechef, puis que comme A C, est à D F, ainsi C B, à F E: & en permutant comme A C, à C B, ainsi D F, à F E. Mais A C, C B, sont commensurables en puissance seulement. Donc D F, F E, sont aussi commensurables en puissance seulement:

10. 10.

donc

donc D F, F E, sont rationelles commensurables en puissance seulement : x Et partant D E est binome. x 37.10.
Ie dis que D E est aussi de mesme ordre que A B: Car A C, peut plus que C B, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable ou incommensurable. Que si A C peut plus que C B, du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude, y D F pourra plus que F E, du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude. y 15.10.

Que si A C est commensurable en longitude à la rationelle exposée, de sorte que A B soit binome premier, z D F sera aussi commensurable en longitude à la mesme rationelle, l'vne & l'autre estant rationelle, & D F estant aussi commensurable en longitude à A C. Parquoy D E, selon la definition, est binome premier, c'est à dire de mesme ordre. z 11.10.

Mais si C B, est commensurable en longitude à la rationelle exposée : de sorte que A B soit binome second : Semblablement F E sera commensurable en longitude à la rationelle exposée. Parquoy D E, par la definition est binome second.

Finalement, si l'vne ny l'autre A C, C B, n'est commensurable en longitude à la rationelle exposée : de sorte que A B soit binome troisiesme, l'vne ny l'autre D F, F E, n'est commensurable en longitude à la rationelle exposée : donc D E par la definition, est binome troisiesme. 12. 10.

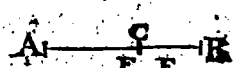
Mais si A C, peut plus que C B, du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude, D F, pourra plus que F E, du quarré d'vne ligne qui luy sera incommensurable en longitude: Parquoy nous monstrerons, comme auparauant, que D E est binome quatriesme, ou cinquiesme, 15. 10.

ou ſixieſme; ſelon que A B ſera binome quatrieſme, ou cinquieſme, ou ſixieſme : Donc la ligne commenſurable en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

lxvij. lxj. THEOREME 50. PROP. 68.

La ligne droicte commenſurable à vne ligne Bimediale, icelle eſt auſſi Bimediale & de meſme ordre.

Soit A B, bimediale quelconque diuiſée en ſes noms, dont A C eſt le plus grand, & C B le moindre : & ſoit D E commenſurable en longitude à icelle. Ie dis que D E eſt auſſi bimediale, & de meſme ordre que A B.



a 12.6. Car a comme la toute A B, eſt à la toute D E, ainſi la retranchée A C, ſoit la retranchée D F: b donc le reſte C B, ſera au reſte F E, comme la toute A B, à la toute D E. Parquoy D E eſtant poſée commenſ. en longit. à A B, c D F ſera commenſ. en longit. à A C, & F E, à C B : Mais A C, C B, ſont ſont mediales, d donc D F, F E commenſ. à icelles, ſont auſſi mediales.

b 19.5.

c 10.10.

d 24.10.

Derechef, A C eſtant à D F, comme C B à F E, en permutant comme A C, eſt à C B, D F, ſera à F E: e Mais A C, C B, ſont commenſ. en puiſſance ſeulement : f donc D E, F E ſeront auſſi commenſurables en puiſſ. ſeulement. Et eſtans monſtrées mediales, icelles D F, F E, ſeront mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement : g parquoy D E ſera bimediale.

e 38.10.

f 10.10.

g

Ie

Ie dis qu'elle eſt de meſme ordre que A B. Car puis que comme A C, à C B, ainſi D F, à F E, [h] mais comme A C, à C B, ainſi le q. de A C, au rect. ſous A C, C B, & comme D F, à F E, ainſi le q. de D F, au rect. ſous D F, F E; comme le q. de AC, ſera au rect. ſous A C, C B: ainſi le q. de D F, ſera au rect. ſous D E, E F: & en permutant comme le q. de A C, au q. de D F: ainſi le rect. ſous A C, C B, au rect. ſous D F, F E: Mais le q. de A C eſt commenſ. au quarré de D F: eſtans A C, D F, monſtrées commenſur. en longit. [i] Donc le rect. ſous A C, C B, ſera commenſurable au rect. ſous D F, F E. Parquoy ſi le rect. ſous A C, C B, eſt rationel: en ſorte que A B ſoit bimediale premiere: le rect. ſous D F, F E commenſurable à iceluy, ſera auſſi rationel, [l] & partant D E, ſera bimediale premiere.

h Lem. 3. 19. 10.

i 10. 10.

l 38. 10.

Mais ſi le rectangle ſous A C, C B, eſtoit medial, en ſorte que A B fuſt bimediale ſeconde: le rectangle ſous D F, F E, commenſurable à iceluy; [m] ſeroit auſſi medial: partant D E ſeroit bimediale ſeconde. Partant la ligne droicte commenſurable, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Cor. 24. 10.

m 39. 10.

THEOREME 51. PROP. 69. lxvij. lxij.

La ligne droicte commenſurable à vne ligne Majeure; eſt auſſi ligne Majeure.

Soit la ligne majeure A B, diuiſée en ſes noms à C, & ſois D E commenſurable à icelle en longit. & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement. Ie dis que D E eſt auſſi majeure.

Car ſoit faict comme cy-deuant, en ſorte que A C, C B,

A C, C B ayent mesme raison à D F, F E, que la toute A B, à la toute D E : d'autant donc que A B, D E sont commensurables ou en longitude & puissance, ou en puissance seulement,



n 10.10. n tant A C, D F, que C B, F E seront commensurables de mesme façon.

Derechef, d'autant que comme A C, à D F, ainsi C B, à F E. Et en permutant comme A C, à C B, ainsi D F, à F E : o comme le q. de A C, sera au q. de C B, ainsi le q. de D F, au q. de F E. Et en composant comme le composé des quarrez de A C, C B, au q. de C B : ainsi le composé des quarrez de D F, F E, au q. de F E. Et par conuersion de raison, comme le q. de C B, au composé des quarrez de A C, C B, ainsi le q. de F E, au composé des quarrez de D F, F E. Et en permutant comme le q. de C B, au q. de F E, ainsi le composé des quarrez de A C, C B, au composé des quarrez de D F, F E. Mais le q. de C B, est commensurab. au q. de F E : C B, F E estans monstrées commens. soit en longit. & puiss. ou en puiss. seulement. p Donc le composé des quarrez de A C, C B est commensurable au composé des quarrez de D F, F E : Mais le composé des quarrez de A C, C B est rationel, puis que A C, C B composent le majeure A B : donc le composé des quarrez de D F, F E, est aussi rationel.

o 22. 6.

p 10.10.

40. 10. d.

Derechef, puis que comme A C est à C B, ainsi D F, à F E : r mais comme A C à C B, ainsi le q. de A C, au rect. sous A C, C B : & comme D F, à F E, ainsi le q. de D F, au rect. sous D F, F E. Comme le q. de A C, sera au rectangle sous A C, C B : ainsi le

r Lem. 3. 10.

q. de

q.de D F, ſera au rect. ſous D F, F E : & en changeant comme le quarré de A C, au quarré de D F, ainſi le rectangle ſous A C, C B, au rectangle ſous D F, F E.

Mais le q.de A C eſt commenſur. au q. de D F eſtans A C, D F monſtrées commenſurables ou en longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement. [f] Donc le rect. ſous A C, C B eſt auſſi commenſ. au rect. ſous D F, F E : [t] mais le rect. ſous A C, C B eſt medial : donc le rect. ſous D F, F E, commenſurable à iceluy, eſt auſſi medial : mais A C eſtant à C B, comme D F, à F E, [v] & A C, C B ſont incommenſurables en puiſſ. (compoſant la majeure A B) D F, F E ſeront auſſi incommenſurables en puiſſance. Donc D F, F E eſtans incommenſ. en puiſſ. & faiſans le compoſé de leurs quarrez rationel, & le rect. ſous iceſles medial, comme il eſt monſtré : [x] la toute D E ſera ligne majeure. Donc la ligne commenſurable, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

f 40. 10.
t Coroll. 24. 10.
v 40. 10.
10. 10.
x 40. 10.

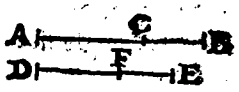
THEOREME 52. PROP. 70. lxix. lxiii.

La ligne commenſurable à vne ligne pouuant vn Rationel & vn Medial, eſt auſſi ligne pouuant vn Rationel & vn Medial.

Soit A B, pouuant vn rationel & vn medial, diuiſée en ſes noms à C, & ſoit D E commenſurable à icelle en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement. Ie dis que D E peut auſſi vn rationel & vn medial.

Car ayant faict la meſme conſtruction que

cy-deuant, nous demonstrerons comme en la precedente, que le composé des quarrez de A C, C B, est commensurable au composé des quarrez de D E, F E.



41.10. Mais le composé des quarrez de A C, C B est medial, puis que A C, C B composent A B, pouuant
Cor.24.10. vn rationel & vn medial. Donc le composé des quarrez de D F, F E commensurable à iceluy, est aussi medial.

Semblablement, comme en la precedente Proposition, le rectangle sous A C, C B, y qui est rationel, sera commensurable au rectangle sous D F, F E, & partant le rectangle sous D F, F E, sera rationel.

y 41.10. 9. def.

Finalement, comme en la mesme precedente Proposition, D F, F E, seront incommenſ. en puiſſ. Donc D F, F E estans incommenſ. en puiſſ. & faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles rationel, comme il est demonstré, z la toute D E, sera ligne pouuant vn rationel & vn medial. Partant la ligne commensurable, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

z 41.10.

lxix. lxiij.

THEOREME 53. PROP. 71.

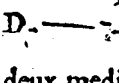
La ligne commensurable à vne ligne pouuant deux Mediaux, est aussi ligne pouuant deux Mediaux.

Soit A B, pouuant deux mediaux, diuisée en ſes noms à C, & D E commensurable à icelle en longitude

gitude & puissance, ou en puissance seulement. Ie dis que D E, peut aussi deux mediaux.

Car, la construction faicte comme auparauant, l'on monstrera comme en la 69. Proposition, que le composé des quarrez de A C, C B, est commensurable au composé des quarrez de D F, F E ; & le rectangle sous A C, C B, commensur. au rect. sous D F, F E. [a] Parquoy tant le composé des quarrez de A C, C B, que le rectangle sous A C, C B estant medial : [b] aussi tant le composé des quarrez de D F, F E, que le rectangle sous D F, F E sera medial: Mais D F, F E sont incommensurables en puissance comme auparauant. a 42.10. b *Coroll.* 24.10.

Finalement, [c] le composé des quarrez de A C, C B, & le rectangle sous A C, C B, estant incommensur. par l'hypothese, puis que A B peut deux mediaux : mais le composé des quarrez de D F, F E, est monstré commensurable au composé des quarrez de A C, C B, & le rect. sous D F, F E, monstré commens. au rect. sous A C, C B, [d] le composé des quarrez de D F, F E, & le rect. sous D F, F E, seront incommensurables. Partant D F, F E estans incommens. en puiss. & faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rect. sous icelles medial, & incommens. au composé de leurs quarrez : [e] D E sera ligne pouuant deux mediaux. Partant la ligne commens. à la ligne pouuant, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. c 42.10. d *Sch.* 14. 10. e 42.10.

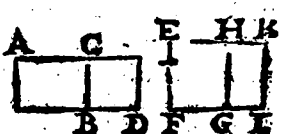


lxxj. lxv THEOREME 54. PROP. 72.

Si vne superficie Rationelle & vne Mediale sont composées, il se faict quatre Irrationelles, sçauoir celle qui est dite Binome, ou Bimediale premiere, ou ligne Majeure, ou ligne pouuant vn Rationel & vn Medial.

C'est à dire, que la ligne pouuant tout le composé, est vne de ces quatre Irrationelles, sçauoir celle qui est dite Binome, ou Bimediale premiere, &c.

Soit l'espace ou superficie A B rationelle, composée auec la mediale C D. Ie dis que la droicte ligne qui peut tout l'espace A D., est premiere de deux noms, i. binome premier, ou bimediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.



Car l'espace A B, sera plus grand que C D, ou moindre ne pouuant estre égal. Car A B estant rationel, si C D estoit egal à iceluy, il seroit aussi
45.1. rationel contre l'hypothese.

Soit premierement A B, plus grand que C D, & à la rationelle proposée E F soit applique le rect. E G, egal à A B, & à H G soit appliqué H I, egal à C D; de sorte que le tout E I, soit egal au tout A D.

Et

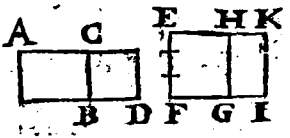
Et A B estant rationel, & C D medial, E G sera aussi rationel, & H I medial: lesquels appliquez à la rationelle E F: [f] E H, sera rationelle commensurable en longit. à E F: [g] mais H K rationelle incommens. en longit. à E F. f 21.10. g 23.10.

Derechef, E G, H I estans incommens. comme il appert par les def. E G estant rationel, & H I irrationel, sçauoir medial: E H, [h] H K ayans mesme raison [i] seront incommens. en longit. & partant [k] sont rationelles commens. en puiss. seulement: donc E K est binome. Et A B estant posé plus grand que C D, c'est à dire E G, plus grand que H I: E H sera aussi plus grande que H K: E H, H K ayans mesme raison que E G, H I. Maintenant E H plus grand nom, pourra plus que H K moindre du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle, ou incommensurable. h 1. 6. i 10.10. k 37. 19.

Si E H peut plus que H K, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle: E K sera binome premier par la definition, estant E H plus grand nom monstré commensurable en longitude à la rationelle E F. Parquoy la ligne pouuant l'espace E I, contenu sous la rationelle E F, & E K binome premier: & partant l'espace A B, composé du rationel A B, & du medial C D, [l] est irrationelle, appellée binome. l 55.10.

Mais si E H peut plus que H K, du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longit. E K sera binome quatrieme par la definition, estant E H plus grand nom monstrée commensurable en longitude à la rationelle E F. Donc la ligne droicte pouuant l'espace E I, contenu sous E F rationelle, & E K binome 4. & partant aussi l'espace A D [m] est irrationelle, appellée majeure. m 58.10.

Soit maintenant A B, plus grand irrationel & medial, & C D plus petit rationel: ayant fait la conſtruction comme auparauant, E H ſera incommenſ. en longit. à E F, & H K, commenſ. & partant E H, H K rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, & la toute E K binome. Donc E H plus grand nom, pourra plus que H K, du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitudo, ou incommenſ. ſi commenſurable & E H eſt monſtrée incommenſ. en longitude à la rationelle propoſée, E K, par la definition ſera binome ſecond. Donc la ligne pouuant l'eſpace E I, (ou A D) contenu ſous E F rationelle, & E K binome ſecond eſt irrationelle [n] appellée bimediale premiere. Si incommenſurable, E K ſera binome cinquieſme: donc la droicte ligne pouuant l'eſpace E I (qui eſt A B) contenu ſous E F rationelle, & E K binome cinquieſme [o] eſt irrationelle, dite pouuant vn rationel & vn medial. Donc ſi vn eſpace rationel & vn medial ſont compoſez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



n 56. 10.

o 59. 10.

SCHOLIE.

Soit l'eſpace Rationel A B, 7. & le medial C D, 7q. 48. la ligne pouuant iceux eſpaces adiouſtez enſemble, ſera 2. p. 7q. 3. binome premier: ſi A B eſtoit 21. & C D, 7q. 432. la ligne pouuant iceux ſera 7q. 12. p. 3. binome 2. ſi A B eſt 14. C D 7q. 192. la ligne pouuant iceux ſera 7q. 8. p. 7q. 6. binome 3. Et ſi A B eſt 6. & C D 7q. 32. icelle ſera 2. p. 7q. 2. binome quatrieſme.

quatrieſme. Mais ſi A B eſt 3 & C D 7q. 8. elle ſera 7q. 2. p. 1. binome cinquieſme: & ſi A B eſt 5. & C D 7q. 24. la ligne pouuant leur compoſé ſera 7q. 3. p. 7q. 2. binome 6. Mais ſi A B eſt 4. & C D 7q. 18. la ligne pouuant leur compoſé ſera 7qq. 8. p. 7qq. 2. bimediale premiere: & ſi A B eſt 6. & C D 7q. 22. icelle ligne ſera 7q. (6. p. 12.) ou 7q. (3. p. 7q. 6.) p. 7q. 3. —— 7q. 6. Finalement, ſi A B eſt 2. & C D 7q. 8. la ligne pouuant iceux eſpaces, ſera 7q. (7q 8. p. 2.) ou 7q. (7q. 2. p. 1.) p. racine quarrée (7q. 2. —— 1.)

THEOREME 55. PROP. 73.

lxxij. lxvj.

Si deux ſuperficies Mediales, incommenſurables entr'elles, ſont compoſées, les deux autres lignes Irrationelles ſont faictes, ſçauoir, ou la Bimediale ſeconde, ou la ligne pouuant deux Mediaux.

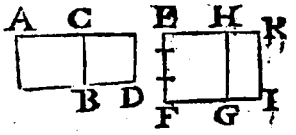
C'eſt à dire, que la ligne qui peut tout le compoſé eſt, ou Bimediale ſeconde, ou pouuant deux Mediaux.

Soient compoſez deux mediaux incommenſurables A B, C D. Ie dis que la droicte ligne qui peut tout l'eſpace A D, eſt bimediale ſeconde, ou pouuant deux mediaux.

Car derechef A B ſera plus grand que C D, ou moindre: & egal non, autrement A B, C D ſeroient commenſurables, ce qui eſt contre l'hypotheſe.

Soit premierement plus grand, & ſoit fait tout

comme en la precedente. Et A B, C D, eſtans poſez mediaux & incommenſurables, leurs egaux E G, H I, ſeront auſſi mediaux & incommenſurables.



1. 6. P Partant E H, H K, ayans meſme raiſon, q ſeront
10. 10. incommenſurables en longitude : (Et E G, H I,
23. 10. mediaux, eſtans appliquez à la rationelle E F, r l'vne & l'autre E H, H K, eſt rationelle incommenſurable en longitude à la rationelle E F. Donc
7. 10. E H, H K, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement : partant la toute E K eſt binome.

Mais puis que A B, eſt poſé plus grand que C D, comme en la precedente Propoſition, E H ſera le plus grand nom de E K : partant pourra plus que H K, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, ou incommenſurable. Si E H, peut plus que H K, du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude, tant E H, que H K eſtant monſtrée incommenſurable en longitude à E F rationelle, par la definition, E K ſera binome troiſieſme. Donc la droicte ligne pouuant l'eſpace E I, contenu ſous E F rationelle, & E K
7. 10. binome troiſieſme, & partant la ligne pouuant l'eſpace A D, eſt irrationelle ; dite bimediale ſeconde.

Si E H peut plus que H K, du quarré d'vne ligne incommenſurable en longit. à icelle, tant E H
). 10. que H K, eſtans incommenſ. en longitude à E F rationelle : E K ſera binome ſixieſme par la definition : donc la ligne pouuant E I, ou A D : eſt irrationelle,

tionelle, dite pouuant deux mediaux. Que si A B estoit moindre que C D, on demonstrera semblablement ce qui est proposé. Partant si deux superficies mediales incommensurables entr'elles, sont compósées, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit A B, γq. 50. & C D, γq. 48. la ligne pouuant leur compose sera γγq. 18. p. γγq. 18. bimediale seconde, ou soit A B γq. 12. & C D γq. 8. la ligne pouuant iceux sera γq. (γq. 12. p. γq. 8.) ou γ7. (γq. 3. p. γq. 1.) p. γq. (γ. 3. — γq. 1. pouuant deux mediaux.

COROLLAIRE.

De toutes ces choses on collige facilement que la ligne de deux noms ou binome, & les autres lignes irrationelles suiuans icelle, sont differentes entr'elles, & de la ligne mediale.

Car le quarré d'vne ligne mediale, appliqué à vne ligne rationelle, [r] faict la latitude rationelle, [s] incommensurable en longit. à icelle rationelle, à laquelle il est appliqué. [r] 23. 10. [s]

Mais le quatré de la ligne de deux noms, appliqué à vne ligne rationelle, [t] fait la latitude premiere de deux noms, ou binome premier. [t] 61. 10.

Et le quarré d'vne bimediale premiere, appliqué à vne ligne rationelle, [v] fait la latitude binome second. [v] 62. 10.

Et le quarré d'vne bimediale seconde, appliqué à vne ligne rationelle: [x] fait la latitude binome troisiesme. [x] 63. 10.

Mais le quarré d'vne ligne majeure, appliqué
y 64.10. à vne rationelle : y faict la latitude binome quatrieſme.

Et le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel &
z 65.10. vn medial, appliqué à vne ligne rationelle, z faict la latitude binome cinquieſme.

Finalement le quarré d'vne ligne pouuant deux
a 66.10. mediaux, appliqué à vne ligne rationelle, a faict la latitude binome ſixieſme.

Or puis que toutes ces latitudes different de la latitude de la mediale, & entr'elles (ſçauoir de la latitude de la mediale, cette-cy eſtant rationelle, & celles-là irrationelles :) Mais entr'elles, d'autant qu'elles ne ſont binomes de meſme ordre. Il eſt manifeſte que toutes les lignes irrationelles, dont il a eſté parlé iuſques icy, ſont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT les Sixaines des lignes Irrationelles par le retranchement.

lxxiij. lxviij.

THEOREME 56. PROP. 74.

Si d'vne ligne rationelle on retranche vne ligne Rationelle, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, la reſtante eſt irrationelle : Soit appellée apotome, ou reſidu.

De la rationelle A B, ſoit retranchée A C, rationelle, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute A B. Ie dis que le reſte B C eſt irrationelle.

Car,

Car, comme A B, à A C, ainsi le quarré de A B, au rect. sous A B, A C : & A B, A C, estant incommensurable en longitude, le [b] quarré de A B sera incommensurable au rect. sous A B, A C : Mais le composé des quarrez de A B, A C, est commens. au q. de A B, (car A B, A C estans posées commens. en puissance, les quarrez de A B, A C seront commensurables [c] : Et partant leur composé commensurable au quarré de A B,) mais deux fois le rect. sous A B, A C, est commensurable au rect. sous A B, A C : [d] Donc le composé des quarrez de A B, A C, & deux fois le rect. sous A B, A C, sont incommensurables : [e] Or le composé des quarrez de A B, A C est egal à deux fois le rect. sous A B, A C, & au quarré de B C : [f] donc le composé des quarrez de A B, A C, est incommensurable au restant quarré de B C : parquoy le composé des quarrez de A B, A C, estant rationel, (estant commensurable au quarré de la rationelle A B,) le quarré de B C sera irrationel : & partant B C irrationelle. Or soit icelle appellée Apotome, que les autres appellent residu : Donc si d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



Lemme 3. 19. 10.

b 10. 10.

c 16. 10.

d *Sch.* 14. 10.

e 7. 2.

f *Coroll.* 1. 10.

SCHOLIE.

Soit A B 2. A C rq. 3. B C restante sera 2.— racine quarrée 3.

lxxiv. lxix. THEOREME 57. PROP. 75.

Si d'vne ligne Mediale, on retranche vne ligne Mediale, commenſurable en puiſſance, ſeulement à la toute, laquelle contienne vn rectangle rationel auec la toute, le reſte eſt irrationel : Soit appellé reſidu Medial premier.

De A B mediale, ſoit retranchée A C ; mediale commenſurable en puiſſance ſeulement à A B, & que le rect. ſous A B, A C ſoit rationel. Ie dis que la reſtante C B, eſt irrationelle.

Car A B, A C eſtant commenſ. en puiſſ. les quarrez de A B, A C, ſerõt commenſurables.



h 16. 10. [h] Et partant le compoſé d'iceux ſera commenſurable au quarré de A C. Mais le quarré de A C mediale, eſt irrationel & medial : [k] donc le compoſé
k *Coroll.* 24. 10. des quarrez de A B, A C, commenſurable à icelny, eſt irrationel & medial, & le rectangle ſous A B, A C eſtant poſé rationel : deux fois le rectangle ſous A B, A C, ſera rationel : parquoy le compoſé des quarrez de A B, A C, ſera incommenſurable à
l 7. 2. deux fois le rect. de A B, A C. [l] Donc puis que le compoſé des quarrez de A B, A C eſt egal à deux fois le rect. ſous A B, A C, & au q. de B C, deux fois le rect. ſous A B, A C, auec le q. de B C, ſera auſſi incommenſurable à deux fois le rect. ſous A B,
m 17. 10. A C. [m] Parquoy deux fois le rect. ſous A B, A C, & le quarré de B C ſont incommenſurables : & deux

fois

fois le rectangle sous A B, A C estant rationel, le quarré de B C sera irrationel: & partant B C irrationelle. Or soit appellée Apotome ou residu medial premier. Partant si d'vne ligne mediale on retranche vne ligne mediale commensurable en puissance, seulement à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

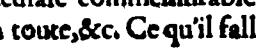
Soit A B rqq.54. & A C retranchée rqq.24. la restante C B sera rqq.54.——rqq.24.

THEOREME 58. PROP. 76. lxxv. lxx.

Si d'vne ligne Mediale on retranche vne ligne mediale, commensurable en puissance seulement, à la toute, laquelle contienne auec la toute, vn rectangle Medial, le reste est Irrationel: Soit appellé Apotome ou residu, Medial second.

De la mediale A B, soit retranchée la mediale A C: commensurable en puissance seulement, à A B, & soit le rectangle sous A B, A C medial. Ie dis que la restante B C est irrationelle.

Car d'autant que les quarrez de A B, A C, commensurables en puissance, sont commensurables, [n] leur composé sera commensurable à chacun d'iceux: mais chacun d'iceux quarrez est medial, (estans A B, A C posées mediales,)



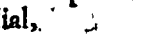
n 16. 10.

o *Coroll.* 24. 10. ° donc leur composé est medial, estant commensurable à chacun d'iceux.

p *Coroll.* 24. 10. Derechef, puis que le rectangle sous A B, A C est posé medial: P le double d'iceluy, sçauoir deux fois le rectangle sous A B, A C, sera aussi medial. q

q 7. 2. Donc puis que le composé des quarrez de A B, A C, est egal à deux fois le rectangle sous A B, A C, & au quarré de B C: le composé des quarrez de A B, A C, qui est medial,

excedera deux fois le rect. sous A B, A C, (qui est aussi medial) du quarré de B C:



r 27. 10. r mais vn medial n'excede vn medial d'vn rationel: donc le quarré de B C, ne sera rationel: donc irrationel, & B C irrationelle: Soit appellée Apotome second, de la ligne mediale. Partant si d'vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit A B ʏqq. 18. *A C* ʏqq. 8. *B C sera* ʏqq. 18. —*racine quarrée* 8.

lxxvj. lxxj.

THEOREME 59. PROP. 77.

Si d'vne ligne droicte, on retranche vne ligne droicte, incommensurable en puissance à la toute, faisant auec la toute le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle contenu sous icelles Medial. La restante est Irrationelle: Soit icelle appellée Mineure.

De

De la ligne droicte A B, soit retranchée A C incommensurable en puissance, à icelle A B: & soit le composé des quarrez de A B, A C rationel, mais le rectangle sous A B, A C, medial. Ie dis que la restante B C est irrationelle.

Car le composé des quarrez de A B, A C estant rationel, mais le rect. sous A B, A C: & partant le double d'iceluy, [f] qui luy est commensurable, c'est à dire deux fois le rect. sous A B, A C medial: c'est à dire irrationel: [t] le composé des quarrez de A B, A C sera incommensurable à deux fois le rectangle sous A B, A C, mais le composé des quarrez de A B, A C est egal à deux fois le rect. sous A B, A C, & au quarré de B C. Donc le composé des quarrez de A B, A C, [v] sera incommens. au restant quarré de B C. Mais le composé des quarrez de A B, A C, est posé rational. [x] Donc le quarré de B C incommensurable à iceluy est irrationel, & la ligne B C irrationelle: soit appellée mineure: Donc si d'vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A C B

[f] *Coroll.* 24. 10.
[t] 10. 10. 7. 2.
[v] *Coroll.* 17. 10.
[x] 10. d.

SCHOLIE.

Soit A B racine quarrée (32. p. racine quarrée 704.) A C racine q. (32. — racine q. 704.) B C sera racine q. (32. p. racine q. 704.) — racine q. (32. — racine q. 704.)

THEOREME. 60. PROP. 78.

lxxvij. lxxij.

Si d'vne ligne droicte est retranchée vne ligne droicte, incommensurable en puissance

puiſſance à la toute, faiſant auec la toute, le compoſé de leurs quarrez medial : mais le rectangle contenu ſous icelles Rationel, la reſtante eſt Irrationelle. Soit appellée, ligne faiſant auec vn eſpace Rationel, vn tout Medial.

Soit la ligne A B, de laquelle ſoit retranchée A C incommenſurable en puiſſance à A B, & ſoit le compoſé de leurs quarrez medial, & le rectangle ſous icelles rationel. Ie dis que la reſtante B C eſt irrationelle.

Car le compoſé des quarrez de A B, A C eſtant medial, c'eſt à dire irrationel : & le rectangle ſous A B, A C, & partant le double d'iceluy, ſçauoir deux fois le rectangle ſous A B, A C rationel : y le compoſé des quarrez de A B, A C ſera incommenſurable à deux fois le rectangle ſous A B, A C : z mais le compoſé des quarrez de A B, A C eſt egal à deux fois le rectangle ſous A B, A C, & au quarré de B C. Donc deux fois le rect. ſous A B, A C, auec le q. de B C, eſt incommenſ. à deux fois le rect. ſous A B, A C. a Partant deux fois le rect. ſous A B, A C, & le q. de B C ſont incommenſurables. Donc deux fois le rect. ſous A B, A C eſtant rationel, le q. de B C ſera irrationel : & la ligne B C irrationelle. Soit appellée ligne faiſant auec vn eſpace rationel vn tout medial. D'autant que le quarré d'icelle, adiouſté auec deux fois le rectangle ſous A B, A C, qui eſt rationel, fait vn tout medial : Donc ſi d'vne ligne droicte eſt retranchée vne ligne droicte incommenſurable

A C B

y 10. d.

z 7. 2.

a 17. 10.

10. d.

mensurable en puissance, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit A B 79. (79.13 $\frac{1}{2}$ *p.* 79.4 $\frac{1}{2}$.) *A C* 79. (79. 13 $\frac{1}{2}$ —— 79.4 $\frac{1}{2}$.) *B C sera* 79. (79.13 $\frac{v}{2}$ *p.* 79.4 $\frac{1}{2}$.) —— 79. (79.13 $\frac{1}{2}$ —— 79.4 $\frac{1}{2}$.

THEOREME 61. PROP. 79.

lxxviij. lxxiij.

Si d'vne ligne droicte on retranche vne ligne droicte, incommensurable en puissance à la toute ; laquelle auec la toute, face le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu sous icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez, la restante est irrationelle : soit appellée faisant vn tout medial, auec vn rectangle medial.

De la droicte ligne A B, soit retranchée A C, incommensurable en puissance à A B ; & soit tant le composé de leurs quarrez, que le rectangle sous icelles medial, & incommensurable au composé des quarrez d'icelles. Ie dis que la restante B C, est irrationelle.

A C B

Car d'autant que le composé des quarrez de A B, A C, est egal à deux fois le rect. sous A B, [b] A C, & au q. de B C ; le composé des quarrez de A B, A C, posé medial, excedera deux fois le rectangle sous A B, A C,

[b] 7. 2.

qui

ç *Coroll.* 24.10. e qui eſt medial (eſtant commenſurable au medial contenu ſous A B, A C) du quarré de B C: mais vn medial n'excede vn medial d'vn rationel: 27.10. parquoy le quarré de B C n'eſt rationel, donc irrationel, & B C irrationelle: Soit appellée faiſant vn tout medial auec vn medial: d'autant que le quarré d'icelle, auec le rectangle ſous A B, A C, qui eſt medial, fait tout le compoſé des quarrez de A B, A C, qui eſt auſſi medial. Donc ſi d'vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.
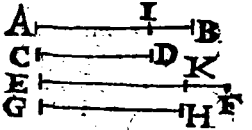
SCHOLIE.

Soit A B racine quarrée (racine q. 13. $\frac{1}{2}$. p. 3.) A C racine q. (racine q. 13. $\frac{1}{2}$. —— 3.) B C ſera racine q. (racine q. 13. $\frac{1}{2}$ p. 3.) —— racine q. (racine q. 13. $\frac{1}{2}$. —— 3.)

LEMME.

S'il y a meſme excez entre vne premiere grandeur & vne ſeconde; qu'entre vne troiſieſme & vne quatrieſme; auſſi en permutant il y aura vn meſme excez entre la premiere grandeur & la troiſieſme, qu'entre la ſeconde & la quatrieſme.

Soient quatre grandeurs A B, C D, E F, G H, & ſoit I B, l'excez d'entre A B, & C D, egal à K F, excez d'entre E F, G H. Ie dis qu'il y a vn meſme excez entre A B,



A B,& E F, qu'entre C D, & G H. Car d'autant que I B, eſt l'excez d'entre A B, & C D : A I ſera egale à C D. Semblablement, E K ſera egale à G H. Donc il y aura meſme excez entre A I, & E K, qu'entre C D, & G H, puis que ces grandeurs cy ſont egales à celles-là, chacune à la ſienne. [d] *Mais l'excez des toutes A B, E F, eſt le meſme excez d'entre A I, E K : puis que I B, K F, ſont poſées egales ; donc il y aura pareillement meſme excez entre A B, & E F, qu'entre C D, & G H. Ce qui eſt propoſé.*

[d] 16. c. ſ. 1.

COROLLAIRE.

Il appert de ces choſes, que quatre grandeurs ayans meſme proportion Arithmetique, qu'en permutant elles auront auſſi meſme proportion Arithmetique. D'autant que telle proportion conſiſte au meſme excez qu'auons monſtré eſtre meſme entre la 2. & 3. grandeurs, qu'entre la 2. & 4. s'il y a meſme excez entre la 1. & la 2. qu'entre la 3. & la 4. ſçauoir ſi quatre grandeurs ont meſme proportion Arithmetique.

THEOREME 62. PROP. 80.

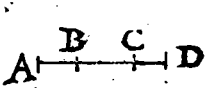
lxxix. lxxiv.

Au reſidu ou apotome conuient tant ſeulement, vne ſeule ligne droicte rationelle, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute.

Soit A B reſidu, à laquelle conuienne B C rationelle commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute A C. Ie dis qu'aucune autre rationelle ne peut

peut conuenir à A B, commenſurable en puiſſance, ſeulement à la route.

Car, s'il eſt poſſible, conuienne à icelle vne autre rationelle B D, commenſurable en puiſſance ſeulement à A D. Et B C eſtant rationelle, A C commenſurable en puiſſance ſeulement à icelle, ſera rationelle. Donc A C, B C ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. Semblablement, A D, B D ſeront rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement.



Mais y ayant meſme excez entre le compoſé des quarrez de A C, B C, & deux fois le rectangle ſous A C, B C, qu'entre le compoſé des quarrez de A D, B D, & deux fois le rectangle ſous A D, C B; (car l'excez entre le compoſé des quarrez de A C, B C, & deux fois le rectangle ſous A C, B C, eſt le
c 7. 2. quarré de A B: [c] le compoſé des quarrez de A C, B C eſtant egal à deux fois le rectangle ſous A C, B C, & au quarré de A B.)

7. 2. Semblablement, le quarré de A B, eſt l'excez entre le compoſé des quarrez de A D, B D, & deux fois le rect. de A D, B D, (le compoſé des quarrez de A D, B D eſtant egal à deux fois le rect. de A D,
f *Sch. prec.* B D, & au q. de A B,) [f] auſſi en changeant il y aura meſme excez entre le compoſé des quarrez de A C, B C, & le compoſé des quarrez de A D, B D, qu'entre deux fois le rect. de A C, B C, & deux fois le rect. de A D, B D. Mais l'excez entre iceux compoſez eſt rationel, [g] iceux compoſez eſtans ration-
g *Sch.* 27. 10. 16. 10. naux: (car A C, D B eſtans rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, leurs quarrez ſeront ration-
9. def. naux & commenſ. Donc leur compoſé ſera commenſ.

menſ.à chacun d'iceux,& partant rationel. Semblablement,le compoſé des qq. de A D, B D, ſera monſtré rationel.) Donc l'excez entre deux fois le rect.ſous A C,B C,& deux fois le rect.ſous A D, B D, eſt vn eſpace rationel : Et puis que [h] le rect. ſous A C, B C, rationelles commenſ.en puiſſance ſeulement eſt medial : [i] le double d'iceluy,ſçauoir deux fois le rect.ſous A C, B C, ſera medial : par meſme raiſon le rect.ſous A D,B D eſt medial,[k] & vn medial n'excede vn medial d'vn rationel.Donc l'excez entre deux fois le rect. ſous A C, B C, & deux fois le rect.ſous A D, B D, n'eſt eſpace rationel:Mais il eſt monſtré rationel.Ce qui eſt abſurde. Donc aucune autre rationelle ne conuient à A B, commenſ.en puiſſance ſeulement à la toute,outre B C.Partant au reſidu medial premier,&c.Ce qu'il falloit demonſtrer.

h 28.10.
i *Coroll.* 24.10,
k 27.10.

THEOREME 63. PROP. 81. lxxx. lxxv.

Au reſidu Medial premier,ne conuient qu'vne ſeule ligne Mediale, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, contenant auec la toute vn rectangle rationel.

Soit A B,reſidu medial premier,& à icelle conuienne B C,mediale,commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute A C,& le rectangle ſous A C, B C ſoit rationel. Ie dis qu'aucune autre mediale ne conuient à A B,qui ſoit commenſ.en puiſſance ſeulement à la toute,& qui contienne auec la toute vn rectangle rationel.

Car, s'il eſt poſſible, conuienne vn autre B D mediale, commenſ.en puiſſ. ſeulement à la toute,& ſoit le rectangle ſous A D, B D, rationel. Et B C, eſtant mediale commenſ.en puiſſ. ſeulement à A C, l'A C ſera mediale ; donc A C, B C ſont mediales commenſ.en puiſſ.ſeulement.



l 24.10.

Et puis qu'il y a meſme excez entre le compoſé des quarrez de A C, B C,& le compoſé des quarrez de A D, B D, qu'entre deux fois le rectangle ſous A C, B C, & deux fois le rectangle ſous A D, B D, comme il eſt monſtré en la precedente ; Mais l'excez entre iceux rectangles m eſt rationel ; l'vn & l'autre eſtant rationel : (car le rect. ſous A C, B C, eſtant poſé rationel, deux fois le rect. ſous A C, B C, commenſ.à iceluy, eſt rationel, & par meſme raiſon deux fois le rect.ſous A D, B D eſt rationel.) Donc l'excez entre le compoſé des quarrez de A C, B C,& celuy des quarrez de A D, B D eſt rationel. Et A C, B C, eſtans mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, leurs quarrez ſeront mediaux & commenſurables. n Donc leur compoſé eſt commenſ. à chacun d'iceux, o & partant medial. Par meſme raiſon le compoſé des quarrez de A D, B D, ſera medial. Mais vn medial n'excedant vn medial d'vn rationel, l'excez d'entre le compoſé des quarrez de A C, B C,& celuy des quarrez de A D, B D, n'eſt rationel : Mais il eſt monſtré rationel. Ce qui eſt abſurde. Donc vne autre mediale ne conuient à A B, outre B C, qui ſoit commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute,& contienne vn rectangle rationel auec la toute. Donc au reſidu medial premier,&c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

m *Sch.* 27. 10.

n 16. 10.

o *Coroll.* 24. 10.

THEO

lxxxj.
lxxvj.

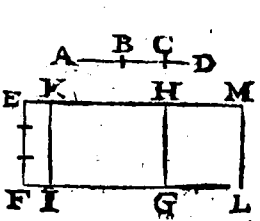
THEOREME 64. PROP. 82.

Au residu medial second, ne peut conuenir qu'vne seule ligne droicte mediale, commensurable en puissance seulement à la toute, & contenant vn rectangle medial auec la toute.

Soit A B, residu medial second, à laquelle conuienne B C, mediale commensurable en puissance seulement à la toute A C. Et soit le rectangle sous A B, A C, medial. Ie dis qu'aucune autre mediale ne conuient à A B, commensurable en puissance seulement à la toute, & contenant auec icelle toute vn rectangle medial.

Car, s'il est possible, conuienne B D, mediale commensurable en puissance seulement à la toute A D, & soit le rectangle sous A D, B D medial, & soit exposée E F rationelle, p à laquelle soit appliqué E G, rectangle egal au composé des quarrez de A C, B C. Et à E F, soit aussi appliqué E I rectangle egal au quarré de A B, puis E L, rectangle egal composé des quarrez de A D, B D, q D'autant donc que le composé des quarrez de A C, B C, est egal à deux fois le rect. sous A C, B C, & au quarré de A B; K G sera egal à deux fois le rect. sous A C, B C. Ainsi K L sera egal à deux fois le rect. sous A D, B D.

p 45. 1.



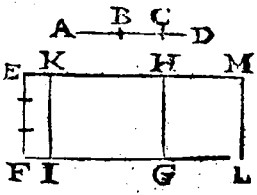
q 7. 2.

Et A C, B C, eſtans mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement. (Car B C eſtant poſée mediale, [t] A C commenſ. en puiſſ. à icelle, ſera auſſi mediale,) leurs quarrez ſeront mediaux & commenſ.[u] Donc leur compoſé eſt commenſ. à chacun d'iceux: [x] & partant medial: Donc E G, egal à iceluy compoſé, eſt auſſi medial, & E G eſtant appliqué à E F rationelle, [v] E H ſera rationelle incommenſ. en longitude à E F.

t 16. 10. Corol.
u 24. 10.
x 23. 10.
v 23. 10.

Derechef, le rect. ſous A C, B C eſtant medial, [y] le double d'iceluy, ſçauoir K G, ſera medial. Et eſtant appliqué à K I rationelle, K H, ſera rationelle incommenſ. en longit. à K I, c'eſt à dire à E F: & puis que A C, B C, ſont incommenſ. en longit. & comme A C, à B C, ainſi le quarré de A C, au rect. ſous A B, B C: [z] le q. de A C ſera incommenſ. au rect. ſous A C, B C: Mais le compoſé des quarrez de A C, B C, c'eſt à dire le rectangle E G, eſt commenſ. au q. de A C, (car A C, B C eſtans poſées commenſurables en puiſſ. leurs quarrez ſeront commenſ. Donc leur compoſé commenſ. à chacun d'iceux, ſçauoir au quarré de A C.) Et le double du rect. ſous A C, B C, ſçauoir K G, eſt commenſurable à iceluy rectangle ſous A C, B C. Donc E G eſt incommenſurable à K G, donc E H, K H, ayant meſme raiſon que E G, K G, ſont incommenſurables en longitude. Et eſtans monſtrées rationelles, elles ſeront rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. Parquoy de

y *Coroll.* 24. 10. 23. 10.
Lem. 3. 19. 10.
z 10. 10.
16. 10.
Sch. 14. 10. 1. 6. 10. 10.



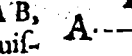
E H

E H rationelle, estant retranchée la rationelle, K H commens. en puiss. seulement à E H, [a] E K sera residu, & K H conuenable à icelle. Ainsi on monstrera que E K, est residu à K M, conuenable à icelle. Donc au residu ne conuient vne seule ligne rationelle, commensurable en puissance seulement à la toute. Ce qui est absurde, comme il est demonstré. Donc au residu medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [a] 74. 10. 80. 10.

THEOREME 65. PROP. 83. lxxxij. lxxviij.

A la ligne mineure conuient vne seule ligne droicte incommensurable en puissance à la toute: & faisant auec la toute le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle sous icelles medial.

Soit A B mineure, & B C conuenable à icelle, incommensurable en puissance à la toute A C, faisant le composé des quarrez de A C, B C rationel. Mais le rectangle sous A C, B C medial. Ie dis qu'aucune autre ligne ne conuient à A B, faisant le mesme.



Car autrement, qu'vne autre B D conuienne à A B, incommensurable en puissance à la toute A D, faisant le composé des quarrez de A D, B D rationel, & le rectangle sous A D, B D medial.

D'autant donc que comme il est demonstré en la 80. Proposition, l'excez du composé des quarrez de A C, B C, & du composé des quarrez de A D,

B D, eſt le meſme que celuy d'entre deux fois le rectangle ſous A C, B C, & de deux fois le rectangle ſous A D, B D.

b *Sch.* 27. 10. Mais l'excez d'entre iceux compoſez [b] eſt rationel, l'vn & l'autre eſtant poſé rationel. Donc l'excez entre deux fois le rectangle ſous A C, B C, & deux fois le rectangle ſous A D, B D, eſt eſpace rationel: mais il eſt auſſi non rationel, (car le rectangle ſous A C, B C, eſtant poſé medial, deux fois le rectangle ſous A C, B C, double d'iceluy, c *Coroll.* 24. 10. [c] eſt auſſi medial:) Semblablement, deux fois le rectangle ſous A D, D B, ſera medial, d 27. 10. [d] donc l'vn n'excedera l'autre d'vn rationel. Ce qui eſt abſurde. Donc vne autre ligne ne conuient à A B, outre B C, incommenſurable en puiſſance à la toute, &c. Donc à ligne minente, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

lxxxiij. lxxviij.

THEOREME 66. PROP. 84.

A la ligne faiſant auec vn eſpace rationel vn tout medial, conuient vne ſeule ligne droicte incommenſurable en puiſſance à la toute, & faiſant auec la toute le compoſé de leurs quarrez medial: mais le rectangle contenu ſous icelles rationel.

Soit A B, faiſant vn tout medial, auec vn eſpace rationel, à laquelle conuienne B C, incommenſurable en puiſſance à la toute A C, & faiſant le compoſé des quarrez de A C, B C, medial, & le rectangle ſous A C, B C, rationel. Ie dis que à

A B,

A B, n'en conuient vne autre, faisant les mesmes choses.

Car, s'il est possible, en conuienne vne autre B D, incommensurable en puissance à la toute A D, & faisant le composé des quarrez de A D, B D, medial, & le rectangle sous A D, B D rationel. D'autant que comme il est monstré en la 80. Proposition, il y a mesme excez entre le composé des quarrez de A C, B C, & le composé des quarrez de A D, B D, qu'entre deux fois le rectangle sous A C, B C, & deux fois le rectangle sous A D, B D. Mais l'excez entre iceux rectangles est espace rationel, comme il est monstré en la 81. Proposition. Donc l'excez d'entre iceux composez des quarrez est aussi espace rationel: mais il n'est pas aussi rationel, l'vn & l'autre estant medial; [e] vn medial n'estant vn medial d'vn rationel: Ce qui est absurde. Donc vne autre ligne que B C, ne conuient à A B, incommensurable en puissance à la toute. Donc à la ligne faisant, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. Voyez la figure precedente. e 27. 10.

THEOREME 67. PROP. 85. lxxxiv. lxxix.

A vne ligne faisant auec vn espace medial, vn tout medial conuient vne seule ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, & faisant auec la toute le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu sous icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez.

Soit A B, faiſant auec vn eſpace medial, vn tout medial, à laquelle conuienne B C, incommenſurable en puiſſance à la toute A C, & faiſant le compoſé des quarrez de A C, B C medial, & le rectangle ſous icelles medial & incommenſurable au compoſé d'iceux quarrez de A C, B C. Ie dis qu'aucune autre ligne ne peut conuenir à A B, faiſant les meſmes choſes.

Car, s'il eſt poſſible, que B D luy conuienne incommenſ. en puiſſ. à la toute A D, faiſant ce que dit eſt. Et ſoit fait comme en la 82. D'autant que le compoſé des quarrez de A C, B C eſt medial,
f 23.10. E G ſon égal, eſt auſſi medial.[f] Donc E H eſt rationelle incommenſ. en longitude à E F.

Derechef, d'autant que le rectangle ſous A C, B C eſt medial, le double d'iceluy K G eſt auſſi
g 23.10. medial,[g] donc K H eſt rationelle incommenſ. en longitude à E F. Et d'autant que K G eſt commenſurable au rectangle ſous A C, B C, eſtant double d'iceluy rectangle. Mais le rectangle ſous A C, B C, eſt poſé incommenſurable au compoſé des quar-
h 14.10. rez de A C, B C:[h] K G ſera auſſi incommenſurable à iceluy compoſé, c'eſt à dire à E G: & partant E H, K H eſtant en meſme raiſon que E G, K G,
i 10.10. i ſont incommenſ. en longit. Mais elles ſont monſtrées rationelles: partant ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement.

Oſtant donc de la rationelle E H, la rationelle K H, commenſurable en puiſſance ſeulement à
k 74.10. E H:[k] E K ſera reſidu, & à icelle conuenant K H: Semblablement, nous monſtrerons que E K eſt reſidu, à laquelle conuient K M. Donc vne ſeule ligne ne conuient à vn reſidu, &c. Ce qui eſt ab-
l 30.10. ſurde.[l] Eſtant monſtré le contraire, &c. Donc à

vn e

vne ligne faisant, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. Voyez la figure de la page 879.

DEFINITIONS TROISIESMES.

Vne ligne rationelle estant proposée & vn residu, quand la toute composée du residu & de la conuenable ou adioustée, peut plus que la conuenable du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude.

1. Si la toute est commensurable en longitude à la rationelle proposée, le residu soit appellé, residu premier.

2. Mais si la conuenable ou adioustée, est commensurable en longitude à la rationelle proposée, soit appellé residu second.

3. Et si ny la toute, ny la conuenable n'est commensurable en longitude à la rationelle proposée, soit appellé residu troisiesme.

Derechef, si la toute peut plus que la conuenable du quarré d'vne ligne droicte incommensurable en longitude à icelle.

4. Si la toute est commensurable en

longitude, à la rationelle proposée ; soit appellée residu quatriesme.

5. Mais si la conuenable est commensurable en longitude à la rationelle proposée, soit appellée residu cinquiesme.

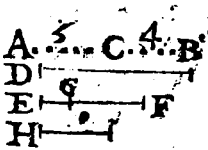
6. Et si ny la toute, ny la conuenable, n'est commensurable en longitude à la rationelle proposée, soit appellée residu sixiesme.

lxxxv. lxxx. PROBLEME 19. PROP. 86.

Trouuer vn apotome, ou residu premier.

1 *Sch.* 2. 9. 10. Ayant [m] trouué deux nombres quarrez A B, C B, dont l'excez A C, ne soit quarré. Soit proposée D rationelle, & soit E F commensurable en longitude à icelle : E F sera aussi rationelle, & [n] comme le nombre A B, à A C, soit faict le quarré de E F, au quarré de G F. Ie dis que E G, est residu premier.

Coroll. 6. 10. [o] Car d'autant que les quarrez de E F, G F estans entr'eux comme les nombres A B, A C, sont commensurables, E F, G F seront commensurables au moins en puissance. Donc puis que E F est monstrée rationelle, G F le sera aussi.



Et puis que A B, A C ne sont entr'eux comme nombres quarrez les quarrez de E F, G F, ne seront

l'vn

l'vn à l'autre comme nombre quarré à nombre quarté.° Partant E F, G F, ſont incommenſurables en longitude : elles ſont donc rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement : ᵖ partant le reſte E G eſt reſidu. Ie dis qu'elle eſt reſidu premier. Car que E F, plus grande, puiſſe plus que G F, du quarré de H. Et d'autant que comme le nombre A B, eſt au nombre A C, ainſi le quarré de E F, au quarré de G F, par conuerſion de raiſon, comme A B, à C B, ainſi le quarré de E F, au quarré de H. Mais A B, C B, ſont nombres quarrez, donc le quarré de E F, ſera au quarré de H, comme nombre quarré au nombre quarré : donc E F & H, ſont commenſurables en longitude.

° 9. 10.

ᵖ 74. 10.

9. 10.

D'autant donc que la toute E F, peut plus que G F, conuenable du quarré de H, commenſurable en longitude à icelle, & la toute E F, eſt commenſ. en longit. à la rationelle expoſée D, par la definition, E G ſera reſidu premier. Donc nous auons trouué vn reſidu premier. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit D rationelle propoſée 9. & E F, 6. le nombre A B, 9. & C B, 4. & comme A B, 9. nombre quarré eſt à A C, 5. ainſi 36. q. de E F, ſoit à vn autre, ſçauoir au q. de F G, qui ſera trouué de 20. Donc F G, ſera γq. 20. Donc E G, ſera 6. —— γq. 20. apotome ou reſidu premier.

Et faut entendre que apotome ou reſidu, eſt le reſte de deux lignes, ou de deux nombres rationaux, le moindre eſtant ſouſtrait du plus grand, & ſe trouue tout ainſi que le binome poſant le ſigne —— au lieu du ſigne. p. Comme apres auoir trouué ce

binome

binome 6.p.yq.20. changeant p. en—— le residu sera 6.—yq.20.

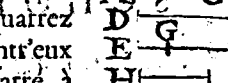
PROBLEME 10. PROP. 87.

Trouuer vn residu second.

Ayant trouué deux nombres A B, C B, comme en la precedente, & proposé la rationelle D, soit prise G F, commensurable en longitude à icelle, G F sera aussi rationelle. Et comme le nombre A C, au nombre A B, ainsi le quarré de G F, soit faict au quarré de E F. Ie dis que E G est apotome second.

q Cor. 6. 10.

6. 10. Car les quarrez de G F, E F, estans entr'eux, comme les nombres A C, A B, sont commensurables, & G F, E F, commensurables, au moins en puissance. Et puis que G F est monstrée rationelle, E F sera aussi rationelle.



Mais d'autant que les nombres A C, A B, & par mesme moyen les quarrez de G F, E F, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, r G F, E F, seront incommensurables en longitude. Donc G F, E F, sont rationelles commens. en puissance seulement, & partant E G, restante, est residu. Ie dis aussi qu'elle est residu second. Car que E F puisse plus que G F, du quarré de H.

9. 10.

r 74. 10.

s

D'autant donc que comme A C à A B, ainsi le quarré de G F, au quarré de E F, & en raison conuerse, comme A B, à A C, ainsi le quarré de E F, au quarré de G F: maintenant nous monstrerons, comme

comme en la precedente, que la ligne H est commensurable en longitude a E F : par quoy la toute E F, pouuant plus que la conuenable G F, du quarré de H, commensurable en longitude à icelle, & qu'icelle conuenable, G F est commensurable en longitude à la rationelle exposée D, par la definition E G, sera apotome ou residu second. Donc nous auons trouué vn apotome second. Ce qu'il falloit demonstrer.

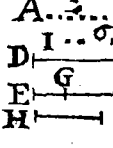
SCHOLIE.

Soit F G, 5. & comme A C, 5. au nombre quarré A B, 9. ainsi 25. q. du nombre pris, soit à vn autre, sçauoir a 45. q. de E F ; Donc E F sera 9q. 45. Partant E G sera 9q. 45. — 5 residu second.

PROBLEME 21. PROP. 88. 87. 22.

Trouuer vn apotome ou residu troisiesme.

Ayant trouué deux nombres A B, C B, comme en la 86. Proposition, soit pris vn autre nombre 1. comme est enseigné en la 51. qui ne soit à l'vn ny l'autre comme nombre quarré à nombre quarré. Et ayant proposé D rationel, soit fait comme I, à A B : [t] ainsi le quarré de D, au quarré de E F, [v] & iceux quarrez de D & E F, [v] 6. 10. seront entr'eux comme les nombres I, & A B:

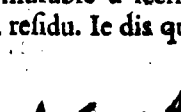


[t] Cor. 6. 10.

&

& partant commenſurables : Et partant D & E F, commenſurables au moins en puiſſance ; & D eſtant rationelle, E F ſera auſſi rationelle. Et d'autant que les nombres I & A B, & partant les quarrez de D & E F, ne ſont entr'eux comme nombre
x 9. 10. quarré à nombre quarré,[x] D & E F, ſeront incom-
y *Coroll.* 9. menſurables en longitude.[y]
10. Derechef, comme A B eſt à A C, ainſi le quarré de E F, ſoit au quarré de G F. Ie dis que E G eſt
z 6. 10. reſidu troiſieſme. Car [z] puis que les quarrez de E F, G F, eſtans entr'eux comme les nombres A B, A C, ſont commenſurables, E F, G F, ſeront commenſurables au moins en puiſſance ; & E F eſtant monſtrée rationelle, G F ſera auſſi rationelle. Et
9. 10. d'autant que A B, A C, & par ainſi les quarrez de E F, G F, ne ſont entr'eux comme nombres quarrez, E F, G F ſeront incommenſurables en longi-
74. 10. tude. Donc E F, G F, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement : & partant G F eſtant retranchée de E F, commenſurable à icelle en puiſſance ſeulement, E G ſera reſidu. Ie dis qu'elle eſt reſidu troiſieſme.

Car, d'autant que comme I à A B, ainſi le quarré de D, au quarré de E F, & comme A B, à A C, ainſi le quarré de E F, au quarré de G F, en raiſon egale, comme



I à A C, ainſi le quarré de D, au quarré de G F. Or I & A C, ne ſont entr'eux comme nombres
9. 10. quarrez. Donc les quarrez de D & G F, ne ſeront entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Donc D & G F, ſont incommenſurables en longitude. Donc l'vne ny l'autre E F, G F, n'eſt commenſurable

mensurable en longitude à la rationelle propo-
sée D.

Maintenant que E F, puisse plus que G F, du q. de H: nous monstrerons comme en la 86. Proposition, que H est commensurable en longitude à E F. Parquoy, puis que E F toute, peut plus que la conuenable G F du quarré de H, commensurable en longitude à icelle, & que l'vne ny l'autre E F, G F, n'est commensurable en longitude à la rationelle proposée D, par la definition E G, sera residu troisiesme. Donc nous auons trouué vn residu troisiesme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit D rationelle proposée 12. *& comme* 16. *est au nombre q. A B* 9. *ainsi* 144. *q. de D, soit à vn autre, sçauoir au q. de E F* 216. *Donc E F sera yq.* 216. *Derechef, comme A B* 9. *est à A C* 5. *ainsi* 216. *soit à vn autre, sçauoir au q. de F G, qui sera trouué de* 120. *Donc F G sera yq.* 120. *partant E G sera yq.* 216. —— *yq.* 120. *residu troisiesme.*

PROBLEME 22. PROP. 89. 88. 83.

Trouuer vn residu quatriesme.

Ayant trouué deux nombres A C, C B, tels que leur composé ne soit à l'vn ny à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, soit exposée D rationelle, à laquelle soit E F, commens. en longit. E F sera aussi rationelle. Et ayant faict au reste comme en la 86. Prop. nous monstrerons comme là, que E G est residu. Ie dis aussi qu'elle est residu *Sch.* 3. 29. 10.

quatriesme

quatrieſme. Car que E F puiſſe plus que G F, du quarré de H. Et d'autant que comme A B, à A C, ainſi le quarré de E F, au quarré de G F, en raiſon conuerſe, comme A B, ſera à C B, ainſi le quarré de E F, au



9. 10. quarré de H. Donc puis que A B, C B, ne ſont entr'eux comme nombres quarrez, E F & H ſeront incommenſurables en longitude. D'autant donc que la toute E F, peut plus que la conuenable G F, du quarré de H, incommenſurable en longitude à icelle, & la meſme toute E F, eſt commenſurable en longitude à la rationelle D, E G par la definition, ſera reſidu quatrieſme. Nous auons donc trouué le reſidu quatrieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit D rationelle 8. & E F 6. & comme A B nombre 9. 9. eſt à A C 6. nombre non quarré: ainſi 36. quarré de E F ſoit à vn autre, ſçauoir au quarré de F G, qui ſera trouué de 24. partant F G ſera 9 9. 24. Donc E G ſera 6.——9 9. 24. apotome ou reſidu quatrieſme.

89. 94. PROBLEME 23. PROP. 90.

Trouuer vn reſidu cinquieſme.

Ayant trouué deux nombres A C, C B, comme en la precedente, ſoit conſtruit comme en la 87. Propoſition, c'eſt à dire, ſoit priſe G F, commenſurable

ſurable en longitude à la rationelle D, &c. Donc comme en la 87. nous monſtrerons que E G eſt reſidu. Ie dis auſſi qu'il eſt cinquieſme. Car que E F, puiſſe plus que G F, du quarré de H. Et d'autant que nous monſtrerons tout ainſi qu'en la 86. que par conuerſion de raiſon, comme A B, à C B, ainſi le quarré de E F, au quarré de H. Dereches, comme en la precedente, E F & H ſeront incommenſurables en longitude, & la conuenable G F, eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſée D: par la definition, E G ſera reſidu cinquieſme. Donc nous auons trouué vn reſidu cinquieſme. Ce qu'il falloit faire.

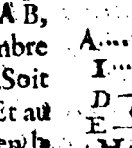
SCHOLIE.

Soit D rationelle propoſée, & ſoit F G 2. & comme A C 6. à A B 9. ainſi 4. quarré de F G 2. ſoit à vn autre, ſçauoir au quarré de E F. Donc E F ſera γγ 6. Donc E G ſera γγ 6. —— 2. reſidu cinquieſme.

PROBLEME 14. PROP. 91. xc. lxxxv.

Trouuer vn reſidu ſixieſme.

Ayant trouué trois nombres A C, C B, & I, comme en la 54. en ſorte que A B, ne ſoit à A C, ny à C B, & I, ne ſoit à A B, ny à A C, comme nombre quarré à nombre quarré. Soit expoſée la rationelle D. Et au reſte, ſoit fait comme en la 88. Prop. Nous monſtrerons



donc, comme en icelle 88. que D, & E F, ſont incommenſurables en longitude. Et que E G, eſt reſidu ſixieſme.

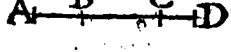
Car, comme en la 88. D & G F, ſeront auſſi incommenſurables en longitude: & partant l'vne ny l'autre E F, G F, n'eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſée D. Maintenant que E F, puiſſe plus que G F, du quarré de H, laquelle nous monſtrerons incommenſ. en longit. à E F, comme en la 89. Donc puis que la toute E F, peut plus que la conuenable G F, du quarré de H, incommenſ. en longit. à icelle, & E F, ny G F, n'eſt commenſ. en longit. à la rationelle expoſée D, par la definition E G ſera reſidu ſixieſme. Donc nous auons trouué vn reſidu ſixieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit D rationelle 9. & comme 1 9. à A B 12. ainſi 144. γq. de 12. à vn autre, ſçauoir au quarré de E F, qui ſera 192. Donc E F ſera γq. 192. Puis comme 12. à 7. ainſi le quarré de E F 192. à vn autre, ſçauoir au quarré de E G, qui ſera 112. Donc F G ſera γq. 112. Et partant E G γq. 192. —— γq. 112. reſidu ſixieſme.

Mais l'on trouuera auſſi les ſuſdits reſidus comme Theon, en cette maniere.

Comme pour exemple, pour trouuer le reſidu premier, [a] *ſoit trouué A B binome premier: dont le plus grand nom eſt A C, & le moindre C B:*



a 49. 10.

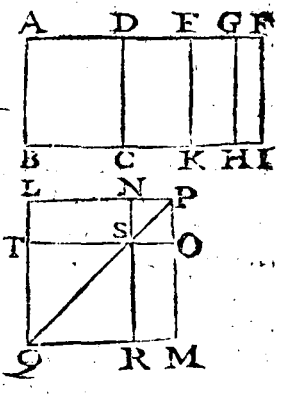
& de A C ayant eſté C D, egale à C B. Ie dis que A D

A D eſt reſidu premier. Car puis que A C, B C ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement A C, D C, ſeront auſſi rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. b Donc A D eſt reſidu: & A C pouuant plus que C B, c'eſt à dire que D C du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, & A C eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſée par la definition du binome premier: par la definition du reſidu premier, A D ſera reſidu premier; & ſemblablement on trouuera les reſidus des autres binomes, oſtant les moindres nombres des plus grands.

b 74. 10.

THEOREME 68. PROP. 92. xc. lxxxvi.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vn reſidu premier; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace, eſt reſidu.



Soit l'eſpace A C, contenu ſous la rationelle A B, & le reſidu premier A D. Ie dis que la ligne qui peut l'eſpace A C, eſt reſidu.

Car ſoit D E, conuenable à A D: donc A E, D E, par la definition du reſidu premier, ſeront rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: & la toute A E, com-

mens.en longit.à la rationelle A B,& la toute A E, pourra plus que la conuenable D E, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle.

Soit coupée D E,en deux egalement à F,& soit appliqué à A E,vn rectangle egal au quarré de E F, c'est à dire,egal au quart du quarré de D E,& defaillant d'vne figure quarrée,sçauoir sous A G,G E. Et d'autant que A E peut plus que D E,du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longit. A G, G E seront commens. en longit. parquoy l'vne & l'autre sera commens.en longit. à la toute A E. Mais la toute A E,est commens.en longit. à la rationelle A B. Donc tant A G que G E, est commens.en longit.à A B, & partant rationel. Donc ayant mené G H,E I,paralleles à A B,rencontrant B C prolongée à H & I, l'vn & l'autre rectangle A H,G I,contenu sous deux rationelles commensurables en longitude, sera rationel.

c *Lem.*2. 17. 10.
d 18.10.
e 16.10.
f 12.10.
g 6. d.
h 20.10.

Derechef,d'autant que l'vne & l'autre D F,F E, est commens.en longit.à D E: & D E incommens. en longitude à la rationelle A B: (car si elle estoit commens.en longit. A E estant aussi commens.en longit.à A B, A E,D E seroient aussi commens.en longitude,ce qui est absurde, car elles sont posées commens. en puiss. seulement,) l'vne & l'autre d'icelles D E, F E sera aussi incommens.en longit. à la rationelle à A B.

i 12. 10.
k 14.10.

Et d'autant que l'vne & l'autre D F, F E, est commens. à la rationelle D E, elles sont rationelles : partant,tant A B,D F,que A B,F E, seront rationelles commens.en puissance seulement : Donc ayant mené F K, parallele à A B, l'vn & l'autre rectangle D K, F I, contenu sous les rationelles commens.en puiss.seulement, est medial.

l 22. 10.

Maintenant

Maintenant soit [m] fait le quarré L M, egal à A H: & N O egal à G I, ayant vn angle commun auec L M, sçauoir L P M, [n] donc les quarrez L M, N O, seront à l'entour d'vn mesme diametre, lequel soit P Q: & soit parfaicte la figure comme l'on voit. m 14. 10. n 26. 6.

D'autant donc que le rectangle sous A G, G E, est egal au quarré de F E, par la construction, les trois lignes A G, F E, G E, seront proportionelles: & partant A H, F I, G I, ayans mesme raison: F I [p] sera moyen proport. entre A H, G I, c'est à dire entre les quarrez L M, N O, egaux à iceux rectangles. [o] Mais L O, est aussi moyen proportionel, entre les mesmes L M, N O. Donc les rectangles F I, L O sont egaux: [p] Mais D K est egal à F I, & M N à L O. Donc le tout D I, est egal à tout le Gnomon R O, O N, N P, auec le quarré N O. Mais le tout A I, est egal aux quarrez L M, N O, par la construction, donc le reste A C, sera egal au reste quarré T R. Donc T S peut l'espace A C. Ie dis que T S est residu. 17. 6. o *Lemme* 14. 10. p 36. 10.

Car d'autant que les espaces, A H, G I, sont monstrez rationaux, & à iceux sont egaux L M, N O, iceux quarrez L M, N O, seront rationaux, & partant T O, S O rationelles.

Derechef, puis que F I est monstré medial, L O, egal à iceluy, sera aussi medial. Donc L O, N O, sont incommensurables, l'vn estant rationel, & l'autre irrationel. [q] Donc les lignes T O, S O, [r] ayans mesme raison que L O, N O, sont incommensurables en longitude: partant le reste T S est residu. Donc si vn espace, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. Voyez la figure cy-dessus. q 1. 6. r 10. 10. 74. 10.

SCHOLIE.

Soit AB 6. AC 7. —— ɣq. 13. DE ſera ɣq. 13. & DF, ou à FG ɣq. 3. $\frac{1}{4}$. & ſi à AE on applique vn rectangle ſous AG, & GE egal au quarré de FE, comme il a eſté monſtré, defaillant d'vne figure quarrée AG ſera 6. $\frac{1}{2}$. GE $\frac{1}{2}$. Donc AH eſt 39. & GI 3. & le tout AI 42. Mais DI eſt ɣq 468. & DK, ou FI ɣq. 117. —— 3. & GI 3. Donc AC eſt 42. —— ɣq. 468. reſidu premier, pour trouuer ſon coſté ſoit diuiſé 42. en deux telles parties que leur produit ſoit egal au quart du quarré de 468. c'eſt à dire à 117. la plus grande partie ſera 39. la moindre 3. & partant ɣq. 39. —— ɣq. 3. ſera le coſté de l'eſpace reſidu 42. —— ɣq. 468.

92.
87. THEOREME 69. PROP. 93.

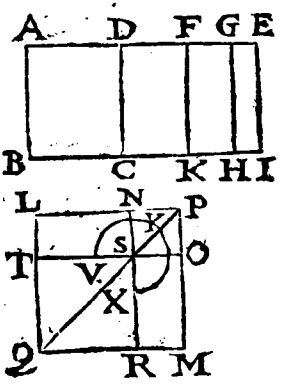
Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vn reſidu ſecond : La ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt reſidu Medial premier.

Soit le rectangle ou eſpace AC, contenu ſous AB rationelle, & AD reſidu ſecond. Ie dis que la ligne pouuant AG, eſt reſidu medial premier.

Car ſoit DE, conuenable à AD ; Donc AE, DE, par la definition du reſidu ſecond ſeront rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, & la conuenable DE, commenſurable en longit. à la rationelle AB. Et finalement AE, pourra plus

que

que DE, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle. Soit coupée DE en deux egalement à F, & au reste, soit fait comme en la precedente: comme en la 92. Propos. r AG, GE seront commens. en longitude. s Et partant chacune sera commensurable à la toute AE; mais AE est incommensurable en longitude à AB rationelle: (car si elle estoit commensurables en longitude à AB, DE estant posée commensurable en longitude à la mesme AB: v AE, DE seroient commensurables en longitude entr'elles: ce qui est absurde, estans posées commensurable en puissance seulement. x) Donc tant AG, que GE est incommens. en longitude à AB. Mais AG, GE commens. à AE rationelle, sont rationelles: donc tant AB, AG, que AB, GE sont rationelles commens. en puiss. seulement: y donc tant le rect. AH, que GI; contenu sous les rationelles commens. en puiss. seulement, est medial.



r 18. 10.

s 16. 10.

v 12. 10.

x 14. 10.

y 22. 10.

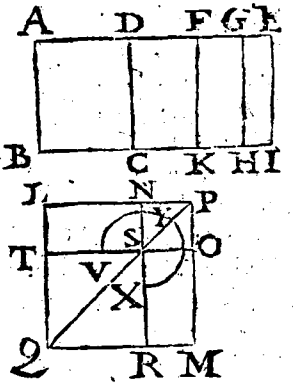
Derechef, tant DF, que FE estans commens. en longit. à DE, posée commens. en long. à AB ration. DF, FE seront commens. en long. à AB rationelle, comme il appert par la 12. Prop. & partant ration. a Donc tant le rect. DK, que FI, contenu sous les rationel. commensurables en longit. est rationel. Et on monstrera, comme en la 92. Prop. que TS

z 20. 10.

peut l'eſpace A C. Ie dis que T S eſt auſſi reſidu medial premier.

Car A G, G E eſtans commenſurables en longitude, [a] A H, G I ayans meſme raiſon qu'icelles, ſeront commenſ. Et partant auſſi leurs egaux quarrez L M, N O, commenſ. Donc les coſtez T O, S O, ſeront au moins commenſurab. en puiſſ. mais T O, S O ſont mediales, eſtans les quarrez L M, N O, egaux à A H, G I, (monſtrez mediaux) mediaux. Et d'autant que F I, & partant ſon egal L O eſt rationel: & par ainſi incommenſ. au Medial N O, [b] T O, S O ayans meſme raiſon qu'iceux, ſeront incommenſurables en longitude. Et eſtans monſtrées mediales & commenſurables, icelles T O, S O ſeront mediales commenſurab. en puiſſance ſeulement: & contenant le rectangle L O monſtré rationel, [c] T S ſera reſidu medial premier. Donc ſi vn eſpace eſt contenu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 10.10.



b 10.10.

c 75.10.

SCHOLIE.

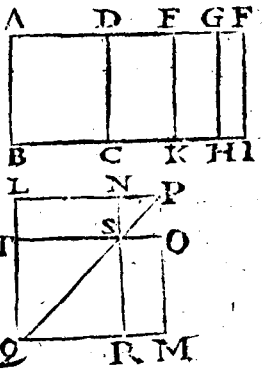
Soit AB 4. AD 7½. 48. — 6. DE ſera 6. & DF, ou FE 3. Et ſi à AE on applique vn rectangle

ſous

ſous AG,GE, egal au quarré de FE: & defaillant d'vne figure quarrée, AG ſera γq.27. GE γq.3. Et AH γq.432. GI γq.48. & AI γq.768. Mais DI 24. DK, ou FI 12. & FH 12. —— γq.48. Donc AC eſt γq.768. —— 24. reſidu ſecond. Et pour trouuer le coſté de ſon quarré, ſoit diuiſée γq.768. en deux telles parties, que leur produit ſoit egal au quart du quarré de 24. c'eſt à dire à 144. la plus grande partie ſera γq.432. la moindre γq.48. partant γγq.432. —— γγq.48. eſt le coſté de l'eſpace reſidu γq.768. —— 24.

THEOREME 70. PROP. 94. 93. 88.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vn reſidu troiſieſme: la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt reſidu Medial ſecond.



Soit l'eſpace ou rectangle AC, contenu ſous AB rationelle, & ſous AD reſidu troiſieſme. Ie dis que la ligne qui peut AC, eſt reſidu medial ſecond.

Car ſoit DE conuenable à AD: donc AE, DE, ſelon la definition du reſidu troiſieſme, ſeront rationelles commenſurables en puiſſ. ſeulement, & AE, ny DE ne ſera commenſurable

en longitude à la rationelle AB, & AE pourra plus que DE, du quarré d'vne ligne commenſ. en longit. à icelle, Soit coupée DE à F, en deux egalement, & ſoit acheué le reſte de la conſtruction comme en la 92.

Derechef, comme en icelle 92. AG, GE ſeront
6.10. commenſ. en longit. entr'elles: [d] & partant, tant AG, que GE, commenſurables en longitude à la toute AE: mais AE eſt poſée incommenſurable
4.10. en longitude à AB rationelle. Donc [e] tant AG, que GE ſera incommenſurable en longitude à AB. Donc tant AG que GE, commenſurable à AB rationelle, eſtant rationelle: tant AB, AG, que AE, GE, ſont rationelles commenſurables en
22.10. puiſſance ſeulement: [f] Partant l'vn & l'autre rect. AH, GI ſera medial.

Derechef, DE eſtant poſée incommenſurable en longitude à AB rationelle: DF, & FE com-
14.10. menſurable en longitude à DE, [g] ſera auſſi incommenſurable en longitude à AB. Donc DF, & FE, eſtans commenſurables à DE rationelle, tant AB, DF, que AB; FE ſeront rationelles commenſ. en
22.10. puiſſ. ſeulement: [h] & partant, tant le rectangle DK, que FI, ſera medial: & comme en la 92. Propoſition, on monſtrera que TS peut l'eſpace AC. Ie dis que TS eſt reſidu medial ſecond.

Car AH, GI eſtans monſtrez mediaux, leurs egaux quarrez LM, NO ſeront auſſi mediaux: &
20.10. partant TO, SO mediales. [i] Et puis que AH, GI (ayans meſme raiſon que AG, GE monſtrées commenſurables) ſont commenſurables, les quarrez LM, NO ſeront auſſi commenſurables. Donc TO, SO ſont commenſurables au moins en puiſſance.

Mais

Mais d'autant que A E, D E ſont commenſ. en puiſſ. ſeulement, c'eſt à dire incommenſ. en longit. & G E eſt monſtrée commenſ. en longit. à A E, & F E, commenſ. en longit. à D E: [k] G E, F F, ſeront incommenſ. en longit. [l] Et partant G I, F I, ayans meſme raiſon que G E, F E, c'eſt à dire leurs egaux N O, L O, ſont incommenſ. parquoy T O, S O ayans meſme raiſon que L O, N O, ſont incommenſurables en longitude. Et eſtans monſtrées mediales & commenſurables, elles ſeront mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement: & contenant L O medial: (car puis que L O eſt egal à F I, comme il appert par la 92. lequel eſt monſtré medial: L O ſera auſſi medial.) T S ſera reſidu medial ſecond. Partant ſi vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[k] *Sch.* 14. 10.

[l] 10. 10.

76. 10.

SCHOLIE.

Soit A B 6. A D rq. 27. —— rq. 15. D E ſera rq. 15. & D F, ou F E, rq. 3. $\frac{1}{4}$. & ſi à A E on applique vn rectangle ſous A G, G E, egal au quarré de F E, & defaillant d'vne figure quarrée, A G ſera rq. 18. $\frac{1}{4}$. G E rq. $\frac{1}{4}$. & partant A B eſt rq. 675. G I rq. 27. & le tout A I rq. 972. Mais D I rq. 540. F I rq. 135. & F H rq. 135. —— rq. 27. Donc A C eſt rq. 972. —— rq. 540. reſidu troiſieſme. Soit donc diuiſé rq. 972. en deux telles parties, que leur produit ſoit egal à rq. 135. la plus grande ſera rq. 672. & la moindre rq. 27. Donc rqq. 675. —— rqq. 27. eſt le coſté du quarré de l'eſpace reſidu rq. 972. rq. 540.

THEO

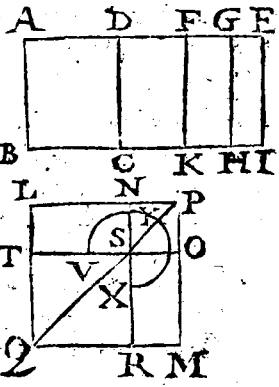
94. 89. THEOREME 71. PROP. 99.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle & vn reſidu quatrieſme : la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt ligne Mineure.

Soit l'eſpace ou rectangle A C, contenu ſous A B rationelle, & A D reſidu quatrieſme. Ie dis que la ligne droicte pouuant A C eſt mineure.

Car ſoit D E, conuenable à A D. Donc A E, D E ſeront rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, par la definition du reſidu quatrieſme : & A E commenſ. en longit. à A B rationelle : & icelle A E, pourra plus que D E, du q. d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle. Soit coupée D E en deux egalement à F, & le reſte faict comme auparauant : [m] Donc A G, G E ſeront incommenſ. en longit. puis que A E, peut plus que D E, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle : & à A E eſt appliqué vn rectangle ſous A G, G F : egal au quart du quarré de D E, defaillant d'vne figure quarrée. Et A E eſtant rationelle & commenſ. en longit. à la rationelle A B ; [n] le rectangle A I ſera rationel.

19. 10.



10. 10.

Defectief,

Derechef, D E eſtant rationelle & incommenſ. en longit. à A B rationelle, [c] D I : & partant ſa moitié F I ſera medial. Et d'auantage, [A] G, G E eſtans incommenſ. en longit. [p] A H, G L ayans meſme raiſon ſeront incommenſ. Et comme en la 92. on demonſtrera que T S peut l'eſpace A C. Ie dis que T S eſt mineure. c 22. 10. p 10. 10.

Car le compoſé des quarrez L M, N O, deſcrits de T O, S O, eſt egal au rectangle A I, par la conſtruction : mais iceluy eſt monſtré rationel, donc le compoſé des quarrez de T O, S O, ſera rationel. Semblablement, F I eſtant monſtré medial, L O, contenu ſous T O, S O, egal à iceluy, ſera medial.

Finalement, A H, G I eſtans monſtrez incommenſurables, leurs egaux quarrez L M, N O, ſeront incommenſurables : & partant T O, S O, incommenſurables en puiſſance. Donc T O, S O, eſtans incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez eſtant rationel, & le rectangle ſous icelles medial : la reſtante T S ſera mineure. Partant ſi vn eſpace eſt contenu ſous, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 77. 10.

SCHOLIE.

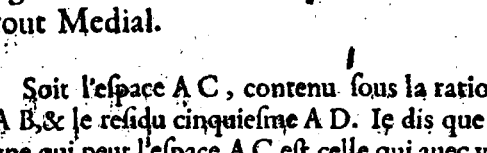
Soit A B 6. A D 7.——γq. 14. D E ſera racine q. 14. & D F, ou F E γq. 3. $\frac{1}{2}$. Mais ſi à A E on applique vn rectangle ſous A G, G E egal au q. de F E, defaillant d'vne figure q. A G ſera 3. $\frac{1}{2}$. p. γq. 8. $\frac{1}{4}$. G E 3. $\frac{1}{2}$.—— γq. 8. $\frac{1}{4}$. & A H eſt γq. 21. p. γq. 31 $\frac{1}{2}$. G I 21.—— γq. 31 $\frac{1}{2}$. & le tout A I 42. Mais D I eſt γq. 504. F I γq. 126.—— A C 42.—— γq. 504. reſidu 9 mariſme. Donc ſi 42. eſt diuiſé en deux telles

parties

parties que leur produit ſoit egal au quart de yq. 504. c'eſt à dire à 126. la plus grande partie ſera 21. p. yq. 126. & la moindre 21. —— yq. 126. Donc yq. (21. p. yq. 126.) —— yq. (21. —— yq. 126.) eſt le coſté du quarré ou eſpace reſidu 42. —— racine quarrée 504.

95. 90. THEOREME 72. PROP. 96.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vn reſidu cinquieſme, la ligne droicte qui peut iceluy eſpace eſt ligne faiſant auec vn eſpace Rationel vn tout Medial.



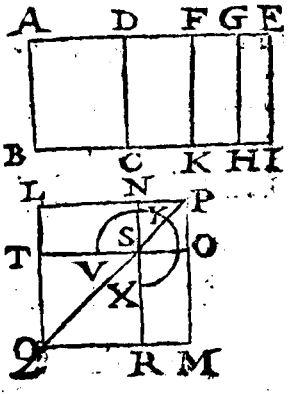
Soit l'eſpace A C, contenu ſous la rationelle A B, & le reſidu cinquieſme A D. Ie dis que la ligne qui peut l'eſpace A C, eſt celle qui auec vn rationel faict vn tout medial. Que D E, commenſ. en puiſſance ſeulement, & D E, commenſ. en longit. à la rationelle A B. Finalement A E pourra plus que D E, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle.

Soit coupée D E en deux egalement à F, & ſoit faict au reſte comme cy-deuant. Donc comme en la precedente A G, G E, ſeront incommenſurables en longitude. Et d'autant que A E eſt rationelle incommenſurable en longitude à A B rationelle,
q 22. 10. comme il eſt dit en la 93. le rectangle A I, q ſera medial.

Item, puis que D E eſt rationelle commenſurable en longit. à A B rationelle,
r 20. 10. r le rectangle D I:

&

& partant ſa moitié F I eſt rationel.



Derechef, comme en la precedente, A H, G I, ſont incommenſurables, & comme il eſt monſtré en la 92. T S, pourra l'eſpace A C. Ie dis que T S, eſt la ligne laquelle auec vn eſpace rationel, fait vn tout medial.

Car d'autant qu'il eſt monſtré que A I eſt medial, le compoſé des quarrez L M, N O, des lignes T O, S O, egal à iceluy : eſt medial. Et F I eſtant rationel, comme nous auons monſtré, le rectangle L O, contenu ſous T O, S O, egal à iceluy, eſt auſſi rationel : & T O, S O ſont incommenſurables en puiſſance, comme il eſt monſtré en la precedente. Donc, puis que le compoſé de leurs quarrez eſt medial, & le rectangle ſous icelles rationel, ſ la reſtante T S, eſt la ligne qui auec ſ 78. 10.
vn rationel, faict vn tout medial. Donc ſi vne eſpace, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit A B 6. A D 29. 59. — 4. D E ſera 4. & D F, ou F E 2. Que ſi à A E on applique vn rect. ſous A G, G E egal au q. de F E, & defaillant d'vne figure q. A G ſera 29. 14 p. 29. 10. G E 29. 14. — 29. 10.

yq.10. & AH eſt yq.504. p. yq.360. G I yq.504. —yq.360. & le tout A I yq.2016. Mais D I eſt 24. F I 12. & A C yq.2016.—24. reſidu 5. Soit diuiſée yq.2016. en deux telles parties que leur produit ſoit egal à 144. la plus grande ſera yq.504. p. yq.360. & la moindre yq.504.—yq.360. parquoy yq.(yq.504. p. yq.360.)—yq.(yq.504.—yq. 360.) eſt le coſté du quarré dudit eſpace reſidu yq. 2016.—24.

96. 91. THEOREME 73. PROP. 97.

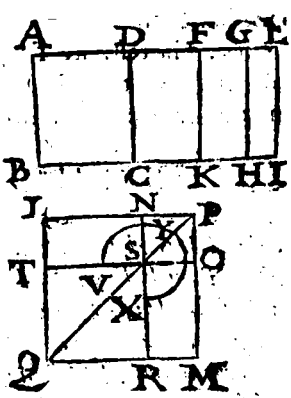
Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle & vn reſidu ſixieſme ; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt celle-là, laquelle auec vn rectangle Medial, faict vn tout Medial.

L'eſpace A C, ſoit contenu ſous la rationelle A B, & A D, reſidu ſixieſme. Ie dis que la ligne droicte qui peut l'eſpace A C, eſt celle qui auec vn eſpace medial, fait vn tout medial.

Car à icelle A D, conuienne D E : donc A E, D E, par la definition du reſidu ſixieſme, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, & l'vne ny l'autre n'eſt commenſurable en longitude à la rationelle A B. Et finalement A E pourra plus que D E, du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle. Soit coupée D E en deux egalement à F, & ſoit faict le reſte de la conſtruction comme auparauant. Donc comme en la 95. A G, G E ſeront incommenſurables en longitude.

Et

Et puis que tant AE, que DE, est rationelle incommensurable en longitude à la rationelle AB: [a] tant AI, que DI, & partant FI, moitié de DI sera medial. Et AH, GI, comme en la 95. seront incommensurables.



a 22.10.

Et d'autant que AE, DE, sont commensurables en puissance seulement: [b] AI, DI, qui sont en mesme raison, sont incommensurables, & DI, FI estans commensurables, [c] FI sera incommensurable à AI: maintenant nous monstrerons comme en la 92. Proposition, que TS, peut AC: & ie dis que TS, est celle qui auec vn medial, fait vn tout medial.

b 10.10.

c 14.10.

Car d'autant que AI est monstré medial, le composé des quarrez LM, NO, des droictes lignes TO, SO, egal à iceluy est medial. Item, FI estant monstré medial, SO son egal, contenu sous TO, SO est medial.

Derechef, FI estant incommensurable à AI, comme est monstré: LO, contenu sous TO, SO, sera incommensurable au composé des quarrez de TO, SO, puis que LO, est egal à FI, & le composé des quarrez de TO, SO, egal à AI. Finalement TO, SO, sont incommensurables en puissance, comme il est monstré en la 95. Donc puis que le composé de

leurs quarrez est modial, & le rectangle sous icelles medial, & incommensurable compose des quarrez
179.10. d'icelles, & la restante TS, est celle qui auec vn medial, faict vn tout medial. Donc si vn espace est contenu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

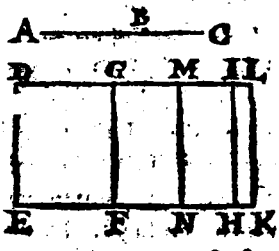
SCHOLIE.

Soit AB 6. AD 79.32. —— 79.20. DE sera 79.20. & DF, ou FE 79.5. Mais si à AE on applique vn rect. sous AG, GE, egal au q. de FE, & defaillant d'vne figure q. AG sera 79.8. p. 79.3. GB 79.8. —— 79.3. & partant AH sera 79.288. p. 79.108. GI 79.288. —— 79. 79. 108. & le tout AI 79.1152. Mais DI est 79.720. DK 79.18. & AC 79.1152. —— 79.720. residu sixiesme: & son costé sera trouué estre 79. (79.288. p. racine q. 108.) —— racine q. (racine q.288. —— racine q.108.

xcvij. xcij.

THEOREME 74. PROP. 98.

Le quarré d'vn residu appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude residu premier.



Soit AB residu, & BC sa contenable, en sorte que AC, BC,
45.1. soient rationelles commens. en puiss. seulement: & à DE, rationelle, soit appliqué le rect. DF, egal au q. de AB,

faisant

faisant la latitude D G. Ie dis que D G est residu premier.

Car à D E, soit appliqué le rectangle D H, egal au quarré de A C, & à H I soit appliqué I K, egal au quarré de B C, en sorte que le tout D K, soit egal au composé des quarrez de A C, C B.

Et [c] d'autant que le composé des quarrez de A C, B C, est egal à deux fois le rectangle sous A C, B C, & au quarré de A B, si l'on oste le quarré de A B, & le rectangle D F, le rectangle G K, demeurera egal à deux fois le rectangle sous A C, BC. Donc G L estant diuisée en deux egalement à M, & menée M N, parallele à D E; M K, sera egal au rectangle sous A C, B C. c 7. 2.

Et d'autant que A C, B C sont rationelles, leurs quarrez seront rationaux, & partant commensurables. [f] Donc puis que le composé des quarrez de A C, B C, est commensurable à chacun d'iceux, iceluy composé, c'est à dire son egal rectangle D K sera rationel, lequel estant appliqué à la rationelle D E, [g] D L sera rationelle commensurable en longitude à D E. f 16. 10. g 21. 10.

Derechef, puis que A C, B C, sont rationelles commens. en puiss. seulement, le rect. sous icelles, & son double G K est medial. Lequel estant appliqué à la rationelle G F, [h] G L sera rationel. incommens. en longit. à G F, c'est à dire à D E. Et d'autant que D K rationel, & G K medial, c'est à dire irrationel, sont incommens. D L, [i] G L, ayans mesme raison que D K, G K, seront incommens. en longit. Donc estans monstrées rationelles, elles seront rationelles commens. en puissance seulement: [k] partant D G restante, sera residu. Ie dis qu'elle est premiere. h 23. 10. i 10. 10. k 74. 10.

Lemme 4. 10. Car d'autant [l] que le rectangle sous A C, B C, c'est à dire M K, est moyen proportionel entre les quarrez de A C, B C, c'est à dire entre D K, I K: D H, M K, I K, sont continuellement proportionaux, & les lignes D I, M L, I L, continuellement
a 17. 6. proportionelles estás en mesme raison. [m] Parquoy le rectangle sous D I, I L est egal au quarré de M L, c'est à dire au quart du quarré de G L.

Et d'autant que les quarrez de A C, B C, ou
i 10. 10. leurs egaux D H, I K, sont commensurables, [n] D I, I L estans en mesme raison, seront commensurables en longitude. Partant D L, G L estans inegales, & à la plus grande est applique vn rectangle sous D I, I L, egal au quart du quarré de G L moindre, defaillant d'vne figure quarrée, & D I estant
o 18. 10. monstrée commensurable en longitude à I L, [o] D L pourra plus que G L, du quatré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude. Parquoy D G, estant monstrée residu, & la toute D L, pouuoit plus que G L, sa conuenable du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude: & que la mesme toute D L, est commensurable en longitude à la rationelle D E, par la definition D G sera residu premier. Donc le quarré d'vn residu applique à vne ligne rationelle, fait l'autre costé, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

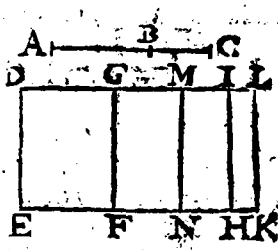
Soit A B 79.33. — 79.3. B C 79.3. D E rationelle, & à D E soit applique D H, egal au quarré de A C, qui est 33, faisant la latitude D I: D I sera 4. $\frac{1}{2}$. & si à icelle on applique I K, egal au quarré de C B, qui est 3, faisant la latitude I L; I L sera $\frac{1}{2}$. &

La toute D L 6. Derechef, ſi à D E on applique G N, qui eſt 7.99. faiſant la latitude G M; G M ſera 7. $\frac{1}{4}$ *2.* $\frac{1}{4}$ *& par meſme raiſon M L eſt 7.* $\frac{1}{4}$ *2.* $\frac{1}{4}$ *& la toute G L 7.11. Donc D G eſt 6.—7.11. reſidu premier.*

THEOREME 75. PROP. 99. 98. 93.

Le quarré d'vn reſidu Medial premier appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude reſidu ſecond.

Soit A B, reſidu medial premier, & B C ſa conuenable, de ſorte que A C, B C ſoient mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, & contenant vn rationel, & à D E rationelle, ſoit appliqué le rectangle D F, egal au quarré de A B, faiſant la latitude D G. Ie dis que D G eſt reſidu ſecond. 45. 1.



Car ſoit fait comme en la precedente: de ſorte que D H, I K, ſoient egaux aux quarrez de A C, B C, & G K, egal à deux fois le rectangle ſous A C, B C: & partant M K egal à vne fois iceluy rectangle. D'autant donc que A C, B C, ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, & leurs quarrez, c'eſt à dire leurs egaux D H, I K, mediaux & commenſurables: q 16. 10. q & partant le tout D K, ſera commenſ. à chacun r d'iceux: r donc medial. Et D K eſtant appliqué à la r *Coroll.* 2. 10.

23.10. rationelle D E, ſ D L ſera rationelle incommenſ. en longitude à D E.

Derechef, d'autant que le rectangle ſous A C, B C, eſt poſé rationel, le double d'iceluy G K, ſera auſſi rationel : lequel eſtant appliqué à la ratio-
21.10. nelle D E, ſ G L ſera rationelle commenſurable en longitude à D E.

Mais d'autant que D K medial, c'eſt à dire irrationel, & G K rationel, ſont incommenſurables,
10.10. ▾ D L, L G eſtans en meſme raiſon, ſeront incommenſurables en longit. Et eſtans monſtrées rationelles, D L, L G ſeront rationelles commenſura-
74.10. bles en puiſſ. ſeulement : ×& partant la reſtante D G eſt reſidu. Ie dis qu'elle eſt ſecond. Car comme en la precedente, on monſtrera que la toute D L, peut plus que la conuenable G L, du quarré d'vne ligne commenſurable à icelle en longitude. Partant G L eſtant monſtrée commenſurable en longitude à la rationelle D E, icelle D G, par la definition, ſera reſidu ſecond. Donc le quarré d'vn reſidu medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit A B 7qq.972. —— 7q.108. B C 7q.108. & D E rationelle ſoit 6. & ſi à D E on applique D H, egal au quarré de A C, qui eſt 7q.972. faiſant la latitude D I : D I ſera 7q.27. Et ſi à la meſme on applique I K, egal au quarré de C B 7q.108. faiſant la latitude I L : I L ſera 7q.3. & la toute D L 7q.48. Derechef, ſi à D E on applique G N, egal au rectangle ſous A C, C B, qui eſt 18. faiſant la latitude G M : G M ſera 3. & M L 3. & la toute G L 6. Donc D G eſt racine q.48. —— 6. reſidu ſecond.

THEO

THEOREME 78. PROP. 100.

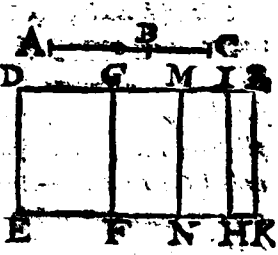
xcix. xciv.

Le quarré d'vn residu Medial second, appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude residu troisiesme.

Soit A B, residu medial second; & B C sa conuenable, en sorte que A C, B C, soient mediales commensurables en puissance seulement, & contenant vn medial; & à la rationelle D E, soit appliqué D F, egal au quarré de A B, faisant la latitude y D G. Ie dis que D G est residu troisiesme. Soit fait comme auparauant: l'on monstrera, comme en la precedente, que D K est medial, & partant D L, rationelle incommensurable en longitude à D E: & d'autant que le rect. sous A C, B C est medial, & partant le double d'iceluy, sçauoir G K, G L, sera aussi rationelle incommensurable en longitude à D E.

y 45.1.

z 23.10.



Mais d'autant que A C, B C, sont incommensurables en longitude, & comme A C, à B C, a ainsi le quarré de A C, au rectangle sous A C, B C; b le quarré de A C sera incommensurable au rectangle sous A C, B C. c Mais le composé des quarrez de A C, B C, est commens. au quarré de A C, estans iceux quarrez commensurables, descrits de lignes commens. en puiss. & d eux fois le rect. sous A C, B C, est commensurable

a *Lem.* 3. 19. 10.

b 10.10.

c 36.10.

audit rectangle, sous A C, B C.[d] Donc le composé des quarrez de A C, B C, c'est à dire D K, est incommensurable à deux fois le rectangle A C, B C, c'est à dire à G K.[e] Et partant D L, G L, estans semblement raison que D K, G K, sont incommensurables en longitude, & sont monstrées rationelles: donc D L, G L, sont rationelles commensurables en puissance seulement:[f] & partant D G restante, est residu. Ie dis qu'elle est troisiesme.

d *Sch.* 14. 10.

e 10.10.

f 74.10.

Car nous monstrerons, comme en la 98. que la toute D L, peut plus que G L sa conuenable, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude. Donc puis que D L, ny G L, n'est commensurable en longitude à la rationelle D E, comme il est monstré: D G sera residu troisiesme par la definition. Donc le quarré d'vn residu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer

SCHOLIE.

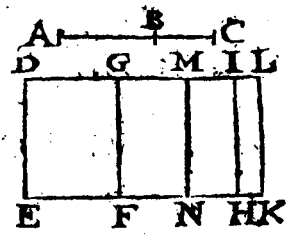
Soit A B racine qq. 882. —— racine qq. 18. B C racine qq. 18. & D E rationelle 6. Et si à D E on applique le rectangle D I, egal au quarré de A C, faisant la latitude D I; D I sera racine q. 24. $\frac{1}{2}$. & appliquant I K, egal au quarré de C B, faisant la latitude I L: I L sera racine q. $\frac{1}{2}$. & la toute D L racine q. 32. D'auantage, si à D E on applique G N, egal au rectangle sous A C, B C, qui est racine q. 126. faisant la latitude, G M, G M sera racine q. 3. $\frac{1}{2}$. & la toute G L racine q. 14. Donc D G est racine q. 32. —— qq. 74. residu troisiesme.

THEO

THEOREME 77. PROP. 101. 100. 95.

Le quarré d'vne ligne Mineure, appliqué à vne latitude rationelle; fait la latitude, residu quatrieſme.

Soit la ligne mineure AB, & ſa conuenable BC, de ſorte que AC, BC ſoient incommenſurables en puiſſance, faiſans le compoſé de leurs quarrez rationel, & le rectangle ſous icelles AC, BC, medial: & à la rationelle DE, ſoit appliqué l'eſpace DF, egal au quarré de AB, faiſant la latitude DG. Ie dis que DG eſt reſidu quatrieſme. Soit fait comme aux precedentes. 45.1.



D'autant que le compoſé des quatrez des AC, BC, c'eſt à dire DK, leur egal eſt rationel: DL, ſera rationelle commenſurable en longitude à DE. Et puis que le rectangle ſous AC, BC, & partant le double d'iceluy GK eſt medial, [h] GL ſera rationelle incommenſurable en longitude à DE. g 21.10. h 23.10.

Derechef, d'autant que DK rationelle, & GK irrationel, ſçauoir medial, ſont incommenſurables, [i] DL, GL eſtans en meſme raiſon, ſont incommenſurables en longitude. Et eſtans monſtrées rationelles, DL, GL ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: [k] partant DG reſtante, eſt reſidu. Ie dis qu'elle eſt reſidu quatrieſme. Car i 10. 10. k 74. 10.

A C, B C, eſtans incommenſurables en puiſſance, leurs quarrez ou leurs egaux rect. D H, I K ſeront
10. 10. incommenſurables: [1] & partant D I, I L incommenſurables en longitude. Et puis que le rectangle ſous D I, I L, eſt egal au quarré de M L, c'eſt à dire au quart du quarré de G L, comme eſt demonſtré
m 19.10. en la 98. D L, [m] pourra plus que G L, du quarré d'vne ligne incommenſurable en longit. à icelle: puis qu'à D L plus grande, eſt appliqué le rectangle ſous D I, I L, egal au quart du quarré de G L, moindre, & defaillant d'vne figure quarrée, & diuiſant D L en parties incommenſurables en longitude D I, I L. Donc puis que D L totale, peut plus que la conuenable G L, du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle, & la toute D L eſt monſtrée commenſurable en longitude à la rationelle D E: par la definition D G ſera reſidu quatrieſme. Partant le quarré d'vne ligne mineure, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

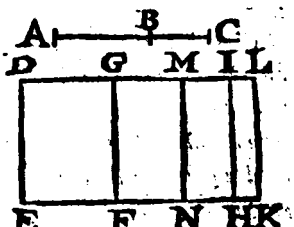
Soit A B 7 9. (7 9. 21. p. 7 9. 315.) —— 7 9. (7 9. 21. p. 7 9. 315.) B C 7 9. (7 9. 21. —— 7 9. 315.) mais la rationelle D E ſoit 6. Et à D E appliquant D H, egal au quarré de A C, faiſant D I, latitude D I ſera 3. $\frac{1}{2}$. p. 7 9. 8. $\frac{1}{4}$. & ſi on applique I K, egal au quarré de C B, faiſant I L, latitude I L ſera 3. $\frac{1}{2}$. —— 7 9. 8. $\frac{1}{4}$. & la toute D L 7. Et ſi à D E on applique G N, egal au rectangle ſous A C, C B, ſçauoir à 7 9. 126. faiſant G M, latitude G M ſera 7 9. 3. $\frac{1}{2}$. & la toute G L, 7 9. 14. Donc D G eſt 7. —— 7 9. 14. reſidu quatrieſme.

THEO

THEOREME 78. PROP. 102. c1. 96.

Le quarré d'vne ligne, laquelle auec vn espace Rationel, faict vn tout Medial, appliqué à vne ligne Rationelle, fait la latitude, residu cinquiesme.

Soit A B, faisant auec vne superficie rationelle, vn tout medial, & sa conuenable B C, en sorte que A C, B C, soient incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles rationel: [n] & à D E rationelle, soit appliqué D F, egal au quarré de A B, faisant D G, latitude. Ie dis que D G, est residu cinquiesme. n 45. 1.



Car soit faict comme cy-deuant. D'autant que le composé des quarrez de A C, B C, ou son egal D K est medial: [o] D L, sera rationelle incommensurable en longitude à D E. Et d'autant que le rectangle sous A C, B C, ou le double d'iceluy, G K est rationel: [p] G L sera rationelle commensurable en longitude à D E. o 23. 10. p 21. 10.

Et d'autant que D K, medial ou irrationel, & G K rationel, sont incommensurables, [q] D L, G L, ayans mesme raison, seront incommensurables en longitude: mais elles sont monstrées rationelles. q 10. 10.

les. Donc D L, G L, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement : [r] Donc la reſtante D G eſt reſidu. Ie dis qu'elle eſt cinquieſme. Car comme en la precedente, on monſtrera que D L, toute, peut plus que G E, commenſurable du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle. Donc puis que la commenſurable G L, eſt monſtrée commenſurable en longitude à la rationelle D E, par la definition D G ſera reſidu cinquieſme. Donc le quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

r 74.10.

SCHOLIE.

Soit A B racine q. (racine q. 288. p. racine q. 207.) —— racine q. (racine q. 288. —— racine q. 207.) B C racine q. (racine q. 288. —— racine q. 207.) Et D E rationelle ſoit 6. ſi à D E on applique D H, egal au quarré de A C, faiſant D I, latitude, D I ſera racine q. 8. p. racine q. 5. $\frac{1}{4}$ & appliquant I K egal au quarré de C B, faiſant I L latitude, I L ſera racine q. 8. —— racine q. 5. $\frac{1}{4}$. & la toute D L, racine q. 32. Derechef, ſi à D E on applique G N, egal au rectangle ſous A C, C B faiſant G M latitude, G M ſera 1 $\frac{1}{2}$. & la toute G L 3. Parquoy D G, eſt racine quarrée 32. —— 3. reſidu cinquieſme.

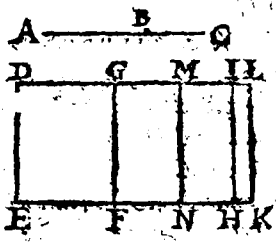
cinq. 97.

THEOREME. 79. PROP. 105.

Le quarré d'vne ligne faiſant auec vn eſpace Mediał, vn tout Medial, appliqué à vne

vne ligne Rationelle, fait la latitude, residu sixiesme.

Soit A B, faisant auec vn medial, vn tout medial, & soit B C, sa conuenable, en sorte que A C, B C, soient incommensurables en puissance, faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles medial & incommensurable au composé de leurs quarrez: [f] & à D E rationelle, soit appliqué D F, egal au quarré de A B, faisant D G, latitude. Ie dis que D G est residu sixiesme. Soit fait comme aux precedentes. [f 45.1.]



D'autant que tant le composé des quarrez de A C, B C, ou D K son egal, que le rectangle sous A C, B C, & partant le double d'iceluy G K, est medial: [t] tant D L, que G L, sera rationelle incommensurable en longitude à D E. Et le rectangle sous A C, B C estant incommensurable au composé des quarrez d'icelles A C, B C: & le rectangle sous A C, B C, & le double d'iceluy G K, commensurables, [v] G K, sera incommensurable à iceluy composé, c'est à dire à D K. Et [x] partant D L, G L ayans mesme raison que D K, G K seront incommensurables en longitude, & elles sont monstrées rationelles: donc D L, G L, sont rationelles commensurables en puissance seulement: [y] Partant D G, est residu. Ie dis qu'elle est sixiesme. [t 23. 10.] [v 14. 10.] [x 10. 10.] [y 74. 10.]

Car, comme en la 101. nous monstrerons que la

la route D L, peut plus que la conuenable G L, du quarré d'vne ligne incommensurable en longitude à icelle. Donc puis que D L, ny G L, n'est commensurable en longitude à la rationelle D E : par la definition D G sera residu sixiesme : dont le q. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit A B γq. (γq. 396. *p.* γq. 288.) —— γq. (γq. 396. —— γq. 288.) *B C* γq. (γq. 396. —— γq. 288.) *& la rationelle D E 6. appliquant à D E, le rectangle D H, egal au quarré de A B, faisant D I latitude, D I sera* γq. 11. *p.* γq. 8. *& appliquant I K, egal au quarré de C B, faisant I L latitude, I L sera* γq. 11. —— γq. 8. *& la toute D L sera* γq. 44. *Derechef, appliquant à C D, le rectangle G N egal au rectangle sous A C, C B, faisant & M latitude, G M sera racine quarrée 5. & la toute G L racine quarrée 12. Donc D G est racine quarrée 44.* —— γq. 12. *residu sixiesme.*

ciij. 98.

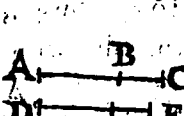
THEOREME 88. PROP. 104.

La ligne droicte commensurable en longitude à vn residu, est aussi residu & de mesme ordre.

Soit A B residu, & B C, sa conuenable, en sorte que A C, B C, soient rationelles commensurables en puissance seulement, & soit D E, commensurable en longitude à A B. Ie dis que D E est residu, & de mesme ordre que A B.

Car

Car soit comme A B, à D E, [a] ainsi B C, à E F. [a] Donc la toute A C, sera à la toute D F, ainsi comme A B, à D E, ou B C, à E F. D'autant donc que A B, D E sont posées commensurables en longitude, [b] A C, D F, & B C, E F, seront aussi commensurables en longitude. Et d'autant que A C, B C, sont rationelles, leurs commensurables D F, E F, seront rationelles.



z 12.6.
à 12.5.
b 10.10.

Derechef, d'autant que comme A C, à D F, ainsi B C, à E F; & en permutant comme A C, à B C, ainsi D F, à E F: [c] & A C, B C sont commensurables en puissance seulement: Donc D F, E F, seront aussi commensurables en puissance seulement: & estans monstrées rationelles, [d] la restante D E est residu. Le dis qu'elle est de mesme ordre que A B. Car premierement, que A C, puisse plus que B C, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle. Cela estant [e] D F, pourra plus que E F, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle. Donc si A C, est commens. en longitude à la rationelle exposée, afin que A B soit residu premier, D F sera aussi commens. en longit. à la rationelle exposée, puis que tant la rationelle exposée, que D F est commens. en long. à la mesme A C. Donc par la definition D E sera residu premier, sçauoir de mesme ordre que A B. Mais si B C est commens. en longit. à la rationelle, en la mesme façon E F sera commensurable en longitude à la rationelle: partant l'vne & l'autre A B, D E, par la definition, sera residu second.

c 10.10.
d 74.10.
e 15.10.
12.10.

Finalement, si l'vne ny l'autre A C, B C, n'est commensurable en longitude à l'exposée ratio-

f 14.10. nelle,[f] aussi l'vne ny l'autre D F, E F, ne sera commensurable en longitude à la mesme rationelle. Donc tant l'vne que l'autre A B, D E, sera residu troisiesme par la definition.

Maintenant que A C, puisse plus que B C, du quarré d'vne ligne incommensurable en longitude à icelle. Cela estant [g] D F, pourra plus que E F, du quarré d'vne ligne qui luy sera incommensurable en longitude. Parquoy nous monstrerons, comme auparauant, que D E est residu quatriesme, cinquiesme ou sixiesme : Donc la ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

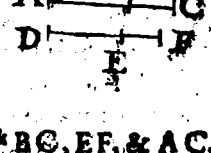
g 15.10.

civ. 99. THEOREME 81. PROP. 105.

La ligne droicte commensurable à vn residu Medial, est aussi residu Medial, & de mesme ordre.

Soit A B residu, & B C sa conuenable, en sorte que A C, B C soient mediales, commensurables en puissance seulement ; & soit D E commensurable à icelle. Ie dis que D E est aussi residu, & de mesme ordre que A B.

Car comme A B, est à D E, [h] ainsi B C, soit à E F. Donc la toute A C, sera à la toute D F, comme A B, à D E, & B C, à E F. D'autant donc que A B, D E sont posées commensurables, [k] B C, E F, & A C, D F, seront aussi commensurables. Et A C, B C [l] estans mediales : D F, [l] E F, commensurables à icelles.



h 81.6. 12.5.

k 10.10.

l 24.10.

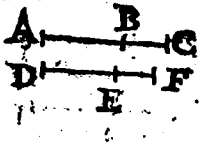
icelles, seront aussi mediales. Derechef, A C, estant à D F, comme B C, à E F, & en changeant comme A C à B C, ainsi D F, à E F : mais A C, B C sont commensurables en puissance seulement ; [m] Donc D F, E F, seront commensurables en puissance seulement. Parquoy D F, E F estans monstrées mediales, [n] la restante D E sera residu medial. Ie dis qu'elle est de mesme ordre que A B. Car puis que comme A C, à B C, ainsi D F à E F. Et comme [o] A C, à B C, ainsi le quarré de A C, au rectangle sous A C, B C. Et comme D F, à E F, ainsi le quarré de D F, au rectangle sous D F, E F : Donc comme le quarré de A C, au rectangle sous A C, B C, ainsi le quarré de D F, au rectangle sous D F, E F : & en changeant, comme le quarré de A C, au quarré de D F, ainsi le rectangle sous A C, B C, au rectangle sous D F, E F : Donc le quarré de A C, estant commensurable au quarré de D F, A C, D F, estans monstrées commensurables, [p] le rectangle sous A C, B C, sera commensurable au rectangle sous D F, E F. Donc si le rectangle sous A C, B C est rationel, de sorte que A B soit residu medial premier ; le rectangle sous D F, E F, commensurable à iceluy, sera aussi rationel : [q] & partant D E sera residu medial premier. Mais si le rectangle sous A C, B C est medial, en sorte que A B, soit residu medial second, le rectangle sous D F, E F, commensurable à iceluy [r] sera aussi medial : [s] partant D E sera residu medial second. Donc la ligne droicte commensurable au residu medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

m 10.10.
n 75.10.
ou 76.
o *Lemme* 3.19.10.
p 10.10.
q 75.10.
r 24.10.
s 76.10.

civ. 99. THEOREME 82. PROP. 106.

La ligne droicte, commensurable à vne ligne Mineure, est aussi ligne Mineure.

Soit la ligne mineure A B, & B C sa conuenable: de sorte que A C, B C soient incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez A C, B C, rationel, & le rectangle sous A C, B C medial: & soit D E, commensurable à A B. Ie dis que D E est mineure.



Car soit fait comme auparauant, en sorte que A B, B C, ayent mesme raison à D E, E F, que A C, à D F, comme en la precedente, D F, E F seront commensurables à A C, B C, soit en longitude & puissance, ou en puissance seulement. Et puis que comme A C, à D F, ainsi B C, à E F, & en changeant comme A C à B C, ainsi D E à E F: comme le quarré de A C, au quarré de B C: ainsi le quarré de D F, au quarré de E F, & en composant, comme le composé des quarrez de A C, B C, au quarré de B C, ainsi le composé des quarrez de D F, E F, au quarré de E F: & en permutant comme le composé des quarrez de A C, B C, au composé des quarrez de D F, E F, ainsi le quarré de B C, au quarré de E F. Mais le quarré de B C, est commensurable au quarré de E F: B C, E F, estans monstrées commensurables. Donc le composé

z 22. 6.

v 10. 10.

composé des quarrez de A C, B C, est commensurable au composé des quarrez de D F, E F. Mais les composé des quarrez de A C, B C, est posé rationel; x Donc le composé des quarrez de D F, E F est rationel. x 9. def.

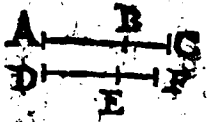
Derechef, comme il est monstré en la precedente Proposition, le rectangle sous A C, B C, est commensurable au rectangle sous D E, E F: mais le rectangle sous A C, B C, est posé medial: y Donc le rectangle sous D F, E F, sera aussi medial. Et puis que comme A C à B C, ainsi D F, à E F: & A C, B C sont incommensurables en puissance, D F, E F seront aussi incommensurables en puissance. Partant D F, E F estans incommensurables en puissance, & faisans le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle sous icelles medial: z D E sera mineure. Donc la ligne droicte commensurable, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. y *Coroll.* 24. 10. z 10. 10. a 77. 10.

THEOREME 83. PROP. 107. cvij.

La ligne droicte commensurable à vne ligne, laquelle auec vn espace Rationel, faict vn tout Medial, est aussi ligne faisant auec vn espace Rationel, vn tout Medial.

Soit A B, faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, & B C conuenable à icelle, de sorte que A C, B C soient incommensurables en puissance, & fassent le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles rationel: &

soit D E, commensurable à A B, comment que ce soit. Ie dis que D E faict auec vn espace rationel vn tout medial.



Car ayant fait la construction comme auparauant, on monstrera comme en la precedente Proposition, que le composé des quarrez de A C, B C, est commensurable au composé des quarrez de D F, E F; donc celuy-là estant posé medial, celuy-cy sera aussi medial.

b Coroll. 24. 10.

Derechef, comme en la 105. Proposition, on monstrera que le rectangle sous A C, B C, est commensurable au rectangle sous D F, E F: donc celuy-là estant posé rationel, cettuy-cy sera aussi rationel. Et finalement, comme il est monstré en la precedente Proposition, D F, E F, sont incommensurables en puissance, parquoy D F, E F, estans incommensurables en puissance, & faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles rationel: d D E sera auec vn espace rationel, vn tout medial. Ce qu'il falloit demonstrer.

c 9. def.

d 78. 10.

cvij. cij.

THEOREME 84. PROP. 108.

La ligne droicte commensurable à vne ligne, laquelle auec vn espace Medial, faict vn tout Medial, icelle est aussi ligne faisant auec vn espace Medial, vn tout Medial.

Soit

Soit A B, faisant auec vne superficie mediale, vn tout medial : & B C conuenable à icelle, en sorte que A C, B C, soient incommens. en puiss. faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles medial, & incommens. au composé de leurs quarrez. Et soit D E commens. à A B, comment que ce soit. Ie dis que D E, auec vn espace medial, faict vn tout medial.

Car ayant faict la construction comme auparauant : on monstrera comme en la Prop. 106. que le composé des quarrez de A C, B C, est commensurable au composé des quarrez de D F, E F. Donc le composé des quarrez de A C, B C estant posé medial : [c] celuy des quarrez de D F, E F sera aussi medial. [c] *Coroll. 24. 10.*

Derechef, comme en la 105. on monstrera que le rectangle sous A C, B C, est commensurable au rectangle sous D F, E F ; donc celuy-là estant medial, cettuy-cy sera aussi medial. Et comme en la 106. D F, E F seront aussi incommensurables en puissance.

Finalement, d'autant que le composé des quarrez de D F, E F est commensurable au composé des quarrez de A C, B C, comme il est dit : & le rectangle sous D F, E F est commensurable au rectangle sous A C, B C. Mais le composé des quarrez de A C, B C, & le rectangle sous A C, B C sont posez incommensurables. [f] Donc le composé des quarrez de D F, E F, & le rectangle sous D F, E F, seront incommensurables. Parquoy D F, E F estans incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez : [g] D E faict auec vn espace medial, vn tout [f] *Sch. 14. 10.* [g] *79. 10.*

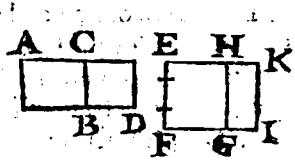
tout medial. Donc la ligne droicte commenſurable à vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

cviij. ciij. **THEOREME 85. PROP. 109.**

Si vn eſpace Medial eſt retranché d'vn Rationel, la ligne droicte qui peut le reſte de l'eſpace, eſt vne de ces deux Irrationelles ; ſçauoir Reſidu ou Mineure.

De la ſuperficie ou eſpace rationel A D, ſoit retranché le medial C D. Ie dis que la ligne qui peut le reſte A B, eſt reſidu ou mineure.

Car, ſoit expoſée E F rationelle, [h] à laquelle ſoit appliqué le rectangle E G, egal à A B, & à G H, le rectangle H I, egal à C D : de ſorte que le tout E I, ſoit egal au tout A D. D'autant donc que E I, egal à A D rationel, eſt rationel : [i] E K ſera rationelle commenſurable en longitude à E F rationelle.



h 45. 1.

i 21. 10.

Derechef, d'autant que H I, egal à C D medial, eſt medial : H K ſera rationelle incommenſurable en longitude à E F. Parquoy E K eſtant commenſurable en longitude à E F : mais H K, incommenſurable en longitude à la meſme E F, [k] E K, H K ſeront incommenſurables en longitude ; & eſtans rationelles, elles ſeront rationelles commenſura-

k 23. 10. 13. 10.

bles

bles en puiſſance ſeulement : [l] & partant le reſte EH eſt reſidu, & HK conuenable à icelle : donc EK peut plus que HK, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, ou incommenſurable. l 74. 10.

Si EK peut plus que HK, du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude, la toute EK eſtant auſſi monſtrée commenſurable en longitude à EF rationelle : par la definition EH ſera reſidu premier. Parquoy la ligne pouuant l'eſpace EG, contenu ſous EF rationelle, & le reſidu premier EH ; c'eſt à dire l'eſpace AB, egal à iceluy, [m] eſt reſidu. Mais ſi EK peut plus que HK du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude. La toute EK eſtant monſtrée commenſurable en longitude à EF rationelle : ſelon la definition EH ſera reſidu quatrieſme. Partant la ligne pouuant l'eſpace EG, contenu ſous EF rationelle, & EH reſidu quatrieſme, c'eſt à dire l'eſpace AB egal à iceluy, [n] eſt mineure. Donc ſi vn eſpace medial eſt oſté d'vn rationel, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. m 92. 10. n 93. 16.

clx.
clv.

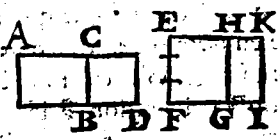
THEOREME 86. PROP. 110.

Si vne ſuperficie Rationelle eſt retranchée d'vne Mediale, il ſe faict deux autres Irrationelles, ſçauoir, ou vn Reſidu Medial premier, ou vne ligne faiſant auec vn eſpace Rationel, vn tout Medial.

C'eſt à dire, que la ligne pouuant le reſte de l'eſpace, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vn rationel, vn tout medial.

Du medial A D, ſoit retranché le rationel C D. Ie dis que la ligne pouuant l'eſpace reſtant A B, peut eſtre, ou reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vn eſpace rationel vn tout medial. Soit faicte la meſme conſtruction qu'auparauant. D'autant que E I egal au medial A D, eſt medial, p 23.10. p E K ſera rationelle incommenſurable en longitude à E F.

Et d'autant que H I, égal au rationel C D, q 21.10. eſt rationel : q H K rationel commenſurable en longitude à E F: Donc H K eſtant commenſurable en longitude à E F : mais E K incommenſurable en longitude à la meſme E F : r H K, E K ſeront incommenſurables en longitude, & ſont rationelles. Elles ſont donc rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement : f 74.10. Donc le reſte E H eſt reſidu, & H K conuenable à icelle: Donc E K, peut plus que H K, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, ou incommenſurable, ſi commenſurable, & la conuenable H K eſtant monſtrée commenſurable en longitude à E F rationelle, par la definition E H ſera reſidu ſecond. Donc la ligne pouuant l'eſpace E G, contenu ſous E F rationelle, & E H reſidu ſecond, c'eſt à dire A B egal à iceluy, t 93.10. eſt reſidu medial premier. Mais ſi E K peut plus que H K,



r 13.10.

du

du quarré d'vne ligne incommensurable en longitude à icelle, la conuenable HK estant monstrée commensurable en longitude à EF rationelle: EH sera residu cinquiesme par la definition. Donc la ligne pouuant l'espace EG, contenu sous EF rationel, & le residu cinquiesme EH, c'est à dire AB, egal à iceluy, v est la ligne, qui auec vn rationel, fait vn tout medial. Donc vn espace, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. v 96. 10.

THEOREME 87. PROP. 111. cx. cv.

Si vne superficie Mediale est retranchée d'vne superficie Mediale, incommensurable à la toute: il se faict deux autres Irrationelles: sçauoir vn residu Medial second, ou vne ligne faisant auec vne superficie Mediale, vn tout Medial.

C'est à dire, que la ligne pouuant le reste de l'espace, est residu medial second; ou ligne faisant auec vn espace medial, vn tout medial. Voyez la figure precedente.

Soit le medial CD, osté du medial AD, & incommensurable au tout AD. Ie dis que la ligne pouuant l'espace restant AB, est residu medial second; ou ligne faisant auec vne superficie mediale, vn tout medial.

Car ayant faict la mesme construction qu'auparauant, d'autant que EI, HI egaux aux mediaux AD, CD sont mediaux, x EK, HK seront rationelles incommensurables en longitude à EF, & x 23. 10.

A D, C D, c'eſt à dire E I, H I, eſtans poſez incommenſurables : E K, H K ayans meſme raiſon ſeront incommenſurables en longitude, & ſont rationelles : donc elles ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement : partant E H reſtante eſt reſidu, & H K eſt commenable à icelle. Donc E K peut plus que H K, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, ou incommenſurable.

10. 10.

74. 10.



Si du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude, l'vne & l'autre E K, H K, eſtant monſtrée n'eſtre commenſurable en longitude à E F rationelle, ſelon la definition E H ſera reſidu troiſieſme.

94. 10.

Parquoy la ligne pouuant l'eſpace E G, contenu ſous la rationelle E F, & le reſidu troiſieſme E H, c'eſt à dire A B, egal à iceluy, eſt reſidu medial ſecond. Mais ſi E K peut plus que H K, du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle, l'vne ny l'autre E K, H K n'eſtant commenſurable en longitude à E F rationelle, comme il eſt demonſtré par la definition, E H ſera reſidu ſixieſme : Donc la ligne pouuant E G, contenu ſous E F rationelle, & E H reſidu ſixieſme ; c'eſt à dire, A B egal à iceluy, eſt celle laquelle auec vn eſpace medial, faict vn tout medial. Partant vne ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

97. 10.

THEO

THEOREME 88. PROP. 112. cxj. cvj.

La ligne appellée Apotome ou Residu, n'est pas la mesme que la ligne de deux noms ou Binome.

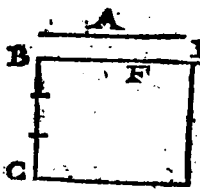
Soit A, residu quelconque. Ie dis que A n'est pas la mesme que le binome.

Car soit A binome, s'il est possible, & ayant exposé la rationelle B C, [a] soit appliqué à B C, le rectangle C D, egal au quarré de A. D'autant donc que A est residu, [b] la latitude B D sera residu premier. Soit donc D E conuenable à icelle: donc par la definition du residu premier, B E, D E seront rationelles commensurables en puissance seulement, & B E pourra plus que D E, du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude, & B E sera commensurable en longitude à B C rationelle.

a 45.1.

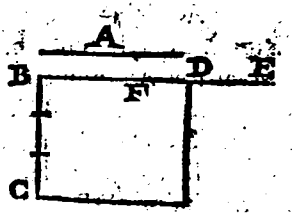
b 98.10.

Derechef, A estant aussi posée estre binome, [c] la mesme latitude B D sera binome premier. Soit B F son plus grand nom. Donc par la definition du binome premier B F, F D sont rationelles commensurables en puissance seulement, & B E, pourra plus que F D, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle, & B F sera commensurable en longitude à la rationelle B C. Donc tant B E, que B F, estans commensurables



c 61.10.

d 12.10. mensurables en longitude à B C: d B E, B F seront aussi commensurables en longitude entr'elles. Parquoy la toute B E estant commensurable en longitude à sa partie B F, la mesme B E sera aussi Cor. 16. 10. commensurable en longitude à l'autre partie F E: & partant B E estant rationelle, F B sera aussi rationelle.



Et d'autant que des deux B E, F E, commensurables en longitude, B E est incommensurable en longitude à D E; (B E, D E estant rationelles commen-

e 14.10. surables en puissance seulement,) e la restante F E sera incommensurable en longitude à la mesme D E. Mais tant F E que D E est monstrée rationelle: Donc F E, D E sont rationelles commensurables en puissance seulement: parquoy la restante

f 74.10. F D, f est residu, & partant irrationelle: mais elle est aussi monstrée rationelle. Ce qui est absurde. Donc A estant residu, n'est pas la mesme que bihome, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Des choses demonstrées l'on pourra colliger, que le residu, & les autres irrationelles suiuantes icelle residu, ne sont ny mediales, ny mesmes entr'elles.

Car le quarré d'vne mediale appliqué à vne ra-

g 23.10. tionelle, g fait la latitude rationelle, incommens. en longit. à la rationelle proposée.

Mais

Mais le quarré du reſidu, appliqué à vne ligne rationnelle, [h] faict la latitude, reſidu premier. h 98.10.

Et le quarré du reſidu medial premier, appliqué à vne ligne rationelle, [i] faict la latitude, reſidu ſecond. i 99.10.

Mais le quarré du reſidu medial ſecond, appliqué à vne ligne rationelle, [k] faict la latitude, reſidu troiſieſme. k 100.10.

En apres, le quarré de la mineure, appliqué à vne ligne rationelle, [l] faict la latitude, reſidu quatrieſme. l 101.10.

Mais le quarré d'vne ligne, laquelle auec vn eſpace rationel, faict vn tout medial, appliqué à vne ligne rationelle, [m] fait la latitude, reſidu cinquieſme. m 102.10.

Finalement, le quarré d'vne ligne, qui auec vn eſpace medial, faict vn tout medial, [n] appliqué à vne ligne rationelle, faict ſa latitude, reſidu ſixieſme. n 103.10.

Partant, ces latitudes eſtans differentes de la latitude de la mediale, & entr'elles; de la latitude mediale (dis-je) puis que celle-cy eſt rationelle, & celles-là irrationelles: Mais entr'elles; d'autant qu'elles ne ſont pas reſidus de meſme ordre: il eſt manifeſte, que le reſidu & les autres irrationelles ſuiuantes, different entr'elles, & de la mediale.

Mais d'autant qu'il eſt monſtré en ce Theoreme, que le reſidu n'eſt la meſme que le binome: Et que les quarrez du reſidu, & des autres 5. irrationelles ſuiuantes appliquées à vne ligne rationelle, ſont les latitudes, reſidu premier, ſecond, troiſieſme, quatrieſme, cinquieſme & ſixieſme:

Mais

Mais les quarrez du binome & des autres 5. irrationelles ſuiuantes, appliquez à vne ligne rationelle, ſont les latitudes binome 1.2.3.4.5.& 6. Il eſt manifeſte, que les latitudes du reſidu, & des autres 5. irrationelles ſuiuantes, ne ſont pas les meſmes que les latitudes, des binomes, & des 5. autres irrationelles ſuiuantes: d'autant qu'aucun reſidu n'eſt la meſme que quelque binome. Donc le reſidu & les ſuiuantes different du binome & de ſes ſuiuantes. Parquoy, tant celles-là, que celles-cy, different de la mediale: De ſorte que quelconque ligne rationelle eſtant propoſée, il y aura 13. lignes irrationelles differentes entr'elles, deſquelles nous auons diſcouru iuſques icy, qui ſont les ſuiuantes.

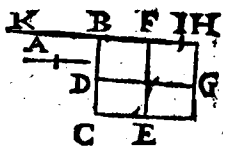
1. La ligne Mediale.
2. La ligne Binome ou de deux noms.
3. La Bimediale premiere.
4. La Bimediale ſeconde.
5. La ligne Majeure.
6. La ligne pouuant vn Rationel & vn Medial.
7. La ligne pouuant deux Mediaux.
8. Le reſidu ou apotome.
9. Le reſidu Medial premier.
10. Le reſidu Medial ſecond.
11. La ligne Mineure.
12. La ligne faiſant auec vne ſuperficie Rationelle vn tout Medial.
13. La ligne faiſant auec vne ſuperficie Mediale, vn tout Medial.

THEOREME 89. PROP. 113. cxiij. c.

Le quarré d'vne ligne Rationelle eſtant appliqué à vne ligne Binome, faict la latitude reſidu, de laquelle les noms ſont commenſurables, & proportionaux aux noms du Binome, & en outre le reſidu eſt de meſme ordre que le Binome.

Soit A rationelle, & B C binome, dont le plus grand nom eſt B D: & à B C ſoit appliqué le rectangle B E egal au quarré de A, faiſant B F latitude. Ie dis que B F eſt reſidu, de laquelle les noms, c'eſt à dire la ligne totale & ſa conuenable ſont commenſurables aux noms B D, D C, de B C binome, & en meſme raiſon: & d'auantage B F reſidu, eſt de meſme ordre que B C binome. o 45. 1.

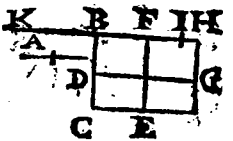
Car p derechef, à D C moindre nom, ſoit appliqué C G egal au quarré de A, & partant à B E, faiſant D G latitude, & ſoit B H, egale à D G. Et B E, C G eſtans egaux, comme B C ſera à D C, ainſi D G, ou ſon egale B H, à B F. Et en diuiſant, comme B D à D C, ainſi H F à F B; mais B D eſt plus grande que D C: Donc H F ſera plus grande que F B. Soit poſée F I, egale à F B: Et ſoit comme H I à I F, ainſi F B, à B K: Donc en compoſant H I, ſera à I F, p 45. 1. 14. ou 16. 6. 12. 6.



ou

ou à son egale F B, comme F K à B K. Mais comme H F à B F, ainsi B D est monstrée à D C. Donc aussi comme B D sera à D C, ainsi F K à B K. Mais B D, D C (noms du binome B C) sont ratio-
q 10. 10. nelles commensurables en puissance seulement: q Donc F K, B K sont commensurables en puissance seulement.

Derechef, H F, estant à B F, comme F K à B K:
r 12. 5. r les antecedentes H F, F K ensemble, sçauoir H K toute, sera à F B, B K consequentes: c'est à dire, à F K toute, comme F K, à B K: partant F K est
s *Cor.* 20. 6. moyenne proportionelle entre H K, B K. s Donc comme H K premiere, à B K 3. ainsi le quarré de H K 1. au quarré de F K 2.



Mais d'autant que C G rationel (estant egal au quarré de A rationelle, appliqué à D C rationel-
t 21. 10. le, t faict la latitude D G rationelle commensurable en longitude à D C; H B egale à D G, sera aussi rationelle commensurable en longitude à D C: Et estant monstré que comme B D à D C, ainsi F K est à B K. Mais comme F K à B K, ainsi H K à F K; aussi comme B D sera à D C, ainsi H K, à F K:
v 22. 6. v Donc comme le quarré de B D, au quarré de D G, ainsi le quarré de H K, au quarré de F K. Mais le quarré de B D, est commensurable au quarré de D C; (B D, D C, noms de B C binome, estans rationelles commensurables en puissance.)
x 10. 10. x Donc le quarré de H K sera aussi commensurable au quarré de F K. Mais comme le quarré de
y 10. 10. H K, au quarré de F K, ainsi H K à B K; y donc H K

est commensurable en longitude à B K. [z] Et par- [z] Corol.
tant au reste B H : Mais B H est monstrée ratio- 16. 10.
nelle : donc H K commensurable à icelle est ratio-
nelle : Et partant B K commensurable à H K, est
rationel, Donc F K estant monstrée commensura-
ble en puissance seulement à B K ; F K sera aussi
rationelle ; donc F K, B K estans rationelles, &
monstrées commensurables en puissance seule-
ment. [a] Le reste B F sera residu, & B K sera conue- [a] 74. 10.
nable à icelle. Ce qui est premierement proposé.

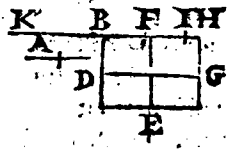
Mais d'autant que la toute H K est monstrée
commensurable en longitude à sa partie B K, [b] B K, [b] 16. 10.
B H seront commensurables en longitude : donc
B H estant monstrée commensurable en longitu-
de à D C, B K sera aussi commensurable en longi-
tude à D C, comme il appert par la 12. Proposi-
tion du 10.

Et estant monstré que comme B D, à D C, ainsi
F K, à B K, & en permutant comme B D à F K, ainsi
D C à B K ; mais D C, B K sont monstrées com-
mensurables en longitude : [c] Donc B D, F K seront [c] 10. 10.
aussi commensurables en longitude : donc F K
estant commensurable en longitude à B D, & B K
à D C ; F K, B K noms du residu, B F seront com-
mensurables en longitude à B D, D C, noms de
B C binome. Ce qui est secondement proposé.

Item, estant demonstré que comme B D est à
D C, ainsi F K, à B K : F K, B K, noms du residu,
seront en mesme raison que B D, D C, noms de
B C, binome. Ce qui est tiercement proposé.

Finalement, B D peut plus que D C, du quarré
d'vne ligne commensurable en longitude à icelle,
ou incommensurable. Si elle peut plus du quarré

d'vne ligne commenſurable en longitude à icelle, B D eſtant à D C, comme E K à B K, [d] F K pourra auſſi plus que B K, du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude. Et ſi B D peut plus que D C, du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle, [e] F K pourra plus que B K, du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle. Et ſi B D eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſée, F K monſtrée commenſurable en longitude à B D, ſera auſſi commenſurable en longitude à la meſme rationelle, comme il appert par la 12. Propoſition 10. Mais ſi D C eſt commenſurable en longitude à la rationelle, B K, par la meſme raiſon ſera commenſurable en longitude à la meſme rationelle. Et finalement, ſi B D, ny D C n'eſt commenſurable en longitude à la rationelle, [f] F K, ny B K ne ſera auſſi commenſurable en longitude à la rationelle propoſée. Donc B F reſidu, eſt de meſme ordre que B C binome, comme il appert par les ſecondes & troiſieſmes definitions. Ce qui eſt quartement propoſé. Partant le quarré d'vne ligne rationelle appliqué, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



d 15.10.

e 15.10.

f 14.10.

SCHOLIE.

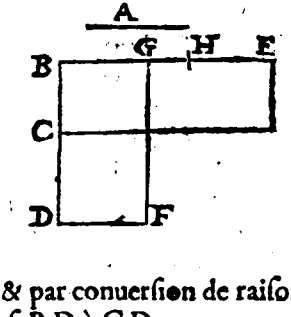
L'on pourra auſſi, ſans aucune difficulté, appliquer cecy aux nombres, entendant ce qui a eſté dit cy-deuant.

THEO

THEOREME 90. PROP. 114. cxiij.

Le quarré d'vne ligne Rationelle appliqué à vn residu, faict la latitude binome, dont les noms sont commensurables aux noms du residu, & en mesme raison & en outre le binome est de mesme ordre que le residu.

Soit A rationelle, & B C residu, à laquelle conuienne C D, *g* & à B C, soit appliqué le rectangle C E, egal au quarré de A, faisant la latitude B E. Ie dis que B E est binome, dont les noms sont commensurables à B D, C D, noms du residu B C, & en mesme raison, & B E binome, de mesme ordre que B C residu. *g* 45. 1.



Car soit aussi appliqué à B D totale, le rectangle B F, egal au quarré de A, c'est à dire à C E, faisant B G latitude. D'autant que B F, C E, sont egaux, *h* comme B E sera à B G, ainsi B D à B C: & par conuersion de raison, comme B E à G E, ainsi B D à C D. *h* 14. ou 16. 6.

Soit aussi coupée E G *i* à H, selon la raison de B E, à G E, afin que E H soit à H G, comme B E à G E. Mais comme B E toute, à G E toute, ainsi E H retranchée de B E, à H G, retranchée de G E: B H, *i* 10. 6.

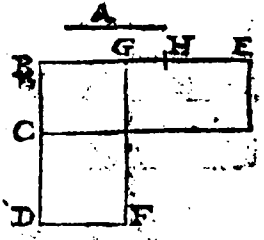
reſte de B E, ſera auſſi à H E, reſte de G E, comme la toute B E, à la toute G E.

Mais comme B E eſtoit à G E, ainſi E H, à H G; donc auſſi comme B H, ſera à H E, ainſi E H, à G H; partant H E eſt moyenne proportionelle entre B H, G H: [k] parquoy comme B H, premiere, à G H troiſieſme, ainſi le quarré de B H premiere, au quarré de H E ſeconde: mais comme B D à C D, ainſi B E à G E: c'eſt à dire B H, à H E: Et B D, C D, noms du reſidu B C, eſtans rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, [l] B H, H E, ſont auſſi commenſurables en puiſſance, & partant les quarrez de B H, H E commenſurables. Donc B H, G H, eſtans en meſme raiſon que les quarrez de B H, H E, comme il eſt demonſtré, ſont commenſurables en longitude. Et la toute B H eſtant commenſurable en longitude à ſa partie G H, [m] elle ſera auſſi commenſurable en longitude à l'autre partie B G.

k Corol. 20. 6.

l 10. 10.

m Corol. 16. 10.



Mais B D eſtant rationelle, ſçauoir plus grand nom du reſidu B C, & le rectangle B F rationel, eſtant egal au quarré de A rationelle, [n] ſa latitude B G ſera rationelle commenſurable en longitude à B D. Donc [o] B H eſt commenſurable en longitude à la meſme rationelle B D. Et partant eſt rationelle, B H, B G eſtans monſtrées commenſurables en longitude.

n 21. 10.

o 12. 10.

Et puis que B H, H E ſont monſtrées commenſurables

surables en puissance seulement, & B E rationelle, H E commensurable à icelle, est aussi rationelle. Donc B H, H E, sont rationelles commensurables en puissance seulement : p donc B E est binome. Ce qui est premier. p 37.10.

Mais estant monstré que B H, est à H E, comme B D à C D, & en changeant B H à B D, comme H E, à C D, mais B H estant monstrée commensurable en longitude à B D: q H E sera aussi commensurable en longitude à C D, parquoy B H, H E, noms de B E binome, sont commensurables en longitude à B D, C D, noms du residu B C. Ce qui est secondement proposé. q 10.10.

Ils sont aussi en mesme raison, estant demonstré que B H est à H E, comme B D à C D. Ce qui est tiercement proposé.

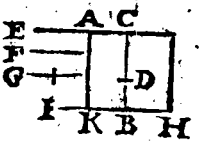
Finalement, ou B D, peut plus que C D, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, ou incommensurable : si commensurable, B H pourra aussi plus que H E, du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude: & si incommensurable, elle pourra plus du quarré d'vne ligne qui luy sera incommensurable en longitude : & si B D est commensurable en longitude à la rationelle exposée, r B H le sera aussi, estant commensurable en longitude à B D commensurable en longitude à la rationelle. Mais si C D est commensurable en longitude à la rationelle : H E par la mesme raison, le sera aussi. Si l'vne ny l'autre B D, C D, n'est commensurable en longitude à la rationelle, aussi s B H, ny H E, ne luy sera commensurable en longitude. Donc par les secondes & troisiesmes definitions, B E est binome de mesme ordre que B C, residu. Ce qui 15.10. r 12.10. s 14.10.

eſtoit quatrieſmement propoſé. Donc le quarré d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

cxvj. Q. THEOREME 91. PROP. 115.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vn reſidu, & ſous vne ligne appellée Binome, de laquelle les noms ſont commenſurables aux noms du reſidu, & en meſme raiſon; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt Rationelle.

Soit l'eſpace A B, contenu ſous A C reſidu, & ſous C B binome, dont les noms C D, D B ſont commenſurables aux noms C E, A E, du reſidu A C, & en meſme raiſon, ſçauoir C D à D B, comme C E à A E: & que F puiſſe l'eſpace A B. Ie dis que F eſt rationelle.



Car ayant expoſé la rationelle G, [t 45.1.] ſoit appliqué à C B binome, le rectangle C H, egal au quarré de G: [v 113.10.] donc la latitude B H ſera reſidu. Dont les noms H I, B I ſont commenſurables en longitude aux noms C D, D B, & en meſme raiſon, ſçauoir H I, à B I, comme C D à D B; & partant, comme C E à A E: & eſt permutant comme la toute H I, à la toute C E: ainſi la retranchée B I, à la retranchée A E: [x 19.5.] Donc la reſtante B H, ſera la reſtante A C, comme la toute H I, à la toute C E. Mais H I, eſt

commen

commensurable en longitude à C E ; tant H I, que C E estant commensurable en longitude à C D. * z 10.10. Donc B H est commensurable en longitude à A C: & partant H C est commensurable à B A : H C estant à B A, comme H B à A C. Mais H C estant egal au quarré de la rationelle G, est rationel. Donc B A commensurable à iceluy, sera rationel. Partant, F pouuant iceluy, sera rationelle. Donc si vn espace est contenu sous vn residu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

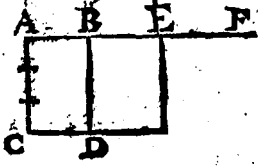
De cecy est manifeste, qu'vn espace rationel peut estre contenu sous deux lignes irrationelles: Car A B, contenu sous A C, C B, residu & binome, qui sont irrationelles, est monstré rationel.

THEOREME 92. PROP. 116.

cxv. cxvij.

De la ligne Mediale se font infinies Irrationelles, & aucune n'est la mesme que quelqu'vne des antecedentes.

Soit A B mediale. Ie dis que d'icelle sont faictes infinies irrationelles, aucune desquelles n'est la mesme que quelqu'vne des 13. antecedentes, dont est fait mention.



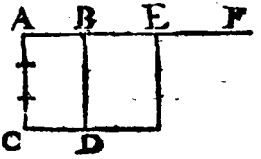
Cor. 112. 10.

Car la rationelle A C estant proposée, soit l'espace A D, contenu sous A B mediale, & A C rationelle. [a] Donc A D, contenu sous A C rationelle, & A B irrationelle, est irrationel. Soit B E pouuant iceluy espace A D : [b] B E sera irrationelle. Ie dis que B E n'est aucune des 13. [c] deuant dites.

a *Lem.* 8. 10.
b 11. d.
c Corol. 112. 10.

Car puis que le quarré de la mediale appliqué à A C rationelle, [d] faict la latitude rationelle, incommensurable en longitude à A C, & les quarrez des autres 12. Irrationelles, appliquez à A C rationel font les latitudes, ou binomes, ou residus, comme il appert par les Propositions 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 101. 102. & 103. de ce liure.

d 23. 10.



Mais le quarré de cette irrationelle B E, appliqué à la mesme rationelle A C, fait la latitude, A B mediale. Il est manifeste que B E irrationelle, differe de toutes ces 13. Puis que son quarré appliqué à vne ligne rationelle, faict la latitude differente des latitudes faictes par les quarrez de ces 13. lignes, appliquez à la mesme rationelle. Que si on accomplit le rectangle D E, contenu sous B D rationelle, & B E irrationelle, [e] iceluy sera irrationel. Soit donc E F pouuant iceluy, [f] qui sera irrationelle.

e *Lem.* 38. 10.
f 11. d.

Ie dis derechef, que E F n'est mesme qu'aucune des 13. susdites, ny mesme aussi que B E ; ce qui est manifeste, puis que le quarré de E F, appliqué à la rationelle, fait la latitude B E. Mais les quarrez d'icelles 13. & aussi le quarré de B E, appliquez à la mesme

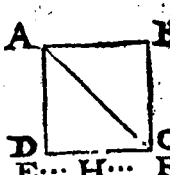
meſme rationelle, ſont les latitudes differentes à B E, comme il eſt demonſtré. Semblablement, on trouuera infinies autres irrationelles differentes entr'elles, & des ſuſdites. Partant, de la mediale ſe font infinies irrationelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit A C 2. & A B racine qq. 2. A D rectangle, ſera racine qq. 32. Donc B E pouuant iceluy, ſera racine qqq. 32. parquoy le rectangle D E ſera racine qqq. 512. & E F racine qqqq. 512. & ainſi de ſuitte infiniment.

THEOREME 93. PROP. 117. cxviij. vij.

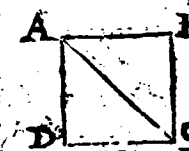
Qu'il nous ſoit propoſé de monſtrer, qu'aux figures quarrées, le diametre eſt incommenſurable en longitude au coſté.



Soit le quarré A B, C D, dont le diametre eſt A C. Ie dis que A C diametre, eſt incommenſurable en longitude au coſté A B.

Car autrement, il ſeroit commenſurable en longitude à A B: & partant A C, A B ſeroient entr'eux comme nombre à nombre. Soit A C, à A B, comme le nombre E F, au nombre G. Et ſoient E F & G, les plus petits de leur raiſon. Donc A C eſtant à A B, comme E F à G, le quarré de A C, ſera gl. 10.

ſera auſſi au quarré de A B, comme le nombre
h 20. 6. quarré de E F, auſſi nombre quarré de G: h (car les
quarrez eſtans en raiſon doublée de leurs coſtez,
11.8. & les coſtez ayans egales raiſons; les raiſons des
47.1. quarrez ſeront auſſi egales, eſtans doublées d'egales raiſons.) Mais le quarré de A C eſt double, du quarré de A B: (A B, B C eſtans egaux.) Donc le quarré du nombre E F, ſera double du quarré du nombre G. Et partant le quarré de E F ayant vne moitié, & ſe pouuant donc diuiſer en deux egale-
29. 9. ment, ſera pair par la definition. Donc E F qui le produit ſera auſſi pair: (car s'il eſtoit impair, & ſe multipliant ſoy-meſme, il produit ſon quarré, iceluy quarré ſeroit auſſi impair, puis qu'vn nombre impair multipliant vn nombre impair, produit vn nombre impair, ce qui eſt abſurde; car il eſt mon-
14. 7. ſtré pair:) Mais E F & G eſtans les plus petits de leur raiſon, ſont premiers entr'eux: & E F eſtant monſtré pair, G ſera impair: (car s'il eſtoit auſſi pair, le binaire meſureroit E F & G, & partant ne ſeroient premiers entr'eux: ce qui eſt
11. 8. abſurde.) Maintenant ſoit diuiſé le nombre pair E F en deux egalement à H. D'autant donc que E F eſt double de E H, & les quarrez ſont en raiſon doublée de leurs coſtez, le quarré de E F ſera quadruple du quarré de E H. (Car la proportion quadruple eſt doublée de la proportion double, comme il appert par ces nombres. 4. 2. 1.) partant le quarré de E F eſtant double du quarré de G, & quadruple du quarré de E H, le quarré de E F eſt de quatre telles parties



egales,

egales, que le quarré de G en eſt 2. & le quarré de E H 1. Donc le quarré de G eſt double du quarré de E H, eſtant comme 2. à 1. Et partant comme il a eſté dit du nombre E F, le quarré de G ayant vne moitié ſera pair, & iceluy G auſſi pair. Mais il eſt auſſi monſtré impair : ce qui eſt abſurde. Donc le diametre A C n'eſt commenſurable en longitude au coſté A B. Partant incommenſ. en longitude.

Autrement, s'il eſt poſſible, ſoit le diametre A C commenſ. en longit. au coſté A B : & que A C, A B ſoient entr'eux comme les nombres E F & G, qui ſoient les plus petits de leur raiſon ; & partant premiers entr'eux. Donc G ne ſera l'vnité : (car le q. de A C eſtant double du q. de A B : & comme le q. de A C au q. de A B, ainſi le q. du nombre E F, au q. du nombre G, comme il eſt dit en la premiere demonſtration, le q. de E F ſera auſſi double du q. de G. Si donc G eſt l'vnité, & partant ſon q. auſſi l'vnité, le q. de E F ſera binaire : ce qui eſt abſurde) partant nombre.

Et d'autant que comme il eſt deſia monſtré, le q. de E F eſtant double du q. de G, le q. de G meſurera le q. de E F : & partant G coſté, meſurera E F coſté. Donc G meſurant auſſi ſoy-meſme, E F & G, ſeront compoſez entr'eux, ayans G pour commune meſure : mais ils ſont auſſi premiers entr'eux : ce qui eſt abſurde. Donc le diametre A C n'eſt commenſ. en longit. au coſté A B. Partant nous auons monſtré qu'aux figures quarrées le diametre eſt incommenſurable en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 14.8.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Cette proposition se peut aussi ainsi demonstrer.

47. 1. *Le quarré de AC, estant double du quarré de AB, & vne grandeur double d'vne autre, estant à cette autre comme 2. à 1. ou 4. à 2. &c. le quarré de*
Corol. 24. 8. *AC sera au quarré de AB, comme 2. à 1. ou 4. à 2. &c. qui n'est comme nombre quarré à nombre quarré*
9. 10. *parquoy le diametre AC, & le costé AB, sont incommensurables en longitude. Donc, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.*

47. 1. *Soit AB 1. AC sera racine quarrée 2. Donc la raison du costé du quarré au diametre sera comme 1. à 2. sçauoir incommensurable en longitude.*

FIN DV DIXIESME LIVRE des Elements d'Euclide.

LIVRE

LIVRE ONZIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

Et le premier des Solides:

DEFINITIONS.

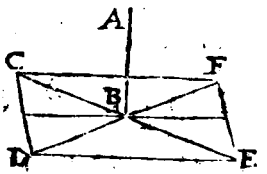
1. SOLIDE, eſt ce qui a longueur, largeur & profondeur.

2. Mais les termes du ſolide ſont ſuperficies.

3. Vne ligne droicte eſt eſleuée à angles droicts ſur vn plan, quand elle faict angles droicts, auec toutes les lignes droictes qui la touchent, au meſme plan propoſé.

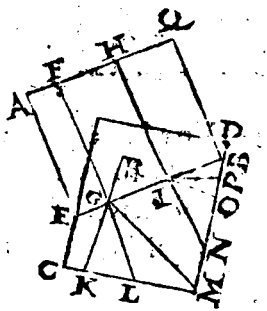
Soit la ligne droicte A B, eſleuée ſur le plan C D E F, & du poinct B ſoient menées tant de lignes

que l'on voudra au meſme plan ; B C, B D, B E, B F, faiſans les angles C B A, D B A, E B A, F B A, droits : nous dirons que la ligne droicte A B eſt perpendiculaire, ou eſleuée à angles droicts, au plan propoſé.



4. Vn plan eſt eſleué perpendiculairement ſur vn plan, quand toutes les lignes menées ſur l'vn d'iceux plans à angles droicts, à la ligne de commune ſection, ſont à angles droicts à l'autre plan.

Soit le plan A B, droict eſleué ſur le plan C D, en ſorte que la ligne A Q ſoit en l'air, & ſoit B E leur commune ſection, & en icelle prins les poincts G & I, & menées G F, I K, perpendiculaires à E B commune ſection : ſi F G, H I, ſont perpendicures à l'autre plan C D : c'eſt à dire, ſi elles ſont angles droicts, auec G K, G L, G M,

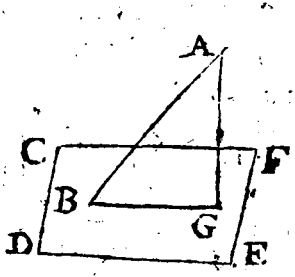


IN,

IN, IO, IP, &c. le plan A B, ſera à angles droicts au plan, C D n'eſtant encliné de part ny d'autre.

Car K G eſtant prolongée à R, & l'angle F G K eſtant poſé droict, F G R ſera droict auſſi: & ainſi des autres, &c. Parquoy le plan A B, ſera à angles droicts au plan C D. Et quand vn plan eſt à angles droicts à quelqu'autre, auſſi les lignes perpendiculaires menées en l'vn d'iceux à la commune ſection, ſeront auſſi perpendiculaires à l'autre plan.

5. L'inclination d'vne ligne droicte à vn plan, eſt l'angle contenu ſous icelle, & vne autre ligne droicte menée au plan de l'inclinante, par le poinct auquel tombe vne ligne droicte perpendiculaire, menée du ſommet de l'inclinante ſur iceluy plan.



Soit la ligne droicte A B, inclinée au plan C D E F, & du poinct du ſommet A, ſoit menée vne ligne perpẽdiculaire, ſçauoir A G, & ſoit conioincte B G, l'angle agu A B G, ſera l'inclination de la ligne A B, au plan C D E F.

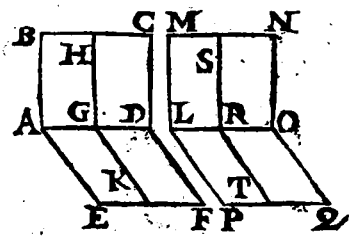
6. L'in

6. L'inclination d'vn plan à vn autre est l'angle agu, contenu sous les lignes droictes menées sur l'vn & l'autre plan à angles droicts à la ligne de commune section, & à vn poinct d'icelle, lesquelles ne sont point perpendiculaires entr'elles.

Voyez la figure suiuante.

Soient deux plans inclinez l'vn sur l'autre A B C D, E A D F, dont la commune section est A D, & en icelle ayant pris quelconque poinct G, & d'iceluy mené les droictes lignes G H, G K, en l'vn & l'autre plan à angles droicts, à A D; l'angle H G K sera l'inclination du plan A C, au plan A D E F.

7. Vn plan est dit estre semblablement incliné à vn plan, & vn autre à vn autre, quand les angles susdits des inclinations sont egaux entr'eux.



Soient deux plans A B C D, E A D F, inclinez entr'eux; & deux autres L M N O, P L O Q, aussi inclinez l'vn à l'autre; & que les angles d'inclination H G K, S R T, soient

d'inclination H G K, S R T, soient egaux, l'inclination du plan A C, au plan A F, sera dite semblable à l'inclination du plan L N, au plan L Q.

SCHOLIE.

Le Copiste a mis ainsi cette definition : Vn plan est dit estre semblablement incliné à vn plan, lors que les susdits angles d'inclination sont egaux entr'eux, *laissant ces mots d'Euclide :* ἡ ἑτερον, πρὸς ἕτερον, *&c. c'est à dire,* & vn autre à vn autre. *Ce qu'il ne devoit faire, attendu que l'inclination de deux plans n'est pas dite semblable, qu'entant qu'elle est comparée à l'inclination de deux autres.*

8. Plans paralleles, sont ceux lesquels ne se rencontrent point, estans prolongez.

9. Semblables figures solides sont celles-là lesquelles sont contenuës sous semblables plans, egaux en nombre.

10. Egales & semblables figures solides, sont celles qui sont contenuës de plans semblables, egaux en multitude & grandeur.

11. Angle solide, est la rencontre de plus de deux lignes droictes, se touchantes à vn poinct, & n'estant en vne mesme

ſuperficie, ſe faiſant inclination à toutes les lignes.

AVTREMENT.

Angle ſolide, eſt celuy qui eſt contenu ſous plus de deux angles plans, ſe rencontrans à vn meſme poinct, & n'eſtans en vne meſme ſuperficie.

12. Pyramide eſt vne figure ſolide, contenuë de pluſieurs plans, ſe rencontrans ou terminans à vn meſme poinct, eſtans menez d'vn autre plan, qui eſt pour la baſe de la Pyramide.

13. Priſme eſt vne figure ſolide contenuë de plans, deux deſquels, qui ſont oppoſez, ſont egaux, ſemblables & paralleles, mais les autres ſont parallelogrammes.

14. Sphere eſt vne figure contenuë, quand vn demy cercle eſt mené à l'entour d'vn diametre demeurant fixe, iuſques à ce qu'il ſoit poſé derechef, où il a commencé de mouuoir.

C'eſt à dire, que la Sphere eſt vne figure ſolide, contenuë de la ſuperficie deſcrite, par la reuolution d'vn demy-cercle, mené à l'entour d'vn diametre, fixe

fixe ou immobile, iusques à ce qu'il soit retourné au poinct où il a commencé son mouuement.

SCHOLIE.

Le Copiste a mis ainsi cette definition, qui estoit desia traduite de mesme : Sphere est vne figure contenuë par le demy-cercle, lors que son diametre, &c. *Ce qui est fort mal traduit, puis que le demy-cercle est vne figure plane, qui ne contient aucun corps solide, comme est la Sphere, & ce qui ne correspond aussi au texte d'Euclide, qui est tel.* Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡ μικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν, τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιενεχθὲν σχῆμα. C'est à dire, la Sphere est vne figure *solide*, contenu *de la superficie descrite*, lors qu'vn demy-cercle est mené à l'entour d'vn diametre, demeurant immobile iusques à ce qu'il soit restitué, ou reuienne derechef où il a commencé de mouuoir.

Et quiconque entendra bien les definitions precedentes, & la suitte du discours d'Euclide, trouuera qu'il le faut ainsi traduire, & qu'Euclide mesme l'entend ainsi, &c.

15. L'axe de la Sphere, est la ligne droicte fixe, à l'entour de laquelle se meut ou tourne le demy-cercle.

16. Mais le centre de la Sphere est le mesme que celuy du demy-cercle.

17. Le Diametre de la Sphere est vne ligne droicte menée par le centre, & se terminant de part & d'autre en la superficie de la Sphere.

18. Cone est la figure qui est contenuë, quand l'vn des costez qui contiennent l'angle droict d'vn triangle rectangle demeurant fixe, le triangle est mené à l'entour, iusques à ce qu'il retourne au lieu où il a commencé de mouuoir. Et si la ligne droicte immobile est egale à l'autre costé, qui est meu à l'entour de l'angle droict, le Cone sera rectangle; si elle est moindre il sera Amblygone; & si elle est plus grande, il sera Oxygone.

C'est à dire, le Cone est vn solide, contenu sous la superficie, descrite par vn triangle rectangle, quand iceluy triangle est mené à l'entour de l'vn des costez qui contiennent l'angle droict, iceluy costé demeurant fixe, iusques à ce que ledit triangle soit reuenu où il a commencé son mouuement.

19. L'axe du Cone, est la ligne droicte immobile, à l'entour de laquelle tourne ou se meut le triangle.

20. Mais la base du Cone, est le cercle descrit par l'autre costé, mené à l'entour.

Sçauoir

Sçauoir par l'autre des deux qui contiennent l'angle droict.

21. Cylindre eſt la figure qui eſt contenuë, quand l'vn des coſtez d'vn parallelogramme rectangle, de ceux qui ſont autour d'vn angle droict, demeurant immobile, le parallelogramme eſt mené à l'entour, iuſques à ce qu'il ſoit conſtitué derechef où il a commencé de mouuoir.

C'eſt à dire, le Cylindre eſt vn ſolide contenu ſous la ſuperficie deſcrite, par la reuolution d'vn parallelogramme rectangle, mené à l'entour de l'vn des coſtez qui contiennent vn angle droict, iceluy coſté demeurant fixé, iuſques à ce qu'il ſoit reuenu où il a commencé ſon mouuement.

22. L'axe du Cylindre, eſt la ligne droicte immobile, à l'entour de laquelle eſt mené le parallelogramme.

23. Mais les baſes du Cylindre ſont les cercles deſcrits des deux coſtez oppoſez, menez à l'entour.

24. Cones & Cylindres ſemblables, ſont ceux, deſquels les axes & les diametres des baſes ont meſme proportion entr'eux.

25. Le Cube eſt vne figure ſolide contenuë ſous ſix quarrez egaux.

26. Le Tetraedre eſt vne figure ſolide contenüe ſous quatre triangles egaux & equilateres.

27. L'Octaedre eſt vne figure ſolide, contenüe ſous huict triangles egaux & equilateres.

28. Le Dodecaedre eſt vne figure ſolide, contenüe ſous douze pentagones egaux, equilateres & equiangles.

29. L'Icoſaedre eſt vne figure ſolide, contenüe ſous vingt triangles egaux & equilateres.

30. Parallelipipede eſt vne figure ſolide, contenüe ſous ſix figures quadrilateres, deſquelles les oppoſées ſont paralleles.

31. Vne figure ſolide eſt dite eſtre inſcrite en vne figure ſolide, quand tous les angles de la figure inſcrite ſont conſtituez, ou aux angles, ou aux coſtez, ou finalement aux plans de la figure, en laquelle elle eſt inſcrite.

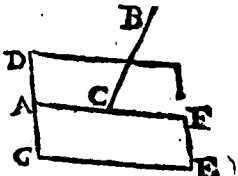
32. Recipro

32. Reciproquement, vne figure solide est dite estre circonscrite à vne figure solide, quand les angles ou les costez, ou finalement les plans de la figure circonscrite, touchent tous les angles de la figure, à l'entour de laquelle elle est descrite.

THEOREME 1. PROP. 1.

Vne partie d'vne ligne droicte ne peut estre en vn plan proposé, & vne partie en l'air.

Car soit la ligne droicte A B, vne partie de laquelle, sçauoir A C, soit sur le plan D E, & l'autre partie C B soit en l'air, s'il est possible, & soit menée C F.



D'autant donc que A C, partie de A B, ligne droite est posée sur le plan D E, & l'autre partie C B demeure en l'air, la partie du plan D E, sçauoir de C à F, sera plus basse ou plus deprimée que l'autre partie, sçauoir de A à C: partant, la superficie D E, ne sera pas contenuë egalement entre ses lignes. Ce [a] qui est absurde, estant posée D E superficie plane. Donc vne ligne droite n'aura pas vne partie sur vn plan, & l'autre en l'air, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [a] 7. d. 1.

Autrement, soit, s'il est possible, vne partie de la

ligne droicte A B, ſçauoir A C, ſur le plan propoſé
14.1. D E, & l'autre partie C B en l'air. Donc au plan D E, il y aura quelque ligne droicte, poſée directement à A C, comme C F. Parquoy les deux lignes droictes A B, A F, ont vn commun ſegment A C:
b 10. c.ſ. 1. b Ce qui eſt abſurde. Donc vne partie d'vne ligne droicte n'eſt pas ſur vn plan, & l'autre en l'air. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

C'eſt icy la commune demonſtration de tous les Interpretes, en laquelle A B eſtant poſée ligne droicte, l'aduerſaire pourra touſiours nier, & à bon droict, que la partie A C, puiſſe eſtre directement prolongée à autre poinct qu'à B. Parquoy l'on ſera contraint de ſe ſeruir de la definition du plan, comme nous auons faict en noſtre demonſtration.

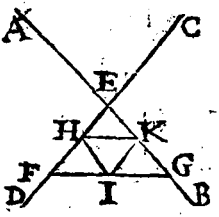
Le Copiſte dit, que A B, ne ſeroit pas ligne droicte, ſans en donner aucune raiſon.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si deux lignes droictes ſe coupent l'vne l'autre, elles ſont en vn meſme plan. Et tout triangle eſt en vn meſme plan.

Que A B, C D, ſe coupent l'vne l'autre à E: & en E B, E D, ayant pris les poincts F & G, comme l'on voudra, ſoit menée F G, pour faire le triangle E F G. Ie dis que le triangle E F G eſt en vn meſme plan. Item, que A B, C D, ſont auſſi en vn meſme plan.

Car



Car si quelque partie du triangle E F G, sçauoir E H I G, est en vn plan, & quelque partie, sçauoir la restante F H I est en l'air; ou au contraire, E H, G I, parties de E F, G F, seront aussi en vn plan: Mais les autres parties H F, I F, seront en l'air; ou au contraire, ce qui est demonstré impossible. Que si E F I K, partie du mesme triangle, est dite estre en vn mesme plan: mais l'autre partie G I K en l'air, ou au contraire, par la mesme raison E K, F I, parties de E G F G, seront en vn plan: mais les parties K G, I G, seront en l'air, ou au contraire. c 1. 11.

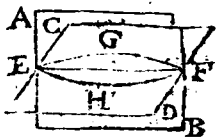
Finalement, si F H K G, partie du mesme triangle est accordée estre en vn plan; & l'autre partie E H K en l'air, ou au contraire F H, G K, parties de F E, G E, seront aussi en vn mesme plan, & les autres parties H E, K E, en l'air, ou au contraire: ce qui est absurde,[d] comme il est demonstré. Partant, le triangle E F G est en vn mesme plan, & ainsi de tout autre triangle. d 1. 11.

Mais d'autant que E F, E G, costez du triangle E F G, sont au mesme plan qu'iceluy: [e] Mais C D, A B totales, sont au mesme plan que E F, E G: donc A B, C D seront en vn mesme plan, sçauoir en celuy auquel nous auons demonstré estre le triangle E F G. Donc si deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. e 1. 11.

THEOREME 3. PROP. 3.

Si deux plans ſe coupent l'vn l'autre, la commune ſection d'iceux eſt vne ligne droicte.

Que les plans A B, C D, ſe coupent l'vn l'autre, & ſoit E F, leur commune ſection. Ie dis que E F, eſt ligne droicte.



Car, s'il n'eſt ainſi, ſoit menée la droicte ligne E G F, au plan A B, & au plan C D, la droicte ligne E H F. Donc E G F, E H F, lignes droictes ayans meſ-
f 12. c. 1. mes termes, E & F encloent vne ſuperficie : f Ce qui eſt abſurde. Donc E F commune ſection, ſera ligne droicte. Partant ſi deux plans ſe coupent l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

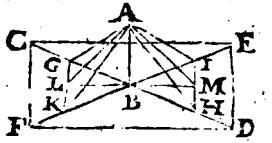
THEOREME 4. PROP. 4.

Si deux lignes droictes ſe coupent l'vne l'autre, & au poinct de leur commune ſection eſt menée vne autre ligne droicte à angles droicts, elle ſera auſſi à angles droicts ſur le plan d'icelles.

Soit A B à angles droicts, ſur C D, E F, menée du poinct de leur commune ſection. Ie dis que A B eſt auſſi à angles droicts au plan ou ſont menées C D, E F.

Car,

Car, puis qu'elles se coupent à B : & elles seront en vn mesme plan, qui soit C E D F. Soient prises B G, B H, egales entr'elles, & aussi B I, B K, & menées G K, I H, & au mesme plan soit menée par le poinct B ; L M coupans G K, I H à L & M : & du poinct A en l'air, soient menées au mesme plan les lignes droictes A G, A L, A K, A H, A M, A I. g 2. 11.



D'autant donc que les costez B G, G K, du triangle B G K, sont egaux par la construction à B H, B I, du triangle B H I : h & les angles G B K, H B I, contenus d'iceux, sont egaux au sommet B, i les bases G K, H I, seront egales entr'elles, & les angles B K G, B I H, egaux aussi entr'eux. h 15. 1. i 4. 1.

Derechef, K B L, I B M, estans egaux au sommet B, les deux angles K B L, B K L, du triangle B K L, seront egaux aux deux I B M, B I M, du triangle B I M, & les costez adjacens B K, B I, sont aussi egaux par la construction ; Donc les deux autres costez K L, L B, sont egaux aux deux autres I M, M B, chacun au sien. 15. 1.

Dauantage, les costez A B, B G, du triangle A B G, estans egaux à A B, B H, du triangle A B H, par la construction, & les angles contenus d'iceux A B G, A B H egaux, estans posez droicts : k les bases A G, A H seront egales : & par mesme discours A I, A K egales. k 4. 1.

En apres, les costez A I, I H, du triangle A I H, estans egaux à A K, K G, du triangle A K G, & les bases A H, A G, monstrées egales : l les angles A I H, 18. 1.

A K G

A K G contenus d'iceux coſtez ; ſeront egaux. Partant les coſtez A K, K L, eſtans egaux à A I, I M, & les angles A K L, A I M, contenus d'iceux, n 4.1. monſtrez egaux : [n] les baſes A L, A M, ſeront egales.

Finalement, les coſtez A B, B L, du triangle A B L, eſtans egaux à A B, B M, du triangle A B M: n 8. 1. & les baſes A L, A M, monſtrées egales : [n] les angles A B L, A B M, contenus d'iceux coſtez, ſeront b 10. d. 1. auſſi egaux & droicts [o] eſtans de ſuitte : Donc A B, p 3. d. 11. faict angles droicts auec L M, [p] laquelle touche icelle à B, au plan propoſé.

Par meſme raiſon on monſtrera que A B, faict angles droicts auec toutes les lignes droictes qui la touchent au poinct B, au meſme plan. Et ainſi on pourra prendre ſur ledit plan tant de lignes qu'on voudra, qui feront angles droicts auec icelle, la rencontrant à B, par les raiſons que deſſus. q 3. d. 11. Partant [q] A B, ſera à angles droicts au plan C E D F, mené par C D, E F. Donc ſi deux lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

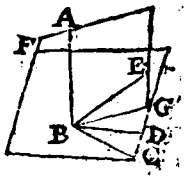
THEOREME 5. PROP. 5.

Si à trois lignes droictes ſe touchantes l'vne l'autre, vne autre ligne droicte eſt conſtituée à angles droicts au poinct de la commune ſection ; Icelles trois lignes droictes ſont en vn meſme plan.

Soit la ligne droicte A B à angles droicts, aux trois B C, B D, B E ſe touchantes à B, & menée du poinct B ; qui eſt leur commune ſection. Ie dis qu'icelles

qu'icelles B C, B D, B E ſont en vn meſme plan.

Car [r] puis que deux, quelles que l'on voudra, ſont en vn meſme plan, puis qu'eſtans prolongées de la part de B, elles ſe couperont l'vne l'autre à B : ſoient B C, B D en vn meſme plan F C : &, s'il eſt poſſible, B E ne ſoit au meſme plan, mais eſleuée en l'air : [t] Mais A B, B E eſtans en vn meſme plan, puis qu'elles ſe coupent à B, ſoient toutes deux au plan A E. r 1. 11. t 2. 11.



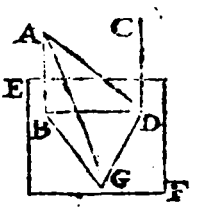
Et d'autant que les plans F C, A E, ſe rencontrent l'vn l'autre à B, eſtans prolongez ils ſe couperont neceſſairement. [v] Soit donc la ligne droicte B G, leur commune ſection : d'autant que A B eſt poſée à angles droicts à B C, B D : [y] elle ſera auſſi à angles droicts au plan F C, mené par icelles : [z] & partant ſera auſſi à angles droicts à B G, qui touche icelle à B. Parquoy les angles droicts A B E, A B G, eſtans au plan A G, mené par A B, B E, ſeront egaux entr'eux, la partie & le tout, ce qui eſt abſurde. Donc les deux lignes B C, B D, eſtans en vn meſme plan F C ; B E, ne ſera eſleuée en l'air, mais en meſme plan qu'icelles : Partant, ſi à trois lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. v 3. 11. y 4. 11. z 3. d. 11.

THEOREME 6. PROP. 6.

Si deux lignes droictes ſont à angles droicts, ſur vn meſme plan ; Icelles lignes droictes ſeront paralleles.

Soient

Soient les deux lignes droictes A B, C D, à angles droicts, au plan E F, menées de B, & D. Ie dis qu'elles ſont paralleles.



a 3.d.11. Car ayant mené B D, au plan E F, [a] les angles A B D, C D B ſeront droicts : & au meſme plan E F, ſoit menée D G, perpendiculaire à B D; & ſoient poſées A B, D G, egales & conioinctes, B G, G A, A D. D'autant donc que les coſtez A B, B D, du triangle B A D, ſont egaux à G D, B D, du triangle G D B, par la conſtruction, & les angles A B D, G D B, contenus d'iceux auſſi egaux, eſtans droicts, les baſes A D, G B ſeront egales.

b 4. 1. Derechef, [b] les coſtez A B, B G, du triangle A B G, eſtans egaux à G D, D A, du triangle G D A, & la

c 8. 1. baſe A G commune : [c] les angles A B G, G D A

d 3.d.13. ſeront egaux: [d] mais A B G eſt droict : donc G D A ſera droict. Et l'angle G D C eſtant droict, auſſi G D ſera à angles droicts aux trois B D, D A, D C.

e 5.11. [e] Partant, D B, D A, D C ſeront en vn meſme plan, c'eſt à dire, C D ſera au plan mené par D B, D A:

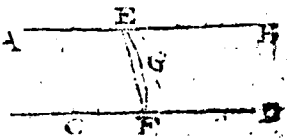
f 2.11. [f] mais A B eſt au meſme plan que D B, D A. Donc C D, ſera en meſme plan que A B : Parquoy les angles internes A B D, C D B eſtans droicts : A B, C D, ſeront paralleles : Donc ſi deux lignes droictes ſont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 7. PROP. 7.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, en l'vne & l'autre deſquelles ſoient pris des

des poincts comme l'on voudra: La ligne droicte menée par iceux poincts, eſt en vn meſme plan que les paralleles.

Aux paralleles A B, C D, ſoient pris deux poincts comme l'on voudra, E & F, & ſoit menée E F conjoignant iceux. Ie dis que E F eſt au meſme plan que A B, C D, paralleles.



Car, ſi E F, n'eſt au meſme plan, ſoit en vn autre, & que cét autre coupe le plan des paralleles par E & F, & que la commune ſection d'iceux plans ſoit E G F, g qui ſera ligne droicte. Donc les deux lignes droictes E F, E G F, ayans meſmes termes, E & F enclorront vn eſpace: ce qui eſt abſurde; Donc la droicte ligne E F, ne ſera hors le plan de A B, C D, paralleles. Partant, s'il y a deux lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. g 3. 11.

SCHOLIE.

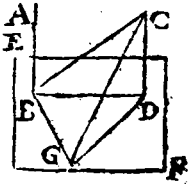
Cette propoſition eſt auſſi veritable, encore que A B, C D, ne ſoient paralleles, pourueu qu'elles ſoient en vn meſme plan, comme il appert par la demonſtration.

THEOREME 8. PROP. 8.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, l'vne deſquelles ſoit à angles droicts à quelque

quelque plan ; l'autre ſera auſſi à angles droicts au meſme plan.

Soient A B, C D paralleles, & C D à angles droicts au plan E F. Ie dis que A B eſt auſſi à angles droicts au plan E F.



Car eſtant menée B D, au plan E F : [h] l'angle C D B ſera droict : [i] mais les deux C D B, A B D ſont egaux à deux droits: donc A B D ſera droict. Maintenant ſoit menée B G, au plan E F perpendiculaire à B D : & ſoient poſées egales B G, C D, & conioinctes D G, G C, C B.

h 3.d.11.
i 29. 1.

D'autant donc que les coſtez C D, D B, du triangle C D B, ſont egaux à G B, B D, du triangle G B D par la conſtruction, & les angles C D B, G D B, contenus d'iceux auſſi egaux, eſtans droicts : [k] les baſes C B G D ſeront egales.

k 4. 1.

Derechef, les coſtez C D, D G, du triangle C D G, eſtans egaux à G B, B C, du triangle G B C ; & la baſe C G commune : [l] les angles C D G, G B C, contenus deſdits coſtez ſeront egaux : Mais [m] C D G eſt droict : donc G B C ſera auſſi droict. Parquoy G B ſera perpendiculaire à B D, B C ſe coupant l'vne l'autre à B, eſtans prolongées (puis qu'elles font angle à B :) Partant [n] ſera perpendiculaire au plan mené par B D, B C : mais A B eſt auſſi au meſme plan [o] de B D, B C, eſtant au meſme plan que A B, C D, paralleles ; les poincts B, C, D, eſtans aux paralleles A B, C D : donc [p] G B ſera auſſi perpendiculaire à B A : Parquoy A B eſtant perpendiculaire

l 8. 1.
m 3.d.11.
n 4. 11.
o 7. 11.
p 3.d.11.
4. 11.

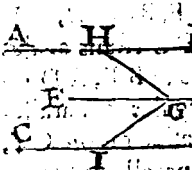
droitte à B G, B D; A B sera aussi perpendiculaire au plan mené par B G, B D, c'est à dire au plan E F: Donc s'il y a deux lignes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 9. PROP. 9.

Les lignes droictes paralleles à vne, mesme, n'estant en vn mesme plan qu'icelle: Icelles sont aussi paralleles entr'elles.

Soient A B, C D, paralleles à E F, n'estant en mesme plan que E F. Ie dis que A B, C D sont aussi paralleles entr'elles.

Car de quel poinct qu'on voudra, de E F, comme de G, soient menées deux perpendiculaires à E F, sçauoir G H, au plan des paralleles A B, E F, & G I au plan des paralleles C D, E F. Donc E G estant perpendiculaire à G H, G I se touchantes l'vne, l'autre à G, elle sera aussi perpendiculaire au plan mené par G H, G I. Parquoy A B, E F estans paralleles, & E F perpendiculaire au plan mené par G H, G I: A B sera aussi perpendiculaire au mesme plan.



4. 11.

8. 11.

Semblablement, C D, E F estans paralleles, & E F perpendiculaire au plan mené par G H, G I, C D sera aussi perpendiculaire au mesme plan. 8. 11.

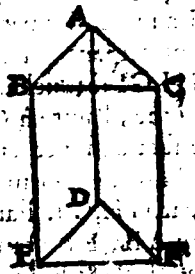
Donc A B, C D estans perpendiculaires au plan mené par G H, G I seront paralleles entr'elles. 8. 11.

partant les lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 10. PROP. 10.

Si deux lignes droictes ſe touchantes l'vne l'autre, ſont paralleles à deux lignes droictes ſe touchantes l'vne l'autre, & n'eſtans en vn meſme plan : Icelles contiendront angles egaux.

Soient A B, A C, s'entre-touchans à A, paralleles à D E, D F, s'entre-touchans à D; & A B, A C, ne ſoient en meſme plan que D E, D F. Ie dis que les angles B A C, E D F contenus d'icelles, ſont egaux.



Car ſoient poſées A B, D E, egales entr'elles, & auſſi A C, D F entr'elles : & menées B C, E F, B E, A D, C F. Donc A B, D E eſtans egales & paralleles ; [a] B E, A D ſeront auſſi egales & paralleles ; par meſme raiſon C F, A D ſeront paralleles & egales. Parquoy B E, C F eſtans egales & paralleles à A D, [b] ſeront paralleles & egales entr'elles : [c] & partant B C, E F paralleles & egales entr'elles. Donc puis que les coſtez A B, A C, du triangle B A C, ſont egaux à D E, D F, du triangle D E F par la conſtruction, chacun au ſien, & la baſe B C, monſtrée egale à la baſe E F : [d] les angles B A C, E D F ſeront egaux.

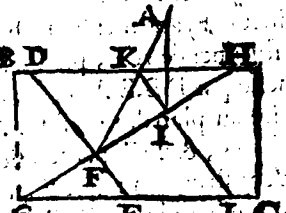
a 33. 1.
b 9. 11.
c 33. 1.
d 8. 1.

egaux, Donc si deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBLEME 2. PROP. 11.

D'vn poinct donné en l'air, mener vne ligne droicte perpendiculaire sur le plan qui est au dessous.

Soit le poinct A en l'air, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire sur le plan B C. Soit menée D E, audit plan B C, comme l'on voudra, à [c] laquelle soit menée A F perpendiculaire: & au plan B C par F, soit menée G H, perpendiculaire à D E, [f] à laquelle de A, soit menée A I perpendiculaire. Ie dis que A I, est perpendiculaire audit plan B C. c 12.1. f 11.1.

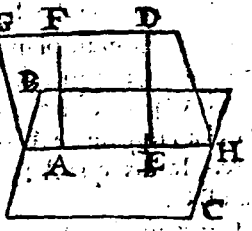


Car [g] au plan B C, soit menée K L, parallele à D E par I: puis que D F est à angles droicts à F A, & à F H par la construction; & partant perpendiculaire au plan mené par F A, F H; [i] aussi K I sera perpendiculaire au plan mené par F A, F H. [k] Mais A I, estant au mesme plan que F A, F H, & touchant K I à I, l'angle K I A sera droict: Partant A I sera à angles droicts à K I, I F. Donc A I sera perpendiculaire au plan B C. [l] Donc nous avons mené vne ligne perpendiculaire du poinct A, en haut, au plan B C. Ce qu'il falloit faire. g 11.1. h 4.11. i 8.11. k 2. 11. 3. d. 11. l 4.11.

PROBLEME 2. PROP. 12.

A vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, mener vne ligne droicte, à angles droicts.

Soit le poinct donné A, au plan B C, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire audit plan B C.



m 11.11. De quelconque [m] poinct D, donné en haut, ſoit menée D E perpendiculaire, au plan B C. Que ſi elle tombe au poinct A, on a le requis. Mais ſi le poinct E tombe ailleurs, ayant mené vne ligne droicte par E & A, n 31.11. [n] ſoit menée A F, parallele à D E, au plan G H, mené par D E, E A. Ie dis que A F eſt perpendiculaire au plan donné B C. Car D E, A F, eſtans paralleles, & D E perpendiculaire au plan B C par o 8. 1. la conſtruction: [o] A F ſera auſſi perpendiculaire au meſme plan B C. Partant à vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, &c. Ce qu'il falloit faire.

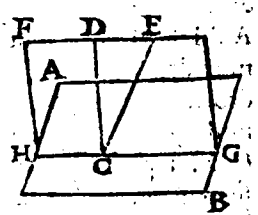
THEOREME 11. PROP. 13.

A vn plan donné, d'vn meſme poinct donné en iceluy, l'on ne pourra pas mener deux

deux lignes droictes en l'air à angles droits de mesme part.

Soit le plan donné A B. Ie dis que du poinct C donné en iceluy, l'on ne peut leuer deux perpendiculaires au plan A B, de mesme part.

Car, s'il est possible, soient menées deux perpendiculaires C D, C E, [q] au plan A B, & par C D, C E, qui sont en vn mesme plan, soit mené le plan F G, coupant le plan A B, par la ligne droicte G H. Donc E C, D C estans perpendiculaires au plan A B, [r] les angles E C G, D C G seront droicts, & partant egaux, la partie & le tout. Ce qui est absurde. Donc à vn mesme plan donné, d'vn poinct, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



[q] 2. 11.

[r] 3. d. 11.

THEOREME 12. PROP. 14.

Les plans ausquels vne mesme ligne droicte est à angles droicts : Iceux sont paralleles.

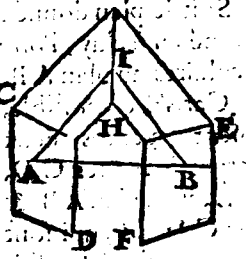
Soit la droicte ligne A B, à angles droicts, aux plans C D, E F. Ie dis que C D, E F, sont plans paralleles.

Car s'il n'est ainsi, estans prolongez, ils se rencontreront l'vn l'autre. Que ce soit de la part de C E, & que G H, soit la ligne de leur commune section, [s] en laquelle ayant pris le poinct I, com-

[s] 3. 11.

ment que ce soit ; soient menées les droictes lignes I A, I B, aux plans G C D, G E F.

D'autant donc que A B, est posée à angles droicts aux plans G C D, G E F, les deux angles I A B, I B A, seront droicts au triangle A B I. * Mais ils sont moindres que deux droicts. Ce qui est absurde. Donc les plans C D, E F prolongez, ne se rencontrent iamais. Ils sont donc paralleles. Partant les plans ausquels, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



t 3. d.

v 17. 1.

THEOREME 13. PROP. 15.

Si deux lignes droictes se touchantes l'vne l'autre, sont paralleles à deux autres lignes droictes se touchantes pareillement l'vne l'autre, n'estant pas toutefois en vn mesme plan : Les plans, lesquels sont menez par icelles lignes, sont paralleles.

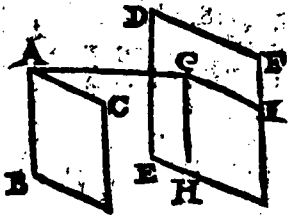
Soient deux lignes droictes A B, A C, se touchantes à A, paralleles aux deux D E, D F, se touchantes à D, n'estans en vn mesme plan que les premieres. Ie dis que les plans B C, E F, menez par icelles, sont paralleles.

Car du poinct A, * au plan E F, soit menée la perpendiculaire A G, rencontrant le plan E F, au

v 11. 11.

point

poinct G. Puis [y] du poinct G, soient menées G H, G I, au plan E F, paralleles à D E, D F. Donc A B, G H estans paralleles à D E : [z] icelles seront paralleles entr'elles : [a] & partant les angles B A G, A G H, sont egaux à deux droicts : [b] Mais A G H est droict: donc B A G sera droict aussi. Semblablement, l'on conclura que l'angle C A G est droict. Partant G A, estant à angles droicts aux deux A B, A C, elle [c] sera aussi à angles droicts au plan B C, mené par A B, A C. Mais A G, est aussi à angles droicts au plan E F, par la construction. [d] Donc les plans B C, E F sont paralleles. Partant si deux lignes droictes se touchantes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



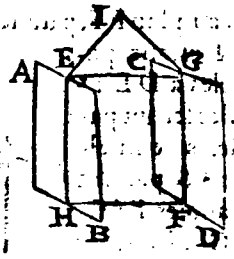
y 3. 11.
z 9. 11.
a 29. 1.
b 3. def.
c 4. 11.
d 14. 11.

THEOREME 14. PROP. 16.

Si deux plans paralleles, sont coupez par quelqu'autre plan : les lignes de leurs communes sections seront paralleles.

Soient les plans paralleles A B, C D, coupez par le plan E F. Ie dis que leurs communes sections E H, G F, sont lignes paralleles. Car si elles ne sont paralleles, estans prolongées, elles se rencontreront l'vne l'autre, estans au plan coupant E F. Qu'elles se rencontrent donc au poinct I : d'autant

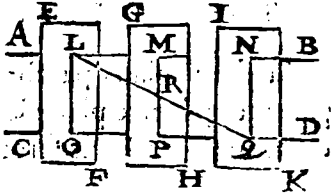
c 11. 11. sont : doncques que toute la ligne droicte H E I, est en vn mesme plan, sçauoir en A B prolongé: Semblablement, toute la ligne droicte F G I, est aussi en vn mesme plan, sçauoir en C D prolongé; les plans A B, C D, se rencontreront aussi au poinct I, estans prolongez. Ce qui est absurde, estans posez paralleles. Donc E H, G F sont paralleles. Partant, si deux plans paralleles sont coupez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



THEOREME 15. PROP. 17.

Si deux lignes droictes sont coupées par des plans paralleles : Icelles seront coupées proportionellement.

Soient les lignes droictes A B, C D, coupées par les plans paralleles, E F, G H, I K, aux poincts L, M, N, O, P, Q, le dis que A B, C D, sont coupées proportionellement, c'est à dire, que les segmens d'icelles, compris entre iceux plans sont proportionaux, sçauoir, comme L M, à M N, ainsi O P, à P Q.



Car soient menées les droictes lignes L O, N Q,

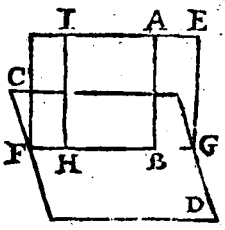
aux

aux plans E F, I K, & ſoit coniointe L Q, rencontrant le plan G H, au poinct R, duquel aux poincts M, P, ſoient menées R M, R P, au meſme plan G H: ſi le triangle L N Q, ſera en vn meſme plan: Semblablement L O Q, auſſi en vn meſme plan: f 2. 11.

Mais d'autant que les plans paralleles G H, I K ſont coupez par le plan du triangle L N Q, leurs communes ſections, ſçauoir les lignes M R, N Q ſeront paralleles, par meſme raiſon R P, L O, ſeront paralleles. h Partant, comme L R ſera à R Q, ainſi L M, à M N. Semblablement, comme L R, à R Q, ainſi O P, à P Q: Donc comme L M, à M N, ainſi O P, à P Q. Donc ſi deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. g 16. 11. h 2. 6. 11. 5.

THEOREME 16. PROP. 18.

Si vne ligne droicte, eſt à angles droits à quelque plan; Tous les plans menez par icelle, ſeront auſſi à angles droicts au meſme plan.



Soit la ligne A B, à angles droicts, au plan C D. Ie dis que tous les plans menez par A B, ſont à angles droicts au meſme plan C D. Car par A B, ſoit mené le plan E F, coupant le plan C D, par la ligne droicte F G. Et ayant pris le poinct H, comment que ce ſoit, en F G; i ſoit menée H I, au plan E F, i 31. 1.

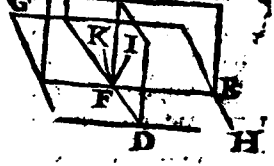
parallele à A B. Donc A B, I H, eſtans paralleles, & A B poſée à angles droicts au plan C D : [k] I H ſera auſſi à angles droicts au meſme plan C D : [l] partant perpendiculaire à la commune ſection F G : Par meſme raiſon, toutes les lignes qui ſont menées paralleles à A B, au plan E F, ſeront à angles droicts au plan C D : & partant perpendiculaires à la commune ſection F G. [m] Donc le plan E F, ſera à angles droicts au plan C D.

k 8. 11.
l 3. def.
m 4. d.

Par les meſmes raiſons, on monſtrera que tous les autres plans menez par A B, ſont à angles droicts au plan C D. Donc ſi vne ligne droicte eſt à angles droicts à quelque plan, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 17. PROP. 19.

Si deux plans s'entrecoupans, ſont à angles droicts à quelque plan ; leur ligne de commune ſection ſera auſſi à angles droicts au meſme plan.



Soient les deux plans A B, C D, ſe coupans l'vn l'autre, par la ligne droicte E F, à angles droicts au plan G H. Ie dis que E F, ligne de leur commune ſection, eſt auſſi à angles droicts au meſme plan G H.

Car, ou E F eſt à angles droicts à B F, D F, communes ſections des plans A B, C D, auec le plan G H,

GH, ou non. Que si EF, est à angles droicts à BF, DF, n elle le sera aussi au plan GH, mené par icelles. Mais si EF, est dite estre à angles droicts à l'vne ou l'autre BF, DF, tant seulement, qu'elle le soit à BF. D'autant donc que le plan AB, est posé à angles droicts au plan GH: o la ligne EF, (laquelle au plan AB, est menée perpendiculaire à BF, commune section d'iceluy auec le plan GH) sera à angles droicts au plan GH. L'on conclura le mesme, si EF, est concedée à angles droicts à DF: car lors EF sera perpendiculaire au plan GH, estant posée perpendiculaire à DF, commune section du plan CD, auec le plan GH, & menée au plan CD, qui est à angles droicts au plan GH.

n 4. 11.

o 4. def.

4. def.

Finalement, si EF, n'est à angles droicts à BF, ny à DF; soit menée du poinct F, au plan AB, la ligne FI, perpendiculaire à BF commune section, auec le plan GH: semblablement au plan CD, soit menée FK, perpendiculaire à DF, commune section d'iceluy, auec le plan GH.

11. 1.

D'autant donc que le plan AB, est posé à angles droicts au plan GH, p la ligne IF, (laquelle est menée au plan AB, perpendiculaire à BF, commune section d'iceluy, auec le plan GH,) sera à angles droicts au plan GH. Par mesme raison KF, sera à angles droicts, au mesme plan GH. Partant du poinct F, au plan GH, sont menées deux perpendiculaires: q ce qui est absurde. Parquoy EF, sera à angles droicts au plan GH. Donc si deux plans s'entre-coupans, sont à angles droicts à quelque plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

p 4. d.

q 13. 11.

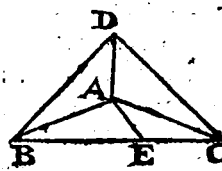
THEO

THEOREME 18. PROP. 20.

Si vn angle ſolide eſt contenu de trois angles plans : Deux d'iceux, pris de quelque façon que ce ſoit, ſont plus grands que le troiſieſme.

Soit l'angle ſolide A, contenu de trois angles plans B A C, C A D, D A B. Ie dis que deux, leſquels que l'on voudra, ſont plus grands que l'autre.

Car ſoit, s'il eſt poſſible, l'vn d'iceux, comme B A C, plus grand que les deux autres B A D, D A C; & au plan mené par A B, A C, [r] ſoit fait l'angle B A E, egal à l'angle B A D, & la droicte ligne A E, egale à A D. Puis du meſme plan mené par E, ſoit menée B C, coupant A B, A C, à B & C, & menées B D, D C. D'autant donc que les coſtez A D, A B, du triangle B A D, ſont egaux aux coſtez A E, A B, du triangle B A E, chacun au ſien, & les angles contenus d'iceux auſſi egaux par la conſtruction, [f] les baſes B D, B E, ſeront egales.



[r] 23. 1.

[f] 4. 1. 20. 1.

Mais d'autant que les coſtez D B, D C, ſont plus grands que le coſté B C, ſi l'on retranche les lignes droictes egales B D, B E, demeurera C D, plus grande que C E. Puis donc que les coſtez A D, A C, du triangle D A C, ſont egaux aux coſtez A B, A C, du triangle E A C, chacun au ſien; & la baſe C D, plus grande que la baſe C E, [t] l'angle C A D,

[t] 25. 1.

C A D, sera plus grand que l'angle C A E. Adiouſtant donc les angles egaux, B A D, B A E, les deux angles C A D, B A D, ſeront plus grands que les deux C A E, B A E : c'eſt à dire, que l'angle total B A C, qui eſtoit poſé le plus grand de tous. Parquoy deux, leſquels que l'on voudra, ſont beaucoup plus grands que l'autre. Donc ſi vn angle ſolide, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

S'il eſt dit egal, il adviendra la meſme abſurdité.

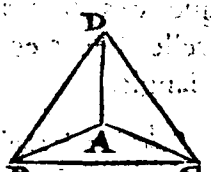
THEOREME 19. PROP. 21.

Tout angle ſolide eſt contenu ſous des angles plans, leſquels ſont plus petits que quatre angles plans droicts.

C'eſt à dire, que tous les angles plans, ſous leſquels eſt contenu quelconque angle ſolide, ſont moindres que quatre droicts.

Soit l'angle ſolide A, contenu ſous trois angles plans B A C, B A D, D A C. Ie dis que ces trois angles ſont moindres que quatre droicts.

Car, ayant mené les lignes droictes B C, C D, D B, l'on aura conſtitué trois angles ſolides, B, C, D, chacun deſquels eſt contenu ſous trois angles plans, ſçauoir B, ſous C B A, A B D, D B C. Mais C, ſous B C A, A C D, D C B : Et D, ſous C D A, A D B, & B D C.



Mais

v 20. 11. v Mais les deux angles C B A, A B D, eſtans plus grands que l'angle C B D. Et ſemblablement, les deux B C A, A C D, plus grands que B C D, & les deux C D A, A D B, ſont plus grands que C D B: les ſix angles ; C B A, A B D, B C A, A C D, C D A, A D B, ſont plus grands que les trois angles, C B D, B C D, C D B.

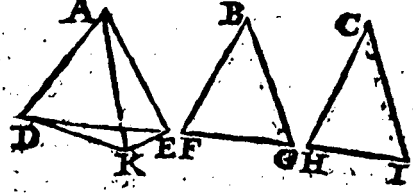
x 32. 1. x Mais ces trois ſont egaux à deux droicts: donc ces ſix ſont plus grands que deux droicts. Donc puis que ces ſix là, auec les trois au poinct A, ſont egaux à ſix droicts, à cauſe des trois angles

y 32. 1. B A G, C A D, D A B; y (Car les trois angles de tout triangle, ſont egaux à deux droicts:) ſi l'on oſte ces ſix là, qui ſont plus grands que deux droicts; les trois qui conſtituent l'angle ſolide A, demeureront moindres que quatre droicts. Dong tout angle ſolide, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 20. PROP. 22.

S'il y a trois angles plans, deux deſquels, pris comme l'on voudra, ſont plus grands que l'autre: mais qu'iceux ſoient contenus de lignes droictes egales; il ſe peut faire, que des lignes droictes conioignantes icelles lignes egales, l'on conſtituera vn triangle.

Soient trois angles plans A, B, C, contenus de lignes droictes egales, A D, A E, B F, B G, C H, G I, deux deſquels, pris comme l'on voudra, ſont plus grands que le troiſieſme: Ie dis que des trois lignes droictes,



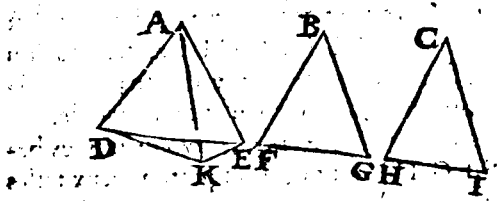
droictes, D E, F G, H I, qui conioignent icelles lignes egales, l'on peut constituer vn triangle : c'est à dire, que des trois D E, F G, H I, deux telles qu'on voudra, sont plus grandes que l'autre ; [z] car cela estant, l'on constituera facilement vn triangle. z 22. 1.

Si les trois angles A, B, C, sont egaux, [a] les bases D E, F G, H I, sont egales : partant, deux telles qu'on voudra d'icelles plus grandes que la troisiesme : Mais si deux angles sont seulement egaux, & le troisiesme moindre, [b] deux bases seront seulement egales, & [c] la base du troisiesme moindre que chacune des autres : partant, derechef les deux quelles qu'on voudra, sont plus grandes que l'autre. Que si l'vn d'iceux angles, comme A, est plus grand, soit que les deux autres B & C, soient egaux ou non : [d] la base D E, sera aussi plus grande de toutes. Parquoy D E, F G, seront plus grandes que H I : & D E, H I, plus grandes que F G. Ie dis maintenant que F G, H I, sont plus grandes que D E. a 4. 1. b 4. 1. c 24. 1. d 24. 1.

[e] Car soit fait l'angle D A K, egal à l'angle B, & soit posée A K, egale à A D : donc le poinct K, tombera au dessous de D E ; d'autant que la circonference du cercle descrit à l'interualle A D, du centre A, passe par les poincts D, K, E, à cause de l'egalité des lignes, A D, A K, A E : puis soient conioinctes e 23. 1.

ioinctes D K, & K E. D'autant donc que les deux angles B & C, ſont poſez plus grands que l'angle D A E, & B, eſt egal à l'angle D A K, par la conſtruction, l'angle C, ſera plus grand que l'autre angle K A E, & d'autant que les coſtez A D, A K, du triangle A D K, ſont egaux aux coſtez B F, B G, du triangle B F G : & les angles contenus d'iceux, D A K, & B, ſont egaux: f la baſe D K, ſera egale à la baſe F G.

f 4. 1.



Derechef, puis que les coſtez C H, C I, du triangle C H I, ſont egaux aux coſtez A K, A E, du triangle A K E; & l'angle C, monſtré plus grand que l'angle K A E, g la baſe H I, ſera plus grande que la baſe K E. Partant, puis que D K eſt monſtrée egale à F G; F G, H I, ſeront plus grandes que D K, K E: mais D K, K E, ſont plus grandes que D E : donc F G, H I, ſeront encore plus grandes que D E. Ce qui eſt propoſé.

g 24. 1.

20. 1.

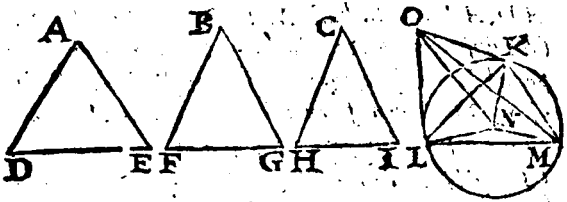
THEOREME 21. PROP. 23.

Conſtituer vn angle ſolide de trois angles plans, deux deſquels, pris comme l'on voudra, ſont plus grands que l'autre : Mais il faut que ces trois angles ſoient plus petits que quatre droicts.

Soient les trois angles plans A, B, C, plus petits

tits que quatre droicts, desquels deux pris comme l'on voudra, soient plus grands que l'autre : il faut faire vn angle solide de trois angles plans, egaux aux trois A, B, C.

Soient les six lignes A D, A E, B F, B G, C H, C I, posées egales, contenans lesdits angles A, B, C, soustenus des bases D E, F G, H I : & pouuant faire vn triangle de D E, F G, H I, soit fait le triangle L M K, ayant les trois costez egaux à D E, F G, H I : 22. 11.



à l'entour duquel [h] soit descrit le cercle K M L : & du centre N, soient menées N M, N L, N K : [i] & ayant mené en l'air N O perpendiculaire, [k] & retranchée, telle que son quarré, auec le quarré de N L, soient egaux au quarré d'vn des costez desdits angles plans, & soient menées L O, K O, M O. Ie dis que L M O K, est angle solide, contenu de trois angles plans, egaux à A, B, C. h 22. 11. i 5. 4. k 12. 11. l 14. 10.

Car, N L, N M, N K estans egales ; & N O perpendiculaire à icelles ; L O, M O, K O, seront egales, [l] pouuant autant l'vne que l'autre. Et d'autant qu'elles peuuent autant que l'vn des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez d'iceux angles plans, les bases L M, M K, K L, estans egales aux bases des angles donnez, [m] les trois angles au poinct O, seront egaux aux trois donnez A, B, C. l 47. 1. m 8. 1.

SCHOLIE.

Si on obiecte que NO, perpendiculaire, ne peut touſiours eſtre retranchée, en ſorte que ſon quarré, auec le quarré de NL, ſoient egaux au quarré de l'vn des coſtez des triangles donnez; comme ſi iceluy coſté eſtoit egal ou plus petit que NL. Ie reſpons que cela n'arriue point, non pas ſeulement qu'il ſoit egal à NL, car ſi LN, & NM eſtoient egaux à AD, AE, & la baſe ML, egale à la baſe DE,

n 8. 1. *(& ainſi des autres triangles) [n] les trois angles au poinct N, ſeroient egaux aux trois A, B, C: Ce qui eſt manifeſtement faux: les trois angles A, B, C,*

o Cor. 15. 1. *eſtans poſez [o] plus petits que quatre droicts, & les trois au poinct N, eſtans egaux à quatre droicts.*

THEOREME 21. PROP. 24.

Si vn ſolide eſt contenu ſous des plans paralleles, les plans oppoſez d'iceluy, ſont parallelogrammes ſemblables & egaux.

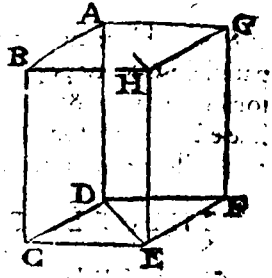
Soit le ſolide parallelipipede AB CD, contenu (ſelon la 30. definition, de ſix figures quadrilateres) AC, CF, FH, HA, AF, BE, dont les oppoſées ſont paral. Ie dis que tous ces plans oppoſez deux à deux, ſont parallelogrammes ſemblables & egaux.

Car, puis que les plans paralleles BG, CF, ſont

p 16. 11. coupez par le plan AC, [p] leurs communes ſections AB, CD, ſeront paralleles. Semblablement les plans paralleles AF, BE, eſtans coupez par le plan

AC,

AC, leurs communes sections AD, BC, seront aussi paralleles: donc la figure quadrilatere ABCD, est parallelogramme. Ainsi l'on monstrera que les autres figures quadrilateres sont parallelogrammes. Ie dis maintenant que les parallelogrammes opposez, sont semblables & egaux.



Car puis que AB, BH, sont paralleles à DC, CE, & non en vn mesme plan, mais en plans opposez, q les angles ABH, DCE, seront egaux. Par mesme raison les autres angles du parallelogramme BG, seront egaux aux autres du parallelogramme CF. r

q 10. 11.

r 34. 1.

Mais d'autant que AB, est egale à DC, au parallelogramme AC, & BH, egale à CE, au parallelogramme BE, comme AB sera à BH, ainsi DC, à CE, &c. Et partant, comme BH, à HG, ainsi CE, à EF, & pour la mesme raison, les costez des parallelogrammes BG, CE, à l'entour des angles egaux, seront proportionaux, parquoy iceux parallelogrammes seront semblables.

Maintenant ayant mené les diametres AH, DE, s puis que les costez AB, BH, du triangle ABH, sont egaux à DC, CE, du triangle DCE: t & l'angle ABH, egal à DCE, comme il est monstré, v les triangles ABH, DEC, sont egaux entr'eux. x Donc les triangles ABH, DCE, estans moitiez des

s 34. 1. t 10. 11. v 4. 1. x 34. 1.

parallelogrammes B G, C F, ils ſeront egaux entr'eux.

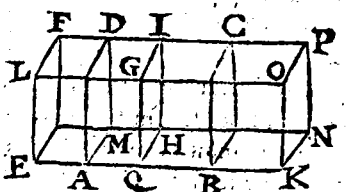
Semblablement, nous demonſtrerons que les parallelogrammes oppoſez, A C, G E, & A F, B E, ſont ſemblables & egaux entr'eux. Donc ſi vn ſolide eſt contenu ſous les plans paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 22. PROP. 25.

Si vn ſolide parallelipipede eſt coupé par vn plan parallele, aux plans oppoſez, comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le ſolide ſera au ſolide.

Soit A B C D, ſolide parallelipipede, coupé par le plan I Q, parallele à A D, B C, plans oppoſez: Ie dis que le ſolide A I, ſera au ſolide I B, comme la baſe A H, à la baſe H B.

Car A B eſtant prolongée vers E & K, ſoit poſée A E, egale à A Q, & B K à B Q, & acheuez les parallelogrammes E M, B N, & les ſolides A F, P B. Donc A E, A Q, eſtans
1.6. egales, ſ E M, M Q, parallelogrammes, ſe-
24. 1. ront egaux, z & L D, D G, plans oppoſez, egaux & ſemblables. Et ainſi A L, A G, ſemblables & egaux à M F, M I, qui ſont plans oppoſez, & ainſi des autres.



Et

Et le solide AF, est egal au solide AI, & le solide BI, au solide BP: parquoy le solide EI, est autant multiple du solide AI, que la base EH, de la base AH: & QP solide, autant multiple de CQ solide, que la base QN, de la base BH. Donc de mesme façon que EH, sera plus grande, egale, ou moindre que AH, ainsi EI solide, sera plus grand, egal, ou moindre que le solide AI. 5. d. 11.

Item, de mesme façon la base QN, sera plus grande, egale ou moindre que HB, ainsi le solide QP sera plus grand, egal ou moindre, que le solide QC.

Soient donc quatre grandeurs AH, HB, bases, & HI, QC solides, (dont de la premiere & troisiesme, à sçauoir de AH base, & AI solide,) on a pris les equimultiples EH base, & IE solide. Et aussi de la 2. & 4. (sçauoir de BH base, & BQ solide) les equimultiples QN, PQ, base & solide; lesquels sont monstrez plus grands, egaux ou moindres en quelconque multiplication qu'on les prenne; b Donc comme la base AH, à la base HB, ainsi le solide AI, au solide CQ. Partant si vn solide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. b 6. d. 5.

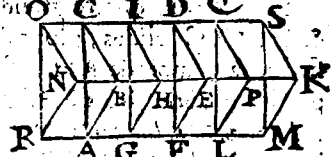
SCHOLIE.

Cette Proposition conuient à tous Prismes. Car quelconque Prisme estant coupé par vn plan parallele aux opposez, comme la base sera à la base, ainsi le solide au solide. Soit le prisme ABCDEF, dont les plans opposez sont les triangles ABC, DEF, coupez par GHI, plan parallele aux opposez.

Ie dis, que comme la base AI, à IF base, ainsi le solide AGHICB, au solide GFEDIA. Car soit

prolongé le priſme A B C D E F, de coſté & d'autre, tant qu'il ſera beſoin, & de A F prolongée, priſe A R, egale à G A, & F L, L M, egales à F G, & par R, L, M, ſoient entendus les plans R N O, L P Q, M K S, paralleles à A B C, G H I, F E D.

Doncles plans A B C, G H I, eſtans coupez par
c 16.11. A I: c A C, G I, communes ſections d'iceux, ſeront paralleles: & A D eſtant parallelogramme, A G, C I, ſont auſſi paralleles: parquoy A I eſt parallelogramme; & ſemblablement A H, C H, parallelogrammes. Et A C, A B, coſtez du triangle A B C, eſtans egaux à G I, G H, du triangle G I H, (d A C eſtant egal à G I, & A B à G H:)
d 34.1.
10.11.

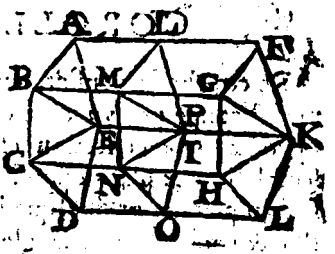


les angles B A C, H G I, ſont egaux, (A B, A C, eſtans parallel. à G H, I G, non en meſme plan,) les
4. 11. triangles A B C, G H I, ſont equiangles & egaux
e 4.6. entr'eux: e Et auront les coſtez autour des angles egaux proportionaux, partant ſeront ſemblables. Parquoy A G H I C B ſolide, contenu des plans oppoſez, A B C, G H I, ſemblables & egaux, & des parallelogrammes A I, G B, B I, eſt priſme: & ainſi A R N O C B, F E D I H G, F E D Q P L, L M K S Q P, ſont priſmes, & les parallelogrammes A I, C R, eſtans ſemblables & egaux, & A H, B R, & H C, B O, tous les plans du priſme A G H I C B, ſont ſemblables & egaux à tous ceux de A R N O C B; f donc
f 25.d.11. iceux priſmes ſont egaux. Semblablement, G F E D I H, & les autres ſont egaux. Donc R G H I O N,

eſt

eſt autant multiple de AGHICB, que la baſe RI, de la baſe AI: & GMRSIH, autant multiple de GFEDIH, que la baſe GS, de la baſe DG. Et puis que ſi la baſe IR, multiple de AI, premiere grandeur eſt egale à la baſe GS (multiple de la baſe DG 2. grandeur,) le priſme RGHION (multiple du priſme AGHICB 3.) ſera egal au priſme GMKSIH (multiple du priſme GFEDIH, 4. grandeur.) Et ſi IR eſt plus grande que GS, le priſme ſera auſſi plus grand que le priſme: & ſi moindre, moindre, le prenant en quelque multiplication que ce ſoit. Comme la baſe AI, premiere grandeur, eſt à la baſe GD, 2. grandeur, ainſi le priſme AGHIB, 3. eſt au priſme GFEDIH, 4. grandeur. Et ainſi on monſtrera que le priſme eſt au priſme, comme la baſe AH, à la baſe EG, &c. Ce qui eſtoit propoſé. 6. def.

Soit derechef ABCDEFGHLK priſme, dont les plans oppoſez ſoient polygones, ſçavoir eſt pentagones, & ſoit coupé par le plan LMNOP. Ie dis que



comme la baſe CM, eſt à la baſe NG, ainſi le ſolide ABCDELMNOP, au ſolide LMNOPFGHIK. Car les plans paralleles oppoſez eſtans reſolus en triangles, le priſme ſera reduit en autant de priſmes qu'il y a de triangles aux plans oppoſez; Donc comme la baſe EP, à la baſe MK, ainſi le priſme ABEPML, au priſme LMPKGF, par ce qui

eſt demonſtré. Et par meſme raiſon comme la baſe C P, à la baſe N K : ainſi le priſme B C E P M N, au priſme M N P K G H, & le priſme C D E P N O, au priſme N O P K H I. Mais comme B P à M K, & C P à N K, ainſi la ligne E P, à la ligne P K, c'eſt à dire, comme C N à N H : & comme C N à N H, ainſi C M à N G : Donc les priſmes A B E P M L, B C E P M N, C D E P N O, ont meſme raiſon aux priſmes L M P K G F, M N P K G H, N O P K H I, que C M à N G : & partant meſme raiſon entr'eux. Mais comme vn eſt à vn, ainſi tous enſemble à tous enſemble. Donc comme le priſme B C E P M N, au priſme M N P K G H, c'eſt à dire comme la baſe C M, à la baſe N G : ainſi le priſme A B C D E L M N O P, compoſé de trois, ſera au priſme L M N O P F G H I K, compoſé de trois. Ce qui eſt propoſé. Et ainſi de quelconque autre priſme.

1. 6.

12. 5.

COROLLAIRE.

De ces choſes s'enſuit, que ſi quelconque priſme eſt coupé par vn plan equidiſtant aux plans oppoſez, que la ſection eſt vne figure egale & ſemblable aux plans oppoſez. Ayant eſté demonſtré au premier priſme, que le triangle G H I, eſt egal & ſemblable au triangle A B C : & partant au triangle D E F. Et y a meſme demonſtration en tous. Et faut dire le ſemblable des parallelipipedes.

PROBLEME 4. PROP. 26.

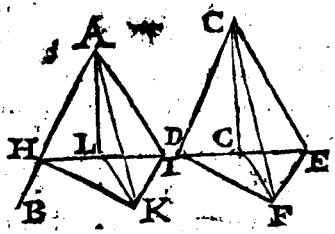
A vne ligne droicte donnée, & à vn poinct en icelle, conſtituer vn angle ſolide, egal à vn angle ſolide donné.

Soit

Soit le poinct A en A B, auquel il faut constituer vn angle solide, egal à l'angle solide donné C, contenu sous trois angles plans D C E, D C F, F C E n'estans en vn mesme plan.

Soit[a] menée de F, au plan passant par C D, C E, la perpendiculaire F G, & conioinctes D F, D G, E F, F G, C G. Puis soit retranchée A H, egale à C D,[b] & soit faict l'angle H A I, egal à D C E, & A I, egale à C E. [a] 11. 11. [b] 23. 1.

Derechef, au plan mené par A H; A I, soit constitué l'angle H A L, egal à D C G, qui est au plan mené par C D, C E, & A L, egale à C G. Et[k] de L, au plan où sont A H, A L, A I, soit menée K L, perpendiculaire, & posée egale à F G, & conioincte K A. Ie dis que l'angle solide A, contenu sous les trois angles plans H A I, H A K, K A I, est egal à C, angle solide donné. [k] 12. 11.



Car ayant conioint H K, H L, I K, I L: d'autant que les costez A H, A L du triangle A H L, sont egaux aux costez C D, C G, du triangle C D G, chacun au sien, & les angles H A L, D C G, egaux par la construction,[l] les bases H L, D G, seront egales. [l] 4. 1.

Derechef, ayant osté les angles egaux H A L, D C G, des egaux H A I, D C E, les restans L A I, G C E, sont egaux. Donc puis que les costez A L, A I, du triangle A L I, sont egaux à C G, C E, du triangle C G E, chacun au sien, par la construction

m 4. 1. m LI, G E ſeront egales. D'autant donc que les coſtez L H, L K, ſont egaux aux coſtez G D, G F, & n 3. d. les angles H L K, D G F, n droicts, o les baſes H K, o 4. 1. D F, ſont egales. Partant les coſtez A H, A K, du triangle A H K, eſtans egaux à C D, C F, du triangle C D F, par la conſtruction: (car puis que A L, L K, ſont egaux à C G, G F, par la conſtruction; & p 3. d. contiennent angles egaux, ſçauoir p droicts, les baſes A K, C F, q 4. 1. ſont egales,) r les angles H A K, r 8. 1. D C F, ſeront egaux.

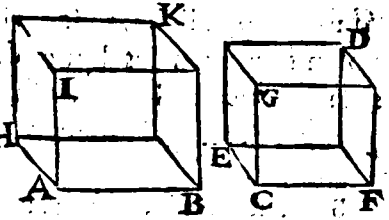
Finalement, L I, L K, eſtans egaux à G E, G F, & ſ 3. d. les angles I L K, E G F droicts, les baſes I K, E F, t 4. 1. ſeront egales. Donc puis que les coſtez A I, A K, du triangle A I K, ſont egaux à C E, C F, du triangle C E F, par la conſtruction; les angles I A K, 4. 1. E C F, ſeront egaux. Donc les trois angles plans H A I, H A K, K A I, compoſans l'angle ſolide A, ſont egaux aux trois angles plans D C E, D C F, F C E, compoſans l'angle ſolide C: partant l'angle ſolide A, eſt egal à l'angle ſolide C. Donc à vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 5. PROP. 27.

D'vne ligne droicte donnée, deſcrire vn ſolide parallelipipede, ſemblable & ſemblablement poſé à vn ſolide parallelipipede donné.

De la droicte ligne donnée A B, qu'il faille deſcrire vn ſolide parallelipipede, ſemblable, & ſemblablement poſé au parallelipipede C D, donné,

A la ligne AB, & au poinct A, en icelle ſoit t 26.11.
fait vn angle ſolide, egal à l'angle ſolide donné C, en ſorte que les trois angles plans HAI, IAB, BAH, ſoient egaux aux trois ECG, GCF, FCE.



Et comme CF à CG, ſoit faicte AB à AI, & v 12. 6.
comme CG à CE, ainſi AI à AH, & en raiſon egale, comme CF, ſera à CE, ainſi AB à AH: & ſoit parfaict le parallelipipede AK, ſçauoir eſtans accomplis les parallelogrammes BH, HI, IB, & par les poincts I, B, H, ayans mené les plans IK, BK, HK, qui ſont paralleles aux parallelogrammes BH, HI, IB. Ie dis que le parallelipipede AK eſt ſemblable, & ſemblablement poſé au parall. CD.

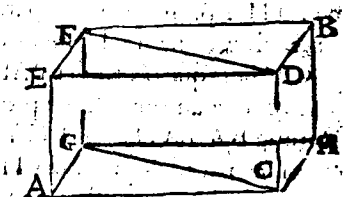
Car puis que les angles BAH, FCE ſont egaux, & les coſtez autour d'iceux proportionaux, ſçauoir comme BA, à AH, ainſi FC, à CE par la conſtruction, les parallelogrammes HB, EF, ſont ſemblables, & ſemblablement poſez. Semblablement HI, EG, & IB, GF: donc les trois plans BH, HI, IB, du ſolide AK ſont ſemblables, & ſemblablement poſez aux trois FE, EG, GF, du ſolide CD: x mais x 24.11.
trois leſquels que l'on voudra d'iceux ſont egaux, & ſemblables aux trois autres oppoſez. Parquoy les ſix plans du ſolide AK ſont ſemblables, & ſemblablement poſez aux ſix plans du ſolide CD: y y 9. def.
Partāt les ſolides AK, CD ſont ſemblables, & ſemblablement

blablement poſez. Donc d'vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOREME 25. PROP. 28.

Si vn ſolide parallelipipede, eſt coupé par vn plan mené par les lignes diagonales des plans oppoſez: Le ſolide ſera coupé par ce plan, en deux egalement.

Soit AB parallelipipede, & aux plans oppoſez AH, EB, les diametres CG, DF. Et tant CD que
a 34. 1. GF, eſtant parallele & egale à [a] AE, eſtant QE,
b 9. 11. GE, parallelogramme, [b] CD, GF ſeront egales &
c 33. 1. paral. entr'elles: [c] & partant CG, DF, qui les conioignent, auſſi egales & paral. & en vn meſme plan. Ie dis que le plan qui paſſe par CG, DF, coupe le parallelipipede AB, en deux egalement.
d 24. 11. Car [d] puis que les plans AH, EB ſont parallelogrammes egaux & ſemblables, leurs moitiez, ſçauoir les triangles AGC, GCH, EFD, FDB, ſeront egaux entr'eux: mais les coſtez autour des angles egaux GAC, CHG, FED, DBF, ſont proportionaux, [e] donc leſdits triangles
e 6. 6. f 24. 11. ſeront auſſi ſemblables. [f] Et le paral. AF, eſtant egal & ſemblable au paral. CB, & AD à GB, & CF commun, les deux triangles AGC, EFD, & les parall. AF, AD, CF, du priſme ACGFED, ſont

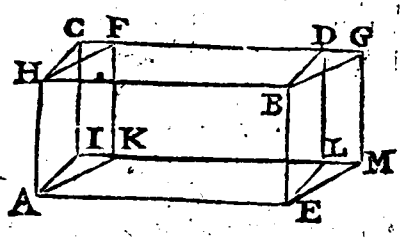


ſont egaux & ſemblables aux deux triangles H C G, B D F, & aux parallelogrammes C B, B G, C F, du priſme H G C D B F: & partant iceux priſmes ſeront egaux, leſquels compoſans le parallelipipede A B, il ſera coupé en deux egalement. Donc ſi vn ſolide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. g 10. d.

THEOREME 24. PROP. 29.

Les ſolides parallelipipedes conſtituez ſur vne meſme baſe, & de meſme hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes ſont colloquées en meſmes lignes droictes, ſont egaux entr'eux.

Sur la baſe A B, & de meſme hauteur, c'eſt à dire entre meſmes plans paralleles, ſoient conſtituez deux parallelipipedes A C D E, A F G E, deſquels les lignes inſiſtantes menées des quatre angles de la baſe, ſont colloquées en meſmes lignes droictes, ſçauoir A I, A K, E L, E M, en la ligne droicte I M; & H C, H F, B D, B G, en la droicte ligne C G. Ie dis que les parallelipipedes A C D E, A F G E, ſont egaux entr'eux.



Car, h puis que les parallelogrammes A L, A M, conſtituez h 35. 1.

conſtituez ſur meſme baſe AE, & entre meſmes parall. ſont egaux entr'eux, oſtant le commun trapeze AL, les triangles AIK, ELM, demeureront
k 34.1. egaux. k

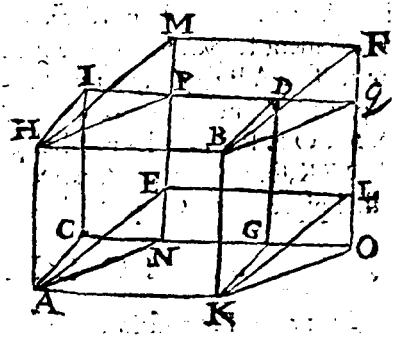
Mais d'autant que tous les coſtez du triangle AIK, ſont egaux à tous les coſtez du triangle
l Cor.8.1. HCF, chacun au ſien, l iceux ſeront equiangles &
m 4.6. egaux : m & auront les coſtez autour des angles egaux proportionaux ; & partant ſeront ſemblables entr'eux : & par meſme raiſon le triangle ELM, ſera ſemblable & egal au triangle BDG.
n 24.11. n Derechef, le parallelogramme AC, eſt egal &
o 36.1. ſemblable au paral. ED ; & ſemblablement le parall. AF, au parall. EG. o Mais IF, eſt egal à LG, les baſes IK, LM, eſtans egales : (car IL, KM eſtans egales chacune à AE, ſont egales entr'elles, & oſtant KL commune, demeurent IK, LM egales.)
p 34.1. p Donc tous les plans du priſme AIKFCH, ſont
q 10.def. egaux, & ſemblables à tous le plans du priſme ELMGDB. q Donc iceux priſmes ſeront egaux: partant, ſi on adiouſte le commun ſolide AHFK LDBE, les parall. ſeront faicts egaux ſur meſme baſe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 25. PROP. 30.

Les ſolides parallelipipedes, conſtituez ſur vne meſme baſe, & de meſme hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes ne ſont pas colloquées en meſmes lignes droictes, ſont egaux entr'eux.

Sur la baſe AB, & en meſme hauteur, c'eſt à dire entre

entre mesmes plans paralleles, soient constituez les parallelipipedes A I D K, A M F K, desquels les lignes insistantes menées des quatre angles de la base, A C, A E, K G, K L, H I, H M, B D, B F, ne sont pas en mesmes lignes droictes, c'est à dire, C I, G D, estans prolongées, ne passent pas par les poincts M, E, F, L; ny C G, I D, prolongées, &c. Ie dis dis que les parallelipipedes A I D K, A M F K, sont egaux entr'eux.



Car puis que les plans C D, E F, opposez à la base A B, sont en vn mesme plan, à cause de la mesme hauteur des parallelipipedes: soient prolongées au mesme plan les lignes C G, I D, desquelles C G, coupe E M, L F, prolongées aux poincts N, O, & I D, les mesmes aux poincts P, Q: & soient conioinctes les droictes lignes A N, K O, H P, B Q.

D'autant donc que P Q, M F sont egales, estans opposées au parallelogramme F P, & M F, est egale à H B, P Q & H B seront egales: mais elles sont paral. H D B estant parallelogramme: Donc H B, P Q, sont egales & paral. & partant H P Q B, est parallelogramme; par mesme raison, H P N A, A N Q K, K O Q B, seront parallelogrammes, & N O Q P. [r] 34. 1. [s] 33. 1.

QP, eſt auſſi parallelogramme. Donc APQR,
t 29.1. eſt parallelipipede, t parquoy le parallelipipede AIDK, eſt egal au parallelipipede APQK, ayant meſme baſe AB, & les lignes inſiſtantes ſont colloquées en meſmes lignes droictes CO, IQ. Semblablement le parallelipipede AMFK, ſera egal au meſme APQK, ayant meſme baſe AB, & les lignes inſiſtantes eſtãs aux meſmes droictes lignes NM, OF. Parquoy les parallelipipedes AIDK, AMFK, ſont egaux entr'eux. Donc les ſolides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Tant cette Propoſition que la precedente, ſe peut ainſi conuertir.

Les ſolides parallelipipedes egaux ſur meſme baſe, ſoit que les lignes inſiſtantes ſoient colloquées en meſmes lignes droictes ou non, ſont de meſme hauteur.

Car ſi l'vn eſt dit plus haut, & d'icelluy eſtant coupé vn parallelipipede de meſme hauteur que
v 29. ou 30. 11. *l'autre,* v *le coupé & l'autre ſeront egaux: & cét autre eſtant poſé egal au tout, le coupé ſera auſſi egal au tout: ce qui eſt abſurde.*

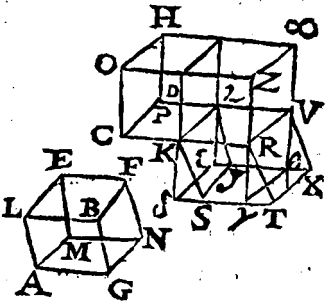
THEOREME 26. PROP. 31.

Les ſolides parallelipipedes, conſtituez ſur baſes egales & de meſme hauteur, ſont egaux entr'eux.

Soient les parallelipipedes AEFG, CHIK, conſtituez

constituez sur baſes egales, A B, C D, & de meſme hauteur. Ie dis qu'iceux ſont egaux entr'eux.

Car ſoient premierement les lignes inſiſtantes A M, G N, L E, B F, perpendiculaires à la baſe A B, & les inſiſtantes C P, K Q, O H, D I, perpendiculaires à la baſe C D. Cela eſtant ainſi, toutes leſdites perpendiculaires ſeront egales entr'elles, eſtans les parallelipipedes de meſme hauteur. Soit prolongée directement C K, & poſée K R, egale à L B, & l'angle R K S, au plan prolongé O K, fait egal à l'angle B L A, & K S, poſée egale à L A, & accomply le parallelogramme K T, ſur lequel ſoit conſtitué le parallelipipede Q S T V, ſelon la hauteur de la perpendiculaire R Q. D'autant que les coſtez K R, K S, ſont égaux à L B, L A, & les angles R K S, B L A egaux, les parallel. K T, L G, ſont egaux & ſemblables.



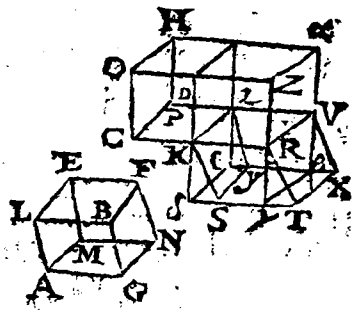
Derechef, d'autant que les coſtez K Q, K S, ſont egaux à L E, L A, [x] & les angles Q K S, E L A, droicts, K Q, L E, eſtans poſées à angles droicts aux plans K T, L G, les parallel. Q S, E A, ſont egaux & ſemblables. [x] 3. d. 11.

Semblablement, les coſtez K R, C Q, eſtans egaux à L B, L E, & les angles Q K R, E L B, droits, les parall. K V, L F, ſont auſſi egaux & ſemblables. Parquoy, [y] puis que les trois plans K T, Q S, K V, du parallelipipede Q S T V, ſont egaux & ſembla- [y] 24. 11.

bles aux trois plans EG, EA, LF, du parall. AEFG: tant ceux-là, que ceux-cy, eſtans egaux aux trois
z 24.11. autres oppoſez, z les parallel. QSTV, EAGF,
10.d. ſont egaux entr'eux.

Que DK, TS prolongées, ſe rencontrent à ♂, & IQ, XY, à ♀, & ſoit accomply le parallelipipede Q♂γV, & HI, βV, prolongées, ſe rencontrent à α & OD, γR, à Z, & ſoit accomply le parallelipipede IKRγ. D'autant que les parallelipipedes QSTV, Q♂γV, ont meſme baſe KV, & meſme hauteur, ſçauoir entre meſmes plans parall. KV, ♂X, les lignes d'iceux inſiſtantes KS, K♂, RT, Rγ, QY, Q♀, VX, Vβ, ſont colloquées en meſmes
a 29.11. lignes droictes ♂T, ♀X, a iceux ſeront egaux entr'eux. Mais le parall. QSTV, eſt egal au parall. EAGF; Donc Q♂γV, ſera egal au meſme EAGF.

b 35.1. Mais b d'autant que KT, Kγ, parall. ſont egaux entr'eux: & KT, egal à LG, Kγ, ſera auſſi egal à LG, c'eſt à dire à CD, les baſes LG, CD, eſtans

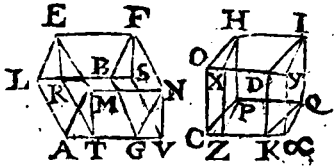


c 7.5. poſées egales: c partant comme
d 25.11. CD, à DK, ainſi Kγ, à DR. d Mais comme la baſe CD, à la baſe DR, ainſi le ſolide CHIK, au ſolide KIαR, le parall. CHαR eſtant coupé par le plan IK, parall. aux plans oppoſez CH, αR. Semblablement comme Kγ, à DR, ainſi le ſolide
e 9.5. Q♂γV, au ſolide IKRα; puis que le parall.

I♂γα,

I δ γ α, est coupé par le plan K V, parall. aux plans oppoſez D α δ β. Donc les parall. C H I K, Q δ γ V, ayant meſme raiſon au meſme ſolide I K R α, ſçauoir que les baſes egales C P, K γ, à la baſe D R. Donc puis que le parall. Q δ γ V, eſt monſtré egal au parall. A E F G, les parall. A E F G, C H I K, ſeront auſſi egaux. Ce qui eſt propoſé.

Maintenant que A M, G N, L E, B F, & C P, K Q, O H, D I, ne ſoient perpendiculaires aux baſes A B, C D : [f] & des poincts E, F, M, N, ſoient menées perpendiculaires E R, F S, M T, N V, au plan de la baſe A B ; & des poincts H, I, P, Q, au plan où eſt la baſe C D, ſoient menées les perpendiculaires H X, I Y, P Z, Q α, icelles ſeront egales, les altitudes deſdits parallelipipedes eſtans egales. Soient menées R S, S V, V T, T R, & X Y, Z α, α I, Z X, pour faire le parall. E T V F, H Z α I, leſquels eſtans de meſme hauteur, & les lignes inſiſtantes perpendiculaires, ils ſeront egaux entr'eux, comme il eſt monſtré.



f 11. 11.

Mais g E T V F, eſt egal à A E F G, ayant meſme baſe & meſme hauteur. Et le parall. H Z α I, eſt egal par meſme raiſon à C H I K. Donc A E F G, C H I K, ſont egaux entr'eux. L'on fera ſemblable demonſtration, ſi les inſiſtantes d'vn parallelipip. ſont perpendiculaires à la baſe, & de l'autre non. Partant les ſolides parallelip. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

g 79. ou 39. 11.

SCHOLIE.

Cette 31. Propoſition ſe peut auſſi conuertir ainſi.

Les ſolides parallel.egaux, conſtituez ſur baſes egales, ſont de meſme hauteur. Et les parallelipipedes egaux qui ſont en meſme hauteur, ſont ſur baſes egales, s'ils n'ont point vne meſme baſe.

Car ſi l'vn eſt dit eſtre plus haut que l'autre, eſtant retranché d'iceluy vn parallelipipede de meſme hauteur que l'autre ; [h] *le retranché ſera egal. Parquoy le tout eſtant poſé egal à cét autre, le retranché ſera egal au tout : ce qui eſt abſurde. Mais s'ils ſont de meſme hauteur, & que l'on croye que la baſe de l'vn, ſoit plus grande que la baſe de l'autre, eſtant retranchée d'icelle vne baſe egale à l'autre, & entendant ſur la retranchée vn parallelipipede de meſme hauteur : on demonſtrera ſemblablement que la partie eſt egale au tout. Ce qui eſt abſurde.*

h 31.11.

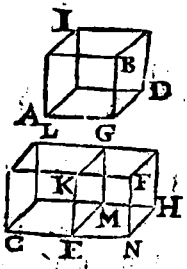
THEOREME 27. PROP. 32.

Les ſolides parallelipipedes de meſme hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes.

Soient les deux parallelipipedes A B C D I E F G H, de meſme hauteur, conſtituez ſur les baſes A B, E F. Ie dis que le ſolide eſt au ſolide, comme la baſe à la baſe.

Car

Car, [i] soit faict sur E K, le paral. C K, egal au parall. A B, ayant l'angle C E K, egal à l'angle E N F. Or les parallelogrammes E F, C K, constitueront le total parallelogramme F C, comme il est demonstré en la 45. du premier liure. i 45. 1.



Donc si les autres plans du parallelip. E F G H, sont prolongez de la part de E G, & que l'on accompliſſe vn total parallelip. C F L H; [k] les parall. A B I D, C K L M, seront egaux, estans constituez sur baſes egales A B, C K, par la construction, & de meſme hauteur par l'hypotheſe. [l] Partant comme le solide C K L M, au solide E F G H, ainsi le solide A B I D, au meſme E F G H. [m] Mais C K L M, est à B F G H, comme la baſe C K, ou la baſe A B, son egale à la baſe E F. Donc le solide A B I D, sera auſſi solide à E F G H, comme la baſe A B, à la baſe E F. Donc les solides parallelipipedes de meſme hauteur sont entr'eux comme leurs baſes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. k 31. 11. l 7. 5. m 25. 11.

SCHOLIE.

On conuertira ainsi cette Propoſition.

Si les solides parallelipipedes sont entr'eux comme leurs baſes, ils seront de meſme hauteur.

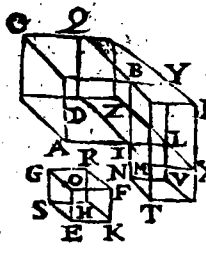
Car si on dit qu'ils ne soient de meſme hauteur. De la plus grande hauteur, ayant retranché vne egale à la moindre; & mené vn plan parallele à la

n 32. 11. *baſe,*[n] *comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le parallelipipede ſera au parallelipipede retranché : Mais il*
o 9. 5. *eſtoit auſſi de meſme au parallelipipede total.*[o] *Donc le retranché eſt egal au tout. Ce qui eſt abſurde.*

THEOREME 28. PROP. 33.

Les ſolides ſemblables parallelipipedes, ſont l'vn à l'autre en raiſon triplée de leurs coſtez homologues, ou de meſme raiſon.

Soient les ſemblables parallelipipedes A B C D, E F G H, ſur baſes ſemblables A B, E F, eſquelles les coſtez de meſme raiſon ſont A I, E K. Ie dis que le parallelipipede A B C D, eſt au parallelipipede E F G H, en raiſon triplée des coſtez homologues A I, E K.



Car, ſoit prolongée A I, à L, & ſoit I L, egale à E K, ou G R : & D I à M, & ſoit I M, egale à H K, ou G O, & B I à N, & ſoit I N, egale à K F, ou G S. Puis ayant accomply les parallelogrammes L M, N L, I T, ſoit acheué le parallelipipede F X I V. D'autant que
p 15. 5. les coſtez I L, I M, ſont egaux aux coſtez G R, G O & les angles contenus d'iceux egaux, l'angle L I M, eſtant egal à A I D, qui à cauſe des parall. ſemblables, eſt egal à E K H, ou R G O ; les parallelogrammes I X, G F, ſeront ſemblables & egaux, & ſemblablement L N, R S, & I T, G E.

Donc

Donc les trois plans I X, L N, I T, du parallelipipede T X I V, ſont ſemblables & egaux aux trois plans G F, R S, G E, du parallelipipede E F G H: q mais trois plans de chacun ſont ſemblables & egaux aux trois autres oppoſez. r Donc les paral- lelipipedes T X I V, E F G H, ſont ſemblables & egaux. q 24. 11. r 10.d.

Derechef, ayant accomply les parallelogrammes M B, B L, L M, ſoit acheué le parallelipipede M P B L; & les parallelogrammes I Y, D L, I Q, accomplis, ſoit auſſi parfaict le parallelipipede I Y Q Z.

D'autant donc, qu'à cauſe des ſemblables parallelipipedes A B C D, E F G H, comme A I, à E K, c'eſt à dire, à I L, ainſi D I, à H K, c'eſt à dire à I M, & B I, à F K, c'eſt à dire à I N. s Mais comme A I, à I L, ainſi le parall. A D, à D L, & comme D I à I M, ainſi le parall. D L, à L M; & comme B I, à I N, ainſi le parall. B L, à L N. Donc comme A D, à D L, ainſi D L, à L M, & B L, à L N. t Mais comme la baſe A D, à la baſe D L, ainſi le parallelip. A D C B, au parallelip. D L Y Q. Et comme la baſe D L, à la baſe L M: ainſi le parall. D L Y Q, au parall. L M B P. & comme la baſe B L, à la baſe L N, ainſi le parallelip. L M B P, au parallelip. L N T X. Partant comme A D C B, à D L Y Q, ainſi D L Y Q, à L M B P, & L M B P, à L N T X. Parquoy les quatre grand. A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X, ſont continuellement proportionaux: v partant la 1. A D C B, eſt à la 4. L N T X: c'eſt à dire à E F G H, en raiſon triplée de A D C B, 1. à D L Y Q, 2. x Mais comme A D C B, à D L Y Q, ainſi la baſe A D, à la baſe D L: y & comme A D, à D L, ainſi s 1. 6. t 32. 11. v 10.d.5. x 32.11. y 1.6.

LA UNIVERSITÉ KATHOLIEKE

ainſi la ligne A I, à I L : c'eſt à dire à E K. Donc le parallelip. A D B C, eſt au parall. E F G H, en raiſon triplée des coſtez homologues : ſçauoir de A I, à E K : Partant, les ſolides ſemblables parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi quatre lignes droictes ſont continuellement propoſt. comme la 1. eſt à la 4. ainſi le parallelip. deſcrit ſur la 1. ſera au parallelip. ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la 2. [z] D'autant que comme il eſt demonſtré, tant le parallelip. eſt au parallelip. que la 1. ligne à la 4. en raiſon triplée de la 1. ligne à la 2. ſçauoir des coſtez homologues.

z 10.d.5.

THEOREME 29. PROP. 34.

Les baſes & les hauteurs des ſolides parallelipipedes egaux, ſont reciproques: Et les ſolides parallelipipedes, deſquels les baſes & les hauteurs ſont reciproques, ſont egaux.

Soient les parallelip. egaux A D C B, E H G F, ſur les baſes A D, E H. Ie dis que leurs baſes & leurs hauteurs ſont reciproques : c'eſt à dire, comme la baſe A D, eſt à la baſe E H, ainſi la hauteur E K, à la hauteur A I.

Car ſi les hauteurs ſont egales, eſtans les parallelip. poſez egaux, [a] les baſes ſeront egales. Donc comme la baſe A D, à la baſe E H; ainſi la hauteur

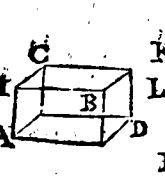
a Sc. 31.11.

E K,

E K, à la hauteur A I : partant les baſes & les hauteurs ſont reciproques.

Que ſi les hauteurs A I, E K ſont inegales, ſoit E K plus grande, de laquelle ſoit retranchée E L, egale à A I, & ſoit entendu le plan L M parallele à la baſe, E H coupant le parallelipipede.

D'autant donc que les ſolides A D C B, E H G F, ſont egaux ; [b] comme A D C B, à E H M L, ainſi E H G F, à E H M L : [c] mais comme le ſolide A D C B, au ſolide E H M L, ainſi la baſe A D, à la baſe E H, les hauteurs A I, E L, eſtans poſées egales. Et comme le ſolide E H G F, au ſolide E H M L, ainſi par la meſme raiſon la baſe K N, à la baſe L N, puis que par cette raiſon, *K* H G F, E H M L, ſolides, ont meſme hauteur, K N, L N, eſtant poſées pour baſes : car ils ſeront, entre meſmes plans paralleles K N, G H. Donc comme la baſe A D, à la baſe E H, ainſi la baſe K N, à la baſe L N : [d] mais comme K N à L N, ainſi la ligne E K, à la ligne E L : c'eſt à dire à A I, egale à E L. Donc comme la baſe A D, à la baſe E H, ainſi la hauteur, E K, à la hauteur A I. Donc les hauteurs & les baſes ſont reciproques.



b 7. 5.

c 32. 11.

d 1. 6.

Soient maintenant les baſes & les hauteurs reciproques. Ie dis que les parallelipipedes ſont egaux. Car ſi les hauteurs E K, A I, ſont egales, la baſe A D eſtant poſée à la baſe E H, comme la hauteur E K, à la hauteur A I : les baſes A D, E H ſeront egales : [e] Parquoy les parallelipipedes

e 31. 11.

ADCB, EHGF, seront egaux entr'eux, ayans baſes egales & meſme hauteur.

Mais ſi la hauteur EK eſt plus grande, ſoit retranchée EL, egale à AI, & ſoit entendu le plan LM, parallele à EH.

D'autant donc que comme la baſe AD, eſt à la baſe EH, ainſi la hauteur EK, à la hauteur AI, par l'hypotheſe, c'eſt à dire à EL, egale à AI: [d] Mais comme la baſe AD, à la baſe EH, ainſi le ſolide ADCB, au ſolide EHML, les hauteurs AI, EL, eſtans poſées egales: [g] & comme EK à EL, ainſi KN, à LN; [h] Mais comme la baſe KN, à la baſe LN, ainſi le ſolide EHGF, au ſolide EHML: les ſolides EHGF, EHML, ayans meſme hauteur, ſi on poſe KN, LN, pour baſes: Car ainſi ils ſeront entre plans paralleles KN, GH; comme le ſolide ADCB, ſera au ſolide EHML, ainſi le ſolide EHGF, au meſme ſolide EHML: [i] partant les ſolides ADCB, EHGF, ſeront egaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

32.11.

1.6.

32.11.

9.5.

SCHOLIE.

Or l'on doit noter, que les hauteurs des ſolides doiuent eſtre perpendiculaires: parquoy ne l'eſtant, faudroit faire comme à la fin de la 31. de ce liure. Toutes les choſes demonſtrées aux ſix dernieres Propoſitions, ſçauoir 29.30.31.32.33. & 34. conuiennent aux priſmes qui ont deux plans oppoſez triangulaires, les hypotheſes ſuſdites eſtans obſeruées.

Car à deux tels priſmes de meſme hauteur, conſtituez ſur meſme baſe ou baſes egales, eſtans apposez deux autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, on

fera

fera deux parallelipipedes de meſme hauteur, conſtituez ſur vne meſme baſe, ou ſur egales. [k] *Donc ces parallelipipedes ſeront egaux ; & partant auſſi les priſmes donnez, ſçauoir leurs moitiez.* k 29. 30. ou 31. 11.

Derechef, aux deux ſuſdits priſmes de meſme hauteur, conſtituez ſur diuerſes baſes, eſtans adiouſtez deux autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, on fera auſſi deux parallelipipedes de meſme hauteur. l 32. 11. *Parquoy le parallelipipede ſera au parallelipipede, comme la baſe à la baſe,* [m] *& partant, le priſme au priſme, ſçauoir la moitié d'vn des parallelipipedes, à la moitié de l'autre, comme la meſme baſe à la baſe, ſi les baſes des priſmes ſont parallelogrammes, ou comme le triangle au triangle, ſçauoir comme la moitié d'vne des baſes, à la moitié de l'autre, ſi les baſes des priſmes ſont triangles.* m 15. 5.

D'auantage, ſi aux deux priſmes ſemblables ſuſdits, ſont adiouſtez deux autres priſmes ſemblables & egaux à iceux, deux parallelipipedes ſemblables ſeront conſtituez, [n] *qui ſeront entr'eux en raiſon triplée, de leurs coſtez homologues. Donc leurs priſmes, ſçauoir eſt leurs moitiez,* [o] *ayans meſme raiſon que les parallelipipedes, ſeront en raiſon triplée, de la raiſon de leurs coſtez homologues, qui ſont auſſi coſtez homologues des priſmes.* n 33. 11. o 15. 5.

Finalement, ſi auſdits deux priſmes egaux, ſont adiouſtez deux autres priſmes egaux, & ſemblables à iceux deux parallelipipedes egaux, de meſme hauteur que les priſmes ſeront compoſez. [p] *Parquoy les baſes & les hauteurs des parallelipipedes eſtans reciproques, & les baſes des priſmes eſtans les meſmes,* p 34. 11.

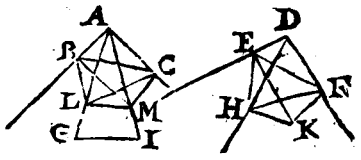
q 15. 5. *ou les triangles qui ſont moitiez d'icelles, q ayans meſme raiſon : les baſes des priſmes & leurs hauteurs ſeront reciproques.*

THEOREME 30. PROP. 35.

p S'il y a deux angles plans egaux, au ſommet deſquels ſoient eſleuées deux lignes droictes en l'air, contenans angles egaux auec les lignes premierement poſées chacun au ſien : Et aux lignes eſleuées en l'air, l'on prend quelconques poincts, & d'iceux on mene des lignes perpendiculaires, aux plans où ſont les angles premierement poſez ; Mais des poincts qui ſont faicts aux plans par les perpendiculaires, ſont conioinctes des lignes droictes : icelles contiendront angles egaux, auec les lignes menées en l'air.

Soient deux angles egaux B A C, E D F, & des ſommets A & D, ſoient menées en l'air A G, D H, en ſorte que l'angle B A G, ſoit egal à E D H, & C A G, à F D H : & des poincts G & H, pris en A G, D H, ſoient menées G I, H K, perpendiculaires aux plans des angles B A C, E D F, & conioinctes I A, K D. Ie dis que les angles G A I, H D K, ſont egaux entr'eux.

Car ſi A G, D H, ſont inegales de la plus grande A G, ſoit priſe A L, egale à D H, & de L, ſoit menée



née L M, parallele à G I, au plan du triangle A G I: d'autant que G I, L M, ſont paralleles, & G I eſt à angles droicts, au plan de l'angle B A C: [r] L M ſera auſſi à angles droicts au meſme plan: [r] 8. 11. des poincts M, K, ſoient menées les perpendiculaires M B, M C, K E, K F, à A B, A C, D E, D F: & conioinctes B C, B L, L C, E F, E H, H F.

Et d'autant que L M, eſt angles droicts au plan B A C, [ſ] elle fera angle droict auec A M, menée au meſme plan. [t] Parquoy le quarré de A L, ſera egal aux quarrez de A M, M L. [v] Mais le quarré de A M, eſt egal aux quarrez de A C, C M, l'angle A C M, eſtant droict par la conſtruction. Donc le quarré de A L, eſt egal aux quarrez de A C, C M, M L: [x] Mais le quarré de C L, eſt egal aux quarrez de C M, M L, [y] l'angle C M L eſtant droict. Donc le quarré de A L, eſt egal aux quarrez de A C, C L: [z] partant, l'angle A C L, ſera droict. [a]

[ſ] 3. d. [t] 47. 1. [v] 47. 1. [x] 47. 1. [y] 3. d. [z] 48. 1. [a] 47. 1.

Derechef, puis que le quarré de A L, [b] eſt egal aux quarrez de A M, M L: [c] mais le quarré de A M, eſt egal aux quarrez de A B, B M, l'angle A B M eſtant droict par la conſtruction; le quarré de A L, eſt egal aux quarrez de A B, B M, M L: mais le quarré de B L, eſt egal aux quarrez de B M, M L, [d] l'angle B M L eſtant droict. Donc le quarré de A L, eſt egal aux quarrez de A B, B L: [e] partant, l'angle A B L ſera droict: par meſme raiſon D F H, D E H, ſeront monſtrez droicts.

[b] 47. 1. [c] 47. 1. [d] 3. d. [e] 48. 1.

D'autant

[d] D'autant donc que les angles A B L, L A B, du triangle L A B, ſont egaux à D E H, H D E, du triangle D E H: & A L, D H, ſont egaux: [f] les autres coſtez A B, B L, ſeront egaux aux autres D E, E H. Semblablement A C, C L, ſeront egales à D F, F H. Parquoy les coſtez A B, A C, du triangle A B C, ſont egaux à D E, D F, du triangle D E F; & les angles contenus d'iceux B A C, E D F, egaux par l'hypotheſe: [g] les baſes B C, E F, ſeront egales, & A B C, A C B, egaux à D E F, D F E, chacun au ſien: mais les touts A B M, A C M, ſont egaux aux touts D E K, D F K, eſtans tous droicts; donc les reſtans M B C, M C B, ſeront egaux aux reſtans K E F, K F E. Partant B C, E F, eſtans monſtrez egaux, les coſtez [h] B M, C M, ſeront egaux aux coſtez E K, F K.

D'autant donc que A C, C M, du triangle A C M, ſont monſtrez egaux à D F, F K, du triangle D F K, & A C M, D F K, droicts; les [i] baſes A M, D K, ſeront egales entr'elles: & B L, E H, eſtans monſtrées egales, leurs quarrez ſeront egaux. [k] Mais d'autant que le quarré de B L, eſt egal aux quarrez de B M, M L, & le quarré de E H, egal aux quarrez de E K, K H: [l] B M L, E K H, eſtans droicts, des quarrez de B M, M L, ſeront egaux aux quarrez de E K, K H.

Ayant donc oſté les quarrez egaux de B M, E K, monſtrées egales, les quarrez reſtans de L M, H K, ſeront egaux: & partant L M, H K, egales. Parquoy puis que les coſtez A L, A M, du triangle A L M, ſont egaux à D H, D K, du triangle D H K, & la baſe L M, egale à la baſe H K: [m] les angles L A M, H D K, ſeront egaux. Donc ſi deux angles plans, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROL

COROLLAIRE.

Partant, s'il y a deux angles plans egaux, des sommets desquels l'on ait mené en l'air des lignes droictes egales, contenant angles egaux, auec les lignes premierement posées, chacun au sien. Les perpendiculaires menées des extremitez d'icelles lignes esleuées en l'air sur les plans des angles premierement posez, seront egales entr'elles. Car les angles plans B A C, E D F, estans posez egaux, & A L, D H, esleuées en haut, constituans angles egaux, L A B, H D E, & L A C, H D F, il a esté demonstré que L M, H K, perpendiculaires, sont egales entr'elles.

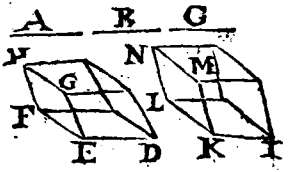
THEOREME 31. PROP. 36.

S'il y a trois lignes droictes proportionelles ; Le solide parallelipipede constitué d'icelles, est egal au solide parallelipipede, descrit de la moyenne, pourueu qu'il soit equilateral ; mais equiangle au susdit.

Soient A, B, C, continuellement proportionelles, & soit constitué l'angle solide E, de trois angles plans quelconques, D E F, D E G, F E G, en sorte que D E, soit egale à A ; & E F, à B, & E G à C. Et ayant accomply les parallelogrammes D F, F G, G D, soit acheué le parallelipipede D H, qui est dit estre contenu des trois lignes A, B, C, ou faict d'icelles. [n] Puis à la droicte I K, & à vn poinct d'i- n 26. 11.

celle

celle K, ſoit faict l'angle ſolide K, egal à l'angle ſolide E, des trois angles plans I K L, I K M, L K M, qui ſoient egaux aux trois D E F, D E G, F E G, en ſorte que I K, K L, K M, ſoient egales chacune à la moyenne B. Et ayant accomply les parallelogrammes I L, L M, M I, ſoit acheué le parallelipipede I N, qui eſt dit eſtre contenu ſous la ligne B, ou deſcrit d'icelle. Ie dis que le ſolide D H, eſt egal au ſolide I N.



Car puis que comme D E, à I K, ainſi K M à E G, (D E eſtant priſe egale à A, & I K, K M, à B, & E G, à C,) & les angles D E G, I K M, egaux à B: o 14.6. o les parallelogrammes D G, I M, ſeront egaux, ayans les coſtez autour des angles egaux reciproques: Mais d'autant que les angles plans D E G, I K M ſont egaux, du ſommet deſquels ſont menées les lignes E F, K L en l'air, contenant angles egaux, auec les lignes premierement poſées par la conſtruction, chacun au ſien: les perpendiculaires menées de F, L, au plan des baſes D G, I M, ſçauoir p Cor. 35. 11. les hauteurs des parallelipipedes D H, I N, ſi les baſes D G, I M, ſont p egales entr'elles. q Partant, q 31. 11. les parallelipipedes D H, I N, ayans les baſes D G, I M egales, & les hauteurs auſſi egales, ſeront egaux entr'eux. Donc ſi trois lignes droictes ſont proportionelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

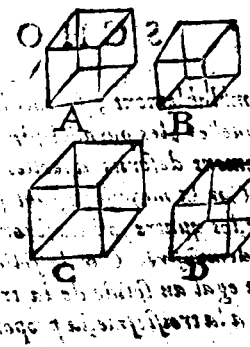
THEO

THEOREME 32. PROP. 37.

Si quatre lignes droictes sont proportionelles ; les solides parallelipipedes semblables, & semblablement descrits d'icelles, seront aussi proportionaux : Et si les solides parallelipipedes, lesquels sont aussi semblables & semblablement descrits, sont proportionaux : lceelles lignes droictes seront aussi proportionelles.

Soient quatre lignes proportionelles A, B, C, D, sçauoir comme A à B, ainsi C à D. Et soient constituez sur A & B, deux parallelipipedes A & B semblables & semblablement descrits.

Item, sur C & D, deux autres C & D, semblables & semblablement posez, soit que ceux-cy soient semblables à ceux-là, ou non. Ie dis que comme le solide A, est au solide B, ainsi le solide C, au solide D.



Car, [a] puis que le solide A, est au solide B : en raison triplée de la droicte ligne A, à la droicte B. Item, le solide C, au solide D, en raison triplée de [a] 33. 11.

la ligne droicte C, à la droicte D : les raiſons des ſolides A à B, & C à D, ſeront egales, d'autant qu'elles ſont triplées des raiſons egales, ſçauoir de la raiſon de la ligne droicte A, à la droicte B, & de la ligne droicte C, à la droicte D. Ce qui eſt premierement propoſé.

Secondement, ſoit comme le ſolide A, au ſolide B, ainſi le ſolide C, au ſolide D. Ie dis que comme la ligne droicte A, eſt à la ligne droicte B, ainſi la droicte ligne C, eſt à la droicte D. b

b 33. 11.

Car, puis que le ſolide A, eſt au ſolide B, en raiſon triplée, de la raiſon de la ligne A, à la ligne B. Item, le ſolide C, eſt au ſolide D, en raiſon triplée de celle de la ligne C, à la ligne D : les raiſons des lignes A à B, & de C à D, ſeront egales. D'autant que les raiſons d'icelles triplées, ſçauoir du ſolide A, au ſolide B, & du ſolide C, au ſolide D ; ſont poſées egales. Ce qu'il falloit ſecondement demonſtrer.

SCHOLIE.

Semblablement, ſi trois lignes droictes ſont proportionelles, les parallelipipedes ſemblables & ſemblablement deſcrits d'icelles, ſeront proportionaux, &c. Car la moyenne eſtant poſée deux fois auec ſon ſolide, les quatre ſolides ſeront proportionaux, comme il eſt demonſtré. Car le ſolide de la ſeconde ligne eſtant egal au ſolide de la troiſieſme, & la ſeconde egale à la troiſieſme, la propert. eſt manifeſte.

THEO

THEOREME 33. PROP. 38.

Si vn plan est perpendiculaire à vn plan, & de quelque poinct de ceux qui sont en l'vn des plans, l'on mene vne ligne perpendiculaire à l'autre plan : La perpendiculaire menée tombera sur la commune section des plans.

Soit le plan A B, perpendiculaire au plan A C, & leur commune section soit A D ; & du poinct E, du plan A B, soit menée vne perpendiculaire au plan A C. Ie dis qu'icelle tombera sur la commune section A D.



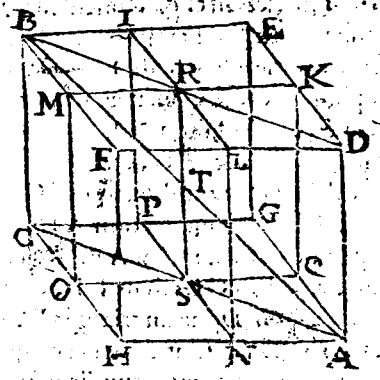
Car autrement, qu'elle tombe ailleurs, s'il est possible, comme à F, [c] & de F au plan A C, soit menée F G, perpendiculaire à A D, & soit conioincte E G, au plan A B. D'autant donc que F G est perpendiculaire à la commune section A D, [d] elle sera aussi perpendiculaire au plan A B. [e] Et partant, perpendiculaire aussi à G E : mais E F, est aussi perpendiculaire à F G. Donc au triangle E F G, les deux angles E F G, E G F, sont droicts : ce qui est absurde, [f] estans moindres que deux droicts. Donc la perpendiculaire menée de E, au plan A C, ne tombera hors la commune section, donc sur icelle. Partant, si vn plan est perpendiculaire à vn plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

c 12. 1.
d 4. d.
e 3. d.
f 17. 1.

THEOREME 34. PROP. 39.

Si les coſtez des plans oppoſez d'vn ſolide parallelipipede, ſont coupez en deux egalement; & que par les ſections l'on mene des plans, la commune ſection des plans, & le diametre du ſolide parallelipipede, ſe couperont egalement l'vn l'autre.

Soient les plans oppoſez A C, B D, du ſolide parallelipide A B, deſquels tous les coſtez ſoient coupez en deux egalement aux poincts I, K, L, M, N, O, P, Q, par leſquels ſoient menez deux plans I N, K O, dont la commune ſection ſoit R S, ſoit auſſi mené le diametre A B. Ie dis que la droicte ligne R S, & le diametre A B, ſe coupent en deux egalement.



Car ayant conioint R B, R D, S A, S C: ſoient conſiderez deux triangles A Q S, C O S. D'autant donc que les coſtez A Q, Q S, du triangle A Q S, ſont egaux aux coſtez C O, O S, du triangle C O S;

(car

car A Q, C Q, sont moitiez des egales A G, C H, & Q S, O S, sont egales aux deux egales A N, H N, estans A S, H S, parallelogrammes : & l'angle A Q S, egal à l'alterne C O S : les bases A S, C S, seront egales, & les angles A S Q, C S O, egaux ; Mais les angles A S Q, A S O, sont egaux à deux droicts : Donc C S O, A S O, sont aussi egaux à deux droicts : partant A S, C S, feront vne seule ligne droicte. Semblablement B R, D R, seront monstrées egales, & faire vne seule ligne droicte.

g 34.1. h 29.1. i 4.1. k 13.1. l 14.1.

Derechef, d'autant que tant A D, que B C, est parallele & egale à F H, à cause des parallelogrammes A F, F C, elles seront aussi paralleles entr'elles & egales. Parquoy A C, B D, qui les conioignent aux extremitez, sont aussi egales & paralleles : Donc leurs moitiez A S, B R, sont egales.

m 9.11. n 33.11.

Mais d'autant que A C, B D, sont paralleles, A B, R S, seront en vn mesme plan auec icelles; partant se couperont l'vne l'autre, sçauoir au poinct T. Mais puis que les deux angles A S T, A T S, du triangle A S T, sont egaux aux deux B R T, B T R, du triangle B R T, & le costé A S, au costé B R : les autres costez T A, T S, seront egaux aux autres T B, T R : partant A B, R S, se coupent l'vne l'autre en deux egalement au poinct T : parquoy si les costez opposez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

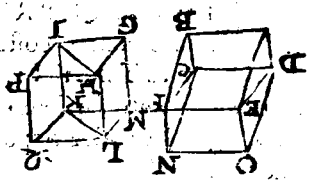
o 7.11. p 29. & 15.1. q 26.1.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cette demonſtration, qu'en tout parallelipipede tous les diametres ſe coupent l'vn l'autre en deux egalement à vn poinct: ſçauoir au poinct T, où ils diuiſent en deux parties egales (comme il eſt monſtré icy,) la ligne R S. Et tout plan coupant le parallelipipede en deux egalement, paſſe par le centre d'iceluy, comme par le poinct T.

THEOREME 35. PROP. 40.

Si deux priſmes ſont de meſme hauteur, deſquels l'vn ait vn parallelogramme pour baſe, & l'autre vn triangle; & que le parallelogramme ſoit double du triangle, iceux priſmes ſeront egaux.



Soient deux priſmes d'egale hauteur, A B C D E F, G H I K L M, dont celuy-là ait pour baſe le parallelogramme A B C D, & cettuy-cy le triangle G H I, & ſoit le parallelogramme A C, double du triangle G H I. Ie dis qu'iceux priſmes ſont egaux.

Car ſoient accomplis les parallelipipedes A N, G Q, prolongeant les plans des triangles, pour faire les parallelogrammes B N, A O, G P, M Q:

Car

Car ayant mené N O, P Q, on aura constitué deux parallelipipedes A N, G Q, de mesme hauteur que les prismes, & desquels les plans opposez sont paralleles, comme il est facile à colliger de la 15. Proposition de ce liure. r 34.1.

D'autant donc que le parallelogramme G P, est double du triangle G H I, & le parallelogramme A C, est posé double du mesme triangle G H I, les parall. A C, G P, seront egaux. s Partant A N, G Q, s 31.11. de mesme hauteur, & sur bases egales A C, G P, sont egaux entr'eux. Donc leurs moitiez, (sçauoir les prismes A B C D E F, G H I K L M, (car les t 32.11. parallelipipedes A N, G Q, sont coupez chacun en deux prismes egaux, par les diametres des plans opposés C F, D E, H I, L K) sont aussi egaux entr'eux. Donc si deux prismes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

FIN DV ONZIÈSME LIVRE des Elements d'Euclide.

LIVRE DOVZIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE:

Et le second des Solides.

THEOREME 1. PROP. 1.

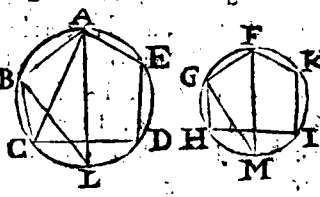
Les Polygones semblables, inscrits aux cercles, sont l'vn à l'autre, comme les quarrez descrits des diametres des cercles.

SOIENT deux polygones semblables A B C D E, F G H I K, descrits aux cercles, desquels les diametres sont A L, F M. Ie dis que le polygone A B C D E, est au polygone F G H I K, comme le quarré du diametre A L, au quarré du diametre F M.

Car, soient menées A C, F H, soustendantes les angles egaux A B C, F G H, & soient conioinctes B L, G M. Donc à cause de la semblance des polygones,

(*Soit tirée une ligne de F à H, qui est laissée en la figure.*)

gones, A B estant à B C, comme F G à G H, v les triangles A B C, F G H, seront equiangles, ayans les costez autour des angles



v 6. 6.

egaux A B C, F G H, proportionaux: x mais l'angle A L B, est egal à l'angle A C B, & l'angle F M G, egal à F H G; Donc A L B, F M G, seront egaux. Parquoy A B L, F G M, estans aussi egaux, y sçauoir droicts aux demy-cercles, z les restans B A L, G F M, seront egaux. a Donc comme A L, à A B, ainsi F M à F G: & en changeant, comme A L à F M, ainsi A B à F G. Partant, comme le quarré de A L, au quarré de F M, ainsi le polygone A B C D E, descrit sur la droicte ligne A B, au polygone F G H I K, descrit sur F G; puis que tant les quarrez que les polygones sont figures semblables, & semblablement descrites. Donc les polygones semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

x 21. 3. y 31. 3. z 32. 1. a 4. 6. 22. 6.

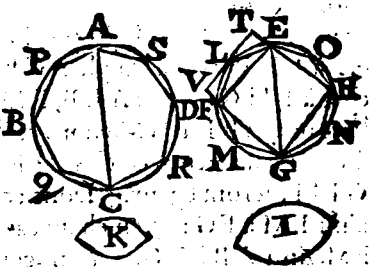
THEOREME 2. PROP. 2.

Les cercles sont l'vn à l'autre, comme les quarrez de leurs diametres.

Soient les deux cercles A B C D, E F G H, dont les diametres sont A C, E G. Ie dis que comme le

quarré de A C, eſt au quarré de E G, ainſi le cercle A B C D, eſt au cercle E F G H : c'eſt à dire, que ſi on entend que comme le quarré de A C, eſt au quarré de E G, ainſi le cercle A B C, ſoit à quelqu'autre figure 4. proportionelle, comme à I, que I eſt egale au cercle E F G H.

Car, s'il n'eſt ainſi, I ſera moindre ou plus grande : Que I ſoit donc premierement plus petite, ſi faire ſe peut, & le cercle E F G H, ſoit plus grand que I, de la figure K. [b] Mais pouuant retrancher plus de la moitié du cercle E F G H, & du reſte plus de la moitié, tant de fois qu'il demeure à la fin vne grandeur moindre que K : ſoit [c] inſcrit en iceluy cercle le quarré E F G H, qui ſera plus grand que la moitié du cercle. Si les quatre ſegments du cercle ſont moindres que K, l'on a le requis : ſinon, ſoient coupez les arcs E F, F G, G H, H E, en deux egalement par L, M, N, O : & ſoit inſcrit l'octogone au cercle, menant B L, L F, F M, M G, G N, N H, H O, O E. Il appert qu'il y aura quatre triangles egaux, dans les quatre ſegments egaux, & que chacun comme F L E, excedera la moitié de ſa ſection, le triangle Iſoſcele E L F, [d] eſtant moitié du rectangle de meſme hauteur, deſcrit ſur la baſe E F, comme E V, qui eſt plus grand que la ſection F L E.



b 10. 10.

c 6. 4. Sch. 9. 4.

d 41. 1.

Maintenant ſoient les huict figures reſtantes

F M,

FM,MG,&c. plus petites que K. Car si ainsi n'estoit, il faudroit diuiser les arcs derniers, & touſiours inſcrire des polygones, dont le dernier auroit les coſtez doubles en multitude à ceux de ſon precedent, & oſter touſiours plus de la moitié de chaque ſegment, à ſçauoir ſon triangle Iſoſcele. Il eſt euident que les dernieres ſections ſeront en fin moindres que K.

Finalement, ſoient donc leſdites huict ſections reſtantes moindres que K : il eſt manifeſte que ledit octogone ſera plus grand que I; I & K enſemble eſtans egales au cercle E F G H. Soit auſſi deſcrit vn octogone ſemblable dans le cercle ABCD, coupant en deux egalement chacun des demy-cercles A B C, A D C, par B & D, & chaque partie derechef en deux egalement par P, Q, R, S : & ayant conioint des lignes droictes à tous leſdits poincts; Il eſt manifeſte que la figure octogone inſcrite, ſera ſemblable à l'octogone inſcrit au cercle E F G H, [e] & ledit octogone du cercle ABCD, [e] 1.12. ſera à l'octogone du cercle E F G H, comme le quarré du diametre AC, au quarré du diametre EG: mais comme le quarré de A C, au quarré de E G: ainſi le cercle A B C D, eſt à I : [f] donc comme le [f] 11.5. polygone A Q S, au polygone E M O, ainſi le cercle A B C ſera à I. Mais le polygone A Q S, eſt moindre que le cercle A B C, [g] donc le polygone [g] 14.5. E M O, ſera moindre auſſi que I, ce qui eſt abſurde, eſtant monſtré plus grand. Donc la figure I ne peut eſtre moindre que le cercle E F G H.

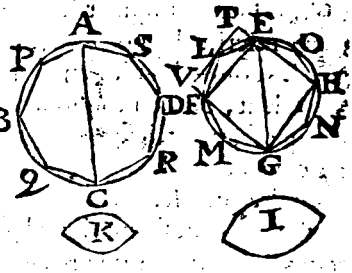
Elle ne peut auſſi eſtre plus grande : car le cercle A B C eſtant à I, comme le q. de A C, au quarré de E G, en changeant I ſera au cercle ABC, comme le q. de E G, au q. de A C : mais ſoit entendu que

comme

comme I eſt au cercle A B C, ainſi le cercle E F G, à quelque autre, comme à K:

14.5. donc[h] comme I eſt plus grande que le cercle E F G, ainſi le cercle A B C, ſera plus grand

11.5. que K, [i] & le cercle A B C, ſera à K, comme le quarré de A C, au quarré de E G: ce qui eſt contre la premiere partie de cette Propoſition, où eſt monſtré qu'vn des cercles eſtant à vne figure en la raiſon des quarrez des diametres: que telle figure ne peut eſtre moindre que l'autre cercle: donc I ne peut eſtre plus grande que le cercle E F G, ny moindre, comme en la premiere partie: partant égale. Donc les cercles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



COROLLAIRE.

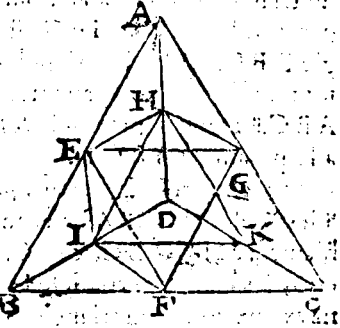
De là s'enſuit, que comme le cercle eſt au cercle, ainſi le polygone deſcrit en celuy-là, eſt au polygone ſemblable deſcrit en cettuy-cy: puis que tant le cercle eſt au cercle, que le polygone au polygone, comme le quarré du diametre au quarré du diametre; comme il eſt demonſtré.

THEO

THEOREME 3. PROP. 3.

Toute Pyramide ayant la baſe triangulaire, ſe peut diuiſer en deux pyramides egales, & ſemblables entr'elles, ayans les baſes triangulaires, & ſemblables à la toute; Et en deux priſmes egaux, leſquels deux priſmes ſont plus grands que la moitié de toute la pyramide.

Soit la pyramide, dont la baſe eſt le triangle A B C, & le ſommet D. Soient coupez tous les coſtez en deux egalement par E, F, G, H, I, K, & conjointes E F, F G, G E, H I, I K, K H, H E, E I, I F. Ainſi elle eſt diuiſée en deux pyramides A E G H, H I K D: dont les baſes ſont les triangles A E G, H I K, & les ſommets H, D; & en deux ſolides E B F G H I, C F G H I K, dont la baſe de celuy-là eſt le parallelogramme E B F G, & les triangles E H G, B I F; mais la baſe de celuy-cy



eſt le triangle C F G, auquel eſt oppoſé le triangle K I H, leſquels priſmes ont pour terme commun le parallelogramme F G H I, compoſans auec les

deux

deux pyramides, la pyramide totale. Ie dis que ces deux pyramides ſont egales & ſemblables entr'elles, & ſemblables à la toute, & que ces deux priſmes ſont egaux entr'eux, & plus grands que la moitié de toute la pyramide.

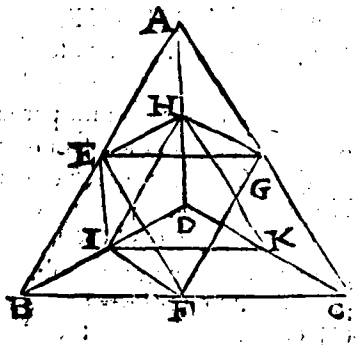
Car A D, D B, coſtez du triangle A D B, eſtans coupez en deux egalement, & partant proportionnellement [k] H I, A B ſeront paralleles, & auſſi I K, B C, & H K, A C, & E G, B C, & E F, A C, & F G, A B, & E H, B D, E I, A D, & I F, D C : & H G, D C paralleles par meſme raiſon. [l] Mais F G, H I eſtans paralleles à A B, ſont parall. entr'elles, & ainſi G H, F I, eſtans parall. à D C, le ſont auſſi entr'elles: donc A E I H, H E B I, I D H E, E B F G, G H K C, C K I F, F G H I. ſont parallelogrammes. Mais H E, H G, eſtans parall. à D B, D C, les [m] angles E H G, B D C, ſont egaux : par meſme raiſon H E G, D B C, & H G E, D C B, ſeront egaux. [n] Partant les coſtez du triangle H E G, ſont proportionaux aux coſtez du triangle D B C, à l'entour des angles egaux: parquoy le triangle H E G, eſt ſemblable au triangle D B C. [o] Mais les triangles H A E, H A G, A E G, ſont auſſi ſemblables aux triangles D A B, D A C, A B C. [p] Donc la pyramide A E G H, eſt ſemblable à la pyramide A B C D.

Derechef, H I, H K, eſtans paralleles à A B, A C: [q] les angles I H K, B A C, ſeront egaux : & ſemblablement H I K, A B C, & H K I, A C B, egaux. [r] Parquoy les coſtez du triangle H I K, ſont proportionaux aux coſtez du triangle A B C, autour des angles egaux, & le triangle H I K, eſt ſemblable au triangle A B C : mais les triangles D H I, D I K, D K H, ſont [t] ſemblables aux triangles D A B, D C B, D C A, donc la pyramide [t] H I K D, eſt auſſi ſemblable

k 2. 6.
l 9. 11.
m 10. 11.
n 4. 6.
o Cor. 4. 6.
p 9. d. 11.
q 10. 11.
r 4. 6.
t Cor. 4. 6.
t 9. d. 11.

à la

à la pyramide A B C D. Mais les triangles A H E, H D I, eſtans ſemblables au triangle à A D B, comme [v] il eſt monſtré, [x] ſeront auſſi ſemblables entr'eux, & eſtans conſtituez ſur A H, H D egales, [y] ils ſeront egaux: par meſme raiſon A H G, H D K, ſeront egaux & ſemblables, eſtans monſtrez ſemblables au triangle A D C, & conſtituez ſur lignes egales A H, H D: & ainſi les triangles A E G, H I K, ſeront egaux & ſemblables, eſtans monſtrez ſemblables au triangle A B C, & poſez ſur A E, H I egales, [z] eſtans les coſtez oppoſez du parallelogramme A E H I.



v Cor. 4. 6.
x 21. 6.
y Lemme 22. 6.
z 34. 1.

Item, E H G, I D K, ſeront egaux & ſemblables, eſtans monſtrez ſemblables au triangle B D C, & ayans H E, D I egales [a] au parallelogramme H E I D. Donc les pyramides A E G H, H I K D, [b] ſont egales & ſemblables, tous les triangles de l'vne eſtans monſtrez egaux & ſemblables à tous les triangles de l'autre.

a 34. 1.
b 10. d. 11.

Derechef, [c] E H, H G, G E, eſtans egales & paralleles à B I, I F, F B, aux parallelogrammes E H I B, F G H I, B F G E: les triangles E H G, B F I, [d] ſeront equiangles & egaux entr'eux: & partant ſemblables; mais ils ſont auſſi paralleles, E H, H G, par leſquelles le plan E H G eſt mené, eſtans paralleles à B I, I F, par leſquelles eſt mené le plan B I F.

c 34. 1.
d Cor. 8. 11. 15. 11.

Donc

Donc le ſolide B I F G H E, contenu des deux triangles E H G, B I F, egaux, ſemblables & paralleles oppoſez, & des trois parallelogrammes E G F B, B E H I, I F G H, eſt priſme par la definition. Ainſi le ſolide C F G H I K, ſera monſtré priſme : car F C, C G, G F eſtans egales & paralleles à I K, K H, H I, aux parallelogrammes C F I K, C G H K, F G H I, les triangles C F G, H I K, ſeront egaux & equiangles entr'eux, & partant ſemblables : c Mais ils ſont paralleles, C F, C G, par leſquelles eſt mené le plan C F G, eſtans parall. à K I, K H, par leſquelles paſſe le plan K I H. Donc le ſolide C F G H I K, contenu des deux triangles oppoſez C F G, H I K, egaux, ſemblables & paralleles, & des trois parallelogrammes C F I K, K H G C, I F G H, eſt priſme : & iceux priſmes E B F G H I, C F G H I K, ſont de meſme hauteur, ſçauoir entre les plans parall, B C G E, H I K, & la baſe quadrangulaire eſtant double de la triangulaire : f ils ſerõt egaux entr'eux,

34. 1.

c 15. 11.

f 40. 11.

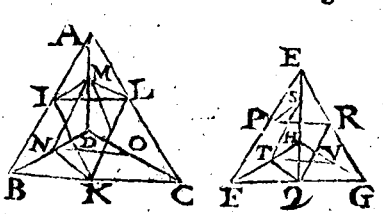
Finalement, le priſme E B F G H I, eſtant plus grand que la pyramide E B F I, le tout que ſa partie, mais E B F I, pyramide, eſt egale & ſemblable à la pyramide A E G H, & auſſi à la pyramide H I K D, comme il eſt manifeſte par l'egalité & ſimilitude des triangles. Les priſmes E B F G H I, C F G H I K, ſeront plus grands que les pyramides A E G H, H I K D. Partant iceux priſmes excedent la moitié de la pyramide totale A B C D : mais icelles pyramides defaillent de la moitié de la meſme totale. Car vn tout eſtant diuiſé en deux parties inegales, la plus grande partie excede la moitié d'iceluy, & la moindre defaut d'icelle moitié. Donc toute pyramide ayant la baſe triangulaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

FIN

THEOREME 4. PROP. 4.

S'il y a deux pyramides de meſme hauteur, ayans les baſes triangulaires, & que chacune d'icelles ſoit diuiſée en deux pyramides egales entr'elles, & ſemblables à la toute, & en deux priſmes egaux. Et que ſemblablement l'vne & l'autre des pyramides prouenuës de cette premiere diuiſion ſoit diuiſée; & que cela ſe faſſe touſiours de meſme façon: comme la baſe de l'vne des pyramides ſera à la baſe de l'autre, ainſi auſſi tous les priſmes qui ſont en l'vne des pyramides, ſeront à tous les priſmes de l'autre, egaux en multitude.

Soient ſur les baſes triangulaires A B C, E F G, deux pyramides A B C D, E F G H, de meſme hauteur, dont les coſtez ſoient diuiſez en deux egalement, & conioinctes des lignes droictes des diuiſions, comme en la precedente, en ſorte que chacune ſoit diuiſée en deux pyramides egales entr'elles, & ſemblables à la toute, ſçauoir en A I L M, M N O D, E P R S, S T V H; & en deux priſmes



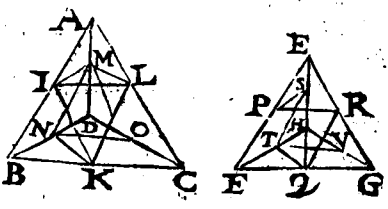
egaux IBKLMN,CKLMNO,PFQRST, GQRSTV; comme veut la precedente: & que les pyramides faictes AILM,MNOD,EPRS, STVH,ſoient entenduës eſtre diuiſées de meſme, & ainſi de ſuitte.

Ie dis que tous les priſmes faicts en la pyramide ABCD,ſont à tous les priſmes faicts en la pyramide EFGH,egaux aux premiers en multitude, comme la baſe ABC,à la baſe EFG.

Car, puis que comme BC à CK, ainſi FG, à GQ, l'vne & l'autre ligne eſtant diuiſée en deux egalement; & les triangles ABC, LKC, eſtans
g Cor.4.6. ſemblables,& ſemblablement poſez,g
h 22.6. Item,les angles EFG,RQG,h auſſi comme le triangle ABC, ſera au triangle LKG, ainſi le triangle EFG,au triangle RQG,& en changeant, comme ABC à EFG,ainſi LKC à RQG: mais comme LKC à RQG,ainſi le priſme CKLMNO, au priſme GQRSTV, comme il ſera monſtré incontinent: & partant ainſi le priſme IBKLMN, au priſme PFQRST, ceux-cy eſtans egaux à ceux-là.Et comme vn priſme ſeul,ſçauoir IBKLMN,
i 12.5. à vn ſeul priſme PFQRST:i ainſi les deux priſmes IBKLMN, CKLMNO enſemble, ſont aux deux PFQRST, GQRSTV, enſemble. Donc auſſi comme la baſe ABC,à la baſe EFG, ainſi les deux priſmes en la pyramide ABCD, aux deux en la pyramide EFGH; ſemblablement on monſtrera que les deux priſmes qui ſont aux pyramides AILM,MNOD, faictes en la pyramide ABCD, ſont aux deux priſmes qui ſont aux pyramides EPRS,STVH, faictes en la pyramide EFGH, comme les baſes AIL, MNO,

de

de ces pyramides là, ſont aux baſes E P R, S T V, de celles-cy, & ainſi de ſuitte, faiſans touſiours la meſme diuiſion. Mais comme ces baſes-là à celles-cy, ainſi L K C, baſe, qui eſt egale à celles-là, & ſemblable, eſt à la baſe R Q G, qui eſt egale & ſemblable à celles-cy, comme il eſt demonſtré en la precedente,



c'eſt à dire, ainſi la baſe A B C, à la baſe E F G. Donc auſſi comme la baſe A B C, à la baſe E F G : ainſi les priſmes de chaque pyramide, faicte en la pyramide de A B C D, ſeront aux priſmes de chaque pyramide, faite en la pyramide E F G H : partant auſſi comme les priſmes de la pyramide A B C D, aux priſmes de la pyramide E F G H, ainſi les priſmes tant de la pyramide A I L M, ſont aux priſmes de la pyramide E P R S, que ceux de la pyramide M N O D, à ceux de S T V H, & ainſi de ſuitte.

Parquoy, puis que comme deux priſmes de la pyramide A B C D, ſont à deux priſmes de la pyramide E F G H,[k] ainſi tous les priſmes qui ſont aux pyramides A B C D, A I L M, M N O D, &c. enſemble, ſont à tous les priſmes enſemble, qui ſont aux pyramides E F G H, E P R S, S T V H, &c. Si ceux-cy ſont egaux en multitude à ceux-là. Pareillement, comme la baſe A B C, à la baſe E F G : ainſi tous les priſmes de la pyramide A B C D, à tous les priſmes de la pyramide E F G H. Partant, ſi deux pyramides de meſme hauteur, ayans les baſes triangulaires, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [k] 12. 15.

LEMME.

Or que comme LKC, eſt à RQG, ainſi le priſme CKLMNO, au priſme GQRSTV, on le demonſtrera ainſi : ſoient entendues des perpendiculaires menées des ſommets D, H, ſur les baſes ABC, EFG, leſquelles ſeront les hauteurs egales des pyramides ABCD, EFGH. D'autant donc que les plans paralleles ABC, MNO, [l] *coupent deux lignes droites, ſçauoir DC, & la perpendiculaire menée de D, proportionellement : mais DC eſt coupée en deux egalement à O, la perpendiculaire menée de D, ſera auſſi coupée en deux egalement, au poinct où elle rencontre le plan MNO : par meſme raiſon la perpendiculaire menée de H, ſera coupée en deux egalement, par le plan STV : parquoy les perpendiculaires totales eſtans poſées egales, leurs moitiez, ſçauoir la hauteur des priſmes, ſeront egales : donc les priſmes priſmes CKLMNO, GQRSTV, ayans hauteurs egales ;* [m] *ſeront entr'eux, comme les baſes LKC, RQG.*

l 17. 11.

m 34. 11.

SCHOLIE.

Le Copiſte a pris la demonſtration de cette Propoſition de Clauius, mot pour mot, où eſt cité le Corollaire de la 4. Propoſition du 6. liure : lequel Corollaire il n'a pas mis en ſon liure, encore qu'il le cite auſſi à d'autres Propoſitions cy-apres comme à la 4. du 15. liure, &c. tellement que ceux qui auront ſon liure, auront auſſi beſoin d'auoir celuy de Clauius.

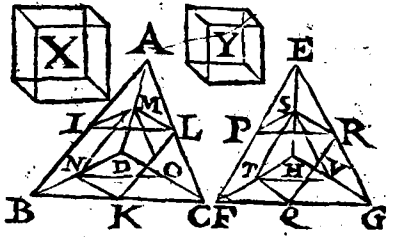
THEO

THEOREME 5. PROP. 5.

Les Pyramides qui ſont de meſme hauteur, & ayans les baſes triangulaires, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soient A B C D, E F G H pyramides de meſme hauteur, dont les baſes ſont les triangles A B C, E F G. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe à la baſe.

Car, s'il n'eſt ainſi, ſoit poſé comme la baſe A B C, à la baſe E F G: ainſi la pyramide A B C D, au ſolide X, qui ſera moindre ou plus grand que la pyramide E F G H.

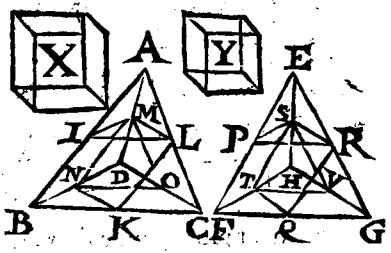


Soit premierement plus grande de Y, & ſoit diuiſée la pyramide EFGH, en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux, ſelon la 3. Prop. 12. Derechef, les deux pyramides faictes en E F G H, ſoient pareillement diuiſées en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux, & ainſi de ſuitte. D'autant donc que ſi de la pyramide E F G H, on oſte plus de la moitié, ſçauoir les deux priſmes, P F Q R S T, G Q R S T V, plus [n] grands que la [n] 3.12.

moitié de la pyramide E F G H. Item, des pyramides reſtantes E P R S, S T V H, plus de la moitié, ſçauoir
o 1. 10. leur priſmes, & ainſi de ſuitte : Il o reſtera enfin vne moindre grandeur que Y, excez de E F G K, ſur le ſolide X. Soit donc maintenant la grandeur reſtante moindre : mais la pyramide E F G H eſtant poſée egale aux ſolides X, Y, les priſmes reſtans en la pyramide E F G H, ſeront plus grands que X.

Soit diuiſée la pyramide A B C D en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux : & auſſi ſemblablement les pyramides faictes, A I L M, M N O D, en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux ; & cela ſoit fait autant de fois qu'en la pyramide E F G H. p

p 4. 12. D'autant donc que tous les priſmes en la pyramide A B C D, ſont à tous ceux de la pyramide E F G H, egaux en nombre, comme la baſe A B C, à la baſe E F G, c'eſt à dire, comme la pyramide



A B C D à X. Mais tous les priſmes en la pyramide
1. 5. A B C D eſtans moindres que la toute A B C D ; q auſſi tous les priſmes en la pyramide E F G H, ſeront moindres que le ſolide X. Mais ils ſont auſſi monſtrez plus grands. Ce qui eſt abſurde. Donc X n'eſt moindre que E F G H.

Soit

Soit en apres le solide X, plus grand que la pyramide E F G H. Donc la pyramide A B C D estant posée à X, comme la base A B C, à la base E F G: par conuersion de raison X sera à A B C D, comme la base E F G, à la base A B C. Comme X est à A B C D pyramide, ainsi la pyramide E F G H, soit posée au solide Y. Et X estant posé plus grand que E F G H, [r] la pyramide A B C D, sera plus grande que Y. [r 14. 5.] Donc comme la base E F G, est à la base A B C, ainsi la pyramide E F G H à Y, qui est moindre que la pyramide A B C D. Ce qui est absurde. Estant desia monstré que comme la base est à la base, ainsi la pyramide ne peut estre à vn solide moindre que la pyramide. Donc le solide X, n'est plus grand que la pyramide E F G H, & aussi est monstré n'estre moindre, partant egal. Parquoy, puis que comme la base A B C, est à la base E F G, ainsi la pyramide A B C D est posée à X. [f] Mais A B C D pyramide, est à X, comme à la pyramide E F G H, egale à X solide. [f 5. 5.] Aussi comme la base A B C, à la base E F H, ainsi la pyramide A B C D, à la pyramide E F G H. Donc les pyramides de mesme hauteur, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

En conuertissant. Si les pyramides triangulaires sont l'vne à l'autre comme leurs bases, elles seront de mesme hauteur. Car si on croit l'vne plus haute que l'autre, de la plus haute en soit coupé vne egale à la moindre. Et menées des lignes droictes à tous les angles de la base, du poinct de la section: comme la base à la base, ainsi la pyramide à la pyramide lors constituée; mais elle estoit aussi ainsi à

t 9. 5. *toute la pyramide, t parquoy la pyramide conſtituée ſera egale à la toute, la partie à ſon tout. Ce qui eſt impoſſible.*

COROLLAIRE.

D'icy il aduient, que les pyramides de meſme hauteur conſtituées ſur meſme baſe, ou baſes egales triangulaires, ſont egales entr'elles, ayans meſme raiſon que leurs baſes qui ſont poſées egales, ou vne meſme.

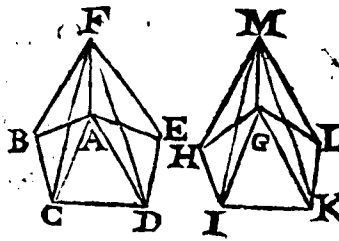
Il s'enſuit au contraire, que les pyramides triangulaires egales, conſtituées ſur vne meſme baſe ou baſes egales, ſont de meſme hauteur. Et que les pyramides triangulaires egales ayans meſme hauteur, ont baſes egales, ou vne meſme, leſquelles deux choſes on monſtrera par la premiere partie de ce Corollaire, par meſme diſcours dont on a vſé en la demonſtration de la conuerſe de la Propoſition 30. & 31. liure 11. Si vne autre pyramide eſt conſtituée, tant en la hauteur, que ſur la baſe retranchée.

THEOREME 6. PROP. 6.

Les Pyramides qui ſont de meſme hauteur, & ayans les baſes Polygones, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soient les pyramides ABCDEF, GHIKLM. Dont les baſes ABCDE, GHIKL, ont les coſtez egaux en multitude. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe à la baſe.

Car,



Car, ayant reduit les baſes en triang. egaux en nombre, chacune pyramide ſera diuiſée en autant de pyramides triangulaires. [v] Mais puis que comme la baſe A B C, eſt à la baſe A C D, ainſi la pyramide A B C F, à la pyramide A C D F, en compoſant comme la baſe A B C D, à la baſe A C D, ainſi la pyramide A B C D F, à la pyramide A C D F. [x] Mais derechef, comme la baſe A C D, à la baſe A D E, ainſi la pyramide A C D F, à la pyramide A D E F. Donc en raiſon egale, comme la baſe A B C D, à la baſe A D E, ainſi la pyramide A B C D F, à la pyramide A D E F: donc en compoſant comme la baſe A B C D E, à la baſe A D E: ainſi la pyramide A B C D E F, ſera à la pyramide A D E F. Par meſme raiſon, comme la baſe G H I K L, ſera à la baſe G K L, ainſi la pyramide G H I K L M, à la pyramide G K L M: & par raiſon conuerſe, comme la baſe G K L, à la baſe G H I K L, ainſi la pyramide G K L M, à la pyramide G H I K L M. [y]

v 5. 12.

x 5. 12.

y 5. 12.

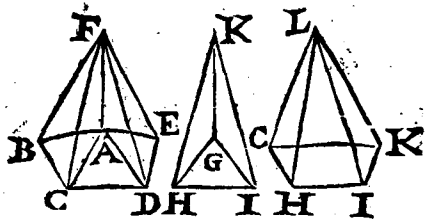
Derechef, d'autant que comme la baſe A D E, eſt à la baſe G K L, ainſi la pyramide A D E F, à la pyramide G K L M: Il y aura quatre baſes A B C D E, A D E, G K L, G H I K L, en meſme raiſon que les quatre pyramides A B C D E F, A D E F, G K L M, G H I K L M. Donc en raiſon egale, comme la baſe A B C D E, à la baſe G H I K L, ainſi la pyramide A B C D E F, à la pyramide G H I K L M. Et partant les pyramides qui ont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Combien qu'il ſoit parlé en la demonſtration de cette Propoſition des Pyramides de meſme hauteur ſeulement, ſelon les interpret. dont les baſes Polygones ont les coſtez egaux en multitude. Neanmoins le meſme eſt demonſtré des pyramides de meſme hauteur, dont la baſe de l'vne a plus de coſtez que celle de l'autre.

Car en premier lieu, ſoient deux pyramides de meſme hauteur, A B C D E F, G H I K, & la baſe de la premiere ſoit polygone, ſçauoir pentagone, & celle de la ſeconde triangulaire. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe à la baſe : car ayant reduit le pentagone en triangles, la pyramide

2 5.12. *ſera diuiſée en autant de pyramides.* [2] *Et puis que*



comme la baſe A B C premiere grandeur, à la baſe G H I 2. grandeur, ainſi la pyramide A B C F, 3. à la pyramide G H I K 4. Et ſemblablement, comme la baſe A C D 5. grandeur, à la baſe G H I 2. ainſi la pyram. A C D F 6. à la pyram. G H I K 5 grandeur.

2 4.5. [2] *Comme la baſe A B C D premiere, &c. enſemble, ſera à la baſe G H I 2. ainſi la pyramide A B C D F 3. & 6. ſera à la pyram. G H I K 4 grandeur.*

Derechef, d'autant que comme la baſe A B C D,

eſt

eſt à la baſe GHI, ainſi la pyramide ABCDF, eſt à la pyramide GHIK, comme il eſt demonſtré, [b] *& que* b 5. 12.
comme la baſe ADE 5. grandeur, eſt à la baſe GHI 2. ainſi la pyram. ADEF 6. à la pyram. GHIK 4.
c La baſe ABCDE, ſera à la baſe GHI, comme la c 24. 5.
pyram. ABCDEF, eſt à la pyram. GHIK. Ce qui eſt propoſé. Et faut faire ainſi touſiours, s'il y a d'auantage de triangles en la baſe polygone, &c.

Or la pyramide ABCDEF, eſtant à la pyramide GHIK (comme il eſt demonſtré,) comme la baſe polygone ABCDE, eſt à la baſe triangulaire GHI: ainſi en changeant comme GHI, ſera à ABCDE, ainſi GHIK, ſera à ABCDEF pyramide. Partant deux quelconques pyramides, dont l'vne la baſe polygone, & l'autre triangulaire, ſont touſiours comme leurs baſes, de quelque façon que l'on commence. Car ſoit que la demonſtration commence au polygone & à ſa pyramide, comme appert par la demonſtration, toutefois en changeant on peut commencer au triangle & à ſa pyramide, comme dit eſt.

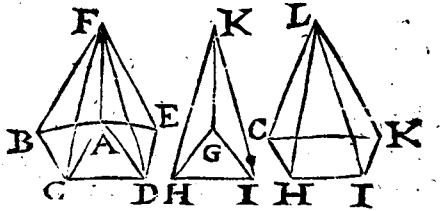
Secondement, ſoient deux pyramides de meſme hauteur ABCDEF, GHIKL, dont les baſes ſont polygones, & y a plus de coſtez en vne baſe qu'en l'autre. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe à la baſe.

Car ayant reduit le polygone ABCDE en triangles, ABC, ACD, ADE; la pyramide ſera diuiſée en autant de pyr. Et puis que comme la baſe triang. ABC 1. gr. eſt à la baſe polygone GHIK 2. grand. ainſi la pyr. ABCF 3. eſt à la pyram. GHIKL 4. Et comme la baſe ACD 5. eſt à la baſe GHIK 2. gr. ainſi la pyram. ACDF 6. eſt à la pyram. GHIKL 4. Auſſi comme la baſe ABCD 1 grand. auec la 5 ſera 24. 5.

a lu

à la baſe GHIK 2. ainſi la pyr. ABCDEF 3. & 6. grandeur, ſera à la pyramide GHIKL 4. grandeur.

Derechef, d'autant que comme la baſe ABCD 1. grandeur, à la baſe GHIK 2. ainſi la pyramide ABCDEF 3. à la pyramide GHIKL 4. comme nous venons de demonſtrer: & auſſi comme la baſe



ADE 5. grandeur, à la baſe GHIK 2. ainſi la pyramide ADEF 6. à la pyramide GHIKL 4. comme
d 24. 5. *il eſt monſtré auparauant*, d *auſſi comme la baſe ABCDE 1. grandeur, auec la 5. à la baſe GHIK 2. ainſi la pyramide ABCDEF 3. grandeur, auec la 6. à la pyramide GHIKL 4. grandeur. Ce qui eſt propoſé. On procedera de meſme s'il y a pluſieurs triangles en la baſe ABCDE. Or cette 6. Propoſition, & ce qui eſt demonſtré en ce Scholie, ſe conuertit ainſi.*

Les pyramides de quelconques baſes, qui ſont entr'elles comme leurs baſes, ſont de meſme hauteur.

Ce qui ſera demonſtré tout de meſme que les choſes qui ont eſté dites au Scholie de la 5. Propoſition de ce liure, ont eſté demonſtrées.

COROLLAIRE.

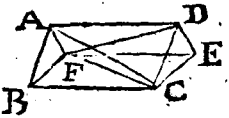
Il eſt auſſi manifeſte de là, que les pyramides de meſme

meſme hauteur conſtituées ſur baſes egales multilateres, ou ſur vne meſme, ſont egales entr'elles, ayans meſme proportion que leurs baſes qui ſont poſées egales ou vne meſme.

Derechef, il s'enſuit au contraire que les pyramides multilateres egales, & conſtituées ſur baſes egales ou vne meſme, ont meſme hauteur. Et que les pyramides multilateres egales ayans meſme hauteur, ont les baſes egales, ſi elles ne ſont ſur vne meſme. Ces deux choſes ſeront demonſtrées comme nous auons dit au Corollaire de la 5. Propoſition de ce liure.

THEOREME 7. PROP. 7.

Tout priſme ayant la baſe triangulaire, peut eſtre diuiſé en trois pyramides egales entr'elles, ayans les baſes triangulaires.



Soient le priſme A B C D E F, dont les deux triangles oppoſez ſont egaux & ſemblables A B F, D C E. Ie dis qu'iceluy priſme peut eſtre diuiſé en trois pyramides triangulaires egales entr'elles.

Car aux trois parallelogrammes ſoient menez trois diametres, ſçauoir A C, au parall. A B C D: C F, au parall. B C E F, & F D, au parall. A D E F. [c] D'autant que les triangles ABC, ADC, ſont egaux, [f] & que comme la baſe A B C, eſt à la baſe A D C, ainſi la pyramide A B C F, à la pyramide A D C F: ces pyramides ayans meſme hauteur, ſçauoir la perpen

[c] 34. 1.
[f] 5. 12.

perpendiculaire menée du ſommet F, au plan ABCD; les pyramides ABCF, ADCF, ſeront égales entr'elles: ſemblablement les pyramides ADFC,EFDC, conſtituées ſur les baſes egales ADF,EFD, & en meſme hauteur, ſçauoir de la perpendiculaire menée du ſommet C, ſur le plan ADEF, ſeront egales: mais la pyramide ADCF, eſt la meſme que la pyramide ADFC, celle-là eſtant contenuë de quatre plans, ſçauoir de la baſe ADC, & des triangles ADF, ACF, DCF, & celle-cy des meſmes quatre plans. Donc les trois pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF (qui eſt la meſme que EFCD) compoſans tout le priſme, ſont egales entr'elles. Partant tout priſme ayant la baſe triangulaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

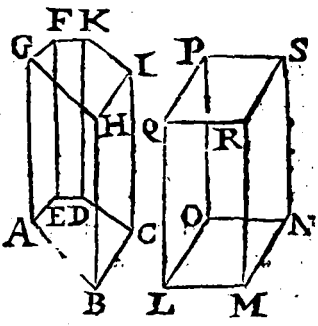
Il s'enſuit de cecy, que toute pyramide eſt la tierce partie du priſme, qui a meſme hauteur, & meſme baſe qu'icelle, ou egales, ou bien tout priſme eſt triple de la pyramide qui a meſme hauteur qu'iceluy, & meſme baſe, ou egales.

SCHOLIE.

Les priſmes qui ſont ſous meſme hauteur, quelconques ſoient les baſes, ſont entr'eux comme leurs baſes.

Soient deux priſmes de meſme hauteur ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, dont les baſes ſont multilateres. Ie dis que comme la baſe AC eſt à la baſe LN, ainſi le priſme eſt au priſme.

Car



Car si de tous les angles de l'vne & l'autre, on mene des lignes à vn poinct du plan superieur, opposé à la base, l'on fera deux pyramides de mesme hauteur que les prismes, ayans mesmes bases: donc par le Corollaire de cette Proposition, chacune de ces pyramides sera la tierce partie de son prisme. g *Partant, comme la pyramide à la pyramide, ainsi le prisme sera au prisme: mais la pyramide est à la pyramide, comme la base à la base,* h *comme il est demonstré. Donc comme la base à la base, ainsi le prisme au prisme. Ce qui est proposé.*

g 15.5.

h 6.12.

COROLLAIRE.

D'où il s'ensuit, que les prismes de mesme hauteur sur vne mesme base, ou bases egales quelconques, sont egaux entr'eux: puis qu'ils ont mesme raison que leurs bases, qui sont posées egales ou vne mesme: Au contraire les prismes egaux, sur bases egales, ou vne mesme sont de mesme hauteur, & les prismes egaux de mesme hauteur ont les bases egales ou vne mesme. Ce qui sera demonstré, comme à la conuerse de la 31. Prop. 11.

Le Copiste (selon sa coustume) a copié cette Proposition

poſition tout de meſme qu'elle eſtoit deſia traduite, ſans conſiderer ſi elle eſt conforme au texte d'Euclide, ny à la demonſtration: ainſi. Tout priſme eſt diuiſé en trois pyramides egales, ayans les baſes triangulaires. *Ce qui n'eſt pas vray, comme il eſt manifeſte, par ce qui a eſté dit cy-deſſus, & meſme par le Corollaire qu'il a pris de Clauius, où il dit.* Il s'enſuit de cecy, que toute pyramide eſt la tierce partie de tout priſme, qui a la meſme hauteur & meſme baſe qu'icelle, &c.

Donc ſi vne pyramide a pour exemple la baſe quadrilatere, elle ſera auſſi la tierce partie d'vn priſme, qui aura auſſi la baſe quadrilatere, & meſme hauteur qu'icelle, & iceluy pourra eſtre diuiſé en trois telles pyramides qui auront les baſes quadrilateres, & non triangulaires. Et auſſi Euclide ne l'a pas ainſi propoſé; mais comme il s'enſuit.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν, διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. *C'eſt à dire.* Tout priſme ayant la baſe triangulaire, ſe diuiſe en trois pyramides egales entr'elles, ayans les baſes triangulaires.

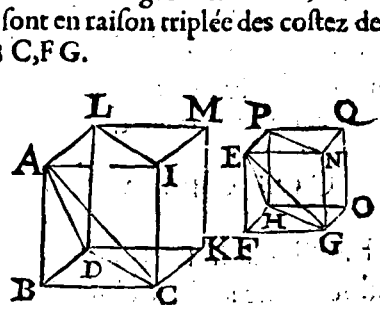
Or tout priſme qui a la baſe quadrilatere eſt diuiſé en deux priſmes ayans les baſes triangulaires, chacun deſquels eſt diuiſé en trois pyramides egales, ayant les baſes triangulaires, comme il eſt monſtré, & deux d'icelles priſes enſemble font vne ſeule pyramide, ayant la baſe quadrilatere, laquelle eſt la tierce partie de tout le priſme. Donc tout priſme n'eſt pas diuiſé en trois pyramides egales entr'elles, ayant les baſes triangulaires: mais bien tout priſme ayant la baſe triangulaire, comme dit Euclide, &c.

THEO

THEOREME 8. PROP. 8.

Les pyramides ſemblables, & qui ont les baſes triangulaires, ſont en raiſon triplée de leurs coſtez homologues.

Soient A B C D, E F G H, pyramides ſemblables, ayans les baſes triangulaires A B C, E F G. Ie dis qu'elles ſont en raiſon triplée des coſtez de meſme raiſon, B C, F G.



Car ſoient acheuez les parallelipip. B M, F Q, les pyramides eſtans ſemblables, les angles plans A B C, E F G, ſont egaux, & comme A B à B C, ainſi E F à F G, les parallelogrammes B I, F N, ſeront ſemblables. Semblablement les angles A B D, E F H, eſtans egaux, & comme A B à B D, ainſi E F à F H. Item, les angles D B C, H F G egaux, & comme D B à B C, ainſi H F à F G : les parallelog. A L, B K, ſeront ſemblables aux parallelogrammes F P, F O, [k] Mais tant les trois B I, B K, B L, du parallelipipede B M, ſont egaux & ſemblables aux trois oppoſez D M, A M, C M, que les trois F N, F O, F P, du parallel. F Q, le ſont aux trois oppoſez H Q, E Q, G Q. Donc les ſix plans contenans le ſolide B M, ſont [k] 14. 1.

egaux aux 6. du ſolide F Q. Parquoy les parallelipipedes B M, F Q ſont ſemblables : mais d'autant que les lignes L I, P N, eſtans menées, les [m] priſmes B C K L A, H F G N P E, ont meſme raiſon que les parallelipipedes B M, F Q leurs doubles, & les pyramides A B C D, E F G H, meſme raiſon que leſdits priſmes triples d'icelles ; [n] les pyramides auront auſſi meſme raiſon que les parallelipipedes. [o]

19. d. 1.
m 15. 5.
n 11. 5.
o 33. 11.

Mais les parallelipipedes B M, F Q, eſtans en raiſon triplée de leurs coſtez homologues B C, F G ; les pyramides A B C D, E F G H, ſeront auſſi en raiſon triplée de B C, à F G. Donc les pyramides, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

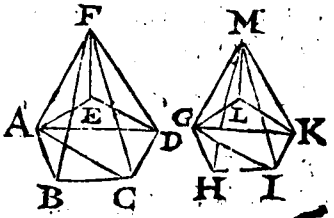
Il eſt auſſi manifeſte, que les pyramides ſemblables, dont les baſes ont plus de trois coſtez, ſont en raiſon triplée de leurs coſtez homologues.

Car ſoient A B C D E F, G H I K L M, pyramides ſemblables, ayans rectilignes ſemblables de pluſieurs coſtez pour baſes. Ie dis que ces pyramides ſont en raiſon triplée des coſtez homologues A B, G H. Car de A & G, ayant mené les lignes A C, A D, G I, G K, aux angles oppoſez ; [p] les baſes ſemblables ſeront diuiſées en nombre egal de triangles ſemblables, ſçauoir A B C, A C D, A D E, ſeront ſemblables à G H I, G I K, G K L. Donc les pyramides eſtans ſemblables, les triangles A F B, G M H ſont ſemblables, & l'angle F A B, egal à M G H, & comme F A à A B, ainſi M G à G H : mais comme

p 20. 6.

A B

AB à AC, ainſi GH à GI, les triãgles ABC, GHI, eſtans ſemblables. Partant en raiſon egale, comme FA à AC, ainſi MG à GI.



Derechef, d'autant que comme AC à CB, ainſi GI à IH, ABC, GIH, eſtans ſemblables; & comme GB à CF, ainſi IH à IM: BCF, HIM, triangles eſtans ſemblables, à cauſe des pyramides ſemblables, & en raiſon egale, comme AC à CF, ainſi GI à IM; donc eſtant comme FA, à AC, ainſi MG à GI, & comme AC à CF, ainſi GI à IM: auſſi en raiſon egale comme FA à FC, ainſi MG à MI. [q] Donc AFC, GMI ſeront equiangles, partant ſemblables. [q] 5. 6.

Mais AFB, BFC, ABC, ſont auſſi ſemblab. aux triang. GMH, HMI, GHI: Donc [r] les pyr. ABCF, GHIM, ſont ſemblables, & ſemblablement auſſi ACDF, GHIKM: & ADEF, GKLM. [ſ] Donc les pyr. ABCF, ACDF, AGDEF, ſeront à GHIM, GIKM, GKLM, chacune à la ſienne en raiſon triplée des coſtez homologues AB, CD, DE, GH, IK, KL, chacun au ſien: y ayant donc vne meſme raiſon de AB, CD, DE, à GH, IK, KL, les pyram. ABCF, ACDF, ADEF, auront vne meſme raiſon, ſçauoir triplée, à GHIM, GIKM, GKLM. Donc [t] comme vne ſeule ABCF, à vne ſeule GHIM, ainſi toutes enſemble, ſçauoir la toute ABCDEF, à toutes, ſçauoir à la toute GHIKLM. [v] Donc la pyramide ABEF, eſtant à la pyramide GHIM, en raiſon triplée, des coſtez homologues AB, GH; [r] 8. d. 12. [ſ] 8. 12. [t] 12. 5. [v] 8. 12.

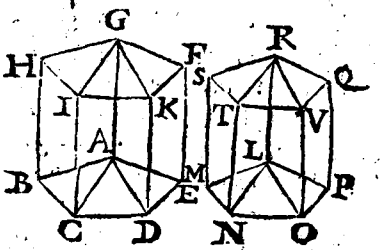
la pyramide A B C D E F, ſera auſſi à la pyramide G H I K L M, en raiſon triplée de A B à G H. Ce qui eſtoit propoſé.

SCHOLIE.

Par meſme raiſon, les priſmes ſemblables ſeront en raiſon triple de leurs coſtez homologues. Car ſoient A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S T V, priſmes ſemblables. Ie dis qu'ils ſont en raiſon triplée de leurs coſtez homologues.

Car ſi de A & L, on mene A C, A D, L N, L O, x les triangles A B C, C A D, D E A,

: 20.6.



ſeront ſemblables aux triangles L M O, L N O, O P L; & ſi de G & K, on mene auſſi G I, G K, R T, R V, les triangles G H I, G I K, G K F, ſeront ſemblables à R S T, R T V, R V Q, & aux deuant dits, tous les plans oppoſez des priſmes eſtans ſemblables par la definition du priſme. Et les parallelogrammes C H, N S, eſtans ſemblables par la ſimilitude des priſmes, comme C I à C B; ainſi T N à N M: mais comme B C à C A, ainſi N M à N L, les triangles eſtans ſemblables. Donc en raiſon egale comme C I à C A, ainſi T N à N L.

Dorechef, l'angle ſolide N, eſtant egal à l'angle ſolide C, par la ſimilitude des priſmes, l'vn eſtant poſé ſur l'autre, l'angle M N O, conuiendra ſur l'angle

gle BCD,& TNM, sur ICB,& TNO,sur ICD: mais la ligne NL, commun aussi sur CA, les angles LMN,BCA,estans egaux : Donc lAC,TNL, sont egaux, & les costez autour d'iceux estans monstrez proportionaux,les parallelogrammes CG,NR, seront semblables : mais les parallelogrammes CH, HA, sont semblables à NS, SL, & les triangles ABC,GHI,à LMN,RST. y Partant les prismes y 8.d.11.
ABCIGH,LMNTRS,sont semblables. Ainsi les prismes CDAGK,NOLRTV, seront monstrez semblables,& aussi AEDKGF,LPOVRQ. Donc les prismes ABCIGH,CDAGIK,AEDKGF sont à LMNTRS,NGLRTV, LPOVRQ, chacun au sien, en raison triplée des costez homologues BC,CD,DE,à MN,NO,OP, chacun au sien; z *comme il appert.* z 34.11.

Parquoy on demonstrera en la mesme maniere,que les prismes ABCDEFGHIK,LMNOPQRSTV, sont en raison triplée des costez homologues BC, MN, tout ainsi qu'il a esté demonstré cy-deuant aux pyramides de plusieurs angles.

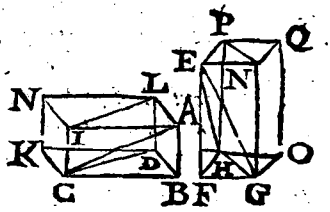
D'où l'on collige que les pyramides multangles semblables, se diuisent en pyramides triangulaires semblables, & egales en nombre, & homologues à leurs touts.Ce qui est manifeste de la demonstration du precedent Corollaire.

Il s'ensuit aussi que les prismes multangles semblables, se diuisent en prismes semblables, ayans les bases triangulaires,& egaux en nombre, & homologues à leurs touts,comme il appert de la demonstration de ce Scholie.

THEOREME 9. PROP. 9.

Les baſes & les hauteurs des pyramides egales, ayans les baſes triangulaires ſont reciproques: Et les pyramides ayans les baſes triangulaires, deſquelles les baſes & les hauteurs ſont reciproques, ſont egales.

Soient les pyramides A B C D, E F G H, egales, ayans les baſes triangulaires. Ie dis que les baſes A B C, E F G, & les hauteurs ſont reciproques: c'eſt à dire, comme A B C, à E F G: ainſi la hauteur de la pyramide E F G H, à la hauteur de la pyramide A B C D.



Car ayant acheué les parallelipipedes B M, F Q, de meſme hauteur que les pyramides, & ayant mené L I, P N, les priſmes D B C I L A, H F G N P E, (eſtans triples des pyramides poſées egales) ſeront égaux entr'eux, & partant les parallelipipedes B M, F Q auſſi egaux, eſtans doubles des priſmes; [a] & partant leurs baſes & leurs hauteurs ſeront reciproques, c'eſt à dire, comme la baſe B I, à la baſe F N, ainſi la hauteur du ſolide F Q, à la hauteur du ſolide B M. [b]

a 34.11.

b 15.5.

Mais comme la baſe B I, à la baſe F N, ainſi le triangle A B C, au triangle E F G. Donc auſſi comme la baſe A B C, à la baſe E F G, ainſi la hauteur de

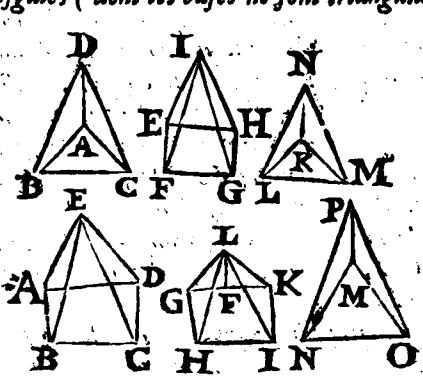
la

la pyramide E F G H, à la hauteur de la pyramide A B C D, puis que les hauteurs des pyramides sont mesmes que celles des parallelip. Donc les bases & les hauteurs des pyram. egales sont reciproques.

Soient maintenant les bases & les hauteurs reciproques. Ie dis que les pyramides sont egales. Car ayant fait la construction, comme auparauant: c D'autant que comme A B C, est à E F G, ainsi le parall. B I, au parallelog. F N, & les hauteurs des parallelip. & des pyram. estans mesmes, les bases des parall. & leurs hauteurs seront aussi reciproques. d Partant les parallelipipedes B M, F Q, sont egaux; Donc les prismes D B C I L A, H F G N P E, leurs moitiez, sont aussi egaux: & partant aussi les pyramides, tierces parties des prismes aussi egales. Donc les bases & les hauteurs des pyramides, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. c 15.5. d 34.11.

SCHOLIE.

Semblablement, les bases, & les hauteurs des pyramides egales (dont les bases ne sont triangulaires)



sont reciproques: & les pyramides (dont les bases ne

ſont triangulaires) ayans les baſes & les hauteurs reciproques ſont egales.

Car ſoient premierement deux pyramides egales, l'vne deſquelles, ſçauoir A B C D, ait la baſe triangulaire, & E F G H non. Et ſoit fait K L M, triang. egal à la baſe E F G H non triang. & ſur iceluy la pyramide K L M N, de meſme hauteur que la pyramide F I. Donc les pyramides E F G H I, K L M N, ayant baſes egales & meſme hauteur, ſeront egales. Mais E F G H I, pyramide, a eſté poſée egale à A B C D pyramide. Donc A B C D, K L M N, ſeront auſſi egales, & ayans les baſes triangulaires, comme la baſe A B C, à la baſe K L M, ou à E F G H ſon egale, ainſi la hauteur de la pyramide K L M N, c'eſt à dire la hauteur de E F G H, ſera à la hauteur de A B C D. Donc les pyramides egales A B C D, E F G H I, ont les baſes & les hauteurs reciproques.

a *Sch.* 6. 12.

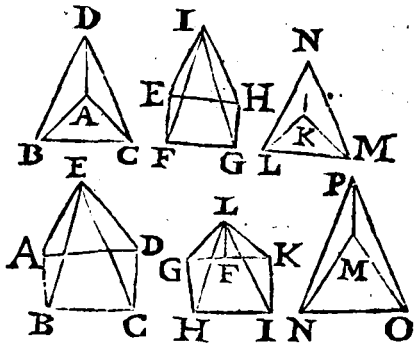
b 9. 12.

Soient maintenant leurs baſes & leurs hauteurs reciproques. Ie dis que ces pyramides ſont egales. Car (demeurant la meſme conſtruction) la baſe A B C, eſtant poſée à la baſe E F G H, comme la hauteur de la pyramide E F G H I, à la hauteur de la pyramide A B C D, auſſi la baſe A B C, ſera à la baſe K L M, comme la hauteur de la pyramide K L M N, ſera à la hauteur de la pyramide A B C D. Donc les pyramides A B C D, K L M N, ſont egales. Mais comme il eſt demonſtré, la pyramide K L M N, eſt egale à la pyramide E F G H I. Donc A B C D, ſera auſſi egale à E F G H I: ce qui eſt propoſé.

c 9. 12.

d *Sch.* 6. 12.

Soient en apres les pyramides egales A B C D E, F G H I K L, dont les baſes ayent pluſieurs angles: & derechef ſoit fait le triang. M N O, egal à la baſe A B C D,



ABCD, & MNOP, pyram. ſoit faite de meſme hauteur que A B C D E: donc comme il eſt demonſtré, St.6.12. *MNOP, ſera egale à ABCDE, laquelle a eſté poſée egale à FGHIKL, pyr. Donc la pyr. MNOP, ſera auſſi egale à FGHIKL; donc comme il eſt demonſtré cy-devant, comme la baſe MNO, c'eſt à dire, la baſe ABCD: ſera à la baſe FGHIK, ainſi la hauteur de FGHIKL, pyr. ſera à la hauteur de MNOP: c'eſt à dire, à la hauteur de A B C D E (car ces hauteurs ſont poſées egales.) Partant les pyram. A B C D E, FGHIKL, ont les baſes & les hauteurs reciproques.*

Mais ſoient les baſes & les hauteurs d'icelles pyramides reciproques. Ie dis qu'elles ſont egales: Ce que l'on demonſtrera comme auparavant.

Or on demonſtrera que toutes ces choſes conuiennent auſſi à tout priſme: car ſi les priſmes ſont egaux, les pyramides de meſme hauteur qu'iceux ayans meſme baſe, ſeront egales entr'elles, [a] *eſtans les tierces parties des priſmes,* [b] *ou les deux tierces parties, ſi les baſes ſont parallelogrammes. Donc, comme nous venons de demonſtrer, les baſes & hauteurs d'icelles pyramides ſeront reciproques, & ces baſes & hauteurs*

a Cor.7.12.
b Sch.7.

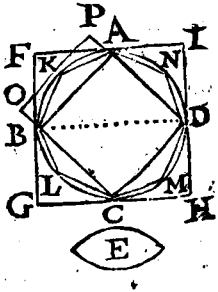
eſtans les meſmes que des priſmes, les baſes & les hauteurs des priſmes ſeront reciproques.

Derechef, ſi les baſes & les hauteurs des priſmes ſont reciproques, les baſes & hauteurs des pyramides, ayans meſmes baſes & hauteurs que les priſmes, ſeront auſſi reciproques. Donc, comme a eſté demonſtré, les pyramides ſont eſgales : & partant auſſi les priſmes eſtans triples ou ſeſquialteres d'icelles pyramides. Ce qui eſt propoſé.

THEOREME 10. PROP. 10.

Tout Cone eſt la tierce partie du Cylindre, qui a meſme baſe qu'iceluy, & la hauteur egale.

Soit vn Cone & vn Cylindre ayans meſme baſe, ſçauoir le cercle A B C D, & de meſme hauteur. Ie dis que le Cone eſt le tiers du Cylindre.



Car autrement le cylindre ſera plus grand ou moindre que le triple du cone. Soit premierement plus grand, s'il eſt poſſible, comme de la grandeur du ſolide E. C'eſt à dire, que du cylindre, (dont le cercle A B C D, eſt ſa baſe) eſtant retranché E, le reſte ſera triple du cone, dont le meſme cercle A C eſt la baſe. En iceluy cercle ſoit inſcrit le quarré A B C D, & diuiſé en deux triangles par B D diametre, ſur leſquels triangles ſoient entendus eſtre conſtituez deux priſmes de meſme hauteur

hauteur que le cylindre. Et le quarré estant plus grand que la moitié du cercle, [a] comme il appert, il est euident que ces deux prismes excederont la moitié du cylindre: mais si (les deux prismes ostez) les restes du cylindre sont plus grands encore que E, sur les bases desdits restes ou segments, soient faicts les quatre triangles Isosceles A K B, B L C, C M D, D N A, sur lesquels soient imaginez quatre prismes de mesme hauteur que le cone ou cylindre, duquel le cercle A B C D est la base. a Sch. 9. 4.

Il est manifeste que ces triangles Isosceles sont plus de la moitié des bases des segmens restans du cylindre, estans moitiez des rectangles de mesme hauteur, comme B P. Parquoy ces quatre prismes seront plus de la moitié des quatre segments: mais si les huict petits segments restans du cylindre ne sont plus petits que E, soit touſiours ainsi soustrait plus de la moitié de ce qui reste, [b] & en fin il restera vne grandeur moindre que E: & pour abreger soient ces huict segments plus petits que E. b 1. 10.

Il est donc euident que la colomne composée de ces six prismes, ayans pour base le polygone inscrit au cercle A C, & de mesme hauteur que le cylindre donné, sera plus que triple de ce cone, selon ce qui est dit cy-dessus. Mais chacun prisme estant triple de sa pyramide de mesme hauteur, & qui a base egale, [c] pouuant estre diuisé en trois telles pyramides egales. Il s'ensuit que tous ces prismes faisans la colomne qui a pour base le polygone inscrit au cercle A C, c'est à dire, cette colomne de mesme hauteur, que le cylindre est triple de ces six pyramides qui font la pyramide seule, ayant le mesme polygone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colomne. Donc ladite pyramide c 7. 12.

ſera plus grande que le cone de meſme hauteur, ayant le cercle A C pour baſe. Ce qui eſt abſurde, la pyramide n'eſtant que partie du cone. Partant le cylindre n'eſt plus grand que le triple du cone.

Soit donc plus petit, s'il eſt poſſible, de la quantité de E; c'eſt à dire, qu'oſtant E du cone que le reſte ſoit le tiers du cylindre. Maintenant du cone, dont le cercle A C eſt la baſe, ſoit oſté plus de la moitié, ſçauoir la pyramide de meſme hauteur, dont la baſe eſt le quarré A B C D, & du reſte, ſçauoir des quatre ſegments K, L, M, N, ſoit oſté plus de la moitié, ſçauoir la pyramide de chacun ſegment, de meſme hauteur qu'iceluy ſegment, & ayant pour baſe le triangle Iſoſcele en iceluy ſegment: & ſoit continué ce retranchement iuſques à ce que les ſegments reſtans ſoient plus petits que
e 1. 10. E, e ce qui aduiendra. Et pour abreger ſoient ces huict petits ſegments plus petits que E.

Il eſt donc manifeſte que la pyramide de meſme hauteur que le cone, ayant cét octogone pour baſe, eſt plus grande que le tiers du cylindre donné, eſtant plus grande que le cone, ayant retranché d'iceluy E. Mais ce cone ainſi retranché, eſt le tiers du cylindre donné, & la pyramide auſſi le tiers de la colomne de meſme hauteur, ayant pour baſe le meſme octogone, comme il a eſté dit cy-deſſus. Donc icelle colomne ſeroit plus grande que le cylindre donné: dont elle eſt partie. Ce qui eſt abſurde. Partant le cylindre donné n'eſt plus petit ny plus grand que le triple du cone. Donc egale. Partant tout cone eſt la tierce partie du cylindre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME II. PROP. II.

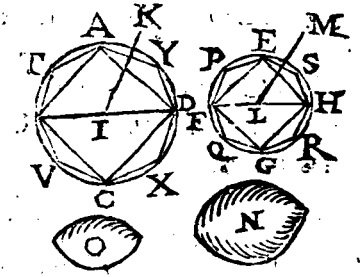
Les Cones & les Cylindres qui ſont de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soient les cones & les cylindres de meſme hauteur, dont les baſes ſont A B C, E F G, & les hauteurs ou axes I K, L M. Ie dis que comme la baſe eſt à la baſe, ainſi le cone eſt au cone, & le cylindre au cylindre : c'eſt à dire, que ſi on entend que comme le cercle ou baſe A B C, eſt au cercle E F G, ainſi le cone B I K, eſt à quelque autre ſolide, comme N, que N, ſera egal à F L M.

Car s'il n'eſt ainſi, il ſera plus grand ou moindre, ſoit premierement plus petit, & de la quantité de O, s'il eſt poſſible : partant N & O, ſeront egaux au cone F L M, & du cone F L M, comme en la 10. Propoſition, ſoit oſté plus de la moitié, à ſçauoir vne pyramide de meſme hauteur que le cone, dont la baſe ſoit le quarré E F G H, & du reſte auſſi plus de la moitié, à ſçauoir quatre pyramides de meſme hauteur, ayant pour baſes les quatre triangles Iſoſceles EPF, FQG, GRH, HSE, 1. 10.
& ainſi de ſuitte : Il reſtera en fin, vne grandeur moindre que O, laquelle pour abbreger, ſoit les huict petits ſegments : Il s'enſuit que la pyramide F M, de meſme hauteur que le cone F M, dont la baſe eſt l'octogone E P F Q G R H S, ſera plus grande que N.

Dedans le cercle A B C D, ſoit inſcrit vn polygone

gone ſemblable, au polygone inſcrit en la baſe circulaire E F G H, & ſur iceluy ſoit entẽdu eſtre vne pyramide de meſme hauteur que le cone BIK.



a Co.2.12. a Mais comme le cercle A B C, eſt au cercle E F G, ainſi le polygone TVXY : eſt au polygone P Q R S, mais comme le cercle ABC, b 6.12. au cercle EFG, ainſi le cone B K à N : b & comme le polygone au polygone, ainſi la pyramide à la c 11.5. pyramide, de meſme hauteur que les cones. c Donc la pyramide ATBVCXDYK, ſera à la pyramide EPFQGKHSM, comme le cone B I K, au ſolide N ; mais ATBVCXDYG, eſtant moindre que le d 14.5. cone B I K, la partie que le tout : d auſſi la pyramide E P F Q G R H S M, ſera moindre que N, mais elle a eſté monſtrée plus grande. Ce qui eſt abſurde. Donc N, n'eſt moindre que le cone E F G H M.

Secondement, que N ſoit plus grand que E F G H M : Donc eſtant poſé comme le cercle ABC, au cercle E F G, ainſi le cone B K à N, par conuerſion de raiſon, comme le cercle E F G, au cercle A B C, ainſi N, au cone B K : & comme N à B K : ainſi le cone E F G H M, ſoit poſé à O. Et N eſtant poſé e 14.5. plus grand que le cone F M, e le cone B K, ſera auſſi plus grand que O. Partant puis que comme le cercle E F G, eſt au cercle A B C, ainſi N au

cone

cone B K : [f] comme le cercle E F G H, au cercle A B C, ainſi le cone F M à O, plus petit que le cone B K. Ce qui eſt abſurde, eſtant deſia monſtré que le cone ne peut eſtre à vne autre grandeur moindre que l'autre cone, comme la baſe de celuy-là, à la baſe de celuy-cy. Donc N n'eſt plus grand ny plus petit que le cone F M, partant egal. Donc eſtant poſé comme la baſe ABCD, à la baſe EFGH, ainſi le cone B K à N : [g] Mais comme le cone B K eſt à N, ainſi le meſme cone B K, au cone F M: auſſi comme la baſe ABCD, à la baſe EFGH, ainſi le cone A B C D K, au cone E F G H M. f 11.5. g 7.5.

Mais d'autant que comme le cone A B C D K, [h] au cone E F G H M, ainſi le cylindre A B C D K, (qui eſt triple du cone A B C D K) au cylindre E F G H M, (qui eſt triple du cone E F G H M,) auſſi comme la baſe ABCD, ſera à la baſe E F G H, ainſi le cylindre A B C D K, ſera au cylindre E F G H M. Ce qui ſe peut auſſi demonſtrer ainſi que des cones, ſi au lieu des cones & des pyramides, on entend des cylindres & des priſmes. Donc les cones & les cylindres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. h 15.5.

COROLLAIRE.

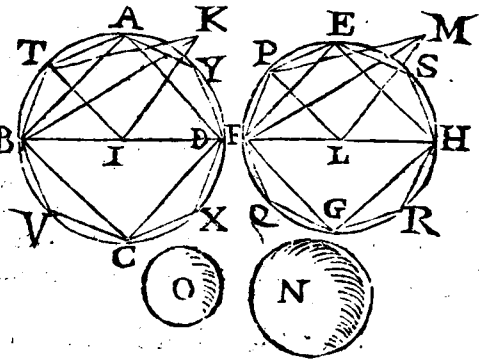
D'où il s'enſuit, que les cones & cylindres conſtituez ſur meſme baſe, ou baſes egales, & de meſme hauteur ſont egaux ; & au contraire les cones & cylindres egaux conſtituez ſur meſme baſe, ou ſur egales, ſont de meſme hauteur, & les cones & cylindres egaux de meſme hauteur, ſont auſſi ſur baſes egales, ou vne meſme : ce qui ſera demonſtré, comme en la conuerſe de la 31. Prop. 11.

THEO

THEOREME 12. PROP. 12.

Les Cones & les Cylindres ſemblables, ſont l'vn à l'autre en raiſon triplée des diametres de leurs baſes.

Soient les cones & cylindres ſemblables, dont les baſes ſont les cercles ABCD,EFG,& les axes I K, L M,& les diametres des baſes B D,F H. Ie dis que le cone eſt au cone, & le cylindre au cylindre, en raiſon triplée du diametre au diametre.



S'il n'eſt ainſi, ſoit le cone A B C D K, à quelque autre grandeur N, plus grande ou moindre que le cone E F G H M, en raiſon triplée du diametre B D, au diametre F H.

Et ſoit premierement N, moindre que le cone E F G H M, de O: & ſoit faicte la meſme conſtruction qu'en la precedente Propoſition, de ſorte que la pyramide E P F Q G R H M, ſoit derechef monſtrée

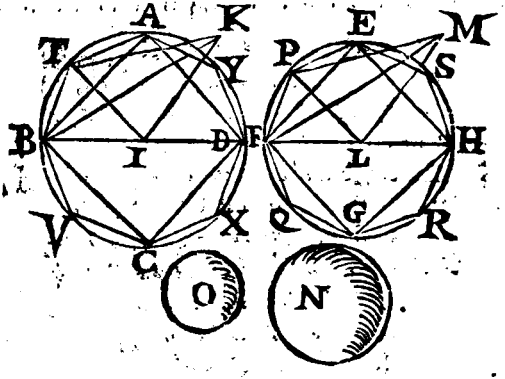
monstrée plus grande que N, & menées les droictes lignes K B, K T, M F, M P, pour auoir deux triangles B K T, E M P, des pyramides A T B V C X D Y K, E P F Q G R H S M: & soient conioinctes T I, P L.

D'autant donc que les cones A B C D K, E F G H M, sont posez semblables, [a] l'axe I K, sera à l'axe L M, comme le diametre B D, au diametre F H: partant comme le semy-diametre B I, au semy-diametre F L, ainsi l'axe I K, à l'axe L M: & en changeant, comme B I à I K, ainsi F L à L M, a 24.d.11. 15.5.

Donc puis que les angles B I K, [b] F L M, sont droicts, les cones estans posez droicts: partant les axes perpendiculaires à leurs bases, [c] les triangles B I K, F L M, seront equiangles; Donc comme K B, à B I, ainsi M F, à F L. Mais comme B I à B T, ainsi F L à F P, à cause de la semblance des triangles B I T à F L P: (car puis que B I T, F L P, appuyez sur arcs semblables, [d] sont egaux: & que comme B I, est à I T, ainsi F L, à L P, tant par l'egalité des lignes B I, I T, que F L, L P, [e] les triangles B I T, F L P, sont semblables) & en raison egale comme K B, à B T, ainsi M F à F P. b 3.d.11. c 6.6. d Sch.3. e 6.6.

Derechef, d'autant que les costez K I, I B, du triangle K I B, sont egaux à K I, I T, du triang. K I T, & les angles contenus d'iceux [f] droicts, l'axe I K, estant posé perpendic. au cercle A B C, [g] les bases K B, K T, seront egales. Et semblablement M E, M P, egales: partant K B, K T, proport. à M F, M P, y ayant proportion d'egalité de part & d'autre. Mais d'autant que comme K B à B T, ainsi K T, à la mesme B T. Item, comme M F à F P, ainsi M P à la mesme F P: mais comme K B, estoit à B T, ainsi M F à F P: pareillement, comme K T, sera à B T, f 3.d.11. g 4.1.

ainſi MP à FP, & par conuerſion, comme BT à TK, ainſi FP à PM : partant, puis que comme TK, eſt à KB, ainſi PM à MF, & comme KB à BT, ainſi MF à FP, & comme BT à TK, ainſi FP à PM, comme il eſt monſtré. Les triangles BKT, FMP, auront
h 6. 6. les coſtez proport. h partant equiangles : & i ſemblables.
i 1. d. 6. Et ſemblablement les autres triangles à l'entour des pyr. ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, ſeront ſemblables entr'eux : leſquels eſtans egaux
k 9. d. 11. en multitude, icelles k pyr. ſeront ſemblables, l &
l Cor. 8. 12. ſeront en raiſon triplée de leurs coſtez homolo-



gues BT, FP : mais comme BT à FP, ainſi BI à FL,
m 11. 5. par la ſimilitude des triangles BIT, FLP, m & comme BI à FL, ainſi BD à FH. Donc la pyramide ſera à la pyramide, en raiſon triplée des diametres BD, FH : mais le cone ABCDK, eſtoit poſé à N, en raiſon triplée des meſmes diametres. Donc comme la pyramide ATBVCXDYK, à la pyr. EPFQGRHSM, ainſi le cone ABCDK à N. Parquoy puis que la pyramide ATBVCXDYK, eſt moindre que le cone ABCDK, la partie que

le

le tout; n la pyramide E P F Q G R H S M, sera moindre que N. Mais elle est monstrée plus grande. Ce qui est absurde. Donc N, n'est plus grande que le cone E F G H M. n 14. 5.

Secondement, soit N, plus grande que le cone E F G H M. Donc le cone A B C D K, estant posé à N, en raison triplée du diametre B D à F H, & la pyramide A T B V C X D Y K, estant à la pyramide E P F Q G R H S M, en raison triplée des mesmes diametres, comme il est monstré: comme le cone A B C D K, sera à N, ainsi la pyr. A T B V C X D Y K, à la pyramide E P F Q G R H S M: & en changeant comme N, au cone A B C D K, ainsi la pyr. E P F Q G R H S M, à la pyr. A T B V C X D Y K. o o Cor. 8. 12.

Partant, la pyramide E P F Q G R H S M, estant à la pyramide A T B V C X D Y K, en raison triplée des costez homologues P F, T B, c'est à dire, du diametre F H, au diametre B D: N sera aussi au cone A B C D K, en raison triplée du diametre F H, au diametre B D. Comme N, est au cone A B C D K, ainsi le cone E F G H M, soit posé à O. Donc le cone E F G H M, sera aussi à O, en raison triplée du diametre F H, au diametre B D, & N estant posée plus grande que le cone E F G H M, p le cone A B C D K, sera aussi plus grand que O. Partant le cone E F G H M, sera à O, moindre que le cone A B C D K, en raison triplée du diametre F H, au diametre B D. Ce qui est absurde; car il est monstré que le cone ne peut estre en raison triplée des diametres des bases, à vne autre grandeur moindre que l'autre cone. Donc N n'est plus grande que le cone E F G H M, & est monstrée n'estre moindre, partant egale. Parquoy q le cone A B C D K, a mesme raison au cone E F G H M, que à N. p 14. 5. q 7. 5.

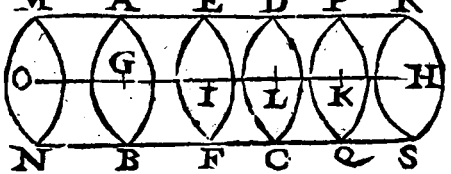
Donc puis que le cone A B C D K, eſt à N, en raiſon triplée des diametres B D, F H, le cone A B C D K ſera auſſi au cone E F G H M, en raiſon triplée des meſmes diametres.

[r] 15.1. Mais [r] d'autant que les cylindres ſont en meſme raiſon que les cones dont ils ſont triples, le cylindre ſera au cylindre en meſme raiſon triplée des diametres des baſes. Ce qui ſera demonſtré comme aux cones, ſi au lieu des cones & des pyramides, on prend des cylindres & des priſmes. Donc les cones & les cylindres ſemblables ſont en raiſon triplée. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 13. PROP. 13.

Si vn cylindre eſt coupé par vn plan parallele aux plans oppoſez : Comme le cylindre ſera au cylindre, ainſi l'axe ſera à l'axe.

Soit le cylindre A B C D, coupé par le plan E F, qui ſoit parallele aux plans oppoſez A B, C D, & coupant l'axe à I. Ie dis que comme le cylindre A F, eſt au cylindre E C, ainſi l'axe G I, à l'axe I L.



Qu'ainſi ne ſoit, ayant prolongé l'axe G L, de part & d'autre, ſoit poſée G O, egale à G I; & L K, K H,

K H, chacune egale à I L; & soit entendu le cylindre estre prolongé de part & d'autre à O & H. Cela estant, il est manifeste que les cylindres A N, A F, E C, C P, Q R, sont tous sur bases egales. Et partant A N, A F, ayant mesme hauteur, c'est à dire les axes egaux, I G, G O, sont egaux entr'eux. Semblablement F D, D Q, Q R, estans de mesme hauteur, sont aussi egaux entr'eux; parquoy l'axe I O, est autant multiple de l'axe G I, que le cylindre E N, du cylindre A F, & l'axe I H, autant multiple de l'axe I L, que le cylindre F R, du cylindre F D, comme il est manifeste. [f] Cor. 11. 12.

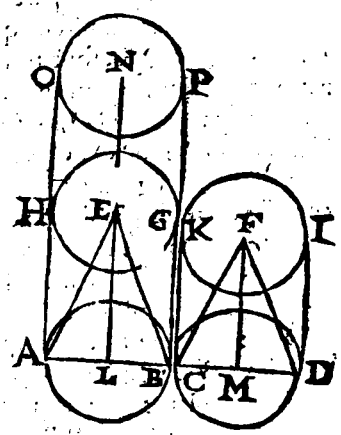
Donc si l'axe O I, multiple de G I, premiere grandeur, est egal, plus grand ou moindre que I H, multiple de I L, 2. grandeur: aussi le cylindre E N, multiple du cylindre E B, 3. grandeur, sera plus grand, egal ou moindre, que le cylindre F R, multiple du cylindre F D, 4. grandeur, en quelconque multiplication que ce soit: [t] parquoy comme l'axe à l'axe, ainsi le cylindre sera au cylindre. Donc si vn cylindre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [t] 6. d. 5.

THEOREME 14. PROP. 14.

Les cones & les cylindres constituez sur bases egales; sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient sur les bases egales A B, C D, deux cones A B E, C D F, & deux cylindres A B G H, C D I K, dont les axes ou hauteurs (car aux cones & cylindres, les axes qui sont à angles droicts, sont leurs hauteurs) sont L E, M E. Ie dis que le cone A B E, est

au cone C F D,& le cylindre A G,au cylindre C I; comme la hauteur L E,à la hauteur M F.



Car ſoit prolongé le cylindre A G, de la part de G H, auec ſon axe L E,& le rectangle A G, & ſoit priſe l'axe E N, egal à l'axe M F,& à l'entour du centre N, ſoit entendu le cercle O P, egal & parallel. à G H, afin que le cylindre G O, ſoit faict de meſme hauteur que le cylindre C I.

v Cor.11. 12. 7. 5. x 13. 12. D'autant donc que les cylindres H P, C I, ayans baſes & hauteurs egales,[v] ſont egaux: le cylindre A G, aura meſme raiſon à iceux:[x] mais le cylindre A G, eſt au cylindre H P, comme l'axe ou hauteur L E, à l'axe ou hauteur E N, c'eſt à dire, à la hauteur M F ſon egale. Donc le cylindre A G, ſera auſſi au cylindre C I, comme la hauteur L E, à la hauteur M F.

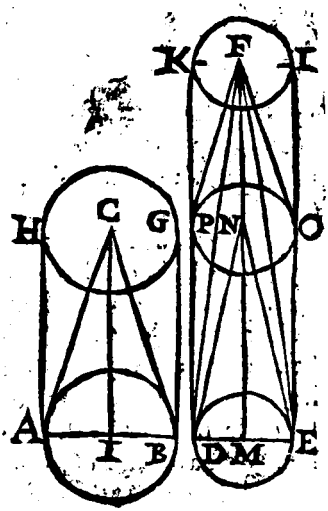
y 10. 12. z 15. 5. Mais[y] d'autant que les cones A B E, C D F, ſont les tierces parties des cylindres A G, C I:[z] ils ſeront en meſme raiſon que les cylindres; partant le cone A B E, ſera au cone C D F, comme la hauteur L E, à la hauteur M F. Donc les cones & les cylindres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO

THEOREME 15. PROP. 15.

Les baſes & les hauteurs des cones & des cylindres egaux, ſont reciproques. Et les cones & les cylindres, deſquels les baſes & les hauteurs ſont reciproques, ſont egaux.

Soient les cones A B C, D E F egaux & les cylindres A G, D I, auſſi egaux, dont les baſes ſont A B, D E, & les axes ou hauteurs L C, M F. Ie dis que les baſes & les hauteurs ſont reciproques ; c'eſt à dire, comme A B, eſt à D E, ainſi M F, à L C.



Car ſi les hauteurs L C, M F, ſont egales, les cylindres eſtans poſez egaux, [a] les baſes ſeront egales: Donc comme A B à D E, ainſi M F à L C. Donc les baſes & les hauteurs ſont reciproques. Que ſi l'vne eſt plus grande, comme F M, ſoit retranchée M N, egale à L C ; & ſoit entendu le plan P O, par N, & parallele à D E, coupant le cylindre D I en deux.

[a] Cor. 11. 12.

Donc les deux cylindres A G, D I, eſtans poſez
b 7.5. egaux [b] comme A G, ſera à D O, ainſi D I à D O:
c 11.12. [c] mais comme le cylindre A G, au cylindre D O, ainſi la baſe A B, à la baſe D E, les hauteurs C L,
d 14.12. M N, eſtans egales. [d]

Item, comme D I à D O, ainſi la hauteur M F à M N, eſtans les baſes egales, ſçauoir vne meſme D E: Donc auſſi comme la baſe A B, à la baſe D E, ainſi la hauteur M F, à la hauteur M N: c'eſt à dire, à ſon egale L C. Donc les baſes & les hauteurs ſont reciproques.

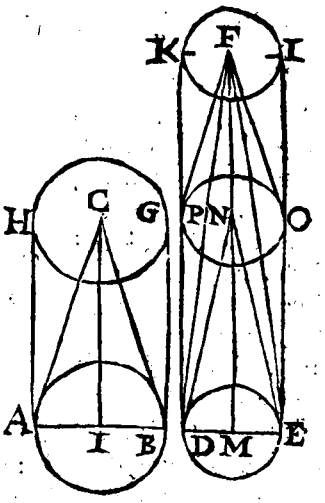
Et ſi les cones A B C, D E F, ſont egaux, les cylin-
e 10.12. dres A G, D I ſeront egaux, [e] les cones eſtans les tiers des cylindres, donc de l'egalité des cylindres il s'enſuit que les baſes & les hauteurs ſont reciproques, comme il eſt monſtré: & partant de l'egalité des cones il s'enſuiura auſſi que les baſes & les hauteurs ſont reciproques. Ce qui ſe peut auſſi demonſtrer par le diſcours dont on s'eſt ſeruy aux cylindres, conſtruiſans deux cones, comme appert en la figure.

Maintenant ſoient les baſes & les hauteurs reciproques. Ie dis que les cones & les cylindres ſont egaux: Si les hauteurs ſont egales eſtans entr'elles comme les baſes, icelles baſes ſeront auſſi egales: [f] partant les cylindres ſeront egaux. Si inegales, ſoit faicte la conſtruction comme auparauant. Donc la hauteur M F, eſtant poſée à la hauteur L C, c'eſt à dire à M N ſon egale, comme la baſe
g 11.12. A B, à la baſe D E: [g] mais comme A B à D E, ainſi le cylindre A G, au cylindre D O, de meſme
h 14.12. hauteur. [h]
f Cor. 11. 12.

Item, comme la hauteur M F, à la hauteur M N, ainſi le cylindre D I, au cylindre D O, les baſes

eſtans

estans egales: comme le cylindre A G, au cylindre D O, ainsi D I, au mesme cylindre D O : [i] partant le cylindre AG, sera egal au cylindre D I.



i 9. 5.

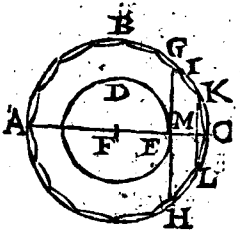
Et si les bases & les hauteurs des cones ABC, DEF, sont reciproques, les bases & les hauteurs des cylindres AG, DI, estans les mesmes bases & hauteurs des cones seront reciproques : Donc comme il a esté monstré, les cylindres ; & partant les cones tierces parties d'iceux, seront egaux. L'on peut toutefois faire la mesme demonstration aux cones, qui a esté faicte aux cylindres. Donc les bases & les hauteurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBLEME 1. PROP. 16.

Deux cercles estans à l'entour d'vn mesme centre, inserite au plus grand cercle vn polygone equilateral, & pair en nombre de costez, lequel ne touche point le moindre cercle.

Soient deux cercles A B C, D E, à l'entour d'vn meſme centre F, & il faut inſcrire au plus grand vn polygone equilateral, ne touchant le moindre D E, & duquel les coſtez ſoient en nombre pair.

Soit menée A C, par le centre F, coupant le cercle D E, en E, & par E, ſoit menée G H, perpendiculaire à A C, [k] qui touchera le cercle à E: D'autant donc que l'arc A G C, eſt plus grand que l'arc G C, ſi de A G C, on oſte la moitié A B, & du reſte B C, la moitié B I; & du reſte I C, la moitié I K, & ainſi de ſuitte: [l] il reſtera enfin vn arc moindre que C G. Soit maintenant l'arc C K, moindre que C G, & ſoit C K ſouſtendante. Ie dis que C K, eſt vn coſté du polygone qui doit eſtre inſcrit.



k Cor. 16. 3.

l 1. 10.

Car ſi l'arc B I, eſt diuiſé en parties égales en nombre & grandeur, aux parties de l'arc C I: & le quart du cercle A B, ſoit diuiſé en autant de parties egales, qu'il y a de parties egales en l'arc B C; & auſſi le demy-cercle A H C, en autant de parties qu'en contient le demy-cercle A B C: puis ſoient menées les lignes droictes ſouſtendantes tous les arcs, [m] leſquelles ſeront egales à la droicte ligne C K, d'autant qu'elles ſouſtendent arcs egaux, à l'arc C K, & on aura deſcrit vn polygone au cercle A B C, équilateral, & en nombre pair des coſtez, lequel ne touchera le moindre cercle D E.

m 29. 3.

Car de K à A C, ſoit menée vne perpendiculaire K L, coupant A C à M. D'autant que les angles G E M,

G E M, K M E, ſont droicts,[n] H G, K L, ſeront paralleles. Partant G H, touchant le cercle D E, au poinct E, la droicte ligne K L, ſera toute hors ledit cercle, & ne l'atteindra iamais, ne rencontrant iamais G H: donc la droicte ligne C K, qui eſt plus eſloignée du cercle D E, touchera encore moins le cercle D E, que K L; & partant ny les autres coſtez du polygone inſcrit, eſtans egaux au coſté C K, & partant ſeront autant eſloignez du centre F, que C K, ne toucheront le cercle D E.[o] Donc deux cercles eſtans. Ce qu'il falloit demonſtrer. n 29. 1. o 14. 3.

COROLLAIRE.

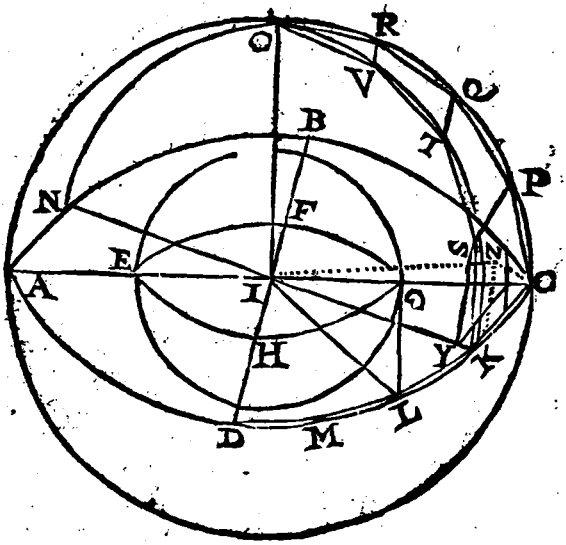
Il eſt d'icy manifeſte, que ſi de l'extremité du coſté du polygone inſcrit, lequel rencontre le diametre, eſt menée vne ligne perpendiculaire au diametre: icelle ne pourra aucunement toucher le moindre cercle; mais tombera toute hors iceluy. Car telle eſt la ligne K L, laquelle menée de l'extremité K, du coſté C K, rencontrant le diametre AC, perpendiculaire au diametre AC, eſt monſtrée ne toucher le cercle D E.

PROBLEME 2. PROP. 17.

Deux ſpheres eſtans à l'entour d'vn meſme centre, inſcrire en la plus grande ſphere vn ſolide polyedre, lequel ne touche point la ſuperficie de la plus petite ſphere.

Soient deux ſpheres A B C D, E F G H, à l'entour d'vn

d'vn meſme centre I, & en la plus grande A B C D, il faut inſcrire vn ſolide polyedre, c'eſt à dire, de pluſieurs coſtez, lequel ne touche point la ſuperficie de la moindre ſphere E F G H.



Soient coupées les deux ſpheres par quelque plan mené par le centre I, & ſoient les communes ſections faictes és deux ſpheres les plans A B C D, E F G H, leſquelles ſeront cercles par la definition de la ſphere, ayant meſme centre I, que les ſpheres: car les demy-cercles, par la reuolution deſquels ſont deſcrites les ſpheres, conuiendront auec les ſections A B C D, E F G H, parquoy leſdites ſections ſeront cercles, ou d'autant que toutes les lignes droictes menées du centre I, aux circonferences des ſections, ſont egales. Et en iceux ſoient menez

les

les diametres A C, B D, se coupans au centre I, à angles droicts : [a] Puis au plus grand cercle ABCD, soit inscrit vn polygone, ne touchant point le moindre E F G H, & soient C K, K L, L M, M D, costez du quart C D ; & soit menée K N, par le centre I, & [b] de I soit menée I O, perpendiculaire au plan des cercles A B C D, E F G H, rencontrant à O, la superficie de la plus grande sphere. Et par A C, I O, & N K, I O, soient menez les plans A O C, N O K : ils seront demy-cercles, les plus grands entre ceux de la sphere, ayans mesme centre, comme dit est, & I O, ligne de commune section des plans des demy-cercles N O K, A O C, estant perpendiculaire au plan du cercle A B C D. [c] Iceux demy-cercles seront aussi perpendiculaires au plan du cercle A B C D : & les trois demy-cercles A D C, A O C, N O K estans egaux, estans leurs diametres egaux, leurs moitiez, sçauoir les quatres O C, O K, D C, seront egales : parquoy O C, O K, contiendront chacune autant des costez du polygone que D C.

a 16.12.
b 12.11.
c 18.11.

Soient iceux costez C P, P Q, Q R, R O, K S, S T, T V, V O, & menées S P, T Q, V R, & de P, S, les perpend. P X, S Y, [d] elles tomberont sur I C, I K, communes sections des quartes I O C, I O K, & le plan I C D, esleuées perpend. sur iceluy plan, [e] icelles seront aussi parall. & soit aussi menée X Y.

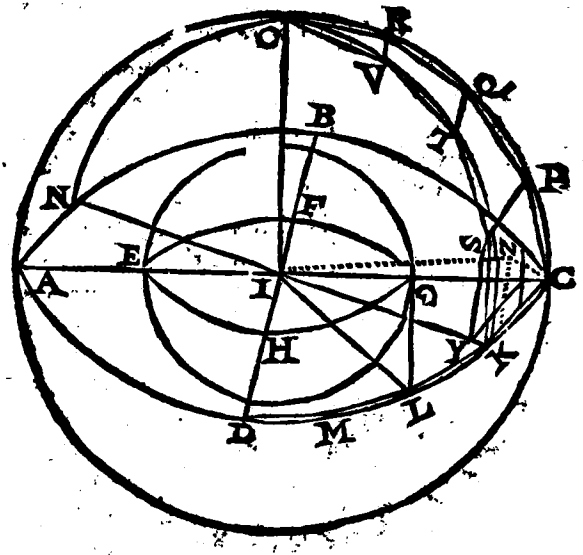
d 38.11.
e 6.11.

Maintenant les arcs P C, S K, estans egaux, [f] & les lignes droictes soustendantes P C, S K aussi egales les angles P X C, S Y K droicts : [g] & les angles P C X, S K Y egaux, estans appuyez sur circonferences egales A Q P, N O S ; les deux angles P C X, P X C, du triang. P X C, sont egaux aux deux angles S K Y, S Y K, & les costez P C, S K, egaux, [h] les deux autres

f 29.3.
g 27.3.
h 26.3.

autres coſtez P K,X C, ſeront egaux aux deux autres coſtez S Y,Y K,chacun au ſien. Donc les diametres A C,N K eſtans egaux,& les ſegmens C X, K Y auſſi egaux, A X, N Y ſeront auſſi egaux : & I X, I Y egales. Parquoy comme I X à X C, ainſi I Y à Y K.[a] Donc XY,eſt parallele à KC,& PX,SY, eſtans monſtrées egales & paralleles S P,YX,[b] ſeront auſſi egales & paralleles. Et [c] S P,K C,ſeront parall.[d] & S K,P C,en vn meſme plan auec icelles,

2. 6.
33. 1.
9. 11.
7. 11.



Donc toute la figure quadrilatere SKCP,eſt en vn meſme plan : ainſi on monſtrera que chacun des quadrilateres T P,V Q, a toutes ſes parties en vn meſme plan, & le triangle O R V ſemblablement : & ſi des poincts P,Q,R,S,T,V,on mene des lignes au centre I,on ſe pourra imaginer vne figure ſolide compoſée de quatre pyramides entre O C,

&

& O K, desquelles le sommet est au centre I, & leurs bases sont les quadrilateres C S, P T, Q V, & le triangle O V R : & faisant sur les autres costez K L, L M, M D, ainsi que sur C K, & aussi sur les trois autres quartes B C, B A, A D, l'on aura inscrit vn polyedre en la sphere proposée. Ie dis qu'il ne touche la moindre sphere E F G H.

Car ayant mené la ligne I Z, du centre I, perpendiculaire au plan C S, elle sera plus grande que I G, demy-diametre de la moindre sphere. Car pour inscrire le polygone, estant menée G L, perpend. à A C, du poinct G, laquelle estant plus grande que C K, costé dudit polygone inscrit, comme il est manifeste, soit menée I L, & aussi C Z, K Z. [c] Les angles I Z C, I Z K estans droicts : [f] le q. de I C, sera egal aux deux qq. de I Z, C Z, & le q. de I K, egal aux qq. de I Z, Z K ; parquoy les qq. des diametres estans egaux, les qq. de I Z, Z K, seront egaux aux qq. de I Z, C Z : donc si on oste le commun q. de I Z, les qq. de C Z, K Z, demeureront egaux ; & partant K Z, C Z, egales. Et ayant mené des lignes de Z à S, & P, on monstrera par les mesmes raisons qu'elles seront egales, tant entr'elles qu'à C Z, Z K : partant si de Z, pris pour centre, l'on descrit vn cercle à l'interualle de l'vne d'icelles, il passera par tous les poincts C, K, S, P : & partant sera descrit à l'entour dudit quadrilatere, dont les trois costez C P, C K, K S, sont egaux, [g] soustendans arcs egaux, de cercles egaux, & le 4. S P, plus petit.

c 2.11.
f 47.1.
g 29.3.

Car puis que les triangles I C K, I X Y, sont semblables, & le costé I C, plus grand que le costé I X, [h] C K, sera aussi plus grand que Y X, c'est à dire, que S P, monstré egal à Y X, l'angle C Z K, sera plus grand qu'vn droict : (car les quatre lignes menées

h 14.5.

du

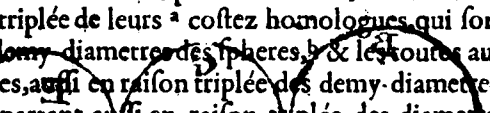
du poinct Z, aux poincts K, C, P, S, eſtans mõſtrées egales, les 4. triangles qui ſe font, dont les ſommets ſont au poinct Z, auront les 4. angles à Z, egaux à quatre droicts : & les baſes des 3. triangles SZK, KZC, CZP, eſtans monſtrées egales [1] les 3. angles 4.1. oppoſez à icelles ſeront egaux, parquoy chacun ſera plus grand qu'vn droict, puis que la baſe CK, eſt monſtrée plus grande que SP, & l'angle CZK, plus grand que l'angle SZP ; partant plus grand qu'vn droict : & par ainſi le plus grand du triangle CZK : donc le coſté CK, ſera plus grand que CZ, & GL eſtant plus grande que CK, ſera auſſi plus 19.1. grande que CZ : parquoy le quarré de GL, ſera plus grand que le quarré de CZ ; & les quarrez de IG, GL, eſtans egaux aux quarrez de IZ, CZ, (tant ces deux-là, que ces deux-cy, eſtans egaux au quarré du demy-diametre, puis que les triangles m 47.1. IGL, ICZ, ſont rectangles) & le quarré de GL, eſtant plus grand que le quarré de CZ, le quarré de IZ, ſera auſſi plus grand que le quarré de IG : & partant IZ, plus grande que IG. Donc le plan CK SP, ne touchera la moindre ſphere EFGH : & ainſi on monſtrera que tous les autres plans du polyedre inſcrit en la plus grande ſphere, ne toucheront la ſuperficie de la moindre ſphere EFGH : Partant deux ſpheres eſtans à l'entour d'vn meſme centre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cette demonſtration s'enſuit, que ſi en vne autre ſphere eſt deſcrit vn ſolide polyedre ſemblable au ſuſdit, qu'iceux ſeront en raiſon triplée des diametres des ſpheres, dans leſquelles ils ſont inſcrits:

scrits : car estans semblables par la definition des solides semblables, ils contiendront en leur conuexité autant de plans semblables l'vn que l'autre: parquoy se pourront diuiser en autant de pyramides semblables l'vn que l'autre, ayans toutes le demy-diametre de leurs spheres, pour vn de leurs costez : donc estans prises vne à vne, seront en raison triplée de leurs [a] costez homologues, qui sont les demy-diametres des spheres, [b] & les toutes aux toutes, aussi en raison triplée des demy-diametres: [c] & partant aussi en raison triplée des diametres entiers. CQFD

a Cor. 2. 12.
b 12. 5.
c 15. 5.



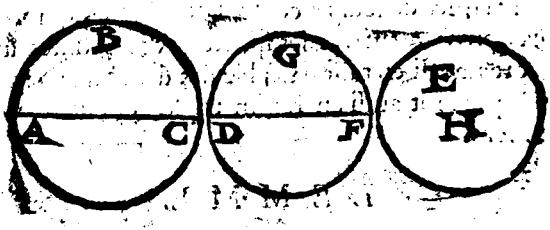
LEMME.

Or que la perpendiculaire menée du centre I, au plan C P S K, tombe sur le milieu d'icelui, comme au point Z, il est manifeste. Car l'angle I C P, estant agu, comme il appert par la 16. du 3. la perpendiculaire menée du centre I, tombera de la part de l'angle agu I C P : & si on entend vne ligne menée de I à P, elle fera aussi angle agu, auec la ligne droitte I C, qui sera I P C, de la part duquel tombera la mesme perpendiculaire ; & partant, entre C & P. Ce que l'on peut demonstrer de toute autre, menant des lignes & circonferences entre P S, & K C : parquoy la perpendiculaire I Z, tombera sur ledit plan. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME. 16. PROP. 18.

Les spheres sont l'vne à l'autre en raison triplée de leurs diametres.

Soient les ſpheres A B C, D G F, dont les diametres ſont A C, D F. Ie dis que A B C, eſt à D G F, en raiſon triplée du diametre A C, au diametre D F: c'eſt à dire, que ſi on entend que comme la raiſon triplée de A C à D F, ainſi la ſphere A B C, eſt à quelqu'autre ſphere, comme à E, qu'icelle ſera egale à la ſphere D G F.



Car s'il n'eſt ainſi, elle ſera plus grande ou plus petite; ſoit E, premierement moindre que D E F, s'il ſe peut faire. Donc E, pourra eſtre encloſe dans D G F, les mettans toutes deux à l'entour d'vn meſme centre. [d] Parquoy en D G F, pourra eſtre inſcrit vn ſolide polyedre, qui ne touchera la moindre E. Et par meſme raiſon on pourra auſſi deſcrire vn ſolide polyedre en l'autre, qui [e] ſera à celuy qui eſt deſcrit en D G F, en raiſon triplée du diametre A C, au diametre D F: mais la ſphere A B C, eſt poſée en telle raiſon à la ſphere E; [f] donc comme la ſphere A B C, à la ſphere E, ainſi le polyedre de A B C, ſera à celuy de D G F: Mais A B C, eſt plus grande que ſon polyedre, le tout que ſa partie: [g] donc E, ſera plus grande que le polyedre de D G F, la partie que le tout: ce qui eſt abſurde: parquoy A B C, n'eſt pas à vne autre ſphere moindre que D G F, en raiſon triplée du diametre A C, au diametre D F.

d 17.12.

e Cor.17. 12.

f 11.5.

g 14.5.

Maintenant

Maintenant ſoit E, plus grande que D G F, s'il eſt poſſible : & eſtant poſé que comme la ſphere A B C, eſt à la ſphere E, ainſi la raiſon triple du diametre A C, au diametre D F : en changeant E, ſera à A B C, en raiſon triplée de D F, à A C. Pareillement, l'on peut entendre que comme E eſt à A B C, ainſi D G F, eſt à vne 4. proport. h qui ſera moindre que A B C : E, eſtant poſée plus grande que D G F : parquoy cette quatrieſme pourra eſtre inſcrite en A B C : & D G F, ſera à icelle quatrieſme inſcrite en A B C, en raiſon triplée de D F à A C. Ce qui eſt monſtré abſurde. Donc E n'eſt plus grande ny moindre que D G F, partant egale. Partant les ſpheres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. h 14. 5. i 11. 5.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte de cette demonſtration, qu'vne ſphere eſt à vne autre ſphere, comme le polyedre inſcrit en celle-là, au polyedre ſemblable, & ſemblablement inſcrit en cette-cy : eſtant demonſtré, que tant les ſpheres que les polyedres inſcrits en icelles, ſont en raiſon triple de leurs diametres.

FIN DV DOVZIESME LIVRE des Elements d'Euclide.

LIVRE TREIZIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE:

Et le troiſieſme des Solides.

THEOREME 1. PROP. 1.

Si vne ligne droicte eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon: le plus grand ſegment compris auec la moitié de la toute, peut le quintuple du quarré de la moitié de la toute.

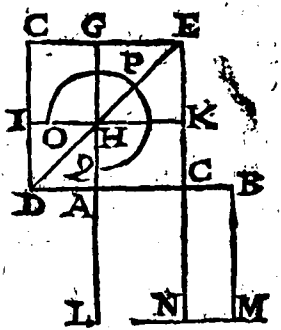
C'eſt à dire, que le quarré du plus grand ſegment, & de la moitié de la toute, comme d'vne ſeule ligne, eſt quintuple du quarré de la moitié de la toute.

SOIT la ligne droicte A B, coupée à C, en la moyenne & extreme raiſon, dont A C, eſt le plus grand ſegment, & ſoit prolongée B A à D, & poſée A D, egale à la moitié de la toute A B. Ie dis que le quarré de C D, eſt quintuple du quarré de A D.

Car

Car sur C D, soit descrit le quarré D F, & ayant mené le diametre D F, soient menées A G, I K, coupant iceluy par H, parall. à D C, C F, & prolongeant G A, soit accomply le quarré A M: & prolongée F C à N, [a] A I, K G, seront les quatrez de AD, AC, [b] & d'autant que comme A B à A C, ainsi A C à C B, [c] le rectangle C M, contenu sous A B, C B, sera egal à K G, quarré de A C: & A B estant posée double de A D, & A L, egale à A B & A H, & A D: A L, sera aussi doublée de A H: [d] mais comme A L, à A H, ainsi le rectangle A N, au rectangle A K: donc A N, est double de A K: [e] mais d'autant que A K, est egal à I G: A N, sera egal aux deux A K, I G.

a Cor. 4.2.
b 3. d.6.
c 17.6.



d 1. 6.
e 43.1.

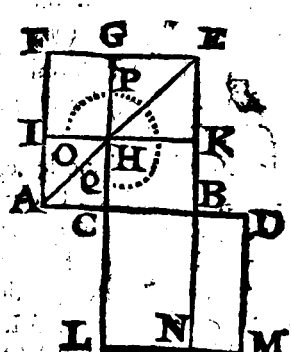
Adioustant donc les egaux C M, K G, le quarré A M, sera egal au Gnomon O P Q: [f] partant le quarré A M, estant quadruple du quarré A I, puis que D A, est posée moitié de A B, le Gnomon O P Q, sera quadruple du mesme A I: parquoy si à O P Q on adiouste A I, le quarré F D, sera faict quintuple du quarré A I. Donc si vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

f Sch.4.2.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si vne ligne droicte peut le quintuple de ſon ſegment, la ligne double dudit ſegment, eſtant coupée ſelon la moyenne & extreme raiſon, l'autre partie eſt le plus grand ſegment de la ligne premierement coupée.

C'eſt à dire, ſi le quarré d'vne ligne droicte eſt quintuple du quarré d'vne partie d'icelle, le double
9.12. *de cette partie eſtant coupé en la moyenne & extreme raiſon, le plus grand ſegment eſt l'autre partie de ladite ligne.*



Soit la ligne droicte A B, diuiſée par C, & qu'elle puiſſe le quintuple de A C, & ſoit priſe C D, double de A C. Ie dis que C D, eſtant coupée ſelon la moyenne & extreme raiſon, C B ſera le plus grand ſegment de la toute C D, partie reſtante de la pre-
Cor. 4.2. miere A B. ꝛ Car ayant acheué la conſt. comme en la precedente, C I, K G, ſeront les quarrez de A C, C B : & d'autant que le quarré B F, eſt poſé quintuple du quarré C I, ſi on oſte le quarré C I, demeurera le gnomon O P Q, quadruple du meſme quarré

quarré C I. Mais le quarré C M, est quadruple du quarré G I, puis que C D, est double de A C: Donc le gnomon O P Q, sera egal à C M. h Sch. 4. 2.

Derechef, d'autant que C D, est posée double de A C, & L C, est egale à C D, & C H à A C: A C, sera double de C H. Donc puis que comme L C, est à C H, ainsi le rectangle L B, au rectangle C K: celuy-là sera aussi double de celuy-cy: i mais C K, est egal à H F. Donc L B, est egal à C K, H F; & partant le quatre restant K G, au rectangle restant B M. i 43. 1.

D'autant donc que le rectangle B M, contenu sous C D, B D, est egal à K G, quarré de C B, l comme C D, sera à C B, ainsi C B, à B D. Partant C D, est coupée à B, en la moyenne & extreme raison, & C B, est le plus grand segment. &c. Ce qu'il falloit demonstrer. l 17. 6.

THEOREME 3. PROP. 3.

Si vne ligne droicte est coupée, selon la moyenne & extreme raison: la ligne faite du moindre segment, & de la moitié du plus grand, peut le quintuple du quarré descrit de la moitié du plus grand segment.

C'est à dire, le quarré du moindre segment auec la moitié du plus grand, comme d'vne seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié du plus grand.

Soit la droicte ligne A B, diuisée par C, selon la moyenne & extreme raison, dont A C, est le plus

grand segment, lequel soit diuisé à D, en deux egalement. Ie dis que le quarré de B D, est quintuple du quarré de C D.



Car sur A B, soit descrit le quarré A E, dont le diametre soit B F: puis par C & D, soient menées C G, D H, parall. à A F, B E, & coupant B F, par I & K, par lesquels soient menées L M, N O, parall. à A B, E F, coupantes C G, D H, à P & Q, & L G, P Q, N H, D O, sont les quarrez de A C, C D, B D.

a Cor. 4.2. b Sch. 4.2. c 17.6. d 34.1. e 36.1. f 43.1.

D'autant donc que A C, est double de C D, [b] le quarré L G, sera quadruple du quarré P Q. Mais le rectangle C E, est egal au quarré L G: (car puis que comme A B à A C, ainsi A C, à C B, [c] le rectangle sous A B, C B, sçauoir C E, est egal au quarré de A C, sçauoir à L G,) donc C E sera aussi quadruple de P Q.

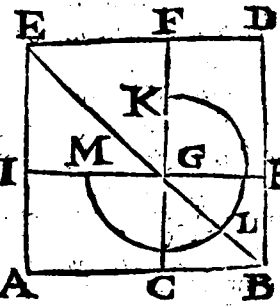
Mais d'autant que les quarrez N H, P Q sont egaux, A D, C D, estans egales, leurs costez H K, I Q seront egaux: [d] & partant E O, O M, opposez à iceux, [e] donc les rectangles I O, Q E, seront egaux: [f] mais I O, est egal à I D: donc Q E, sera egal au mesme I D: adioustant donc le commun rectangle C O, tout le gnomon R S T, sera egal au rectangle C E. Et C E estant monstré quadr. du q. P Q, le gnomon R S T, sera aussi quadr. du mesme q. P Q, adioustant le commun q. P Q, le q. D O, descrit de B D, sera quintuple du q. P Q, descrit de C D: donc si vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PRO

PROBLEME 4. PROP. 4.

Si vne ligne droicte est coupée selon la moyenne & extreme raison, l'vn & l'autre quarré, sçauoir celuy de la toute, & celuy du moindre segment ensemble, sont triples du quarré descrit du plus grand segment.

Soit la droite ligne AB, coupée à C, en la moyenne & extreme raison, & soit AC, le plus grand segment CB, moindre. Ie dis que les quarrez de AB, & de BC ensemble, sont triples du quarré de AC.



Car sur AB, soit descrit le quarré AD, & ayant mené BE, diametre, & par C, soit menée CF, parallele à BD, & HI, à AB, coupantes le diametre à G, g CH, IF, seront les quarrez de BC, AC. Et d'autant que comme AB à AC, ainsi AC, à CB: h le rectangle AH, contenu ous AB, BC, est egal à IF, quarré de AC. Donc AH, estant egal à CD, le gnomon KLM, auec le quarré CH, sera double du quarré IF. Parquoy ioustant IF, AD, quarré de AB, auec CH, quarré de BC, sera triple de IF, quarré de AC. Donc si vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

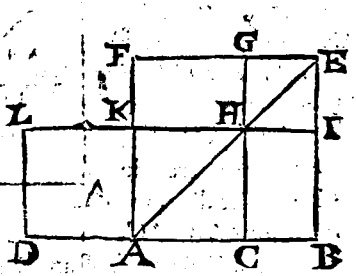
g Cor. 4. 2

h 17. 6.

THEOREME 5. PROP. 5.

Si vne ligne droicte est couppée selon la moyenne & extreme raison ; & que l'on adiouste à icelle vne ligne egale au plus grand segment : la ligne droicte totale est couppée en la moyenne & extreme raison ; & le plus grand segment est la ligne droicte, qui estoit au commencement.

Soit A B, coupée à C, en la moyenne & extreme raison, & soit A C, plus grand segment, & à icelle soit adiousté directement A D, egale au plus grand segment A C. Ie dis que B D, est coupée à A, en la moyenne & extreme raison, & que le plus grand segment est A B.



Car sur A B, soit descrit le quarré B E, & mené A E, diametre, & C G, parallele à B E, coupant A E, au poinct H, par lequel soit menée I K, parallele à E D, & par D, D L, parallele à A F, rencontrant I K, polongée à L : [a] & C K, I G, seront les quarrez de A C, B C.

a Cor. 4. 2.

Dautant donc que comme A B, est à A C, ainsi A C, à C B, [b] le rectangle I F, contenu sous A B, B C, sera gal à C K, quarré de A C : [c] mais C K, est

b 17. 6.

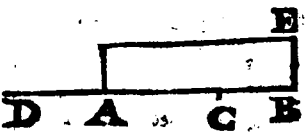
c 26. 1.

eſt egal à A L : donc I F, eſt auſſi egal à A L: adiouſtant donc le commun B K, le rectangle B L, contenu ſous B D, D A, ſera egal à B F, quarré de A B : d partant comme B D, ſera à A B, ainſi A B, à A D. Parquoy B D eſt coupé à A, en la moyenne & extreme raiſon, & A B, eſt le plus grand ſegment. Ce qu'il falloit demonſtrer. d 17.6.

THEOREME 6. PROP. 6.

Si vne ligne droicte rationelle, eſt coupée ſelon la moyenne & extreme raiſon; l'vn & l'autre des ſegmens eſt ligne irrationelle, laquelle eſt appellée apotome ou reſidu

Soit la ligne droicte rationelle A B, coupée à C, en la moyenne & extreme raiſon. Ie dis que tant l'vn que l'autre des ſegments A C, C B, eſt ligne irrationelle, appellée reſidu.



Car ſoit adiouſté au plus grand ſegment A C, la ligne droicte A D, egale à la moitié de la toute A B. e D'autant donc que le quarré de C D, eſt quintuple du quarré de A D, le quarré de C D, ſera au quarré de A D, comme nombre à nombre. f Parquoy les quarrez de C D, A D, ſeront commenſurables, & partant les lignes C D, A D, commenſurables : au moins en puiſſance : Mais A D, eſt rationelle, eſtant moitié de A B, rationelle. Donc C D, ſera auſſi rationelle. g e 1.13. f 6.10. g Cor.24. 8.

Mais d'autant que les quarrez de C D, A D, ne

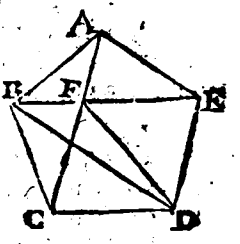
ſont

sont l'vn à l'autre, comme nombre quarré à nom-
9.10. bre quarré, (estant comme 5.à 1.ou 25.à 5.) [a] C D, AD, seront incommens.en longit.& partant rationnelles commens.en puissance seulement. Parquoy si de C D rationelle, on oste A D, rationelle, com-
74.10. mensurable en puissance seulement : [b] la restante AC, sera irrationelle, qui est appellée residu.

Derechef, le rectangle A E, estant appliqué à A B, contenu sous A B, C B, puis que comme A B à
17.6. A C, ainsi A C à C B, [c] le rectangle A E, sera egal au quarré de A C : parquoy le quarré du residu A C, c'est à dire, le rect. A E, appliqué selon la ratio-
98.10. nelle A B, [d] fait l'autre coste B E : c'est à dire C B, égale à icelle, residu premier. Donc si vne ligne droicte rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 7. PROP. 7.

Si trois angles d'vn pentagone equilateral, soit qu'ils soient d'ordre ou non d'ordre, sont egaux : iceluy pentagone sera equiangle.



Au pentagone A B C D E equilateral, soient trois angles egaux, premierement d'ordre A, B, C. Ie dis qu'il est equiangle.

Car à iceux angles egaux soient soustendantes B E, A C, B D. & de F, où s'entrecoupent B E, A C, soit menée F D. D'autant que les costez A B, A E, du triangle A B E, sont egaux à C B, C D, du triangle C D B, & les angles contenus d'iceux

d'iceux posez egaux : [c] les bases B E, B D, & les angles A E B, C D B, sont egaux. [d] Mais les angles B E D, B D E, sont aussi egaux, les costez B E, B D, estans monstrez egaux : donc les touts A E D, C D E, seront egaux.

[c] 4. 1.
[d] 5. 1.

Derechef, les costez A B, A E, du triangle A B E, estans egaux à B A, B C, du triangle B A C, & les angles contenus d'iceux egaux, par l'hypothese, [e] la base B E, sera egale à A C, & les angles A B E, A E B, egaux à B A C, B C A, chacun au sien. Donc puis que les angles A B E, B A C, du triangle A B F, sont egaux : [f] les costez B F, A F, sont aussi egaux : donc s'ils sont ostez des egales B E, A C, les restes F E, F C, seront egales. Partant les costez F E, E D, du triangle F E D, estans egaux à F C, C D, du triangle F C D, & F D, commune ; [g] F E D, F C D, contenus d'iceux costez seront egaux : mais A E B, B C A, sont monstrez egaux : donc les touts A E D, B C D, sont egaux, partant C D E, estant monstré egal à A E D, & les angles A B C, B A E, & B C D, estans posez egaux, iceluy pentagone sera equiangle.

[e] 4. 1.
[f] 6. 1.
[g] 8. 1.

Soient secondement les trois angles A, C, D, non d'ordre egaux : d'autant donc que les costez A B, A E, du triangle A B E, sont egaux aux costez C B, C D, du triangle C B D, & les angles contenus d'iceux posez egaux : [l] les bases B E, B D, & les angles A E B, C D B, seront egaux : [m] mais les angles B E D, B D E, sont aussi egaux, les costez B E, B D, estans monstrez egaux : donc les touts A E D, C D E sont egaux, donc B A E, C D E, estans posez egaux, les trois angles de suitte A, E, D, seront egaux : donc comme il est desia monstré, le pentagone sera equiangle. Donc si trois angles d'vn pentagone. Ce qu'il falloit demonstrer.

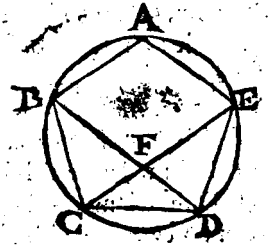
[l] 4. 1.
[m] 5. 1.

THEO

THEOREME 8. PROP. 8.

Si deux lignes droictes ſouſtendent deux angles d'vn pentagone equiangle & equilateral, leſquels ſont d'ordre, icelles ſe coupent l'vne l'autre en la moyenne & extreme raiſon, & les plus grands ſegmens d'icelles ſont egaux au coſté du pentagone.

Soient deux lignes droictes D B, C E, ſouſtendantes les deux angles C & D, au pentagone equiangle & equilateral A B C D E, & ſe coupantes l'vne l'autre au poinct F. Ie dis qu'elles ſe coupent en la moyenne & extreme raiſon, & que leurs plus grands ſegments F B, F E, ſont egaux à chacun coſté du pentagone.



14.4. Car [a] ayant deſcrit vn cercle à l'entour
28.3. du pentagone, [b] les cinq arcs A B, B C, C D, D E, E A, ſeront egaux. Et d'autãt que les coſtez C D, C B, du triangle C D B, ſont egaux aux coſtez D C, D E, du triangle D C E: & les angles contenus d'iceux poſez egaux: les baſes D B, C E, & les
4.1. angles C D B, D C E ſeront egaux: [c] parquoy au triangle C D F, les deux angles F C D, F D C, eſtans
32.1. egaux: [d] & B F C, extreme, egal à iceux, B F C, ſera
33.6. double de D C E: [e] mais l'angle B C E, eſt auſſi double du meſme D C E: d'autant que l'arc B A E, eſt

eſt double de l'arc D E. Donc les angles B F C, B C F ſont egaux : [f] & partant B F, egale au coſté du pentagone B C. [g]

f 6. 1.
g 17. 5.

Mais d'autant que les angles B D C, E C D, appuyez ſur arcs egaux, ſont egaux : les deux angles D B C, C D B, du triangle B C D, ſont egaux aux deux D C F, F D C, du triangle C F D : [h] partant les triangles B C D, C F D, ſont equiangles; [i] partant comme B D, à D C : c'eſt à dire, à B F, egale à D C, ainſi C D, c'eſt à dire, B F, ſon egale, eſt à F D : Donc B D eſt coupée à F, en la moyenne & extreme raiſon, & le plus grand ſegment B F, eſt monſtré egal au coſté du pentagone.

h 32. 1.
i 4. 6.

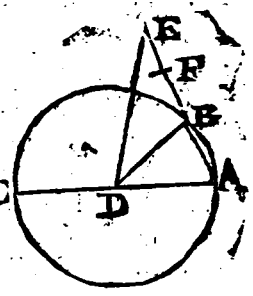
Semblablement on monſtrera que C E, eſt coupée à F, ſelon la moyenne & extreme raiſon, & que ſon plus grand ſegment E F, eſt egal au coſté du pentagone. Donc ſi, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 9. PROP. 9.

Si le coſté de l'hexagone, & le coſté du decagone, inſcrits en vn meſme cercle, ſont compoſez : La ligne droicte totale eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon, & le plus grand ſegment d'icelle eſt le coſté de l'hexagone.

Au cercle A B C, ſoit la droicte ligne A B, coſté du decagone, à laquelle ſoit adiouſté B E, directement, egale au demy-diametre du cercle ; & partant au coſté de l'hexagone inſcrit au meſme cercle.

Ie



Ie dis que E A eſt coupée à B, en la moyenne & extreme raiſon, & que le plus grand ſegment E B, eſt le coſté de l'hexagone.

Car de A, ſoit mené le diametre A C, & du centre D, ſoient conioinctes D B, D E. D'autant que l'arc A B, eſt la dixieſme partie de toute la circonference du cercle : l'arc du demy-cercle contiendra l'arc A B, cinq fois. Partant l'arc B C, ſera quadruple de l'arc A B: l 33.6. parquoy l'angle B D C, ſera auſſi quadruple de l'angle A D B.

Derechef, d'autant que les coſtez B D, B E, ſont m Cor. 15. egaux, ſçauoir coſtez de l'hexagone : (m car B E, 4. coſté de l'hexagone, eſt egal au demy-diametre n 5. 1. B D.) n Les angles B D E, B E D, ſeront egaux, o 32. 1. auſquels l'externe A B D, eſtant egal, A B D, ſera p 5. 1. double de B E D : p mais B A D, eſt egal à A B D, les coſtez D A, D B eſtans egaux : donc B A D, ſera auſſi double de B E D : partant les deux D A B, q 32. 1. D B A, enſemble, ſeront quadruples de B E D. q

Donc puis que l'angle externe B D C, eſt egal aux deux D A B, D B A, l'angle externe B D C, ſera quadruple du meſme B E D ; mais le meſme angle B D C, a eſté monſtré quadruple de A D B. Donc les angles A E D, A D B ſont egaux : partant les deux angles A E D, D A E, du triang. A B E, eſtans egaux, les angles A E D, A D B ſont egaux : partant les deux r 32. 11. aux deux A D B, B A D, du triangle A B D, r les 4. 6. triangles A D E, A B D, ſeront equiangles. Partant,

comme

comme E A, sera à A D, ou à E B, egale à A D: ainsi A D, c'est à dire E B, son egale, à B A : Donc E A est coupée à B, en la moyenne & extreme raison, & E B est le costé de l'hexagone. Donc si le costé, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cette demonstration il est manifeste, que si le costé de l'hexagone est coupé en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment sera le costé du decagone descrit au mesme cercle. Car du costé de l'hexagone B E, estant prise B F, partie egale à A B, comme la toute A E, sera à la toute B F, partie egale à A B; comme la toute A E, sera à la toute B E, ainsi la retranchée B E, à la retranchée B F:[a] donc le reste A B, c'est à dire, B F, sera au reste F E, comme la toute A E, à la toute B E, ou B E, retranché de A E, à B F, retranchée de B F;[b] partant B E, sera coupée comme A E, en la moyenne & extreme raison à F, & B F, plus grand segment, est egal à A B, costé du decagone.

[a] 19.5.

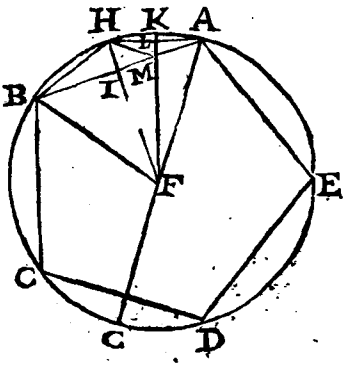
[b] 3.d.6.

PROBLEME 10. PROP. 10.

Si vn pentagone equilateral est inscrit au cercle, le costé du pentagone, peut le costé de l'hexagone, & le costé du decagone, inscrits au mesme cercle.

C'est à dire, que le quarré du costé du pentagone equilateral inscrit au cercle, est egal aux deux quarrez ensemble, du costé de l'hexagone, & du decagone inscrits au mesme cercle.

Au cercle ABCD, dont le centre est F, soit inscrit le pentagone equilateral A B C D E. Ie dis que le quarré de A B, costé du pentagone, est egal au quarré du costé de l'hexagone, & au quarré du costé du decagone du mesme cercle.



Car soit mené le diametre AFG, & coniointe F B, puis ayant diuisé l'arc A B, en deux egalement à H, soient coniointes les lignes droictes A H, B H, & F H, coupant la droite ligne A B, à I : la ligne droite A H, sera le costé du decagone, & B F, costé de l'hexagone.

Derechef, ayant diuisé l'arc A H, en deux egalement à K, soit coniointe F K, coupant la droicte ligne A H, au poinct L, & la droicte A B, par le poinct N, auquel soit menée H M. D'autant donc que les arcs A H, B H, sont egaux, [c] les angles A F H, B F H, appuyez sur iceux, seront egaux. Parquoy les costez A F, F I, du triangle A F I, estans egaux à B F, F I, du triangle B F I, & les angles contenus d'iceux aussi egaux, [d] les bases A I, B I, seront egales, & les angles A I F, B I F egaux, & partant droicts. Par mesme raison, les droictes lignes A L, H L, seront egales, & les angles A L F, H L F droicts.

c 27. 3.

d 4. 1.

Puis si des demy-cercles egaux A B C G, A E D G, on oste les arcs egaux A B C, A E D, demeureront les arcs C G, D G, egaux entr'eux : partant l'arc C G, sera

ſera moitié de l'arc C D. Mais l'arc A H, eſt moitié de l'arc A B : donc les arcs A B, C D eſtans egaux, leurs moitiez qui ſont les arcs C G, A H ſeront egaux : donc puis que l'arc A H eſt double de l'arc H K, l'arc C G, ſera auſſi double de l'arc H K.

Semblablement, d'autant que les arcs A B, B C, ſont egaux, & l'arc A B, eſt double de l'arc B H, l'arc B C, ſera auſſi double du meſme B H. Parquoy les arcs C G, B C, ſont equimultiples, ſçauoir doubles des arcs H K, B H. [a] Et partant tout l'arc B G, [a] 1. 5.
ſera auſſi double de tout l'arc B K : [b] & partant [b] 33. 6.
l'angle B F G, double de l'angle B F K : [c] mais [c] 20. 3.
d'autant que le meſme angle B F G, au centre, eſt auſſi double de l'angle F A B : les angles B F M, & F A B ſeront egaux : [d] & partant les triangles [d] 32. 2.
A B F, F B M : ayans les angles F A B, M F B, egaux, & l'angle A B F commun, ſeront equiangles : [e] [e] 4. 6.
partant comme A B, à B F, ainſi B F, à B M : [f] donc [f] 17. 6.
le rectangle contenu ſous A B, B M, ſera egal au quarré de la droicte ligne B F.

Derechef, d'autant que les coſtez A L, L M, du triangle A L M, ſont egaux à H L, L M, du triangle H L M, & les angles contenus d'iceux egaux ; ſçauoir droicts : [g] les baſes A M, H M, & les angles [g] 4. 1.
L A M, L H M ſeront egaux : [h] mais l'angle L A M, [h] 5. 1.
eſt egal à l'angle H B A : d'autant que les coſtez H A, H B ſont egaux. Donc l'angle L H M, ſera auſſi egal au meſme H B A : [i] partant les triangles [i] 32. 1.
A B H, A H M, ayans les angles A B H, A H M egaux, & H A M commun, ſeront equiangles [k] [k] 4. 6.
Parquoy comme A B, à A H, ainſi A H à A M. [l] [l] 17. 6.
Donc le rectangle ſous A B, A M, ſera egal au quarré de A H : mais le rectangle ſous A B, B M, eſt monſtré egal au quarré de B F : donc les rectangles

sous A B, B M, & sous A B, A M, ensemble, sont
2. 2. egaux aux quarrez de B F, A H. ° Mais les rectangles sous A B, B M, & sous A B, A M, sont egaux au quarré de A B : donc le quarré de A B, sçauoir du costé du pentagone, est égal aux quarrez de B F, A H, costé de l'hexagone, & costé du decagone. Donc si au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste de cette demonstration, que la ligne droicte menée du centre qui diuise vn arc en deux egalement, diuise aussi la ligne droicte soustendante iceluy, à angles droicts en deux egalement, estant monstré que F H diuisant l'arc A B, en deux, egalement diuisé, aussi la ligne droicte A B, en deux egalement, & angles droicts à I, & est la mesme demonstration de tous les autres.

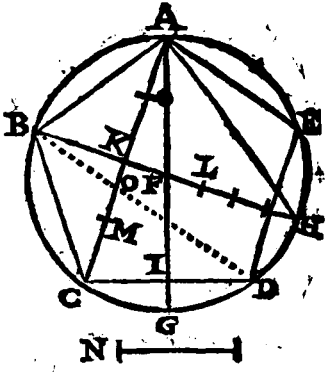
Il est aussi manifeste, que le diametre du cercle mené de l'angle du pentagone, diuise aussi l'arc soustendant le costé opposé à iceluy angle en deux egalement, & aussi ledit costé en deux egalement & à angles droicts : estant demonstré que le diametre A G, diuise en deux egalement l'arc C D, soustendu du costé C D. Donc par ce qui est demonstré, il coupe aussi en deux egalement, & à angles droicts, ledit costé C D : On fera la mesme demonstration de tout polygone equilateral inscrit au cercle ; le nombre des costez estant impair.

THEO

THEOREME 11. PROP. 11.

Si au cercle duquel le diametre eſt rationel, eſt inſcrit vn pentagone equilateral, le coſté du pentagone eſt ligne irrationelle, appellée mineure.

Au cercle A B C D, ayant le diametre rationel; ſoit inſcrit vn pentagone equilateral A B C D E. Ie dis que le coſté A B, eſt ligne irrationelle, appellée mineure.



Car ſoient menez les diametres A G, B H, ſe coupans au centre F, & que A G, coupe C D à I, & ſoient conioinctes A C, A H; dont A C coupe B H à K, & ſoit priſe F L, quarte partie de F H, & C M, quarte partie de A C: d'autant que B H eſt poſée rationelle F L, B F, parties aliquotes d'iceluy, ſeront rationelles, luy eſtant commenſurables: & partant la toute B L, compoſée d'icelles, P eſtant commenſurable à chacune d'icelles F L, B F ſera rationelle. p 16.10.

Derechef, F B, menée du centre coupant l'arc A B C, en deux egalement à B, q elle coupera la droicte ligne A C, auſſi en deux egalement à K, & 12. q Cor

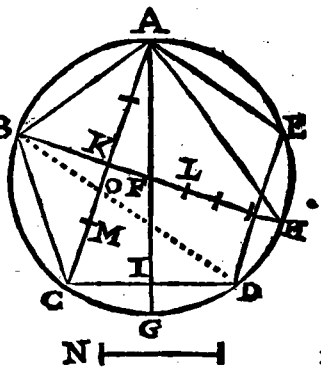
a Cor.10. 13. à angles droicts : a mais A G, couppe C D à I, en deux egalement, & à angles droicts. Donc les triangles A C I, A F K, ayans les angles C I A, A K F, b 32.1. droicts, & C A I commun, b seront equiangles. c 3.6. Donc comme C I à C A, ainsi F K à F A : & en changeant, comme C I à F K, ainsi C A à F A, ou à d 15.5. F H, egale à F A. d Mais comme C A à F H, ainsi C M, quarte partie de C A à F L, quarte partie de F H. Donc comme C I à F K, ainsi C M à F L, & en changeant, comme C I à C M : c'est à dire, comme C D, double de C I à C K, double de C M, ainsi E K à F L, & en composant comme C D, C K, ensemble à C K, ainsi F K, F L ensemble, sçauoir K L e 22.6. à F L, & e partant comme le quarré de la composée de C D, C K, au quarré de C K, ainsi le quarré de K L, au quarré de F L.

Mais d'autant que si A C, est couppée en la f 8.13. moyenne & extreme raison (estant menée B D) f son plus grand segment O A, sera egal au costé du g 1.13. pentagone, sçauoir à C D : g le quarré de la composée de C D, ou O A, plus grand segment, & de C K, moitié de la toute, sera quintuple du quarré de C K, moitié de la toute. Parquoy le quarré de K L, sera aussi quintuple du quarré de F L, donc le quarré de K L, sera commensurable au quarré de F L : & partant K L, F L, aussi commensurables au moins en puissance, &c. Mais F L est monstrée rationelle, donc K L, sera aussi rationelle.

En apres, d'autant que B F, est quatre telles parties que F L 1. & telles 5. parties qu'est B L : F L en est 1. le q. de B L, sera 25. telles parties que le q. de F L 1. (comme appert par ces nombres 1. 5. 25. b. 6. h car les quarrez sont en raison doublée de leurs costez.)

Mais

Mais le quarré de K L, eſt monſtré eſtre 5. telles parties que le qu. de F L eſt 1. Donc le quarré de B L ſera 25. telles parties que le quarré de K L en eſt 5. donc le quarré de B L, ſera quintuple du qu. de K L.[i]



i Cor. 24. 8.

D'autant donc que les quarrez de B L, K L, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, (eſtant comme 25. à 5. ou 5. à 1.)[l] B L, K L, ſeront incommenſ. en longit. & eſtans monſtrées ration. elles ſeront ration. commenſ. en puiſſ. ſeulement. Donc ſi de la rationelle B L, on oſte la ration. K L, commenſ. en puiſſ. ſeulement,[m] la reſtante B K, ſera irrationelle, dite reſidu, & ſa conuenable ſera K L.

l 9. 10.

m 74. 10.

Mais maintenant que B L, puiſſe plus que K L, du q. de N. D'autant que le q. de B L eſt egal aux quarrez de K L, & N. Mais le quarré de B L eſtoit 5. telles parties que le quarré de K L, 1. le reſte quarré de N, ſera 4. telles parties que le quarré de B L en eſt 5. Donc les quarrez de B L & N, ſeront entr'eux comme nombre à nombre. [n] Partant commenſ. & B L & N, commenſ. au moins en puiſſ. Mais B L eſt monſtrée ration. donc N le ſera auſſi, [o] & les qq. de B L & N, n'eſtans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, (eſtant comme 5. à 4.) B L & N ſeront incommenſ. en longit. partant rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement.

n 6. 10.

o Cor. 24. 8. 9. 10.

Parquoy la toute B L, estant rationelle commensurable en longitude à la rationelle B H: (car B L est 5. telles parties que B H 8.) & pouuant plus que sa conuenable K L, du quarré de N, monstrée incommensurable en longitude à icelle, B K sera residu 4. par la definition.

a Cor. 8.6. Finalement, a d'autant que A B est moyenne proportionelle entre B H, B K (le triangle A B H, ayant l'angle B A H droict, dont est mené A K,

b 31.3. perpendiculaire à la base) b le quarré de A B, sera egal au rectangle sous B H, B K. Partant A B, pouuant la superficie contenuë sous la rationelle B H,

c 17.6. & le residu quatriesme B K; c A B, sera ligne mi-

95.10. neure. Donc si au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 12. PROP. 12.

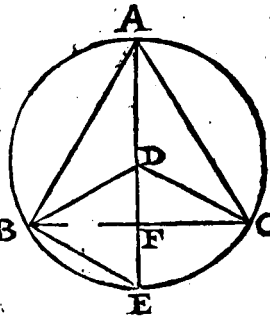
Si vn triangle equilateral est inscrit au cercle, le costé du triangle est triple en puissance à la ligne menée du centre du cercle à la circonference.

C'est à dire, que le quarré du costé du triangle equilateral, inscrit au cercle, est triple du quarré de son demy-diametre.

Au cercle A B C, dont le centre est D, soit inscrit le triangle equilateral A B C. Ie dis que le quarré du costé A B, est triple du quarré du demy-diametre.

d Cor. 10. Car ayant mené le diametre A E, coupant l'arc

13. B C en deux egalement à E, d & la droicte ligne B C,



B C, auſſi en deux egalement, & à angles droicts à F : l'arc B C, eſtant la 3. partie de la circonference : l'arc B E, ſera la 6. & B E ligne droicte, eſtant menée, ſera le coſté de l'hexagone, [c] & egale au demy-diametre. D'autant donc que le quarré de AE, eſt egal aux quarrez de A B, B E, [f] eſtant l'angle A B E droict au demy-cercle. [g] Mais le quarré de A E, eſt quadruple du quarré de B E : puis que A E, eſt double de E B : les quarrez de A B, B E enſemble, ſeront pareillement quadruples du meſme quarré de B E : & partant telles quatre parties que ſont les quarrez de A B, B E, le quarré de B E, en ſera vn, & par ainſi le quarré de A B, ſera trois telles parties. Donc le quarré de A B, eſt triple du quarré de B E, laquelle eſt egale au demy-diametre. Donc ſi vn triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c Cot. 15. 4.

f 47. 1.

g 31. 3. Sch. 4. 2.

COROLLAIRE.

De ces choſes il s'enſuit, que le diametre du cercle eſt ſeſquitiers en puiſſance, au coſté du triangle equilateral inſcrit au meſme cercle. C'eſt à dire, que le quarré du diametre eſt en raiſon ſeſquitierce, ou comme quatre à trois, au quarré du coſté du triangle equilateral inſcrit au meſme cercle. Car le quarré de A B, eſtant monſtré triple du quarré du demy-diametre A D, le quarré de A B, eſtant poſé de 3. le quarré de A D ſera 1. & partant

a Sch.4.2. le q.de A E ; [a] quadruple du quarré de A D sera 4. Parquoy le quarré de A E est sesquitiers, au quarré
b Cor. 8.6. de A B : c'est à dire, comme 4.à 3. [b] Et d'autant que comme A F à A B, ainsi A B à A F, perpendiculaire menée d'vn angle sur le costé. Le quarré de A B, sera aussi comme 4.à 3. au quarré de A F.

Secondement, l'on peut colliger que D E, demy-diametre, est coupé en deux egalement à F, par le costé B C, du triangle A B C. Car le quarré de A B estant triple du quarré de B E : si on pose ledit
c 47. 1. quarré de A B, de 12. le quarré de B E, sera 4. [c] Mais le quarré de B E, est egal aux quarrez de B F, F E: donc les quarrez de B F, E E, seront 4. mais le quarré
d Sch. 4. 2. de B F est 3. (le [d] quarré de A B estant quadruple du quarré de B F ; car A B est double de B F) donc le quarré de F E sera I. Partant le quarré de B E, quadruple du quarré de F E. Donc D E sera double de F E : parquoy D E est couppée en deux egalement à F.

PROBLEME 1. PROP. 13.

Constituer vne pyramide, & l'enuironner d'vne sphere donnée, & monstrer que le diametre de la sphere, est sesquialtere en puissance au costé de la pyramide.

Soit A B, diametre de la sphere donnée, à l'entour duquel soit descrit A C B demy-cercle : & soit prise B D, tierce partie de A B, de sorte que A D, soit double de D B, & A B, triple de la mesme D B, & sesquialtere de A D, & ayant mené C D, perpendiculaire à A B, soient iointes A C, C B. Et soit descrit le cercle F E G, de l'interualle H E, posée egale à D C,

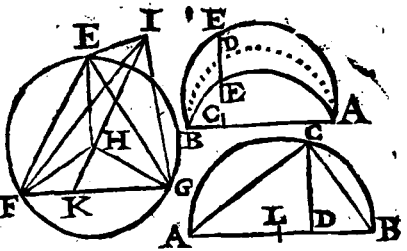
à D C, du centre H, auquel ſoit inſcrit le triangle equilateral E F G, & conioinctes H F, H G, chacune deſquelles ſera egale à D C, eſtans egales à H E, & de H, ſoit leuée H I, à angles droicts au plan du cercle, & poſée egale à A D, & de I, menées I E, I F, I G. Ie dis que le ſolide, contenu des quatre triangles F E G, I E F, I F G, I E G, eſt pyramide ou tetraedre.

Car d'autant que les coſtez D A, D C, du triangle A D C, ſont egaux à H I, H E, du triangle I H E, [a] & les angles contenus d'iceux poſez droicts. [b] La baſe A C, ſera egale à la baſe I E. Semblablement A C, ſera monſtrée egale à I F, I G. a 3.d.11. b 4. 1.

Derechef, d'autant que les trois lignes AD, DC, D B ſont proportionelles, comme A D à D B, ainſi le quarré de A D, au quarré de D C : & en compoſant, comme A B à D B, ainſi les quarrez de A D, D C enſemble, au quarré de D C : mais les quarrez de A D, D C, ſont egaux, au quarré de A C. Donc auſſi comme A B, à D B, ainſi le quarré de A C, au quarré de D C : partant A B, eſtant triple de D B, auſſi le quarré de A C, ſera triple du quarré H E, eſtant H E, egale à D C. Or le quarré de E F, eſt auſſi triple du meſme quarré de H E. Donc le quarré de A C, ſera egal au quarré de E F : & partant A C, egale à E F. Parquoy A C, eſtant monſtrée auſſi egale à I E, I F, I G, les quatre triangles E F G, E F I, F G I, G E I, ſeront equilateraux & equiangles entr'eux. L'on a donc conſtitué vne pyramide ou tetraedre : dont la baſe eſt E F G, & le ſommet I. Ie dis qu'icelle pyramide eſt compriſe en la ſphere donnée : dont le diametre eſt A B, & le diametre de la ſphere A B, eſt ſeſquialtere en puiſſance au coſté F E, ou A C, Cor.8.6. Cor.20. 47.1. 12.13.

Soit

Soit prolongée I H, perpendiculaire à K, de ſorte que H K, ſoit egale à D B, & la toute I K, à la toute A B. D'autant donc que les trois A D, D C, D B, ſont proportionelles, auſquelles I H, H E, H K, ſont egales, I H, H E, H K, ſeront auſſi proportionelles. Parquoy H E, eſtant perpendiculaire à I K, & moyenne proportionelle entre I H, H K, le demy-cercle deſcrit à l'entour de I K, au plan de I K, H F, paſſera par E, comme il ſera monſtré incontinent. Semblablement, tant le demy-cercle deſcrit à l'entour de I K, au plan de I K, H F, paſſera par F, que le demy-cercle deſcrit à l'entour de I K, au plan de I K, H G, par G. Donc chacun d'iceux demy-cercles mené à l'entour le diametre demeurant fixe, décrira vne ſphere, laquelle comprendra le tetraedre conſtitué; puis qu'elle paſſe par tous les angles d'iceluy E, F, G, I: & icelle eſtãt egale à la donnée, le diametre I K, eſtant poſé egal au diametre A B, la ſphere donnée comprendra le meſme tetraedre.



a Cor. 8. 6. b Cor. 20. 6. Mais d'autant [a] que A B, A C, A D, ſont proportionelles, comme A B à A D; [b] ainſi le quarré de A B, ſera au quarré de A C: mais A B, eſt poſée ſeſquialtere du quarré de A D. Donc le quarré de A B, ſera ſeſquialtere du quarré de A C: & partant, puis que A B, eſt le diametre de la ſphere, & A C, égale à E F, coſté de la pyramide. Il eſt manifeſte que le diametre de la ſphere eſt ſeſquialtere en puiſſance;

puiſſance, au coſté du retraedre ou pyramide. Donc nous auons conſtitué, &c. Ce qu'il falloit faire.

LEMME.

Or que le demy-cercle deſcrit à l'entour de IK, au plan de IK, HE, paſſe par E : il ſera demonſtré par ce Theoreme.

Si à vne ligne droicte on mene vne perpendiculaire, qui ſoit moyenne proportionelle entre les ſegments de la ligne, le demy-cercle deſcrit à l'entour d'icelle ligne, paſſera par l'extremité de la perpendiculaire.

Car ſoit CD, perpendiculaire à AB, & moyenne proportionelle entre AC, & CB. Ie dis que le demy-cercle deſcrit à l'entour de AB, paſſera par D : car s'il paſſoit au deſſus ou au deſſous, ſçauoir par E, [c] *CE ſera auſſi moyenne proportionelle entre AC, & CB.* [d] *Donc tant le quarré de CD, que le quarré de CE, ſera egal au rectangle ſous AC, CB. Partant, les quarrez de CD, CE ſont egaux entr'eux, & CD, CE, la partie & le tout : ce qui eſt abſurde. Donc le demy-cercle paſſera par D. D'où il s'enſuit que le demy-cercle deſcrit à l'entour de IK, au plan de IK, HE, paſſera par E : HE eſtant perpendiculaire à IK, & moyenne proportionelle entre IH, HK.*

[c] Cor. 13. 6.
[d] 17. 9.

COROLLAIRE.

De cecy on peut colliger, que le diametre de la ſphere, eſt quadruple ſeſquialtere en puiſſance au demy-diametre du cercle deſcrit autour de la baſe de

de la pyramide. Car le diametre de la ſphere A B, eſtant monſtré ſeſquialtere en puiſſance au coſté de la pyramide E F: le quarré de E F, ſera de 6. telles parties que le quarré de A B, en eſt 9. Mais le quarré de H E, eſt 2. telles parties que le quarré de E F, en eſt 6. [a] Iceluy quarré de E F, eſtant triple du quarré de H E: Donc le quarré de H E, ſera de 2. telles parties que le quarré de A B en eſt 9. Partant le diametre de la ſphere A B, eſt quadruple ſeſquialtere en puiſſance au demy-diametre H E, les quarrez eſtans comme 9. à 2.

a 12.13.

Derechef, la perpendiculaire menée du centre de la ſphere au plan de la baſe de la pyramide, ſera la 6. partie du diametre de la ſphere, & la tierce partie du demy-diametre. Car ſoit L, le centre du demy-cercle A B C, il ſera auſſi le centre de la ſphere. Ie dis que L D (laquelle eſt menée du centre de la ſphere à la baſe E F G, perpendiculaire, A D, eſtant egale à I H, & partant le poinct D, meſme que le poinct H, tout ainſi que L, eſt le meſme que le centre de la ſphere) eſt la 6. partie du diametre de la ſphere; ſçauoir de A B, & la 3. partie du demy-diametre A L. Car A D eſtant double de D B, D B ſera 2. telles parties que A D en eſt 4. & partant la toute A B, 6. telles parties, & le ſemy-diametre 3. telles parties. Donc ſi A D eſt 4. & A L 3. L D 1. Parquoy L D ſera la 6. partie de A B, qui eſtoit de 6. telles parties, & la tierce partie de A L, qui eſtoit de trois telles parties.

Semblablement, la hauteur de la pyramide H I, ſera deux tierces parties du meſme diametre: car H I eſt la meſme que A D, contenant $\frac{2}{3}$. du diametre par la conſtruction.

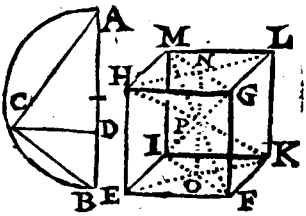
Derechef,

Derechef, le quarré de la hauteur de la pyramide sera de 4. telles parties, que le quarré du diametre est posé en estre 9. Car la raison de 9. à 4. est doublée de la raison de 3. à 2. comme il appert icy 9. 6. 4.

PROBLEME 2. PROP. 14.

Constituer vn octaedre, & l'enuironner d'vne mesme sphere que la pyramide, & monstrer que le diametre de la sphere est double en puissance, du costé d'iceluy octaedre.

Soit A B, le diametre de la sphere, comprenant la pyramide constituée, à l'entour duquel soit descrit le demy-cercle A C B, & du centre D, soit menée D C, perpendiculaire à A B, & conioinctes A C, B C, [a] qui seront egales entr'elles. Et prenant E F, egale à A C, ou B C, soit descrit sur icelle le quarré E F G H, auquel soient menez les diametres E G, F H, se coupans à I : Et I E, I F, I G, I H, seront egales, [b] estans demy-diametres du cercle descrit à l'entour du qarré.



a 4. 1.

b 9. 4.

Puis

Puis de I, ſoit menée K L, de part & d'autre; perpendiculaire au plan du quarré: Et I K, I L, poſées egales à E: & de K à L, ſoient menées K E, K F, K G, K H, L F, L E, L H, L G.

Ie dis que le ſolide contenu des huict triangles, K E F, K F G, K G H, K E H, L F E, L E H, L H G, L E G, eſt l'octaedre demandé. Car d'autant que les coſtez E I, I K, du triangle E I K, ſont egaux à E I, I H, du triangle E I H: & les angles contenus d'iceux droicts, (ſçauoir E I K, [a] droict, & E I G, [b] eſtant egal à G I H de ſuitte, pour l'egalité des coſtez E I, I H, & G I, I H, & des baſes E H, G H) [c] la baſe E K, ſera egale à la baſe E H.

a 3.d.11.
b 8. 1.
c 4. 1.

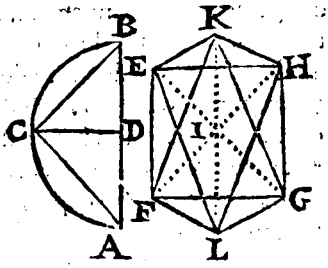
Semblablement K H, ſera egale à E H, partant K E H, ſera triangle equilateral: Et ainſi nous conclurons que les autres triangles ſeront equilateraux, & par ainſi egaux au triangle K E H, eſtans leurs coſtez egaux au coſtez du quarré E F G H, chacun à chacun. Donc l'octaedre eſt conſtitué de huict triangles equilateres & egaux. Lequel ie dis eſtre contenu de la ſphere, dont le diametre eſt A B, & de laquelle la pyramide conſtruite eſt contenuë, & le diametre de la ſphere A B, eſt double en puiſſance au coſté E F, ou A C.

Car d'autant [d] que I E, eſt perpendiculaire à K L, & moyenne proportionelle entre les ſegments K I, I L, (eſtant K I, I E, I L egales, & partant en meſme proportion) le demy-cercle deſcrit à l'entour de K L, au plan de K L, I E, [e] paſſera par E. Semblablement le demy-cercle deſcrit à l'entour de K L, au plan de K L, I F, paſſera par F: & de meſme des poincts G & H. Donc chacun de ces demy-cercles mené à l'entour du diametre fixe K L, deſcrira vne ſphere: laquelle comprend l'octaedre coſtitué,

d 3.d.11.
e Lem.pr.

puis

puis qu'elle passe par tous les angles d'iceluy. Donc cette sphere estant egale à la donnée dont le diametre est A B : (car A C, E F, estans egales, & partant leurs quarrez egaux ; & tant le quarré de A C, double du quarré de A D, que le quarré de F E, du quarré de E I : A D, E I, c'est à dire, K I, demy-diametres, seront egaux: donc les toutes A B, K L, diametres, seront egales; & partant leurs spheres egales) le mesme octaedre sera contenu de la sphere donnée.



Mais d'autant que le quarré de A B, est egal aux quarrez egaux de A C, B C ; le quarré de A B, sera double du quarré de A C. Parquoy A B estant le diametre de la sphere, & A C, egale au costé de l'octaedre E F, il est manifeste que le diametre de la sphere est double en puissance du costé de l'octaedre. Partant nous auons constitué, &c. Ce qu'il falloit faire. 47. 1.

COROLLAIRE.

D'icy il est manifeste qu'en l'octaedre les trois diametres se coupent à angles droicts au centre de la sphere, comme K L, E G, F G à I, tous les angles à I estans monstrez droicts : donc K I, estant perpendiculaire à E G, F H, le sera aussi au plan par E G, F H : partant les plans K F L H, E L G K, menez par K I, seront à angles droicts à E F G H. Et par mesme raison se couperont à angles droicts, lesquels sont aussi quarrez, ayans pour costez ceux 4. 11. 8. 11.

de l'octaedre, qui sont egaux, & les angles droicts. D'autant (le quarré du diametre de la sphere estant double du quarré du costé de l'octaedre, comme il est monstré) que le quarré du diametre H F, est egal aux quarrez des costez de l'octaedre F K, K H,
a 48. 1. a l'angle F K H sera droict: & ainsi des autres.

Il est aussi euident que l'octaedre peut estre diuisé en deux pyramides semblables & egales, ayans pour base commune le quarré E F G H, & quatre triangles egaux & semblables tant de part que d'autre, &c.

Il s'ensuit aussi que si le tetraedre & l'octaedre sont descrits en vne mesme sphere; le costé du tetraedre sera sesquialtere en puissance au costé de l'octaedre. Car posant que le quarré du diametre
b 13. 13. de la sphere soit diuisé en six parties. b Donc le diametre de la sphere estant sesquialtere en puissance au costé du tetraedre, le quarré du costé du tetraedre sera quatre parties que le quarré du diametre de la sphere en est six.

c 14. 13. Derechef, c le diametre de la sphere estant double en puissance, au costé de l'octaedre, le quarré du costé de l'octaedre, sera de trois telles parties, que le quarré du diametre de la sphere en est six. Donc le quarré du costé du tetraedre estant quatre telles parties que le q. du costé de l'octaedre en est 3. Il est manifeste que le quarré du costé du tetraedre est sesquialtere au quarré du costé de l'octaedre.

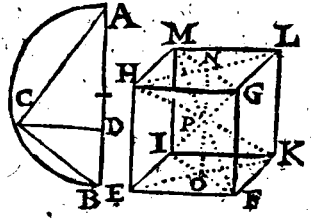
d 15. 11. Finalement, puis qu'au q. E F G H, E H, est parallele à F G, & au q. E L G K, E K est parallele à G L: d le plan E H K, mené par E H, E K, sera parallele au plan F G L, mené par F G, G L; & y ayant mesme raison des autres bases de l'octaedre, il s'ensuit que les bases opposées de l'octaedre, sõt paralleles entr'elles.

PRO

PROBLEME 3. PROP. 15.

Constituer vn cube, & l'enuironner d'vne mesme sphere que les precedentes figures; & demonstrer que le diamette de la sphere est triple en puissance du costé d'iceluy cube.

Soit A B, diametre de la sphere qui contient les precedentes figures, à l'entour duquel soit descrit A C B, demy-cercle: & de A B soit prise D B, tierce partie: puis ayant mené D C, perpendiculaire à A B, soient conioinctes A C, B C. Et soit descrit E F G H, quarré de E F, qui soit prise egale à B C: sur lequel soient menées à angles droicts E I, F K, G L, H M, aussi egales à B C, aux extremitez desquelles soient conioinctes I K, K L, L M, M I. D'autant donc que E I, F K sont à angles droits au plan E F G H; [a] E I, F K seront parall. mais elles sont egales, chacune estant posée egale à B C: c'est à dire à E F. [b] Donc E F, I K, sont parall. & egales: partant E F K I, parallelogramme, auquel E I, I K, K F, estant chacune egales à E F, toutes les 4. sont egales. [c] Mais tous les 4. angles sont droicts, estans E I K, F K I, egaux aux droits opposez K F E, I E F. Donc E F K I est q. par mesme raison F K L G, G L M H, H M I E,



a 6. 11.

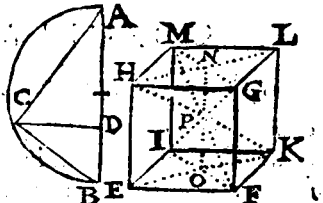
b 33. 1.

c 34. 1.

a 24.11. ſeront quarrez : par ainſi I K L M ſera quarré, a eſtant ſemblable & egal au quarré oppoſé E F G H:
b 15.11. car E L eſt b ſolide parallelipipede, ayant les plans oppoſez paralleles, ſçauoir eſt, menez par des lignes paralleles ſe touchant l'vne l'autre. Parquoy E L ſera cube, lequel ie dy eſtre compris de la ſphere dont A B eſt le diametre : Car ſoient E K, F I, G M, H L, diametres des plans oppoſez E F K I, G H M L, par leſquels ſoient menez les plans E K L H, F I M G.

c 28.11. c D'autant que tant le plan E K L H, que F I M G, coupe le cube en deux également : l'vn & l'autre paſſera par le centre du cube, ſçauoir par P. Auquel
d Corol. 39.11. d ſe diuiſent auſſi tous les diametres du cube entr'eux également : partant la commune ſection des plans, ſçauoir N O, paſſera par le meſme poinct P. Mais d'autant que les plans E K L H, F I M G, ſont rectangles (car H E, eſtant perpendiculaire à E I,
e 4.11. E F, à cauſe des quarrez E M, E K ; e elle ſera auſſi
f 3.d.11. perpendiculaire au plan E K, f & partant à la ligne E K, donc l'angle H E K eſt droit, par meſme raiſon les autres angles au plan E K L H ſeront droicts, & au plan F I M G auſſi. Donc les plans E K L H, F I M G, ſont rectangles) & egaux, les coſtez de l'vn eſtans egaux aux coſtez de l'autre ; & leurs diametres E L, H K, F M, G I, ſont egaux ; comme il eſt manifeſte de la 34. du 1. Partant P E, P L, P H, P K, P F, P M, P G, P I, ſeront egaux. Parquoy le demy-cercle à l'entour de E L, deſcrit du centre P, & mené à l'entour, le diametre E L demeurant fixe, deſcrira vne ſphere paſſant par tous les angles
g 47. 1. du cube qui ſera demonſtrée egale, à la ſphere dont le diametre eſt A B.

Car



Car puis que le quarré de E K eſt egal [a] aux quarrez egaux de E F, F K, & partant double du quarré de E F: c'eſt à dire, du quarré de K L; les quarrez de E K, K L, ſeront triples du quarré de K L. [b] Mais le quarré de E L, eſt egal aux quarrez de E K, K L, l'angle E K L, eſtant droict, au rectangle E K L H: donc le quarré de E L, ſera triple du quarré de K L, c'eſt à dire, du quarré de B C: mais le quarré de A B eſt triple du meſme quarré de B C: [c] (car A B, B C, B D, ſont proportionelles: [d] partant comme à A B, B D, ainſi le quarré de A B, au quarré de B C.

a 47. 1.

b 47. 1.

c Cor. 8. 6.

d Cor. 20. 6.

Donc puis que A B, eſt triple de B D, le quarré de A B, ſera auſſi triple du quarré de B C.) Donc les quarrez de E L, A B, ſont egaux: parquoy E L, A B, diametres des ſpheres ſeront egaux, & partant icelles ſpheres auſſi egales.

Mais d'autant que le quarré du diametre E L, eſt monſtré triple du quarré du coſté du cube K L: il eſt manifeſte, que le diametre de la ſphere eſt triple en puiſſance au coſté du cube. Partant nous auons, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE 1.

De cecy eſt manifeſte, que tous les diametres du cube ſont egaux entr'eux, & ſe couppent en deux egalement au centre de la ſphere: & par meſme raiſon, que les lignes droictes conioignantes les centres des quarrez oppoſez, ſe diuiſent en deux egalement au meſme centre. Car il eſt demonſtré que les diametres du cube, E L, H K, F M, G I, ſont egaux, & ſe couppent en deux egalement au centre P.

Que N O, conioignant les centres N & O, des quarrez oppoſez, ſoit auſſi couppée egalement en deux au meſme centre: nous le monſtrerons; les deux angles O F P, O P F, du triangle O P F, ſont
a 29.1. egaux à N M P, N P M, du triangle N M P: (car
b 16.11. O F P, eſt égal à N M P, alterne, entre F I, G M, paralleles, eſtans communes ſections des plans paralleles E K, G M, c & O P F, egal à N P M, oppoſé
c 15.11. au ſommet.) Mais les coſtez adiacens P F, P M, ſont egaux, eſtans demy-diametres: Donc P O, P N, ſeront auſſi egaux: partant N O ſera couppée en deux egalement à P. Et ainſi des autres lignes conioignans les centres des quarrez oppoſez.

COROLLAIRE 2.

Derechef, la puiſſance du diametre de la ſphere, ou du cube, eſt egale aux puiſſances des coſtez du
d 13.13. tetraedre, & du cube enſemble: d Car le quarré du diametre eſt 9. telles parties que le quarré du coſté
c 15.13. du tetraedre en eſt 6. e Mais iceluy quarré du diametre eſt de 9. telles parties que le quarré du coſté

du

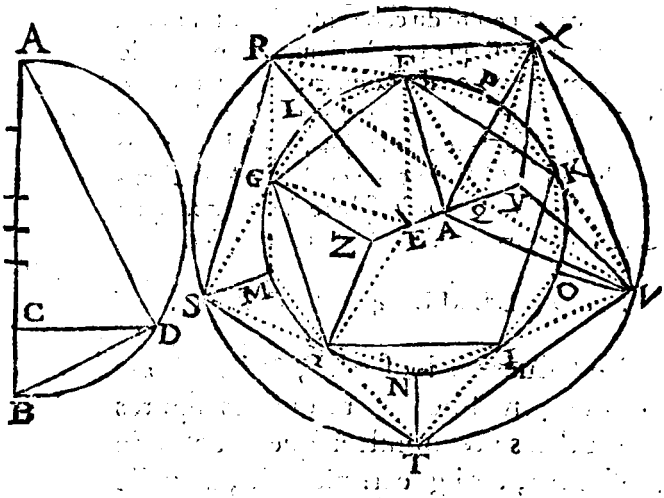
du cube en eſt trois. Donc le qu. du coſté du tetraedre, & le qu. du coſté du cube enſemble, ſont de 9. parties, tout ainſi que le q. du diametre: partant le q. du diametre eſt egal aux quarrez deſdits coſtez: cela eſt auſſi manifeſte du demy-cercle deſcrit à l'entour du diametre, de la ſphere, où le coſté du tetraedre eſt A C, & du cube eſt B C: Mais il appert que le diametre de la ſphere A B, peut la ligne A C, & B C, puis que A C B, eſt angle droict. 47. 1.

PROBLEME 4. PROP. 16.

Conſtituer vn Icoſaedre, & l'enuironner d'vne meſme ſphere que les figures deuant dites; & monſtrer que le coſté de l'Icoſaedre, eſt ligne irrationelle, laquelle eſt appellée mineure.

Soit A B, diametre de la ſphere, contenant les precedentes figures, à l'entour duquel ſoit deſcrit le demy-cercle A D B, & ſoit priſe B C, cinquieſme partie de A B; afin que A B ſoit quintuple de B C, & de A C ſeſquiquarte; mais A C quadruple de B C. Puis ayant mené D C, perpendiculaire à A B, ſoient menées A D, B D. Et à l'intetualle de E F, qui ſoit egale à B D, ſoit deſcrit vn cercle du centre E, auquel ſoit deſcrit vn pentagone equilatere F G H I K. 11. 4.

En apres, ayant diuiſé les arcs F G, G H, H I, I K, K F, en deux egalement par L, M, N, O, P, ſoient conioinctes les droictes lignes F L, L G, G M, M H, &c. à ſçauoir les coſtez du decagone. Puis du centre E, & des poincts L M N O P, ſoient erigées des perp. au plan du cercle F G H I K: ſçauoir E Q, L R, M S,



N T, O V, P X, leſquelles ſoient poſées egales au demy-diametre E F, ou à C D, & elles ſeront toutes egales entr'elles : a mais elles ſont paralleles. Donc les lignes droictes qui les conioignent, ſçauoir E L, Q R, E M, Q S, E N, Q T, E O, Q V, E P, Q X, (leſquelles toutesfois nous n'auons toutes menées pour euiter confuſion) b ſeront egales entr'elles deux à deux : & partant E L, E M, eſtans egales au demy-diametre E F, Q R, Q S, Q T, Q V, Q X, ſeront auſſi egales, & entr'elles, & au demy-diametre E F, ou à C D. c

a 6.11.

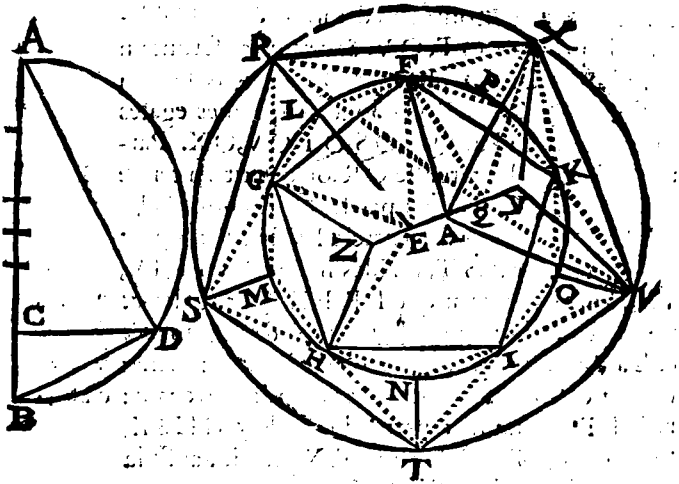
b 33.1.

c 15.1.

Mais d'autant que le plan mené par Q R, Q S, eſt parallele au plan F G H I K, mené par E L, E M: par meſme raiſon le plan mené par Q S, Q T, eſt parallele au meſme plan F G H I K, mené par E M, E N: mais le plan mené par Q R, Q S, conuient auec le plan par Q S, Q T, à la ligne droicte Q S, donc

donc ces deux plans feront enſemble vn ſeul plan, comme il ſera incontinent demonſtré. Semblablement le plan par QT, QV, & cettuy-cy feront vn ſeul plan, & auſſi le plan par QV, QX, & le plan auſſi par QX, QR. Il y a donc cinq lignes egales en vn meſme plan QR, QS, QT, QV, QX. Partant ſi de Q, à l'interualle QR, on deſcrit vn cercle en celuy plan, il paſſera par les autres poincts R, S, T, V, X, & ſera egal au cercle FGHIK: Soient conioinctes par R, S, T, V, X, les lignes RS, ST, TV, VX, XR. [a] D'autant que LR, PX, ſont egales & paralleles, ſi on entend vne ligne droicte menée de L à P, [b] LP, RX, ſeront auſſi egales & paralleles: partant en [c] cercles egaux, elles oſterõt arcs egaux: mais LP, prend la 5. partie du cercle FGHIK, ſçauoir les $\frac{2}{10}$ FL, FP. Donc RX, prendra auſſi la 5. partie du cercle RSTVX. a 6.11, b 33. 1. c 28.3.

Tout de meſme nous concluërons que les autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prennent les cinquieſmes parties. Parquoy RSTVX, eſt pentagone equilatere, ayant tous les coſtez egaux au pentagone FGHIK. Car des angles du pentagone RSTVX, ſoient menées aux angles du pentagone FGHIK, ſes lignes droictes RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. D'autant donc que LK perpendiculaire, eſt poſée egale au demy-diametre EF, c'eſt à dire, au coſté de l'exagone du cercle FGHIK, & LF eſtant coſté du decagone, [d] le quarré du coſté du pentagone du meſme cercle, ſera egal aux quarrez de LR, LF: [e] mais le quarré de FR, eſt egal aux meſmes quarrez: [f] l'angle FLR eſtant droict: Donc le quarré de FR, eſt egal au quarré du coſté du pentagone, donc FR, ſera egale au coſté du pentagone LP, ou FG, c'eſt à dire, à KX. d 10.13. e 47.1. f 3.d.11.



Et par meſme raiſon, les autres lignes R G, S G, S H, &c. ſeront egales aux autres coſtez de l'vn & l'autre pentagone: & partant les dix triangles RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, ſeront equilateres entr'eux & egaux, leurs coſtez eſtans egaux à ceux du pentagone equilateral: puis apres ſoit prolongée la perpendiculaire BQ, de part & d'autre, en ſorte que QY, EZ, ſoient egales chacune au coſté du decagone du cercle FGHIK, ou RSTVX; & ſoient conjointes VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. D'autant que QX, eſt demy diametre du cercle RSTVX; c'eſt à dire, coſté de l'hexagone, & QY, eſt coſté du decagone du meſme cercle, [a] le quarré du coſté du pentagone XV, eſt egal aux quarrez de QX, QY: [b] mais le quarré de XY, eſt egal aux meſmes quarrez, l'angle XQY, [c] eſtant droict. (Car les plans des cercles FGHIK, RSTVX,

10.13. a
47.1. b
3.d.11. c

RSTVX, estans monstrées paralleles, & EQ, estant perpendiculaire au plan de celuy-là, par la construction EQ, sera aussi perpendiculaire au plan de cettuy-cy, comme il appert, & partant perpendiculaire à QX, au mesme plan.) Donc le quarré de XY, est egal au quarré de XV, donc XY, sera egale à XV: ainsi XV sera monstrée egale à VY: partant le triangle VYX, est equilateral. a 14.11.

Ainsi on demonstrera, si on mene les lignes droictes RY, SY, TY, (lesquelles toutefois n'ont esté menées pour euiter confusion,) que les quatre triangles RYX, RYS, SYT, TYV, sont equilateres & egaux au triangle VYX, c'est à dire, aux dix premiers, tous leurs costez estans egaux au costé du pentagone. Semblablement, GZH, sera equilatere, (puis que EG est le costé de l'hexagone, sçauoir le demy-diametre, & EZ costé du decagone, & l'angle GEZ [b] droict;) & aussi les quatre triangles HZI, IZK, KZF, FZG, (desquels nous n'auons mené les lignes pour euiter confusion) tous lesquels seront egaux aux quinze premiers, chacun au sien pour la mesme cause. Donc ces vingt triangles estans equilateres & egaux, & chacun soit conioint à chacun par des lignes droictes, sçauoir leurs costez; l'on aura constitué d'iceux vn Icosaedre, lequel ie dis estre compris de la sphere dont AB est le diametre. b 3.d.11.

Car soit diuisée EQ en deux egalement par α, & menées αF, αY, αV. D'autant que les costez αQ, QV, du triangle αQV, sont egaux à αQ, QX, du triangle αQX, puis que QV, QX, sont demy-diametres du cercle αSTVX: mais les angles αQV, αQX, sont [c] egaux, sçauoir droicts, [d] les bases αV, αX, seront egales. c 3.d.11. d 4.1.

Semblable

Semblablement ſi on mene les lignes droictes de α, Q, à R, S, T, les droictes lignes α R, α S, α T, ſeront monſtrées egales & entr'elles & à α V, α X. Derechef, d'autant que les coſtez α Q, Q X, du triangle α Q X, ſont egaux à α E, E F du triangle α E F, puis que Q X, E F, ſont demy-diametres de cercles egaux, & que E Q, eſt diuiſée en deux egalement par α. Mais les angles α Q X, α E F ſont egaux, [a] ſçauoir droits, les baſes α X, α F [b] ſont egales: Semblablement ſi de α E, on mene des lignes droictes à G, H, I, K, on monſtrera α G, α H, α I, α K, egales à α X: & partant les dix lignes menées aux dix angles F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, ſont egales. Mais d'autant que Q E, eſt demy-diametre, c'eſt à dire, coſté de l'hexagone du cercle E G H I K, & E Z, coſté du decagone du meſme cercle, [c] Q Z, ſera diuiſée en E, en la moyenne & extreme raiſon, & le plus grand ſegment ſera Q E. Parquoy le moindre ſegment Z E, prenant E α, moitié du plus grand, c'eſt à dire, α Z, [d] peut le quintuple du quarré deſcrit de E α: Mais α F, peut auſſi le quintuple du meſme quarré de E α (car le quarré de E F, [e] eſtant quadruple du quarré de α E, eſtant E F, double de E α, les quarrez de E F, E α enſemble ſeront quintuples du quarré de E α. [f] Et le quarré de A F, eſtant egal aux quarrez de E F, E α: le quarré de α F, ſera auſſi quintuple du quarré de E α.) Donc les quarrez de α Z, α F ſeront egaux, & partant α Z, α F egales: donc puis que Z Y, eſt coupée en deux egalement à α, (d'autant que ſi on adiouſte aux egales α E, α Q, les egales E Z, Q Y, les toutes Z α, Y α, ſont faites egales,) toutes les lignes droites menées de α, à tous les angles de l'Icoſaëdre ſeront egales. Parquoy la ſphere deſcri-

te à

1 3. d. 11.
b 4. 1.
c 9. 13.
d 3. 13.
e Sch. 4. 2.
f 47. 1.

te à l'entour du diametre Z Y, du centre α, passera par tous les angles de l'Icosaëdre constitué. Ie dy qu'elle est egale à la sphere du diametre A B.

Car [a] puis que comme α Z, à α E, ainsi Y Z, double de α Z, à Q E, double de α E : [b] par ainsi comme le quarré de α Z, au quarré de α E, ainsi le quarré de Y Z, au quarré de Q E, & le quarré de α Z estant monstré quintuple du quarré de α E, aussi le quarré de Y Z, sera quintuple du quarré de Q E, c'est à dire, du quarré de B C : Q E, estant posée egale au demy-diametre E F, c'est à dire, à B C : [c] mais le quarré de A B, est aussi quintuple du mesme quarré de B C : (car A B estant à B C, comme B C, à B D, [d] comme A B sera à B D ; ainsi le quarré de A B, au quarré de B C : & partant estant A B quintuple de B D, le quarré de A B, sera aussi quintuple du quarré de B C.) Donc les quarrez de Y Z, A B, sont egaux : parquoy X Z, A B aussi egales, & partant les spheres décrites à l'entour d'icelles serõt egales.

a 15.5.
b 22.6.
c Cor. 8.6.
d Cor. 20.6.

Finalement, d'autant que le diametre de la sphere A B, est posé Rationel (car en comparaison d'iceluy il faut monstrer que le costé de l'Icosaëdre est ligne Irrationelle appellée ligne mineure) & peut le quintuple du quarré de B C, ou de E F son egale ; E F demy-diametre du cercle F G H I K, sera aussi rationelle (car [e] les quarrez de A B, E F, estant entr'eux comme nombre à nombre, sçauoir comme 5. à 1. ou 10. à 2. seront commens. Partant A B, E F, commens. au moins en puiss. Donc puis que A B, est rationelle, E F le sera aussi.) Parquoy tout le diametre du cercle F G H I K, sera rationel. Parquoy F G, costé du pentagone, c'est à dire de l'Icosaëdre, [f] sera ligne Irrationelle, appellée mineure. Donc nous auons constitué, &c. Ce qu'il falloit faire.

e 6.10.
i
f 11.13.

COROL

COROLLAIRE.

De cecy l'on peut conclure, que le diametre de la ſphere eſt quintuple en puiſſance, au demy-diametre du cercle, qui enuironne les cinq coſtez de l'Icoſaëdre, ſçauoir de celuy duquel l'Icoſaëdre eſt conſtitué, & qui paſſe par les cinq angles de l'Icoſaëdre. Car il eſt monſtré que le quarré du diametre A B, eſt quintuple du quarré de B C; c'eſt à dire, du demy-diametre E F.

2. Pareillement, il eſt manifeſte, que le diametre de la ſphere, eſt compoſé du coſté de l'hexagone, c'eſt à dire du demy-diametre, & de deux coſtez du decagone d'vn meſme cercle : car Y Z, diametre de la ſphere, eſt compoſé de E Q, coſté de l'hexagone, & de Q Y, E Z, coſtez du decagone F G H I K.

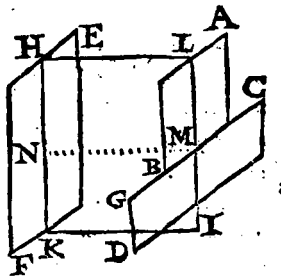
3. Il appert finalement, que les coſtez de l'Icoſaëdre oppoſez, comme R X, H I, ſont paralleles: car R X, eſt monſtrée parallele à la droicte ligne, qui ſeroit menée de L à P. Donc H I, eſtant auſſi parallele à la meſme L P (les angles alternes H I L, & I L P, faicts de la droicte menée de L à P,[a] eſtans egaux; ſouſtendans arcs egaux, ſçauoir chacun $\frac{1}{10}$. de la circonference.) Il eſt manifeſte que R X, H I ſont paralleles, & ainſi des autres coſtez oppoſez.

[a] 27. 3.

LEMME.

Or que deux plans paralleles à vn autre, leſquels conuiennent à vne meſme ligne, faſſent vn ſeul plan, il ſera ainſi demonſtré. Soient les plans A B, C D, paralleles au plan E F, & ſe rencontrans ſelon la ligne

ligne C G. Ie dis A B, C D, font vn ſeul plan: car que le plan H I, coupe les trois plans A B, C D, E F, par H K, L N, M I. D'autant que A B, E F, ſont paralleles, [a] *leurs communes ſections L M, H K ſeront paralleles, & par meſme raiſon I M, H K, auſſi paralleles: parquoy L M, I M, eſtans paralleles à H K, & en vn meſme plan H I, & ſe rencontrans à M, elles ſe rencontreront directement (car les deux angles L M N, I M N,* [b] *ſeront egaux aux deux, au poinct N, chacun à ſon alterne: partant à deux droicts,* [c] *donc L M I ſera ligne droicte,) partant les plans A B, C D, en font vn ſeul,* [d] *d'autant que la ligne L I, eſt toute en vn ſeul plan. Ce qui eſt propoſé.*



a 16.11.

b 29.1.

c 14.1.

d 1.11.

SCHOLIE.

Le Copiſte ayant pris la demonſtration de cette Propoſition de Clauius mot pour mot, dit en icelle, ſçauoir au commencement de la pag. 802.

Mais que le plan tiré par les lignes Q R, Q S, conuient auec le plan mené par les lignes Q S, Q T, en la ligne droicte Q S: il eſt euident par les choſes demonſtrées à la 16. Prop. du 11. liu. que ces deux plans en font vn ſeul, &c.

Mais il ne conſidere pas que Clauius a demonſtré en

en suitte de la 16. Proposition du 11. liure, que deux plans paralleles à vn autre, se rencontrans en vne mesme ligne, font vn seul plan. Mais luy (Henrion dis-je) ne l'ayant pas demonstré en son liure à la mesme 16. il se mesprend fort, & monstre manifestement qu'il coppie les Propositions de Clauius sans les entendre.

D'auantage, ce bon Docteur à la 5. Proposition du 14. liure, coppiant ces mesmes mots de Donnot, prenant la demonstration dudit Donnot. (Ce que nous auons monstré estre possible par la 2. Prop. 14. qu'vn mesme cercle comprend, & le triangle de l'Icosaëdre, & le pentagone du decagone,) *n'a pas eu l'esprit de voir que l'ordre des Propositions de Donnot & desiennes, est changé: car il a pris la 4. de Donnot, & l'a mise pour 2. en son liure: donc au lieu de la 2. de Donnot, qu'il pense citer, il cite la 4. où ce qu'il veut dire n'est pas demonstré: en quoy il est manifeste qu'il coppie seulement ce qu'il trouue escrit, sans auoir esgard à autre chose.*

PROBLEME 5. PROP. 17.

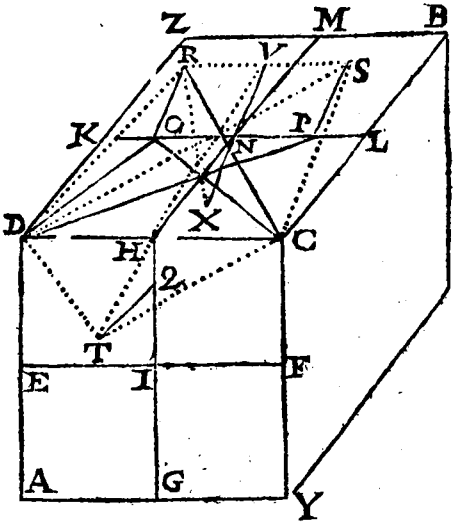
Constituer vn Dodecaedre, & l'enuironner d'vne mesme spheré que les figures deuant dites: & monstrer que le costé du Dodecaedre est ligne irrationelle, laquelle est appellée residu.

Soient posez deux plans du cube deuant dit à angles droicts l'vn à l'autre A C, B D, dont les costez soient couppez chacun en deux egalement par E, G, F, H, K, L, M, & menées les lignes E F, G H,

G H, K L, H M, s'entre-couppantes aux poincts il & N; puis I H, K N, N L, soient [a] couppées en la moyenne & extreme raison par O, P, Q, dont les plus grands segments sont I Q, P N, N O. [b] Et aux

[a] 30.6.

[b] 12.11.



parties exterieures des plans B D, C A, soient menées O R, P S, Q T, perpendiculaires, egales à P N, N O, I Q, & coniointes D T, D R, S R, C T, C S. Ie dis que D R S C T, est pentagone equilatere & equiangle, & est sur vn mesme plan.

Qu'il ne soit ainsi, soient coniointes D P, D O, D S, au plan D B, & D S: puis que N K, est coupée en la moyenne & extreme raison à O, & N O est le plus grand segment, [c] les quarrez de N K & de K O, seront triples du quarré de N O. Et N K, K D, estans egales, & O N, O R, aussi egales par la construction, les quarrez de D K, K O, seront aussi tri-

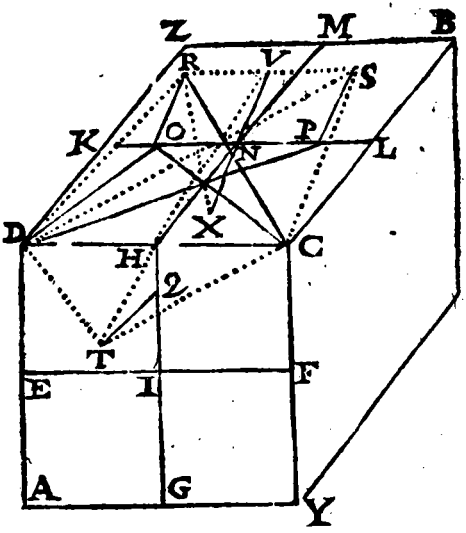
[c] 4.13.

ples du q.de N O,c'est à dire,du q.de O R : mais le
a 47.1. q.de D O,est egal aux deux quarrez de D K,K O,[a] (l'angle O K D estant droict) donc le q. de D O, est aussi triple du q. de O R. Parquoy adioustant ledit q.de O R, les deux quarrez de D O,O R, seront quadruples du q.de O R : mais le q. de D R,
b 47. 1. est egal aux deux quarrez de D O,O R : ([b] l'angle D O R estant droict) il sera donc aussi quadruple
c Sch.4.2. du q.de O R. Et R S estant double de R O, [c] son q. sera aussi quadruple du q. de R O : parquoy D R, R S seront egales. Par la mesme raison les trois autres costez D T,T C,C S, seront monstrez egaux entr'eux,& à D R,R S,partant le pentagone est equilateral.

Il est aussi en vn mesme plan : car soit menée N V, parallele à O R, & soient aussi menées V H, T H,icelles se rencontreront directement,& V H T sera vne seule ligne droicte.Car H I,estant coupée
d 3. d.6. selon la moyenne & extreme raison à Q, [d] I H sera à I Q, comme I Q à Q H. Et I H,H N sont egales, & N V, I Q & Q T, Q I aussi egales : parquoy comme H N à N V,ainsi Q T à Q H. Donc les triangles V N H,H Q T, ayans deux costez proportionaux à deux costez, & estans conioints à l'angle H,en sorte que les costez de mesme raison
e 6.11. N H,Q T,& N V,Q H,[e] sont paralleles estans per-
f 32.6. pendiculaires aux plans A C,D B,[f] la ligne V H T,
1. 11. sera vne seule ligne droicte,[g] laquelle estant en vn mesme plan. Il s'ensuit que tout le pentagone D T C S V R,mené par icelle,est en vn mesme plan.

Il est aussi equiangle. Car K N estant couppée en la moyenne & extreme raison, & O N, plus grand segment, si on adiouste K N à N P, egale au plus grand segment N O, la toute K P sera

coupée



coupée en la moyenne & extreme raiſon à N, & KN ſera le plus grand ſegment : [a] donc les quarrez de KP,& NP,ou de PS,egale à NP,ſont triples du quarré de KN,ou du quarré de KD,egale à KN. a 4.13. 5. 13.

Et adiouſtant le quarré de KD, auec les deux quarrez de KP, & PS : ces trois quarrez ſeront quadruples du quarré de KD : mais le quarré de PD,[b] eſt egal aux deux quarrez de PK,KD : donc les deux quarrez de DP,PS, ſeront quadruples du quarré de KD.[c] Mais le quarré de DS,eſt egal aux deux quarrez de DP, PS : donc le quarré de DS, ſera auſſi quadruple du quarré de KD:& le quarré de DC, [d] eſt auſſi quadruple du quarré de DK (DC eſtant double de DK :)parquoy DC DS, ſeront egales. b 47.1. c 47.1. d Sch.4.2.

Et tous les coſtez du pentagone eſtans egaux, les deux triangles D R S, D T C, auront les coſtez D R, R S, egaux à D T, T C, chacun au ſien, & les
a 8.1. baſes D S, D C, egales : [a] donc l'angle D R S, ſera egal à D T C, ainſi ſera monſtré que l'angle R S C, eſt egal à l'angle D T C : parquoy trois angles du
b 7. 13. pentagone eſtans egaux, [b] il ſera equiangle, & eſtant equilatere ſur D C, l'vn des douze coſtez egaux du cube.

Et ſi ſur chaque coſté des onze reſtans, eſt conſtruict vn pentagone, l'on aura vne figure ſolide, contenuë de douze pentagones equilateres & equiangles, laquelle ſera dodecaedre par la definition.

Il peut auſſi eſtre inſcrit en la ſphere propoſée: car V N eſtant perpendiculaire au plan B D, menée
c 39.11. de N, centre d'iceluy plan, eſtant prolongée [c] elle coupera la diagonale du cube en deux egalement
d Cor. 15. à X, [d] qui ſera le centre de la ſphere enuironnant le
13. cube, & X N eſt egale à la moitié du coſté du cube.

Soit menée X R, les quarrez de K P, N P, eſtans
e 4.13. [e] monſtrez triples du quarré de K N : & V X, eſtant egale à K P, & R V à N P, (N X eſtant egale à K N, & V N à N P.) Parquoy les quarrez de R V, V X, ſont triples du quarré de K N : mais le quarré
f 47.1. de R X, [f] eſt egal aux deux quarrez de R V, V X, parquoy le quarré de R X, ſera auſſi triple du quarré
g 15. 13. de K N. [g] Mais le quarré du diametre de la ſphere deſcrite à l'entour du cube, eſt triple du quarré du coſté du meſme cube : & les parties eſtans en meſ-
h 15. 5. me raiſon que leurs equimultiples, [h] le q. du demy-diametre ſera triple au q. du demy-coſté ; mais K N eſt moitié du coſté du cube : Donc R X ſera demy-diametre de la ſphere deſcrite autour du cube *AB*,

dont

dont le centre est X. Semblablement on monstrera que toutes les lignes droictes menées de X, aux autres angles du dodecaedre, sont egales aux demy-diametres de la sphere descrite autour du cube: Donc vne mesme sphere peut estre circonscrite au cube & au dodecaedre.

Finalement, le costé du dodecaedre est ligne irrationelle appellée residu. Car les deux demy-costez du cube K N, N L estans coupez en la moyenne & extreme raison: [a] la toute K L, sera aux deux plus grands segments ensemble, sçauoir à O P, comme O P, qui sont les deux mesmes plus grands segments, aux deux moindres, sçauoir à la ligne composée de P L, K O. Donc si K L, costé du cube, est coupée en la moyenne & extreme raison, O P sera le plus grand segment: mais K L, coupée de cette maniere est rationelle, (son qu. estant comm. au q. du diametre de la sphere, posé rationel: [b] estant le tiers d'iceluy) parquoy O P plus grand segment, ou R S costé du dodecaedre, son egale sera ligne irrationelle, appellée residu. Partant nous auons fait le requis. Ce qu'il falloit faire.

a 15.5.

b 15.13.

6.13.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cette demonstration, que le costé du cube estant coupé en la moyenne & extreme raison, que le plus grand segment est le costé du dodecaedre inscrit en la mesme sphere.

Et le costé du cube est égal à la droicte ligne soustendante l'angle du pentagone du dodecaedre. Mais d'autant qu'icelle estant coupée en la moyenne & extreme raison, [c] le plus grand segment est costé du pentagone: [d] la ligne droicte composée de

c 8.13.

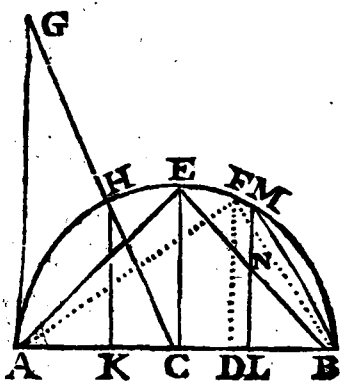
d 5.13.

de ladite soustendante l'angle du pentagone, c'est à dire, du costé du cube, & du plus grand segment, sçauoir du costé du dodecaedre est semblablement diuisée, & le moindre segment est costé du dodecaedre, & le plus grand segmẽt est le costé du cube: Il s'ensuit qu'vne ligne droicte estant couppée en la moyenne & extreme raison, le moindre segment sera le costé du dodecaedre, & le plus grand sera le costé du cube inscrit en la mesme sphere.

PROBLEME 6. PROP. 18.

Exposer les costez des cinq figures precedentes, & les comparer entr'eux.

C'est à dire, trouuer les costez des cinq figures inscrites en vne sphere, & leur raison, le diametre estant donné.



Soit exposé le diametre de la sphere A B, & soit couppé à C en deux egalement, & à D, en sorte que A D soit double de D B: & descrit le demy-cercle A E B, & menées C E, D F, à angles droicts à A B, de C & D, & conioinctes A F, F B, E B. Partant, d'autant que A D, est double de D B, A B sera triple de B D:

&

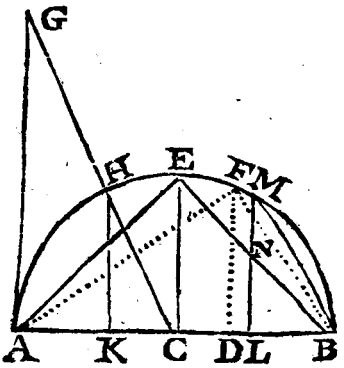
& par conuerſion de raiſon B A, ſeſquialtere de A D: mais comme B A à A D, ainſi le q.de B A, au q.de A F: [a] car le triangle A F B, eſt equiangle au triangle A F D. Donc le q.de B A, eſt ſeſquialtere du q. de A F: mais le diametre de la ſphere eſt auſſi ſeſquialtere en puiſſance au coſté de la pyramide: & A B eſt le diametre de la ſphere, donc A F eſt egal au coſté de la pyramide. a 8.6. 13.13.

Derechef, d'autant que A D eſt double de D B; A B ſera triple de B D: mais comme A B à B D, ainſi le q.de A B, au q.de F B: donc le q.de A B eſt triple du q. de B F. [b] Mais le diametre de la ſphere eſt triple en puiſſance au coſté du cube, & A B eſt le diametre de la ſphere: Donc B F eſt le coſté du cube. Et A C, eſtant egale à C B, A B ſera double de B C: mais comme A B à B C, ainſi le q.de A B, au q.de B E. Donc le q.de A B, eſt double du q.de B E, [c] & le diametre de la ſphere eſt double en puiſſ. du coſté de l'octaedre: & A B eſt le diametre de la ſphere donnée: parquoy B E eſt coſté de l'octaedre. b 15.13. c 14.13.

De A, ſoit menée A G, à angles droicts à A B, & poſée egale à icelle A B. Et ayant conioint G C, couppant la circonference à H, de H ſoit menée H K, perpend. à A B: D'autant que A G eſt double de A C: (car G A eſt egale à A B:) [d] mais comme G A à A C, ainſi H K à K C: H K ſera double de K C. [e] Donc le q.de H K eſt quadruple du q.de K C: Donc les qq.de H K, K C, c'eſt à dire le q.de H C, eſt quintuple du q. de K C: mais H C, eſt egale à C B: Donc le q.de B C, eſt quintuple du q.de C K. d 4. 6. e Sch. 4. 2.

Et d'autant que A B eſt double de B C, deſquelles A D eſt double de D B, la reſtante B D, ſera double de C D: parquoy B C eſt triple de C D. Donc le q.de B C, eſt noncuple du q.de C D; mais 19.5. 20.6.

le quarré de B C, eſt quintuple du quarré de C K: Donc le q. de C K, eſt plus grand que le q. de C D, & K G plus grand que C D. Soit poſée C L, egale à K C, & de L, menée L M à angles droicts à A B, & iointe M B.



Et d'autant que le quarré de B C, eſt quintuple du quarré de K C: & B A double de C B, & K L double de C K, [a] le quarré de A B ſera quintuple du quarré de K L.

a 15.5.

[b] Mais le diametre de la ſphere eſt quintuple en puiſſance, du demy-diametre du cercle duquel l'Icoſaëdre eſt deſcrit, & A B eſt le diametre de la ſphere, donc K L eſt coſté de l'hexagone dudit cercle.

b Cor.16. 13.

D'auantage, d'autant que le diametre de la ſphere eſt compoſé du coſté de l'hexagone, & des deux coſtez du decagone deſcrits au meſme cercle, & A B eſt le diametre de la ſphere, K L, coſté de l'hexagone, & A K egal à L B: l'vne & l'autre A K, L B, ſera coſté du decagone deſcrit au meſme cercle, duquel eſt deſcrit l'Icoſaëdre: & d'autant que le coſté du decagone eſt L B, & celuy de l'hexagone M L: car il eſt egal à K L, l'eſtant auſſi à H K: car elles ſont egalement diſtantes du centre: & l'vne & l'autre H K, K L, eſt double de K C: M B ſera le coſté du pentagone: car ce qui eſt du pentagone,

Cor.16.13. 14.13. 10.13.

eſt

eſt le meſme que de l'Icoſaëdre. Donc M B eſt coſté de l'Icoſaëdre. 16.13.

Et d'autant que F B eſt coſté du cube, ſoit coupée en la moyenne & extreme raiſon à N, & B N ſoit le plus grand ſegment : N B ſera le coſté du dodecaedre, & le diametre de la ſphere eſtant monſtré ſeſquialtere en puiſſance au coſté de la pyramide A F, & double en puiſſance à B E, coſté de l'octaedre, & triple en puiſſance à F B, coſté du cube : deſquelles parties le diametre de la ſphere eſt ſix en puiſſance des meſmes parties, le coſté de la pyramide ſera 4. de l'octaedre 3. & du cube 2. Donc le coſté de la pyramide eſt ſeſquitiers en puiſſance du coſté de l'octaedre, & du coſté du cube double en puiſſance. Et le coſté de l'octaedre eſt ſeſquialtere en puiſſance, au coſté du cube : donc les coſtez ſuſdits des trois figures, ſçauoir de la pyramide, de l'octaedre, & du cube, ſont entr'eux en proport. rationelle ; mais les deux autres, ſçauoir de l'Icoſaëdre, & du Dodecaëdre, ne ſont en propoxt. rationelles, ny entr'eux, ny aux ſuſdits, ſçauoir la Mineure & Reſidu. Cor. 17. 13.

Mais nous demonſtrerons ainſi, que le coſté B M de l'Icoſaëdre, eſt plus que le coſté B N, du Dodecaëdre.

Car d'autant que le triangle F D B, eſt equiangle à F A B : comme D B ſera à B F, ainſi F B à B A : & y ayant trois lignes proportionelles, comme la premiere ſera à la troiſieſme, ainſi le quarré de la premiere au quarré de la ſeconde. 8. 6. Cor. 20. 6.

Donc comme D B à B A, ainſi le quarré de D B, au quarré de B F, & par conuerſion de raiſon, comme A B à B D, ainſi le quarré de F B, au quarré de B D. Mais A B eſt triple de B D. Donc le quarré

10. 6. de F B, eſt triple du q. de B D. Mais le q. de A D, eſt quadruple du q. de D B : car A D eſt double de D B: donc le q. de A D, eſt plus grand que le q. de F B:
9.13. d'autant que A D eſt plus grande que F B : partant A L, bien plus grande que F B. Et A L eſtant couppée en la moyenne & extreme raiſon, la plus grande portion eſt L K, d'autant que K L eſt coſté de l'hexagone, & K A du decagone, & F B eſtant couppée en la moyenne & extreme raiſon, la plus grande portion eſt B N : donc K L eſt plus grande que B N : mais K L eſt egale à L M ; donc L M eſt plus grande que B N. Mais B M eſt plus grande
19.1. que M L : Donc M B coſté de l'Icoſaedre, ſera plus grande que B N coſté du Dodecaedre.

Cor. 20. 6. Autrement, d'autant que A D eſt double de D B,
8. 6. A B ſera triple de B D : mais comme A B à B D, ainſi le qu. de A B, au qu. de B F : d'autant que le triangle F A B, eſt equiangle au triangle F B D: donc le q. de A B, eſt triple du q. de B F ; mais le q. de A B, eſt monſtré quintuple du q. de K L : donc cinq quarrez de K L ſont egaux à trois de B F: mais trois de B F, ſont plus grands que ſix de ceux qui ſont faicts de B N, donc auſſi cinq de K L, ſont plus grands que ſix de B N. Donc vn de K L eſt plus grand qu'vn de B N, partant K L eſt plus grande que B N : mais K L eſt egale à L M. Donc L M eſt plus grande que B N : parquoy M B, eſt encore bien plus grande que B N. Ce qu'il falloit demonſtrer.

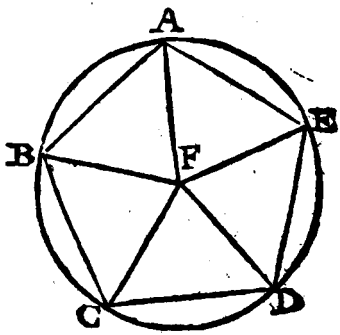
Mais nous demonſtrerons ainſi, que trois de F B, ſont plus grands que ſix de ceux de B N.

D'autant que B N eſt plus grande que N F, le rectangle ſous F B, B N, ſera plus grand que le rectangle ſous B F, F N : donc celuy qui eſt contenu de F B, B N, auec celuy de B F, F N, eſt plus grand

que

que le double de celuy qui eſt contenu ſous B F, F N : mais celuy qui eſt contenu de F B, B N, auec le contenu ſous B F, F N, eſt le q. de F B. Mais celuy qui eſt contenu ſous B F, F N eſt egal au q. de B N. Car F B eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon à N, & le rectangle contenu ſous les extremes, eſt egal au quarré de la moyenne. Donc le q. de F B, eſt plus grand que le double du q. de B N: parquoy vn quarré de F B, eſt plus grand que deux de B N : & partant trois de F B, ſont plus grands que ſix de ceux qui ſont faicts de B N. Ce qu'il falloit demonſtrer 2. 2. 17. 6.

SCHOLIE.



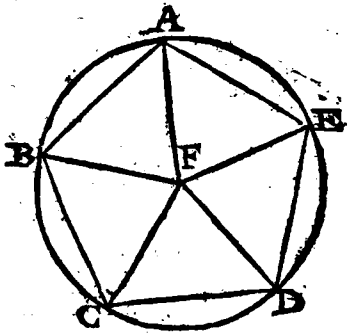
Ie dis qu'entre les cinq figures deſia dites, que l'on ne peut conſtituer d'autre figure, laquelle ſoit contenuë de figures equilateres & equiangles egales entr'elles.

Car de deux triangles, on de deux autres plans, l'on ne conſtituera pas vn angle ſolide; mais de trois triangles on conſtituë l'angle de la pyramide: de quatre, celuy de l'octaedre: de cinq, celuy de l'Icoſaedre: mais de ſix triangles equilateres & equiangles conſtituez à vn poinct, vn angle ſolide n'eſt fait. 11. 11.

Car

Car l'angle d'vn triangle equilatere estant les ⅔. d'vn droict, 6. seront egaux à 4. droicts: ce qui ne se peut faire.

Car tout angle solide est contenu de quatre angles moindres que 4. droicts: par mesme raison l'angle solide, n'est constitué de plus de six angles plans. Partant l'angle du cube est contenu de 3. quarrez, & ne se peut faire qu'il soit contenu de 4. car il y auroit derechef quatre angles droicts. L'angle du dodecaedre est contenu de trois pentagones equiangles & equilateres: mais il ne peut estre contenu de quatre.



Car l'angle du pentagone equilatere estant fait d'vn droit, & de la cinquiesme partie d'vn droit, ce seront quatre angles plus grands que quatre droicts: ce qui ne se peut faire, & des autres figures polygones ne peut estre constitué vn angle solide, pour les absurditez qui s'en ensuiuent. Donc entre les figures desia dites, n'est constituée d'autre figure solide, contenue de figures equilateres & equiangles. Ce qu'il falloit demonstrer.

Or nous demonstrerons en cette maniere, que l'angle du pentagone equilatere & equiangle, est faict d'vn droict; & de la cinquiesme partie d'vn droict.

Soit

Soit le pentagone equilateral & equiangle ABC DE, à l'entour duquel ſoit deſcrit le cercle ABCDE, & ſoit pris le centre d'iceluy, lequel ſoit F, & ſoient conioinctes F A, F B, F C, F D, F E, qui couperont les angles du pentagone A B C D E, en deux egalement.

Et d'autant que les cinq angles au poinct F, ſont egaux à quatre droicts, & ſont egaux entr'eux, vn d'iceux, comme A F B, ſera contenu d'vn droict, moins la cinquieſme partie : donc les deux autres F A B, A B F, vallent vn droict, & la cinquieſme partie : mais l'angle F B A, eſt egal à l'angle F B C: donc le tout A B C, angle du pentagone, eſt contenu d'vn droict, & de la cinquieſme partie d'vn droict. Ce qu'il falloit demonſtrer.

FIN DV TREIZIESME LIVRE des Elements d'Euclide.



LIVRE

LIVRE QVATORZIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE:

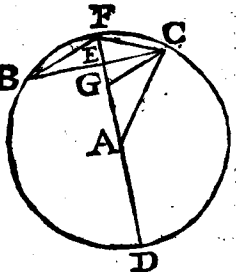
Et le quatrieſme des Solides.

THEOREME 1. PROP. 1.

La ligne droicte perpendiculaire menée du centre, au coſté du pentagone inſcrit au cercle, eſt la moitié de l'vn & l'autre coſté, ſçauoir de celuy de l'hexagone & du decagone enſemble, inſcrits au meſme cercle.

SOIT le cercle B C D, dont le centre eſt A, d'où ſoit menée A E, perpendiculaire à B C, coſté du pentagone inſcrit au meſme cercle. Ie dis que A E, eſt moitié du coſté de l'hexagone, & du decagone enſemble, inſcrits au meſme cercle.

Car



Car ayant mené A E de part & d'autre, pour parfaire le diametre D F, & pris E G, egale à E F, soient conioinctes A C, C G, C F, B F. [a] D'autant que A E couppe B C en deux egalement, les deux costez B E, E F, du triangle B E F seront egaux à C E, E F, du triangle C E F: & les angles contenus d'iceux estans egaux, sçauoir droicts, [b] les bases C F, B F seront egales, [c] les arcs B F, C F egaux. Donc B F C estant la cinquiesme partie de toute la circonference, C F sera la dixiesme: partant C F, ligne droicte, est costé du Decagone.

a 3. 3.

b 4. 1.

c 28. 3.

Derechef, les costez C E, E F, du triangle C E F, estans egaux à C E, E G, du triangle C E G, & les angles contenus d'iceux droicts, [d] les bases C F, C G seront egales, & les angles C F G, C G F, egaux, & l'arc C F estant la cinquiesme partie de la demye circonference D C F, estant la dixiesme partie de la toute; l'arc D C sera quadruple de C F. [e] Parquoy l'angle D A C, le sera aussi de C A F. [f]

d 4. 1.

e 33. 6.

f 20. 3.

Mais l'angle C F D, à la circonference est moitié de D A C au centre. Donc C F D; & partant C G F monstré egal à iceluy, sera double de C A F. [g] Or C G F externe, est egal aux deux internes G A C, G C A, au triangle G A C, & G A C, estant monstré moitié de C G F: G C A, sera moitié du mesme C G F: & partant G A C, & G C A egaux, & G A, G C egales.

g 32. 1.

6. 1.

Mais

Mais C G eſt monſtrée egale à C F, donc A G ſera auſſi egale à C F. Donc adiouſtant les egales G E, E F; A E ſera egale à C F, F E enſemble : Donc les trois enſemble A E, E F, F C : c'eſt à dire les deux enſemble A F, F C ſeront doubles de A E : & au contraire A E, perpendiculaire au coſté du pentagone, ſera moitié des deux enſemble, A F, F C, ſçauoir du coſté de l'hexagone & du decagone. Donc la ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

D'où il s'enſuit que la perpendiculaire menée du centre à la droicte ligne accommodée au cercle, coupe l'arc ſouſtendant icelle ligne en deux egalement, eſtant demonſtré que A E, menée du centre A, perpendiculaire à C B, diuiſe l'arc B C en deux egalement à F.

2. Que la perpendiculaire du centre au coſté dudit pentagone, eſt egale à la perpendiculaire du meſme centre menée ſur le coſté du triangle equilateral, & à la moitié du coſté du decagone, inſcrit au meſme cercle.

Car comme il eſt icy demonſtré, la perpendiculaire menée du centre au coſté du pentagone, eſt egale à la moitié du coſté de l'hexagone & du decagone, enſemble : mais la perpendiculaire menée du centre ſur le coſté du triangle equilateral, [a] eſt egale à la moitié du demy-diametre, ou coſté de l'hexagone. Donc il eſt manifeſte que la meſme perpendiculaire menée du centre au coſté du pentagone, eſt egale à la perpendiculaire menée au coſté du triangle equilateral, & à la moitié du coſté du decagone enſemble.

a Cor. 12. 13.

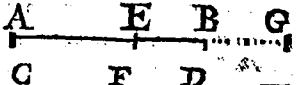
THEO

THEOREME 2. PROP. 2.

Si deux lignes droictes sont coupées en la moyenne & extreme raison : elles seront semblablement coupées, sçauoir en mesmes proportions.

Soient A B, C D, couppées en la moyenne & extreme raison à E & F. Ie dis qu'elles sont semblablement couppées, c'est à dire, comme A B, à C D, ainsi A E à C F, & E B à F D. Item, comme A E à E B, ainsi C F à F D, &c.

Car puis que comme A B est à A E, ainsi A E à E B, & comme C D à C F, ainsi C F à F D, a le rectangle sous A B, E B, sera egal au quarré de A E, & le rectangle sous C D, F D, egal au quarré de C F. a 17.6.



Donc comme le rect. sous A B, E B, sera au q. de A E, ainsi le rect. sous C D, F D, au q. de C F (y ayant proportion d'egalité de part & d'autre.) b Parquoy comme le quadruple du rect. sous A B, E B, au q. de A E, ainsi le quadruple du rect. sous C D, F D, au q. de C F ; & en composant comme le quadruple du rect. sous A B, E B, & le q. de A E, à iceluy q. de A E : ainsi le quadruple du rect. sous C D, F D, & le q. de C F, au q. de C F : c mais quatre fois le rect. sous A B, E B, auec le q. de A E, est egal au q. de A G, composée de A B, E B. b Sch. 22. 5. c 8. 2.

Et quatre fois le rectangle sous C D, F D, auec

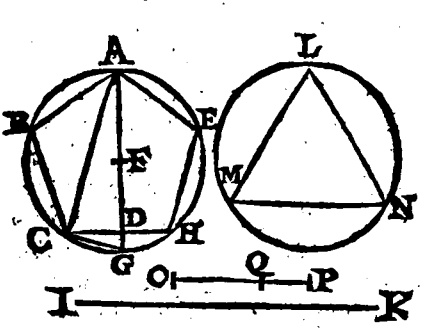
le quarré de C F, eſt egal au quarré de C H, compoſée de C D, F D. Donc comme le quarré de A G compoſée de A B, E B, au quarré de A E, ainſi le quarré de C H, compoſée de C D, F D, au quarré
d 22.6. de C F; [d] Partant comme A G, à A E, ainſi C H, à C F: Et en compoſant, comme A G, à A E, c'eſt à dire la double de A B, eſt à A E: ainſi C H, & C F, c'eſt à dire, la double de C D, eſt à C F: & en permutant comme la double de A B, à la double
e 15.5. de C D, ainſi A E à C F. [e] Mais comme la double de A B, à la double de C D, ainſi A B, à C D: Donc comme A B, ſera à C D, ainſi A E, à C F: partant puis que comme la toute A B, eſt à la toute C D,
f 19.5. ainſi la retranchée A E, à la retranchée C F; [f] auſſi la reſtante E B, ſera à la reſtante F D, comme la
g 11.5. toute à la toute: [g] donc comme A E, à C F, ainſi E B, à F D, & en changeant comme A E, à E B, ainſi C F, à F D: & ainſi ſelon toute autre maniere d'argumenter és proportions, on monſtrera que les lignes totales & leurs parties ſont proportionelles entr'elles. Donc ſi deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 3. PROP. 3.

Vn meſme cercle contient le pentagone du Dodecaedre, & le triangle de l'Icoſaedre inſcrits en vne meſme ſphere:

Premier que demonſtrer ceſte propoſition, il faut monſtrer que le quarré du coſté du pentagone auec le quarré de la ligne ſouſtendante vn angle d'iceluy, eſt quintuple du quarré du demy-diametre du cercle, où eſt inſcrit ledit pentagone.

Soit



Soit C H, costé du pentagone inscrit en vn cercle, C A, la ligne qui soustend vn des angles du pentagone, & F G, demy-diametre, [a] couppant C H, & l'arc C G H, en deux egalement. Ie dis que les quarrez de C A, & C H ensemble, sont quintuples du quarré de F G. a Cor. 10. 13.

Car la ligne droicte C G, estant menée sera le costé du decagone, [b] & le quarré de A G, sera quadruple du quarré de F G demy-diametre: parquoy les deux quarrez de A C, C G, [c] egaux audit quarré de A G, seront aussi quadruples du quarré de F G. Donc les trois quarrez de A C, C G, G F ensemble seront quintuples du quarré de G F: mais les quarrez de C G, & de G F, ensemble costez de l'hexagone & du decagone, [d] sont egaux au quarré de C H costé du pentagone: donc les quarrez de A C, & de C H, sont quintuples du quarré de G F, Ce qui est proposé. *Maintenant:* b Sch. 12. c 47. 1. d 10. 13.

Soit I K, le diametre de la sphere contenant le dodecaedre & l'Icosaedre, & soit A B C H E, vn pentagone d'iceluy dodecaedre, & L M N, triangle de l'Icosaedre. Ie dis qu'vn mesme cercle contient le pentagone A B C H E, & le triangle L M N, c'est à dire, que les cercles qui les circonscriuent A B C H E, L M N sont egaux,

& que ce n'eſt qu'vn meſme. Car ayant mené A C,
a Cor.17. ſouſtendant l'angle B du pentagone,[a] A C, ſera le
13. coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere.

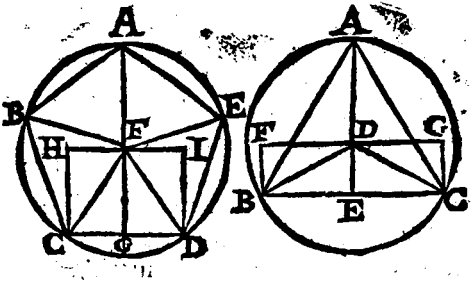
Soit priſé O P, telle que le quarré de I K, diametre de la ſphere ſoit quintuple du quarré de O P, & O P, ſera egale au demy-diametre du cercle où
b Cor.16. eſt inſcrit l'Icoſaedre. Et O P, [b] ſoit coupée en la
13. moyenne & extreme raiſon à Q; O Q plus grand ſegment ſera coſté du decagone inſcrit au meſme
c Corol. 9. cercle, duquel O P, [c] eſt le demy-diametre ou coſté
13. de l'hexagone: mais [d] C A eſtant diuiſée en la
d 7.13. moyenne & extreme raiſon, ſon plus grand ſeg-
e 2.14. ment eſt A B, coſté du pentagone.[e] Donc comme A C toute, à O P, toute, ainſi le plus grand ſegment
f 22.6. A B, au plus grand ſegment O Q. [f] Donc comme le quarré de A C, au quarré de O P, ainſi le quarré
g 4.5. de A B, au quarré de O Q. [g] Et comme le triple du quarré de A C, au quintuple du quarré de O P, ainſi le triplè du quarré de A B, au quintuple du q. de O Q: mais le triple du quarré de A C, eſt egal
h 15.13. au quintuple du quarré de O P ([h] le quarré de I K, diametre de la ſphere eſtant poſé egal tant au triple du q. de A C coſté du cube, qu'au quintuple du quarré de O P.) Parquoy le triple du q. de A B,
i Cor.16. ſera auſſi egal au quintuple du q. de O Q. [i] Mais
13. M L, coſté du triangle de l'Icoſaedre eſt egal au coſté du pentagone inſcrit au cercle duquel O P
k 10.13. eſt demy-diametre. Donc le q. dudit coſté [k] eſtant egal aux quarrez de O P, O Q coſtez du decagone & de l'hexagone, 5. fois le q. de M L, ſera egal à 5. fois le q. de O P, & à 5. fois celuy de O Q: ou à 3. fois le q. de B A, & à 3. fois le q. de A C. Donc les quarrez de B A, A C, eſtant quintuples du quarré du demy-diametre F A (comme il eſt demonſtré)

3. fois

3.fois le q.de A B,& 3.fois le q.de AC,ſeront egaux à 15.fois le q.de F A,demy-diametre.Mais 5.fois le q. de M L, coſté du triangle equilateral eſt egal à 15.fois le q. du demy-diametre du cercle L M N (chacun [l] q.de M L,eſtant triple du q.du demy-diametre) parquoy les 3.q.de B A,A C, eſtans egaux aux 5.de M L,les 15.de F A, demy-diametre ſeront egaux aux 15.du demy-diametre du cercle L M N. Parquoy chacun q.d'iceux ſera egal à chacun q. & le demy-diametre au demy-diametre. Donc les cercles ſeront egaux A B C, L M N. Partant vn meſme cercle,&c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [l] 12. 13.

THEOREME 4. PROP. 4. iiij vj.

Si du centre du cercle circonſcriuant le pentagone du dodecaedre, eſt menée vne ligne droicte perpendiculaire à vn coſté d'iceluy pentagone : trente fois le rectangle contenu ſous ledit coſté & la perpendiculaire,ſera egal à la ſuperficie du dodecaedre.



Du centre F, du cercle circonſcriuãt le pentagone du dodecaedre A B C D E,ſoit menée F G,perpendiculaire ſur

le coſté C D. Ie dis que trente fois le rectangle contenu ſous F G, C D, eſt egal à toute la ſuperficie du dodecaedre.

Car du centre F, ayant mené les lignes droictes à tous les angles du pentagone, FA, FB, FC, F D, F E, le pentagone ſera diuiſé en cinq triangles egaux,
a Cor. 8.1. [a] comme il appert, tous les coſtez eſtans egaux, & toutes les baſes : Soit conſtitué le rect. C I, contenu
b 41.1. ſous C D, F G. [b] D'autant que le rect. C I, eſt double du triangle F C D, & par conſequent double de chacun des quatre triangles reſtans egaux F C D, le rectangle C I, pris cinq fois ſera egal à dix tels triangles, c'eſt à dire à deux pentagones du dodecaedre (cinq triangles eſtans egaux à vn pentagone) partant le ſextuple du rect. C I, (c'eſt à dire, ſix rect. tels que C I) pris cinq fois, ſçauoir trente fois le rect. C I, ſera auſſi egal au ſextuple de deux pentagones, (c'eſt à dire, à douze pentagones) ſçauoir à toute la ſuperficie du dodecaedre. Donc ſi du centre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Semblablement on demonſtrera que ſi du centre du cercle circonſcriuant le triangle de l'Icoſaedre A B C, on mene vne perpendiculaire D E, ſur vn coſté, ſçauoir ſur B C, le rectangle B G, contenu ſous B C, D E, pris trente fois, ſera egal à la ſuperficie de l'Icoſaedre.

41.1. Car le rect. B G, eſtant double du triangle D B C, c'eſt à dire, egal audit triangle pris deux fois ; le rect. B G, pris 30. fois ſera egal au triangle D B C, pris 60. fois : mais 60. tels triangles que D B C, font vingt triangles de l'Icoſaedre, puis que trois en font vn, comme il appert au triangle A B C, où les coſtez D A, D B, D C, ſont egaux, & les trois baſes A B, B C, C A, egales par l'hypotheſe. Donc

B G,

B G, pris trente fois ſera egal à toute la ſuperficie de l'Icoſaedre.

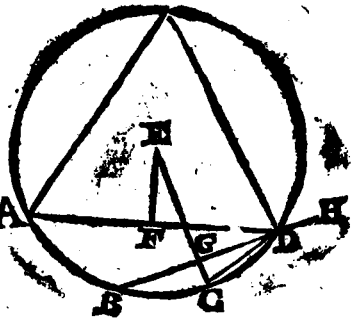
COROLLAIRE.

D'où il s'enſuit que comme le rect. C I, eſt au rect. B G, ainſi toute la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'Icoſaedre. 15.5.

THEOREME 5. PROP. 5.

Comme la ſuperficie du dodecaedre eſt à la ſuperficie de l'Icoſaedre, ainſi le coſté du cube eſt au coſté de l'Icoſaedre, inſcrits en vne meſme ſphere.

Au cercle A B C D,[a] enuironnant le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'Icoſaedre, ſoit B D, coſté du pentagone, & A D, coſté du triangle; & du centre E, ſoient menées EF, EG, perpendiculaires à A D, B D, & ſoit F G, prolongée à la circonference au poinct C, & menée C D; E C couppera l'arc B C D, en deux egalement, & C D ſera coſté du decagone,[b] comme nous auons monſtré. a 3.14. b 1.14.



Et ſoit prolongé B D, à H en ſorte que B H, ſoit egale au coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere.

Ie dis maintenant que la ſuperficie du dodecaedre, eſt à la ſuperficie de l'Icoſaedre, comme B H, coſté du cube eſt à A D, coſté de l'Icoſaedre.

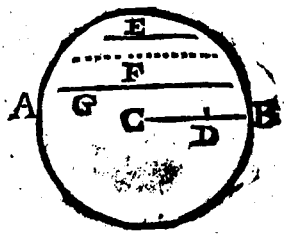
Car E C, eſtant coſté de l'hexagone, & C D, coſté du decagone inſcrits en vn meſme cercle, E C, C D, priſe comme vne ſeule, [c] ſera couppée en la moyenne & extreme raiſon, & E C, le plus grand ſegment, [d] & E G eſt moitié de la toute compoſée de E C, C D, & E F, eſt moitié du plus grand ſegment E C (le [e] demy-diametre eſtant couppé en deux egalement par A D.) Et E C, eſtant couppée en la moyenne & extreme raiſon, la moitié E F, ſera le plus grand ſegment, comme il eſt manifeſte: car la moitié du plus grand ſegment, & la moitié du moindre, faict la moitié de la toute: [f] les toutes eſtant entr'elles comme leurs parties: mais B H, coſté du cube eſtant couppée en la moyenne & extreme raiſon, [g] B D coſté du dodecaedre ſera ſon plus grand ſegment; partant comme la toute B H, à B D ſon plus grand ſegment, ainſi la toute E G, ſera à E F ſon plus grand ſegment: [i] Donc le rectangle ſous B H, E F extremes, ſera egal au rectangle ſous B D, E G moyennes: & le rectangle ſous B H, E F, [l] eſtant au rectangle ſous A D, E F, comme B H eſt à A D; comme B H ſera à A D, ainſi le rectangle ſous B D, E G (monſtré egal au rectangle ſous B H, E F) ſera au rectangle ſous A D, E F. Partant le rectangle ſous [m] B D, E G, eſtant au rectangle ſous A D, E F, comme la ſuperficie du dodecaedre à celle de l'Icoſaedre: auſſi comme B H, coſté du cube ſera à A D, coſté de l'Icoſaedre, ainſi la ſuperficie du dodecaedre, ſera à la ſuperficie de l'Icoſaedre. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 9.13.
d 1.14.
e Cor.12. 13.
f 15.5.
g Cor.17. 13.
h 2.14.
i 16.6.
l 1.6.
m Cor.4. 14.

THEO

THEOREME 6. PROP. 6.

Si vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison; comme le quarré de la toute, & le quarré du plus grand segment, sont aux quarrez de la toute & du plus petit segment: Ainsi le quarré du costé du cube, est au quarré du costé de l'Icosaedre, inscrit en vne mesme sphere que le cube.



Soit le cercle A B, contenant le triangle de l'Icosaedre, & le pentagone du dodecaedre, dont le demy-diametre C B, soit couppé en la moyenne & extreme raison à D, & son plus grand segment soit C D, [a] qui sera le costé du decagone inscrit au mesme cercle. Et soit posée E, costé du dodecaedre, F, costé de l'Icosaedre, & G, costé du cube. Ie dis que le quarré de G, est au quarré de F, comme les deux quarrez de C B, C D, sont aux deux quarrez de C B, D B.

[a] Cor. 9. 13.

Car E, estant costé du pentagone, & F, costé du triangle inscrit au cercle proposé: Si G, costé du cube est couppé en la moyenne & extreme raison, [b] E, sera son plus grand segment: parquoy F, [b] Cor. 17. estant costé du triangle inscrit au cercle donné, [c] son quarré sera triple du quarré du demy-diame- [c] 12. 15.

4.13. tre C B, [d] & les quarrez de C B, D B, ſont triples du quarré de C D. Donc le quarré de F, eſt au quarré de C B, comme les deux quarrez de C B, D B, ſont au quarré de C D : Et en permutant, le quarré de F, ſera aux deux quarrez de C B, D B, comme le quarré de C B, au quarré de C D. Or comme le quarré de C B, eſt au quarré de C D, 2.14. ainſi le quarré de G, au quarré de E (puis que [e] comme C B, toute eſt à ſon plus grand ſegment C D, ainſi G, toute eſt à E, ſon plus grand ſegment. f 22.6. [f] Donc comme le quarré de C B, ſera au quarré de g 11.5. C D, ainſi le quarré de G, au quarré de E :) [g] Partant comme le quarré de F, eſt aux quarrez de C B, D B, ainſi le quarré de G, au quarré de E : & en changeant comme le quarré de F, au quarré de G, ainſi les quarrez de C B, D B, ſont au quarré de E, h 10. 13. qui eſt le coſté du pentagone, [h] egal aux quarrez de C B, C D, coſtez de l'hexagone & du decagone qui ſont inſcrits en vn meſme cercle : partant le quarré de G, coſté du cube eſt au quarré de F, coſté de l'Icoſaedre, comme les quarrez de C B, C D, ſont aux quarrez de C B, D B. Parquoy ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 7. PROP. 7.

Comme le coſté du cube eſt au coſté de l'Icoſaedre : Ainſi le ſolide du Dodecaedre eſt au ſolide de l'Icoſaedre inſcrits en vne meſme ſphere.

D'autant que le pentagone du Dodecaedre, & le

le triangle de l'Icoſaedre inſcrits en vne meſme ſphere, [a] ſont inſcrits en vn meſme cercle ou cercles egaux. Et qu'en [b] la ſphere les cercles egaux ſont egalement diſtans du centre : car les perpendiculaires menées du centre de la ſphere au plan des cercles, [c] ſont egales & tombent aux centres d'iceux cercles : Donc les perpendicules menées du centre de la ſphere au centre du cercle contenant le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'Icoſaedre ſont egales : Parquoy les pyramides ayans pour baſes les pentagones du Dodecaedre, & les triangles de l'Icoſaedre ſont de meſme hauteur : [d] mais les pyramides de meſme hauteur ſont entr'elles comme leurs baſes: Donc comme le pentagone au triangle, ainſi la pyramide qui a pour baſe le pentagone du dodecaedre, & le centre de la ſphere pour ſommet, eſt à la pyramide dont la baſe eſt le triangle de l'Icoſaedre, & le centre de la ſphere eſt le ſommet.

a 3.14.
b 6.ſph. theod.
c Corol theod.
d 5. & 6. 12.

Donc auſſi comme douze pentagones ſont à vingt triangles, ainſi douze pyramides ayans les baſes pentagonales ſont à vingt pyramides ayans les baſes triangulaires : mais douze pentagones ſont la ſuperficie du Dodecaedre, & vingt triangles ſont la ſuperficie de l'Icoſaedre : Donc comme la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'Icoſaedre, ainſi douze pyramides ayans les baſes pentagonales à vingt pyramides qui ont les baſes triangulaires : Et douze pyramides ayans les baſes pentagonales, ſont le ſolide du dodecaedre; & vingt pyramides ayans les baſes triangulaires ſont le ſolide de l'Icoſaedre.

e 5.14.

Donc

Donc comme la superficie du Dodecaedre à la superficie de l'Icosaedre, ainsi le solide du Dodecaedre, au solide de l'Icosaedre, mais comme la
11.5. superficie du Dodecaedre, à la superficie de l'Icosaedre, ainsi est monstré le costé du cube, au costé de l'Icosaedre, donc comme le costé du cube au costé de l'Icosaëdre, ainsi le solide du Dodecaedre, au solide de l'Icosaedre. Ce qu'il falloit demonstrer.

FIN DV QVATORZIESME LIVRE des Elements d'Euclide.



LIVRE

LIVRE QVINZIESME,

DES ELEMENTS D'EVCLIDE:

Et le cinquiesme des Solides.

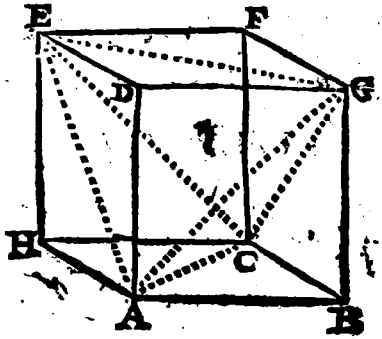
PROBLEME 1. PROP. 1.

En vn cube donné, inscrire vne Pyramide.

SOIT le cube donné A B C D E F G H. Il faut inscrire en iceluy vne pyramide ou tetraedre: D'vn angle d'iceluy E, soient menées aux bases constituans iceluy, trois diametres E A, E G, E C, de l'extremité desquelles A, G, C, soient aussi menez les diametres A G, G C, C A, aux autres trois bases qui conioignent les extremitez des trois premiers diametres: D'autant que les diametres des quarrez egaux sont egaux entr'eux, estans doubles en puissance des a costez des quarrez egaux. a 47. 1.

Il est manifeste que les quatre triangles A C E, G A C,

GAC, GAE, GCE, compoſez deſdits diametres ſont equilateres & egaux entr'eux, partant conſtituent vne pyramide : & tous les angles de la pyramide eſtãs colloquez aux

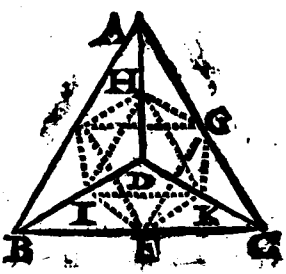


31. d. 11. angles du cube, b il eſt manifeſte, qu'elle eſt inſcrite dans le cube. Donc en vn cube donné nous auons inſcrit vne pyramide. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 2. PROP. 2.

En vne Pyramide donnée, inſcrire vn Octaedre.

Soit la pyramide donnée ABCD, où il faut inſcrire vn octaedre. Ayant diuiſé tous les coſtez en deux egalement à E, F, G, H, I, K, & mené EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, on aura conſtitué huict triangles, quatre deſquels EHI, IHK, KHG, HGF, ſont ſur le plan EIKG; mais les quatre autres IFE, EFG, GFK, KFI, au deſſous du meſme plan. Mais d'autant que les



coſtez

costez A E, A H, du triangle A E H, sont egaux à A G, A H, du triangle A G H, estans moitiez des egales A B, A D, A C, & les angles contenus d'icelles E A H, G A H egaux, estans angles de triangles equilateres A B D, A C D. [a] Les baſes E H, G H, [a] 4. 1. seront egales: & par meſme raiſon E H, H I, & les autres pareillement, parquoy iceux huict triangles ſont equilateres & egaux entr'eux : & partant compoſent l'octaedre E I G H F, [b] lequel eſt in- [b] 31. d. 11. ſcrit en la pyramide, puis que tous les angles touchent tous les costez de la pyramide, par la conſtruction. Donc en vne pyramide nous auons inſcrit vn octaedre. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

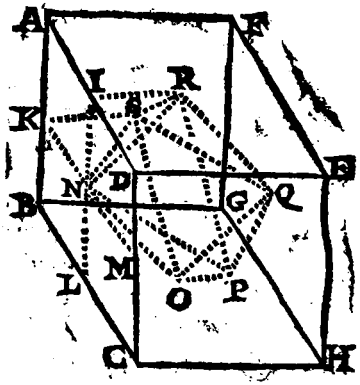
Or d'autant que les trois plans E I K G, G H I F, F K H E, [a] ſont quarrez egaux, ſe couppans à an- [a] Corol. 1 gles droicts : chacun deſquels coupe la pyramide 14. 13. A B C D, en deux egalement, (car le quarré E K, la diuiſe en la pyramide H I K D, & au priſme H I K G A E : & auſſi en la pyramide E B F L, & au priſme E F C G K I : mais il appert que la pyramide eſt egale à la pyramide, & le priſme au priſme : ſemblablement les autres quarrez G I, & F H, diuiſent en deux egalement la meſme pyramide [b] 8. 12. A B C D.) Il eſt manifeſte que ſi au tetraedre on inſcrit vn octaedre, que le tetraedre ſera couppé en deux egalement par trois quarrez egaux, leſquels ſe couppent entr'eux à angles droicts, & le tetraedre en deux egalement.

PRO

PROBLEME 3. PROP. 3.

En vn cube donné, inſcrire vn Octaedre.

Soit le cube donné AH, auquel il faut inſcrire vn octaedre. Soient diuiſez les coſtez de la baſe ABCD, en deux egalement par I, K, L, M, leſquels ſoient conioints par IL, KM, ſe couppantes l'vne l'autre par M, qui eſt le centre du quarré BD, comme il appert de la demonſtration de la 8. du 4. Et ainſi on trouuera les centres des autres baſes O, P, Q, R, S, donc toutes les droictes lignes menées deſdits centres au milieu des baſes, comme ſont NI, RI, NK, SK, &c. ſont egales aux moitiez des coſtez du cube, ou des quarrez, comme il appert par la demonſtration 8. 4.



Finalement, ſi leſdits centres ſont conioints par NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS, on aura conſtitué 8. triangles, quatre deſquels NSR, RSQ, QSO, OSN, ſont ſur le plan NOQR, & les autres quatre OPQ, QPR, RPN, NPO, au deſſous du meſme plan.

Mais d'autant que les coſtez IN, NR, du trian-

gle

gle I N R, ſont egaux à K N, R S, du triangle K N S, eſtans tous moitiez des coſtez egaux du cube, comme il eſt dit: Item les angles contenus d'iceux ſont egaux: car N I, I R, eſtant paralleles à B A, A F; [a] l'angle N I R, eſt egal au droict K A F, au quarré A G: par meſme raiſon N R S egal au droict I A F, au quarré A E; [b] les baſes N R, N S, ſeront egales. Ainſi nous demonſtrerons toutes les autres lignes egales, & entr'elles & à ces deux. Si des centres on mene des lignes droictes au milieu des coſtez, en ſorte que chaque deux ſoient menées au milieu du coſté commun à deux quarrez du cube, deſquels ces deux poincts d'où viennent les lignes droictes ſont les centres: ainſi que N I, & R I, qui ſont menées à I, moitié du coſté A D, commun aux quarrez A C, A E, dont les centres ſont N, & R: Pareillement N K, S K, ſont menées à K, milieu de A B, commun aux quarrez A C, A G, dont les centres ſont N, & S, &c. Partant on a conſtitué huict triangles equilateres & equiangles entr'eux, qui conſtituent l'octaedre N O Q R S P; [c] Qui eſt inſcrit au cube, puis que tous ſes ſix angles touchent toutes les ſix baſes du cube, à leurs centres. Donc au cube donné nous auons inſcrit vn octaedre. Ce qu'il falloit faire.

a 10. 11.
b 4. 1.
c d. 31. 11.

Autrement. [d] Au cube ſoit inſcrit vne pyramide: [e] & en icelle pyramide ſoit inſcrit vn octaedre, & on aura faict ce qui eſt propoſé. Car puis que ſelon la demonſtration de la 2. propoſ. de ce liure, les angles de l'octaedre, touchent les coſtez de la pyramide; mais les coſtez de la pyramide, par la demonſtration de la 1. propoſ. de ce liure, ſont aux plans des baſes du cube, eſtant les diametres d'icelles baſes: Il eſt manifeſte, que les angles de

d 1. 15.
e 2. 15.

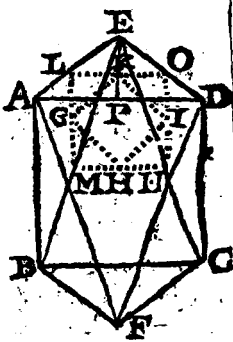
l'octaedre, touchent pareillement les baſes du c
be r& partant que l'octaedre eſt inſcrit au cube

COROLLAIRE.

Or d'autant que les diametres de l'octaedre i
ſcrits au cube, N Q, R O (s'ils eſtoient menez
f Corol. 1. f ſe couppent l'vn l'autre à angles droicts, & co
14. 13. ioignent les centres des baſes du cube oppoſée
Il eſt manifeſte, que les lignes droictes qui conioi
gnent les centres des baſes oppoſées du cube, i
g Corol. 1. diuiſent non ſeulement en deux egalement, g com
15. 13. me il eſt monſtré : mais auſſi à angles droicts
comme nous monſtrons icy.

iv. PROBLEME 4. PROP. 4.

En vn octaedre donné inſcrire vn cube



Soit A B C D E F, l'octaedre donné, où il faut inſcrire vn cube. D'autant que ſix pyramides quadrangles ſont contenuës en l'octaedre, dont les ſommets ſont les ſix angles de l'octaedre, & chaque deux conſtituent vn octaedre : Soit vne d'icelles, ſçauoir la pyramide A B C D E, dont la baſe eſt le quatré A B C D ; & les triangles equilateres A B E, E B C, C E D, D E A, dont le centres ſont G, H, I, K, par leſquels ſoient menée L M, M N, N O, O L, paralleles à A B, B C, C D, D A

les triangles L M E, E M N, N E O, O E L, seront equilateres,[a] estans semblables aux triangles equilateres susdits. Et partant egaux entr'eux, ayans les costez communs, & les bases L M, M N, N O, par consequent egales. Et si de E, par le centre K, est menée E P, elle diuisera l'angle à E, en deux egalement, donc L K, sera egale à K O, c'est à dire, que L O, est diuisée en deux egalement par K, centre; Et semblablement L M, M N, N O, seront couppées chacune en deux egalement par les centres G, H, I. Partant les quatre triangles G L K, K O I, G M H, H N I, sont Isosceles ([b] les angles G L K, K O I, I N H, H M G, estans egaux aux angles droicts du quarré G K I H.) Donc les bases G K, K I, I H, H G, seront egales & contiendront angles droicts: parquoy G H I K, est quarré. Que si en la mesme maniere aux autres cinq pyramides de l'octaedre, les centres des triangles sont conioints par des lignes droictes, on descrira semblablement cinq quarrez, lesquels seront egaux entr'eux ayant les costez communs. Parquoy six tels quarrez composeront vn cube [c] lequel sera descrit en l'octaedre, puis que les huict angles d'iceluy touchent les huict bases de l'octaedre à leurs centres. Partant en l'octaedre donné nous auons inscrit vn cube. Ce qu'il falloit faire.

[a] Cor. 4. 6.

[b] 10. 11.

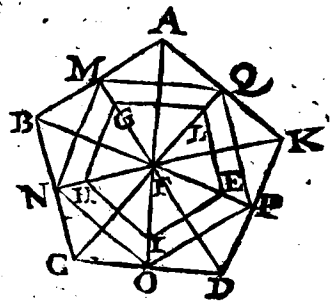
[c] 31. d. 11.

PROBLEME 5. PROP. 5.

Dedans vn Icosaedre donné inscrire vn Dodecaedre.

Soit vne des douze pyramides de l'Icosaedre, dont les bases sont pentagones A B C D E F, & la base le pentagone A B C D E, & les triangles equi-

lateres A B F, B C F, C D F, D E F, E A F, & leurs centres G, H, I, K, L, conioints par G H, H I, I K, K L, L G. Derechef du ſommet F, par les centres des triangles ſoient menées F M, F N, F O, F P, F Q; couppans [a] A B, B C, C D, D E, E A, à M, N, O, P, Q, en ſorte que M A, M B, N B, N C, O C, O D, P D, P E, Q E, Q A, ſoient egales, & comprenant angles egaux, ſçauoir du pentagone, [b] M N, N O, O P, P Q, Q M, conioignãt les poincts M, N, O, P, Q, ſont auſſi egales; [c] partant les angles M F N, N F O, O F P, P F Q, Q F M ſont egaux, les coſtez F M, F N, F O, F P, F Q eſtans egaux, ſçauoir perpendiculaires des angles des triangles equilateres menées aux baſes oppoſées.



a Corol. 10. 13.

b 4. 1.

c 8. 1.

Car F B, B M, du triangle F B M, eſtans egaux à F B, B N, du triangle F B N, & contenant angles egaux, ſçauoir de triangles equilateres; [d] les baſes, F N, F M ſeront egales, & ainſi des autres. Mais d'autant que F G, F H, F I, F K, F L, demy-diametres des cercles egaux, circonſcriuans les triangles equilateres, ſont egales, & contiennent angles egaux, comme il eſt demonſtré, [e] G H, H I, I K, K L, L G, ſeront egales. [f] Et puis que tant A M Q, Q M N, M N B, que B N M, N M O, O N C, ſont egaux à deux droicts. [g] Mais A M Q, N M B, ſont egaux à B N M, O N C, les reſtans Q M N, M N O ſeront egaux. Par meſme raiſon les autres angles N O P,

d 4. 1.

e 4. 1.

f 13. 1.

g 4. 1. & 13. 1.

NOP, OPQ, PQM, seront egaux entr'eux & à ceux-cy : parquoy le pentagone MNOPQ, sera equilatere & equiangle, au plan du pentagone ABCDE. Finalement FM, FN, FO, FP, FQ egales estans couppées proportionellement à G, H, I, K, L, d'autant aussi que FG, FH, FI, FK, FL, sont egales menées du centre [h] GH, HI, IK, KL, LG, seront paralleles à MN, NO, OP, PQ, QM, [i] & partant les angles LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, egaux aux egaux QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, donc aussi egaux entr'eux.[k] Et les plans menez par GH, HI, & HI, IK, estant paralleles au plan du pentagone MNOPQ, mené par MN, NO, OP, & se rencontrans à HI, seront [a] vn seul plan. Semblablement on monstrera que les plans par IK, KL, & KL, LG, & LG, GE, feront vn mesme plan auec le plan mené par GH, HI, IK; Parquoy GHIKL, est pentagone equilatere & equiangle, ayant les angles & les costez egaux. Que si en la mesme maniere, aux autres onze pyramides de l'Icosaedre, on conioinct des lignes droictes aux centres des triangles, on descrira semblablement des triangles equilateres & equiangles : lesquels ayans les costez communs seront egaux entr'eux. Parquoy douze tels pentagones constitueront vn dodecaedre, lequel [l] sera inscrit en l'Icosaedre, les vingt angles du dodecaedre estans constituez aux centres des vingt bases de l'Icosaedre. Donc en l'Icosaedre donné nous auons inscrit vn Dodecaedre. Ce qu'il falloit faire.

h 2. 6.

i 10. 11.

k 15. 11.

a Lemm. 16. 13.

l 31. d.

Fin du quinzieſme & dernier Liure des Elements d'Euclide.