Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

Collegij Romani Societ. Iesu Cat. Instruct. - B N

EVCLIDIS

MEGARENSIS MATHEMATICI CLARISSIMI ELEMENTA GEOMETRICA, LIBRIS XV. AD GERMANAM GEOMETRIAE INTELligentiam è diuersis lapsibus temporis iniuria contractis restituta, adimpletis præter maiorum spem, quæ hactenus deerant, solidorum regularium conferentiis ac inscriptionibus,

His accessit decimus sextus liber, de solidorum regularium sibi inuicem inscriptorum collationibus, tum etiam cœptum opusculum de Compositis regularibus solidis planè peragendum.

AVTHORE

Francisco Flussate Candalla.

AD

Carolum IX. Christianissimum Galliarum Regem.

PARISIIS,

Apud Iohannem Royerium typographum Regium.

Ex iussu & priuilegio Regis.

1566.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Christianissimo Galliarum Regi, Carolo IX.

FRANCISCVS FLVSSAS CANDALLA ROBVR, IMPERIVM, ET PROSPERITATEM.

LIBERAS artes liberos decere viros, commune rationis efflagitat elogium Generosissime Rex, Nihil inclyto principe liberius, cuius numine natura prius astricti, liberi fiunt homines. Quod rarius prudentiæ ac integritatis specimen, quàm veri studia quæque libertate præcellentis consequendi cupiditas? veritas nimirum eatenus libera discitur, quòd ab antiquissimis absolutissima virtus, summúmque bonum comperta sit: quod nec à materia turbatur, neque corpore obruitur, nudum, conspicuum, immutabile, augustum, ac alterationis expers. Ea de causa circa materies siue ea quæ sensu deprehendi possunt, corruptioni alterationíque obnoxia, omníque constantia priuata, minimè inuestigandam veritatem esse suademus: sed circa incorporea solius mentis obiecta, nulli calumniæ vel astutiæ subdita: veritas nanque contra hominum ingenia, calliditatem, & solertiam, se per seipsam tuetur, stabili compta libertate. Hęc admodum artes disciplináque fouet liberas, indita eis religione, qua generalibus institutis nihil limitandum, reprimendum, immutandúmue cedat. Est enim radius primæ ac veræ solius essentiæ, cuius instar hęc ab humili & tenui primordio, præcipuos mentis ornatus seu humanæ conditionis fulgores, in tam immensas disciplinarum euexit copias. Quid mirabilius & prestantius quàm quod exili puncti rudimento, tam ardua & humanis quibúsque ingeniorum viribus abstrusa, exeramus Geometrię arcana? Quid tanto sublimius incremento, quàm à signo omnis quantitatis experte tam immensa numerosáque manare quantitatum theoremata, vnico veritatis splendore nixa? Quid ars? quid disciplina? quàm veritatis fidus assecla? Non cuiuis etenim peritię congruit generalia præscripta vndique veritatem adipisci, nullis verò cogi restrictionibus: sed iis solis, quas ideo disciplinas, quòd discentes vniuersali prescripta lege nulla prorsus incidente reuocandi dogmatis labe doceant, propriè antiqui Philosophiæ cultores nuncuparunt, tum etiam quod profitentium mentes regulari matheśium cultui frequenter adnixas, infrequentiorem sui commensurandi habitum ac intelligentiam, suapte natura prouehant. Nimirum eorum qui disciplinas perinde scrutantur, vt earum virtutibus & dogmatum dignitate fruituri. Non autem qui primordiis vtcunque perceptis, in plebeios ita sęuiunt, vt sola prefulgendi causa illas perlustrasse satis supérque propalent. Quorum itaque animi cupido eo splendore fuit ornata, quo genuinos disciplinarum affla-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

tus (quos Plato à natura humanę menti collatos opinatur) reminiſci, ſeu intelligentię ſępius conferre ſtuduerint: hi Matheſiũ ſimplicitatem à quouis fuco vacuam, non ſolum candoris animi teſtem, verum & eius intelligentię eſſe auctricem, qua Philoſophię legibus quęque regenda ſubeunt, ſuo commodo captant, Platonis decretum ſequuturi: qui philoſophis erudiendis ſuo lumini pręſcripſerat, nullum ſine Geometria ingreſſurum, his vocibus vetans, generoſa philoſophię documenta à quoquam geometriæ experte ſcrutanda eſſe: pręcipuos mentis apices philoſophię adipiſcendę, à Geometriæ primordiis oriundos annuens: non ab his quę agris tantùm metiendis, lineis planiſue ducendis, aut equidem ędificiis conſtruendis, cęteriſque ſenſuum pręſtigiis duntaxat nituntur: verum ab hac naturę pręſtantia (quę ab exilibus admodum geometrię initiis, in tam immenſum mentis ornatum prodiit) quod ſępius conſideratis terminorum rationibus, ſępius item rationum proportionali illa ſocietate (à qua mirę emergunt quantitatum conferentię, ſingulari certitudine docendi huic diſciplinę admodum peculiari) ordine diſcendorum pręter humanas vires longè diſpenſato, mens humana inde habitũ conſequuta ſit, à frequentioribus inſtitutis adeptũ. Qui quidẽ habitus, veritate, ratione, ſymmetria, ordine, reliquiſque geometrię ſubtiliſſimis viribus mentẽ illuſtrans, eã philoſophię capeſſendę, cõdẽdæ legi quibuſlibet nodis ſoluendis frugiferę, cuiuis diſcibili aſſequẽdo præmunit. Quòd ſi huius habitus ad ſenſuum exequia traducendi ſint fœtus (ſenſus nanque homini veluti nuntios ac ſatellites conceſſit natura, ſeruili operæ obnoxios, tum proprio muneri incumbentes) hæc Imperio adminiſtrando, populis regendis, bellis indicendis, prælijs committendis, machinis conſtruendis, aggeribus ducendis, ac ſenſim geometrico reliquo ornatu infectos ſenſus innouat. Vitia demum (quæ ab antiquiſſimis irrationales materię vltores dicta ſunt) omni otio deſtituta, propria vi retundit, ac mirum in modum mentem humanam laxamentis obnoxiam & ſordeſcentem excitat, geometricarúmque virtutum ſtudio in mentem politica ac philoſophica prudentia decoratam, paſſim deuehit & excitat. Haud ſecus quàm verę & piæ religionis ſuſcepta fides ſtabilis, animam ſuaptè natura iræ ſeu exitio deuinctam, in æternum ſalutis æuum diuina clementia latam regenerat. Quæ ſingula ſui generis nouum hominem edere dicuntur. Nec eſt quod diſciplinarum ac philoſophiæ principia à religionis conſortio explodamus. Solebant nanque veteres Ægyptij à philoſophorum cœtu, ſacerdotes ad religionem elicere, à ſacerdotum verò ſocietate, Regem, Perſæ autem ne vllum quenquam in Regem admitti patiebantur, qui non ante diſciplinam ſcientiámque magorum percepiſſet. Nec omittendum quàm profuerit propagandæ catholicæ fidei tantis patribus, pręclara diſciplinarum ac philoſophiæ prudentia. Summus nanque artifex tam egregios animi ornatus, ſuo obſequio futiles éſſe non pertulit. Non parum igitur diſciplinarum ac philoſophię documenta conferre obſequij (Chriſtianiſſime Rex) ſenties, in diſponenda mentis ſagacitate, ad ea quę regię ſublimitati congruunt, religioníque capeſſendæ primordia. Ea nanque his quæ ſenſibus obaudiunt, longè præſtantiora docentur. Nam vt à maioribns traditum eſt, quęcunque

ſenſus

ſenſus mouent,idola ſunt, & vanę quędam adumbrationes. Quę verò ſenſuum organa ſubterfugiunt, ad pulchrum bonúmque pertinent, cuius beneficentia iuſtitię piis adiunctę ſunt, mentem cui tota patet hominis natura decorantes. Vt igitur generoſę menti (Inclyte Princeps) libero veritatis ſtudio nitenti, artes ac diſciplinas certo & vero quibuſuis aliis prędantes, omníque pigmento vacuas, adhibeam, Matheſes haud equidem diſcendas quinimò(ex Platonis ſententia)reminiſcendas contemplare quęſo: oriuntur enim earum tyrocinia, ab intimis humanæ intelligentię anfractibus, qua à primo mentis habitu condito deliteſcunt. Matheſium igitur præſtantiſſima geometrię elementa ab Euclide per maiorum manus recepta,interdum tempore propulſante manca ſiue fœdata, pro viribus fideliore cura reſtituta, & pręter anteceſſorum ſpem integrata, ſolidorum cœpta peracta, principia quibus totius diſciplinę ſtatus nititur,in veram theorematum intelligentiam redacta, tuę maieſtati defero,munus inquã exiguũ, tua tamen generoſitas id perẽnis honoris mihi indulgeat, gratũ habẽs: videbor nãque mihi non modicis viribus operã adoleſcere,ac plus geometrica incunabula auribus mortalium infudiſſe, ſi tãtùm abs tua ſublimitate decus attingam, ſuſcepti laboris. Candor etenim tuæ virtutis, nec minus expectata à teneris annis indoles,nedum ſtudioſos dicam,ſed etiam hos quorum debiles conatus retundit geometricę ſubtilitatis acumen, in huius diſciplinę amorem ſuſcepto munere ciebit. In hoc autem operis tuę celſitudini conſecrandi votum me rapuit (candide Princeps) non imperitæ argutię,non balbutientia ſcripta,non harum inuentionum obtuſi conatus,tanti principis dignitate alieni. Sed tuę ſublimitatis imperium ter geminis vocibus obteſtãs (dum Aquitaniam tranſcurreret qua tantùm tui viſendi mihi beneficium contigit)hos nimirum labores vtcúque perluſtratos exponi,tuęq; celſitudini dicari ſeu conſecrari. Obedientiam autem ſacrificio prędantiorem, obſequiúmque votis edoctus, vtq; muneris indicti tantum ne recuſem decus. Quinetiam his prętermiſsis quę præpollent,immenſus in te virtutum cumulus, necnon tua in me ineffabili beneficentia, vultus beneuolus, longè vltra bene merita erga te obſequia gratus apparens. Quo non ſolum Scythas aut barbaros, ſed etiam quantúmuis feras gentes tuo numini ſubigeres. Hoc munus tuę amplitudini in obſequij monimentum & pignus amoris offero, & veluti cenſum quo tuo candori me deinctum profitear, rependo. Quod licet tanta maieſtate ſit indecens, tua clementia ſuſceptum, dignitatis in ſe vires concepturum non dubito. Tuíque culminis vmbram in hæc reſtituta perluſtranda, diſciplinarum cultores pellicere quoſque. Quòd faxit Deus optimus maximus, tuæ maieſtati perpetuam felicitatem prędolanti, vitam, imperium, ac vires ſua ineffabili clementia cumulans. E Cadilliaco ad decimumnonum Calen. Septembreis, Anno reparatæ ſalutis 1565.

CAROLO NONO GALLORVM REGI INVICTISSIMO SEMPERQVE AVGVSTO, GVLIELMI Caluimontani in ſupremo Pariſien. Senatu patroni, Carmen.

EVCLIDES nouus hic, quàm ſit mutatus ab illo,
Vulgus quem nuper credidit eſſe, viden?
Crimen erat magnum te (crede) mathemata, Princeps,
Cernere, tam longa ſemiſepulta die.
Franciſcus Fluſſas cladem miſeratus acerbam,
Ocyus è tenebris hæc reduiua trahit.
Ecce tuo iuſſu (vt par eſt) obtemperat: atque
In mundum redigit: mandat & illa typis.
Pellere barbariem regno, reuocare Matheſes:
Gloria deuicti non minor hoſtis erit.
Denique quòd ſit adhuc viuus tua maxima laus eſt,
Euclides ſtygiis huc reuocatus aquis.
Nanque tibi acceptum referent hoc CARLE nepotes:
Autoris tua vel gloria maior erit.

AD AMPLISSIMVM ILLVSTRISSIMVMQUE principem D. Franciſcum Fluſſatem Candallam, Steph. Manialdus Cleracius.

FRANCISCE, antiquo veniens de ſanguine Regum,
Qui ſuperas, morum nobilitate genus.
Dum repeto titulos & auita tropæa tuorum,
Dum recolo veſtræ regia ſceptra domus,
Dum quoque ſuſpicio diuinæ mentis honores,
Et cultum variis artibus ingenium,
Neſcio, nobilitas an maior ſplendeat in te,
Maius an ingenium: miror vtrumque tamen.
Hoc magis admiror, tetra ambitione remota,
Publica priuatis quod bona prætuleris.
Intentis ſtudiis veterum monumenta renaſci
Efficis, exempta ſed prius illuuie.
Iam per te Euclidis lucent στοιχεῖα, vigéntque
Clarum déque tuo lumine, lumen habent.
Regale eſt factum, regalia ſcripta nitori
Reddere, verum hoc eſt nobilitatis opus.
Has artes quondam Reges tractare ſolebant,
Has quoque principibus diſcere cura fuit.
Artibus his Reges magna incrementa dedêre,
Proh pudor, has artes nunc didiciſſe pudet.

Tu FRANCISCE, tuis faueant si numina cœptis,
Restitues studia hæc, quæ iacuêre diu.
Et proceres nostros simili inflammabis amore,
Quàm te fœlici Gallia sorte tulit!
Iam numeros abaco, sectóque in puluere metas
Te duce, describit Gallica nobilitas.
Aspice, perpetuæ surgunt præconia famæ,
Ingenio partum est iam sine morte decus.

Ad eundem.

Te domus imperio & sceptris Candallea sacra,
Nobilium primis inserit ordinibus.
Te decus ingenij, mentísque industria solers,
Doctorum primis inserit ordinibus.
Quid mirum, princeps literis, atauísque colende,
Si doctum & verè nobile promis opus?

Φραγκίσκῳ τῷ Φλεξίῳ Καιδαλέᾳ
Ἀνδρόφον.

Εὐγενέων φάος ὦν, Εὐκλείδου κοσμέεις ἔργα
Φοίξιος, εὐγλώττου ὡς φίλος ὀρφανίης.

Τῷ αὐτῷ.

Εὐκλείδῃ ζωὴν καὶ φῶς πόλις ἁπάσεις,
Εὐκλείδης δώσει σοι κλέος ἀθάνατον.

I. BODINI AD FRANCISCVM Flussatem Candallam.

Si gentile decus, si regum splendor auorum,
Priscáque nobilitant venerandæ stemmata gentis,
Nobilitate tua vix vlla est clarior vsquam.
At minima est laudum de multis ista tuarum:
Nam tua te virtus, & veræ laudis auara
Mens, atque eximius, doctissime Candala, candor,
Et quos afflauit sapiens tibi Pallas honores,
Illustrant multò melius quàm vestra propago.
Quàm proaui claro Creti de sanguine Reges,
Aurea quàm tectis laquearia iuncta superbis.

IN EVCLIDEM FRANCISCI FLVSSATIS Candallæ viri nobiliss. Io. Auratus.

Æternas mortalis adhuc si quis volet arces
Scandere, & æthereos dinumerare globos.
Spernere si quis humum fugiente per aëra penna,
Metirique modis sydera quæque suis,

Si quis ad astra volet raptus, cœlestibus aures
Contemplatrices inseruisse choris.
Euclideorum legat hæc elementa librorum,
Nam tres ad reliquas ars facit una gradum.
Ille sed implicitis vt certius in labyrinthis
Possit inoffensas ire, redire vias.
Franciscus Candalla dabit, sinuosa viarum
Interpres cuius reddit aperta labor.
Nobilitas aliis latas sit quærere terras,
Et fundos fundis continuare nouis.
Tu cœlum stellásque petens, tantò facis illis
Nobilius, quantò nobiliora petis.

AD FRANCISCVM CANDALLAM EX ILLustrissima Flussatum familia oriundum, de Euclide eius opera restituto, & libro de Stereometria locupletato, Carmen.

Si quid nobilitas & forti in pectore virtus,
Candale, sinceræ laudis habere potest,
Hæc propria est, qua tu memoraris origine, gentis
Isq; tibi à patrum stemmate manat honos.
Annam quis nescit quæ rexit Pannonis arua,
Francisci esse amitam, Cæsaris esse auiam?
Quis consobrinas patris, de sanguine Fuxi
Tres alias nescit prosiluisse deas?
Hinc qui nunc annis & sceptri exurgit honore
Carolus & magni Principis omen habet:
Est Annæ pronepos, dotali hæc iure Britannos
Imperio adiunxit rex Ludouice tuo.
Proxima Regina Arragonum quæ Regia neptis
Et magni fertur Gastonis esse soror.
Gastonis illius qui dum victricia signa
Hispano atque Italo victor ab hoste refert,
Rauenna est testis, quàm forte & nobile letum
Oppetiit, patriæ victus amore suæ.
Tertia Nauarræ est, quæ Fuxæ insignia gentis
Perpetua natis lege tenere dedit.
Sic nemo illustris regni mollitur habenas,
Quin tibi cognato sanguine iunctus erit.
Sunt equidem præclara isthæc, & Principe digna,
Qualia quæ passim dicere magna solent.
Nec tamen hæc quanuis sint in te Regia, apud te
Pondera præcipuæ nobilitatis habent.
Sed quæ nunc tali tantum se iactat alumno
Virtutis, semper laus tibi prima fuit.

Te muſæ decorant: itidem decus addere muſis
Ingenij certant tot monimenta tui.
En quondam Euclides terrámque & ſydera menſus,
Quà vel ſumma petunt, quà vel ad ima cadunt.
Temporis attritus carie, & caligine merſus,
Difficili rerum cognitione fuit.
Sed nunc quàm facilis, quàm clarus & integer exit
Te duce, & irradiat vindicis ora ſui.
Quin & dum ſolidi menſuram corporis addis,
Crede tibi ſolidum te peperiſſe decus.
Nam perit argentum, perit auri copia diues,
Et quicquid rerum maximus orbis habet.
Nobilitas vera eſt virtus, virtute paratur
Gloria, quæ nullo eſt interitura die.

Eiuſdem ad eundem.

Nobilis is vulgò eſt ad quem labentibus annis
De claro patrum ſtemmate manat honos.
At cui virtutis laus pulchro è pectore ſurgit
A doctis dici nobilis ille ſolet.
Vtraque laus, Franciſce, tua eſt, tu nobilis ergo
Aut ſe iudicio fallit vterque ſuo.

P. Adamſonus Scotus.

DE FRANCISCI FLVSSATIS CANDALLÆ in Euclidem commentariis, Arnoldi Puiolij in academia Burdegalenſi I. V. D. Carmen.

Dum maria, & terras radio metitur, & aſtra
Euclides campis lætus in Elyſiis.
Quocum Chryſippus, quocum Plato, Pytagoráſque
Quocum Clazomenus ludit Anaxagoras.
Ludit & Ypſicles, Architas, Theónque, Conónque,
Archeſilas, Zeno, Pappus, Anaximenes.
Necnon qui paruo circundedit æthera vitro.
Fecit & humana ſydera mente regi.
Fecit & vt patriæ defenſor callidus vrbis,
Incuteret magnas hoſtibus arte minas:
Ecce ſciens terra & cælo quæcunque geruntur,
Et quæcunque mari nuntia fama venit:
Et volitans quot habet plumas, tot lumina pandit
Oráque, & Euclidi talia voce refert.

Ecquid opus fuerat mandare mathemata libris,
Compoſuit mira quos tuus arte labor?
Quid decuit tantùm noctu vigilare diúque,
Iacturámque olei ſuſtinuiſſe grauem?
Quando tui libri mendis interpretis horrent,
Vt nunc ſi videas diffiteare tuos.
Quæ cùm dixiſſet, gemuit Megareius heros,
Signáque triſtitiæ non dubitanda dedit.
Atque Iouem ſubitò ſupplex adit, & rogat, aura
Vt liceat paucis anteriore frui,
Donec librorum errorem purgauerit omnem,
Quò terſi poſſint, & ſine labe legi.
Excipit Altitonans: factis extendere famam
Haud dubiè vita concomitante licet.
Morte obita ſedenim rediuiuum exurgere in auras
Mortalem fati iura ſeuera negant.
Vnum poſſe ſinunt fieri, vt cum corpore vita
Exiit, in corpus ſit reditura nouum.
Sic Rudius vates animam ſuſcepit Homeri,
Sic animam Euforbus induit Athalidæ.
Quique prius piſces captabat arundine Pirrhus,
Pythagoræ in corpus tranſiit ille nouum.
Vnde dare vt poſſis mœſtis ſolatia rebus,
Ne ſis qui fueras, forma nouanda tibi eſt.
En ego Fluſſatum formabo ex ſemine corpus,
In quod Mercurio te decet ire duce.
Et te Franciſcum dicet quicunque videbit,
Tu tamen & tali nomine notus eris.
Hæc vbi dicta, Iouis iuſſu Cyllenius vmbram
Suſceptam Euclidis, ſumma per aſtra gerit:
Franciſcique illam Fluſſatis corpore claudit,
In tali lætam ſede manere diu.
Inde ſua Euclides quotquot conſcripſerat, omni
Erroris vitio liberat arte libros.
Et vitio terſos offert Franciſcus. eoſdem
Quiſque ſuo terſos à genitore putet.

QVA

Qua de cauſa, quóque numinis afflatu hæc reſtitutu ſint elementa, modeſto lectori Fr. Fluſſ. Candalla, Salutem.

HVMANÆ conditioni olim à ſummo maximo actionum & motuum auctore conſtructæ, quãto cætera creata egregiis præcellebat muneribus, tanto receptæ dignitati tuendæ toto pectore incũbendum erat, omniq; ſtudio cuncta huic aliena propulſandum, quo ritè ſuſceptis eius dignitatis ſubſidiis, expeditior fieret actionum & motuum conformis opificis numini operatio: excluderetur autem humani conſilij truculenta labes, qua ſingulæ eius vnitates, aſſidua mora admotis impensè vinculis à bonarum actionum cœptis reuocantur, & quæ ſenſibus tanquam corpora vel materies attrectantur, ſiue quæ intelligentiæ ratiocinanti ſummi opificis imagini, velut eius eſſentiæ communicant. Hanc ignorantiam, & religionis antiſtites & philoſophorum proceres, omnéſque diſciplinarum ac ſapientiæ cultores pari conſenſu denominarunt. Cuius eſſentia (ſi qua foret) inter ea quæ more eorum quę mala ſunt, priuationi demerſa iacet, ab omni habitu, à quo veræ eſſentiæ ſplendorem conſequuntur, prorſus eiecta, at virtutum tamen illud vnicum culmen intelligentiam funditus euertere, ab humano conſortio delere, ac innumeris artibus abigere molitur, quibus ab æterno priuatio habitum opprimere tentat. Eſt namque virtus, animi habitus naturæ moderationi conſentaneus, Cognitio autem, æternæ intelligentiæ radius, quæ ſua diſpenſat ſtudia inſtar ſeminis opportunè in terram diſpoſitã ſparſi, incrementum à proximis inchoat, tandem pullulante ac adoleſcente ſtipite, in gemmas turgeſcit, ac demum in froudes vicinia poſsidentes propagatur, quoad finem à conſtitutione ſibi inditum fœlix aſſequatur. Hanc ſuiipſius agnitionem, admodum veteres prudentiſsimi cõmendarunt, qua patefieret aditus, ſcrutandi rerum ſuſceptarum auctorem. Quiquidem optimus ille maximus, quémq; per ſuiipſius notionẽ quoad ſingulorum pertulerit capacitas, ſuæ cognitionis depulſa ignorantia conſortem efficiat, in his gradus ſiue differentias obſeruans, quibus quò quilibet ignorantię potiſſimam partem à ſe pepulerit, tanto ſe cognitioni ſeu intelligentię diuinæ demerſum comperiet. Nam vt à maioribus receptum eſt, ignorantia malorum origo, incuria & ignauia gignitur, negligentia verò alitur & increſcit, dilectaq; ſenſibus hominũ radicatur, inde tanquam ab antiquis & hæreditariis ſedibus moleſtè reuocatur, tum maximè cum lęſo cuidam cerebro prætenſa ſcientia, patentem ignorantiam inſinuat, falſis deinceps innumeris ſyllogiſmis ibidem tutandam. Veræ itaque cognitionis lumen adeũtes, per varios quoſque telorum incurſus, ignorantię caliginem propulſare, imploratis quæ defuerint viribus operę eſt precium. Qui ideo amorem clementiſſimi illius patris, munera ſummi maximi liberaliſſimiq; monarchæ, diſciplinam prudentiſsimi æternęq; intelligentiæ fontis, mihi cõciliare cupiebam, propellendam à me potiſsimùm curaui, virtuti ac ſtudio infenſam ignorantiam, vt quę ſi tamen non radicitus euulſa, ſaltem pro viribus concuſſa, quidquam (tenuè quãuis) donorum illius ineffabilis eſſentiæ contingerem, per quę meatus afforet æternę ac immenſæ bonorum plenitudinis conſiderãdæ. Nam propriæ imbecillitatis animaduerſio, pręcordia in cupidinem intelligendæ æternæ virtutis extollit, eadem cauſa qua contraria contrariis curari depoſcunt, cupiditas autem ſeu intelligendi ſtudium, propenſam animi voluntatem ac laborem vrget, labor poſtmodum etiam mediocris quędam attingit, improbus demũ, ab antiquis omnia ſubigere docetur. Hæc ſingula mente voluenti, ſubiit inter moras diſcernendum, ac diſcutiendum quibus ſtudiis à ſummo omnium moderatore ſuſceptam mentem ſuſcepturumq; quondã ingenij incremẽtum ſubiicerem, cui ſerio animi impetu incumbens, nullum nõ moui lapidem, tum ſcibilium, artium ſingularum, profeſſionum, diſciplinarumq; ſcopos, vtrumque coniectos mihi propoſui, è quibus quæ virtuti & veritati coniunctiſſima fore cernerem, diuinis auſpiciis delecta proſequerer, ſeſe ab improuiſo mihi offert Iuris illa prudentia, cuius effectu (mortaliũ contagiis vitiato) iura quandoq; iniurias mutuò ſibi mortales ingerunt, hanc pro foribus aſpectans argumentum ſeu materiam à nequitia ac humanorum ſcelerum contagione ducentem bipartitam reperi: in eam ſcilicet, cuius decreta à viris probatis conſtituta ſunt, qui à quouis tranquilli animi perturbatore liberi, remq; ſuam nõ agentes, illã cuius verè rationem animam eſſe fatemur iuriſprudentiam ædificarunt. Alteram autem comperimus, cuius ſanctiones à viris res ſuas agentibus editæ ſunt, & proinde his obnoxiis paſſionibus, quibus plurimum ſolent indui, qui proprii facti cenſores aut iudices ſeſe cõprobant (mortalium nãque vt plurimũ quiſ-

que ſibi proximus adeſt) Hanc non rarò extra boni veriq; conſortia degere, nempe cùm ad actum reuocandam potentiam, vtræque confunduntur, tum ius iniuriæ conglobantes, procliuius perturbatos ſuarum potentiarum effectus generant, æquumq; ſæpius perſonatum, quaſi iuſtum venerandum compellunt. Medicinam verò ſcrutans, huius originis potiſſimã cauſam, ab effrenatis cupidinibus humana corpora inſcitia alterantibus, ſcatere concepi, quare humanæ conditioni his admodum propẽſæ neceſſariam fateor. Hãc artem vocari cohibet, eam preſertim quæ corpus curat, doctiſsimus ille Plato, quoniam, inquit, nullam eorum quæ affert, qualia ſint natura habet rationem, eamq; coquinariam nuncupat, à gymnaſtica diſterminans: attamen illam non exigua obſeruantia, ſed ſua ductus neceſsitate ampliſsimo cultu dignã haberi reor. Rhetoricam autem non eſſe artem opinatus eſt Plato, quinimo peritiam quandam, cuius caput ac ſtudium eſt adulatio, & ideo quidam natura turpe exiſtimat: binorum nãq; rhetorum ad ſe inuicem cauſas agentium, alter vt plurimum rem turpem ſuadere aut vterq; conatur. Dialecticam diſſerendi facultatem eò quòd omnium ſciẽtiarum ſit vnica via ſummopere commendat, quæ cuiuſlibet oblati verum ſcutari docet, eam itaque cuiuis ſciẽtiæ neceſſerio conducere fatebimur. Grammaticam demum ſatis indicat eius vnica authoritas (vſus) ratione, methodo, ordine, omniq; verarum diſciplinarũ energia deſtitutus. Is nanque vſus docendorum turbida & concitata quouis ordine poſtpoſito venatur elemẽta. Præter has perplures mihi propoſui diſciplinas arte libera æquè & mechanica quærendas, innumeraſq; intelligibilium ſpecies.

Cùm itaque omnium ac ſingularum naturam datis viribus perquirerem, vt demũ illas mihi deligerem, quæ animi notitiam certo veróque illuſtrarent, illúdque audirem (de mathematicis) Ciceronis à Pythagora, à numeris ſcilicet & mathematicarum initiis proficiſci omnia, ac in ſummo apud illos honore geometriam fuiſſe, itaque nihil mathematicis illuſtrius eſſe, pluréſque philoſophorum ſententias, geometriam cæteraſq; matheſes ſummopere commendãtes, nonnihil diuinitatis his ineſſe diſciplinis arbitratus ſum, ac aliquod numen præ ſe ferre, eis ſolis communicandum, qui intelligendi veri, non qui cõtentionis aut ſpectatus cupidi fuerint, ac perinde diſcentium mentes præ cæteris eouſque in virtutis & veritatis rapere auiditatẽ, atque præ cæteris hæ diſciplinæ certitudini & veritati ſunt familiares. Quapropter non arbitratus ſum has quæ confuſo, inſtabili, incerto, aut turpi niterentur fundamẽto, erudiendæ mentis humanæ condignas, ſed eas præcipuè carpendas conieci, quæ virtuti & vero hærentes, animæ intelligentiam in priorem ſui ortus formam cultu perſeuerante excitant. Huiuſmodi potiſsimam haberi liquet, ſacrarum literarum lecturam, qua prior ac genuinus animæ candor, diuinæ clementiæ dono perennis reſtituitur, & obſtructus primi parentis lapſu perpetuæ felicitatis aditus, cuique mortali reſeratur. Hanc ſubſequuturas ratus ſum vero certóque illuſtratas matheſes ſiue diſciplinas, quarum intellectum natura tam mira arte geniturę animæ copulauit, vt quicquid in eis quantumuis abſtruſum obiicitur animæ diſcendum, id idem non diſcere ſed verius reminiſci doceat eſſe Plato: hæ nanque diſciplinæ ex principiis eidem animæ familiaribus nullo aliunde conducto famulatu, ſua quæque conſtruunt theoremata. Quæ demũ non per nouam alicuius documenti notitiam, ſed ex primordiorum iam notorum ſola reminiſcentia, mẽti ſeu animæ innoteſcunt. Principia nimirum ſi per ſe cuiuis ratiocinanti animæ innoteſcant, cùm menti offeruntur, non ab illa ideo diſci, ſed ſanius reminiſci dicemus, tanquam prius ſcita. Ab iis rurſus conſtructa theoremata priora, ac illorum progrediente obſequio progenita, ſola arguendi vi (cuique ratiocinanti animæ inſita) ex aſſumptis principiis fluunt. Ratiocinantis nanque animæ potiſsimus vſus eſt, ex præſcriptis antecedentibus veris, conſequentia deligere neceſſaria. Nõ aliud itaque à reminiſcẽtia diſciplinarum adeptionem eſſe fatebimur. Hæc inde animæ peculiaria inſtituta, omnis prorſus doli expertia, vero virtutéque ſedulo nixa, neglectis peritiis quæ humanorũ contagiorũ innumeris anfractibus ſunt pollutæ, propenſo animo amplectendas duxi, vt olim candor ille ingenuus animæ, continuis huius vitæ illecebris opacatus, diſcendi otio reuiuiſcat, ac demum fauſto diuinæ clementiæ munere, diſciplinarum ſtructori vnico, fiat vnus. Hæc interdum mihi ingenio voluenti, ac apprimè contractam diſcendi ſitim extinguere paranti, occurrunt procellæ, quibus amicorum potiſsimum impulſu, in principum aulas me vectũ cognominis neceſsitate reperi, quo loco tantũ abeſt quemq; philoſophari poſſe, vt aulicorum tam frequentes verſutiæ diſciplinarum exoſam ſimplicitatem conculcantes, potius captandi principis ingenui inſidias, quàm artium principia edoceant. Huic impedimẽto ſucceſsit illico negotiorum principis gerendorũ apparatus, cui iugis perpetuò nectitur ſedulitas, mentem ſycophantiis ſollicitans. Confluunt inſuper innumeri vafri, & ſolertes queruli ſua

li,ſua tela admouentes,quibus incautam audientis mentem ſuo commodo aucupent.Quandoque pij ſupplices,quorum ſuſcipienda ſunt patrocinia principi conferenda. Rurſus ſubeunt ęrarij, inuolucra proferentes, mille ſuppilandi technis obnoxia, necnon principis ſtipatus copia,ſtipis vt plurimum auida:demùm ſecretorũ ſcriptores innumeris negociis expediendis onuſti,ibidẽ ſubit cogẽda ſinagoga,rebus digerendis addicta:quę omnia tranquillam mentẽ ita diſcerpunt,ac variis telis impetunt,à diſciplinis non tantùm aliena,verumetiam in ipſas tanto tumultu pugnantia,vt ne qua menti ſuperſit quies,turbato concitatóque tranquilli animi motu.His tandem ſirtibus me liberum aut expeditum fore,per tot rerum diſcrimina ratus,in deteriorem incidi ſillam:quæ quidem neceſſaria duro litigio redimenda cogeret,illiſq; vtcunque reparandis,plus inſumptum eſt laboris,curę,temporis,ſumptus,labefactiq; ingenij,quàm poſſint longè adeptæ vtilitatis vires ſuppeditare.Quantũ autem diſciplinis aſſequendis deuotam mentem diſcrucient tam feruentiũ telorum inſtructæ copiæ,philoſophiam auentibus diſcernendum refero:cùm maximè peruerſo prorſus in me ab vrgentibus ordine,rerum moderatio diſciplinarum præceſſerit tempore notitiam:atqui diſciplinæ reipublicę moderandæ præbent aditum,non autem ad diſciplinas reſpub. Turbatus ea de cauſa hic ordo,planè labores occurrente Minerua impenſos,cruciatus effecit.Nam ab adoleſcentia maturiſsimos ætatis annos, principum reiq; publ.temperandis rebus nulla diſciplinarum ſuſcepta notitia diſsipaui,variis quidem obnoxius inſultibus.Sed qui mihi inſultus aut cruciatus fuerunt,à quãpluribus vt voluptates obuiis vlnis ſuſcipiuntur.Ab iis nimirum qui genitali horoſcopo in aulicarum illecebrarum cultus propulſi ſunt: illiq́ue poſt habita ratione obaudientes, ambitum, ſatellitia, primatus, diſsidia, ac huiuſce animi turbandi ſcatebras, virtutis vice venerantur. Alij nanque procliui genio iniuriis cientur impingendis, alij verò tollerandis ſuapte natura aſtringuntur,vnde fit vt diſciplinarum aſſequendarum innata vrgente genio cupiditas,tot variarum machinarum incurſibus repulſa,non parum morę ſeu impedimenti ſubtilioribus attingendis paſſa ſit,quæ ne annos,ne dies,ſed ne dicam ferè horulas,turbulentiores tanti temporis particulas,ſibi potuit aſciſſere:Tum præſertim quod quæque tantùm interruptiſsima his diſciplinis aſſequendis ſtudia mihi licuit adhibere,ea negato prorſus mortalium ſubuentu,turbata verò immortalium literarum cultura,vtcumque earum principia conſequi fuit operepretium, otij cùm rara ſiuit egeſtas.Inter hæc diſciplinarum cupidus,cumprimum Euclidis limina vix è foribus ſalutarẽ,vt quo more,quo diſcendi apparatu,quáue mentis imagine, in hac elementa me adigerem præſagiret animus,occurrit ingredienti hęc geomitricorum elementorũ ſeries, à Campano & Theone expoſita,tum ordine,tum & numero principiorum ſeu penuria,quandoque eorundem luxu à ſe mutuo diſcrepantia.Quæ palam faciunt duos aut plures Euclides fuiſſe,aut equidem vnius Euclidis tantam fluxiſſe (temporis iniuria)geometricorum elementorum iacturam,quæ à ſe legata principia ac theoremata ad nos vſque migrare non paſſa ſit, ea præſertim puritate quæ tantùm geometriæ culmen adeptum virũ decebat. Principia nanque inexpoſita extant,quandoque tranſpoſita,ſiue eorum aliquæ prætermiſſæ propriæ ſumptiones,rationum ac proportionum primarij ortus, arithmetices geometriæ conferendę cauſa,qua diſcreti numeri confuſa continua ſunt illuſtraturi:certarum & incertarum quantitatum particularis origo,& pleraque alia paſsim occurrentia, licet his tanquam ſtabili harum diſciplinarum fundamento totius ſcientiæ nitatur flatus, qui primordiorum ſoliditate deſtitutus fluctuans, certitudinis vulgari præſtantia priuatur. Quòd ſi quiſq; ſua ductus libidine principia non perſpecto totius operis contextu victurum ſe confidat, is ſæpiuſculè diſciplinæ methodum propugnans impinget in rudes ac obſtantes (inexpoſitis rectè principiis) ſcopulos, quippe diuerſas geometriæ partes, diuerſis principiis indigere conſtat, poſteriores ſemper prioribus demonſtrantes.Nihilo ſecius diſciplinas appetens,prioribus Arithmetices elementis vtcunque tum furtim,tum violentia raptas labentis temporis impendi particulas,quarum ſubſidio confuſas geometriæ quantitates diſcretione numerorum illuſtratas (quoad fas eſſet) conciperem (Continuis nanque edocendis idem confert diſcretio,quod agris arentibus letamen) ac demum Euclidi collatas temporis iniuria impoſturas in germanũ geometriæ ſenſum (ab eo vt veriſimile eſt prius editum) reſtituerem,mihiq́ue his artibus inſtituendo, terſa Euclidis elementa pararem, quibus optatarum diſciplinarum primordia capeſſerem . Quod pridem à me inſtitutum tot terroribus retuſum,toties intermiſſum,negotiis aliud vrgẽtibus, deinde repetitum,aliquando tandem & vtcunque abſolutum peregi,priuatis tantùm ædibus ac neceſſariis conferendum mihi proponens,cùm plus nactus eſſem otij.Sed longè aliud à cępto coniunctorum ſuppeditãt ſuffragia,qui ſedulè inſtant,cauſam agunt,ſyllogiſant,arguta ſe-

dulitate impetunt,innumeris artibus moliuntur,hóſque ſudores lucem ſubire ſibi depoſtulãt, quanuis imprudente culpa efferendos, vtilitati publicæ (vt aiunt) toto pectore ſibíque conſulentes. At ego contra ſi votis obtemperans, ſcriptum prius tantùm deſtinatum parietibus, in publicum mox proferam,prolixiori nec perluſtratum ſtudio,imminet præſens periculũ, quo cuique liceat ruſtici & inculti voluminis pro libidine cenſuram agere,ſiquidem (huic obuius) tam iugi cura dignam impendere velim operam,qua ſingulas huius cœpti repedã particulas. Impenſi laboris memor,præſciúſq; futuri,rem prorſus inexpectatam,& ſupra vires ſubeo negotium:en ſubeſt ſenecta,qua frequentior corporis valetudo mala,ſenſus ſubigit,luminũ concurrit imbecillitas,quæ huius ſudoris potiſsimum tempus præripuit,ex quo fit me tanto repedandi voluminis labore terreri. Quare ne quid in mẽ durum offendat amicorũ moleſtia,Chriſtianiſsimi Regis aſtrictus iuſſu, id vnum poſco modeſte lector,nempe huius artis ſcripta,prolixiori cultu viſenda fuiſſe,reliquis quiſque ſcibilibus perſuaſum habe,éſtque demonſtrationũ pertæſa vt plurimum argutia,cuius intelligẽtia non ſecus attentum quàm gnauum cultorem flagitat. Quocirca ſi quid ibi acquirat lectoris ſedulitas geometricam locupletans eruditionem hactenus non viſum,huius artium vnico ſtructori referat gratias, quòd ſi ibidem rude quidpiam aut inexcultum offenderit,hæc ſibi perpendat,duros mihi huius diſciplinæ progreſſus fuiſſe,debilem conatum obſequio deſtitutum. Tandem toties intermiſſam ac interdum repetitam operam,quotuis ſeiunctis horulis vtcunque terminatam,in lapſus aliquos propenſiorem fuiſſe. Humana nimirum conditio,non modo ad ardua, verumetiam ad familiaria quandoque impingit,quamobrem hęc illi vnico ſummo concredam,cuius beneficentia longè plura quàm ritè ſuſcepta mihi collata ſunt. Quæ vtinam atque iterum vtinam illius clementis nutui morem gerant:ſuorum ſeipſos metiendorum obſequio deſeruiant:otiúmque (cui propensè humana indulget imbecillitas) ab ingeniis (diſciplinarũ cultu excitatis) propulſent. Vale.

Præfatio.

Præfatio.

QVI disciplinarum veram intelligentiam cõsequi velint, sibi magnopere certum suadeant eas nulli humano sensui subiacere, sed solius mẽtis obiectum esse, cùm maximè sensus extra intelligentiam sint, ac quicquid sua opera nanciscuntur menti seu intelligentiæ discernendum offerant, vt mentis intelligentia consors, & vnica insuper artis capax, disciplinas à certis & inuiolabilibus principiis nullique sensuum defectui obnoxiis ortas esse concipiat. Nulla planè sensuum externorum obsequia scientias optare liquet. Quod si disciplinæ potẽtia ad actum reuocanda sit, & quis in sciẽtia fructus (mortalium vtilis obsequio) colligatur scrutari cupimus, tum eam in praxim resoluentes, duros illos ac admodum inflexibiles sensus ad artis præcepta consequenda (aut verius quamproximè fas sit imitanda) flectendos esse intelligamus, vt quas artis leges infractas ac integras susceperit animus, eas quamprope insequi (licet minus præcisè adimplere) valeant sensuum operæ: siquidem perfectio si qua est, intellectiua erit, heteroclitum verò sensuum exequium, neque enim solis sensibus huius defectus imponẽdæ sunt causæ. Sensus nanque (sensibilium ad intelligibilia veri nuncij) sine materia omnis operis sunt expertes, quæquidem materia perfectiones intelligentiæ minimè exequi in se patitur. Scientias igitur intellectui, praxim verò earũ sensibus ac materiæ conuenire, suapte natura cõcludemus.

Vt autem quis certarum sciẽtiarum (quæ veræ disciplinæ dici merentur) ingressus requiratur, paucis exponamus. Earũ ortum à principiis inchoari dicemus, quibus nihil prius tradi potest, à quo illa gignantur, quæ ideo tanquam disciplinarum primæ essentiæ existimari debent, quod eorum certitudo cuilibet ratiocinanti animæ sit tam familiaris & nota, vt solis vocibus illud principium resonantibus, nullo causæ præcedentis argumento illas probante requisito, sat cuique certa atque verissima sese offerant. Principiorum autem tres proferemus species, diffinitiones, petitiones, & communes sententias. Diffinitiones etenim cùm sint tantùm nominum liberè rebus impositorum expositiones, illæ nihil præ se ferunt causæ eas generantis, libertas nanque suarũ actionum causas præstare non cogitur. Attamen liberam denominationis impositionem, illico sequitur necessarius eiusdem denominationis vsus, ne cadat in paralogysmum disciplinæ methodus. Quæ itaque libera fuit impositio, necessariam postmodum suipsius obseruationẽ peperit. Petitiones verò (quas postulata dicimus) ex diffinitorum vsu partim sumptæ, verùm tam familiares vt nullus in eis appareat soluendus ratiocinanti animæ nodus, eò quòd præter vllas argumẽti præstigias, postulatorum veritates annuendæ per seipsas satis superque patent. Cõmunes verò dicemus sententias (quasi theoremata domestica) quæ causam proponunt, subsequentem effectum nulla intelligentiæ difficultate generantem, causam autem illam hypothesim esse quam sequitur sententiæ conclusio, dicimus. Has principiorum species subsequuntur theoremata ac problemata, sibiipsis ante, aut post posita, iuxta demonstrãdorum exquisitam seriem, quæ idcirco vtraque propositiones dicuntur, quod ad methodum consequendam, nobis proponantur, sub problematis aut theorematis specie. Theorema itaque exponemus, propositam esse orationem quæ ex hypothesi liberè sumpta necessariam conclusionem oriri profert. Necessariam quippe dicemus, si sumpta hyothesis causa sufficiens fuerit, effectũ generandi qui cõclusio dicitur, non autem necessariam pro vnica & sola sumentes. Vnica etenim sumpta hypothesi diuersas generari cõclusiones sæpius fas erit. At vbi in theoremate ex assumpta hypothesi aliqua sumitur conclusio, quę pro hypothesi sumpta, concludat eam quæ prius fuit hypothesis, hoc theorema sibi

conuersum necessariò producit aliud. Nam si quæ fuit cõclusio pro hypothesi sumatur, eam pro cõclusione quæ prius fuit hypothesis necesse pariet: sicq; posterior prioris conuersa dicetur, priórque posterioris. His equidem conuersis sæpius vtetur Euclides, si futuris demonstrandis vtrasque præmittendas censeat, sin minus alteram tantùm partem quæ suo cæpto fuerit vtilior, educet.

Problema autem, orationem propositam esse dicemus, cuius & causam & hypothesim occultauimus, solam conclusionem proponentes, relicta genitrice causa inquirenda, quæ propositum excitet effectum. Huiusmodi etenim propositiones conuersas non habent, cùm nulla in ipsis hypothesis præponatur, quæ in conclusionem conuerti possit, vt ostendimus in theoremate, sed vnica & simplex proponitur absque hypothesi conclusio, cuius intelligentia ab inquirenda causa eam generante dependet. Illas demùm propositiones, quas diximus quandoque theorematum, quandoque verò problematũ gerere effigiem, non ex se demonstratas asserimus, sed à notis principiis prius ortas quæ priores docentur, posteriores verò à principiis & prioribus similiter nasci patefient, quo ordine vera disciplinarum cõtexta methodus reperitur, eo scilicet quo priores causæ posteriores generant effectus, generale quidem in quauis disciplina certitudine innixa præceptum.

Quia verò Euclidis præcipuum cæptum fuit Geometriæ principia edocere, quæ cùm res continuas & ideo confusas discutiant, Arithmetices principiis, vt ad faciliorem intelligentiam perducantur, fulciri appetunt. Geometriam igitur nihil aliud esse sentiemus, quàm artem qua maioris, minoris, & æqualis patefit natura, eius verò Geometriæ vnicum esse obiectum quantitatem. Arithmeticam autem discernendi esse dicemus scientiam, quæ cum Geometria commune habet diuinum illud principium, quod vnitatem nominamus. Quælibet enim Geometriæ magnitudo vna dicitur, Arithmetici verò priorem tantùm vnam denunciant, eámque insecabilem ac omni diuisione siue discretione priuatam, quia tamen confusionem sæpius parit continuũ Geometriæ proprium, miscebit Euclides Geometricis principiis ea arithmeticorũ principiorum elementa, quæ suæ arti geometricę clarius edocendæ, facere satis apparebũt. Geometriæ etenim est vnicus scopus quantitas, quã (absque Arithmetices auxilio) tam confusam vrgente discretorum inopia discentibus offert, vt illis quid tantum maius, minus, vel æquale fuerit exponat, quanto quidem maius vel minus, Arithmetices relinquens subsidio. Volens igitur Euclides Geometriæ intelligendæ faciliores perquirere aditus, eiusdẽ principia per Arithmeticas distinctiones, vbi par erit, explanare non dedignabitur.

Quantitatem priori distinctione secuit Aristoteles in continuam & discretam, continuámque (verum Geometriæ subiectum) in lineam, superficiem, solidum, tempus, & motum propriè dictas quãtitates distinxit. Reliquas verò quæ maius, minus, aut æquale proferunt, per accidens quãtitates dici, non autem propriè voluit, insuper maius & minus, aut magnum & paruum, quantitatis nomine priuari. Sunt enim potius quãtitatum respectus, quàm quãtitates, nec in quantitatis prædicamẽto ea recipi, sed in relationis vel ad aliquid prædicamento satius coaptari. Maius etenim minoris relatiuum est, & contra minus maioris. Tandem quãtitatis proprium concludit æqualitatem, vel inæqualitatem esse, quod sonat veram quantitatum differentiam, quemadmodum & qualitatum, simile & dissimile differentiam proferunt. Continuam igitur dixit eam quantitatem, cuius partes copulãtur aliquo communi termino, quo quidem in vnicam & indiscretam magnitudinem confusè coëunt. Discretam autem quantitatem dixit Aristoteles esse numerum & vocalem oratio-

nem

tionem: earum quidem partes nullo communi termino coniungi possunt, sed semper discretæ permanent, partes suum totum componentes, scilicet vnitates ac numeri minores, qui sunt partes maioris. Similiter & orationis prolatæ syllabæ siue dictiones totam orationem componentes, sibi inuicem distinctæ permanent, eò quòd nullum habeant cõmunem terminum, ad quem copulatæ in vnum coëant, sed vnitatum more separatæ: quare suarum magnitudinum certiorem ac distinctiorem pariunt intelligentiam. Has itaque magnitudines quantitatem habere dicemus Arithmeticam, ob earum à numeris sumptam discretionem.

Cùm igitur continuarum quantitatum conceptus subtiliora discutiat negotia, scilicet eas habitudines quæ tam Geometricis quàm Arithmeticis quantitatibus conueniunt (diximus enim Geometriã & Geometricarũ & Arithmeticarũ magnitudinũ comprehẽdere respectus, non tamen eam facilitatem qua per discretionem illæ exprimuntur habitudines) rudimẽta geometrica à subtilioribus inchoabimus principiis, eò quòd quauis alia disciplina subtilior sit Geometria, nãque lineæ plani ac solidi naturam docere volentes, à signo ordiemur, veluti temporis & motus ab instanti, ponderis autem à momẽto methodum aggrediemur. Cùm nec signum magnitudinis, nec instans temporis, neque momentum ponderis, quidpiam in se habeant, sed tantùm principia, termini, siue limites sunt, à quibus eorum nascitur intelligentia, quia verò discreta cognitioni ac intelligentiæ leuius captanda sese offerunt, nec in se aliquid habent confusum, discretorum principia, primùm ab vnitate ordiuntur, quæ ex se determinata & planè cognita, nempe discretorum numerorum generans naturam exhibetur, discretarum quantitatum minima.

Vt autẽ quæ de Euclide vero Geometriæ cultui reducenda ceperimus, paucis tradamus Euclidẽ imprimis geometricarũ traditionũ facilè principem professi, eius demonstrata ea certitudine fulcienda esse existimauimus, qua principia, quæque sic exponantur, vt singula suę naturæ dignitatẽ conseruẽt. Diffinitiones nempe quibus totius disciplinæ nititur status, in germanũ sensum interpretandæ hactenus extant. Necnon curandum vt cum diffinitis conuersæ progrediente disciplina, alteri diffinito non adhæreant. Postulata verò vltra prius cõcessa nihil expetant. Communes autem sentẽtiæ, adeo familiares habeantur, vt nulla argumenti optata specie earũ veritas propalãda sit. Propositiones demùm à principiis genitæ, hoc præscripto disponantur, vt subsequentes à prioribus, non autem à posterioribus demonstrandæ sint, ac earum demonstrationes solis disciplinæ legibus construendæ tanta religione decorentur, ne vllum in eis demonstrandis intercedat mecanici instrumenti iuuamen. Quippe Euclidis à Campano & Theone huc vsque nobis tradita quædam principia ac theoremata demonstrationibus ornata, mathematicæ religioni repugnare cernimus: quandoque expositionis penuria, quandoque verò eiusdem sinistra sumptione. Insuper (quod prepõderat) non rectè suscipiũtur Arithmetices obsequia, quibus ratiocinãti lectori Geometriæ confusas quantitates discernendas tradidit Euclides, numerorum prolatis quibusdam selectis rudimentis: per quæ non numerorum præsertim tradendas leges suscipit, sed quantitatum confusarum (continui causa) naturam, numerorum famulatu discernere conatur, vt postmodum per discretionem (quæ sola quãtitatis certitudinẽ mẽti potest inserere) certas ab incertis quantitatibus, & natura & traditione lõgè diuulsas, ac inuicem incomparabiles esse proponat, nulli nempe discretioni communicantes eidem, ac demum quæ de solidis dicta fuerint, imperfecta, nec adoptatum ab Euclide finẽ perducta fuisse, sed manca vel heteroclita, quæ discentibus ab ipso Euclide suscepta prædicarũt: tãti viri decus octo theorematum, decimoquinto libro perficiendo relictorum obliuione maculantes.

Ab his itaque diſsidiis turbata Geometriæ ab Euclide relicta principia, & extra veræ diſciplinæ ſeriem diſtracta cernẽtes, quódque harum diſciplinarum natura, tanta generis nobilitate, cæteras artes ſcibiliáque præcellat, vt inter eas certitudinis (quæ veritatis eſt indiuidua comes) meritò primatum ſibi vendicet, certitudinis huius (& proinde veri) amantiſsimi, conatus viriúmque operas Euclidi reſtituendo impendere voluimus, quibus ea quæ geometricæ mẽti obſiſtere viſa ſunt, in veram diſciplinæ geometricæ methodum reducamus, commendata ea facilitate qua legentibus Theonis ſcripta iuxta Zamberti (Græcorum exemplarium interpretis) verſionem (quam ſibi familiarem iam conſecuti ſunt) noſtræ linguæ voces formare nitamur, diſcentibus obaudire cupientes. Textus necnon demonſtrationes ipſius diſcendi ſonum ſequentes quamproximè licebit, proferemus, ne locutionum diuerſitas difficilem conceptu demonſtrationem difficiliorem referat. Diffinitiones inſuper ea expoſitione ſociauimus, quam verum Geometriæ cultum appetere ſumus arbitrati, illæ etenim præcipuum Geometriæ fulciunt culmen. Demonſtrandi autem argumenta, à Campano ac Theone relicta, vt plurimum inſequemur, quæ ſi quandoque à Geometrica ſinceritate receſſerint, in alia demonſtrata mutantes, huius diſciplinæ integritatem tuebimur. Reliqua verò (reiectis ſuperfluis) in quam breue fas erit cõpendium cogentes, ne traditionis prolixitas difficili confuſionem implicet, ſeruato attamen hoc ordine, quo cuilibet variato theorematis occaſionem (ſi quæ fuerit) monito ad finem collato exponamus, quo & alterationis cauſam, & veritatis effectus, patefacere conabimur, maximè vbi vrgens variandi negotium incubuerit, quia verò in demonſtrandis theorematis occurrunt particulæ, quandoque non prius expoſitis primordiis demonſtrandæ, corollaria ſæpiuſcule contulimus, aut equidem propoſitiones, quibus modico vel potius nullo tedio, integra ſequentis theorematis concludetur demonſtratio. Cùm autem ad præcipua Geometriæ rudimẽta ventum erit, rationes ſcilicet & proportiones, his exponẽdis prolixiores eſſe cogemur, præcipuè circa diffinitiones, ſubtiliorum huius diſciplinæ partium fundamenta tolerantes. Exiſtimauimus etenim fædata exemplaria Euclidis fuiſſe, tum quidem temporis truculẽtia, tum & hominum incuria, vt teſtatur Zambertus ſua in Euclidem perſpectiuè liminari, ſe tineis & carie lacerata comperiſſe Euclidis exemplaria, tanta quidem egeſtate, vt quæ iuxta veram huius diſciplinæ mentem, ſuorum principiorum ordine ſuffultam reſtituenda eſſent, ea interpretes ſub cõmunem aliarum profeſſionum praxim dirigenda eſſe rati, diffinitiones & proinde theorematum ſententias in exteros ſenſus diſtrahẽtes, ſilentio non tantùm permulta vtilia, ſed & neceſſaria prætermiſere, quidam verò eorum intelligentiam ferè pertingentes, expoſitiones truncas, ac veluti hæſitantes protulêre. Hæc obſeruãtes, nec minus veræ diſciplinarum intelligentiæ auidi, quàm dignitatis tanti viri cultores, quid in horum principiorum vero conceptu abſtruſum eſſet inquirẽtes, quo illorum veritas à quouis calumniæ incurſu tutanda eſſet. Reperimus Euclide diſcreta Arithmetices exequia in auxilium continuorum exponendorum implorante, aliquos eius interpretes, Arithmetices cum Geometrię rudimentis principia confudiſſe, ac vtraque eadẽ interpretatione elucidanda forè exiſtimaſſe, diſcreti à continuo latam illam non venerantes diſcrepantiam, tum & natura, & methodo ipſis ab æterno inſitam magnitudinis ſcilicet naturam pro actione quæ ipſi elucidandę confertur ſumentes, in id ferè deluſi ſunt, vt pro ſubſtantia accidens exponendum eſſe arbitrati ſint, nẽpe multiplicem magnitudinem pro ipſi collata multiplicatione recipiendam eſſe coniecerint, ac alia plura quæ latius poſthac Altiſsimi nutu oſtenſuri ſumus, ab impropria rudimentorum expoſitione genita.

Cæterùm

Cæterùm tres numerorum libri ſextum è regione ſequentes, æquè vt reliqui ab Euclide in rudimẽtorum Geometricorum gratiam elucidandorum, non in Arithmeticẽ docendam prolati ſunt: is nanque numeros ad arcanam continuarum & ideo confuſarum quantitatum intelligentiam exponendam ſua diſcretione ſumpſit, tum etiam vt illam exprimat inter quantitates naturæ diſtantiam, qua quantitates habitudinem certam ac perceptibilem inter ſe habentes, deſciſcunt ab iis quæ incertum, indeterminatum, ac penitus ob omni tuta intelligentia detruſum inter ſe habent reſpectum. Quibus explicandis ſi quos offenderimus terminos, veram quantitatis naturam relinquentes, non verebimur aptiores intelligendæ methodo conferre, quæ etenim ſuo proprio difficilia ſunt, per improprias voces expreſſa, facilè omni tuta intelligentia priuari poſſe credemus. Si quid igitur extra communem vſum huic adaptemus negotio, illud facilioris intelligentiæ captandæ gratia propoſitum eſſe exiſtimemus, non enim quæ eloquentiam, ſed quæ Geometriam aſpectant, diſcutienda ſuſcepimus. Cùm autem ad ſolida properabimus trium dimenſionum ſolido cuique propriarum, quaſdam certis quantitatibus, incertis alias exprimi reperiemus, certas enim elucidabunt numeri, incertas verò à certis remotas oſtendent iidem, vt fuſius decimo libro dicetur. Horum autem ſolidorum libros quinque poſt decimum deſcripſit Euclides, quorum binos priores de ſolidis in genere nuncupari voluit. Tres verò poſteriores de corporibus (vt Græco exemplari habetur) horum licet eadem ſit ferè ſubſtantia, binorum priorum attamen generalia in omnia ſolida voluit perſcribi documenta. Poſterioribus verò tribus ſolidorum regularium texturam edoceri voluit, quæ quidem regularia ſolida finito numero concluſa (ſcilicet ſenario) arctiores & à reliquis ſeparatas leges, eorum corporum conſtructiones ſeu affinitates dicibiles amplectẽtes, his tribus poſtremis coëgit libris, qui itaque de corporibus loqui dicti ſunt. Sed quia trium horum priorem tantùm tranſtulit Theon, Ypſicles verò reliquos, Campanus autem in omnes ſcripſit, veremur has diuerſitates aliquid corruptionis generaſſe. Nam decimiquarti 18 theoremata ab Euclide profitetur ſuſcepiſſe Campanus, decimiquinti verò 13. At Ypſicles decimoquarto, quatuor, decimoquinto autẽ quinque tantùm ab eodem recepiſſe fatetur Euclide. Horum itaque aut certè Campani in decimũquartum luxus, in decimumquintum verò inopia, aut equidẽ Ypſiclis in vtroſque penuria vnde oriatur, relinquimus. Quare decimiquarti opus cõparatione ſolidorum decimotertio deſcriptorum niti cernentes, quæ huic Euclidem contuliſſe arbitramur, conferemus eidem, reliqua ſi quæ neceſſaria fuerint ſuis locis reponentes. Decimiquinti autem ab Euclide neceſſariam theorematum cæptam ſeriem, vno ſcilicet & viginti concluſam problemate aggredientes. Campanum comperimus duodecimo ſeu penultimo theoremate, viginti optatarum ab Euclide inſcriptionum, duodecim tantùm demonſtrari poſſe (quas ſcilicet is demonſtrare conatus eſt) dicentem, nonnulliſque debilibus admodum argumentis illud idem confirmare cupientem. Quaſi Euclidis cæptum vires prætergredi concluderet, qui nempe viginti ſolidorum regularium demõſtrandas ſuſcepiſſet inſcriptiones, duodecim tantùm adimpleſſe potuiſſet. Inauditum ſaltem nulla fide dignum illud arbitrati, ſed potius elapſos temporis ambitus id nobis iniuriæ cõtuliſſe, vt quæ integra deſcripſerat Euclides, diſſecta ſeu variè vitiata ad nos perducta fuiſſe ſuaſimus. Ne igitur tantùm huius viri depereat nomẽ, huic decimoquinto peragendo, tam ſerio incũbemus ſudore, quo (diuina opitulante clementia) numeris omnibus abſolutum illum reſtituamus, mentem doctiſſimi illius Euclidis quamproximè licebit è veſtigio ſequentes. Ac inſuper eidem decimumſextum de ſolidorum inſcriptorum, ad circunſcripta reſpectu ſeu affinitate dicentem ſociabimus. Prius inchoatam ſolido-

rum regularium intelligentiam proſequentes, qua decimotertio deſcripta ſolida ſequenti decimoquarto ad ſe collata ſunt: ſicq; decimoquinto deſcripta erunt, poſtremò decimoſexto cõferenda venient. Demùm quánam arte componantur hæc regularia ſolida, compoſitáque qualia producant corpora, demonſtratis argumentis docuimus, ſubiungentes leui quodam compendio, qua ratione ſingulis regularibus, ſinguláque illis regularia inſcribantur admonentes, quę fuſius ni fuiſſet temporis parcitas demonſtrationibus illuſtraſſemus, ſed hæc oculatus Lector nullo negotio conſequetur. Hæc autẽ hactenus diſcußimus, vt legenti facilitas elemẽtorum geometricorum adaugendorum pateat, ac in dies ditior ſiue locupletior euadat huius diſciplinæ methodus. Nam quæ circa regularium figurarum latera, baſes, aut ſolida conferri poßũt habitudines, numero ferè infinitæ naſcentur, eorum igitur noſtro decimoſexto aliqua propoſuiſſe ſufficiat. Tandem vt inter hæc perfecta ſolida fraternæ quidpiam noſcamus inſidere neceßitudinis, Opuſculum terminando ſolidorum labori contulimus illud quo pulcherrimè ſolida in mixta ſeu ab ipſis compoſita transferantur, ſiue quid & quale coniuncta componant, ſolidum oſtendamus. Tum etiam de ſolidorum regulariumn atura quædam ſubiunximus, ſubleuandis ingeniorum laboribus non parum vtilia. Reliqua ſtudioſis huius diſciplinæ militibus adimplenda relinquentes.

ΕΜΠΕΙΡΙΑ ΤΕΧΝΗΝ, ΑΠΕΙΡΙΑ ΤΥΧΗΝ ΕΥΡΕ.

Euclidis Megarensis Mathematici clarissimi ELEMENTA GEOMETRICA LIBRIS QVINDECIM AD GERMANAM GEOMETRIÆ INTELLIGENTIAM E DIVERSIS LAPSIBUS temporis iniuria contractis, restituta: adimpletis præter maiorum spem, quæ hactenus deerant solidorum regularium conferentiis ac inscriptionibus. Auctore Francisco Flussate Candalla.

DEMONSTRATIONVM EVCLIDIS *Liber primus.*

Diffinitio prima.

SIGNVM, est cuius pars nulla.

Quia geometriam agimus cuius vnicum obiectum est quantitas, Signum esse diffinimus, notam subintelligentes, cuius nulla est pars quantitatis, vt cum diffinito conuersa diffinitio, notam cuius nulla sit quantitatis pars, signum esse intelligat, quantitatem agēs: Nullam autem partem, sed tantùm animi conceptum: Cuiuslibet quantitatis partem optatam, vel locum limitantem, diuidentem, aut designantem. Quod equidem in temporis quantitate instans, veluti in pondere, momentum, idem esse dicemus, quæ nihil metiuntur sed tantùm limitant.

Diffinitio secunda.

Linea verò est, longitudo non lata.

Quoniam Geometria tres recipit dimensiones, longitudinem, latitudinem, scilicet & sublimitatem. Quæ verò quantitas vnam tantùm habet dimensionem, Ea longitudinem tantùm habet, Ea propter lineam primam quidem omnium dimensionem, longitudine sola, nulla verò latitudine aut altitudine dotat. Quare eius longitudo quantitas dicetur, eius verò latitudo aut sublimitas, signum tantùm recipit, hoc est determinandi, limitandi, aut designandi virtutem: Metiendi verò solas longitudines, nullas autem latitudines, vel sublimitates suscipit negotium.

Diffinitio tertia.

Lineæ autem limites sunt, signa.

Limites lineæ signa vocat, Eo quod limitare sit alicuius quantitatis progressum terminare, quia verò longitudo lineæ cum sit sola in linea dimensio, sumit sibi terminum limitem, siue designatorem signum, quod quidē æque vt illa vtitur reliquis dimensionibus, latitudine scilicet & altitudine, hoc est nulla. Terminatur itaque aut limitatur lineæ progressus signo.

Diffinitio quarta.

Recta linea est, quæ ex æquali sua interiacet signa.

Signa lineæ (ad eam vere rectam diffiniēdam) ex æquali interiacere dicit. Cum quæuis in oblata linea signa conceperit animus inter extremos lineæ limites. Hac serie interiaceant siue interponantur, vt ex æquali & nusquam subsultando siue declinando, ab extremorum mutuo recedant aspectu, Sed inter extrema lineæ signa adæquatè iaceant.

MONITVM.

Hanc diffiniuit Campanus rectam esse, quæ à pūcto ad punctum breuissime extēditur, quæ diffinitio veram rectitudinis substantiam non concipit. Rectitudo etenim lineæ in declinationis priuatione, sine in eo situ quem extremorum signorum lineæ aspectus indicat, consistit, non in breuitate. Nos ideo Theonem sequemur.

Diffinitio 5.

Superficies ęſt, quę longitudinem, & latitudinem tantum habet.

Diximus ſecunda diffinitione, primam & vnam tantùm haberi dimenſionem in linea: nunc verò ſuperficiei ſecundam (quæ binas præſefert dimenſiones) attribuemus, longitudinem quidē & latitudinem: quo etenim obſequio linea lōgitudines tantùm metitur, eodem ſuperficies, lōgitudines & latitudines menſurat: ſed cùm tertia careat dimenſione, ſcilicet ſublimitate, eius ſublimitatem exprimet ſigni ſublimitas, quæ nulla vtriuſque eſt. Quòd autem ad tertiam attinet dimenſionem, ſcilicet ſolidorum, prima vndecimi docebit quandoque diffinitio, prioribus his decem libris quæ tantùm ad binas priores dimenſiones ſpectant, interdum dicturi.

Diffinitio 6.

Superficiei extrema ſunt lineæ.

Qua ratione diximus lineæ progreſſum ſigno terminari ſiue limitari, ſic dicemus ſuperficiei progreſſum terminari vel limitari linea, eò quòd eandem habeat altitudinem cum ſuperficie, quæ nulla eſt. Terminamus igitur, limitamus aut concludimus ſuperficiem lineis: qui termini, extrema ſunt ipſius ſuperficiei.

Diffinitio 7.

Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquali ſuas interiacet lineas.

Huic diffinitioni maximè conducit quarta huius: earum etenim idem ferè eſt ſenſus, Qua nā q; arte ſingula rectæ lineæ ſigna inter extrema iacent nuſquam ſubſultātia vel declinantia: eadem omnes in plana ſuperficie ductæ lineæ interiacent ex æquali, hoc eſt, inter lineas ſuperficiem terminā tes, vt proxima diximus diffinitione, nuſquam à mutuo extremarum aſpectu ſubſultantes aut declinantes, ſiue in altitudinem extra mutuum extremarum aſpectum tendentes.

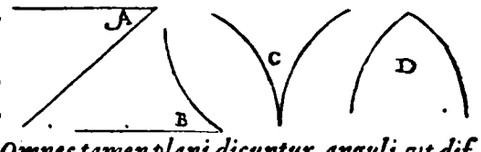
Diffinitio 8.

Planus angulus eſt, duarum linearum in plano ſeſe tangentium, & non in rectam iacentium, adinuicem facta inclinatio.

Quoniam his decem prioribus libris de lineis rectis & circularibus, quæquidem in ſuperficie plana deſcribuntur, dicturi ſumus. Intelligemus planum angulum, eſſe eum qui in ſuperficie plana ab his lineis ſe tangentibus, ac in ſe inclinantibus deſcribitur. Angulus etenim eſt linearum tangentium ſeſe inclinatio. Anguli verò magnitudo in ſola inclinatione conſiſtit, quæ vnicum menſorem habet circuli circa ſe ambitum, vt latius dicemus trigeſima tertia ſexti. Si autem duæ rectæ in rectam coëant ſeſe tangentes, ille contactus licet in plano ſit, nullum efficiet angulum, eò quòd nulla ſit inclinatio.

Diffinitio 9.

Quando autem continentes angulum rectę lineę fuerint, Rectilineus angulus nuncupatur.



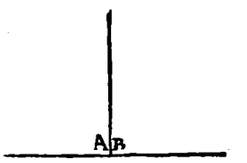
Rectilineum angulum A *rectis comprehenſum lineis vocat, vt reliquorum differētiam ab eo noſcamus. Nam* B *angulum mixtum dicere poſſumus à recta & curua comprehenſum:* C *verò curuilineum ſimiliter &* D*: ſed hunc quidem concauum, illum verò conuexum. Omnes tamen plani dicuntur anguli, vt differant à ſolido, quem vndecimo libro fauente Supero, diffiniemus: horum autem infinitæ ſunt diuerſæ delineationes.*

Diffinitio 10.

Cùm verò recta ſuper rectam conſiſtens lineam, vtrobiq; angulos ęquales adinuicem fecerit, rectus eſt vterque ęqualium angulorum, & quę ſuperſtat recta, perpendicularis vocatur, ſuperquam ſteterit.

Proſequens anguli naturam exponit æqualem inclinationem æquales efficere angulorum quantitates. Cùm enim dicit rectam ſuper rectam ſtantem, hoc ſitu quo æquos vtrobique formet angulos, eoſdem rectos vocitari. Id fatur, eò quòd eadem lineæ ſtantis ad propoſitam vtrobique fiat inclina-

inclinatio, quæquidem æqualis existens, æquales denominat angulos, hósque rectos. Quæ verò superstat recta perpendicularis eò dicitur, quòd Natura duce, quæ grauia deorsum dirigit, in planum ab humanis cultum æquali vndique facta inclinatione pendeat, ac ad omnes rectas lineas in eo plano eam tangentes, angulos æquales efficiat, vt latius describet vndecimus liber.



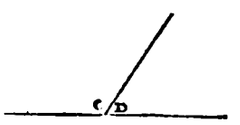
Diffinitio 11.

Obtusus angulus, maior est recto.

Diffinitio 12.

Acutus verò, minor est recto.

Iam ostendimus linearum inclinationem anguli efficere magnitudinem. Sed cùm inclinationem maiorem existimemus, maiorem linearum accessum siue à recta recessum: minorem verò, recessum earundem: ad rectam autem accedentium, dicemus maiorem inclinationem, minorem producere angulum: Et proinde minorem inclinationem, maiorem efficere angulum, vt his videmus exemplis rectas, angulos A *&* B *constituentes, eò quòd æquè adaperiantur siue ad se inclinent, æquos efficiunt* A *&* B *angulos. Et ideo (per decimam definitionem) rectos. Quia verò rectæ angulum* C *constituentes, plus adaperiuntur siue recedunt à seipsis, quàm recedant illæ quæ angulum* A *rectum constituunt, ab eis factus angulus* C, *maior recto dicetur: quia è conuerso angulum* D *constituentes, minus adaperiuntur, siue plus inclinant reliquis rectum componentibus, coactum* D *angulum idcirco minorem recto, acutum efficiunt, eò quòd* D *acutiori cuspide,* C *verò obtusiori formet.*



Diffinitio 13.

Terminus est, quod alicuius est extremum.

Quoniam cuiusuis quantitatis extrema eam concludunt suis terminis: dicemus terminos esse ea extrema quæ magnitudinem coarctant: quem quidem terminum aliqui finem vocarunt, eò quòd supposito in oblata magnitudine motu, ab intima parte ad extremas, vbi extremum aliquod eo motu attigimus, ibi huius motus finem reperimus. Sed aptior eius substantiæ denominatio per extremum nuncupatur, ne in finis & principij differentias incidamus.

Diffinitio 14.

Figura, est quę sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

Figuram iuxta præcedentem diffinitionem, dicimus esse eam, quæ sub aliquo extremo conclu ditur, aut equidem sub pluribus: sub vno tantùm extremo (hoc est vnica tantùm linea) concludimus circulum, coni sectionem: in solidis verò, sphæram: vnica superficie, spheroidem, & huiusmodi plana & solida: sub pluribus verò, superficies pluribus rectis siue curuis lineis comprehensas, solida pluribus planis contenta. Quorum omnium termini sunt, scilicet planorum, lineæ, solidorum verò superficies. Quia verò signa lineam limitantia, nihil quantitatis concludere possunt, lineæ ea limites, non terminos esse dicemus, cùm infinitæ nihil componere possint, nec igitur concludere.

Diffinitio 15.

Circulus, est figura plana, vnica linea contenta, quę circũferentia appellatur, ad quam ab vno signo introrsum existente, omnes prodeuntes, rectæ lineę adinuicem sunt ęquales.

Hac diffinitione circuli nec illum rotundum, nec quidem eius signum medium esse dicit. Concludit autem necessariò ex ea rectarum ab vno interiori signo ad ambitum æqualitate, & circunferentiam in rotundum, & signum in medium ferri: hunc autem ambitum, circunferentiam denominat, quæquidem ab vno signo orta, eousque figuram circumit, donec vnde orta est, redeat.

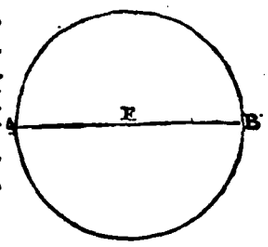
Diffinitio 16.

Centrum verò circuli, illud signum appellatur.

Diffinitio 17.

Diameter circuli est linea recta per centrum acta ex parte vtraque circun ferentia terminata quæ circulum bifariam diuidit.

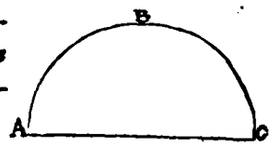
Sufficit rectam lineam per circuli centrum actam esse in vtrasque circunferentiæ partes, vt ea circulum bifariam secet. Nam ea regularitas qua omnes à centro rectæ sunt æquales. Ostendit à centro rectas ad vtrasque partes diametri æqualiter circunferentiam attingentes, & per quasuis areæ partes hinc & inde semper æquales, arearum æqualitatem necessariò producere. Vt à centro E *ad vtrasque partes diametri* A B *qualibet ducta æquantur, æquales areas metientes.*



Diffinitio 18.

Semicirculus, est comprehensa figura sub dimetiente & sumpta à circuli circunferentia.

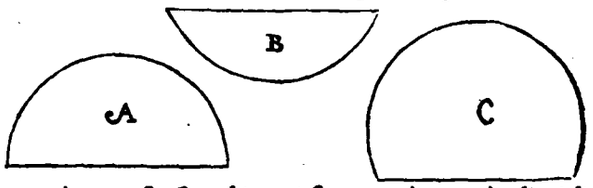
Cùm dixerimus figuram sub terminis contineri, eam quæ sub dimetiente & circuli circunferentia quam tollit dimetiens à toto circuli ambitu concipitur, semicirculum dicit, comprehensum quidem his duobus terminis, scilicet A C *diametro, &* A B C *circunferentia.*



Diffinitio 19.

Sectio circuli, est comprehensa figura sub recta linea & circunferentię parte.

Hanc diffinitionem repetit Euclides tertio libro, quinta diffinitione, cuiquidem plus conuenit quàm huic. Est enim ea figura, sectio circuli quæ inter rectam lineam & circumferentiæ circuli partem concluditur. Campanus & Theon ac aliqui iuniores, prætergræcum exemplar, dixerunt hanc intelligi maiorem aut minorem semicirculo, amplitudinem huius dictionis tollentes: quod alienum à vero sensu arbitrati sumus, cùm æquè dimidia totius, sectio vt tertia vel quarta dici possit, vt A, B *vel* C.



Diffinitio 20.

Rectilineæ planæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

In genere diffinit rectilineas quaslibet à rectis lineis comprehensas, vt particularius aliquas earum postmodum edoceat.

Diffinitio 21.

Trilaterę figuræ sunt, quæ sub tribus rectis lineis continentur.

Diffinitio 22.

Quadrilateræ figuræ sunt, quæ sub quatuor rectis lineis, cõprehẽdũtur.

Diffinitio 23.

Multilateræ verò figuræ sunt, quæ sub pluribus quàm quatuor rectis lineis, comprehenduntur.

Quæ his quatuor diffinitionibus in genere expositi de rectilineis figuris, distribuet in eas potissimum figuras, quarum vtilitas Geometriæ plus conducere videbitur: reliquas sub multilaterarum generali relinquens denominatione.

Diffinitio 24.

Trilaterarum porro figurarum ęquilaterum est triangulum sub tribus æquis lateribus contentum.

Diffinitio 25.

Isosceles autem est, quod duo tantum ęqualia habet latera.

Diffini-

Diffinitio 26.

Scalenum verò eſt, quod tria inęqualia habet latera.

Diffinitio 27.

Inſuper trilaterarum figurarum, rectangulum triangulum eſt, quod habet rectum angulum.

Cùm in triangulo quouis vnus tantùm angulus rectus eſſe poſsit, ſat videtur feciſſe ſi denominet rectangulum triangulum, eò quòd vnum rectum, cùm plures habere non poſsit, poſsideat.

Diffinitio 28.

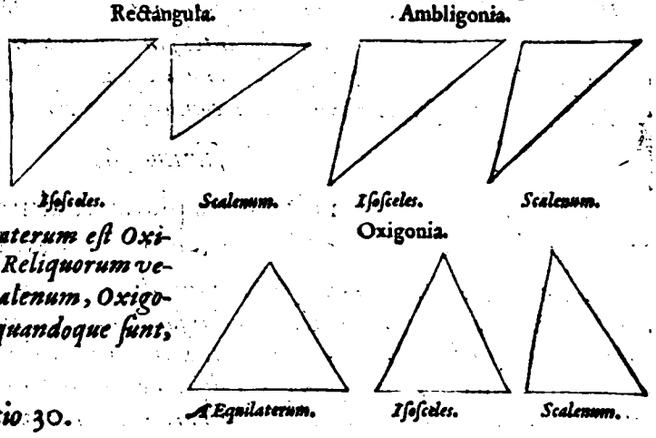
Ambligonium autem eſt, quod obtuſum habet angulum.

Fortius huic inerat argumentum. Si enim in quolibet triangulo, duo recti anguli eſſe non poſſint, difficilius duo obtuſi erunt: quippe qui maiores rectis exiſtunt. Ea de re ab vno tantùm obtuſo, Ambligonium denominabitur à voce græca depromptum.

Diffinitio 29.

Oxigonium verò eſt, quod tres habet acutos angulos.

Vt præcedens angulus græcam concepit denominationem, ſic Oxigonium ab acuto angulo denominabimus: id quidem quod tres habet acutos angulos ſiue æquales ſiue inæquales, hoc eſt, quod nullum rectum aut obtuſum habeat. Horum etenim triangulorum veluti tria efficiemus genera, ſcilicet Rectangulum, Ambligonium, Oxigonium. Quorum quodlibet rurſus in ſpecies ſubdiuiditur: puta Rectangulum in Iſoſcelem & Scalenum: Ambligonium ſimiliter in Iſoſcelem & Scalenum: Oxigonium verò in æquilaterum, Iſoſcelem & Scalenum: quodlibet etenim æquilaterum eſt Oxigonium, tres habens acutos angulos. Reliquorum verò vtrunque, Iſoſceles ſcilicet & Scalenum, Oxigonia, Ambligonia, vel rectangula, quandoque ſunt, vt his docetur figuris.



Diffinitio 30.

Quadrilaterarũ autem figurarum, quadratum quidem eſt, quod & ęqui laterum ac rectangulum eſt.

Diffinitio 31.

Alterolongius eſt, quod rectangulum quidem, ſed ęquilaterum non eſt.

Regulares prius quadrilateras exponit figuras, incipiens à quadrato: quod cùm latera æqualia & angulos æquales habeat, rectos habere cogitur. Nam omne quadrilaterum quatuor rectis angulos æquales efficit, vt colligemus 32. primi: hæc etenim angulorum æqualitas, oppoſitorum laterum æqualitatem neceſſariò producet. Quare Alterolongius dicimus, quod æquiangulum, hoc eſt, rectangulum, ſed æquilaterum non eſt, cùm oppoſita tantùm habeat latera æqualia.

Diffinitio 32.

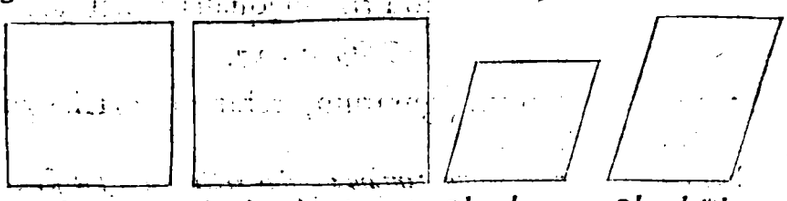
Rhombus eſt, quę æquilatera, ſed rectangula non eſt.

Diffinitio 33.

Rhomboides verò eſt, quę ex oppoſito latera & angulos habens ęquales, neque ęquilatera neque rectangula eſt.

Quoniam omnes figuræ rectilineæ quæ numero laterum triangulum excedunt, poſſunt in variatis lateribus angulos variare. Hæ 32 & 33 diffinitiones nihil aliud à 30 & 31 immutant quã angulorum varietatem, non variatis lateribus. Quæ etenim figura Quadratum dicta eſt, variatis

tantùm angulis, Rhombus dicetur, nõ variatis lateribus. Quæ verò Alterolongius dicta fuit, nulla laterum, sed tantùm angulorum varietate facta, Rhomboides dicetur: Quælibet enim harum latera opposita, & angulos oppositos æquales habet. Priorum autem singulæ oppositos habẽt æquales, vt his docetur exemplis.

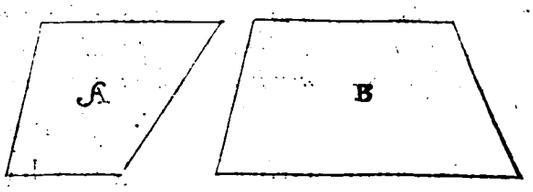


Quadratum. *Alterolongius.* *Rhombus.* *Rhombaïdes.*

Diffinitio 34.

Præter has autem reliqua quadrilatera, Trapesia appellantur.

Vltra eas de quibus locuti sumus, quadrilateras figuras Trapesia vocat: Ea scilicet plana, quæ nec æquiangula sunt nec parallelis comprehensa lateribus, vt hæc A *&* B.



Diffinitio 35.

Parallelæ, rectæ lineæ sunt, quæ in eodem existentes plano, & ex vtraque parte in infinitum productæ, non concurrunt.

Hæc diffinitio notanda propter eius frequentem vsum, erit. Sunt itaque parallelæ rectæ lineæ, (quas vocauit Campanus Æquidistantes) in eadem plana superficie descriptæ vel conceptæ, ea tamen arte, qua semper & vbique, inter eas æqualis distantia intercipiatur. Perspicuum igitur erit si semper æquidistent: nunquam eas coniungi, vel concurrere.

Diffinitio 36.

Parallelogrammum est figura plana quatuor rectis lineis contenta: quarum quælibet oppositæ sibi inuicem sunt parallelæ.

Hanc diffinimus figuram tanquam genus ad trigesimam & tres eam sequentes, quas comprehendit in se Parallelogrammum, & nihil insuper: quælibet etenim earum & nullæ aliæ latera opposita parallela habent. Qua de causa autem præter Euclidem, eius diffinitionem apponimus, facile patebit: eo quidem quòd sæpius hac dictione non diffinita primo libro vtitur: & tam confuse, vt exagonum quandoque 34. primi pro Paralellogrammo sumi possit, cùm eius latera & anguli, quæ ex opposito æquentur, & dimetiens illud bifariam secet, quod esset absurdo absurdius.

SEQVVNTVR POSTVLATA SIVE POSITIONES simplices, à nullis præmißis deductæ: quas concedi nobis optamus ad faciliorem artis progressum, quæquidem nullo argumento potest mens rationalis denegare.

Postulatum primum.

AB omni signo in omne signum rectam lineam ducere.

Non inconuenit sensui vt ab omni signo mente concepto (cùm aliud non sit) in omne aliud signum, lineam rectam excogitare: quod quidem æquè facile reperimus vt signum ipsum concipere. Nam lineam aut signum, qualia ars deposcit, sensibus proponere non possumus percipienda, sed tantùm concipienda: ea quippe nobis ars tradidit perfecta. Quæ itaque externis exequenda erunt sensibus, per artis intelligentiam mente conceptam dirigenda erunt, vt eam quamproximè valeant, imitentur.

Postulatum secundum.

Rectam lineam terminatam in continuum rectumq; producere.

Postu-

Postulatum tertium.

Omni centro & interuallo, circulum describere.

Hæc bina Postulata (veluti prius) naturam Geometricæ sequuntur disciplinæ: quæ licet ipsa actu aliqua difficillimè exequi possint: tamen earum in mente conceptio, ad ea quæ externis sensibus agi possunt, regenda sufficiet sat superq́.

COMMVNES SENTENTIÆ, QVAE EO A POstulatis differunt, quòd Postulata sint positiones simplices, à nulla præmissa deductæ, quæ rem non existentem fieri postulent. Sententiæ verò communes, conditionalem præmissam necessariò sequentes, rem iam existentem nos sentire capiam: Quod. prætermiserunt Campanus & Theon: hic nanque duas inter Postulata miscuit Sententias, ille verò tres, relinquentes græcum exemplar, quod nostro iudicio approbandum videtur hoc loco.

Prima.

QVÆ eidem æqualia, & adinuicem sunt æqualia.

Secunda.

Et si æqualibus æqualia adiiciantur, tota erunt æqualia.

Tertia.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, quę relinquuntur, erunt æqualia.

Quarta.

Et si inęqualibus æqualia adiungantur, tota erunt inęqualia.

Quinta.

Et si ab inęqualibus æqualia auferantur, reliqua inęqualia erunt.

Sexta.

Quę eiusdem sunt duplicia, adinuicem sunt æqualia.

Septima.

Et quę eiusdem sunt dimidium, æqualia sunt adinuicem.

Binas, sextam scilicet & septimam, posuit tantùm Euclides, quibus cuncta reliquæ quantitatum multiplicationes siue in augmentum siue in decrementum extensæ, comprehensæ sint. Nam cùm ait eiusdem duplicia æqualia adinuicem esse, intelligit haud secus eiusdem triplicia aut quadruplicia aut alia quæuis multiplicia inter se æqualia esse: nec non & dicens eiusdem dimidia æqua esse, illico concludit, eiusdem tertia, quarta, quinta aut alia quæuis idem decrementum eiusdem multiplicantia, inter se æqualia esse vt compendio consulat.

Octaua.

Et quę sibimetipsis conueniunt, æqualia sunt adinuicem.

Sibimetipsis conuenire dicuntur magnitudines, cùm earum singulæ quantitates singulis comparatæ, æquales reperiuntur, vt cuiuslibet totius partes partibus alterius quoad quantitatem conueniant, hoc est rationali argumento (non autem experientia) conuenire cognita, illa sunt æqualia, vt longitudo longitudini, latitudo latitudini, sublimitas sublimitati, rectarum inclinatio inclinationi, & reliqua id genus.

Nona.

Totum est sua parte maius.

Respectiuum esse dicemus totum ad partem, cùm sint sibi relatiua: pars etenim geometrica quodlibet à toto abstractum est, aliquid ei relinquens, quod latius docebimus prima diffinitione quinti.

Decima.

Omnes anguli recti, equales adinuicem sunt.

Vndecima.

Si in duas rectas lineas, recta incidens linea interiores & ad easdem partes angulos, duobus rectis minores in plano fecerit, Rectas lineas in infinitum productas, concurrere necesse est ad eas partes, in quibus anguli duobus rectis minores existunt.

Huius notitia à trigesima quinta diffinitione oritur ob inclinationem: nam si binæ lineæ rectæ, in quas recta incidit, efficiant binos interiores angulos, & ad easdem partes lineæ incidentis, duobus rectis minores, clarum est binas lineas ad se inuicem inclinare, & quanto plus in rectum longumq; producentur, plus accedent ad seipsas, quousque altera alteram secet. Quare sequitur omnem linearum rectarum inclinationem infinitè in plano productam, tandem angulum producere.

Duodecima.

Duę rectæ lineę superficiem non comprehendunt.

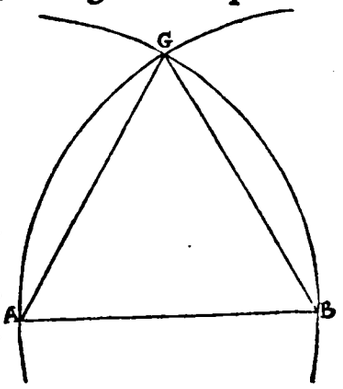
A precedente nascitur hæc: nam vt superficiem concludant duæ lineæ, in signo concurrere eas oportet. Quod si ab eo signo in rectum cõtinuò producantur, semper maius producent interuallum, nusquam itaque superficiem claudent.

Euclid.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM reſtitutarum Liber primus.

Propoſitio prima. *Problema.* 1.

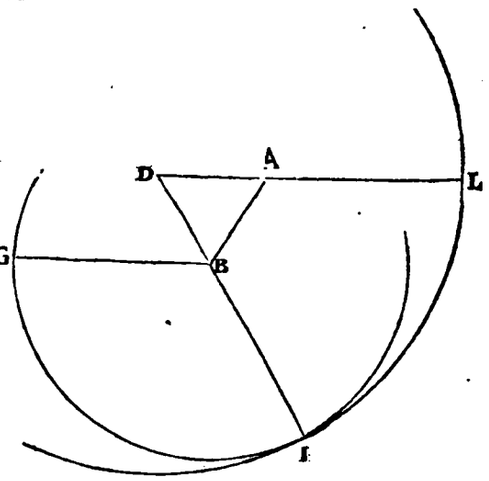
SVPER data recta linea terminata, triangulum æquilaterum conſtituere.



Sit propoſita recta A B *terminata in* A *&* B, *centro* A: *interuallo autem* A B *circulus ducatur* B G, *per* 3. *poſtulatum, centro item* B, *interuallo* B A, *circulus ducatur* A G: *iunctis* A G, G B *rectis: Dico triangulum* A B G *æquilaterum eſſe: Quoniam per circuli diffinitionem recta* A G, *æqualis eſt rectæ* A B: *&* (*per eandem*) B G, *eidem* A B *æqualis erit: Sequetur itaque ex prima communi ſententia* A G, G B (*eidem* A B *æquales*) *eſſe & adinuicem æquales. Super data itaque recta linea terminata* A B, *triangulum* A G B *æquilaterũ cõſtituimus.*

Propoſitio ſecunda. *Problema* 2.

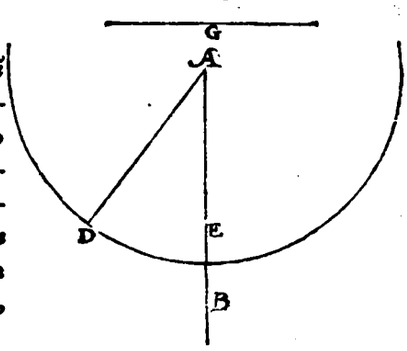
Ad datum ſignum, datæ rectæ lineæ æquam rectam lineam ponere.



Eſto ſignum datum A: *data verò recta* B G, *ducatur* A B *recta, ſuper qua* (*per præcedentem*) *triangulum æquilaterum conſtituatur* A B D. *extendatur* D A *in* L, *&* D B *in* I, *Centro* B *interuallo* B G, *circulus deſcribatur* G I, *per* 3 *poſtulatum, centro rurſus* D, *interuallo* D I, *circulus fiat* I L: *Dico rectã* A L *æqualem eſſe rectæ* G B *poſitæ: Quoniam æquales ſunt* D L, D I. *rectæ, per* 15 *diffinitionẽ, Æquales item ſunt* D A, D B, *per præcedentem. Reliquæ igitur* A L, B I *æquales erunt per* 3 *communem ſententiam, At quoniã æqualis eſt* B G, *rectæ* B I: *per* 15 *diffinitionem, Rectæ* A L *&* B G (*eidem* B I *æquales*) *erunt adinuicem æquales, per* 1 *communem ſentẽtiam, Ad datum itaque ſignum* A, *datæ rectæ lineæ* B G, *æquam rectam* A L *poſuimus.*

Propoſitio tertia. *Problema* 3.

Duabus datis inæqualibus rectis lineis, à maiori minori, æquam rectam lineam abſcindere.

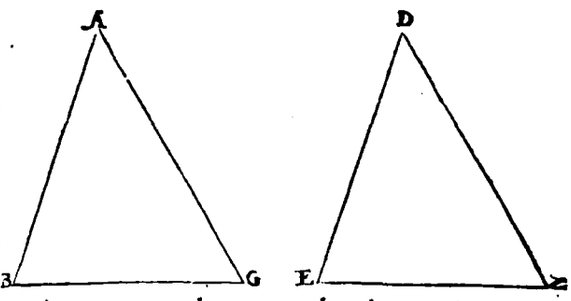


Sint datæ rectæ inæquales A B *maior, &* G *minor, ad datũ ſignũ* A *datæ* G, *æqualis ponatur* A D, *per præfatã, centro* A, *interuallo autem* A D, *circulus ducatur* (*per tertium poſtulat.*) D E. *Quia recta* A B, *maior eſt* (*per hypoteſim*) *interuallo* A D, *circulus ſecabit rectam* A B, *ſeccet in* E. *Quare* A E *eidem* A D *æqualis erit, per* 15 *diffinitionem, Et proinde* A E *&* G (*eidem* A D *æquales*) *adinuicem æquales erũt. Duabus igitur datis* A B *&* G *inæqualibus rectis lineis, à maiori* A B *minori æquam* G, *rectam lineam abſcidimus* A E.

Propoſitio quarta.

Si duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia, habuerint alterum

alteri & angulum angulo æqualẽ, ſub æqualibus rectis cõtentum, & baſim quoque baſi æqualem habebunt, & triangulum triangulo æquum erit, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri æquis lateribus ſubetnſi.



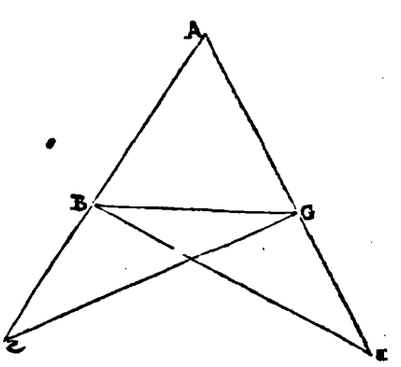
Sint triangulorum A B G *&* D E Z, *duo latera* A B, A G, *duobus* D E, D Z *æqualia, Inſuper anguli* B A G, E D Z *ſint æquales: Dico baſes* B G *&* E Z *æquales eſſe, & reliquos qui ad* B *&* G *angulos, reliquis qui ad* E *&* Z, *æquales eſſe: Quoniam (per hypotheſim) æquales ſunt* A B *&* D E *rectæ. Diſtantia ſignorum* A *&* B, *diſtantiæ ſignorum* D *&* E *conuenit, necnon quia æquales ſunt* A G *&* D Z *rectæ, diſtantia ſignorum* A *&* G *diſtantiæ ſignorum* D *&* Z *conuenit. Rurſus, quia æquos angulos comprehendunt rectæ* A B, A G *cum rectis* D E, D Z, *conueniet inclinatio rectæ* A G *ad rectam* A B *inclinationi rectæ* D Z *ad rectam* D E, *per octauam diffinitionem. Nam æqualitas angulorum* A B *inclinationum æqualitate dependet. Sequetur itaque ſignorum* B *ad* G *&* E *ad* Z *diſtantias ſeu interualla conuenire, cùm interuallorum differentia ab inclinationum diuerſitate naſcatur. Ipſa itaq; ſigna* B G, *&* E Z *coniungentes rectæ, æquales erunt: Nam ſi altera maior eſſet altera, & inclinatio inclinatione maior eſſet contra poſitum, quod fieri nequit, & ideo conuenient earum quantitates. Si igitur triangulorum* A B G *&* D E Z *ſingulæ quantitates ſingulis comparatæ, æquales fuerint, triangula* A B G, *&* D E Z, *ſibiipſis conueniunt, & proinde æqualia ſunt per octauam communem ſententiam. Quare & reliqui anguli qui ad* B *&* G *reliquis qui ad* E *&* Z *æquales erunt, cùm triangula ſibiipſis conueniant: Si itaque duo triangula, duo latera, duobus, &c.*

MONITVM.

Alteram demonſtrationem huic quartæ exhibere cogimur, ne præbeatur aditus, quo vlla mechanicorum vſuum inſtrumenta in demonſtrationes incidant. Nam Campanus ac Theon hanc demonſtrantes, triangulum triangulo ſuperponunt, angulumq; angulo, ſiue latus lateri, demonſtrationem potius inſtrumento palpantes, quàm ratione firmantes: quod tanquam prorſus alienum à vero diſciplinarum cultu reijcientes, aliam demonſtrationem abſque figuræ, anguli ſeu lineæ tranſpoſitione, protulimus ratione elucidatam.

Propoſitio quinta.

Iſoſcelis trianguli qui ad baſim ſunt anguli, adinuicem ſunt æquales: & productis æqualibus rectis, qui ſub baſi ſunt anguli, adinuicem æquales erunt.



Sit triangulum Iſoſceles A B G, *habens bina latera* A B, A G *inuicem æqualia: Dico angulos qui ad baſim* B G *æquales eſſe: inſuper, ſi producantur rectæ* A B, A G, *efficientes ſub baſi angulos* B G I, G B Z, *dico eos eſſe æquales. Seccentur protenſæ* A I, A Z *æquales, per tertiam huius, ducanturq; rectæ* G I, G Z, *æquales erunt rectæ* B Z, G I, *per tertiam communem ſententiam. Quoniam æquales ſunt* A I, A B, *ipſis* A Z, A G *per hypotheſim, & angulus* A *communis, baſis* B I, *baſi* G Z *æqualis erit. Inſuper anguli* A I B, A Z G (*per quartam huius*) *ſunt æquales, necnon & anguli* A I B, *&* A G Z. *Quia verò triangulorum* B Z G *&* G I B *æqualia ſunt latera* B Z, Z G, *ipſis* G I, I B, *& angulus* B Z G, *ipſi* B I G, *reliqui (per præcedentem) reliquis æquales erunt, ſcilicet* Z B G, *&* I G B, *qui ſub baſi* B G, *necnon* B G Z, *ipſi* G B I: *Si autem ab æqualibus angulis* A B I, *&* A G Z, *æquales auferantur* G B I, *&* G B Z: *reliqui* A B G, *&* A G B, *qui ad baſim (per tertiam communem ſententiam) erunt æquales. Iſoſcelis ita-trianguli qui ad baſim ſunt anguli, adinuicem, &c.*

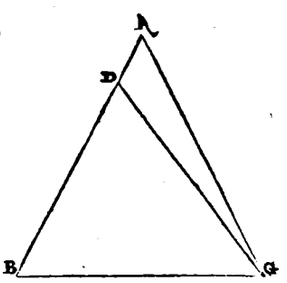
MONI-

MONITVM.

Transtulimus Isoscelium triangulorum pluralem vocem in singularem, ne incumbant discentes super comparatione angulorum plurium Isoscelium adinuicem, sed tantùm comparationi angulorum cuiuslibet Isoscelis & eiusdem inter se.

Propositio 6.

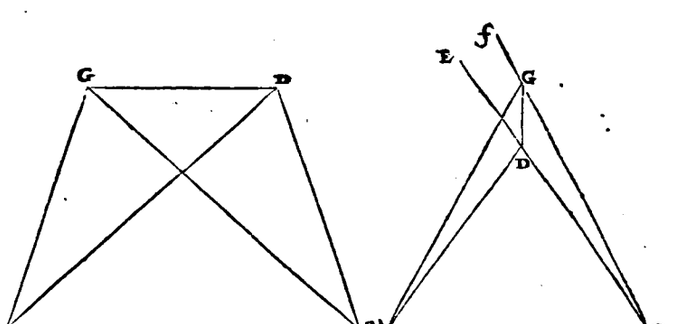
Si trianguli duo anguli æquales adiuicem fuerint, æquales quoque angulos subtendentia latera æqualia erunt.



Sit triangulum G B A *æquos habens angulos* G A B B G A: *Dico latera* A G *&* A B *(eos subtendentia) æqualia esse: Quòd si non sint, esto aliquod eorum maius (scilicet* A B*) & à maiori* B A *recta auferatur, æqua minori* A G, *sit ẃ* B D, *coniungatur ẃ* D G. *Quoniam* A G *&* D B *sunt æquales, cõmuni eis addita* B G, *binæ* A G, G B, *binis* D B, B G *erunt æquales, per secũdam communem sententiam, Quia verò duo triangula* D B G, *&* A B G *habent duo latera* D B, B G, *duobus* A G, G B *æqualia, & angulum* D B G, *angulo* A G B *(per hypothesim) æqualem: bases igitur* D G, *&* A B *æquales habebunt (per quartam huius) & triangulum* D B G *triangulo* A B G, *æquum erit (per eandem) & minus, cùm sit in maiori comprehensum, quod fieri non potest. Ipsorum igitur* A B *&* A G *laterum nullum est maius, æqualia igitur sunt. Si itaq; trianguli duo, &c.*

Propositio 7.

Si à limitibus alicuius rectę lineę duę rectę ad signum concurrant, ab eisdem limitibus in plano & ad easdem partes, duę alię ad aliud signum, duabus primis altera alteri eundem finem possidenti, æquales non constituentur



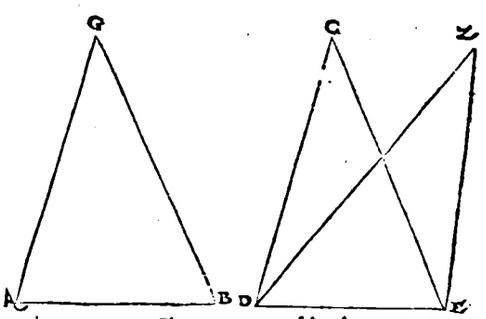
A limitibus rectæ lineæ A B, *ductæ rectæ lineæ* A G, B G *cõcurrũt in* G: *insuper ab eisdẽ limitibus, super eodem plano, ad easdem partes cõcurrant ad aliud signum* D. *aliæ duæ* A D, B D: *Dico rectas* A D, B D *duabus primis* A G, B G *non esse æquales, scilicet alteram* A D, *alteri* A G *adinuicem, nec similiter* B G *alteri* B D *eundem* B *finem possidenti. Ab impossibili enim, Si æquales dicantur scilicet* A G, *rectæ* A D *&* B G, *ipsi* B D, *æquales erunt (per quintam huius) anguli* A G D *&* A D G, *similiter* B G D, *&* B D G *qui ad basim Isoscelis. Cũ autem angulus* A D G *(pars scilicet totius* B D G*) sit æquus ipsi* A G D, *totus* B D G *maior erit parte* A G D, *sed & minor: nam fuit æqualis ipsi* B G D *parti totius* A G D, *quod fieri nequit. Non igitur erunt æquales, scilicet* A G, *ipsi* A D, *&* B G, *ipsi* B D. *Quia verò potest cadere signum* D *intra triangulum* A G B. *Cadat (ad secundam huius partem ostendendam) Si igitur æquales credantur* A G *ipsi* G D, *&* B D, *ipsi* B G, *anguli ad basim scilicet* A D G, *&* A G D, *sunt (per quintã huius) æquales. Qui verò sub rectarum* B D, B G *basi similiter sunt æquales, scilicet* D G, *ipsi* F G D. *Totus itaque* A D G *maior erit angulo* F G D, *sed & minor, cùm sit æqualis ipsi* A G D, *parti ipsius* F G D, *quod fieri non potest. Vbicunque igitur rectæ aliæ* A D, B D *conueniant, quouismodo ipsis* A G, B G, *inæquales erunt. Si itaque à limitibus alicuius rectæ lineæ, &c.*

MONITVM.

Eò quòd quodammodo confusius hoc theorema tradiderit Theon, nos aliquas eius voces faciliori compendio mutauimus, ne binas alias binis prioribus lineis æquales in genere optari putemus, sed binas tantùm ab eodem limite lineæ simul exorientes, inæquales probari sibi inuicem, ac binas reliquas similiter inæquales, haud secus ostendemus binas in D *concurrentes ac binas in* G *concurrentes simul æquales fieri non posse, per inæqualitatem angulorum ad* A *&* B *necessariò cõcurrentẽ.*

Propositio octaua.

Si duo triangula, duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, & basim basi æqualem: angulum quoque sub æqualibus rectis cõtentum æqualem habebunt.



Sint duo triangula A B G *&* D E C *duo latera duobus lateribus æqualia habentia, scilicet* A G, *ipsi* D C *&* G B *ipsi* C E, *& basim* A B *basi* D E *æqualem: Dico angulum* A G B (*angulo* D C E *æquis lateribus contento*) *æquũ esse, Ab impossibili autem, si credatur angulos* G *&* C *nõ esse æquales, sit alius quidam ad* Z *super basi* D E *angulo qui ad* ∪ *æqualis, & æquis lateribus comprehensus, scilicet* D Z *ipsi* A G, *&* E Z *ipsi* B G, *sequetur à limitibus rectæ* D E *datis duabus* D C, *&* E C, *alias duas ad aliud signum* Z *concurrere, æquales primis* D C E C, *Nam supponitur* D Z *rectæ* A G *æqualis, &* E Z *ipsi* B G *quibus sunt æquales (per hypothesim)* D C E C, *Rectis igitur* D C E C *æquales erunt* D Z, E Z *cuius oppositum ait præcedẽs huius. Non igitur possunt super æquis basibus maiores aut minores concipi anguli æquis lateribus comprehensi. Si igitur duo triangula, duo &c.*

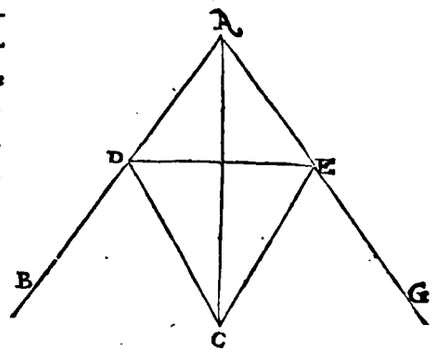
MONITVM.

Huius alteram demonstrationis partem resecauimus eò quòd trianguli transpositione vteretur, quod quidem mœchanicum spectat negotium à vera matheſi alienum, posita anguli qui ad Z *hipothesi ex quarta huius sumpta.*

Propositio nona. *Problema* 4.

Datum angulum rectilineum bifariam seccare.

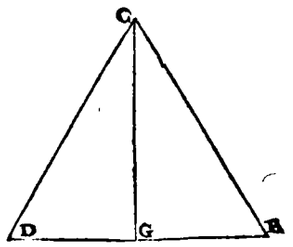
Sit angulus datus B A G, *ex rectis autẽ* A B A G, *æquales adinuicem seccentur (per secundam huius)* A D A E, *& cõiuncta* D E *super ea (per primam huius) fiat triangulum æquilaterum* D C E, *coniungatur verò* A C. *Dico rectã* A C *angulum datum* B A G *bifariam secare, quoniam triangulorũ* A D C A E C *bina latera* A D, A C *binis* A E, A C *sunt æqualia, & basis* D C *basi* E C (*per primam huius*) *æqualis, angulus, igitur* D A C *angulo* E A C (*per præcedentem*) *erit æqualis, Datum igitur angulum* B A G *bifariam diuisimus per rectam scilicet* A C.



Propositio decima. *Problema* 5.

Datam rectam lineam terminatam, bifariam seccare.

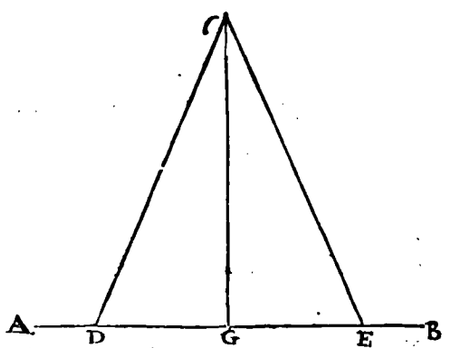
Esto data recta D B, *super ipsa verò* D B (*per primam huius*) *triangulum æquilaterum constituatur* A C B, *seccetur basi* D B *oppositus angulus* C *bifariam (ex præcedente) per rectam* C G: *Dico* D B *rectam secari bifariam in* G. *Quoniam triangulorum* D G C *&* B G C, *duo latera* D C C G *duobus* B C, C G, *sunt æqualia, & anguli* G C D G C B, *æquis lateribus contenti æquales, per constructionem, bases igitur* G D G B (*per* 4. *huius*) *æquales erũt. Datam igitur rectam* D B *bifariam in* G *secuimus.*



Propositio vndecima. *Problema* 6.

Datæ rectæ lineæ, à signo in ea dato rectã lineam ad angulos rectos excitare.

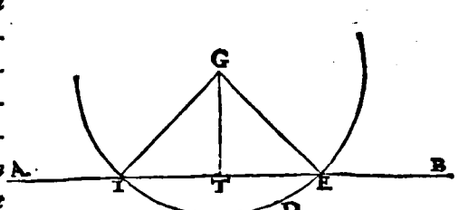
Suppo-



Supponatur data recta A B, *in qua contingens signum* G *sumatur, ab ipso* G *versus* A *&* B, *æquales quæ rectæ secentur* G D G E. *Super recta verò* D E *triangulum æquilaterum (per primam huius) cõstituatur* D C E, *coniuncta* C G: *Dico* C G *ad angulos rectos datæ* A B *excitari, cùm triangulorum* D C G *&* E C G *duo latera* C D D G, *duobus* C E E G, *sint æqualia, & basis* C G *communis per constructionem, perspicuum erit (ex octaua huius) angulum* C G D *angulo* C G E, *æquum esse. Cùm enim* C G *recta super rectam consistens* A B, *angulos* C G D C G E, *vtrobique æquos fecerit, recti sunt bini illi anguli, &c. per* 10. *diffinitionem huius. Datæ igitur rectæ* A B, *à signo* G *in ea dato rectam lineam* C G *ad angulos rectos excitauimus.*

Propositio duodecima. Problema 7.

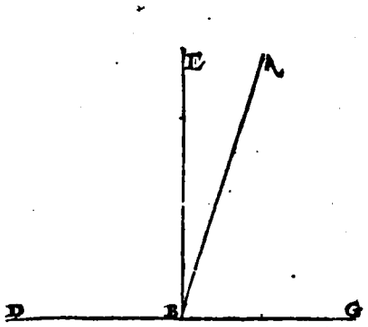
Super datam rectam lineam infinitam à dato signo quod in ea non est perpendicularem rectam lineam ducere.



Sit data recta linea infinita A B, *signum verò extra eam sit* G, *Sumatur item contingens aliud signum, vltra lineam* A B *ad partes oppositas ipsi* G *sitque* D, *Centro verò* G *interuallo* G D, *circulus fiat* E D I, *per 3 postulatum, Quem secabit recta* A B, *cùm sit inter* G *&* D *posita, secabit in signis* I *&* E, *cõiungantúrque* G I, G E, *Secetur verò ei bifariam ducta* G T: *Quoniam triangulorum* G I T *&* G E T *duo latera* G T T I *duobus* G T T E *sunt æqualia, per constructionem: & basis* G I *basi* G E, *per* 15. *diffinitionem. Angulus itaque* G T I *angulo* G T E (*æquis lateribus contento*) *æquus erit, per octauam huius. Recta igitur* G T *super rectam* A B *vtrobique æquales angulos* G T E, G T I *efficiens, rectos efficiet, per* 10 *diffinitionem. Super datam igitur rectam infinitam* A B *à signo* G *quod in ea non est perpendicularem deduximus.*

Propositio decimatertia.

Cùm recta linea super rectam consistens angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

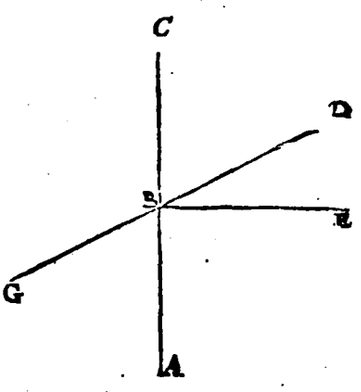


Esto recta A B *super rectam* D G *angulos efficiens. Dico eos rectos esse, aut duobus rectis æquos. Quod si recti sint anguli* A B G A B D *petitum consequimur, Sin minus fuerint recti, Ad rectam* D G *& signum in ea* B *ad rectos excitetur* B E *per* 11 *huius, Quoniam recti sunt* E B D E B G *anguli, Angulum autem* A B G *excedit rectus* E B G, *angulo* E B A: *Qui quidem excessus* E B A *recto* E B D *iunctus, reliquum duorum rectorum* E B G *&* E B D *complet. Bini igitur* A B G *&* A B D *simul sumpti anguli duobus rectis æquales erunt. Cùm recta igitur* A B *super rectam* D G *consistens angulos fecerit aut duos rectos, aut duobus rectis, &c.*

Propositio decimaquarta.

Si ad aliquam rectam lineam atque ad eius signum duæ rectæ lineę vtrobique ductæ angulos duobus rectis æquales in plano & ad easdem partes fecerint, in rectum sibiipsis rectæ lineæ erunt.

Ad aliquam rectam AB *& eius signum* B, *binæ rectæ lineæ* BG *&* BD *vtrobique ducantur. Efficiant autem ad rectam* AB *& eaſdem eius partes angulos* ABG ABD *Vel* CBG CBD *duobus rectis æquos, Dico rectas* BG BD *in rectum ſibi ipſis eſſe. Si enim* BD *non ſit in rectum ipſius* BG, *ſit ipſi* BG *in rectum alia quæpiã* BE, *Quoniam anguli* ABG ABD *duobus æquipollent rectis (per hyppotheſim) ablato angulo* DBE *reliqui* ABG ABE *duobus rectis minores erunt. Sequetur igitur rectam* AB *ſuper rectam* GBE *conſiſtentem, angulos duobus rectis minores efficere, quod eſt abſurdum, ex* 13 *huius. Non igitur cadit alia in rectum ipſi* BG *quam recta* BD. *Si igitur ad aliquam rectam lineam, &c.*



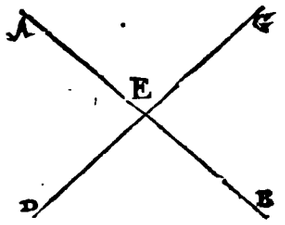
MONITVM.

Huius propoſitionis aliquas mutauimus particulas, ſcilicet ad eaſdem partes, vt percipiamus angulos qui duobus rectis æquari debent, fieri ex binis ductis ad eaſdem partes datæ AB, *non autem ex duabus ad totam* AB *productam. Quare duas adinuicem cum data diximus, in eodem autem plano, ob ſolidorum à planis futuras differentias, &c.*

Propoſitio decimaquinta.

Si duę rectæ lineæ ſeſe ſecuerint, angulos qui circa verticem ſunt oppoſiti, æquos adinuicem efficient.

Sint duæ rectæ AB DG *ſeſe ſecantes in* E, *Dico angulos qui ad* E *fiunt ex oppoſito, ſcilicet* AED BEG *vel* AEG BED *æquos eſſe adinuicem. Cùm enim* AED AEG *duobus rectis ſint æquales, per* 13 *huius, ſimiliter per eandem* AEG GEB *duobus rectis, communis auferatur* AEG. *Reliqui* AED BEG *æquales erunt, per* 3 *comm. ſentent. Similiter patebit reliquos* AEG BED *æquales eſſe, cùm ſint oppoſiti. Si itaque duæ rectæ lineæ ſeſe ſecuerint, angulos qui circa verticem ſunt oppoſiti, æquos adinuicem efficient.*



MONITVM.

Huic addidimus particulam (oppoſiti) vt exprimamus qui ad verticem æquales reperirentur anguli, quod non expreſſit Theon.

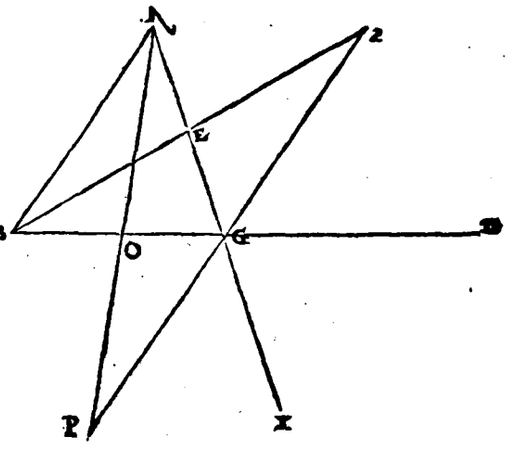
Corrollarium.

Hinc ſequitur binas rectas ſeſe ſecãtes angulos quatuor rectis æquos ad verticem efficere. *Cùm ſit ad vtraſque partes recta ſuper rectam conſiſtens per* 13 *huius, & proinde quaſlibet rectas in plano ad ſignum idem concurrentes, quatuor rectis æquos efficere. Nam binæ earum productæ ad verticem, reliquarum quodlibet inclinationem concludent.*

Propoſitio decimaſexta.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore & oppoſito maior eſt.

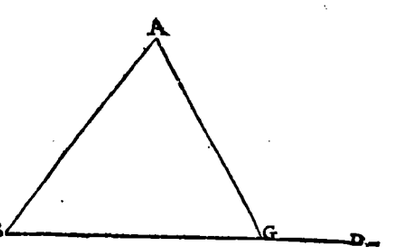
Trianguli ABG, *producatur latus* BG *in* D *Dico angulum exteriorem* AGD, *maiorem eſſe quolibet interiore oppoſito, ſcilicet ipſo,* GAB, *vel* GBA. *Seccetur bifariam latus* AG *in* E, *ducatur* BE, *cui productæ in* Z *æqualis fiat,* EZ, *coniuncta* ZG, *quoniam triangulorum* ZGE *&* BAE *duo latera* ZE, EG, *duobus* BE EA *æquantur (per conſtructionem) & æquos comprehendunt angulos* ZEG, BEA *ad verticem, (per præcedentem.) Reliqui igitur anguli* EGZ, EAB *(per quartam huius) æquales erunt, & baſes, & triangulum triangulo. Maior igitur erit totus* AGD *exterior, ipſo* GAB *interiore, (cum idem* AGD *ſit maior ipſo* AGZ, *reliquo*



Z G D. *Similiter patebit extenso latere* A G I *secto* B G *in* O, *ductaq;* A O P *&* P G, *reliquum angulum* G B A *minorem esse angulo* A G D, *hoc est* B G I *opposito, Haud secus fiet producto quouis trianguli latere. Omnis itaque triāguli vno latere producto &c.*

Propositio decimaseptima.

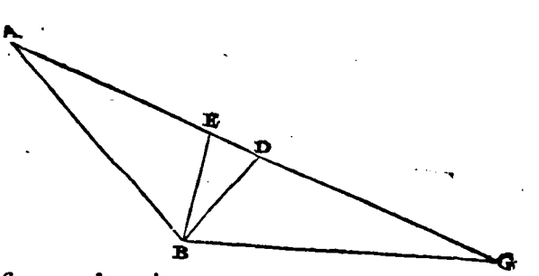
Omnis trianguli duo anguli, duobus rectis sunt minores omnifariam sumpti.



Exponatur triangulum A B G *cuius latus vnum* B G *producatur in* D, *fitq;* B G D: *Dico binos trianguli angulos* A B G *&* A G B *duobus rectis minores esse. Cum enim recta* A G *super rectum* B D *consistat, efficit angulos duobus rectis æquos* A G B *&* A G D, *per* 13 *huius. Atqui per precedentem* A G D *maior est angulo* A B G. *Duo igitur* A G B, A B G *minores erunt duobus rectis (cùm sint minores ipsis* A G B, A G D *binis rectis æqualibus. Similiter ostendentur reliqui bini, producto eo qui circa eos latere. Omnis igitur trianguli &c.*

Propositio decimaoctaua.

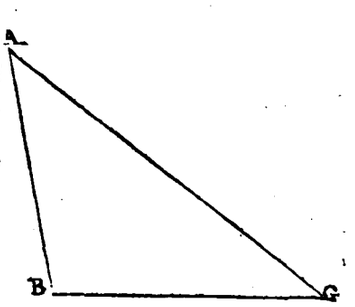
Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



Trianguli A B G *maius latus sit* A G D: *Dico angulum quem subtendit* A G *esse maiorem trianguli angulum. Ab ipsa* A G *seccetur rectæ* A B *æqualis* A D. *Angulus itaq;* A D B *reliquo* A B D (*per* 5 *huius*) *erit æqualis, cùm sint ad basim. Sed angulus* A D B *exterior interiore* D G B *maior est, per* 16 *huius. Multò igitur maior erit angulus* A B G *eodem* D G B, *cùm sit continens* A B D *angulum reliquo* A D B *æqualem. Similiter si ponatur ipsi* G B *æqualis* G E *ostendemus angulos* G B E, G E B *ad basim æquales, & exteriorem* G E B *interiore* E A B *maiorem, & proinde totum* G B A, *multò maiorem ipso* B A G. *Maior igitur erit angulus* A B G *quem maius latus* A G *subtendit. Omnis igitur trianguli, &c.*

Propositio decimanona.

Omnis trianguli sub maiori angulo maius latus subtenditur.

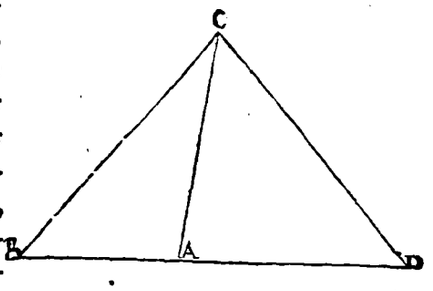


Trianguli A B G *maior angulus sit qui ad* B: *Dico maius latus esse* A G *subtendens angulum* B. *Nam si aliud quoddam trianguli latus scilicet* A B *esset maius, angulus* G *esset maior (per præcedentem.) Similiter si* B G *esset maius, angulus* A *esset maior, (contra hypothesim) quæ supponit angulum* B *maiorē. Non igitur erit aliud latus maius latere* A G *subtendente maiorem angulum, nec æquale, quoniam essent æquales anguli ad basim (per quintam huius) contra positum supponens alterum maiorem. Maius itaque erit* A G. *Omnis igitur trianguli sub maiori angulo maius latus subtenditur.*

Propositio vigesima.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocumque sumpta.

Esto triangulum A B C. *Dico duo eius qualibet latera reliquo esse maiora. Extendatur aliquod eius latus* B A *in* D, *sitq; æqualis* A D *ipsi* A C *coniuncta* D C, *quoniam* A D C A C D *anguli (per 5 primi) sunt æquales, maior erit totus* D C B *angulo* A C D. *Trianguli igitur* B D C *maius erit latus* B D *subtendens maiorem angulum* D C B *latere* B C *subtendente angulũ* C D B. *Sed latus* B D *binis* B A, A C *æquum fuit, posita est enim* A D *ipsi* A C *æqualis. Bina igitur* B A, A C *reliquo* B C *sunt maiora, similiter patebũt reliqua. Omnis igitur trianguli duo latera &c.*



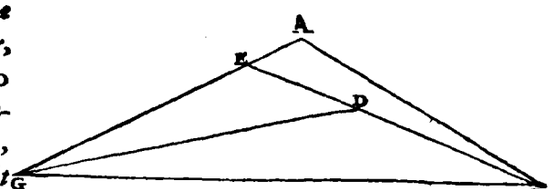
MONITVM.

Potuit breuius hanc demonstrare Campanus per diffinitionem rectæ lineæ, cùm omnis linea recta à signo ad signum sit breuissima, duo latera reliquo sequitur esse maiora: sed quia hæc descriptio potius quàm diffinitio fuerit, ab ea demonstrando abstinuimus, eò quòd eius non meminerimus.

Propositio vigesimaprima.

Si trianguli à limitibus vnius lateris binę rectæ introrsum constituantur ad signum, quæ coniunguntur, reliquis trianguli binis lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

Trianguli A B G *à limitibus* B *&* G *binæ lineæ* B D G D *ad signum* D *introrsum constituantur, & extendatur* B D *in* E. *Dico coniunctas* B D, G D *minores esse rectis* B A, A G *& maiorem angulum continere. Erunt (per præcedentem)* B A, A E *maiores ipsa* B E: *cõmunis apponatur* G E. *Erũt* B A, A E, E G *maiores ipsis* B E, E G. *Sed (per eandem)* D E E G *sunt maiores ipsa* D G, *communis addatur* D B, *erunt* G E, E D B *maiores ipsis* G D, D B. *Multo igitur* B A, A E, E G *sunt maiores ipsis* B D, D G. *Præterea angulus* D E G *maior est interiore & opposito* B A E. *Similiter* B D G *ipso* D E G, *per 16 huius, Multo igitur maior erit* B D G *(quem constituunt introrsum coniunctæ) angulo* B A G *trianguli* A B G. *Si igitur trianguli à limitibus vnius lateris binæ rectæ, &c.*



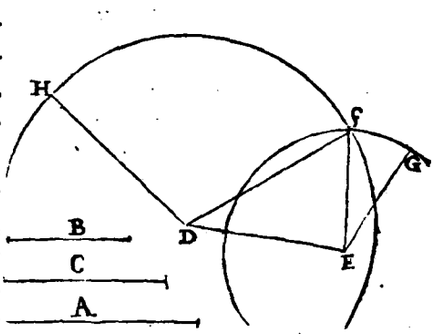
MONITVM.

Diximus præter Theonem rectas introrsum constitutas, ad signum constitui: nam si vsque ad trianguli educerentur latera, verè maiorem angulum quo quomodo efficerent, sed quandoque maiores essent, contra propositum, nos ideo non tantum introrsum, sed & ad signum eas constitui petimus.

Propositio vigesimasecunda. Problema 8

Ex tribus rectis quæ sunt tribus datis rectis æquales, & quarum duæ quælibet reliqua sunt maiores, triangulum constituere.

Proponantur tres rectæ lineæ A B C, *alicui illarum scilicet* C *æqualis ponatur* D E. *Ad signum* E *vero ipsi* B *æqualis ponatur* E G, *ad signum verò* D *reliquæ* A *æqualis sit* D H, *centro autem* D *interuallo* D H, *circulus fiat* H F. *Centro verò* E *interuallo quidem* E G, *circulus describatur* F G, *& coniungantur* D F, E F: *Dico triangulum esse* D F E *ex tribus rectis ipsis* A, B, C *æquis constitutum. Cùm enim æqualis sit* D H, *rectæ* A, *eidem* A *erit æqualis* D F, *cùm sint* D H, D F *quæ ex cẽtro, similiter quia* E G *ipsi* E F *est æqualis (per 15 diffinitionem) & eidem* E G *æqualis fuit* B, *rectæ* E F *æqualis erit ipsi* B. *Reliqua verò* D E, *reliquæ* C *posita fuit æqualis. Ex tribus igitur* E D, D F, F E *tribus datis* A, B, C, *æqualibus, triangulum constituimus* E D F.



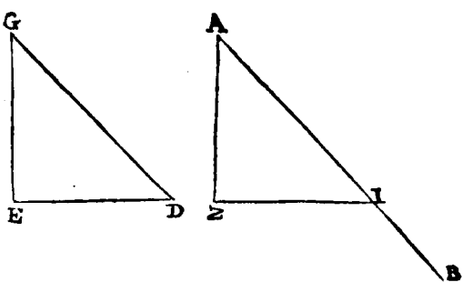
Monitum.

MONITVM.

Quoniam propoſitum abſolutè problema poſtremo reſtringit, profeſſiones incertas imitans, non autem diſciplinas. Nos perficiendo problemati conditionem prætulimus anteponendam, qua ſtatuta, proponatur problema, vt ex tribus rectis quarum duæ quæuis reliqua ſunt maiores triangulum conſtituere. Non autem vbi ex tribus rectis triangulum conſtituendum eſſe diximus abſolutè, poſthac exceptionem ſiue reſtrictionem apponamus, prorſus indignum matheſi.

Propoſitio vigeſimatertia. *Problema 9.*

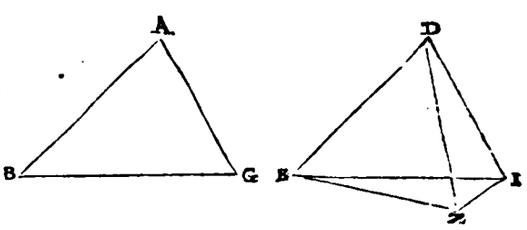
Ad datam rectam lineam, & ad eius ſignum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum conſtituere.



Sit data recta linea A B, *angulus verò datus cui æqualis dandus eſt, ſit* E G D, *Coniungatur* E D, *ipſi verò* G D *æqualis ponatur* A I, *per 3 huius. Ex tribus autem rectis tribus datis* G D G E E D *æqualibus, ſcilicet* A I A Z Z I (*per præceden.*) *fiat triangulum* A I Z. *Cùm autem triangula* G E D A Z I *habeant duo latera duobus, & baſin* E D *baſi* Z I *æqualia, Et (per 8 primi) reliquos angulos* I A Z *ipſi* D G E *æquos habebunt. Ad datam itaque rectam* A B *dato angulo* E G D *ad ſignum* A *æqualis angulus* Z A I *conſtitutus eſt.*

Propoſitio vigeſimaquarta.

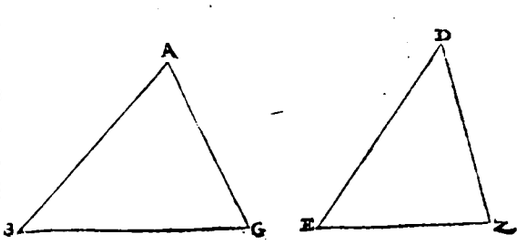
Si duo triangula duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, angulum verò angulo maiorem ſub æqualibus rectis comprehenſum, & baſim baſi maiorem habebunt.



Sint duo triãgula A B G, D E Z *duo latera duobus lateribus æqualia habentia, ſcilicet* A B *ipſi* D E *&* A G *ipſi* D Z, *angulum verò* B A G *angulo* E D Z *maiorẽ. Dico baſim* B G *baſi* E Z *maiorẽ eſſe. Quoniã* B A G *angulus maior eſt* E D Z *angulo, Ad ſignum* D *per præceden. conſtituatur angulus* E D I, *æqualis angulo* B A G *dato. Et ipſi* A G *æqualis ſit* D I, *coniuncta* E I I Z. *Cùm autem* B A G E D I *anguli ſint æquales, & æquis lateribus contenti, baſes* B G *&* E I (*per 4 huius*) *æquales erunt. Præterea quoniam æqualis eſt* D Z *ipſi* D I, *qui ad baſim anguli* D Z I, D I Z (*per 5 primi*) *ſunt æquales. Maior autem eſt angulus* E Z I *ipſo* D Z I, *totum ſcilicet ſua parte, Maior igitur erit ſibi æquali* D I Z, *Multò itaque maior erit* E Z I *angulo* E I Z *minore. Maius igitur erit (per 19 huius) latus* E I *trianguli* E Z I, *latere* E Z. *Sed* E I *ipſi* G B *eſt æqualis. Ipſa igitur* G B *ſubtendens maiorem angulum, reliqua* E Z *ſubtendente minorem maior erit. Si itaque duo triangula duo latera duobus lateribus alterum, &c.*

Propoſitio vigeſimaquinta.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, baſim verò baſi maiorem, angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum, angulo maiorem habebunt.

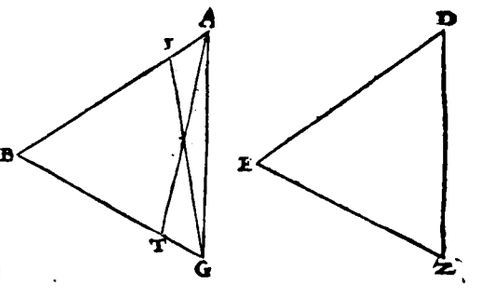


Sint duo triãgula A B G, D E Z *duo latera duobus æqualia habentia, & baſim* B G *baſi* E Z *maiorem: Dico quòd angulum* B A G *angulo* E D Z *maiorem habebunt. Quòd ſi æquales eſſet* B A G *&* E D Z *anguli æquis lateribus comprehenſi, baſes (per 4 huius) æquales eſſent, contra hypotheſim, quod fieri non poteſt: Si verò* B A G *angulus minor credatur* 3 *angulo* E D Z *Baſis* B G *baſi* E Z *minor erit (per præ-*

cedentem) quod similiter posito obuiaret. Non est igitur B A G *angulus ipsi* E D Z *æqualis, nec minor ipso: Ergo maior necessariò erit. Si itaque duo triangula, &c.*

Propositio vigesimasexta.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis alterum alteri æquales habuerint, & vnum latus vni lateri æquale, aut quæ simul æquis adiacent angulis, aut quæ simul æquos subtendunt angulos, reliqua quoque latera reliquis lateribus alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.



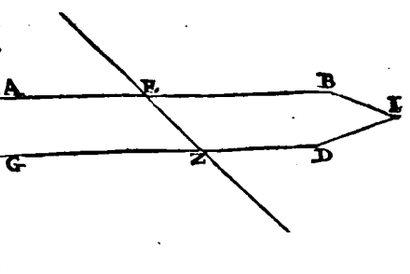
Sint triangula A B G D E Z *duos angulos duobus æquales habentia, scilicet* A B G A G B *ipsis* D E Z D Z B *& vnum latus vni æquale: Sint primo ea, quæ æquis adiacent angulis, scilicet* B G *ipsi* E Z *latera æqualia: Dico reliqua* B A *ipsi* E D *&* A G *ipsi* D Z *necnon* B A G *angulum ipsi* E D Z *æqualia esse. Quòd si hac hypothesi* A B *&* D E *non sint æquales, sit* A B *maior, & ipsi* E D *æqualis ponatur (per 3 primi)* B I. *Quoniam duo latera* B I B G *duobus* E D E Z *sunt æqualia, & æquos angulos* I B G D E Z *continent, Triangulorum* B I G *&* E D Z *reliqua latera & anguli æqualia (per 4 primi) erunt: angulus igitur* I G B *angulo* D Z E *æquus erit, sed ipsi* D Z E *æqualis positus est* A G B *ipsi igitur* A G B *æquus erit angulus* I G B, *pars scilicet toti, quod est absurdum. Non est itaque maior aliqua ipsarum* A B D E *æquales itaque erunt, simili deductione patebit æquales esse* A G *&* D Z. *Secundò verò supponamus latera* A B *&* D E *æquos angulos* A G B, *&* D Z E *subtendentia æqualia esse. Duo reliqua latera lateribus & angulos angulis æqualia esse, quod si non sint, sit* B G *latus maius ipso* E Z, *ipsi verò* E Z, *æqualis ponatur* B T, *quoniam* B T B A *rectis* E Z E D, *& angulus* B *angulo* E *æquantur, per eandem 4 huius, triangulorum* B A T E D Z *latera & anguli æqualia erunt. Est igitur* B T A *angulus, ipsi* E Z D *æqualis, cui* B G A *æquus positus est: sequetur itaque* A T B *exteriorem ipsi* A G B *interiori opposito æquum esse, contra 16 huius, quòd est impossibile. Nõ est igitur aliqua ipsarum* B G E Z *maior altera, æquales igitur sunt rectæ* B G *&* E Z *adinuicẽ. Sed quia æquales similiter ostensæ sunt* A B *&* D E *& anguli* A B G D E Z *æquales. Igitur (per 4 primi) bases* A G D Z *& reliqui anguli reliquis æquales erũt. Si itaque duo triangula duos angulos duobus angulis, &c.*

MONITVM.

Quoniam dicit triangula æqualia esse quæ duos angulos duobus æquales habent. Si modo vnum latus lateri æquale habeant, aut quod æquis adiacet angulis, aut quod sub vno æqualium angulorum subtẽdetur. Quodquidem analogum est, nam si in altero triangulorum latus adiaceat, in reliquo verò subtẽdat vnum æqualium angulorum, falsum erit æqua esse triangula: quare diximus æqualia latera simul adiacere, aut simul opponi æqualibus angulis. Hæc enim animaduersio 10. decimitertij demonstrandæ proderit.

Propositio vigesimaseptima.

Si in binas rectas incidẽs recta linea in plano angulos alternatim æquos adinuicem fecerit, parallelæ erunt sibiipsis rectæ lineæ.



In binas rectas A B G D *incidat recta* E Z *efficiens angulos alternos, scilicet* A E Z, E Z D, *æquales: dico rectas* A B *&* G D *esse parallelas. Si autem opponatur eas non esse parallelas, concurrent: cùm sint in eodem plano, cõcurrant in* I, *triangulum erit* E I Z, *cuius exterior angulus* A E Z *interiori opposito* E Z D *æquus esset cõtra 16 huius, quod fieri non posset, non igitur concurrunt, parallelæ itaque sunt, per* I S *diffinitionem huius. Similiter ostendetur per exteriores, & oppositos, vt ostensum*

est

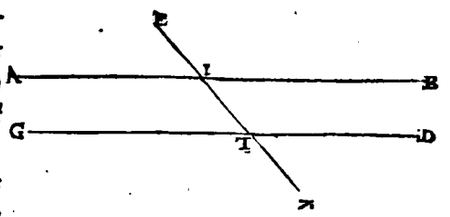
est per A E Z *&* E Z D *interiores oppositos. Nam ipsi* E Z D *æquus est exterior ad verticem (per* 15 *huius) nec non ipsi* A E Z. *Si itaque in binas rectas incidens.*

MONITVM.

In plano huic addidimus, eò quòd licet seruentur reliquæ hypotheses scilicet angulos ab incidente alternos æquales effici, non tamen extra idem planum parallelæ fieri possent, vt videbamus diffinitione 35 *huius.*

Propositio vigesima octaua.

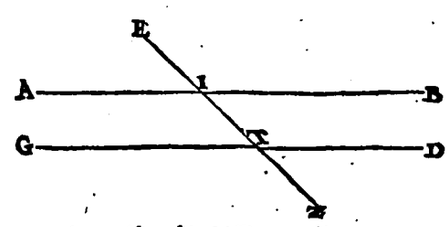
Si in binas rectas lineas recta incidens linea in plano, exteriorẽ angulum interiori & opposito ad easdem partes ęqualẽ fecerit, aut interiores ad easdem partes duobus rectis æquales, parallelæ erunt adinuicem ipsę rectæ lineæ.



Incidat recta E Z *in binas rectas* A B, G D, *efficiens exteriorem angulum* E I B *interiori opposito* I T D *æqualem: Dico* A B G D *parallelas esse, Quoniam (per hypothesim) angulo* E I B *æquus est:* I T D *angulus & eidẽ* E I B *æquus est* A I T *qui ad verticẽ, per* 15 *huius, Bini itaq;* A I T *&* I T D *æquales erũt, per* 1 *com. sent. qui quidem sunt alterni, Ipsæ igitur* A B G D *(per præfatam) erunt parallelæ. Ad secundum, Si interiores ad easdẽ partes* B I T, I T D *duobus rectis ponantur æquales, Recta* Z I *in rectam* A B *cadens, angulos* A I T, B I T, *duobus rectis æquales efficit, per* 13 *huius, sed* B I T *cũ* I T D *duobus rectis æquos per hypothesim similiter efficit. Cõmuni itaque* B I T *ablato, reliqui* A I T I T D *(alterni) erunt æquales, per* 3 *comm. sentent. Parallelæ igitur (per præcedentem) erunt* A B G D *rectæ. Si itaque in binas rectas lineas recta incidens, &c.*

Propositio vigesimanona.

In parallelas rectas recta incidens linea, angulos alternatim sibiipsis æquales, & exteriorem interiori opposito, & ad easdẽ partes æqualem, ac interiores ad easdem partes duobus rectis ęquales efficit.

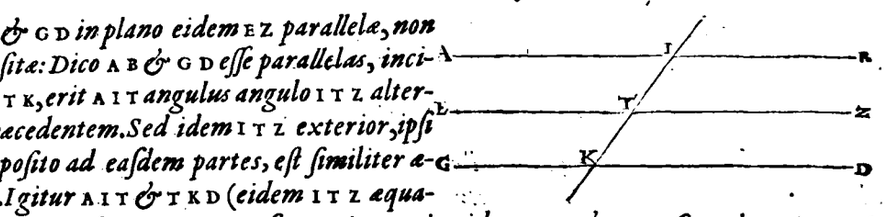


In parallelas A B G D *incidat recta* E Z, *quas secet in* I T: *Dico* E Z *efficere angulos alternos* A I T I T D *æquales. Si enim non credantur, sit aliquis eorum minor, scilicet* I T D, *quoniam itaque super rectam* A B *consistens* Z I *duobus rectis æquos efficit angulos* A I T I T B. *Additur autem ipsi* I T B *alius* I T D *minor ipso* A I T. *Bini igitur* I T B I T D *duobus rectis minores efficiũt angulos, Sequetur itaq; rectas* A B, G D *ad eas partes concurrere in quibus bini illi anguli* I T B, I T D, *interiores consistunt, per* 11 *comm. sententiam: non igitur essent parallelæ, contra hypothesim, quod esset absurdum. Æquales itaque sunt* A I T I T D *anguli: Dico insuper exteriorem* E I B *interiori opposito ad easdem partes. Ipsi* I T D *æqualem esse, cùm* E I B *æquus sit ipsi* A I T, *qui ad verticem, & eidem* A I T *offensus sit æqualis* I T D, *sequetur* E I B *æquari ipsi* I T D, *per* 1. *commu. sentent: Dico præterea interiores ad easdẽ partes duobus rectis æquales efficere, scilicet ipsos* B I T I T D. *Cùm enim recta* Z I *super* A B *consistẽs, angulos* A I T, B I T *(per* 13 *huius) binis rectis æquos efficiat. Æquus autẽ ipsi* A I T *ostensus fuerit* I T D, *sequetur* I T D *&* B I T *æquales binis rectis angulos producere. Duobus itaque rectis æquales erũt* B I T, I T D *interiores ad easdem partes. In parallelas igitur rectas recta incidens linea, &c.*

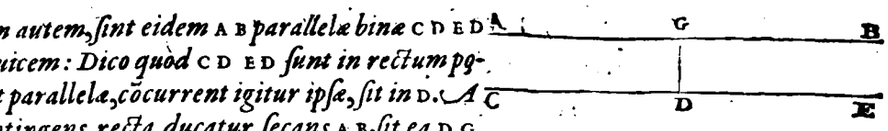
Propositio trigesima.

Quę in plano eidem rectę lineę sunt parallelę, & adinuicem sunt parallelę, aut in rectum positę.

Sint rectæ AB *&* GD *in plano eidem* EZ *parallelæ, non autem in rectum sitæ: Dico* AB *&* GD *esse parallelas, incidat in eas recta* ITK, *erit* AIT *angulus angulo* ITZ *alterno æqualis, per præcedentem. Sed idem* ITZ *exterior, ipsi* TKD *interiori opposito ad easdem partes, est similiter æqualis, per eãdem. Igitur* AIT *&* TKD (*eidem* ITZ *æquales*) *adinuicem erunt æquales, per* 1. *comm. sententiam, qui quidem* AIT *&* TKD *sunt alterni. Parallelæ igitur erunt ipsæ* AB GD, *per* 27 *huius. Quæ itaque eidem rectæ lineæ parallelæ nec in rectum, positæ.*

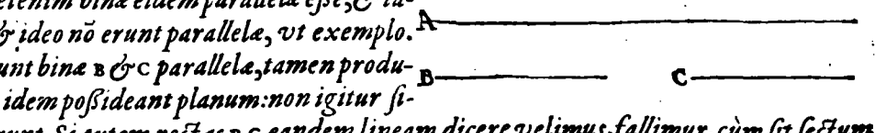


Ad secundum autem, sint eidem AB *parallelæ binæ* CD ED *non autem adinuicem: Dico quòd* CD ED *sunt in rectum positæ, quia non sunt parallelæ, cõcurrent igitur ipsæ, sit in* D. *A signo autem* D *contingens recta ducatur secans* AB, *sit ea* DG, *ipsa efficit angulos* AGD *&* GDC *duobus rectis æquales, per præcedentem, &* AGD *ipsi* GDE *alterno, per eandem. Anguli igitur* GDC *&* GDE *duobus rectis sunt æquales. Si itaque ad aliquam rectam* GD, *duæ* CD ED *angulos duobus rectis æquos efficiant, ipsæ (per* 14 *huius) in directum erunt. Quæ igitur eidem sunt parallelæ, & adinuicem sunt parallelæ, aut in rectum positæ.*



MONITVM.

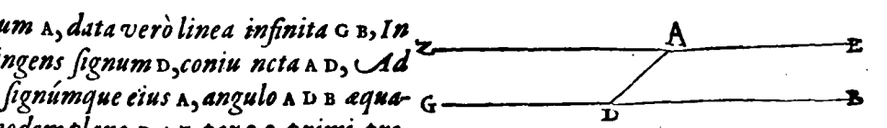
Cùm omnis theorematum textura contineat binas partes, hypotesim scilicet & consequentiam, Et verè hypothesis ea sit natura, vt hæc vnica sit causa sufficiens ad eum effectum producẽdum, qui consequentia dicitur, animaduertendum duximus huius theorematis demonstrationem nõ esse vere syllogismum, quem vocat Aristoteles epistemonicon, hoc est, scientificum. Nam ex huius hypothesi, qua Theon supponit binas rectas eidem parallelas, non necessarium sequitur sibiipsis parallelas esse. Possunt etenim binæ eidem parallelæ esse, & tamen concurrere, & ideo nõ erunt parallelæ, vt exemplo. Eidem A rectæ erunt binæ B & C parallelæ, tamen productæ concurrent, si idem possideant planum: non igitur sibiipsis parallelæ erunt. Si autem rectas BC *eandem lineam dicere velimus, fallimur, cùm sit sectum continuum. Præterea hypothesis ponit binas eidem parallelas esse, nihilque aliud optat, tum demum vt inuicem parallelas statuat sibiipsis, nec adhuc sciens si productæ cõcurrent. Executionem etenim debet præcedere propositio, sola namque executio concursum earum an sit, docet: non igitur aliter quam exequendo, an rectæ* BC *concurrant an non, percipiemus, hypothesis itaque conclusionem generãs, ea integritate debet ornari, vt cuncta, quæ conclusionis necessitati noxia obsistunt, ea prudẽtia detrahantur, qua sola hypothesis positio, conclusionem theorematis necessariam exhibeat. Idem diximus optari planum, vt generalis fiat huius figuræ demonstratio. Nam ablata plani hypothesi, recta* KI *tres rectas propositas nõ necessariò seccat, quinimo rectam* EZ, *forsan extra idem planum in sublimi omitteret. Quare geometria parallelis in plano suppositis, binas ac disiunctas adhibet conclusiones, vt in genere proposita demonstret. Quod si simpilcem velit nec disiunctam adhibere conclusionem, tum ab hypothesi idem planũ reiicit, vt diuino auxilio 9. vndecimi docebit, quo supposito simpliciter nec disiunctim parallelas fore concludet. Alias infinitæ rectæ supponi debuerant rectæ parallelæ vt constaret theorema.*



Propositio trigesimaprima. Problema 10.

Datę rectę lineę infinitę, per datum signum quod in ea non est, parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum signum A, *data verò linea infinita* GB, *In qua sumatur contingens signum* D, *coniu ncta* AD, *Ad rectam autem* AD, *signúmque eius* A, *angulo* ADB *æqualis constituatur in eodem plano* DAZ, *per* 23 *primi, producta* ZA *in* E: *Quoniam in binas rectas* GB ZE *recta* AD *incidens, angulos* ADB DAZ *alternos æquales efficit. Parallelæ erunt rectæ* GB ZE, *per* 27 *huius. Datæ itaque rectæ lineæ infinitæ, per datum signum quod, &c.*



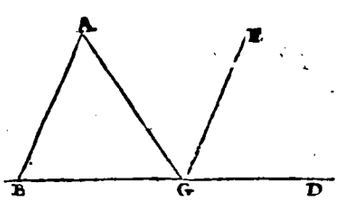
Monit.

MONITVM.

Huius integritatem conſeruantes, à Theonis vocibus paululum digredi cogimur. Inquit enim ille, per datum ſignum datæ rectæ parallelam rectam lineam ducere. Quid tum ſi in eadem propoſita detur ſignum, aut equidem extra propoſitam ſibi in rectum collocetur, per ea ſigna parallela duci minimè poteſt. Quare ne in rectum apponatur extra illam ſignum, infinitam diximus. vt autem reliqua parallela dari valeat, datum extra eam ſignum propoſuimus.

Propoſitio trigeſima ſecunda.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus, binis interioribus & ex oppoſito eſt æqualis. Et trianguli tres interiores anguli, binis rectis ſunt æquales.

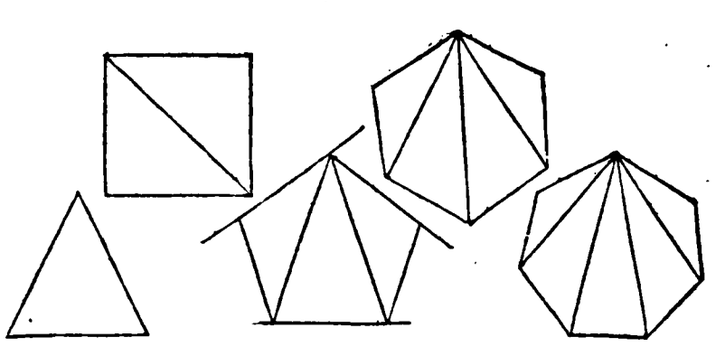


Exponatur A B G *triangulum cuius vnum latus* B G *producatur in* D: *Dico exteriorem angulum* A G D *æquum eſſe binis interioribus* A *&* B *oppoſitis, Per ſignum* G *rectæ* B A *parallela fiat* G E, *ex præfata, in parallelas autem* A B E G *incidens* B D, *angulum* G E D *interiori & oppoſito* A B G *æqualem efficit, per 29 huius. Rurſus in eaſdem,* A B E G *incidens recta* A G, *angulum* A G E *alterno* G A B *æqualem efficit, per eandem. Totus itaque exterior* A G D, *binis* A B G G A B *eſt æqualis, interioribus & ex oppoſito. Ad ſecundum autem: Dico tres cuiuſuis trianguli interiores angulos duobus rectis æquari. Cùm enim recta* A G *ſuper rectam* B D *conſiſtens, angulos* A G D *&* A G B *duobus rectis æquos efficiat, per 13 huius, Sed* A G D *oſtenſus eſt binis qui ad* A *&* B *interioribus æqualis eſſe. Reliquus itaque* A G B *interior (ſibiipſi æquus) tres interiores trianguli angulos, binis* A G B A G D *æquales eſſe concludet, & proinde binis rectis (ex prima comm. ſenten.) æquos. Omnis itaque trianguli vno latere producto exterior, &c.*

Corollarium primum.

Si triangulorum bini vnius anguli, binis alterius æquales fuerint, reliquus reliquo æqualis erit. *Nam ex ſecunda huius parte, tres quorumuis triangulorum anguli, tribus æquales exiſtunt, nempè vtrique duobus rectis. Ablatis itaque binis æqualibus, reliqui (per primam ſenten.) æquales erunt.*

Corollarium ſecundum.

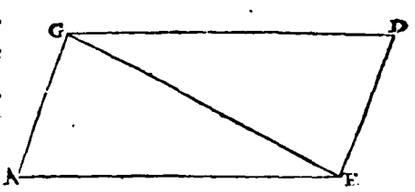


Ex hac fœliciter elicere poſſumus cuiuſlibet poligoni angulos tot binis rectis æquiualere, quot triangula poligonum ſuſcipit, angulos in poligoni angulis conſtituentia. *Vt autem demonſtremus quot poligonis incidant triãgula, Dicemus angulorum Poligoni numerum, ſemper binario triangulorum numerum ſuperare. Nam cuiuſlibet propoſiti poligoni ab vno quouis angulorum ad ſingulos oppoſitos ductis rectis, hæc deſcribuntur triangula. Quia verò duo proximi remanent anguli non oppoſiti, nulla intra figuram ad illos linea duci poteſt, vt his patet exemplis. Quoniam in trigono nullus eſt oppoſitus angulus, nulla poteſt duci recta ab angulo in angulum, quæ ipſum in bina aut plura ſeccet triangula, in triangulum cadens, in quadrangulo verò, vna dicitur ad oppoſitum angulum, quæ tantùm in bina ipſum ſecat triangula. Pentagonum verò in tria, Exagonum in quatuor, Exptagonum in quinque, & ſic infinitæ, numero angulorum, numerum triangulorum comprehenſorum binario ſemper excedente. Quòd autem plura vel pauciora poligonis conuenire non poſſint triangula, hac lege præſcriptis, patet. Cùm quodlibet horum triangulorum, angulis poligonorum duorum rectorum*

angulorũ quantitatem conferat, ſequetur quinque triangula contuliſſe eptagono decem angulos rectos, quatuor verò exagono octo angulos rectos, tria autem pentagono ſex rectos, duo inſuper quadrilatero quatuor rectos, trilatero verò vnicum duos rectos, per huius demonſtrata. Quod ſi plura deſcriberentur, in ipſis poligonis triangula, eorum anguli pluribus æquipollerent rectis, ſed & paucioribus, eadem itaque quantitas ſeipſa maior vel minor eſſet, quòd eſſet abſurdum. Non igitur plura vel pauciora ipſis conuenient triangula, angulos in poligonorum angulis habentia. Hæc in irregularium figurarum tipis docere voluimus, vt certior pateat regularium methodus. Cæterùm cùm oſtenderimus angulorum poligoni numerum, ſemper binario numerum triangulorum exceſſiſſe, manifeſtum erit duplum angulorum poligoni numerum, excedere duplum triangulorum numerum (hoc eſt, angulorum rectorum à triangulis collatorum, qui ſemper ipſis triangulis duplus eſt) duplo binarij, hoc eſt quaternario, vt latius quandoque demonſtrabit vndecima ſeptimi, ſi quidem iſtud demonſtratione egeat. Quare ſequetur angulos exteriores cuiuſlibet poligoni, quatuor rectis æquales eſſe, vt pateat in pentagoni figura. Cum in qualibet figura angulus interior cùm exteriore, duobus rectis æquipolleant, ex 13 huius. Sequetur interiores & exteriores ſimul ſumptos, totidem rectis æquiualere, quotus eſt duplus angulorum poligoni numerus, nam quilibet duos rectos proferet. Sed duplus numerus angulorum poligoni numerum angulorum rectorum intrinſecorum quaternario excedit. Reliqui igitur exteriores quatuor rectis æquales erunt in quouis poligono.

Propoſitio trigeſimatertia.

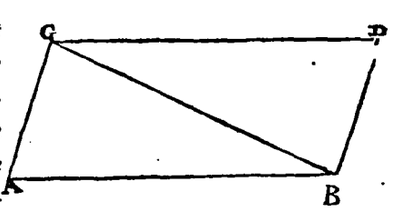
Æquas & parallelas ad eaſdem partes rectę lineę coniungentes, & ipſę æquales & parallelę ſunt.



Sint æquales & parallelæ rectæ lineæ A E G D, *coniungant autem eas ad eaſdem partes* A G, *ad alias verò eaſdem* E D, *coniuncta* G E: *Dico* A G E D *æquales eſſe, & parallelas, quoniã in parallelas* A E G D *incidit* G E, *angulos* A E G E G D *æquales efficit, per 29 huius. Triangula igitur* A E G, D G E, *vnum angulum* A E G. *Cui* D G E *æqualem, & duo latera* A E E G, *duobus* D G G E *æqualia habentia, efficient per 4 primi. baſes* A G E D *æquales. Et reliquos angulos* A G E *&* D E G *æquales. In binas itaque rectas* A G, E D, *recta* G E *incidens, angulos* A G E *&* D E G *alternos æquales efficiens, parallelas eſſe rectas* A G E D *indicat, per 27 huius. Parallelæ itaque & æquales erunt* A G *&* E D *æquas parallelas* A E G D *coniungentes. Æquas igitur & parallelas ad eaſdem, &c.*

Propoſitio trigeſimaquarta.

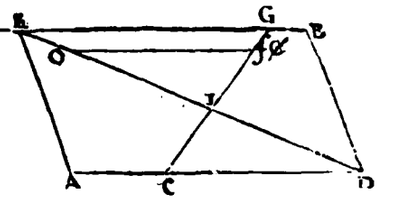
Parallelogrammorum locorum latera, quæ ex oppoſito & anguli, æqualia ſunt adinuicem, & dimetiens ea bifariam ſecat.



Sit parallelogrammum A B G D, *cuius latera oppoſita ſint* A B G D *&* A G B D: *Dico* A B, *&* G D *æqualia eſſe, ſimiliter &* A G *ipſi* B D, *& inſuper angulos oppoſitos æquos eſſe, ac dimetientem* G E *illud ſecare bifariam. Quoniam parallelæ ſunt per 36 diffinit. huius* A B *&* G D, *necnon* A G *&* B D, *in eas cadens recta* G B, *angulos* A B G, *&* D G B *æquos efficit, inſuper* A G B, *&* D B G *alternos, per 29 huius. Et proinde totum* A B D *toti* D G A *angulum. Triangula igitur* A B G *&* D G B *duos angulos* A B G A G B *duobus* D G B D B G *æquos, & latus* G B *commune habentia per 26 huius ſunt æqualia, & reliquos angulos* G A B G D B, *ac reliqua latera* G D *ipſi* A B *&* A G *lateri* B D *habent æqualia. Parallelogrammi igitur* A B G D *loci latera quæ ex oppoſito,* A G *lateri* B D, *&* A B *ipſi* G D, *& anguli* A *angulo* D, *&* A B D *ipſi* D G A, *ſunt æqualia, dimetiensq;* B G *parallelogrammum ſeccat bifariam, in* A B G *&* D G B *æqualia triangula.*

Corollarium.

Recta parallelogrammum quouiſmodo ſecans bifariam, & eius dimetientem bifariam ſecabit.



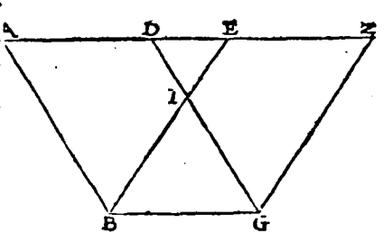
Si enim fieri poſſit rectam parallelogrammum ſecantem bifariam, dimetientem bifariam non ſecare. Eſto recta GC *ſecans bifariam parallelogrammum* ABED, *dimetientem verò eius* DE *inæqualiter in* I. *Sit autem* IE *maior portione* ID, *& rectæ* ID *æqualis ponatur* IO, *perque* O *ſignũ, ipſis* AD BE *parallela ducatur* OF, *per* 31 *huius. Triangulorũ itaque* FOI CDI *bini anguli, binis ſunt æquales, ſcilicet* IOF *&* IDC, *per* 29 *primi, &* FIO *ipſi* CID, *per* 15 *eiuſdem, vnũq́ latus* ID *vni* IO *æquale. æqualia igitur erunt triangula per* 26 *huius, maius itaque erit totum* EIG *ipſo* DIC *triangulo. Cùm autem dimidium parallelogrammi ſupponatur eſſe trapeſium* GBDC, *Dimidium verò eiuſdem eſt triangulum* EBD, *per hanc, vt patuit. Ab æqualibus itaque* GB DC *&* EBD, *commune auferatur trapeſium* GB DI, *ſequetur reliquum* DIC *reliquo* EIG *æquum eſſe, ſed minus oſtenſum, quod fieri non poteſt. Recta igitur ſecans bifariam parallelogrammum, dimetientem eius inæqualiter non ſecabit. Quare æqualiter ſecabit.*

MONITVM.

Hoc ideo contulimus corollarium, vt quandoque nutu diuinæ clementiæ demonſtrandis ſolidis ferat compendium.

Propoſitio trigeſimaquinta.

Parallelogramma in eadem baſi & in eiſdem parallelis exiſtentia, adinuicem ſunt æqualia.



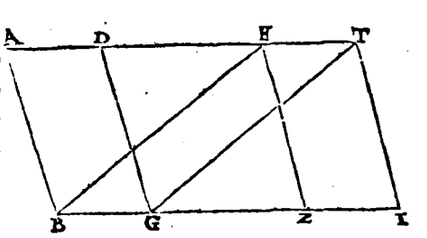
Sint ſuper eadem baſi BG *& in eiſdem parallelis* AZBG, *parallelogramma* ABDG *&* EBZG: *Dico ea* ABDG *&* EBZG *parallelogramma eſſe æqualia. Cùm parallelogramma ſint æquales erunt ſingulæ* AD *&* EZ *rectæ ipſi* BG *quæ ex oppoſito, per præcedentem, & igitur adinuicem. Communis eis addatur* DE, *æquales erunt* AE *&* DZ: *Sed* AB *ipſi* DG, *&* BE *rectæ* GZ *(oppoſitæ) æquantur, per eandem. Angulus verò* EAB *angulo* ZDG *æquus eſt, cùm in parallelas* ABDG *cadat* ZA, *per* 29 *huius. Triangula igitur,* ABE *&* DGZ *(per* 4 *huius) ſunt æqualia: Cõmuni verò ablato* DIE, *reliquum* ADIB *trapeſium, reliquo* ZEIG *trapeſio æquum erit, per* 3 *comm. ſenten. Eiſdem trapeſiis autem commune addatur* BIG *triangulum, totum* ABDG *parallelogrammum toti* EBZG *æquum erit, Parallelogramma itaque in eadem baſi & in eiſdem parallelis, &c.*

MONITVM.

Cum hac & deinceps optabit Euclides triangula & parallelogramma in eiſdem eſſe parallelis, non in eiſdem ipſo actu intelligemus: ſed in parallelis æquali à ſe ſpatio diuulſis, quas eaſdem iure dicere poſſumus, eò quòd Geometria quantitatem, non tãtùm ſitum aſpectet. Nos etenim ſitum liberè diſponimus (quod licet) ad demonſtrandorum facilitatem.

Propoſitio trigeſimaſexta.

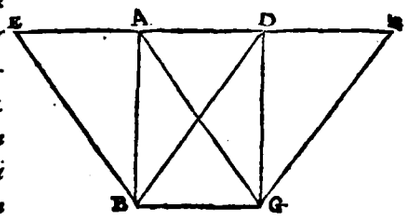
Parallelogramma in æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis exiſtentia adinuicem ſunt æqualia.



Sint in æqualibus baſibus BG, ZI, *& eiſdem parallelis* AT, BI, *parallelogramma* ABDG, *&* EZIT: *Dico ea eſſe æqualia, coniungantur* BE *&* GT *rectæ. Cùm autem æquales & parallelæ ſint* BG, *&* ET, *rectæ eas coniungentes* BE *&* GT, *æquales & parallelæ erunt, per* 33. *huius. Parallelogrammum igitur (per* 36 *diffinitionem huius) erit* BETG. *Quia verò* BETG *eſt ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis cum parallelogrammo* ABDG, *ea (per præcedentem) ſunt æqualia. Similiter æquum oſtendetur* BETG *ipſi* EZIT: *& proinde eidem* BETG *æqualia, adinuicem æqualia erunt, ſcilicet* ABDG *ipſi* EZIT. *Parallelogramma itaque inæqualibus baſibus & in eiſdem parallelis exiſtentia, &c.*

Propoſitio trigeſima ſeptima.

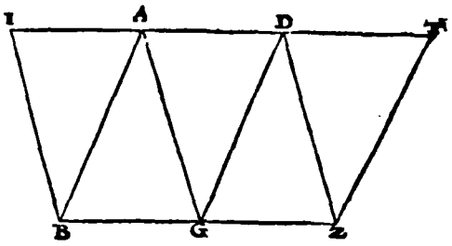
Triangula in eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, adinuicem ſunt æqualia.



Sint triangula A B G *&* D B G, *in eadem baſi* B G *& eiſdem parallelis* A D, B G. *Dico* A B G *&* D B G *triangula eſſe æqualia. Per ſignũ* G *rectæ* B D, *parallela ducatur* G Z, *per* B *verò ipſi* A G *parallela fiat* E B, *concurrentes cum recta* A D *productа in ſignis* Z *&* E. *Parallelogramma erunt* E G *&* B Z, *per 36 diffinitionem huius, quæ (per 35 huius) ſunt æqualia. Sed parallelogrammi* E G *dimidium eſt* A B G *triangulum. Ipſius verò* B Z *dimidium eſt* D B G, *per 34 huius: ſunt enim* A B, D G *dimetientes. Triangula itaque* A B G *&* D B G *æqualia ſunt adinuicem, per 7. comm. ſententiam. Triangula igitur in eadem baſi & in eiſdem.*

Propoſitio trigeſimaoctaua.

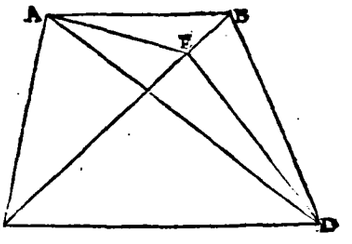
Triangula in æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta, adinuicem ſunt æqualia.



Sint triangula A B G, D G Z, *in æqualibus baſibus* B G, G Z, *& in eiſdem parallelis* B Z, A D: *Dico ea eſſe æqualia. Per ſignum* Z *rectæ* G D *parallela fiat* Z T. *ipſi verò* A G *parallela ſit* I B, *producta* A D *in* T *& in* I. *Parallelogramma erunt* G T, G I *& æqualia per 36 huius. Et cùm eorum demetientes ſint* D Z *&* A B, *parallelogrammorum æqualium, dimidia erunt triangula* A B G, D G Z, *per 34 huius, quæ (per 7 commu. ſententiam) ſunt æqualia. Triangula itaque in æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta.*

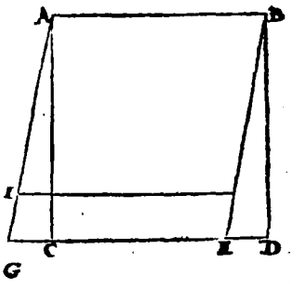
Propoſitio trigeſimanona.

Triangula æqualia, in eadem baſi ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis.



Proponantur triangula A G D, B G D *æqualia, ſuper eadem baſi* G D *in plano conſtituta, ad eaſdem partes* A B: *Dico parallelas eſſe* A B *&* G D, *quod ſi* A B *non ſit ipſi* G D *parallela, ſit alia quædã* A E *per ſignum* A *rectæ* G D *parallela, coniunctis* E D, E G. *Cùm autem triangula* A G D *&* E G D *ſint in eadem baſi & parallelis, ea erunt per 37 huius æqualia. Æquale igitur eſt* E G D, *ipſi* A G D. *Sed eidem* A G D *æquum fuit* B G D, *igitur* B G D *totum ipſi* E G D *parti erit æquale, quod fieri nequit. Similiter ſi* E G D *ſit ipſo* B G D, *maius oſtendetur, per ſignum igitur* A *ipſi* G D *alia quàm* A B *parallela non ducitur. Quare parallelæ ſunt:* A B, G D. *Triangula igitur in eodem plano, &c.*

Corollarium.



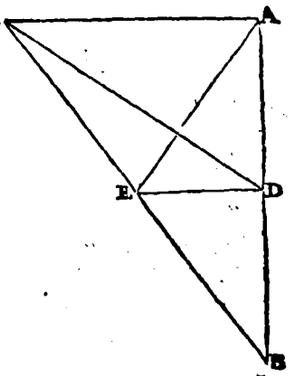
Idem ſequitur in parallelogrammis: *Nã ſi ſuper* A B *recta baſi fuerint parallelogrãma æqualia* A B C D *&* A B G E, *neceſſe eſt ea eſſe in eiſdem parallelis. Si autem non ſed extra, vel intus, vnum eorum conſtitur, ipſi* A B C D *æquum ſit* B I *intus conſtitutum. Idem igitur* B I *æquum eidem* A D, *æquale erit reliquo* A B G E. *Cui quidem æquum eſt* A B C D, *per 35 huius, & primam communem ſentẽtiam. Pars ſcilicet toti, quod eſt abſurdum. Non igitur cadit extra vel intus. In parallelas igitur cadunt æqualia parallelogramma ſuper eadem baſi.*

Corollarium ſecundum.

Infert ab hac Campanus, Linea ſecans bifariam duo trianguli latera, reliquo eſt parallela. *Cùm autem trianguli* A B C, *latera* A B, B C *ſecta ſint bifariam, æqualia erunt* A E D *&* D E B, *ſimiliter*

&

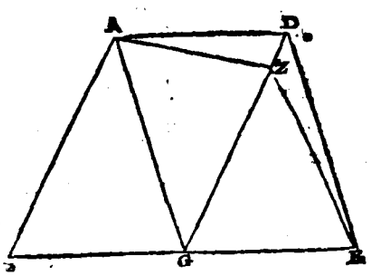
& C D E eidẽ D E B, per 38 huius, igitur adinuicẽ erunt æqualia A E D C & C D E (per 1 com. sentẽtiam) sed ea super eadẽ basi D E constituuntur. In eisdem igitur sunt parallelis, D E & A C. Recta igitur D E secans bifariam, A B B C duo latera, reliquo A C est parallela.



Propositio quadragesima.

Triangula æqualia in æqualibus basibus ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.

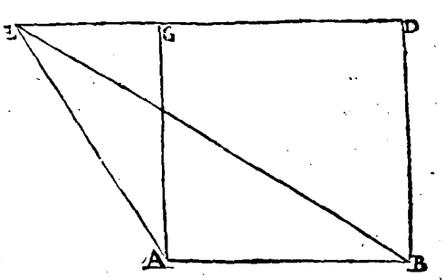
Proponantur super æqualibus basibus B G G E, triangula A B G & D G E æqualia, ad easdem partes in plano constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis A D, B E. Si verò non credatur A D esse parallela rectæ B E, sit per signum A alia quædam A Z, ipsi B D parallela, coniuncta Z E. Triangula itaque A B G & Z G E erunt æqualia (per 38 huius) sed eidem A G B ponitur æquum D G B triangulum. Igitur Z G E & D G E erũt adinuicem æqualia, pars scilicet toti, quod fieri non potest. Non igitur per signum A ipsi B E alia parallela erit quam A D. Triangula itaque æqualia in æqualibus basibus ad easdem partes constituta, &c.



Propositio quadragesimaprima.

Si parallelogrammum & triangulum eandem basim habuerint, & in eisdem fuerint parallelis, trianguli parallelogrammum duplum erit.

Parallelogrammum A B D G & triangulum A E B eandem habeant basim A B, & in eisdem sint parallelis A B, E D. Dico parallelogrammum A B D G duplum esse trianguli A E B, ducatur A D dimetiens parallelogrammi. Quæ quidem bifariam secat ipsum, per 34 huius. Duplum itaque erit A B G D trianguli A B D. Sed A D B ipsi A E B (super eadem basi) æquum est, per 37 huius, parallelogrammum igitur A B G D, trianguli A E D duplum est. Si itaque parallelogrammum & triangulum eandem, &c. Idem ostendetur super æquis basibus, nam super alia basi æquali rectæ A B constitutum parallelogrammum, ipsi A B G D æquum erit (per 36 huius) & ideo trianguli A E B duplum.



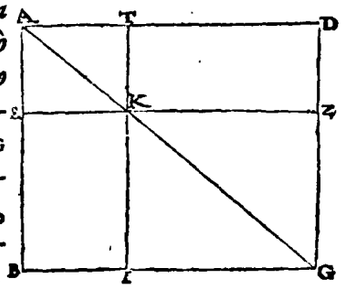
Propositio quadragesimasecunda. *Problema* 11.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

Esto datum triangulum A B G datus verò angulus C D H, oportet iam in dato angulo C D H, æquale parallelogrãmum ipsi A B G cõstituere. Secetur B G bifariam in E & ducta A E, ad rectam D H signumq; eius D, angulo E B A æqualis angulus ponatur H D I. Rectæ verò B B æqualis sit D H, ipsi autẽ B A æquetur D I, iuncta I H, æqualia erunt A B E & I D H triangula, per 4 primi. Per signum H rectæ D C parallela sit H K, per signum verò I ipsi H D parallela fiat I C, secans H K in K, parallelogrammum erit C D K H, per 36 diffinit. huius. Et duplum trianguli H D I, per præcedentem, cui æquum fuit A E B. Duplus igitur erit C D K H ipsius A E B, cuius duplum est A B G, per 38 huius: ipsa itaque A B G & C D K H sunt æqualia, per 6 com. sententiam. Dato igitur triangulo æquale parallelogrammum &c.

Propoſitio quadrageſimatertia.

Omnis parallelogrammi loci eorum quæ circa dimetientem ſunt parallelogrammorum ſupplementa, ſibi inuicem ſunt æqualia.



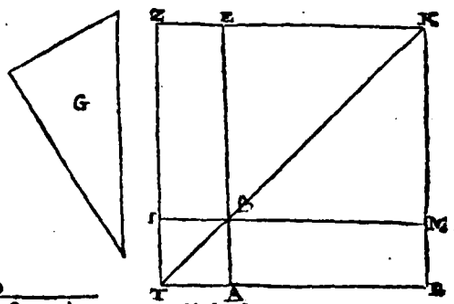
Sit parallelogrammum A B G D, *cuius dimetiens ſit* A G. *Circa dimetientem verò exiſtant* E T I Z *parallelogramma, eorum verò ſupplementa (reliquum totius* B D *reſtituentia) ſint* B K, K D: *Dico ea eſſe æqualia, quoniam dimetient* A G *ſecat bifariam parallelogramma* B D *&* I Z, *æqualia erunt* A E K, A T K, *adinuicem, &* K I G *ipſi* K Z G, *necnon* A B G *ipſi* A D G, *per 34 primi. Si igitur ab æqualibus* A B G *&* A D G, *æqualia tollantur,* A E K, K I G, *ipſis* A T K, K Z G, *reliqua* B K, K D (*per 3 communem ſententiam*) *æqualia erunt. Omnis igitur parallelogrammi loci, &c.*

MONITVM.

Idem ſequetur licet quæ circa dimetientem communem angulum non habeãt toti: nam ab æqualibus æqualia ablata ſemper æqualia relinquunt, quapropter communem angulum optari non diximus.

Propoſitio quadrageſimaquarta. *Problema* 12.

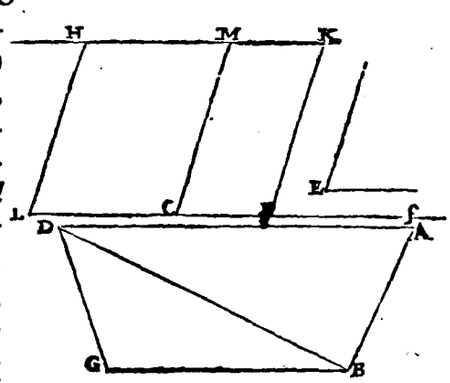
Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere, dato angulo rectilineo æquiangulum.



Sit data recta linea A B, *datum verò triangulum* G, *datus autem angulus* D, *oportet ad rectam* A B *parallelogrammum cõſtituere, æquiangulum ipſi* D, *æquale verò ipſi* G. *Producatur* A B *recta in* E. *Ad datam rectam* A B *& ſignũ eius* B, *æqualis angulus ipſi* D *dato ponatur (per vigeſimam tertiam huius)* E B I. *Dato autem triangulo* G, *æquale parallelogrammum ponatur in dato angulo* E B I: *ſitque* E Z I B, *per 42 huius, perficiatúrque parallelogrammum* A I, *ſitq́;* A I T B, *coniuncta diametro* T B, *quæ producatur in* K, *in quem concurrat extenſa* Z B K: *ipſi verò* Z K *parallela ſit* T L, *rectæ autem* Z T, *parallela ſit* K L, *productæ* A B *in* M. *Quoniam parallelæ ſunt* Z E K I B M *&* T A L *rectæ, & parallelæ item ſunt* T I Z A B E *&* L M K: *dimetiens verò* T B K, *parallelogramma erunt (per 36. diffinitionem)* A I, L Z *&* M E, *& circa eundem dimetientem* T K (*per conſtructionem*) *erunt* A I *&* E M. *Eorũ itaque ſupplementa* Z B, B L *erunt adinuicem æqualia, per præcedentem: Sed ipſi* Z B *æquum eſt oſtenſum* G *triangulũ. Parallelogrammum igitur* A B M L (*eidem* Z B *æquum*) *triangulo* G *æquum erit per* I. *communem ſententiam. Quia verò angulus* A B M, *angulo* E B I *ad verticem æquus eſt, per* 15. *huius: eidem porro* E B I *æquus eſt datus* D *angulus. Ipſi igitur* D *dato, æquus erit* A B M *angulus. Ad datam itaque rectam* A B, *dato triangulo* G, *æquale parallelogrammum* A B M L *conſtituimus, dato angulo* D *æquiangulum, in angulo ſcilicet* A B M.

Propoſitio 45. *Problema.* 13

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtruere, dato angulo rectilineo æquiangulum.



Sit rectilineum quoduis A B G D, *cuius ſubtendat angulum* B A D *recta* B D, *& ſic reliquos (quotcunque fuerint) angulos, rectilineũ in triangula reſoluentes, ſcilicet* A B D, B D G. *Data verò recta, ſit* L H, *& datus angulus eſto* E, *oportet ad rectam* L H, *parallelogrammum conſtruere, æquale rectilineo* A B G D: *æquiangulum verò ipſi* E. *Ad datam rectam* H L, *ſignum q́; eius* E, *æqualis ipſi* E *angulus ponatur* H L F, *per 23. huius. Dato quidem triangulo* A B D *ad rectam* H L, *angulum q́;* H L F, *ipſi* E *dato æquiangulum, æquale parallelogrammum conſtituatur* H L C M, *per præcedentem: ad rectam verò* M C, *angulum autem* M C F, *æ-*

quale

quale ipsi B D G *triangulo parallelogrammũ constituatur similiter in* C D K, *per eandẽ, quoniã enim binæ* H M M K *eidem* L F *sunt parallelæ, & concurrunt in* M, *tota igitur* H K *in rectũ ponitur, per* 30 *huius, & per eandem parallelæ erunt* H L *&* K I, *eidem* M C *parallelæ. Parallelogrammum igitur* L K *æquum erit binis* A B D *&* B D G, *& proinde rectilineo* A B G D, *constitutum autẽ est in angulo* H L F, *dato* E *æquiangulum. Ad datam igitur rectam* H L, *dato rectilineo* A B G D, *æquale parallelogrammum* L H K I *constrinximus dato angulo* E *æquiangulum, nempe in angulo* H L F.

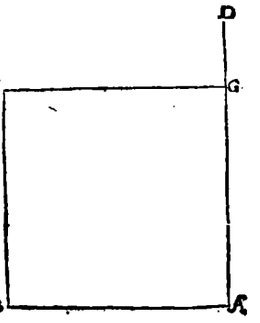
MONITVM.

Antecedenti theoremati & huic apposuimus figuras describi in angulo, non dato, sed ipsi dato æquiangulo. Cùm enim cogimur ad datam rectam illas applicare, perspicuum est non semper lineam datam, ad datum esse angulum, quare sufficit in 44 *dixisse, ad datam lineam, & dato angulo æquiangulum parallelogrammum, triangulo æquum describendum, vt postmodum eius auxilio, per hãc cuiuis rectilineo æquum parallelogrammum describere possimus, præstat etenim illud describi ad datam rectam quam ad datum angulum, cùm eidem ad datam rectam posito, angulus dato æquiangulus facile coaptetur, vt geometriæ plus amplietur quàm restringatur facultas. Id præcauẽtes esse necessarium ad aliquas sexti demonstrationes, quibus non in dato angulo, sed ipsi æquiangulum fit parallelogrammum.*

Propositio quadragesimasexta. Problema 14.

Ex data recta linea, quadratum describere.

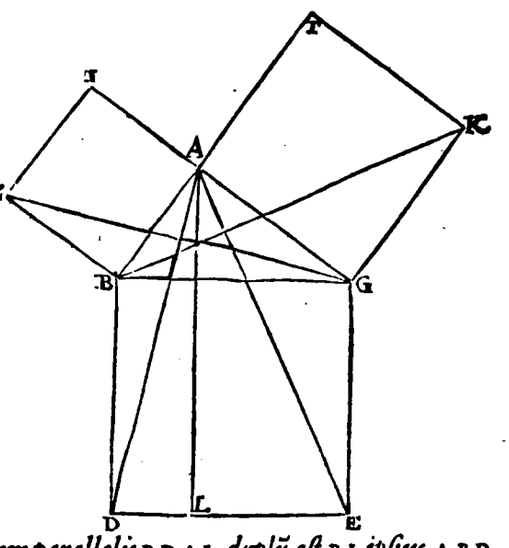
Data recta sit A B, *cui ad rectos excitetur ad signum* A *recta* A D, *per* 11 *huius, ipsi* A B *æqualis ponatur* A G, *cui per signũ* B *parallela ducatur* B C, *ipsi verò* A B, *per signũ* G *fiat parallela* G C. *Cùm enim parallelæ sint quatuor rectæ, parallelogrmmum erit (per* 36 *diffinitionem) & æquilaterum, per* 34 *huius, cùm* B C, C G *sint ipsis* A B, A G *æqualibus, æquales. Quia verò angulus* A *rectus est, &* C *(per eandem) rectus erit. In parallelas autem* A G, B C *cadens* A B, *angulos* A *&* B *duobus rectis æquos (per* 29 *huius) efficit, rectus est quidem* A, *rectus igitur erit* B, *& rectus proinde* A G C, *ex oppositeo, per* 34 *huius. Atqui quadrilaterum, æquilaterum, & rectangulum est* A B C G, *quod igitur quadratum erit, per* 30 *diffinitionẽ. Ex data itaque recta* A B, *quadratum descripsimus* A B G C.



Propositio quadragesimaseptima.

In triangulis rectangulis, quadratum quod à latere rectum angulũ subtendente fit, æquum est quadratis quæ fiunt ex lateribus rectum angulum continentibus.

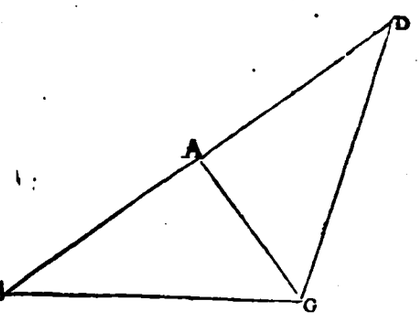
Esto triangulum A B G, *habens angulum* B A G *rectum: Dico quadratum quod fit ex latere* B G, *æquum esse eis quæ fiunt ex lateribus* A B *&* A G *rectum angulum continentibus. Describantur quadrata (per præcedẽtem) ex* A B *&* A G *&* B G, *scilicet* A B Z I A G K T *&* B G E D. *Rectis autem* B D, G E *per signum* A *parallela excitetur* A L, *per* 31 *huius, parallelogramma erunt* B L G L, *nectantur* A E, A D, B K, G Z. *Quoniam triãgulorum* A B D *&* Z B G *anguli* A B D *&* Z B G *sunt æquales, cùm constent recto & angulo* A B G *singuli, & æquis contiñentur lateribus, nempe eorundem quadratorum lateribus* A B, B D, *ipsis* Z B B G *æqualibus, æqualia erunt triangula* A B D *&* Z B G. *Cùm autem in rectam* B A *binæ* G A, A I *duos rectos efficiunt, tota* I G *in rectum est, per* 14 *huius, similiter reliqua* B T. *Cùm insuper triangulũ* A B D *& parallelogrammũ* B L, *sint super eadem basi & eisdem parallelis* B D A L, *duplũ est* B L *ipsius* A B D



(per 41 huius) quia ſimiliter triangulum Z B G & quadratum A Z ſuper eadem ſunt baſi Z B, & in eiſdem parallelis Z B I G, duplum eſt (per eandem) A Z ipſius Z B G. Igitur B L parallelogrammum & Z D quadratum, æqualium triangulorum A B D Z B G duplicia, adinuicem erunt æqualia. Simili argumento oſtendemus reliquum quadratum A G K T, rectangulo G L æquum eſſe. Bina igitur A B Z I & A G K T quadrata, toti B G E D erunt æqualia: & proinde quadratum quod fit ex B G æquum eſt eis quæ fiunt ex A B A G lateribus. In triangulis itaque rectangulis quadratum quod à latere, &c.

Propoſitio quadrageſimaoctaua.

Si trianguli quod ab vno laterum quadratum, æquale fuerit binis quæ ex reliquis trianguli lateribus quadratis, angulus comprehenſus ſub reliquis trianguli duobus lateribus, rectus erit.



Sit A B G triangulum, cuius latus G B efficiat quadratum æquale binis ex reliquis lateribus A G A B quadratis: Dico angulum ſub ipſis A G A B comprehenſum ſcilicet B A G, rectum eſſe. Ad rectam G A ſignúmque eius A perpendicularis excitetur A D, quæ ſit æqualis ipſi A B, & coniungatur D G. Et quoniam A D & A G rectæ ipſis B A & A G ſunt æquales, ex ipſis A D & A G quadrata, æqualia erunt eis quæ ex B A A G quadratis, Sed eis quæ ex A D A G, æquum eſt, per præcedentem, quod fit ex G D, cùm ſit rectus D A G angulus. Ergo eis quæ ex B A A G, æquum erit idem quod ex D G, Eis autem quæ ex B A A G, æquum eſt per hyppotheſim quod ex B G. Quæ igitur ex G D & B G quadrata ſunt æqualia, & proinde rectæ B G G D ſunt æquales. Triangulorum itaque A B G & A G D duo latera A D A G, duobus A B A G, & baſis D G baſi G B ſunt æqualia: angulus igitur B A G, angulo D A G recto æquus erit, per 8 huius, & itaque rectus. Si igitur trianguli quod ab vno laterum quadratum, æquale fuerit, &c,

MONITVM.

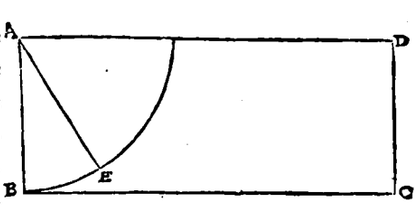
His duabus proximis propoſitionibus, innumeroſa admodum conferrentur aquiſita, ſi iam expoſuiſſet Euclides quid ſit ratio, ſiue proportio, qua namque arte ſuper datam conſtituatur rectus angulus lineam, quidve ſit lineæ potentia, quorum cùm ad finem ſextæ ventum ſit, aliqua ab his orta enarrabimus, interim his quæ ad futura demonſtranda neceſſariò exhibentur contenti.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO-
num reſtitutarum Liber ſecundus.

Diffinitio prima.

OMNE parallelogrammum rectangulum, ſub duabus rectum angulum comprehendentibus rectis lineis, dicitur contineri.

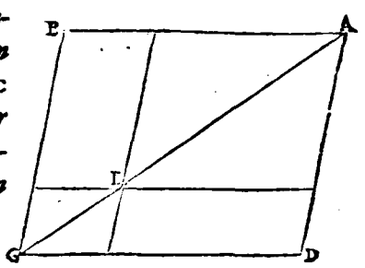
Expoſuimus 36 diffinit. primi, quid ſit parallelogrammum, Genus inquam quatuor quadrilatera complectens, ſcilicet quadratum, alterolongius, rhombum, & rhomboidem. Cùm enim quadratum aut alterolongius complectimur, parallelogrammum dicimus rectangulum, eò quòd vnica ſit tantum recti anguli quantitas. Cùm verò rhombos aut rhomboides intelligimus, ea tantùm parallelogramma in genere nuncupamus, Nam nec ea ambligonia, nec quidem exigonia dici poſſunt, cùm ex vtroque angulorum genere ſingula conſtruantur, obtuſis ſcilicet & acutis, quorũ infinita eſt quantitatis diuerſitas, recti verò anguli vnica. Quare deffiniens hãc Euclides, ſub quibus menſuris determinetur ſiue exprimatur parallelogrammum, illud exprimi dicit ſub duabus rectis angulum rectum continentibus, eò quòd earum rectarum ſemper ſimilis inclinatio (quæ anguli quantitatem efficit) æquales metiatur areæ magnitudines. Quòd ſi binæ rectæ ad obliquum angulum (acutum ſcilicet aut obtuſum) conſtituerentur, ille metiendis ſuperficiei longitudini & latitudini non conuenirent. Superficies etenim cùm per 5 diffinitionem primi exponitur, eſt, quæ longitudinem latitudinémque habet. Cùm autem ad longitudinem comparanda erit latitudo, earum binæ menſores rectæ lineæ, ſeſe ad rectos ſeccant angulos, vt dicemus 4 diffinitione tertij de diſtantia à centro, & tertiam geometriæ dimenſionem, illas vtraſque ad rectos angulos rurſum ſecare, ſcilicet ſublimitatem. Nam is rectus angulus vnica inclinatione linearum compoſitus, eandem pro ſuæ lineæ longitudine exprimit latitudinis quantitatem, nihil ſibi de alia dimentione ſumens. Quòd quidem non efficit acutus aut obtuſus, eò quòd vtriuſque eorum infinitæ ſint diuerſitates inclinationis linearum. Parallelogrammum igitur dixit Euclides rectangulum ſub duabus rectum angulum continentibus exprimi, vt altera earum longitudinem reliqua verò eius latitudinem nulla fallacia exprimat, vt doceamus hac figura.



Cùm AB AD *rectæ ad angulum rectum coeant, rectam* AD *longitudinem* AB *verò rectanguli* AB CD *latitudinem exprimet. Quòd ſi eidem* AB *æqualem rectam ad obliquum conſtituamus angulum* DAE, *ipſius parallelogrammi latitudinem non exprimemus. Ipſa namque* AE *per angulum acutum ipſi* AD *copulata, eidem infinitas latitudinis quantitates (ob acutorum angulorum infinitas differentias) attribuet, & proinde incertas. Vt igitur certam datæ longitudini attribuat latitudinem, eam per rectas angulum rectum conſtituentes proferre voluit Euclides. Si verò per motum intelligere velimus, Dicemus quantum efficiet motum ſignum* A *per lineam* AB *vſque ad* B, *tantùm efficere ſimul ſingulas rectæ* AD *partes, vſque ad rectam* BC, *& is motus deſcribet parallelogrammum* AB CD, *& rectangulum, cùm motus fiat ad rectum angulum longitudinis. Si verò per obliquum moueatur angulum vt per* AE *ſignum* A, *is motus lineæ,* AD *rhombum aut rhomboidem ſimiliter deſcribet. Præterea recta* AE *angulum obliquum ad longitudinem* AD *efficiens, de vtraque confuſæ ſibi ſumit: nam plani longitudinem ab* AB AD DE *in* E *ſigno limitat, latitudinémque* AB AD *in* BC *per idem* E *ſignum breuiat, idque confuſè, ac citra omnem diſcernendi ſpeciem, ob angulorum obliquorum infinitas quantitates. Quare recta ad longitudinem* AB *angulos obliquos efficiens, iudicandi latitudinis penitus aliena reperitur, ſed ideo ſoli rectæ angulum rectum conſtituenti ad longitudinem* AB *id congruit.*

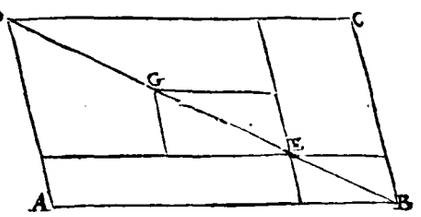
Diffinitio 2.

Omnis parallelogrammi loci, eorum quæ circa dimentientem angulum communem efficiunt parallelogrãmorum, vnumquodque cum binis ſupplementis gnomon vocetur.



Gnomonem diffinit Euclides reliquum cuiuſuis parallelogrammi ablato parallelogrammo, circa dimetientem, & ad angulum conſtituto, vt ſi tollatur parallelogrãmum E A *à toto* B D, *reliquum* E C *cum binis* E B, E D *ſupplementis dicetur gnomon: ſimiliter ſi tollatur* E C, *ab eodem* B D, *reliquum gnomon erit. Hæc enim diffinitio omnia comprehendit parallelogramma, ſcilicet quadratum, alterolongius, rhombum, & rhomboidem.*

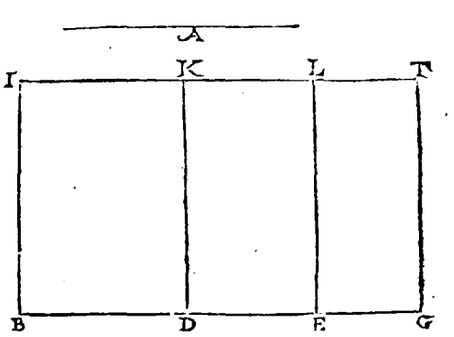
MONITVM.

Deerat huic diffinitioni, prout eam Campanus & Theon meminerunt, parallelogrammum quod circa demetiẽtem eſt, angulum communem cum toto efficere, vt neceſſariò hac lege gnomonẽ feciſſe dicatur, quod videbimus Dei beneficio, 26 propoſ. libri ſexti. Similiter vt circa demetientẽ circa eſſe dicatur, optari illum angulum cum toto habere communem, 

vt hoc exẽplo parallelogrammũ, ſcilicet G E, *circa dimetientem* C B *totius* A D, *parallelogrammi ſimile ſimilitérque poſitum eſſe videmus, & tamen quia communem angulum toti nõ habet, reliquũ non efficit gnomonem. Vt itaque ſanior ſit huius ſentẽtia, diximus præter Theonem & Campanum, auferendum parallelogrammum vt gnomonem relinquat, communem angulum cum toto efficere. Quia verò hæc parallelogrammi circa dimetientem ad angulum communẽ cõſtitutio, pluribus ſexti & ſequentiũ demonſtrationibus inſeruiet, vtile fuit hoc prælibare, vt cùm poſtmodum de conſtitutione parallelogrãmi circa dimetientẽ loquemur, angulũ cum toto communem efficere neceſſariò, tum ſimiliter eſſe poſitum intelligemus.*

Propoſitio prima.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, quarũ altera in quodcunque ſegmenta ſecce-tur, rectangulum comprehẽſum ſub duabus, æquum eſt eis quæ ab inſecta & quolibet alterius ſegmento rectangulis continentur.

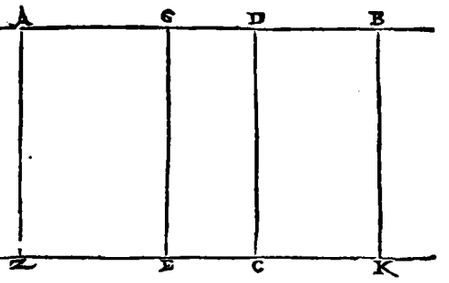


Exponãtur duæ rectæ A *&* B G, *quarum* B G, *ſeccetur in* D *&* E: *Dico rectangulũ cõprehenſum ſub* A *latitudine, &* B G *longitudine, vel contrà, æquum eſſe rectãgulis ſimul ſumptis, ſub* A *&* B D, *ſub* A *&* D E, *ſub* A *&* E G. *Ad rectã perpendicularis excitetur* B I, *quæ æqualis ponatur ipſi* A, *rectæq;* B G, *parallela ſit* I T, *per 31 primi, Ipſi verò* I B *parallelæ ſint* G T, D K, E L, *rectangulum erit* B T, *per 34 primi, rectus eſt enim angulus* I B D, *itaque & reliqui. Cùm enim parallelæ ſint* I B, D K E L G T, *per conſtructionem, ſimiliter &* B G, I T, *parallelogrammum erit (per 36 diffinitionem primi)* B K, *ſub* B I, B D *contentum, & rectangulum. Nam in parallelas* B I, D K, *cadens* B D, *angulos* I B D, B D K *binis rectis æquos efficit, per 29. primi. Rectus autem eſt* I B D, *& reliqui igitur oppoſiti recti (per 34 primi) ſient. Quare rectangulum erit* D L *ſub* D K, D E, *& rectangulum* E T *ſub* E L, E T *comprehenſa. Atqui ipſi* A *æqualis eſt* B I, *cui æquales ponũtur* D K *&* E L, *per 34 primi. Tria igitur rectangula* B K, D L, *&* E T, *ſub* A *recta & quolibet ſegmento* B D, D E, *&* E G *continẽtur. Quia verò efficiunt totum rectangulum* B T, *ſequetur, quod ſub duabus* A *&* B G *rectangulum, æquum eſſe eis ſimul ſumptis, quæ fiunt* A B, A *inſecta & quodlibet ſegmento, ſcilicet* B D, D E, E G. *Si itaque fuerint duæ rectæ, &c.*

Propoſit.

Propoſitio ſecunda.

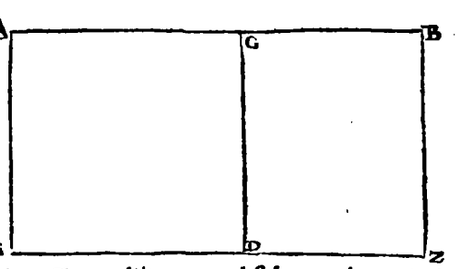
Si recta linea ſeccetur vtcunque quę ſub tota & quolibet ſegmentorum comprehenduntur rectangula, ęqualia ſunt ei quod ex tota fit quadrato.



Seccetur recta A B, *vtcunque in* G *&* D: *Dico rectangula ſub tota* A B *& quolibet* A G, G D, *&* D B *ſegmentorum ſimul ſumpta, æqualia eſſe ei quod fit ex tota* A B *quadrato, ipſi* A B *perpẽdicularis & æqualis fiat* A Z, *perfecto* A B K Z *rectãgulo. Ipſis porrò* A Z, B K *parallelæ fiant per* G *&* D *ſigna (ex 31 primi) rectæ* G E, D C. *quadratum erit* A K *cùm ſint æquales* A B *&* A Z. *Rectangula verò erunt* A E, G C, *&* D Z, *quæ ſub tota* A B (*hoc eſt* A Z) *& quotlibet ſegmentorũ* A G, G D, D B, *contenta ſcilicet* A G, E Z, G D, C E, *&* D K E *quadratũ* A K. *quod ſcilicet ex tota conſtituunt. Si itaque recta linea* A B *ſeccetur vtcũque in* G *&* D, *quæ ſub tota* A B (*vel* A Z) *& quolibet ſegmentorũ* A G, G D, D B *comprehenduntur rectangula, æqualia ſunt ei, quod ex tota* A B *fit quadrato, ſcilicet ipſi* A B K Z. *Huius breuior ex prima fiet demonſtratio: quia* A B, A Z *ſunt duæ rectæ, quarum altera* A B *vtcunque ſecatur. Et ideo rectangulum ſub binis* A B, A Z (*hoc eſt quadratum ex* A B) *æquum eſt eis, quæ à tota* A Z *inſecta, & quolibet ſegmentorum fiunt rectangulis* A E, G C, *&* D K.

Propoſitio tertia.

Si recta linea ſeccetur in ſigno, rectangulum ſub tota & altera ſegmentorum comprehenſum, ęquum eſt ei quod ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo & ei quod ex prædicto ſegmento fit quadrato.



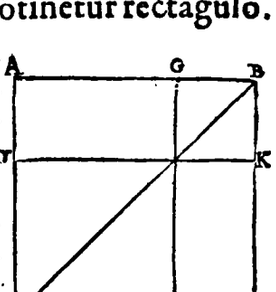
Proponatur recta linea A B *ſecta in ſigno* G: *Dico rectangulum ſub* A B A G *comprehenſum, æquũ eſſe rectangulo ſub* A G, G B *comprehenſo, vnà cum quadrato rectæ* A G, *Ex* A G *quadratũ deſcribatur (per 46 primi)* A G, D E, *& perficiatur rectangulum* G Z, *quoniam æqualis eſt* A E *ipſi* A G, *rectangulũ ſub* A B, A G *erit* A Z. *Nã recta eſt tota* E D Z, *per 30 primi: quia verò æqualis eſt* G D *ipſi* A G, *rectangulum* C Z *erit ſub tegmẽtis* E A G, G B. *quod vnà cum quadrato ex* A G, *hoc eſt,* A D, *efficit rectangulũ* A Z *quod ſub tota &* A G *priori ſegmento. Si itaque recta linea ſeccetur in ſigno rectangulum ſub tota, &c.*

MONITVM.

Dixerat Theon rectam lineam ſecandam (vtcunque) quod tranſtulimus in has voces (in ſigno) ne rectam pluribus ſignis ſetare volentes, aliqui huic demonſtrandæ impingerẽt. Quod idem in ſequente obſeruabimus.

Propoſitio quarta.

Si recta linea ſeccetur in ſigno, quadratũ quod fit ex tota, ęquũ eſt quadratis quę fiũt ex ſegmẽtis, & ei quod bis ſub ſegmẽtis cõtinetur rectãgulo.

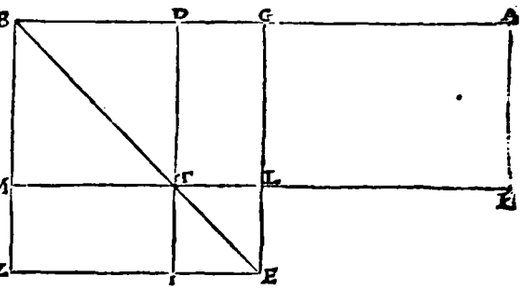


Recta A B *ſeccetur in ſigno* G, *ex* A B *verò fiat quadratum (per 46 primi)* A B, E D: *Dico* A B, E D *æquum eſſe quadratis ex* A G *& ex* G B, *ſimulac rectangulo bis ſumpto ſub* A G, G B *ſegmentis. Ipſi* G B *æqualis ponatur* B K. *Per ſignum* G *ipſis* A D B E *parallela ducatur* G Z, *ipſis verò* A B D E *parallela ſit* T K. *per 31 primi, Quoniam parallellæ ſunt omnes oppoſitæ rectæ, parallelogrãma ſunt* G K, T Z, A I, I E, *per 36 diffinit. primi. Cùm autem angulum communem habeant ſingula cum quadrato* A B E D, *ipſa rectangula erunt, per primam diffinitionem huius. Cæterùm cùm æqualis ſit* B K *ipſi* G B, *&* A B *rectæ* B E, *reliqua* K E *ipſi* A G, *æqualis erit, per 2 communem ſententiam, eiſdémque æquales erunt* T I, I Z, T D, D Z, *oppoſita latera, per 34 primi.*

Quadratum igitur erit G K *ex recta* B Z, *quadratum item* T Z *ex recta* A G. *Quia verò rectis* G B *&* B K *æquales sunt* A T *&* Z E, *rectangula* A I I E *sub rectis* A G, G B (*hoc est* A G, G I *&* E K, K I) *continere bis dicentur. Sed quadratum ex* A B *tota, hoc est* A B E D *æquũ est quadratis* A G, G B, *hoc est* T Z *&* G K, *& rectangulo bis sub* A G, G B *hoc est* A I *&* I E *supplementis. Si itaque recta linea seccetur in signo, quadratum, &c.*

Propositio quinta.

Si recta linea seccetur in signo bifariam, & alio signo per inæqualia, rectangulum comprehensum sub inæqualibus segmentis totius, vna cum quadrato eius, quæ inter sectiones est, æquum est ei quòd à dimidia fit quadrato.



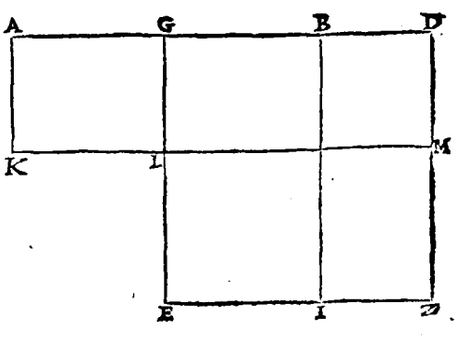
Proponatur recta linea A B, *secta bifariam in* G, B *inæqualiter autem in* D. *Ex dimidia verò (per 46 primi) quadratum describatur,* B G E Z, *ipsi* B D *æqualis ponatur* B M, *perficiatur q; rectangulũ* B M K A *parallelogrãmum, per signum* D *rectis* B Z G E (*per 31 primi*) *parallela fiat* D T I: *Dico rectangulum comprehensum sub* A D D B *cum quadrato* D G, *æquum esse quadrato* B E *quod* A *dimidia* B G, *cùm binæ* D B B G *binis* B M B Z *sint æquales, reliquæ* D G M Z *erunt æquales, quare & eis oppositæ* T L T I *æquales erunt, per 34 primi. Nam parallelogrãma sunt* B T T E G T T Z, *per 36 diff. primi. Quadratũ igitur erit* L I *ex recta* D G, *quia insuper binæ* B Z B D *binis* B G B M *fuerunt æquales. Quadratũ erit* D M, *ac æqualia erũt rectangula* B L B I, *per 36 primi, ipsi verò* B L *æquum est* G K, *per eandem, æqualia itaq; erunt* G K *&* B I, *commune addatur* D L. *Rectangulum* D K *æquum erit gnomoni* L B B I, *ipsis rursus commune addatur* I L, *rectangulum* D K *cum quadrato* I L, *æquum erit eidem gnomoni & quadrato* I L, *hoc est toti quadrato ex* B G. *Sed* D K *est quod sub* A D D B, *inæqualibus sequentis, cùm* B T *sit quadratum. Sed* I L *est quadratum rectæ* D G *quæ inter sectiones est. Rectangulum itaque comprehensum sub* B D D A *inæqualibus segmentis, hoc est* D K, *vna cum quadrato rectæ* D G *quæ inter sectiones est, nempe* I L, *æquũ est quadrato* G Z *quod* A *media* B G. *Si igitur recta linea seccetur in signo bifariam & alio signo per inæqualia &c.*

MONITVM.

Mutare cogimur aliquas demonstrãdi rationes, eò quòd Theon videatur supponere quæ ad 24 sexti expectant, scilicet rectam D T *æqualem esse rectæ* D B *ducta diametro, & per* T *parallela rectæ* A B, *vt probet* A T *æquum esse* E I *quod sub* A D D B. *Quot quidem sua constructio vix patitur, antequam libr. sexto circa dimetientem existentia similia toti concludantur, nisi per verbosas illas angulorum cõparationes tandem exprimeret. Insuper hanc rectã* A B *in signo, ac alio signo diximus secandã, in quoduis æquales aut inæquales partes indefinitæ, ne decidat demonstratio.*

Propositio sexta.

Si recta linea bifariam seccetur, adiciatúrque ei alia recta in rectum, quod sub tota cum apposita & apposita comprehensum rectangulum, vna cum quadrato quod fit à dimidia, æquum est ei quod fit ex dimidia & apposita tanquam ex vna, descripto quadrato.



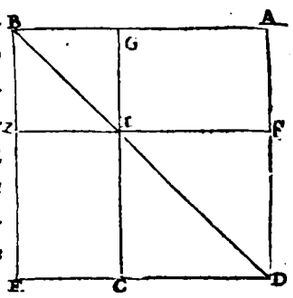
Sit recta A B *bifariam secta per* G, *adiiciatur autem ei quæpiam alia* B D *in rectum: Dico quòd sub tota cum apposita* A B D *& apposita* B D *rectangulum, vnà cum quadrato ex dimidia* G B, *æquum esse quadrato quod fit ex dimidia* G B *& apposita* B D, *tanquam ex vnica* G D *descripto. Describatur (per 46 primi) ex* G D *quadratum* G E Z D, *ipsi verò* D B *appositæ æqualis ponatur* D M: *Per signum verò* M *vtrisque* A D E Z *parallela ducatur* K M, *Per signum item* B *binis* G E D Z *parallelæ sint* B T I *&* A K *per 31 primi. Cùm enim rectæ* B D *æqualis posita sit* D M,

quadra-

quadrátúmque ſit G Z, *reliquæ* B G *reliquæ* M Z *æqualis erit, & proinde oppoſitæ* E L *eiſdem ac* T L T I *æquales (per 34 primi) erunt. Quadrata igitur erunt* B M L I *per eandem, cùm angulos* D *&* E *rectos habeant ex hyppotheſi, Atque rectangula* T Z T G *ſub eorumdem quadratorum lateribus comprehenſa, æqualia erunt adinuicem. Sed ipſi* G T *æquale eſt (per 36 primi)* A L, *igitur reliquo* T Z *æquabitur idem* A L. *Commune addatur* G M, *tum erit æquale rectangulum* A M *gnomoni* G M M I. *Vtriſque, porrò addatur commune quadratum ex* G B, *hoc eſt* L I *ex* L T, *ipſi* G B *æquali, factum, Rectangulum* A M *ſub tota* A B *cum appoſita* B D, *& appoſita* B D, *hoc eſt* D M *comprehenſum, vnà cum quadrato* L I, *ex* G B, *æquum erit quadrato* G Z, *quod fit* A *dimidia* G B *&* B D *appoſita, tanquam ex vna deſcripto. Si itaque recta linea bifariam ſeccetur, adiiciatúrque ex alia recta, &c.*

Propoſitio ſeptima.

Si recta linea ſeccetur in ſigno, quæ ex tota & quouis ſegmentorũ coniuncta fiunt quadrata, æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub tota & dicto ſegmento, & ei quod à reliquo ſegmento fit quadrato.



Seccetur recta A B *in ſigno* G: *Dico quòd ex tota* A B *& quouis ſegmẽtorum* B G *ſimul ſumpta bina quadrata, æquari rectangulo bis ſumpto ſub* A B B G, *& ei quadrato quod fit ex reliquo* A G *ſegmento. Deſcribatur ex* A B *quadratum* A B E D, *per 46 primi, ipſíq;* B G *æqualis ponatur* B Z, *per ſignum* G *binis* A D B E *parallela fiat* G C, *per ſignum verò* Z *vtriſque* A B D E *parallela ſit* Z I F *patebit per præcedentia quadrata eſſe* G Z *quidem ex* B G, *&* F C *ex* A G. *Et inſuper rectangulum* B F *contineri ſub* A B B G, *hoc eſt* B Z *ſibi æquali poſita, ſimiliter & rectangulum* B C, *quæ quidem cum quadrato* F C *quod ſcilicet fit à reliquo ſegmento* A G (*hoc eſt* F I) *ſibi æquali, idem componunt quod quadratum* B D, *quod ex tota* A B, *& aliud* G Z *quòd ex vno ſegmentorum* G B. *Quæ igitur ex tota* A B *ſcilicet quadratum* B D, *& ex* B G *ſcilicet* G Z, *ſimul ſumpta, æqualia ſunt rectangulo ſub* A B B G *bis ſumpto, hoc eſt ipſis* B F B C *& ei* F C *quadrato, quod fit à reliquo ſegmento* A G. *Nam bina* B F B C *excedunt gnomonem* F G E, *quadrato* G Z. *Si igitur recta linea ſeccetur in ſigno, quæ ex tota & quouis ſegmentorum coniuncta quadrata, &c.*

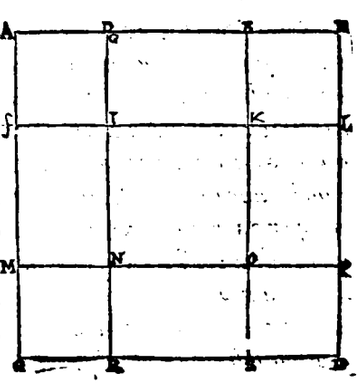
Corollarium.

Duarum inæqualium linearum quadrata, excedunt rectangula bis ſub ipſis contenta, quadrato exceſſus quo maior excedit minorem.

Nam ſi A B *ſit maior,* B G *verò minor, patet quadrata ex* A B B G *æqualia eſſe rectangulo bis ſub* A B B G *contento, & inſuper quadrato ipſius* A G *exceſſus quo* A B *excedit minorem* B G.

Propoſitio octaua.

Si recta linea ſeccetur in ſigno, rectangulum comprehenſum quater ſub tota, & quouis ſegmentorum, cum eo quod ex reliquo ſegmento fit quadrato, æquum eſt ei quod fit ex tota, & priori ſegmento (tanquam ab vna deſcripta) quadrato.

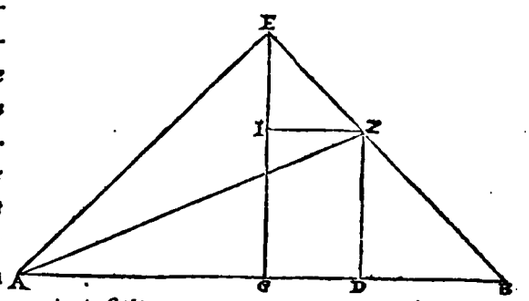


Recta linea A B *ſeccetur in ſigno* G, *adiiciatur autem ei in rectum æqualis cuiuis ſegmentorum, ſitq;* B E *æqualis ipſi* A G: *Dico rectangulum ſub* A B A G *quater ſumptum, cum quadrato reliqui ſegmenti* G B, *æquum eſſe quadrato quod fit ex* A E *compoſita, ſcilicet ex tota* A B *& priori ſegmento* A G *cui æquatur* B E. *Deſcribatur ex tota* A E *quadratum (per 46 primi)* A C D E, *ipſi* A G *æquales ponantur* A F *&* C M, *reliqua igitur* F M *ipſi* G B *æqualis erit, per 3 commu. ſenten. Per ſigna* G *&* B *parallelæ ipſis* A C E D *ponantur (per 31 primi)* G R B S. *reliquis autem* A E C D *per ſigna* F *&* M *parallelæ ſint* F I K L *&* M N O P. *Quoniam quadratum eſt* A D, *rectãgula erunt per 34 primi,* F B *&* F R. *Et cum* A G G B *ipſis* A F F M

ſint æquales, ea æqualia erunt æquis lateribus comprehenſa, per 36 primi, ſed F B *ſub* A B A G *hoc eſt* F A *continetur, &* F R *ſub eadem laterum quantitate: Similiter* R P *&* P B *eiſdem* F B F R *oſtendentur æqualia. Cùm autẽ æquales ſint* A B F K, *&* G B I K *æquales erũt, ſimiliter & reliquæ* I N N O O K, *eidem* B G *æquales erunt. Angulus autẽ* F I R *rectus eſt, Reliquus itaque* R I K *rectus erit, per 13 primi, ſimiliter & reliqui quadranguli* I N O K, *quod igitur quadratum erit, & ex reliquo ſegmento* G B *productum. Quod itaque quater ſub* A B A G *comprehenſum, hoc eſt* A K B P P R R F, *cum quadrato reliqui ſegmenti* G B, *hoc eſt in* O K, *æquum eſt ei quod ſit ex tota* A B, *& priori ſegmento* A G *vel* B E, *ſcilicet ex tota* A E *quadrato* A D. *Si igitur recta linea ſeccetur in ſigno, &c.*

Propoſitio nona.

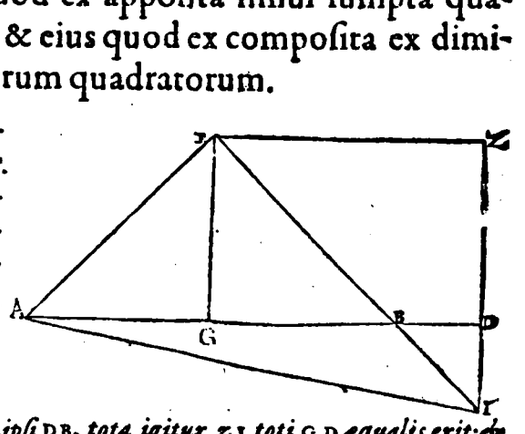
Si recta linea ſeccetur bifariam, & per inæqualia, quæ ab inæqualibus ſegmentis totius fiunt quadrata, Dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod ab ea quæ inter ſectiones eſt quadratorum.



Seccetur bifariam recta A B *in* G, *& inæqualiter in* D: *Dico quadrata inæqualium* A D D B *dupla eſſe quadratorum dimidiæ* A G, *& eius quæ inter ſectiones eſt, ſcilicet* G D, *ipſi* A B, *ad ſignum* G *perpẽdicularis excitetur* G E, *quæ quidem æqualis ponatur alteri rectarum* A G G B. *Coniunctis autem* A E, B E, *per ſignum* D *ipſi* G B *parallela fiat* D Z, *per* Z *verò rectæ* B G *parallela ſit,* I Z, *per 31 primi, ducta* A Z, *Quoniam æquales ſunt* G A G B G B *rectæ, qui ad baſes anguli ſunt æquales, per 5 primi, ſcilicet* G A B G B A G E B, *Cùm autem* A G E *rectus ſit, reliqui* G E A, G A E *dimidij recti huius erunt, per ſecundam partem 32. primi: rectus igitur erit* A E B *angulus. Cùm enim in parallelas* E G Z D *cadat* B E, *anguli* D Z B *&* I E Z (*per 29. primi*) *æquales erunt. Similiter &* B Z I *ipſi* Z B D, *cùm in parallelas* G B, I Z *cadat* B E. *Sed eidem* Z B D *æquus fuit* I E Z: *itaque bini* I Z E *&* I E Z *æquales erunt, ſimiliter & reliqui* D Z B, D B Z. *Duo igitur latera trianguli* E I Z, *ſcilicet* I E, I Z *æqualia erunt: ſimiliter* D Z, D B *trianguli* Z B D, *per 6 primi, æquales verò ſunt* I Z *&* G D, *per 34. primi, cum parallelogrammum ſit* I D, *per 36 diffinit. primi. Quoniam igitur æquales ſunt* A G, G E, *quadratum rectæ* A E *duplum erit quadrati rectæ* A G, *per 47 primi: ſimiliter quadratum* E Z, *duplum quadrati* I Z *ſiue rectæ* G D, *per eandem: ſed quadratis* A E *&* E Z *æquum eſt (per eandem) quadratum rectæ* A Z, *cùm ſit rectus* A E Z *oſtenſus. Quadratum itaque* A Z *duplum eſt quadratorum* A G *&* G D: *quadrato autem* A Z *æqualia ſunt quæ ex* A D *&* D Z, *vel* D B *ſibi æquali, quadrata, per 47. primi, cùm æquus ſit* Z D B *exterior interiori recto* E G B. *Ipſa igitur ex* A D, D B *inæqualibus ſegmentis, dupla ſunt quadratorum ex* A G *dimidia &* G D *quæ inter ſectiones eſt. Si itaque recta linea ſeccetur bifariam, & per inæqualia, &c.*

Propoſitio decima.

Si recta linea ſecetur bifariam, apponatur autem ei quępiam recta in rectum: quod ex tota cum appoſita & quod ex appoſita ſimul ſumpta quadrata, dupla ſunt eius quod ex dimidia & eius quod ex compoſita ex dimidia & appoſita tanquam vna, deſcriptorum quadratorum.

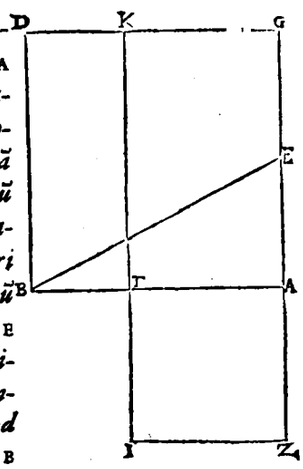


Seccetur bifariam A B *recta in ſigno* G, *cui apponatur in rectum quæpiam* B D: *Dico quæ ex* A D *&* B D *quadrata dupla fore eis quæ ex* A G *&* G D *quadratis, excitetur ipſi* A B *perpendicularis* E G, *ad ſignum* G, *quæ æqualis ponatur rectæ* A G *vel* G B, *parallelæ ducantur ſcilicet* D Z *ipſi* G E, *&* E Z, *rectæ,* G D, *per 31. primi. Extendatur autem* Z D *in* I, *& æqualis ſit* D I *ipſi* D B, *coniunctis* A E, E I *&* A I *rectis: Quoniam parallelogrammi* G Z, *latus* Z D *ipſi* G E, *per 34. primi, eſt æquale:* G E *verò ipſi* G B. *Sed &* D I, *ipſi* D B, *tota igitur* Z I *toti* G D *æqualis erit: & proinde ipſi* E Z *ex oppoſito. Quod igitur ex* E I *quadratũ duplum erit quadrati* E Z *vel* G D, *per 47 primi*

primi. Nam angulus Z *oppoſitus ipſi* E G B *rectus eſt, per* 34 *primi. Similiter quod ex* A E *quadratũ duplum eſt (per* 47 *primi) quadrati ex* A G. *Cùm autem angulus* A E G *ſit recti dimidius, ſimiliter &* B E G, *per ſecundam partem* 32 *primi, totus* A E I *rectus erit. Quia verò in parallelas* G D E Z *cadit* I Z, *angulus* A D I *interiori & oppoſito* E Z D *recto æquus erit, per* 29 *primi, & itaque rectus erit* A D I. *Quadratis igitur ex* A E *&* E I *æquum erit quadratum ex* A I, *per* 47 *primi. Sed cùm dupla ſint ex* A E *&* E I *quadratorum ex* A G *&* G D *oſtenſa, duplum erit quod ex* A I *eorum quæ ex* A G *&* G D *quadratorum. Quadrato autem ex* A I *æqualia ſunt quæ ex* A D *&* D I (*hoc eſt* D B *ſibi æquali*) *quadrata, per eandem* 47 *primi. Quæ itaque ex* A D *tota cùm appoſita &* D B *appoſita, ſimul ſumpta quadrata dupla ſunt eius quod ex* A G *dimidia, & ex* G D *dimidia & appoſita tanquam vna deſcriptorum quadratorum. Si igitur recta linea ſeccetur bifariam, apponatur autem ei quæpiam recta in rectum, &c.*

Propoſitio vndecima *Problema* 1.

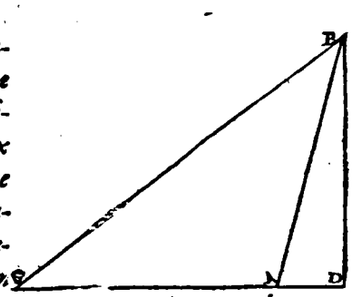
Datam rectam lineam terminatam ita ſecare, vt quod ſub tota & altero ſegmento comprehenſum rectangulum, æquum ſit ei quod fit ex reliquo ſegmento quadrato.



Sit data A B *recta, ex qua (per* 46 *primi) fiat quadratum* A B D G, *cuius vnum latus* A G *bifariam ſeccetur in* E, *coniuncta* E B, *extendatur* E A *in* Z, *& ponatur æqualis ipſi* E B *recta* E Z: *ex* A Z *verò deſcribatur quadratum* A Z I T *& producatur* I T *in* K: *Dico* A B *rectam ita ſectam eſſe vt propoſitum fuit. Cùm enim* A G *bifariam ſeccetur in* E, *ipſi autem* A G *quæpiã* A Z *in rectum apponitur, rectangulum ſub* G Z, Z A *comprehenſum vna cũ quadrato ex* A E, *æquum erit quadrato ex* E Z, *per* 6 *huius, hoc eſt quadrato ex* E B *ſibi æquali. Sed quadratum ex* E B *eis quæ ex* A B A E (*per* 47 *primi*) *æquum eſt. Quod itaque ſub* G Z, Z A *vnà cum quadrato ex* A E, *æquũ eſt quadrato ex* A B *& quadrato ex* A E. *Commune autem tollatur ex* A E *quadratum ſequetur rectangulum* Z K *quadrato* A D *æquum eſſe. A quibus rurſus commune auferatur rectangulum* A K. *Reliqua ſcilicet rectangulum* B K *ſub* B D *tota &* T B *altero ſegmento, & quadratum* A Z I T, *quod fit ex* A T *reliquo ſegmento, æqualia erunt. Nam* B D *æqualis eſt ipſi* A B *toti. Datam itaque rectam ita ſecamus vt fuit poſtulatum.*

Propoſitio duodecima.

In ambligoniis triangulis, quadratum quod fit à latere obtuſum angulum ſubtendente, maius eſt eis quę fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus quadratis, rectangulo bis comprehenſo ſub vno eorum quæ ſunt circa obtuſum angulum, & ſibi in rectum appoſita linea, inter obtuſum angulum & perpendicularem à reliquo oppoſito angule ſibi demiſſam.



Eſto ambligonium triangulum A B G, *habens angulum* A *obtuſum, latus verò ſubtendens illum ſit* B G. *Vnum autem eorum quæ ſunt circa obtuſum angulum, ſit latus* G A, *in quod productum à ſigno* B *cadat perpendicularis* B D, *per* 12 *primi: Dico quadratum ex* B G *maius eſſe quadratis quæ fiunt ex* G A A B, *rectangulo bis cõprehenſo ſub* G A A D, *quoniam ſecta eſt* G D *in ſigno* A, *quadrata binarum* G A A D *cum rectangulo bis comprehenſo ſub ipſis* G A A D, *æquantur quadrato totius* G D, *per* 4 *huius. Sed quod ex* B G *æquum eſt ipſi ex* G D *quadrato, & ei quod ex* D B, *per* 47 *primi. Quod igitur ex* B G *æquũ erit tribus quadratis ex* G A A D *&* D B, *ac inſuper rectangulo bis ſumpto ſub* G A A D, *atque* A B *quadratũ ex his omnibus tantũ ſumit quadrata* A D D B, *quibus æquale eſt, per* 47 *primi,* G A *verò ſui ipſius tantùm aufert quadratum. Sequetur itaque ex* B G *ſubtendente obtuſum angulum quadratum excedere quadrata rectarum* G A A B, *angulum obtuſum comprehendentium, eò quòd bis ſub vna earum* G A *quæ ſunt circa obtuſum angulum, &* A D *ſibi in rectum appoſita inter obtuſum angulum* G A B, *&*

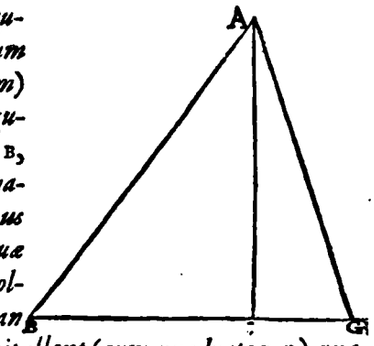
perpendicularem D B *à reliquo oppoſito angulo* G B A *ſibi demiſſam. In ambligoniis igitur triangulis quadratum quod fit à latere obtuſum angulum &c.*

MONITVM.

Theorematis ordinem quodammodo variauimus, eò quòd Campanus & Theon obſcurius diſcentibus tradiderint.

Propoſitio decimatertia.

In exigoniis triangulis quod ex acutum angulū ſubtendente fit quadratum, minus eſt eis quę ex acutum angulum comprehendentibus lateribus fiunt quadratis, rectangulo bis ſumpto ſub vno eorum quæ ſunt circa acutum angulum, & eius parte inter acutum angulum & perpendicularem ab oppoſito angulo ſibi demiſſam ſumpta.



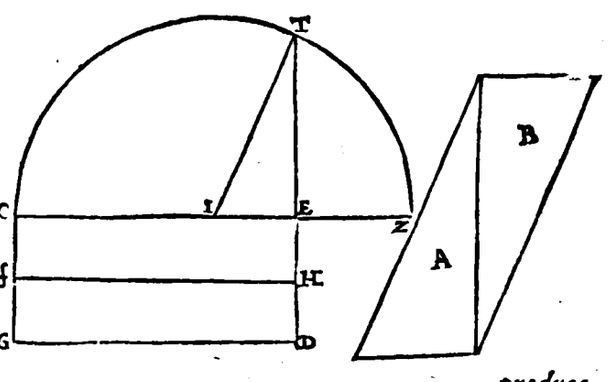
Sit oxigonium triangulum A B G, *cuius vnum acutorum angulorum ſubtendat* A B, *ſcilicet ipſum* G. *A ſigno autē* A *in oppoſitum latus* B G (*vnum quidem eorum quæ ſunt circa acutum angulum*) *demittatur perpendicularis* A D: *Dico quadratum lateris* A B (*angulum acutum* G *ſubtendentis*) *minus eſſe binis quadratis ex* A G G B, *rectangulo bis ſumpto ſub* B G G D, *quoniam comparandæ ſunt magnitudines quadratorum, ex* A B *ad quæ ex* A G *&* G B. *Diſcamus prius quadratum rectæ* A G (*per* 47 *primi*) *æquū eſſe quadratis quæ fiunt ex* A G, D G: *his addamus quadratum ipſius* G B, *quod æquipollet* (*ſi quidem ei addamus quadratum* D G) *quadrato* B D, *& rectangulo bis ſumpto ſub* B G, G D, *per* 7 *huius. Binæ igitur* A G, G B *æquipollent* (*cum quadrato* D G) *quadratis* B D, A D, *&* D G, *& inſuper rectangulo bis ſub* B G, G D *ſumpto. Ab his etenim auferamus quadratum* D G, *ipſis commune additum*). *Sequetur quadrata ex* A G, G B, *æquari quadratis ex* A D, B D, *ac inſuper rectangulo bis ſumpto ſub* B G, G D. *Atqui quod ex* A B *æquū eſt* (*per* 47 *primi*) *quadratis ex* A D, B D, *ſequetur itaque quod ex* A B, *ſubtendente angulum acutū* G, *minus eſſe binis quadratis, quæ ex* A G, G B *acutum angulum* A G B *cōprehendentibus rectangulo bis ſumpto ſub vno eorum quæ circa acutum angulum, ſcilicet* B G, *& eius parte* G D *inter acutum angulum & perpendicularem ab oppoſito angulo* A (*ſcilicet* A D) *ſibi demiſſam ſumpta. In oxigoniis igitur triāgulis, quod ex acutum angulum ſubtendente latere quadratum minus eſt, &c.*

MONITVM.

Quoniam Theonis compendium potiuſquam demonſtret confundit hanc, cogimur aliam tradere non multò prolixiorem demonſtrationem eodem argumento ſuffultam.

Propoſitio decimaquarta. *Problema* 2.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.



Sit datum rectilineum A B, *cui æquum quadratum oporteat conſtituere. Conſtituantur binæ quæuis rectæ ad rectum angulum* C G D, *ad datam autem rectam* G D, *dato rectilineo* A B *æquale parallelogrammū conſtituamus, angulo recto æqui angulum, per* 45 *primi, ſitque* C G D E. *Extendatur autem* C E *in rectum, & ponatur* E Z *æqualis ipſi* E D. *Recta porrò* C Z *bifariam ſeccetur in* I, *centro verò* I *interuallo* I C *vel* I Z *ſemicirculus ſit* C T Z *&*

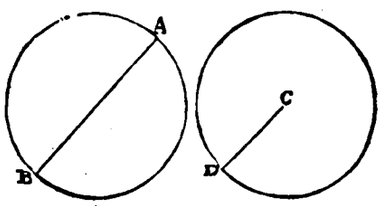
produca-

producatur D E *versus* T *coniuncta* T I. *Quoniam enim recta* C Z *secta est bifariam in* I, *& per inæqualia in* E, *rectangulum comprehensum sub inæqualibus* C E *&* E Z, *cum quadrato* I E, *quæ inter sectiones est, æquum est ei quod à media* C I (*vel* I T *quæ ex centro*) *fit quadrato, per* 5 *huius. Sed ipsi ex* I T *quadrato æqualia sunt ex* T E *&* I E *quadrata, per* 47 *primi, cùm sit rectus* T E I *angulus. Quod igitur sub* C E E Z *cum quadrato rectæ* I E, *æqualia erunt quadratis ex* T E *&* I E. *Cõmune auferatur quadratum ex* I E, *subest rectangulum sub* C E E Z *æquum esse quadrato ex* T E. *Cùm enim* E Z *æqualis sit ipsi* E D, *rectangulum sub binis* C E E Z *idem erit cum rectangulo* C D. *Rectangulo igitur* C D *æquale quadratum ex* T E *recta describptum erit, & proinde dato rectilineo* A B *ipsi* C D *æquali posito. Dato itaque rectilineo* A B *æquale quadratum constituemus ex* T E *recta.*

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber tertius.

Diffinitio 1.

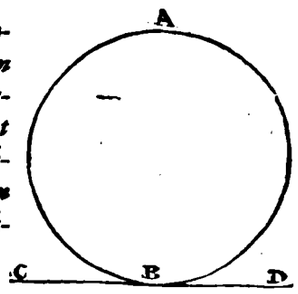
AEQVALES circuli sunt quorum dimetientes, vel quæ ex eorum centris, sunt æquales.



AEqualitatem circulorum A B *&* C D *ideo ab æqualitate diametrorum vel semidiametrorum sumit, quòd circulus vnica semidiametri reuolutione manente vno eius extremo, describatur. Quare si maior fuerit semidiameter, maior circulus describetur, si minor minor, si æqualis æqualis. Si itaque æquales sint, quæ ex centro, necessarium erit circulos esse æquales. Nam si maior esset quæ ex centro, & circulus maior esset reliquo. Eadem enim comparatio ex integris diametris potest sumi, non equidem potest dimidium augeri, sine duplicis augmento.*

Diffinitio 2.

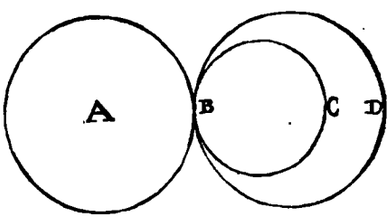
Recta linea circulum tangere dicitur, quę circulum in plano tangens & vtrinque producta, circulum non seccat.



Licet lineæ rectæ ad circuli circunferentiam plures possint incumbere inclinationum varietates, tamen eam solam lineæ inclinationem ad circunferentiam circulum tangere dicemus, quæ tangens & versus contactum producta, circulum non secat, vt circulum A B *tanget recta* C B, *eò quòd ea producta in* D, *circulum tangit in* B, *non tamen secat. Hæc est cuilibet circunferentiæ vnica inclinatio lineæ rectæ: nam reliquæ omnes inclinationes lineæ* C B, *immoto signo* B *circulum secabunt.*

Diffinitio 3.

Circuli sese adinuicem in plano tangere dicuntur, qui tangentes sese inuicem non secant.

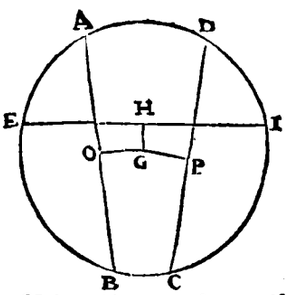


Idem in contactu circulorum mutuo quod de lineæ ad circulum contactu dicit, vt circulus A B *circulum* B D *tangere dicetur, eò quòd in signo* B *tantum concurrant, in eodem existentes plano. Similiter* B C *ipsum* B D *tangere dicetur, eò quòd tangens non secat. Si enim sese secarent, fieret superficierum contactus, vel potius communitas, non tantum vnius signi. Quare circuli tactus solum vnicum commune admittit cum tangente signum, vt* B.

Diffinitio 4.

In circulo æquę, vel magis à centro rectæ lineæ distare dicuntur, cum à centro in eas perpendiculares æquales vel maiores fuerint.

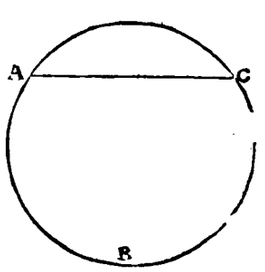
Distantiam



Distantiam siue latitudinem metitur Euclides per longitudinem rectæ lineæ rectos efficientis angulos ad propositam, vt in circulo A B C D *infinitæ possunt describi lineæ, quarum vna æquè plus vel minus à centro distabit reliqua. Id tantùm intelligamus rectam distare magis, quæ maiorem, æquè autem quæ æqualem, à centro suscipiet demissam perpendicularem, vt* A B *æquè à centro* G *distat ipsi* D C, *eò quòd à centro* G *in eas perpendiculares* G O G P *sint æquales, magis verò distat eadem* A B *reliqua* E I, *quia in* A B, *maior cadit à centro perpendicularis* G O, *quam in* E I *cadat* G H. *Similiter mensus est Euclides prima diffinitione secundi rectanguli latitudinem, per lineam quæ ad longitudinem efficit rectos angulos, vt ibi diximus. Quæ autem obliquum efficiunt angulum rectæ, huius mensuræ ob angulorum instabilitatem sunt incapaces.*

Diffinitio 5.

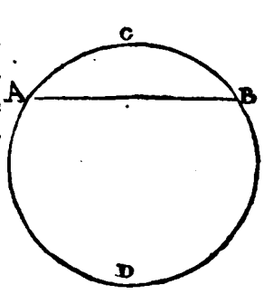
Sectio circuli est, figura sub recta linea & circuli circunferentiæ parte comprehensa.



Resumit hoc tertio Euclides sectionis circuli diffinitionem, 19 *primi diffinitione expositam, vt facilius subsequantur proximæ diffinitiones. Quid scilicet sit sectionis & in sectione angulus. Quia verò* 19 *primi eam exposuimus, nulla (præter hæc) prolixitate vtemur.*

Diffinitio 6.

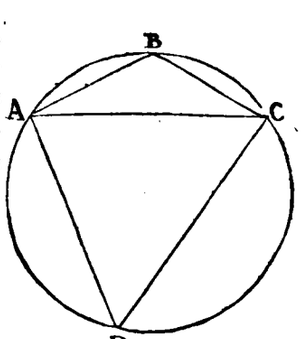
Sectionis autem angulus est, qui comprehenditur sub eadem recta linea, & circuli circunferentiæ parte.



Sectionis angulus dicitur, is quem efficit sectio sola, scilicet est ea inclinatio lineæ curuæ quam efficit cum recta circulum secante, vt C A *curua ad* A B *rectam vel* D B *curuam in* B A *rectam, efficiunt angulum sectionis, hæ quidem maioris, illæ verò minoris sectionis. Variatur autem hic angulus per sectionum variationem, vt maior sectio maiorem, minor verò minorem efficiat angulum.*

Diffinitio 7.

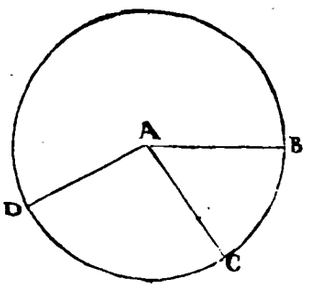
In sectione angulus est, qui continetur sub duabus rectis à finibus rectę secantis ad aliquod circunferentiæ signum concurrentibus.



Differentiam ponit inter angulum sectionis præfatum & hunc, quem in sectione esse dicimus, eò quòd hunc sectio suscipiat, à limitibus rectæ A C *secantis, in quoduis circunferentiæ* A B C *signum, à concurrentibus rectis* A B *&* C B *comprehensum. Similiter in maiori sectione reliquus* A D C *dicetur angulus, hi equidem anguli iuxta sectionum varietatem reciprocè variantur, vt maior sectio minorem, minor verò maiorem concipiat angulum.*

Diffinitio octaua.

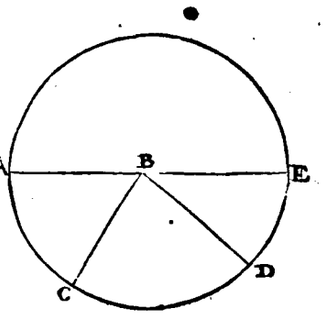
Cùm verò continentes angulum à centro rectæ, aliquam suscipiunt circunferentiam, in illa anguli magnitudo esse dicitur.



Tres angulorum ſpecies diffinit, ſcilicet ſectionis, & in ſectione angulũ, in circunferentia conſtitutos, hunc verò in cẽtro circuli exiſtẽtem, diffinit quo pacto anguli dicatur magnitudo, quæ circũferentiã circuli vnicam recipit ſuæ quantitatis comitem, eam ſcilicet quã ſuſcipiunt rectæ angulum in centro conſtituentes, vt angulus B A D *tanto maior angulo* B A C *dicetur, quanto circunferentia* B C D *ab eo ſuſcepta, maior erit reliqua* B C A *minori angulo* B A C *ſuſcepta. In his etenim angulis angulorum differẽtia, differentiam ſuſceptarum circunferentiarum ſequuntur, quod ſecus eſt in proximè diffinitis, ſectionis ſcilicet & in ſectione, quæ quidem, licet ſequantur ſectionum exceſſum, non tamen exceſſus differentiam. Anguli itaque magnitudo ea erit quæ per circunferentiæ ſuſceptæ exprimetur magnitudinem, vt perfectè docebimus 33 ſexti theoremate.*

Diffinitio 9.

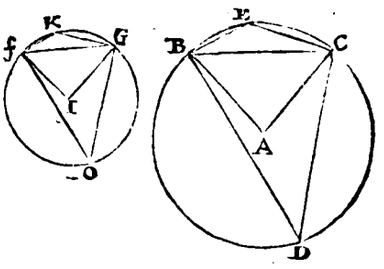
Sector autem circuli eſt, figura contenta ſub duabus in centro rectis angulum conſtituentibus, & circunferentia ab eis ſumpta.



Huius & præcedentis veram demonſtrabit intelligentiam 33 ſexti. Nam ſector circuli nihil aliud eſt quàm figura ſiue pars ea circuli, quam ſuſcipiunt rectæ in centro angulum conſtituentes, & ab eis circunferentia ſuſcepta, vt trigonis A B C *vel* A B D. *Qui quidem ſector ſemper ſemicirculo minor exhibetur, alias ſi ſcilicet æqualis aut ipſo maior eſſet, nulla ficret ad eas partes linearum* A B D B *inclinatio, nec proinde angulus vt* A B E D C, *comprehenſus ſub dimetiente* A B *& ſemicircunferentia* A C D E, *hic quoque ſector ſequetur circunferentiarum ſuſceptarum differentias, quemadmodum & angulus, vt exponet eadem 33 ſexti.*

Diffinitio 10.

Similes ſectiones circuli, ſunt quæ angulos æquos ſuſcipiunt, vel in quibus anguli inuicem ſunt æquales.



Similes ſectiones bifariam diffinit, prius quidem eas quæ angulos æquos ſuſcipiunt, vt cùm anguli B A C *&* F I G *æquales erunt, tunc ſectiones* B C E *&* F G K *ſimiles dicentur eſſe, ſiue* B D C *&* F O G *ſimiles erunt. Secundò autem diffinit ſimiles ſectiones in quibus anguli erunt æquales. Diximus etenim 7 diffinitione, quis ſit in ſectione angulus, eius namq; ad alterum æqualitas, ſectionum ſimilitudinem pronunciat, ſiue inter æquales vel inæquales circulos reperiatur, vt cùm in ſectionibus* F G K, B C E *anguli* F K G, B E C *fuerint æquales, ſectiones illæ ſimiles erunt, ſimiliter & reliquæ* F G O *&* B C D *cùm anguli* F O G *&* B D C *fuerint æquales, in quouis circunferentiæ ſigno exiſtant.*

Monitum ad diffinitiones.

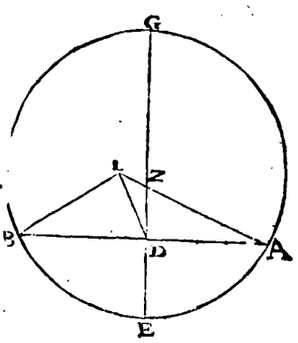
Secunda diffinitione diximus lineæ ad circulum contactum in eodem fieri plano. Reliquis diffinitionibus aliqua tranſtulimus, maximè ſexta, qua diximus angulum ſectionis eadem recta quæ circulum ſecat, & eadem circunferentiæ parte quæ ſectionem efficit, contineri, ne intelligatur ſub recta & circuli circunferentia angulus contingentiæ vel alius quiuis ab hoc angulo. Et inſuper octaua per quam Theon ſupponit angulum in circunferentia fieri, Campanus verò eundem in centro, quod maximam arguit incertitudinem huius intelligentiæ. Quare exiſtimantes eam non fuiſſe Euclidis mentem, cùm iam quæ ad angulos in circunferentia expectant 7 diffi. docuerit, in centro verò ſatis docebit 9 diffinit. Sed quæ angulorum magnitudines quadam earum comuni habitudine patefaceret, per circunferentiæ quantitatem deprompta, quæ vnica angulorum reſpectus ſiue quantitates lucidius & præcisè admodum explicat, hanc anguli magnitudinem à circunferentia contineri diximus, non angulum. Circunferentia etenim angulum in centro conſtitutum contine-

re

re non posset, sed anguli magnitudinem ea necessariò & sola. Eius namque augmentum vel decrementum, semper cum augmento anguli vel eiusdem decremento, idem esse reperitur, vt docebimus 33 sexti, fauente supremo artium moderatore. Quæ autem præter hæc mutauimus pauca sunt ob faciliorem circulorum intelligentiam.

Propositio prima. *Problema* 1.

Dati circuli centrum inuenire.



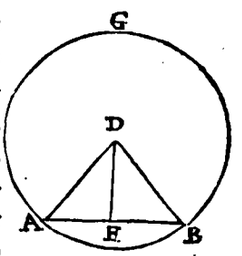
In dato circulo A G B E, *producatur cõtingens aliqua recta* A B, *quæ secetur bifariam in* D, *per signum verò* D *perpendicularis excitetur* G E, *qua bifariam secta in* Z: *Dico efficere* Z *centrum circuli* A G B E. *Quod si non sit, supponatur aliud signum* I *centrum esse coniunctis* I A, I D, I B, *rectæ* I A, I B *erunt æquales adinuicem, per* 15 *diffinitionem primi. Sed bases* A D, B D *sunt æquales, &* I D *communis. Triangula igitur* I A D, I D B *sunt æqualia, & æquiangula, per* 8 *primi. Æqualis igitur erit* I D B *angulus, angulo* I D A, *per eandem, rectus igitur erit vterque, per* 10 *diffinitionẽ primi. Atqui* I D B, *rectus minor* G D B *recto esset,* I D A *verò rectus maior* G D A *recto, contra decimam communem sententiam, quod est absurdum. Non itaque aliud potest suppo ni centrum ab ipso* Z. *Dati itaque circuli* A G, B E, *centrum* Z *inuenimus.*

Corollarium.

Si in circulo, recta aliquam rectam bifariam & ad angulos rectos secuerit, in secãte erit centrum circuli. *Cùm ostẽsum sit non posse esse alibi quàm in recta* G E, *bifariam & ad rectos secante ipsam* A B.

Propositio secunda.

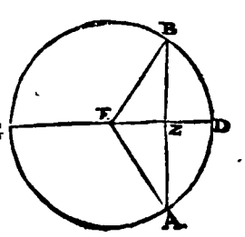
Si in circuli circunferentia duo signa vtcunque sumãtur, ea coniungens recta intra circulum cadit.



In circunferentia circuli A B G, *duo vtcũque signa* A B *susçipiantur quæ coniungat recta* A B: *Dico eam rectam intra circulum cadere. Circuli* A B G (*per præfatam*) *centrum sit* D, *coniunctis* D A, D B, *angulus verò* A D B *bifariam secetur ducta* D E, *per* 9 *primi: quoniam enim binæ* D A, D E, *binis* D B, D E, *&* *angulus* A D E *angulo* B D E, *sunt æquales, triangulorum* D A E *&* D B E *anguli* D E B, D E A (*æquis lateribus subtensi*) *æquales erunt, per* 4 *primi. Recti igitur erunt, per* 10 *diffinitionem primi, maior ideo erit* D E B *angulus angulo* D E C, *per* 17 *primi. Maius itaque erit latus* D B *latere* D E, *per* 19 *primi. Sed* D B *est ex centro, recta igitur* D E *minor ea quæ ex cẽtro, intra circulum cadit. Nam si extra caderet, esset maior. Si verò in circunferentia æqualis, per* 15 *diffinit. primi, & proinde recta* A E B *intus cadit. Si igitur in circuli circunferentia duo signa, &c.*

Propositio tertia.

Si in circulo recta per centrum extensa, rectam per centrum non extentẽsam bifariam secuerit, ad angulos rectos eam secabit. Et si ad angulos rectos eam seccet, & bifariam secabit.

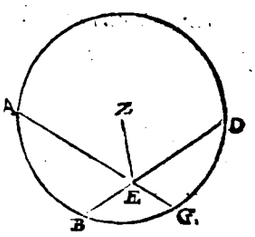


In circulo A B G D, *recta* G D *per centrum* E *extensa, rectam* B A *non per centrum extensam bifariam in* Z *seccet: Dico* G D *ad angulos rectos secare rectam* A B, *coniungãtur* E A, E B *rectæ. Cùm enim æquales sint rectæ* Z B, E Z *rectis* Z A E Z, *& quæ à cẽtro basis* B E *basi* A E, *angulus* E Z B *angulo* A Z E *æquus erit, per* 8 *primi. Rectus erit igitur vterque* G Z B *&* G Z A, *per* 10 *diffinitionem primi. Recta itaque* G D *reliquam* A B *ad rectos secat. Ad secundum autem, seccet eam ad rectos: Dico* G D *bifariam secare rectã* A B. *Nam trianguli* A E B *qui ad basim anguli,* E B A E A B *sunt (per* 5 *primi) æquales.*

Sed E Z A *&* E Z B *ſunt (per hypotheſim) æquales. Reliquus igitur reliquo (per 26 primi) & latus* A Z *ipſi* B Z *triangulorum* E B Z *&* E A Z *æqualia erunt. Rectæ itaque* G D *rectam* A B *in* Z *ſecat bifariam. Si igitur in circulo recta per centrum extenſa, rectam, &c.*

Propoſitio quarta.

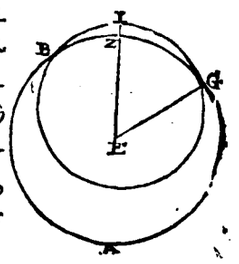
Si in circulo binæ rectæ non per centrum extẽſæ ſeſe inuicem ſecuerint ſeſe bifariam non ſecabunt.



In circulo A B G D *binæ rectæ appoſitæ* A G B D *non per centrum extenſæ ſeſe inuicem ſeccent in* E: *Dico quòd non ſecabunt ſeſe bifariam. Suſcipiatur (per primum huius) circuli* A B G D *centrum* Z, *coniuncta* Z E. *Ab impoſsibili enim, ſi aliquæ duci poſsint, quæ bifariam ſeſe ſeccent, ſint* A G B D. *Ad earum ſectionem* E *coniuncta recta* Z E, *efficiet (per præcedentem) angulos* Z E B *&* Z E A *rectos, & igitur æquales, per* 10 *communem ſententiam. Maiorem quidem* Z E B *minori* Z E A, *quod eſt impoſsibile. Cadit enim* Z E, *quæ per centrum in vtraſque rectas* A G B D. *non igitur aliquæ bifariam ſeſe ſecabunt. Idem oſtendimus ſi altera tãtùm bifariam ſeccetur, nam hæc ſola rectam efficiet ei quæ per centrum augulum, reliqua verò maiorem vel minorẽ recto. Si igitur in circulo binæ rectæ non per centrum extenſæ, &c.*

Propoſitio quinta.

Si binæ circunferentiæ in plano ſe inuicem ſecuerint, non erit earum idèm centrum.



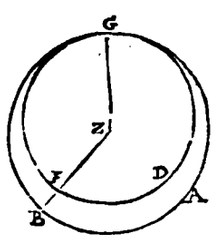
Proponantur binæ circunferentiæ A B G *&* I B G *circulorum ſeſe in eodem plano ſecantium in* B *&* G: *Dico non eſſe earum idem centrum. Quod ſi poſsibile fuerit idem eſſe, ſit* E *centrum vtriuſque, & coniungatur* E G, *& inter* G *&* B *ducatur alia quæuis, ſecans binas circunferentias in* Z *&* I, *ſitq́* E Z I. *Quoniam enim* E G *eſt ex centro circuli* A B G, *ea æqualis erit ipſi* E Z. *Quia verò eadem* E G *eſt ex centro circuli* I B G, *ea erit æqualis rectæ* E I, *per* 15 *diffinitionem primi. Rectæ igitur* E Z E I *eidem* E G *æquales, adinuicem æquales erunt, maior ſcilicet minori, quod fieri non poteſt. Non erit igitur earum idem centrum. Si itaque binæ circunferentiæ in eodem plano ſe, &c.*

MONITVM.

Quoniam agimus tantùm de circulorum circunferentiis hoc & ſequenti theorematæ, diximus loco circulorum, circunferentias ſeſe ſecari, & inſuper in eodem plano præter Theonem & Campanum dicendum eſſe curauimus. Quod omiſſum efficit binos circulos vel circunferentias ſeſe poſſe ſecare, licet idem centrum habeant, veluti circuli maiores in ſphæra mundi, ſcilicet horiſon, meridianus, coluri, & reliqui quotcunquè idem mundi centrum habentes, hoc errore ſæpiuſcule poſthac abutetur Theon, circulum ſcilicet pro circunferentia ſumens, hoc eſt ſuperficiem pro linea, quæ quàm diſsideant, iudicandum relinquimus.

Propoſitio ſexta.

Si duæ circunferentiæ ſe inuicem tetigerint, non erit earum idem centrum.

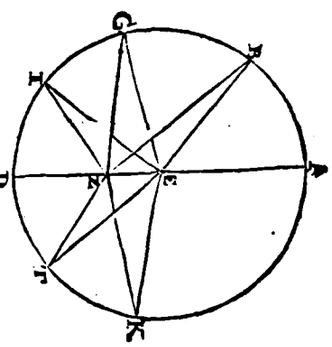


Binæ circunferentiæ A B G *&* D E G *ſeſe tangant in* G: *Dico non eſſe earum idem centrum. Quod ſi idem credatur eſſe centrum, ſit* Z, *& coniungatur* Z G *& alia quædam à centro* Z, *ſecans binas circunferentias in* E *&* B, *Quoniam* Z *eſt centrum circuli* A B G, *recta* Z B *ipſi* Z G *æqualis erit. Quia ſimiliter idem* Z *eſt centrum circuli* D E G, *recta* Z E *eidem* Z G *æqualis erit per* 15 *diffinitionem primi, ipſæ itaque* Z E Z B *eidem* Z G *æquales, adinuicem erunt æquales, pars ſcilicet toti, quod fieri non poteſt. Non erit igitur eorum idem centrum. Si ergo duæ circunferentiæ, &c.*

Propoſitio

Propoſitio ſeptima.

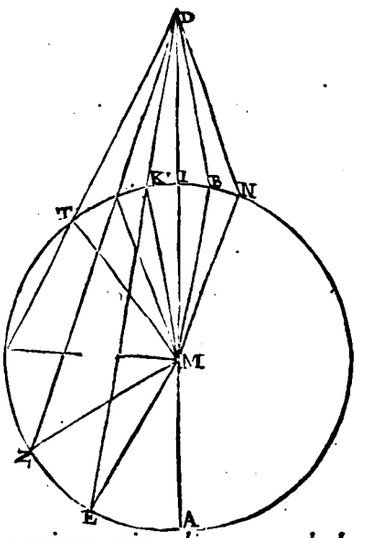
Si in diametro circuli aliquod ſumatur ſignum, quod centrum circuli non ſit, ab eóque in circunferentiam aliquæ rectæ procidant, maxima erit in qua centrum, minima verò reliqua. Aliarum autem proxima centro, remotiore maior eſt. Binæ autem ſolùm rectę lineę ęquales, ab eodem ſigno in circunferentiam cadunt, ad vtraſque diametri partes.



In circulo AB GD *ſumatur aliquod ſignum* Z, *quod centrum non ſit, ab ipſo verò* Z *in circunferentiam plures cadunt rectæ, ſcilicet* ZB ZG ZI ZD, *in qua quidem* ZD *producta in* A *ſit centrũ* E: *Dico omnium rectarum, à ſigno* Z *productarum, maximam eſſe* AZ *in qua eſt* E *centrum, minimam verò reliquam* ZD, *& inſuper* ZB *proximiorem centro* E, *quauis remotiore maiorem eſſe. Quoniam enim productis* EB EG EI, *trianguli* BEZ *duo latera* BE EZ *reliquo* BZ *ſunt maiora, per* 20 *primi, quibus æqualis eſt recta* AEZ. *Recta igitur* AEZ *maior eſt ipſa* BZ, *& ſimiliter maior erit reliquis* GZ IZ, *& quibuſcunque à ſigno* Z *ductis, ſemper enim binis triangulæ lateribus eſt æqualis. Quia verò binæ* BE EZ *binis* GE EZ *ſunt æquales, angulus verò* BEZ, *angulo* GEZ *maior eſt, baſis itaque* BZ *baſi* GZ *maior erit, per* 24 *primi, ſimiliter &* GZ *maior erit ipſa* IZ. *Quia autem latus* IE *binis* IZ ZE *minus eſt, ipſi verò* IE *æqualis eſt* DE, *ipſa igitur* DE *minor eſt binis* IZ ZE. *Communi verò ablata* ZE, *ſequetur* ZD *minorem eſſe qualibet alia à ſigno* Z *producta. Quæ igitur per centrum ſcilicet* ZA *maxima, reliqua verò* ZD *minima erit: aliarum verò quælibet centro proximior, remotiore maior oſtenſa eſt, vt* BZ *maior recta* GZ, *eadem verò* GZ *maior alia* ZI, *&c. Ad vltimum autem, ad rectam* ZE *ſignúmque eius* E *angulo* IEZ *æqualis conſtituatur, per* 23 *primi* ZET, *coniuncta* ZT, *Cùm igitur æquales ſint* IEZ *&* TEZ *anguli, binæq́* IE EZ *binis* TE, EZ *& baſes* ZI ZT *ad vtraſque partes diametri æquales per* 4 *primi erunt. Sed ipſi* IZ *nulla alia ab ipſa* ZT *poteſt dari æqualis. Nam ſi detur alia quæuis* ZK *ipſi* ZI *æqualis, ea æquabitur eidem* ZT, *quod fieri nõ poteſt: erit enim remotior vel proximior centro: non igitur erunt æquales, vt oſtenſum eſt. Si itaque in diametro circuli aliquod ſumatur ſignum, &c.*

Propoſitio octaua.

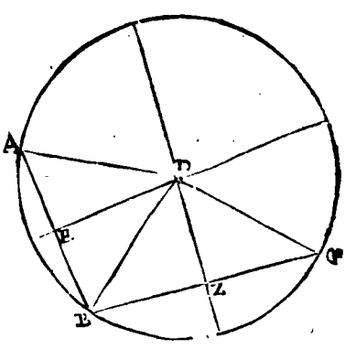
Si extra circulum ſuſcipiatur in plano aliquod ſignum, ab eóque in circunferentiam ducantur aliquę rectę, quarum quidem vna per centrum extendatur, reliquę verò vtrunque in cauam circunferentiam cadentium rectarum, maxima eſt quę per centrum ducitur. Aliarum autem ſemper ei quę per centrum tranſit propinquior remotiore maior eſt. In curuam verò circunferentiam cadentium rectarum, minima eſt eius quę per centrum pars exterior. Minimè verò propinquior ſemper remotiore minor eſt, binę autem tantũ rectę lineę ab eo ſigno in circunferentiam cadunt ęquales ad vtraſque partes diametri.



Sumatur extra circulum A B G *ſignum* D, *à quo* M *circulum ducantur aliæ q̃ rectæ, quarum vna per centrum tranſeat* D A, *ſecans circunferentiam in* I, *& centrum ſit* M, *reliquæ verò vtrinque ſint* D K E D L Z D T G, *coniunctis* M K M L M T M G M Z M E. *Quoniam enim* D A *eſt æqualis binis* D M M E, *quæ quidem ſunt maiores ipſa* D E *per* 20 *primi, ipſa igitur* D A *reliqua* D E *maior eſt. Rurſus cùm æquales ſint binæ* D M M E *binis* D M M Z *& angulus* D M E *maior angulo* D M Z, *& baſis* D E *baſi* D Z (*per* 24 *primi*) *maior erit. Et eadem de cauſa* D Z *ipſa* D G *maior erit, proximior quidem remotiore earum quæ in cauam cadunt circunferentiam. Cæterùm cùm* D K, K M *ſint* G *vnicæ* D M *maiores, ab ipſis autẽ æquales tollantur* K M *&* I M, *reliqua igitur* D I *pars exterior eius quæ per centrum, ipſa* D K *minor eſt, ſimiliter & minor ipſis* D L D T *oſtenditur. Et quia trianguli* D L M *à limitibus vnius lateris* D M, *binæ rectæ introrſum ad ſignum* K *conſtituuntur* M K D K. *Ipſæ reliquis minores ſunt, per* 21 *primi, æqualis autem eſt* M K *ipſi* M L. *Igitur* D K *minor erit reliqua* D L, *& hac lege* D L *minor ipſa* D T, *propinquior ſemper ipſi* D I *remotiore quauis alia. Ad vltimum autem, ad rectam* D M *ſignúmque eius* M, *angulo* D M K *æqualis conſtituatur* D M B, *coniuncta* D B, *binæ* D M M B *binis* D M M K *æquales, efficiunt* (*per* 4 *primi*) *baſes* D B D K *æquales, ad vtraſq; diametri* D I A *partes, nec alia vlla ipſis æqualis datur, qualis eſſet* D N: *nam* D N *remotior aut propinquior eſſet rectæ* D I *quàm ſit* D B *vel* D K, *non igitur eſſet æqualis, vt oſtendimus. Binæ itaque tantùm dantur æquales rectæ ad vtraſque diametri partes, vt* D B *ipſi* D K *&* D N *ipſi* D L *&c. Si igitur extra circulum ſuſcipiatur, &c.*

Propoſitio nona.

Si in circulo ſuſcipiatur aliquod ſignum, & ab eo in circunferentiam cadant plures quàm duę rectę lineę æquales, ſuſceptum ſignum centrum eſt circuli.



Eſto circulus A B G, *in quo ſuſcipiatur ſignum aliquod* D, *à quo in circunferentiã plures quàm duæ rectæ ductæ* D A D B D G *ſint æquales adinuicẽ: Dico ſignum* D *eſſe circuli centrum. Coniungãtur* A B B G *rectæ, quæ ſeccentur bifariam in* E *&* Z: *Producantur autem* E D *&* Z D *quantumuis, quoniam autem bina latera* A E, D E *binis* B E D E *&* baſis A D *baſi* D B *æquãtur. Anguli* A E D *&* B E D (*per* 8 *primi*) *ſunt æquales, igitur & recti erunt, per* 10 *diffinitionem primi, ſimiliter & anguli* D Z B D Z G. *Recta igitur* D E *ſecans rectam* A B *in circulo bifariam & ad rectos, in ſe habet centrum circuli. Haud ſecus dicemus de recta* Z D, *per corol. primæ huius, in vtraque igitur* E D *&* Z D *erit centrum. Si igitur vtrique fuerit ſignum commune centrum, & ſolam ſectionem* D *communem habeant, ſequetur* D *circuli eſſe centrum. Si itaque in circulo ſuſcipiatur aliquod ſignum & ab eo, &c.*

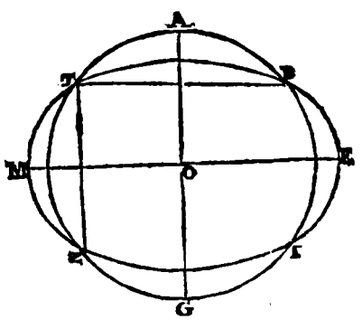
Monitum 7. 8. & 9. propoſitionis.

Quoniam dixit Theon à ſigno in circulo exiſtẽte in circulum rectam duci, quod iuxta eius diffinitiones videtur ridiculum, cùm iam illud ſignum ſumptum ſit in circulo, loco etenim circunferentiæ circulum ſumpſerat. Diximus in circunferentiam rectas cadere. Communis verò fuit huius & duarum præcedentium defectus iſte, quo poſthac pluries abutetur, vt autẽ qui textus ſolos quandoque perlegent ambiguitatem facilius euitent, diximus poſtrema parte duarum præcedentium, binas lineas æquales, non autem duas, eò quòd plures duabus æquales binæ & binæ dari poſſint, ideo diximus binas, vt coniunctim duæ non diuiſim plures duabus exiſtimentur dari æquales.

Propoſitio

Propositio decima.

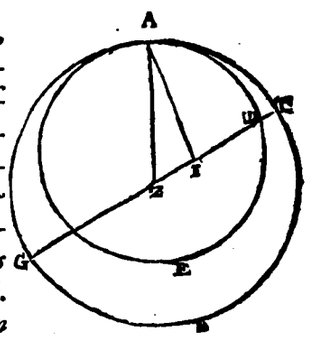
Circunferentia circunferentiam circuli in plũribus duobus signis non secat.



Esto circunferentia A B G: *Dico nullam hanc aliam secare in pluribus signis duobus. Si enim fieri possit oppositum, seccet circunferentiam* A B G, *circunferentia* E B M *in* B T Z I, *coniunctis* B T B I, *quas bifariam & ad rectos seccẽt rectæ* A G E M, *per* 10 *&* 11 *primi, sese autem seccent in* O. *In ipsis igitur* A G E M *erit centrum vtriusque circuli, per corollarium primæ huius. Cùm* T B *&* I B *bifariam & ad rectos sectæ, in vtroque sint circulo. Igitur* O *centrum erit circuli, communis nãque earum* A G *&* E M *est concursus. Binarũ itaque circunferentiarum sese secantium idem erit centrum, contra* 5 *huius, quod fieri non potest. Non potest igitur circunferentia circunferentiam secare in pluribus duobus signis. Circunferentia igitur circunferentiam, &c.*

Propositio vndecima.

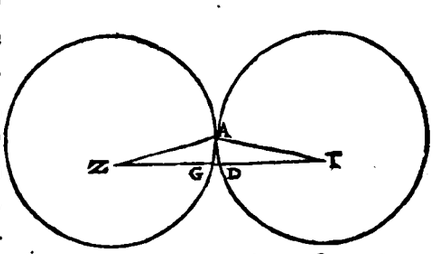
Si binæ circunferentiæ in plano sese introrsum tetigerint, recta linea coniungens earum centra eiecta, in contactum circunferentiarum cadit.



Binæ circũferentiæ A B G *&* A D E *in signo* A *sese introrsum tãgant, super idem planum. A signo autem* A *ad vnius earum* A B G *centrum, scilicet* Z, *producatur recta* A Z *quantumuis: Dico in recta* A Z *esse vtrumque earum centrum. Quod si non credatur, sit reliquum centrũ ipsius* A D E *extra* A Z *in* I, *ducta* Z I *in* G Z I D T *ac recta* A I. *Quoniam binæ* A I, I Z, *maiores sunt reliqua* A Z, *per* 20 *primi,* I A *verò &* I D, *quæ à centro sunt æquales. Tota igitur* D I Z *æqualis binis* A I I Z *erit, & proinde tota* D I Z *maior erit ipsa* A Z. *Sed & minor, cùm sit pars rectæ* Z T, *quæ æqualis est ipsi* A Z, *quæ ex centro, quod fieri non potest. Reliquæ igitur circunferentiæ* A D E *centrum, non est extra rectam* A Z. *In ipsa itaque* A Z *erit vtrunque earum centrum. Si igitur binæ circunferentiæ in plano sese introrsum tetigerint, &c.*

Propositio duodecima.

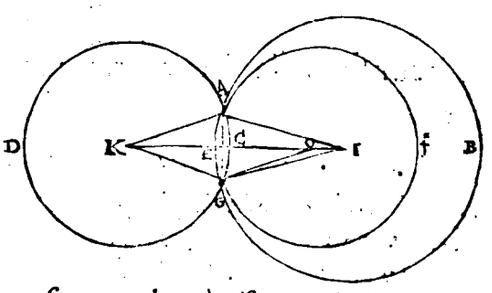
Si binæ circunferentiæ sese exterius in plano tetigerint, centra earũ coniungens recta per contactum transit.



Binæ circunferentiæ A D *&* A G, *sese exterius tangant in* A *super plano: Dico rectam eorum centra cõiungentem per* A *sectionem trãsire: si autem non, transeat per* G D, *sitque* Z G D I *recta,* Z *&* I *verò sint centra, coniunctis* Z A, I A, *triangulum erit* A Z I, *habẽs duo latera* A Z A I, *reliquo* Z I *maiora, per* 20 *primi. Sed* Z A *ipsi* Z G (*quæ ex centro*) *est æqualis,* I A *verò ipsi* I D. *Binæ igitur* A Z A I (*binis* Z G I D) *æquales, recta* Z I *minores sunt, residuo* G D, *& maiores ostensa sunt: quod est absurdum. Non potest igitur recta coniungens centra circunferentiarum* Z I, *alibi quàm per contactum* A *transire. Si itaque binæ circunferentiæ, &c.*

Propositio decimatertia.

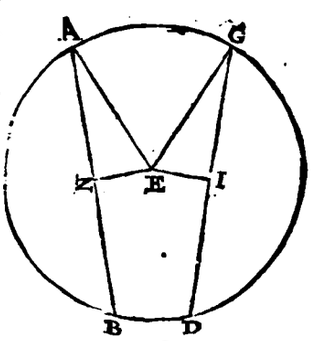
Circunferentia circunferentiam non tangit in pluribus signis vno, etsi extra, etsi intus tangat.



Sint duæ circunferentiæ A B G *&* A D G, *quæ seſe tangant ſi fieri poſſit, in pluribus ſignis* A *&* G, *& coniungatur recta* A G, *ipſa in circulos vtroſque cadet, per* 2. *huius. Circunferentiæ itaque* D G A *&* B G A *ſeſe ſecant in* G A, *non igitur tangunt. Alids, ducemus à centro* K *ad centrum* I *rectam, quæ per cõtactum tranſit, per* 12 *huius, qui ſit* E *vel* C. *Eſto, ſi fieri poſſit, alius contactus in* A, *couiunctis* I A, I G, K A, K G. *Quouiam igitur circunferentiæ* A B G *&* A D G *ſeſe tangunt in* A *&* C, *rectæ* I C C K, *binis* I A A K *ſunt æquales, cùm ſint ex cẽtris. Trianguli igitur* A K I *duo latera* A K A I *reliquo* K I *non erunt maiora, contra* 20 *primi, quod fieri non poteſt. Non igitur ſeſe tangunt extra in pluribus ſignis, ſed in vno tantùm. Si verò credantur ſeſe tangere intus in pluribus ſignis, tangant ſe in* A *&* G *ſignis circuli* A B G *&* A F G, *quorum centra ſint* I *&* O, *per primam huius. Per* O *verò ducatur recta* I O, *ipſa in contactum cadet, per* 11 *huius, qui ſit* E. *Binæ igitur* O E O G *ex centro ſunt æquales. Communis addatur* I O, *tota* I E, *binis* I O G O *erit æqualis. Atqui ipſi* I E *æqualis eſt* I G, *quæ ex centro circuli* A B G. *Trianguli itaque* G O I *latus* I G, *binis reliquis* I O G O *non eſt minus, contra vigeſimam primi, quod fieri non poteſt. Nec igitur intus ſeſe tangent circunferentiæ in pluribus ſignis vno. Circunferentia itaque circunferentiam non tangit in pluribus ſignis vno, &c.*

Propoſitio decimaquarta.

In circulo, æquales rectę æqualiter diſtant à centro, & quę æqualiter diſtant à centro, æquales adinuicem ſunt.

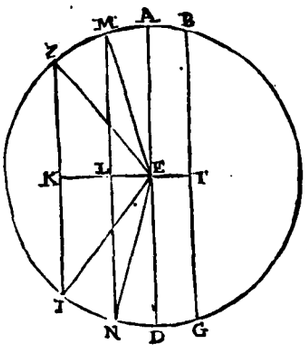


Sint in circulo A B D G *rectæ* A B D G *æquales: Dico eas* A B *&* G D *æqualiter diſtare à cẽtro. Suſcipiatur (per primam huius) centrum* E, *à quo perpendiculares in ipſas* A B *&* G D *demittantur* E Z E I, *per* 12 *primi, ipſæ (per tertiam huius) bifariam ſecabunt rectas* A B *&* G D. *Rectæ itaque* A Z *&* G I *erunt æquales. Sed ex* A E *&* E G *quadrata quæ ex rectis fiunt æqualibus, æquantur (per* 47 *primi) quadratis ex* A Z Z E, *&* ex G I I E, *cũ anguli* A Z E *&* G I E *ſint recti. Ab æqualibus autem ex* A Z, Z E *ipſis ex* G I I E *quadratis, æqualia auferantur quæ ex* A Z *&* G I *quadrata. Reliqua ex* Z E *&* I E *quadrata, erunt æqualia, per* 3 *communem ſententiam. Et proinde rectæ* Z E *&* I E *æquales erunt, quare & ipſæ* A B *&* G D *æqualiter diſtabunt à centro, per* 4 *diffinitionem huius. Ad ſecundam partem conuerſo argumento, conuerſum ſequetur. Scilicet diſtent æquè à centro rectæ* A B G D *rectæ* Z E *&* E I *erunt æquales, per* 4 *diffinitionem huius, ſed* A E *&* G E *quæ ex centro ſunt æquales. Et ipſarum quadrata, æquantur eis quæ ex* A Z Z E, *&* G I I E. *Æqualia igitur ſunt ex* A Z Z E *quedrata, eis quæ ex* G I I E, *à quibus æqualia quæ ex* Z E E I *ablata, relinquũt æqualia ex* A Z *&* G I. *Quare* A Z *&* G I *ſunt æquales & dimidiæ ipſarum* A B G D *(per* 3 *huius) bifariam enim ſecantur à perpendicularibus à centro. Totæ igitur* A B *&* G D *ſunt æquales. In circulo itaque, æquales rectæ æqualiter diſtant à centro, & quæ æqualiter, &c.*

Propoſitio decimaquinta.

In circulo maxima quidem eſt dimetiens, reliquarum autem, ſemper propinquior centro remotiore maior eſt.

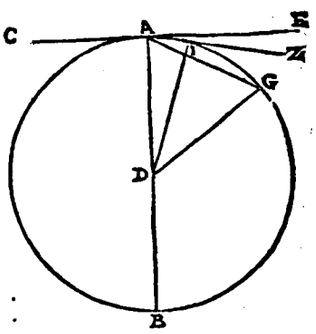
In cir-



In circulo A B G D *ſit dimetiens* A D, *centrum verò* E, *cui propinquior ſit recta* B G *quàm* Z I: *Dico rectarum in circulo ſubtenſarum maximam eſſe* A D, *reliquarum verò proximiorem centro (hoc eſt rectam* B G) *maiorem eſſe* Z I *remotiore, à centro* E *perpendiculares mittantur, in* B G *&* Z I, *quæ ſint* E T *&* E K. *Quia verò* E K *maior eſt (per 4 diffinitionem huius) reliqua* E T, *ab ea æqualis ipſi* E T *abſcindatur* E L, *cui per ſignum* L *perpendicularis agatur* M L N. *Coniunctis* E M E Z E I E N. *Quoniam æquales ſunt* E T *&* E L, *æquales erunt (per 14 huius)* B G *&* M N. *Quia verò trianguli* M N E *bina latera* M E E N *reliquo* N M (*per 20 primi*) *ſunt maiora. Rectis autem* M E E N *æqualis eſt* D E A *dimetiens, dupla namque eius quæ ex centro, Igitur* D A *dimetiens maxima erit, cuiuis rectæ comparata in circulo. Cùm autem triangula* M E N *&* Z E I *duo latera* M E E N *duobus* Z E E I *æqualia, angulum verò* M E N *angulo* Z E I *maiorem habeant, & baſim* M N *baſi* Z I *remotiore maiorem (per 24 primi) habebunt. Oſtenſa eſt autem ipſi* M N *æqualis* B G, *Ipſa igitur* B G *proximior centro, reliqua* Z I *remotiore maior erit. In circulo igitur maxima quidem eſt dimetiens, &c.*

Propoſitio decimaſexta.

Quæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos in plano ducitur extra ipſum circulum cadit, & in locum inter rectam lineam & circunferentiam, altera recta linea non cadet, Et ſemicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior eſt, reliquus autem minor.



Ducatur ſuper extremitate diametri A B *circuli* A G B *ad angulos rectos, linea recta* C A E: *Dico rectam* C A E *extra circulum cadere, & inter* A E *rectam &* A G *circunferentiam, nullam rectam cadere lineam. Et inſuper angulum* B A G *eſſe maiorem omni angulo rectilineo acuto, reliquum verò* G A E *eſſe minorem omni quoque angulo rectilineo, Sit centrum* D, *Ad primum autem quæ ad rectos angulos ad extremitatem diametri ducitur extra circulum cadit. Nam ſi intra caderet vt recta* A G, *coniuncta* D G *trianguli* A D G *Iſoſcelis qui ad baſim anguli eſſent æquales, ſcilicet* D A G *&* D G A, *per 5 primi, Atqui rectus eſt* D A G, *rectus igitur eſſet* D G A, *& proinde duo anguli alicuius triãguli duobus rectis æquales eſſent, quod eſt abſurdum, ex 17 primi, Non igitur cadit recta ad angulos rectos ſuper extremitate diametri conſtituta intra circulum. Quare cadet extra vt recta* C A E.

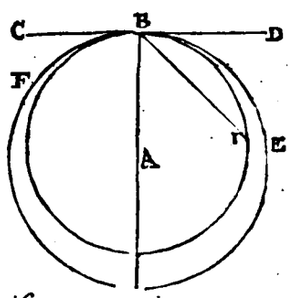
Secundo inter rectam A E *& circunferentiam* A G, *nulla recta linea ad ſignum* A *conſtitui poteſt, Si enim fieri aliter poſſit, eſto recta* A Z, *A centro autem* D *in ipſam* A Z *perpendicularis mitattur* D I. *Quoniam enim angulus* D I A *rectus eſt, erit (per 18 primi) maior* D A *ipſa* D I, *Quod producit abſurdum. Nam* D I *quæ minor eſſet, extra circulum protenditur, ideo maior eſſet & minor, quod fieri non poteſt, Nulla igitur recta inter* A E *&* A G *cadet. Tertio quod angulus* B A G *ſub dimetiente & circunferentia contentus, maior ſit omni acuto rectilineo patet. Nam quilibet acutus rectilineus angulus minor erit recto* D A E, *per 12 diffinitionem primi. Si itaque ſit maior idem acutus, angulo ſemicirculi* G A D. *Is ſecabit rectum* D A E *per rectam inter* A E *& circunferentiam* G A *conſtitutam, Quod impoſsibile oſtenſum eſt. Si verò ſibi æqualis credatur, recta circunferentiæ in pluribus ſignis congrueret, contra 4 diffini. primi, Non erit igitur aliquis acutus rectilineus angulus maior angulo ſemicirculi, nec proinde reliquo* G A E *contingentiæ minor, nec quidem æqualis, Erit igitur angulus ſemicirculi maior omni acuto rectilineo & itaque angulus contingentiæ minor omni eodem acuto. Quæ igitur à diametri circuli, &c.*

Corollarium.

Huic aſſequimur rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos erectam, circulum tangere in vno tantùm ſigno, nam ſi in duobus tangeret ipſa circulum ſecaret (per 2 huius) eo quod intus caderet.

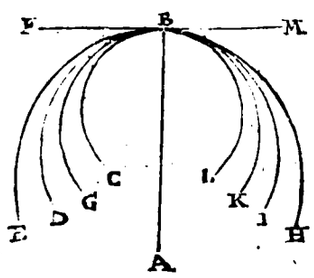
MONITVM.

Quoniam cognitio ſine huius contingentiæ anguli intelligentia aliquos latuit, quædam animaduerſione digna huc adducenda eſſe arbitrati ſumus. Campanus iunioribus reliquit anxium quid de anguli contingentiæ natura ſentirent, cùm dixit non valere argumentum, hoc tranſit à minori ad maius per omnia media, ergo tranſit per æquale, non animaduertens qua de re tacuerit Euclides huius anguli naturam, cùm dicit, rurſus nec valere hoc argumentum, contingit reperire maius & minus eodem, ergo contingit reperire æquale. Euclides etenim his prioribus libris linearum, angulorum, ſuperficierum ac figurarum originem tantùm edocens, quid ad naturæ eorum ſcrutandæ, præter hæc requiratur, poſterioribus conſeruabat documentis. Pluraque prædocet quorum naturam inquirentes eouſque curioſè, vt ne quidem contenti ſuis dictis fuerimus. Reperiemus quamplura inter ſe nulla quantitatis diſcretione nobis propalari poſſe, ob naturæ diſtantiam, quæ quidem naturæ diuerſitas, vnico ſui operis decimo libro traditur, vt iuxta methodi naturam, fortiora quæque præfata debiliora ſubſequantur, idque expectandum maximè diſcentibus conuenit. Nam cùm edocet Euclides parallelogrammorum conſtructionem (libro primo ac ſecundo) lateribus ac dimetientibus ornatam, ſi quis vellet eorum laterum ac dimetientium quãtitates comparare adinuicem, cùm ſint omnes lineæ, ſæpius decideret. Rectæ lineæ item (vndecimo ſecundi theoremate ſectæ) ſectionem aliquam toti comparantes, quiue hunc contingentiæ angulum rectilineo cuidam, qui inſuper plures in circulo ſubtenſas dimetienti, ſiue eiuſdem figuræ diuerſa latera, adinuicem ita comparare velit, vt eius comparationis perfectam intellectui præſtet cognitionem, is profectò mathematicarum methodum verè ignorare fatebitur. Quid enim antequam quale aut quantum ſit aliquid, prius diſcendum eſt. Quare qui quãtitatum diuerſitatem naturæ audire cupient, decimum conſulant: illac enim patebit, diuerſarum ſpecierum quantitates cognita comparatione nõ coniũgi. Vt igitur Campani diſſoluamus nodũ, Sit C B D *recta perpendicularis ad extremum* A B *dimetientis circuli* E B F, *ducta intra circulum recta* B I. *Patet angulum ſemicirculi* A B E *conferri binis rectilineis, vni quidem maiori ſcilicet* A B D *recto, reliquo verò minori ſcilicet* A B I *acuto. Nulli verò rectilineo æquali, eò ſcilicet quòd maioris & minoris confuſa comparatio ſit generalis, ac penitus indeterminata, æqualitas verò abſque determinatione fieri non poteſt. Nam licet* A B I *angulus minor oſtendatur ipſo* A B E, *non tamen quanto minor oſtenditur, nec ſimiliter* A B D *quanto eodem* A B E *maior. Exceſſus etenim quantitatum vel deffectus quiſque numeris non expreſſus, confuſus erit & incognitus ſiue indeterminatus, qui incertus libro decimo dicetur. Sed cùm curuarum inclinationes linearum, omnino à rectarum linearum inclinationibus, & natura & actu differãt, perſpicuum eſt angulos ab his inclinationibns productos, diuerſas induere naturas. Et proinde ea comparatione quæ intellectu patula exiſtat penitus incomparabiles. Angulo itaque ſemicirculi* A B E, *quamuis rectilinei comparentur* A B D *quidem maior, &* A B I *minor, confusè tamen & ſine exceſſus aut defectus expreſsione. Non ſequetur ipſi* A B E *rectilineum æqualem dari poſſe, nam æqualitas omnium certarum & cognitarnm affinitatum ſiue comparationum certiſſima & cognitiſſima exiſtit, & ſolas eiuſdem & generis & naturæ coniũgit quãtitates. Exceſſus verò & defectus cùm generaliores exiſtant, non ſemper inter eiuſdem naturæ quantitates contingunt: Sed eatantum quæ vnius ſunt generis coniungunt: vt latiùs videbimus tertia quinti diffinitione. Ad Campani igitur argumentum dicemus: Non ideo hanc philoſophiæ legem deſtruendam eſſe, quæ dato maiori & minori dari docet & æquale, ſi quantitates eiuſdem generis & naturæ, iuxta verò geometriæ intelligentiam ſumpſerimus. Ipſi nanque angulo* A B E *æqualis facilè dabitur angulus* A B F, *qui quidem eiuſdem generis ac naturæ ipſi* A B E *reperietur eſſe. Ab hac anguloruus diuerſarum naturarum comparatione, opinati ſunt aliqui recentiores, angulorum quantitates inter rectilincos, tantùm verſari, eò quòd minimo rectilineo angulo minorem inuenerit Euclides angulum contingentiæ. Atqui inter quantitates minimam dari non eſt receptum. Eum itaque contingentiæ angulum qui minima exiſtat quantitas, non tantùm angulum non eſſe, ſed nec igitur vllam habere in ſe anguli quantitatem aſſeruerunt. non animaduertentes in hac quãtitatum angulorum cõparatione, variari angulorũ ſpeciem ſiue naturam. Maximus etenim omnium contingentiæ angulorũ minimo rectilineo minor exiſtit, non tamen ideo exiſtimandũ erit quantitatis rectilineorũ angulorũ minimam datam fuiſſe, cùm datur angulus contingentiæ. Nam ipſe idem contingentiæ angulus, per alios*



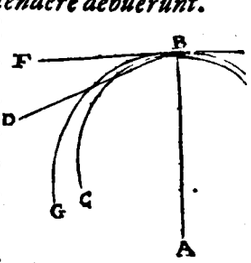
plures

plures angulos rursus infinitè secari potest, vt hoc typo elucidatur. Angulus etenim F B C *infinitè minui potest in angulos* F B G, F B D, F B E, *&c. quodcũq; descriptis maioribus circulis, eò quòd omnes sint eiusdem denominationis, hoc est contingentiæ anguli. Non igitur rectilineorum angulorum quantitatis, angulum contingentiæ minimam esse existimemus, cùm sint diuersæ angulorum species. Sed speciem specie minorẽ censere possumus. Minimus etenim camelorum, culicum maximo citra omnem admirãdi stuporem maior credetur, non itaque qualitatem quantitate, sed speciem specie maiorem dicemus. Præterea concludemus angulum contingentiæ, angulũ dici, ex anguli plani diffinitione, qui est duarum linearum sese in plano tangentium inclinatio. Anguli verò quantitatem præ se ferre velut & rectilineũ, cùm iuxta eam maior minor aut æqualis alteri conferri possit, ac in totidem infinitas diuisiones secari possit vt rectilineus. Concludemus itaque, vbi excessuum vel defectuũ faciendæ sint comparationes, quæ generales & confusæ ac incertæ proponuntur, liberum nobis erit ad diuersarum specierum (sub eodem genere) quantitates discurrere. Vbi verò de æqualitate aut certo excessu vel defectu agendum erit, tunc sub eisdem quantitatum & genere & specie sistendum erit, eò quòd certa optetur affinitas siue cõparatio: vt si angulum rectilineum infinitè diminuere velimus, huius diminutionem ad angulos contingentiæ mutata specie tandem ducere poterimus. Infinitum ad diuersas diuisionum species duci, non autem ad vnicam arctari censentes, non aliàs indefinita esset diuidendi facultas, sed ea restricta infinitè nomine priuaretur. Si verò angulum contingentiæ è contra augere velimus, conuersa methodo per augmentum in angulos rectilineos tandem deuenire possimus, semper augẽtes. Angulo igitur cõtingentiæ datus est maior rectilinẽs, minor verò alius cõtingẽtiæ angulus æqualis demum sibi oppositus. Secus verò fit vbi exoptatur æqualitas, vel excessus aut defectus determinati & certi. Illæ etenim comparationes (vt diximus) sub eadem fouentur quantitatum specie, quam aliquando commensurationem dicemus. An verò omnes anguli contingentiæ sint eiusdem speciei, alibi differendum est. Sufficiat tantùm huic negotio, æquales reperiisse* E B F *ipsi* H B M, *&* D B F *ipsi* I B M, *&c. ac insuper eisdem maiores & minores. Præterea repugnantiam primæ propositionis decimi, in hoc theorema commisisse Euclidem existimarunt, si angulus contingentiæ anguli quantitatem haberet. Ait enim Euclides duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à maiori auferatur maius quàm dimidium, & eius quod relictum est maius quàm dimidium, idque semper fiat: relinquetur tandem magnitudo minor, minore magnitudine exposita. Inferentes angulum* A B F *per rectilineos angulos, semper plusquam eius ac relicti dimidium tollentes diuisum nusquam magnitudinem minorem angulo* C B F *(qui fuit minor magnitudo exposita) relinquere.*

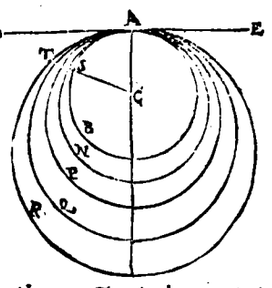


Qui in id genus Caribdis à Silla inciderunt, loquentem Euclidem attendere debuerunt.

Præcipit enim à maiore expositarum plusquam dimidium tolli, excessum quidem confusum, liberum, ac indeterminatum, vt tandem pariat relictum, minus minore magnitudine exposita, quod hoc doceamus exemplo, propositis angulis A B F *maiori, &* F B C *minori. Ab angulo etenim recto* A B F *plus dimidio tollemus (angulum quidem* A B D*) à reliquo item* D B F, *plus dimidio tollemus, angulum* G B F *relinquentes. Nam is est omni rectilineo minor ostensus. Relinqui videmus angulum,* F B G *minorem angulo* F B C *contingentiæ: siquidem totum sua parte maius existat. Permisit enim Euclides liberos ac incertos vltra dimidium excessus. Licuit itaque quantitatum species variare, vt quauis arte minor minore quantitas exhibeatur.*



Dixerunt insuper semicirculorum angulos quosque, æquales esse adinuicem, scilicet eos qui fiunt à dimetiente & circunferentia, principium illud destruentes, scilicet partem toto minorem esse. Patet enim angulum semicirculi A B C *reliqui anguli semicirculi* A B G *partem esse, & igitur minorem. Sed cùm quilibet rectus angulus angulum semicirculi solo angulo contingentiæ excedat. Atqui si omnes excessus æquales fuerint hoc supposito, quod scilicet nulla sit angulorum contingentiæ quantitas, sequetur igitur, angulos reliquos semicirculorum æquales esse, per 3 communem sententiam. Ex falsis igitur suppositis, falsum colligere facillimũ est. Hoc igitur falso supposito plura æquè falsa sequentur, scilicet angulum exteriorem semicirculi æqualem esse interiori. Angulos item circulorum sese tangentium, intus vel extra, æquos esse, nempe nihil quantitatis habere, absurdè concludunt.*



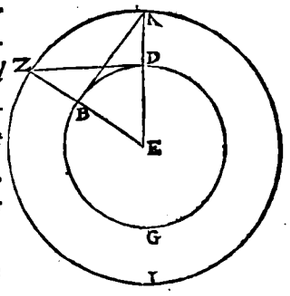
Tãdem extollũt Cardani paralogiſmum geometrico viro indignum: ſcilicet rectam à ſigno C verſus D productam in circulum A B *ſcilicet* C S, *poſt modum verò in circulum* A N, *tandẽ in quotuis circulos (qui quidem infinitè deſcribi poſſunt) vt* C T, *rectam dici infinitæ verſus* D *productam, cùm in infinitas circulorum deſcriptiones producitur, & tamẽ nuſquam in* D *cum recta* A D *concurrere, licet ipſæ parallelæ nõn ſint, hinc inuẽtum elicientes, vt ipſi putant, mirum, ſcilicet rectam* C T *infinitè productam, minorem eſſe recta* C D, *quæ finita eſſet. Vt hoc puerile diſſoluamus obiectum. Concipiemus rectam* C T *per infinitas circulorum deſcriptiones, productam tantùm eſſe, & ideo eius productionem à circulorum deſcriptionibus arctari, & non igitur infinitam eſſe lineæ* C T *productionem: ſed circulorum deſcriptionem, numero infinitam concipi poſſe. Quare lineæ huius* C T *productioni infinitudo (ſi quæ dici poſſit) aſcribi nõ poterit, ſed tantùm circulorum multitudini ea aſcribetur. Nõ itaque dicemus rectam* C I *infinitè productã, quinimo circulis terminatam.*

Cur autem ſemper reperietur minor angulus contingentiæ (quamuis omnium contingẽtium maximus) quolibet minimo angulo rectilineo dicemus. Cùm anguli rectilinei ab eiſdem lineis (aut eiſdem eiuſdem naturæ nempe rectis) maiores vel minores quantumuis ad idem ſignum effici poſſint, non mutata rectilinei denominatione, Cuiuis dato rectilineo minor adhiberi poteſt. Diuerſa namque inclinatione, eaſdem rectas copulare ad idem ſignum licet, cùm inclinatio rectarum (anguli quantitatem efficiens) in ſitu, non in linearum natura conſiſtat. Angulus verò contingentiæ, ab eiſdem lineis, ad idémque ſignum, maior vel minor effici non poteſt, eò quòd eius quantitas (quæ inclinatio dicta fuit) non à linearum ſitu, ſed ab eius natura, ſiue denominatione contingentiæ dependeat. Quare ab eiſdem lineis eouſque neceſſaria ſit huius anguli quantitas, quod nulla arte in maius vel minus traduci poſſit, quin contingentiæ depereat nomen, illico in ſectionis denominationem cadens. Vnde neceſſarium ducemus, diuerſas curuas, diuerſas angulorum contingentiæ producere quantitates, ab inclinationum diuerſitate ortas. Huius inſuper anguli denominatio, ſectionem linearum impedit, nempe cõtingentia: Si enim adeſſet ſectio, non diceretur contingentiæ angulus. Si verò ad ſignum tangentes immoto contactu mouerentur, in ſectionem deuenirent, vtrinque productæ, vt oſtenſum fuit, Contingentiæ q; nomine priuaretur angulus, linearũ motu ſua denominatione expulſus. Si itaque ad aliquam rectam propoſitam, curuà angulum cõtingentiæ concludens, quolibet dato rectilineo minorẽ efficiat, Eũdem verò angulum recta & curua cõponentes alium & minorem efficere nõ valeant, cùm motus illarũ cõtingentiam expellat, Perſpicuum ſit inter eas rectam cadere non poſſe, cadens nimirum (ſua varietate motus) ſectionem produceret ad ſignum contingentiæ, nec proinde rectilineum angulũ illo mixto minorem fieri poſſe. Sed ablata contingentiæ hypotheſi, liberè linearũ inclinationi indulgentes, hoc eſt quãtitati (quæ fuit inclinatio) liberas habenas laxantes, Tum ex eiſdem mixtis lineis, angulus cõſtituetur ſuper eodẽ ſigno, maior rectilineo aut minor vt libuerit, Eò quòd anguli quantitas non fuerit per contingentiam libertate priuata, ſed tantùm eius denominatio ſeu qualitas, quare non fuit heroicum, quantitatis libera tollentes exequia contingentiæ denominatione, illud proferre, non poſſe dari rectilineum minorem mixto, qui ſua denominatione vnicam & ſibi particularem neceſſariò induit quantitatem, quæquidem quantitas licet in aliis angulis rectilineis per liberas inclinationes liberè variari poſſit, in huiuſmodi mixto, denominatio contingentiæ quamlibet aliam quantitatem (inclinationum varietate genitam) penitus fugat, quocirca quantitati liberè angulorum (hoc eſt linearum inclinationi) incumbentes, facilè ex eiſdem lineis rectis aut curuis liberæ quantitates inclinatione genitæ proferentur, Prolata verò hypotheſi cõtingentiæ, angulus dabitur eiuſdem ſpeciei, maior minor aut æqualis ſcilicet maior & minor, diuerſis ad contactum circulorum adiectionibus, æqualis verò contingentiæ angulo, perhibetur illi oppoſitus, vt proximo diximus. Quare qui parallogiſmos ſiue emergentes diſciplinarum nodos diſſoluere cupiunt, attendant potiſſimum actionum operantium libertatem nulla fraude tolli, ſiue earum exequia nullo vinciri hypotheſis ſubtili claustro.

Propoſitio decimaſeptima. Problema 2.

A dato ſigno dato in plano circulo, tangentem rectam lineam ducere.

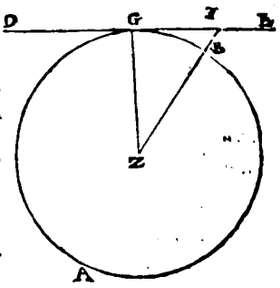
A dato signo A, *circulo* D B G *in eodem plano, tangentem rectam ducamus. A centro circuli quod sit* E, *recta coniungatur* E A *secans circulum in* D, *centro verò* E, *interuallo autem* E A *circulus ducatur* A Z I. *Ad rectam autem* A E *signúmque* D *perpendicularis excitetur* Z D, *& coniuncta* Z E *seccet circulum* D B G *in* B *ducta* A B: *quoniam æquales sunt* A E E B *binis* Z E E D (*quæ ex centro*) *& angulum* E *communem habent. Reliqui itaque anguli* A B E Z D E (*per 4 primi*) *æquales erunt. Rectus est autem* Z D E, *rectus erit igitur* A B E. *Recta itaque* A B *super extremitate diametri* E B *ad rectos constituta, circulum* D B G (*per corollarium præcedentis*) *tangit in* B. *A dato itaque signo, &c.*



Propositio decimaoctaua.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à centro autem in contactum ducta fuerit recta linea, ipsa ducta perpendicularis erit tangenti.

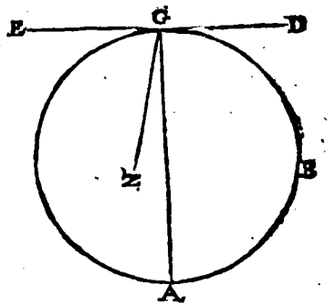
Tangat recta D E *circulum* A B G, *cuius centrum sit* Z, *per* I *huius, & à centro* Z, *in contactum* G *aliqua* Z G *ducatur: Dico* Z G *perpẽdicularem esse ipsi* D G E *tangenti, sin minus, sit alia quædam* Z I *ipsi* D E *perpendicularis, ab ipsa* Z G *cadente in contactum: quoniam rectus (si id esset) fieret angulus* Z I G *trianguli* G Z I, *& ideo maior. Latus* G Z *illum subtendens, maius esset reliquo* Z I, *per* 18 *primi, & minus, cùm sit æquale ipsi* Z B, *quæ ex centro, quod esset absurdum. Non erit igitur rectæ* D E *tangenti, alia à centro perpendicularis, quàm* G Z *in contactum cadens. Si igitur circulum tetigerit aliqua recta linea, &c.*



Propositio decimanona.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem ipsi tangenti ad angulos rectos alia recta linea circulum secans excitetur, in excitata erit centrum circuli.

Tangat circulum A B G, *aliqua recta* D E *in* G. *A contactu autẽ* G *aliqua ad rectos angulos excitetur* G A *circulum secans: Dico in ipsa* G A *excitata esse centrum circuli* A B G. *Quòd si alibi esse putetur, sit in* Z, *ducta* Z G: *erit igitur (per præcedentem) angulus* Z G E *rectus: Sed & minor angulo* A G E (*per hypothesim*) *recto, quod fieri nequit. Non erit igitur alibi centrum quàm in excitata* A G. *Si itaque circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c.*



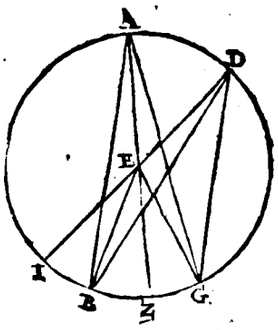
MONITVM.

Addidimus huic theoremati has voces (circulum secans) vt citra contentionem fiat theorema. Nam à contactu posset ad rectos tangenti perpendicularis excitari, non capiens circuli centrum, si extra circulum excitaretur.

Propositio vigesima.

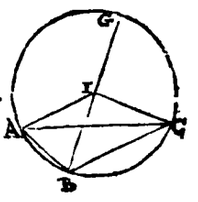
In circulo angulus qui ad centrum, duplus est eius qui ad circunferentiam, quando anguli eandem circunferentiam habuerint basim.

Esto circulus A B G *in quo ab eadem basi* B G *subtendantur duo anguli, scilicet* B E G *ad centrum, &* B A G *ad circunferentiam: Dico* B E G *ad centrum duplum esse, ipsius* B A G *ad circunferentiam. Quoniam trianguli* A E B *duo anguli* E A B, E B A *sunt (per 5 primi) æquales, eisque binis æquus est* B E Z *exterior, per 32 primi. Igitur* B E Z *ipsius* B A Z *duplus erit: similiter* G E Z *ipsius* G A Z *duplus ostendetur. Totus igitur* B E G *totius* B A G *duplus erit. Si verò centrum* E *sit extra rectas angulum continentes, vt sumpto angulo* B D G: *Dico similiter* B E G *duplum esse anguli* B D G. *Patet enim (ex 32 primi) ducta* D E I *recta, angulum* I E G (*exteriorem*) *æquum esse binis* E D G, E G D; *& proinde duplum ipsius* E D G. *Sed & I E B similiter duplus erit ipsius*



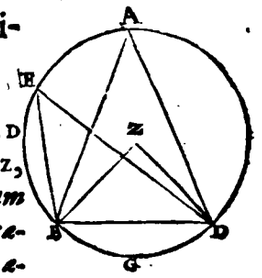
I D B, *per eandem. Tollatur autem* I E B *duplus, ab* I E G *duplo, necnon* I D B *ſimplex, ab* I D G *ſimplici. Reliquus* B E G *reliqui* B D G *duplus erit. In circulo itaque angulus qui ad centrum, &c.*

Corollarium.



Hinc ſequitur, ſi baſis angulos ſubtendens dimidiam excedat circunferentiam, angulos qui ad centrum, duplum efficere eorum qui ad circunferentiam. *Si enim* A G C *circũferentia ſubtendat binos angulos* A I G *&* G I C *ad centrum, & eadem* A G C *ſubtendat angulum* A B C *ad circũferentiam, cũ oſtenſus ſit* A I G *duplus anguli* A B G, *necnon* G I C *duplus ipſius* G B C, *bini* A I G *&* G I C *ad centrum, duplum efficient totius* A B C *ad circunferentiam.*

Propoſitio vigeſimaprima.

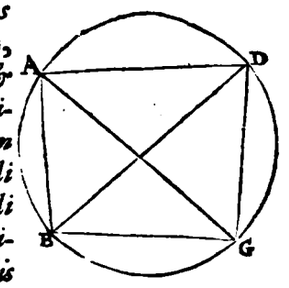


In circulo qui in eadem ſectione ſunt anguli, ſibi inuicem ſunt æquales.

Eſto circulus A B G D, *eius verò ſectio ſit* B E A D, *in qua ſint anguli* B E D B A D: *Dico eos eſſe æquales. Suſcipiatur (per* 1 *huius) centrum quod ſit* Z, *coniunctis* Z B, Z D, *quoniam anguli* B E D *&* B A D *eandem circunferentiam baſim habent (ſcilicet* B G D*) cum angulo* B Z D, *qui ad centrum, ipſi (per præcedentem) ſunt eiuſdem* B Z D *dimidij, & igitur (per* 7 *comm. ſententiam) æquales. In circulo igitur qui in eadem ſectione ſunt angul.*

Propoſitio vigeſimaſecunda.

In circulis quadrilaterorum exiſtentium, anguli qui ex oppoſito duobus rectis ſunt æquales.



Sit in circulo A B G *quoduis quadrilaterum* A B G D: *Dico angulos oppoſitos quadrilateri huius, ſcilicet* B A D *&* B G D, *ſiue* A B G *&* A D G, *binis rectis æquos eſſe, quoniam in eadem ſectione ſunt anguli* A D B *&* A G B, *ipſi ſunt (per præcedentem) æquales: ſimiliter* B A G *ipſi* B D G. *Bini itaque* A D B *&* B D G *binis* A G B *&* B A G *ſunt æquales, ſuper eiſdem baſibus conſtituti, & proinde totus* A D G *binis* B A G, A G B *trianguli* A B G *æquus erit, quare bini* A D G *&* A B G *oppoſiti (tribus trianguli* A B G, *angulis æqui) duobus rectis æquales erunt, per* 32 *primi. Similiter æquales oſtendentur binis rectis reliqui* B A D *&* B G D. *In circulis igitur quadrilaterorum exiſtentium anguli qui ex oppoſito, &c.*

Propoſitio vigeſimatertia.

Super eadem recta linea, duę ſectiones circulorum ſimiles & inæquales, non conſtituentur ad eaſdem partes.

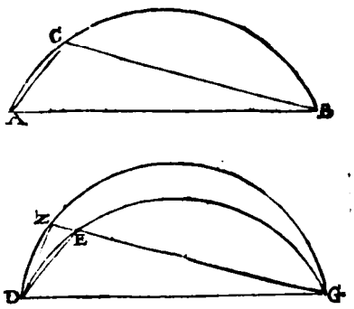
Eſto recta A B: *Dico ſuper ea duas ſectiones circulorum ſimiles & inæquales conſtitui non poſſe ad eaſdem partes, quòd ſi poſſe credatur, ſint* A G B *&* A D B *ſuper* A B *recta ſectiones inæquales & ſimiles, & ad eaſdem partes. Producatúrque recta* A G *in* D, *coniunctis* B G, B D, *cùm ſint ſimiles ſectiones, anguli,* A G B *&* A D B *erunt (per* 10 *diffinitionem huius) æquales, exterior quidem* A G B *interiore oppoſito* G D B, *quod oppponeretur* 16 *primi, & igitur abſurdum eſſet. Non itaque erunt ſuper recta* A B *ſimiles & inæquales ſectiones. Super eadem itaque recta linea, duæ ſectiones, &c.*

Propoſitio vigeſimaquarta.

Super æqualibus rectis ſimiles circulorum ſectiones, æquales adinuicem erunt.

Super

Super æqualibus rectis A B *&* G D *similes consistant sectiones* A B C, D E G: *Dico super ipsis similes & inæquales non posse constitui, si enim super altera earum aliqua maior esse posit & similis. Esto* D Z G (*excedens* D E G) *similis & æqualis* A C B *sectioni, coniungantur autem* A C, C B, D E, E G, *productáque* G E *in* Z *iungatur* Z D, *quoniam similes supponuntur* A B C *&* D G E *sectiones, anguli* A C B *&* D E G *erunt* (*per* 10 *diffinitionem huius*) *æquales. Quia item similis ponitur* D Z G *sectio ipsi* A C B, *æqualis erit* (*per eandem*) D Z G *angulus* A C B *angulo. Atqui eidem* A C B *æquus fuit* D E G *angulus, sequetur igitur angulum* D E G *exteriorem angulo* D Z G *del* D Z E *interiori & oppositio trianguli* E D Z *æquum esse, contra* 16 *primi, quod fieri non potest. Super rectis itaque* A B *&* G D *similes sectiones inæquales non erunt. Æquales igitur erunt, super æqualibus ergo rectis, &c.*



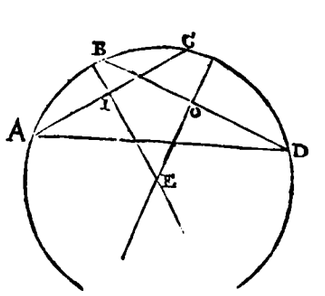
MONITVM.

Quoniam Theon & Campanus hanc demonstrare conati sunt, aut hi à quibus demonstrationes sumpserunt, instrumento ferè mechanico, nempe coaptata figura supra figuram, quod indignum traditione mathematica supramodum existimatur. Demonstrandi nouam rationem aperire cogimur, Theon item hanc per 20 *tertij, loco decimæ voluit ostendere* (*frustra tamen.*) *Poterant enim super eadem recta duæ describi sectiones circulorum, in pluribus duobus signis se non secantium, quare non necessariò concludit hoc suppositio, quod videlicet congruentibus rectis, licet sectiones circulorum non congruant, sectionum circulos sese in pluribus duobus signis secari, maximè si concurrant sectiones tantùm ad extrema lineæ subtendentis signa, tunc in duobus illis sese tantùm secabunt signis. Campanus verò vnam sectionem per puram alterius superpositionem, tanquam instrumento mechanico metitur vt æqualem probet, quod esse argumentum verè mechanicum, patet. Aliquas insuper demonstrationes quasdam hac via demonstrare conati sunt* (*veluti* 4 *&* 8 *primi, &c.*) *Sub octauæ communis sententiæ quidem prætextu, per quam quæ sibimetipsis congruunt vel conueniũt, æqualia adinuicem esse dixit Euclides, cupiens artem non artis praxim describere. Quare non intelligit figuras superponendas figuris vt æquales aut inæquales percipiantur, sed figurarum aut aliorum quorumuis subiectorum quantitates, ratiocinante argumento conuenire cognitæ, adinuicem sibimetipsis illæ quantitates æquales dicentur, non autem quæ experimento congruere palpantur, illæ æquales dici debeant. Matheſis enim ex præassumptis certis necessariò concludit, non autem ex sensibus externis praxim operantibus sæpius fallacem.*

Propositio vigesimaquinta. Problema 3.

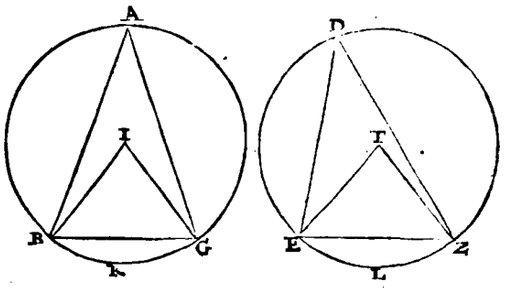
Circuli sectione data, describere circulum cuius est sectio.

Data circuli sectio esto A B D, *in qua duæ rectæ non parallelæ vtcumque ducantur* A G *&* B D, *quibus bifariam in* I *&* O *sectis, excitentur perpendiculares* I E *&* O E. *Sequetur* (*per coroll.* 1. *huius*) *in vtraque esse centrũ circuli* A B G D, *commune scilicet ipsis signũ* E, *centro igitur* E *interuallo verò* E A *vel* D E *circulus perficiatur, per* 3 *post. Circuli igitur sectione data descripsimus circulum cuius est sectio.*



Propositio vigesimasexta.

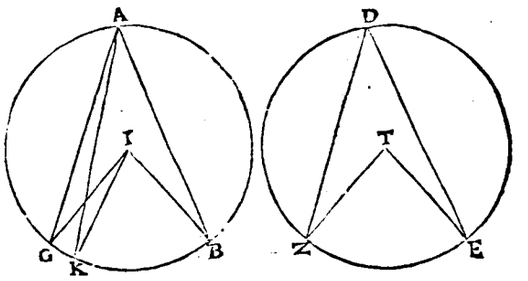
In æqualibus circulis, æquales anguli in æqualibus circunferentiis consistunt, siue ad centra, siue ad circunferentias consistant.



Sint æquales circuli ABG *&* DEZ, *& in eorum circunferentiis* BG *&* EZ *ſint æqualium angulorum* BIG *&* ETZ *qui ad centra magnitudines, per* 8 *diffinit. huius, ad circunferentias autem ſint* BAG *&* DEZ *æquales: Dico circunferentias* BG *&* EZ *æquales angulos ſubtendentes eſſe æquales. Cùm per hyppotheſim æquales ſint circuli, binæ* IB IG *binis* TE TZ, *per* I *diffinit. huius, ſunt æquales. Sed & anguli qui ad* I *&* T *ſunt æquales, per hyppotheſim, baſes igitur* BG *&* EZ *erunt (per* 4 *primi) æquales. Quia verò æquales ſunt anguli* BAG *&* EDZ, *nempe æqualium* I *&* T *dimidij, per* 20 *huius, Similes erunt circulorum ſectiones* BAG *&* EDZ, *per* 10 *diffinitionem huius. Super æqualibus autem rectis exiſtentes, ſcilicet* BG *&* EZ, *erunt igitur æquales ſectiones* BAG *&* EDZ, *per* 24 *huius. Reliquæ itaque* BKG *&* ELZ *circunferentiæ, erunt (per* 3 *commun. ſententiam) æquales. In æqualibus igitur circulis, æquales anguli, in æqualibus circunferentiis, &c.*

Propoſitio vigeſimaſeptima.

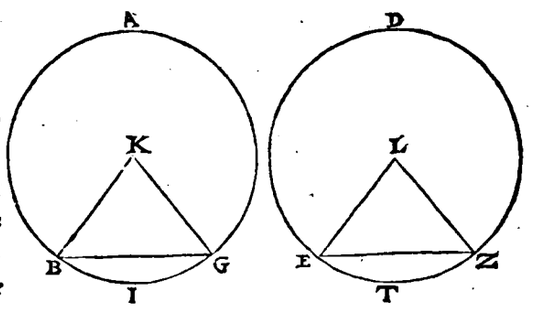
In æqualibus circulis ſuper æqualibus circunferentiis conſiſtentes anguli, ſunt æquales adinuicem, etſi ad centra, etſi ad circunferentias conſiſtant.



In æqualibus circulis ABG DEZ, *ſuper æqualibus circunferentiis* GB *&* ZE, *conſiſtant anguli* GAB ZDE *ad circunferentias, ad centra verò* GIB ZTE: *Dico* GAB *&* ZDE *angulos æquales eſſe, ac* GIB *&* ZTE *ſimiliter æquos. Si enim non credantur, Sit alter* ZTE *minor ipſo* GIB. *Ad rectam autem* BI *ſignúmque* I, *dato* ETZ *angulo æqualis conſtituatur* BIK, *per* 23 *primi. Erit igitur æqualis* BK *circunferentia ipſi* EZ, *per præcedentem. Sed ipſi* EZ *æqualis eſt ſimiliter (per hyppotheſim)* BG *circunferentia, ipſa igitur* BK *minor, ipſi* BG *maiori æqualis erit, quo nihil abſurdius. Non igitur eſt aliquis angulorum* ZTE *&* GIB *altero minor, æquales igitur ſunt. Et proinde* GAB *&* ZDE *ad circunferentias æqualium dimidij, per* 20 *huius, æquales erunt adinuicem, per* 7 *commun. ſententiam. In æqualibus igitur circulis ſuper æqualibus circunferentiis conſiſtentes anguli, &c.*

Propoſitio vigeſimaoctaua.

In æqualibus circulis æquales rectæ circunferentias auferunt æquales, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.



In æqualibus circulis ABG *&* DEZ *ſint æquales rectæ* BG *&* EZ *circulos ſecantes: Dico eas auferre æquales circunferentias, ſcilicet maiorem* BAG *maiori* EDZ, *& minorẽ* BIG *minori* ETZ, *Suſcipiãtur, per* I *huius, centra circulorum* K *&* L, *cõiunctis* KB KG LE LZ. *Quoniam æquales ſunt* BG *&* EZ *per hyppotheſim, binæ autem* BK KG *binis* EL LZ *æquantur, per* I *diffinitionem huius. Anguli igitur* BKG ELZ *(per* 8 *primi) æquales erunt. Ipſi igitur in æqualibus circunferentiis (per* 26 *huius) inſiſtunt, ſcilicet in* BAG *ipſi* EDZ, *maioribus. Reliquæ itaque* BIG *&* ETZ *minores, æquales erunt, per* 3 *commu. ſenten. cùm æquales ſint (per hyppotheſim) circuli. In æqualibus igitur circulis æquales rectæ, &c.*

MONI

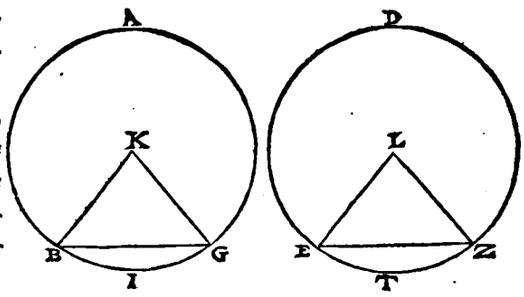
MONITVM.

Quoniam Campani traditio, quæ de linearum diuersitate loquitur, vt maior maiorem circunferentiam, minor verò minorem auferat, Theonis traditionem, de linearum diuersitate, apud aliquos discentes sumi eodem modo forsan doceret, transposuimus tantum hanc dictionem (æquales) addita particula quidem, vt lineæ æquales intelligantur, cùm verò maiorem & minorem dicit, circunferentias inter se comparari intelligemus. Plus enim nobis arrideret Theonis sententia huius theorematis, quàm Campani, dicentis maiorem lineam maiorem circunferentiam indistinctæ auferre in æqualibus circulis, quod potest esse falsum, cùm quælibet recta in circulo tensa, binas subtendat circunferentias, maiorem scilicet & minorem, dempta diametro subtendente æquales. Si igitur maiori lineæ deputetur minor semicirculo arcus, minori verò rectæ maior, patebit maiorem rectã minorem arcum subtẽdere, & minorem rectam maiorem arcum, quod producet absurdum. Nos igitur Theonem veriorem sequutum esse viam existimantes, in hoc imitabimur.

Propositio vigesimanona.

In æqualibus circulis, sub æqualibus circunferentiis æquales rectæ subtenduntur.

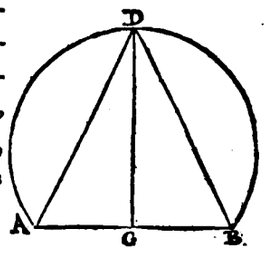
In æqualibus circulis A B G *&* D E Z, *sub æqualibus circunferentiis* G A B *&* Z D E, *subtendantur rectæ* B G *&* E Z: *Dico eas æquales esse. Suscipiantur centra* (*per* 1 *huius*) K *&* L, *coniunctis* B K, K G, E L, L Z. *Quoniam æquales sunt circuli, binæ* B K K G *binis* E L L Z (*per* 1 *diffinitionem huius*) *erunt æquales. Quia verò circunferentiæ* B A G *&* E D Z *æqualium circulorum sunt æquales, reliquæ* B I G E T Z, *erunt æquales, quare anguli* B K G *&* E L Z (*per* 27 *huius*) *erunt æquales. Basis igitur* B G (*per* 4 *primi*) *basi* E Z *æqualis erit. In æqualibus igitur circulis sub, &c.*



Propositio trigesima. *Problema* 4.

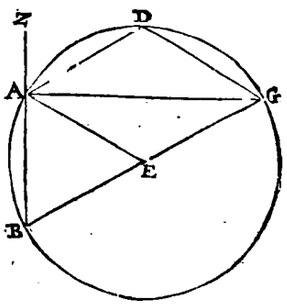
Datam circunferentiam bifariam secare.

Esto data A D B *circunferentia, quam oportet bifariam secare. Subtendat eam* A B, *cui bifariam in* G *secta, perpendicularis excitetur* G D, *coniunctis* A D D B. *Quoniam æquales sunt binæ* A G G D *binis* B G G D, *& circum æquales angulos* D G A D G B, *per constructionem. Basis* A D *basi* B D, *per* 4 *primi, æqualis erit. Et proinde arcus* A D *arcui* B D, *per* 28 *huius, æquus erit* (*minor scilicet minori*) *Datam itaque circunferentiam* A D B *bifariam in* D *secuimus.*



Propositio trigesimaprima.

In circulo angulus qui in semicirculo rectus est, qui autem in maiori sectione recto minor, qui verò in minore maior est recto, & insuper angulus maioris sectionis recto quidem maior est, minoris autem sectionis minor est recto.



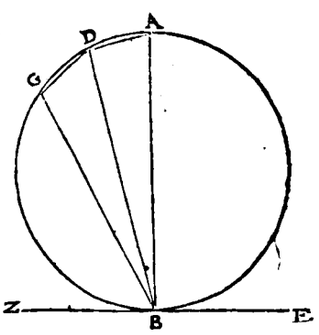
In circulo A D B G *cuius centrum sit* E, *angulus in semicirculo sit* G A B, *ducta diametro* B E G. *In maiori verò sectione sit angulus* A B G *in minore autem sit* A D G *angulus. Maioris verò segmenti angulus, contineatur à circunferentia* B A *& recta* A G, *minoris verò segmenti, à circunferentia* D A *& eadem recta* A G: *Dico* G A B *rectum esse,* A B G *verò recto minorem,* A D G *autem recto maiorem, Angulum verò maioris sectionis* G A B *recto maiorem. Minoris verò* G A D *recto minorem esse. Extendatur* B A *in* Z, *ducta* A E. *Quoniam quæ ex centro* E A E B E G *sunt æquales, anguli* E A B E B A *æquales erunt, similiter & anguli* E A G E G A, *per 5 primi. Totus itaque* B A G *binis,* A B E A G E *æquus erit. Sed binis* A B E A G E *est æqualis* Z A G *exterior, per 32 primi. Idem igitur* Z A G *toti* B A G *æquus erit, per 1 commu. senten. Recta igitur* G A *super rectam* B Z *angulos æquos efficiens, rectos efficiet, per 13 primi, rectus igitur erit* B A G *in semicirculo. Qui itaque in maiori sectione* A B G, *recto minor ostensus est, & insuper angulus sectionis* G A B *rectum* B A G *continens, maior est recto per 9 commun. sententiam: minoris verò sectionis angulus* G A D, *minor est recto* G A Z, *per eandem. Quia verò in circulo* A G B *existit quadrilaterum* B A D G: *Angulos oppositos,* A B G *&* A D G *duobus rectis habet æquales, per 22 huius. Atqui* A B G *minor est recto, reliquus igitur* A D G (*in minori segmento*) *maior erit recto. In circulo itaque angulus qui in semicirculo rectus est, qui autem, &c.*

Corollarium.

Hinc patet. Si trianguli angulus vnus, duobus reliquis fuerit æqualis, ipse rectus erit. Si vero contra rectus sit, & binis æquus erit. *Trium enim trianguli angulorum dimidium vni recto æquipollere fatetur 32 primi.*

Propositio trigesimasecunda.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem ducta fuerit quędam recta linea circulum secans, Anguli quos efficit ad tangentem, æquales sunt eis qui in alternis circuli sectionibus consistunt ànguli.

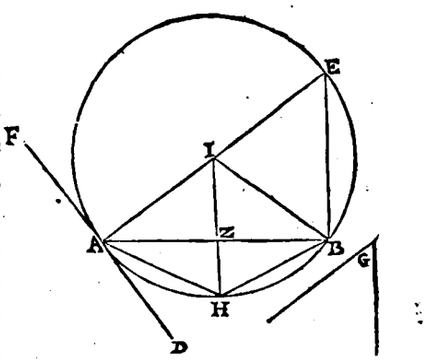


Circulum A D G B *tangat recta* E Z *in* B. *A contactu autem* B *ducatur* B D *circulum secans: Dico angulos quos* D B *efficit ad* E Z *tangentem, scilicet* D B Z, *æquari ei qui in alterna sectione* D A B *reperietur,* D B E *verò ei qui in alterna sectione* D G B *consistit. Esto ipsi* Z E *ad signum* B *perpendicularis* A B, *coniunctis* A D, D G, G B. *In recta* A B *erit centrum circuli, per 19 huius. Angulus igitur* A D B (*in semicirculo*) *rectus erit, per præcedentem, & proinde reliquis* D A B, D B A *æqualis, per coral. præced. Bini igitur* D A B, D B A *vni* A B Z *recto sunt æquales, communis auferatur* D B A, *reliquus* D B Z (*ad tangentem*) *reliquo* D A B (*in sectione alterna*) *æquus erit. Cæterùm quia quadrilaterum est in circulo* A D G B, *anguli* D A B, D G B *oppositi, duobus rectis sunt æquales, per 22 huius, sed duobus item rectis æquales sunt* D B Z, D B E, *per 13 primi. Bini itaque* D A B, D G B *binis* D B Z D B E *sunt æquales, atqui* D A B *alterno* D B Z *æqualis ostensus est. Reliqui igitur scilicet* D B E (*ad tangentem*) *&* D G E (*in sectione alterna*) *erunt æquales, per 3 commu. senten. Si itaque circulum tetigerit aliqua recta linea, &c.*

Propositio trigesimatertia. *Problema 5.*

Super data recta linea, describere sectionem circuli capientem angulum æqualem, dato angulo rectilineo.

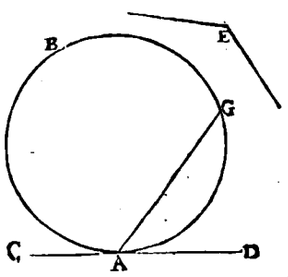
Esto



Esto data recta A B, *datus verò angulus* G, *ad datam* A B *& signum eius* A, *dato angulo* G, *æqualis constituatur angulus* B A D (*per 23 primi*) *producta* D A *in* F. *Ad signum* A *rectæ* D F *perpendicularis excitetur* A E. *Ipsi verò* A B *bifariam diuisæ in* Z, *perpendicularis fiat* I Z, *quæ secabit rectam* A E, *cùm* A D *&* A B *non sint parallelæ, seccet igitur in* I, *coniuncta* I B, *centro verò* I, *interuallo autem* I A *circulus describatur* A B E, *circa dimetientem* A E. *Quoniam enim æquales sunt* A Z, Z I *ipsis* B Z, Z I, *& angulus angulo, bases* A I *&* I B *æquales erunt, per 4 primi. Cadit igitur circulus in* B, *per decimamquintam diffinitionem primi, producta autem* I Z *in* H, *iungãtur* H A, H B, B E, *quia* D F *ad rectos diametro* A E *constituitur, ipsa* (*per corol. 16 huius*) *circulum tangit, & proinde* (*per præcedentem*) B A D *ad tangentem angulus, ipsi* A E B *in sectione alterna æquus erit. Et igitur angulus* G (*ipsi* B A D *per hyppothesim æqualis*) *eidem* A E B *æquus erit, si autem obtusus fuerit datus* G *angulus, Similiter* A D, B A F *applicatus, ostẽdetur æqualis alterno* A H B: *Si autem rectus proponatur datus* G. *Ad datam* A B *semicirculus describatur, ea etenim sectio circuli rectũ capit angulum. Super data itaque recta linea &c.*

Propositio trigesimaquarta. Problema 6.

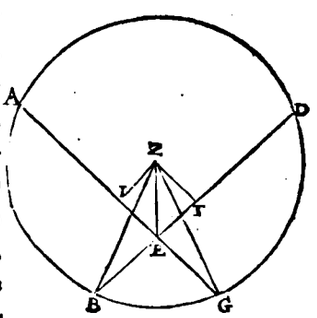
A dato circulo sectionem abscindere, capientem angulum dato angulo rectilineo æqualem.



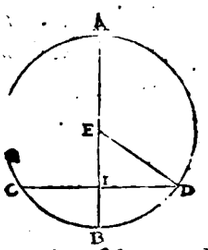
Esto datus circulus A B G, *datus verò angulus sit* E, *circulum verò* A B G *tangat recta* C D (*per 17 huius*) *in* A. *Ad rectam autem* C D *& signum eius* A, *dato angulo* E *æqualis constituatur* C A G *ad tangentem, per 23 primi. ipse* C A G *æquus erit ei qui in segmento* A G *angulo, per 32 huius. Haud secus ostendetur, si datus angulus æqualis ponatur angulo* D A G, *eum æqualem esse ei qui in alterno segmento* A B G. *A dato igitur circulo* A B G *sectionem abscidimus* A G, *vel* G B A, *capientem angulum dato angulo* E *rectilineo æqualem.*

Propositio trigesimaquinta.

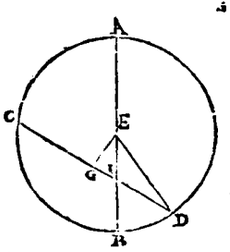
Si in circulo duæ rectę sese secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius. AEquum est ei quod sub segmèntis alterius comprehenditur rectangulo.



In circulo A B G D, *cuius centrum sit* Z, *duæ rectæ* A G *&* D B, *sese secent in* E, *& primò non per centrum extensæ: Dico rectãgulum sub* D E, E B, *æquum esse rectangulo sub* A E, E G *comprehenso, à centro* Z *perpendiculares in vtramque* A G *&* D B *demittantur* Z I Z T, *coniunctis* Z B, Z E, *&* Z G, *Quoniam* Z I, *&* Z T *rectæ, secãt bifariam* (*per 3 huius*) *rectas* A G *&* D B, E *verò secat eas inæqualiter, Erit* (*per 5 secundi*) *rectangulum sub* A E, E G *cum quadrato ex* I E, *æquum* E I *quod ex* I G *dimidia quadrato, Quia verò* (*per 47 primi*) *quadrata ex* I G *&* I Z, *æquantur ei quod ex* Z G, *sequetur rectangulum sub* A E E G *vnà cum quadratis* I E *&* I Z, *æquari ei quod ex* Z G. *Cùm autem quæ ex* I E *&* I Z *sint æqualia ei quod ex* Z E, *per eandem 47 primi, rectangulum sub* A E E G, *cum quadrato* Z E, *æquũ erit quadrato ex* Z G, *Haud dissimili argumento patebit, rectangulũ sub* D E E B, *cum quadratis* T E T Z, *hoc est, cum solo ex* Z E, *æquum esse quadrato ex* Z B, *Sed cum* Z G *&* Z B *sint* (*quæ ex cẽtro*) *æquales, & proinde ex ipsis quadrata æqualia, sequetur rectãgulũ sub* A E E G *cum quadrato ex* Z E *æquum esse rectangulo sub* D E E B *cum eodem quadrato ex* Z E. *Quare cõmuni ex* Z E *ablato, Reliquum scilicet rectangulum sub* A E E G *sectionibus vnius, æqnũ erit rectangulo sub* D E E B *sectionibus alterius. Hæc autem cùm binæ inæqualiter sese secant non per centrum extensæ, dicta sint.*



Secundo cum vna bifariam, altera verò per centrum extensa, inæqualiter secatur, vt in circulo A C B D, *cuius centrũ sit* E, *recta* A B *dimetiens inæqualiter secta, bifariam secat rectam* C D *in* I, *cõiuncta* E D, *quoniam bifariam secat* A B *rectam* C D, *& ad rectos eam secat, per 3 huius. Per præassumptam itaque quintam secundi rectangulum sub* A I I B *cum quadrato ex* E I, *æquum est ei, quod à dimidia* E B, *vel* E D *sibi ex centro æquali, sed eidem ex* E D *quadrato æquum est rectangulum sub* C I I D (*hoc est, quadratum ex* I D, *est enim secta bifariam* C D) *cum quadrato* E I, *per 47 primi. Cõmuni igitur ex* E I *quadrato ablato, rectangulum sub* A I I B, *æquum erit rectangulo sub* C I I D, *hoc est quadrato ex* E I *vel* I D *æqualibus facto.*



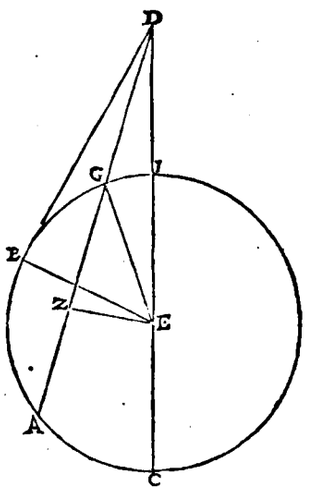
Tertio autem cùm ea quæ per centrum extensa, inæqualiter reliquam per centrum non extensam, secat, vt A B *dimetiens secat* C D, *&* A B *ea secatur inæqualiter in* I, *demittatur perpendicularis à centro* E *in* C D, *quæ sit* E G, *& iungatur* E D, *ipsa* E G *secat (per 3 huius) bifariam rectam* C D. *Quod igitur sub* C I I D *rectangulum, cum quadrato ex* G I, *æquum est quadrato ex* G D, *per 5 secundi. Addatur commune quadratũ ex* G E, *Erit quod sub* C I I D *cum quadratis ex* G I *&* G E *æquum eis quæ ex* G D G E, *quadratis, sed ex* G I *&* G E *quadrata,* E I *quod ex* E I *sunt (per 47 primi) æqualia. Quod itaque sub* C I I D *cum quadrato ex* E I, *æquum erit eis quæ ex* G D G E *quadratis. Atqui (per eandem quintam secundi) quod sub* A I I B *cum quadrato ex* E I, *æquum est quadrato ex* E B, *hoc est, ex* E D *sibi æquali. Quod autem sub* C I I D *cum quadrato ex* E I *æquum fuit quadratis ex* G D G E, *hoc est, eidem quadrato* E D, *per 47 primi. Quod igitur sub* C I I D *cum quadrato* E I, *æquũ erit ei quod sub* A I I B *cum eodẽ quadrato* E I. *Communi verò ablato quadrato ex* E I, *superest quod sub* C I I D *sectionibus vniuersæquum esse ei quod sub* A I I B *sectionibus alterius rectãgulo. Si verò quarto vtraque per cẽtrũ siue bifariã sese secent, sub earum sectionibus rectãgula quædrata erunt, & cùm sint quæ ex centro æqualia ea rectangula quadrata producent. Si itaque in circulo duæ rectæ sese secuerint, rectangulum &c.*

MONITVM.

Triplicem intulimus huic demonstrationem, eò quòd lineæ variis secandi modis in circulo coaptentur, quorum tantùm Theon vnum, scilicet cùm nulla earum per centrum describitur, exposuit, reliquos omittens, duo scilicet quibus lineæ sese secantes, vel earum altera centrum occupat, propriis figuris demonstrandos, quibus quartus facilis exhibetur, & sine figura, nulla ambiguitate propalatus.

Propositio trigesimasexta.

Si extra circulum sumatur signum, ab eóque duæ rectæ lineæ cadant, & earum altera circulum secet, altera verò tangat, quod sub tota secante & eius parte extrinsecus sumpta comprehenditur rectangulum, æquum est ei quod fit ex tangente quadrato.



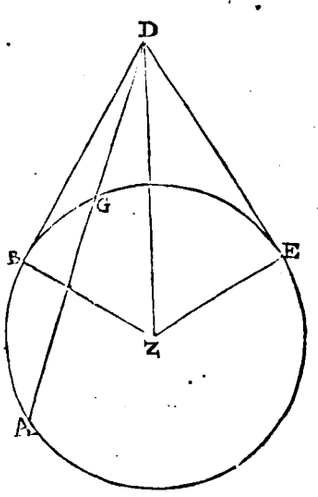
Extra circulum A B G C *sumatur aliquod signum* D, *à quo duæ producantur lineæ, quarum altera circulum tangat vt* D B, *altera verò secet vt* D C, *sed primò per centrum quod sit* E: *Dico rectangulum sub tota secante* D C *& eius parte* D I *extra circulum sumpta comprehensum, æquari ei quod fit ex* D B *tangente quadrato. Coniungatur* E B *ipsa erit recti* B D *perpendicularis, per 18 huius, quoniam (per 6 secundi) quod sub* C D *tota cum apposita &* D I *apposita rectangulum, cum eo quod à dimidia* E I (*vel* E B) *fit quadrato, æquum est ei quod ex dimidia & apposita* C D *fit quadrato. sed quadrato ex* E D *æqualia sunt quæ ex* D B, E B (*per 47 primi.*) *Commune autem tollatur quadratum ex* E B, *superest rectãgulum sub* C D *& parte* D I *æquum esse quadrato quod fit ex* D B *tangente. Ad secundum autem recta secans secet non per centrum, sitque illa* D G A, *cui perpendicularis à centro* E *designetur* E Z, *ea bifariam secabit rectam (*A G, *per 3 huius) Coniuncta* E G, *quoniam (per eandem 6 secundi) quod sub* A D, G D *cum quadrato* G Z *æquum est quadrato* D Z. *Ipsis commune addatur quadratum* Z E. *Erit quod sub* A D, D G *cum quadratis* G Z, Z E (*hoc est cum quadrato* G E

per

per 47 primi) æquale quadratis D Z Z E, *sed quadratis* D Z, Z E *æqualia sunt quadrata* D B, B E, *cùm sint vtraque æqualia ei quod ex* D E, *per 47 primi, quod igitur sub* A D, D G *cum quadrato* G E (*hoc est* B E *ex centro sibi æquali*) *æquum erit quadratis* D B, B E, *commune autem tollatur ex* B E *quadratũ. Sequetur rectangulum sub tota* A D *secante & parte* D G *extrinsecus sumpta contentum, æquum esse ei quod fit ex* D B *tangente quadrato. Si itaque extra circulum sumatur signum ab eo, &c.*

Propositio trigesimaseptima.

Si extra circulum sumatur aliquod in plano signũ, & ab eo in circulum duę incidant rectę, quarum altera circulũ secccet, altera verò incidat. Sit autẽ quod fit sub tota secante & extrinsecus sumpta eius parte, æquale ei quod fit ex incidente, incidens circulum tanget.



Sumatur extra circulum A B E *aliquod signum* D *in eodem plano, à quo duæ procedant ad circulum rectæ, quarum altera scilicet* D G A *circulum seccet, altera verò* D B A *incidat. Sit autẽ quod sub tota* A D *& eius parte extrinsecus sumpta* D G *rectangulum, æquum ei quod fit ex* D B *incidente quadrato: Dico ipsam* D B *incidentem, circulum tangere, suscipiatur* (*per primam huius*) *circuli centrum* Z. *A dato verò signo* D *tangens ducatur* D E, *per 17 huius, coniunctis* Z B, Z D, Z E. *Cum autem rectangulum comprehensum sub* A D, D G *æquum sit* (*per hyppothesim*) *quadrato quod fit ex* D B *incidente, & (per præcedentem) æquum sit quadrato* D E *tangentis, ipsæ* D B, D E *erunt æquales. Quia verò binæ* D B, B Z *binis* D E, E Z *sunt æquales, basis autem communis, angulus* D B Z *angulo* D E Z *recto æquus erit, per 8 primi. Rectus igitur erit* D B Z *angulus, & proinde ad extremum diametri* B Z *rectos efficiens* D B *incidens, circulum tanget, per coroll. 16 huius. Si itaque extra circulum sumatur aliquod signum, &c.*

Corollarium.

Si à signo extra circulum sumpto, plures rectæ circulum secuerint, rectangula comprehensa sub singulis & earum parte extrinsecus sumpta, erunt sibi inuicem æqualia.

Nam quodlibet eorum, quadrato quod fit à tangente æquum ostenditur, insuper à quouis signo binæ tangentes, in circulum ductæ sibi inuicem sunt æquales. Cùm sint singularum quadrata, æqualia rectangulo sub tota secante, & eius parte extrinseca sumpta.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO-num restitutarum Liber quartus.

Diffinitio 1.

FIGVRA rectilinea plana in plana rectilinea inscribi dicitur, quando vnusquisque inscriptæ figurę angulus, vnũquodque latus eius in qua inscribitur, tangit.

Diffinitio 2.

Figura autem circa figuram describi dicitur, quando vnumquodque latus circunscriptæ, vnumquemque angulum eius circum quam describitur, tangit.

Hæc figurarũ rectilinearum inscriptio & circunscriptio ad eas tãtùm colligitur figuras, quæ rectilineæ descriptæ æquiangulæ & æquilateræ existunt. Omnis nanque figura plana rectilineæ totidẽ angulis quod & lateribus vallatur. Ea de causa præcipit, vnius angulos totidem alternis coaptari lateribus. Secus erit in figuris solidis, quarum sæpius bases anguli & latera eiusdẽ figuræ, diuersis exprimuntur numeris. Quare alia diffinitione libro vndecimo elucidabuntur.

Diffinitio 3.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando vnusquisque inscriptę figuræ angulus circuli circunferentiam tangit.

Diffinitio 4.

Circulus verò circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circunferentia vnumquemque eius circum quam describitur, angulum tangit.

Diffinitio 5.

Circulus autem in figura rectilinea inscribi dicitur, quando circuli circunferentia vnumquodque latus eius in qua describitur, tangit.

Diffinitio 6.

Figura verò rectilinea circa circulum describi dicitur, quãdo vnumquodque latus circunscriptę, circunferentiam tangit.

Licet circulum ingrediantur ac contineant sæpius trapezia, & aliæ quorumuis poligonorum irregulares species, quorum angulos quosque circunferentiam tangere sufficit, quãuis inæquales sint sibiipsis: quia tamen quæ circulum ambiunt æquilatera, ea proinde sequetur esse æquiangula. Quæ verò trapezia aut alia quæuis irregularia circulum ambiunt, angulorum regulam non sequitur, veluti inscriptæ ostendimus sequi 22. tertij. Sola æquiangula & æquilatera discutiet hoc quarto Euclides, ob eorum regulatam methodum.

Diffinitio 7.

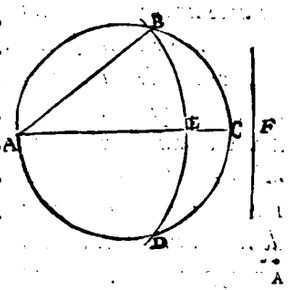
Recta linea circulo congruere dicitur, quãdo eius extrema in circuli circunferentiam cadunt.

Cùm lineam circulo congruere, coaptari, subtendere, describere duci, &c. huius significationis voces, quibus videmur iam antea prioribus demonstrandis vsi esse, idem sonent, putarent aliqui hanc diffinitionem frustrà ab Euclide positam esse, scilicet qui terminos diffiniret, post eorumcœptum vsum: Dicemus itaque lineas quas antea circulo adaptauimus, indeterminatas esse, ac confusas, nec datas

datas quidē ſua conſtantes & propoſita lōgitudine, ſiue ea certa fuerit, ſiue incerta. Quas verò hac diffinitione explicamus, eas intelligamus eſſe quaſcunque nobis propoſitas diametrum circuli non excedentes: Dato circulo coaptatas, illæ etenim ei circulo verè congruere dicuntur, eò quòd earum propoſita quantitas, dato circulo quadam demonſtrandi facultate, non autem caſu coaptetur, inter duo eius circunferentiæ ſigna producta, vt proxima & huius prima patefaciet propoſitio.

Propoſitio prima. *Problema* 1.

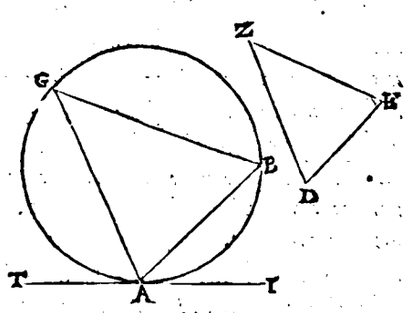
Intra datum circulum, datæ rectę lineæ diametro non maiori æquam rectam lineam coaptare.



Sit datus circulus A B C D, *cuius dimetiēs ſit* A C, *data verò recta eſto* F, *oportet iam ipſi* F *dato circulo, coaptare æqualem, ſiquidem* F *diametro æqualis exiſtat, petitum adeſt. Si minor fuerit* F *ex* A C *diametro datæ* F *æqualis tollatur* A E. *Cētro verò* A, *interuallo autē* A E, *circulus* E D B *deſcribatur. Coniuncta* A B (*per diffinitionem* 15 *primi*) *æqualis erit ipſi* A E, *& proinde ipſi* F *datæ. Recta verò* A B *cùm minor ſit dimetiente, in circunferentiam cadit. Recta igitur* A B *circulo* A B C D, *coaptata eſt, per* 7 *diffinitionem huius.*

Propoſitio ſecunda. *Problema* 2.

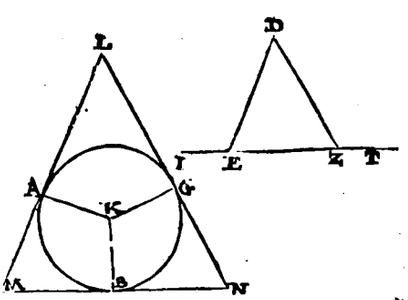
In dato circulo, dato triangulo æquiangulum triangulum inſcribere.



Eſto datus circulus A B G, *datum verò triangulum ſit* D E Z, *Dato* A B G *circulo tangentem lineam* (*per* 17 *tertii*) *ducamus* T A I. *Ad rectam autem* T I *ſignum verò eius* A (*contactum*) *ipſi* D E Z *æqualis angulus conſtituatur* T A G, *angulo* D Z E *æqualis ſit* I A B, *per* 23 *primi, coniuncta* G B. *Quoniam à contactu* A *recta* A B *circulum ſecat. Angulus* T A G (*ad tangentem*) *æquus erit augulo* A B G *in alterna ſectione per* 32 *tertii. Eodem igitur argumento æqualis erit* I A B *angulus, angulo* A G B *in reliqua ſectione. Sed* T A G *ipſi* D E Z *æqualis poſitus eſt:* A I B *verò angulo* D Z E. *Anguli igitur* A B G A G B *ſinguli, ſingulis* D E Z D Z E *æquales erunt. Et proinde* (*per corol.* 32 *primi*) *reliquus* G A B *reliquo* Z D E *æquus erit, nempe duorum rectorum reſidui. Æquiangulum itaque erit* A B G *triāgulum dato* D E Z *triangulo, & circulo* A G B *inſcriptū, per* 3 *diffini. huius. In dato itaque circulo* A G B *dato triangulo* D E Z, *æquiangulum triangulum* A B G *inſcripſimus.*

Propoſitio tertia. *Problema* 3.

Circa datum circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum deſcribere.

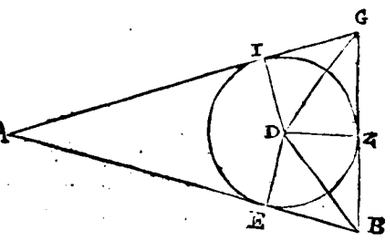


Eſto datus circulus A B G *datum verò triangulum ſit* D E Z, *cuius vnum latus* E Z *producatur vtrinque, in* I *&* T. *Suſcipiatur centrum circuli* (*per* 1 *tertij*) *ſitq́* K: *ad ſignum autem* K *dato* I E D *angulo, æqualis conſtituatur* A K B, *dato verò* D Z T *æqualis ſit* B K G, *per* 23 *primi. Ad ſigna verò* A B G *tangentes, per* 17 *tertij ducantur* M A L M B N *&* N G L. *Quoniam autem quadranguli* A K B M *quatuor anguli quatuor rectis ſunt æquales, per corrol.* 32 *primi, quorum bini oppoſiti* K A M K B M *ſunt recti. Reliqui itaque* A M B A K B *duobus rectis ſunt æquales. Sed duobus itidem rectis æquales ſunt* I E D D E Z, *per* 13 *primi. Bini itaque* A M B A K B *binis* I E D D E Z *æquales erunt. Ab æqualibus igitur æquales tollantur* I E D *&* A K B *poſiti. Reliquus* A M B *reliquo* D E Z *æquus erit. Eodem argumento oſtendemus* G N B *ipſi* D Z E *æquum eſſe. Cùm bini* G K B G N B *& bini* D Z T D Z E

duobus rectis æquipolleant, &c. Trianguli igitur M N L *reliquus qui ad* L, *reliquo qui ad* D *trianguli* E D Z *æquus erit, per coroll. 32 primi. Circa datum itaque circulum* A B G *dato triangulo* D E Z *æquiangulum* L M N *triangulum descripsimus, per 6 diffini. huius.*

Propositio quarta. *Problema 4.*

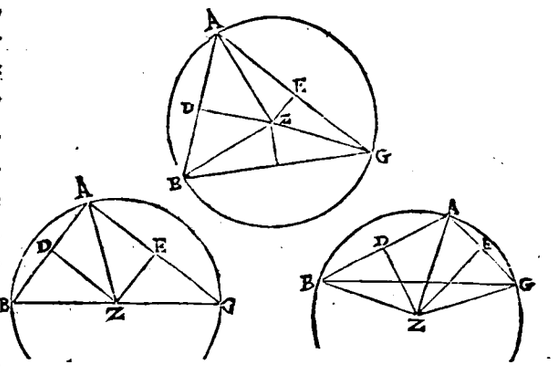
In dato triangulo, circulum describere.



Proponatur triangulum A B G, *cuius duo* B *&* G *anguli bifariam secentur per 9 primi, ductis* G D, B D *rectis, sese in* D *secãtibus. A signo autem* D *in singula trianguli latera perpendiculares agantur,* D E D I D Z, *per 12 primi. Quoniam triangulorum* D B E D B Z *duo anguli* D E B D Z B *recti sunt æquales, per constructionem, &* D B E *ipsi* D B Z, *per 7 communẽ sententiam. Vnúmque latus* D B *commune, quod æquos subtendit angulos. Reliqua igitur latera* D E *&* D Z *æqualia erunt, per 26 primi. Similiter ostendemus* D Z *&* D I *æquales esse eisdem de causis. Centro itaque* D *interuallo autem* D Z *circulus ducatur* E Z I. *Ab eodem signo* D *tres rectæ æquales in circunferentiam circuli cadent, signum igitur* D *centrum erit circuli* E Z I, *per 9 tertij, qui tanget latera propositi trianguli* A B G, *per corol. 16 tertij. In dato igitur triangulo* A B G *circulum* E Z I *descripsimus, per 5 diffinitionem huius.*

Propositio quinta. *Problema 5.*

Circa datum triangulum, circulum describere.



Sit datum cuiusuis generis triãgulum A B G, *rectangulum, oxigonium, vel ambligonium, cuius duo latera quæ circa non minorem angulum bifariam diuidantur, scilicet* A B *&* A G *in* D *&* E *ab ipsis porrò signis,* D *&* E *perpendiculares excitentur rectis* A B A G, *sintq́;* E Z D Z *concurrentes in* Z, *coniunctis* Z A Z B Z G. *Perspicuum est (ex constructione) duo latera* Z D D B, *duobus* Z D D A, *& angulos* Z D B Z D A *(rectos) esse adinuicem æqualia. Et proinde (per 4 primi) basim* Z B *basi* Z A *æqualem esse. Similiter triangulorũ* A E Z G E Z *bases* Z A Z G *æquales ostendentur. Tribus igitur rectis* Z B, Z A Z G *æqualibus datis Centro* Z *Interuallo autem* Z A *circulus describatur,* A B G. *Cùm à signo* Z *plures duabus in circunferentiam rectæ ducantur, ipsum* Z *centrum erit circuli,* A B G *verò circunferentia (per 9 tertij) per trianguli angulos* A B G *ducta. Circa datum itaque triangulum* A B G *circulum* A B G *descripsimus, per 4 diffinitionem huius.*

Corollarium.

Hinc sequitur centrum circuli triangulum rectangulum ambientis, in latus trianguli cadere, oxigonium vero ambientis intra triangulum cadit. Ambiligonium autem ambientis extra triangulum esse. *Nam rectus angulus semicirculum possidet, acutus verò plus semicirculo, obtusus autem minus semicirculo complet (per 31 tertij.) Tres itaque sunt sectiones, quarum in semicirlo linea secans habet centrum, in maiori verò sectione centrum est intus, in minori autem extra sectionem, & igitur extra triangulum in sectione constitutum.*

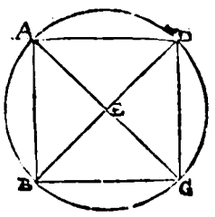
MONITVM.

Triangulorum tria genera diuersas inscribendi leges exigentia, vnica methodo tribus simul figuris deseruienti, circulo inscribi demonstrauimus paruula hac sumpta hyppothesi, qua bifariam secamus duo latera trianguli, quæ circa non minorem angulum, hoc enim assumptum reliqua necessariò sequuntur.

Propositio sexta. *Problema 6.*

In dato circulo, quadratum inscribere.

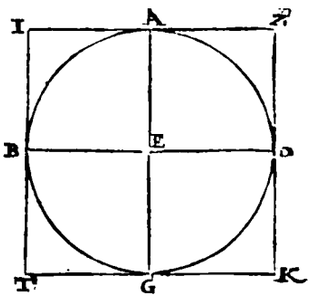
Circulus



Circulus datus sit A B G D, *eius centrum* E, *diameter verò* A G, *cui ad angulos rectos excitetur ad signũ* E *recta* B D, *per* 11 *primi, coniunctis* A D, D G, G B, B A, *quoniã centrũ est* E, *æquales sunt rectæ* E A, E B, E G, E D, *& angulos æquos cõprehendunt, nẽpe rectos. Bases itaque* A B, B G, G D, D A (*per* 4 *primi*) *sunt æquales, sed anguli* A B G, B G D, G D A, *&* D A G *sunt in semicirculo, cum* A G *&* B D *sint dimetientes, & igitur resti, per* 31 *tertij, quadrilaterum itaque rectangulum est & æquilaterum* A B G D, *& igitur quadratum, per* 30 *diffin. primi. In dato itaque circulo* A B G D *quadratum* A B G D *inscripsimus.*

Propositio septima. *Problema* 7.

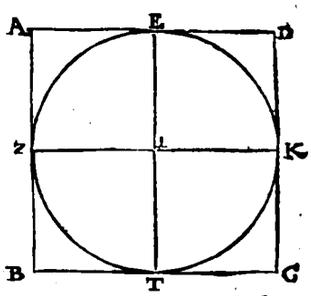
Circa datum circulum, quadratum describere.



Sit circulus A B G D, *cuius centrum sit* E (*per* 1 *tertij*) *dimetiens verò* A G, *cui ad rectos excitetur per* E *recta* B E D, *per* 11 *primi. Ad signa autem* A B G D *tangentes circulum ducantur,* I Z, Z K, K T, T I, *per* 17 *tertij, cùm autem recti sint* (*per hyppothesim*) *qui ad* E *anguli, &* (*per* 18 *tertij*) *qui ad* A *recti, parallelæ sunt* B D *&* I Z (*per* 28 *primi*) *simili argumento item parallelæ erunt,* T K, *&* B D, *ac binæ* I T, Z K, *ipsi* A G. *Parallelæ igitur erunt* I Z *&* T K, *necnon* I T *&* Z K, *cùm non sint in rectum positæ* (*per* 30 *primi*) *quia verò pralleligrammum est* A G, I T, *dimetienti* A G *æqualis erit* I T, *per* 34. *primi. Haud secus ostendentur reliquæ* T K, K Z, Z I *dimetienti æquales esse. Quadrilaterum itaque æquilaterum erit* I T, K Z, *cùm autem angulus* A G T *sit rectus, &* (*per* 34 *primi*) *rectus erit* A I T, *& eadem causa reliqui qui ad* T K *&* Z *recti erunt. Rectangulum igitur erit* I T, K Z, *& æquilaterum, & proinde quadratum, per* 30 *diffinitionem primi, cuius quidem latera tangunt circulum in signis* A B G D, *per coroll.* 16 *tertij. Circa datum itaque circulum* A B G D *quadratum* I T, K Z *descripsimus, per* 6 *diffinitionem huius.*

Propositio octaua. *Problema* 8.

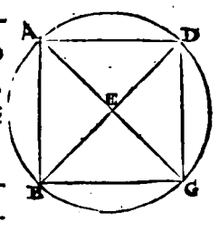
In dato quadrato circulum inscribere.



Esto datum quadratum A B G D, *cuius duo latera* A B *&* A D *bifariam secẽtur in* E *&* Z, *ductis parallelis scilicet* E T *ipsis* A B *&* D G, *&* Z K *rectis* A D *&* B G, *per* 31 *primi. Parallelogramma igitur erũt* A I, I G, E K, Z T, *per* 36 *diffinitionem primi, recta igitur* I E *ipsi* A Z (*dimidiæ lateris quadrati, per* 34 *primi*) *æqualis erit, similiter & reliquæ* I Z, I T, I K *eidẽ dimidiæ lateris, æquales ostendentur. Quare adinuicem æquales erunt, centro* I *interuallo* I E *circulus describatur per* E Z, T K, *qui non secabit rectas* A D, D G, G B, B A *super extremitate diametri, ad rectos constitutas, per* 16 *tertii, sequetur ab vno signo* I *plures duabus rectis in circunferentiam cadere, scilicet* I E, I Z, I T, I K, *quare signum* I *centrum erit circuli* E Z T K, *per* 9 *tertij, circunferentia autem tangit quadrati singula latera in* E Z T K, *per coroll.* 16 *tertii. In dato itaque quadrato* A B G D *circulum* E Z T K *inscripsimus, per* 5 *diffinitionem huius.*

Propositio nona. *Problema* 9.

Circa datum quadratum circulum describere.

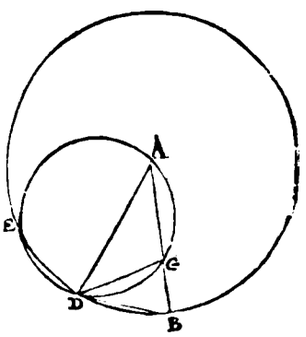


Detur *quadratum* A B G D, *excitatis dimetientibus* A G B D, *in signo* E *sese secantibus. Quoniam bina latera* A G A B, *& basis* B G, *binis* A G A D, *& basi* D G *sunt* (*per diffinitionem quadrati*) *æqualia, angulus* G A B *angulo* G A D (*per* 8 *primi*) *æquus erit. Triãgulorum itaque* A E B A E D *bina latera* A E A B, *binis* A E, A D *æqualia æquos comprehendunt angulos* E A B, E A D, *bifariam rectum* D A B *secantes. Bases itaque* E B, E D (*per quartam primi*) *sunt æquales. Similiter æquales ostendentur reliquæ* A E, E G *rectæ ac reliqui anguli recti bifariam secari. Quia verò anguli recti quĩ ad* A B G D *bifariam secantur, eorum dimidij* E A B, E B A (*æquales existentes*) *efficient bases* A E A B *æquales, per* 6 *primi. Similiter æqua-*

les oſtendentur E B E G E D. *Cẽtro igitur* E *interuallo* B A, *circulus per* A B G D *ducatur, ſingulos quadrati* A B G D *angulos tangens. Sequetur, circa datum quadratum* A B G D *circulum* A B G D *deſcriptum eſſe, per 4 diffinitionem quarti.*

Propoſitio decima. *Problema* 10.

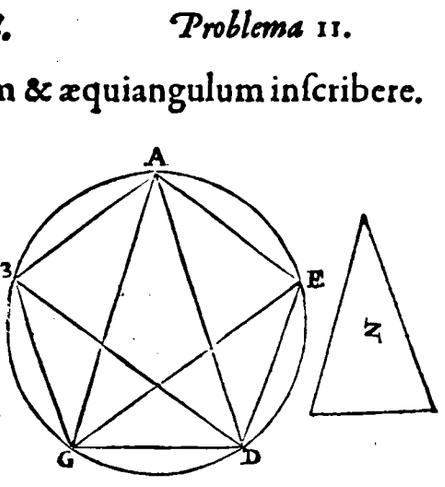
Iſoſceles, triangulum conſtituere, habens vnumquemque eorum qui ad baſim ſunt angulorum, duplum reliqui.



Proponatur recta A B, *quæ (per* 11 *ſecũdi) ita ſeccetur in* G, *vt quod ſub tota* A B *& altero ſegmentorum* G B, *comprehenſum rectangulum: æquum ſit ei quod fit ex* A G *quadrato. Centro verò* A, *interuallo autem* A B, *circulus deſcribatur* B D E, *ipſi porrò* A G *æqualis applicetur recta circulo, ſitque* B D, *per* 1 *huius. Et coniunctis* G D *&* A D, *circa triangulum* A G D, *circulus deſcribatur* A G D E, *per* 5 *huius. Et quia quod ſub* A B *&* B G *æquatur quadrato ex* A G, *idem æquabitur quadrato ex* B D, *quæ ipſi* A G *ponitur æqualis. Et cùm recta* B A *circulum* A G D *ſeccet,* B D *verò eidẽ circulo incidat, ipſa* B D *(per* 37 *tertij) ducta à ſigno* B *extra circulum ſumpto, circulum tanget. Angulus igitur* B D G, *ad tangentem, angulo* D A G *(in alterna ſectione) æquus erit, per* 32 *tertij, communis ponatur* G D A. *Bini itaque* B D G G D A, *binis* G A D G D A *æquales erunt. Sed binis* G A D G D A *interioribus ex oppoſito æquus eſt exiterior* B G D, *per* 32 *primi. Angulus igitur* B G D *binis* B D G G D A *(hoc eſt toti* B D A*) æquus erit. Et proinde angulo* A B D *(qui eſt ipſi* B D A *æqualis (per* 5 *primi) eſt enim iſoſceles* A D B, *& itaque* G D *recta ipſi* B D *(angulum æqualem ſubtendenti) æqualis erit per* 6 *primi, necnon rectæ* A G, *cui* B D *æqualis eſt poſita. Cùm autem* G D *&* A G *ſint æquales, anguli* G D A, G A D *ſunt (per* 5 *primi) æquales: ſed ipſi* G D A, *æqualis fuit* B D G. *Totus igitur* B D A, *ipſius* G A D *duplus erit, ſimiliter &* D B A *eiuſdem* G A D *duplus erit, eſt enim* A D B *ipſi* A B D *æqualis poſitus, iſoſceles itaque triangulum conſtituimus* A B D, *habens vnumquemque eorum, qui ad baſim ſunt angulorum* A B D, A D B, *duplum reliqui* B A D.

Propoſitio vndecima. *Problema* 11.

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

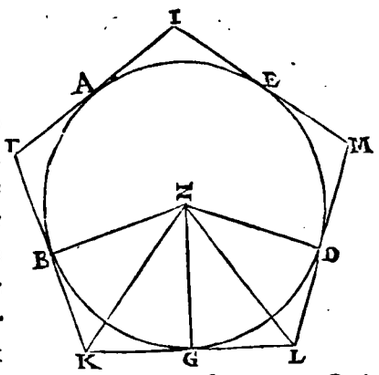


Proponatur circulus A B G D E, *ſumatúrque triãgulum iſoſceles (iuxta præcedẽ tem) quod ſit* Z, *ipſi verò* Z *æquiangulum, triangulum circulo inſcribatur* A G D, *per* 2 *huius. Erũt itaq; eius anguli qui ad baſim* A G D A D G *ſinguli dupli anguli* G A D, *ex præfata, ſeccẽtur bifariã anguli* A G D, A D G *per* B D *&* E G, *per* 9 *primi, cõiunctis,* A B, B G, A E, E D, *rectis. Erunt igitur quinque æquales anguli* G A D, A D B, B D G, A G E, *&* E G D. *Quare (per* 26 *tertij) circunferentiæ* A B, B G, G D, D E, *&* E A *æquales erũt. Et (per* 29 *eiuſdem) ſub eis æquales ſubtẽduntur rectæ. Æquilaterum itaque erit pentagonum* A B G D E. *Cæterum cùm circunferentiæ ſingulæ, ſingulis ſint æquales, binæ binis æquales erunt, vt* B G D *ſectio,* G D E *ſectioni, ſimulac ipſis* G B A, B A E, A E D, *ſingulis ſectionibus, quæ (per* 21 *tertij) æquales cõtinent angulos. Æquiangulum igitur & æquilaterum erit pentagonum. In dato itaque circulo* A G D, *pentagonum æquilaterum & æquiangulum* A B G D E *inſcripſimus.*

Propoſitio duodecima. *Problema* 12.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

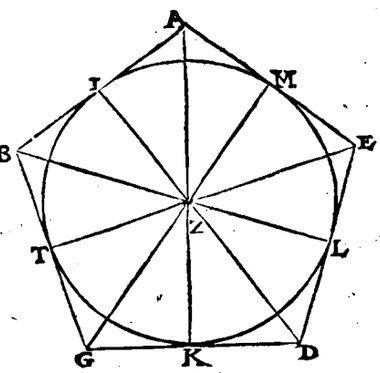
Sit



Sit datus circulus A B G D *in quo (per præcedentem) ſumantur quinque ſigna, angulos inſcripti pentagoni deſignantia,* A B G D E. *Per ea verò ſigna tangentes circulum ducantur* T I T K K L L M M I, *ductis à centro quod ſit* Z *rectis,* Z B Z G Z D Z K *&* Z L. *Quoniam (per* 18 *tertij) recti ſunt* Z B K Z G K *anguli, recta* Z K *vtrôſque ſubtendens, efficit quadratum (per* 47 *primi) æquum eis quæ ex* Z G G K. *Similiter eis quæ ex* Z B B K. *Qui itaque ex* Z G G K *æquantur quadratis ex* Z B B K. *Ab iis porrò æqualia auferantur ex* Z B *&* Z G *(quæ ex centro) quadrata. Reliqua ex* B K *& ex* G K *erunt æqualia, & proinde lineæ* B K *&* G K *atque (per* 8 *primi) anguli* B Z K G Z K *erunt æquales. Haud ſecus oſtendentur æquales,* G L L D *& anguli* G Z L D Z L *adinuicem. Quia verò totus* B Z G *toti* G Z D *eſt (per* 27 *tertij) æqualis, ſuper æqualibus* B G G D *circunferentiis, dimidius* K Z G *dimidio* L Z G *æquus erit. Æquiangula igitur erunt triangula* G Z K G Z L, *& reliqua* B Z K B Z L *quotcunque. Et vnum latus (quod ſcilicet ex centro) vni lateri æquale. Baſes igitur (per* 26 *primi)* B K, K G, G L, L D, D M *æquales erunt. Duplæ igitur earum* T I T K K L L M M I *rectæ æquales erunt. Æquilaterum igitur eſt pentagonum* I T K L M. *Cæterùm quia angulus* B K G *conſtat ex binis* B K Z G K Z *æqualibus ipſis* G L Z D L Z, *totus* B K G *toti* G L D *æqualis erit, ſimiliter eiſdem æquales erunt reliqui* D M E E I A A T B. *Æquiangulum igitur erit* I T K L M *quinquangulum. Circa datum itaque circulum* A B G D *pentagonum, æquilaterum & æquiangulum* I T K L M *deſcripſimus.*

Propoſitio decimatertia. *Problema* 13.

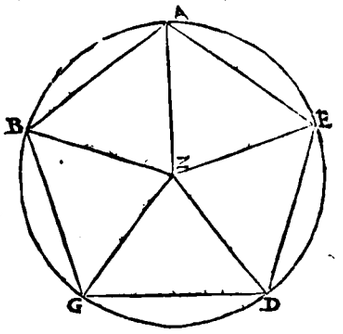
In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribere.



Sit datum pẽtagonum æquilaterũ, ac æquiangulũ A B G D E, *cuius* B G D, G D E *anguli bifariam diuidantur, per* 9 *primi, ductis* G Z, D Z *rectis,* A Z *autem (earum concurſu) in reliquos angulos rectæ ducantur* Z E, Z A *&* Z B. *Quoniam autem binæ* B G, G Z *binis* D G, G Z *&* B G Z *&* D G Z *æquantur, baſes* B Z *&* D Z *æquales erunt. Similiter oſtendentur* G Z *&* E Z *æquales, per* 4 *primi, & æqualia & æquiangula triangula* B Z G, G Z D, D Z E. *Et proinde reliqua* E Z A, A Z B *eodem argumento eiſdem æqualia erunt, & æquiangula. Cæterũ ducantur à ſigno* Z *in pentagoni latera perpendiculares* Z I, Z T, Z K, Z L, Z M. *Triangulorum* Z T G, Z K G, *duo anguli* Z T G, Z G T, *duobus* Z K G, Z G K *æquales ſunt, per conſtructionem, & vnum latus* Z G *commune, reliqua igitur* Z T, Z K *latera erunt æqualia, per* 26 *primi, ac eadem via* Z L, Z M, Z I *ipſis* Z K *&* Z T *oſtendentur æquales. Centro itaque* Z *interuallo verò* Z I *ductus circulus, per æquè diſtantia à ſigno* Z *alia ſigna circunducetur* I T K L M. *In lateribus pẽtagoni exiſtentia, quæ latera circulum tangunt, per coroll.* 16 *tertij, ſuper extremitate diametri ad rectos conſtituta. In dato itaque pentagono æquilatero & æquiangulo* A B G D E, *circulum* I T K L M *inſcripſimus.*

Propoſitio decimaquarta. *Problema* 14.

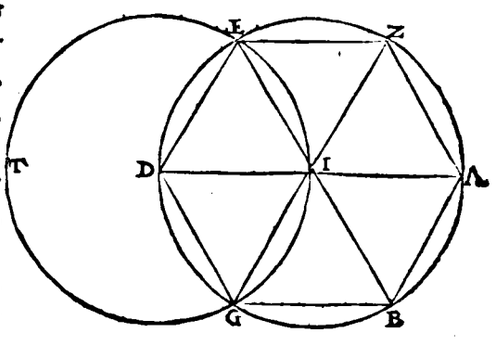
Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere.



Esto datum pentagonũ æquilaterũ & æquiangulũ A B G D E, *cuius duo anguli* B G D *&* G D E *bifariam (ex 9 primi) secentur, per rectas* G Z, *&* D Z. *A concursu autem* Z *ducantur* Z A, Z B, Z E. *Quoniam binæ* B G, G Z, *binis* D G, G Z, *& anguli* B G Z, *&* D G Z *æquantur, ex hyppotheſi, reliqua latera* B Z, *&* D Z *æqualia erunt, & triangula* B G Z G D Z *æqualia, & æquiangula, per 4 primi, necnon* E D Z *eiſdem eodem argumento, æquabitur. Quia verò* Z G D *&* Z D G *anguli, æqualium dimidij, ſunt æquales, rectæ,* Z G *&* Z D *æquales erunt, haud ſecus eiſdem* Z B, *&* Z E *reliquæ, per 6 primi, erunt æquales. Angulus igitur* A B Z *dimidius erit anguli* A B G, *nam* A B G (*pẽtagoni*) *eſt reliquis* E G D, B G D *æqualis poſitus. Sed bini* A B Z *&* G B Z *æquales, continentur æquis lateribus* A B, B Z *ipſis* G B, B Z, *baſes igitur* G Z, Z A (*per 4 primi*) *ſunt æquales. Rectæ itaque* A Z, B Z, G Z, D Z, *&* E Z *erunt æquales, centro quidem* Z *interuallo* Z A *circulus* A B G D E, *per ſingulos angulos pentagoni ductus tranſit, nec aliquod eius latus ſecabit, per 2 tertij, cùm intra circulum cadant. Circa datum itaque pentagonum æquilaterum & æquiangulum, circulum deſcripſimus.*

Propoſitio decimaquinta. Problema 15.

In dato circulo exagonum, æquilaterum & æquiangulum, inſcribere.



Datus circulus ſit A E G, *cuius centrum* I *dimetiens verò* A I D, *centro* D *interuallo* D I *circulus deſcribatur* E I G T, *coniunctis* E I B, G I Z, *item* A B, B G, G D, D E, E Z *&* Z A. *Quoniã rectæ* E D, G D *æquantur rectæ* D I, *cũ ſint omnes ex centro circuli* E I G T, *& rectæ* E I, G I *eidem* D I *ſint æquales, cùm ſimiliter à centro circuli* A E G *oriantur. Adinuicem igitur erũt ipſæ* E D, G D, E I, G I *&* D I *æquales. Triangula itaque* E I D, I D G *æquilatera & æquiangula erunt, per* I *primi, quia verò tres trianguli interiores anguli duobus rectis æquantur, per 32 primi,* E I D *angulus, duorum rectorum tertiæ parti æquipollet: ſimiliter &* D I G, *quare & reliquo tertio duorum rectorum æquialet* G I B *angulus. Nam recta* G I *ſuper* E I B *rectam conſiſtens duobus rectis æquos efficit, per* I 3 *primi. Æquales igitur ſunt* E I D, D I G, G I B *anguli, & igitur* B I A, A I Z, *&* Z I E (*qui ad eorum verticem per* I 5 *primi*) *erunt eis æquales & adinuicem. Et æqualibus rectis (quæ ex centro) comprehenſi. Sequetur igitur (per 4 primi) baſes* A B, B G, G D, D E, E Z *&* Z A *eſſe æquales. Æquilaterum itaque erit* A B G D E Z *exagonum. Cùm autem* A Z E *&* Z E D *anguli & reliquorum ſinguli, ex binis æqualibus* A Z I, E Z I, *ipſis* Z E I, D E I (*qui æquãtur duorum rectorum duobus tertiis*) *fiant, ipſi erunt æquales adinuicem. Æquiangulum igitur & æquilaterum erit exagonum* A B G D E Z. *In dato itaque circulo* A E G *exagonum æquilaterum, & æquiangulum* A B G, D E Z *inſcripſimus.*

Corollarium.

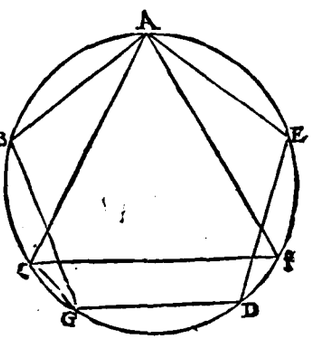
Hinc aſſequimur latus exagoni æquum eſſe ei quæ ex centro circuli id ambientis.

Quòd ſi exagoni reliquas circulo inſcriptiones & circunſcriptiones inquiramus, pentagoni methodum ſectemur, 12. 13. 14. *præcedentibus expoſitam, per rectas ſcilicet perpendiculares à centro in baſes, circulum illi inſcribemus, circulo verò exagonum circunſcribemus per tangentes, &c.*

Propoſitio decimaſexta. Problema 16.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

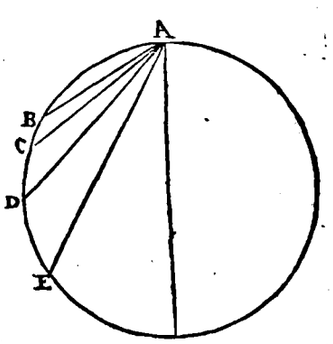
Esto



Esto datus circulus A C D, *cui per* 11 *huius inscribatur pentagonum* A B G D E, *& eidem per* 2 *huius ad signum* A *inscribatur triangulum æquilaterum* A C F. *Quoniam enim totius circunferentiæ tertiam partem subtendit* A C, *hoc est quinque quindecimas. Duo verò pentagoni latera* A B B G, *earumdem quindecimarum circunferentiæ subtendunt sex, cùm quodlibet quintum tres sumat quindecimas. Si ab ipsis* A B B G *subtendentibus sex, ipsam* A C *subtendentem, quinque tollamus, supererit* C G, *vna quidem pars quindecima totius circunferentiæ, coaptemus igitur rectam* G C *& ipsi reliquas æquales, circulo* A C D (*per* 1 *huius*) *ipsæ æquales circũferentias subtendent, per* 28 *tertij, & igitur circuli quindecimas. Quindecagonum igitur æquilaterum inscriptum est circulo* A C D. *Et quoniam binæ rectæ angulos quindecagoni constituentes, æquales sumunt circuli sectiones, in his sectionibus æqualibus, anguli (per* 27 *tertij) æquales erunt. Æquiangulum igitur, & æquilaterum est quindecagonum circulo* A C D *inscriptum. Cùm autem huic circulum inscribere, vel circunscribere, vel eidem circulo hunc circunscribere curabimus, ars pentagonorum, vt in exagono diximus, imitanda erit.*

Additio ad inuentionem infinitorum poligonorum.

Si in circulo duorum poligonorum latera coaptentur, ab vno signo, excessus arcus maioris supra minorem, comprehendet arcum tot futuri poligoni latera continentem, quot vnitatibus denominatio poligoni minoris lateris, denominationem maioris excedet: futuri autem poligoni laterum numerus, ex multiplicatione denominationum prædictorum poligonorũ consurget.



Vt exemplo elucidemus in circulo A B E *coaptentur latera exagoni quidem* A B *per* 15 *huius, pentagoni* A C *per* 11 *huius, tetragoni* A D *per* 6 *huius, trianguli verò æquilateri* A E *per* 2 *huius: Dico* A D *arcus excessũ supra arcũ* A B *scilicet* B D *arcũ, continere tot latera optati poligoni, quot vnitatibus denominator ipsius,* A B *exagoni, denominatorẽ* A D *quadrati excedit. Quia verò is excessus est* 2 *vnitatum, duo erunt in* B D *latera. Optati verò poligoni denominator, ex multiplicatione denominationũ poligonorũ cõsurget, scilicet ductis* 6 *per* 4 *fiet* 24 *denominãs polignum, cuius duo latera subtendent arcum* B D. *Qualium etenim tota circunferentia est* 24. *earum partiũ est* A B *subtendẽs* 4 & A D *sex. Si itaque ex* A D *sex partes subtendente tollantur quatuor, quas subtendit* A B, *supererunt ipsi* B D *duæ, qualium quidem tota est* 24. *Ex exagono igitur & quadrato, fit poligonum* 24 *laterum. Similiter ex exagono* A B *& pentagono* A C, *fiet poligonum* 30 *laterum, cuius vnum latus subtendet arcum* B C. *Nam* A B *ipsam* A C *denominationem vnitate tantum excedit, similiter quoniam* A B *excedit, ipsius* A E *denominationem ternario, arcus* B E *continebit tria latera poligoni* 18 *laterum. Hac eadem seruata methodo, infinita poligonorum latera perscrutari licebit.*

In quintum & ſextum Euclidis
PROOEMIVM.

VERAM philoſophiæ legem ſectantes, qua ſucceſsiuè fieri motum edocemur, quæ liquidiora & percipiendæ geometriæ rudiora eſſent, quatuor prioribus Euclidē tradidiſſe libris, iam antea docuimus. Namque primo linearum ſitus, triangula & parallelogramma ita diſpoſuimus, vt priores eorum naturæ partes, diſcentibus captandæ nullo negotio forent. Secundo linearum admirabiles ſectiones. Tertio eius perfectiſsimæ figuræ circularis incredibiles virtutes, & penè naturæ legibus incomprehenſas. Quarto demū regularium, planarúmque figurarum picturas circuli virtute ſæpius aſtructas, quibus diſcentium mētes planè ſublimiora totius geometriæ principia (hoc quinto inchoata) recepturæ, diſponantur. Quocirca id obſeruandum eſt, Euclidem poſt linearum & planorum conſtructionem traditā, methodica lege eorum inter ſe habitudinem ſiue reſpectum, illico nobis offerre, vt adinuicem facta comparatione ſiue relatione, quas quantitatum alterationes, aut variationes producant, nobis ſit notum. Vt autem facilior præbeatur aditus habitudinis earum ſcrutandæ, præcenſendum eſt geometriam ſolas magnitudinum quantitates, nullas verò earum reſpicere qualitates, eáſque vnitas & inſolutas, ita vt diſcentium ingeniis earum integritas neceſſariò confuſionem (diſcretionis vrgente penuria) pariat. Maximè cùm duplicem quantitatum naturam magnitudinibus attribuat geometria, certam ſcilicet & incertam, quas alieno nomine dicunt aliqui decimo libro, rationalem, & irrationalem, ſane horum principiorum legibus arctatam earum vtramque. Quia verò harum quantitatum ſubeſt tanta reſpectus diuerſitas, qua aliæ commenſurabiles, aliæ verò (oppoſita denominatione) incommenſurabiles dicantur. Certarum ſiue commenſurabilium certis quantitatibus methodum, à numerorum facilitate accipere non dedignabitur, ac eorum obſequio tanta facilitate, confuſas ex ſe & continuas quantitates diſtribuet, qua non ſolùm exactas habitudines certarum, ſed incertarum reſpectus quadam lege diiudicandos aperiet, id quidem vnica multiplicandi lege, ab Arithmeticis implorata. Geometræ etenim nullam multiplicationem vnica magnitudine comprehendere poſſunt, propriam arithmeticis, cùm hi diſcreta, illi verò continua & inſecta ſemper diſcutiant, eouſque confuſa, quod citra diſcretorum obſequium ad continuorum reſpectus ſeu affinitates explicandas fluctuantes, palari cogantur. Quare quicquid multiplex aut muitiplicatum ſiue quauis arte diſcretum, ſub vnica quantitate denominabitur, id arithmetica lege factum oportet exiſtimari. Hoc enim vnicum his quinto & ſexto ab arithmetica expoſcit geometria, ſcilicet multiplicationem, cuius adminiculo quantitatum reſpectus patefaciet. Quippe hoc vnum tibi præcinam decernens Euclidis elementa, à tam variis tantiſque naufragiis temporum iniuria ſuſceptis eripere, ac in Germanum geomerriæ dogma quibuſuis poſtpoſitis interpretum ſententiis (vt par erat) reſtituere: lectorem, ſi quæ non hactenus vulgaria à reliquiſque tradita emerſerint, obteſtamur non priùs re planè perſpecta ac mente concepta cenſuram agere. Geometricas namque confuſiones intelligentiæ conferendas diſcernere, non exiguum fuiſſe debili noſtro conatui negotium, interpretúmque diſſidia propalare. Quæ orta ſunt non concepta Euclidis mente, in adaptandis numerorum principiis, cùm ad confuſa continua numerorum diſcretione elucidanda ventum eſt, quorum præcipuum iuuamen multiplicaiionem comperit. Ea tamen ſolertia, vt æquè magnitudines multiplicato

quantitatum

quantitatum augmento, adaugeat, quam multiplicato earundem quantitatum decremento, ipſas minuat, ſemper autem maiori numero, maiorem actionem exprimens, ſiue augmentum fuerit, ſiue decrementum. Maior etenim augmenti actio, magnitudinem maiorem depromet, maior ſimiliter decrementi actio, magnitudinem minorem producet. Cupientes itaque confuſas & ſua continui ſorte latentes geometriæ magnitudines, diſcentium ingeniis faciliori intelligentia infundere, earum quantitates propria natura continuas, hypothetica ſolutione ab arithmeticis deſſumpta, ſæpiuſculè diſcernemus. Ea quidem quæ per frequentem eius magnitudinis ſumptionem, aut per eiuſdem frequentem detractionem, vel equidem permixtam, ſcilicet frequentem partim ſumptionem, partim verò detractionem producetur, vt ſatis ſuperque norunt, qui arithmetices limina ingreſſi fuêre. Omnimodè tamen illam multiplicationem vocauit Euclides, qua latius vtetur tribus ſextum ſequentibus libris, nulla autem partitione, cuius intelligentia per multiplicationis oppoſitum ſeſe ſenſibus offert. Quam etenim qui praxim ſequuntur arithmeticam, vocant partitionem eandem decrementi multiplicationem, hoc eſt, partium frequentem ſolutionem dicemus, nam ab vtraque idem oritur effectus. Cæterùm geometricas quantitates diſcutiens Euclides, certarum intelligentiam ab incertarum quãtitatum notione, diſtare, numeris in obſequium vocatis exponere cogitur. Quod autem tradendum ſuſcipit, more regularis diſciplinæ inſerendum diſcentibus ſe nititur. Cuius quidem diſciplinæ quo ampliora ac generaliora fiunt præcepta, eo magis locuples, ac fæta reperitur methodus. Nam diſciplinarum vires circa infinitum verſantur: infinitæ namque certarum quantitatum fiunt inter ſe conferentiæ. necnon incertarum inter ſe totidem, quæ mortalium ſententiis nulla arte præterquam per numeros ſubiici poſſunt. Numerorum itaque leges inquirendæ ſunt, quæ infinitos præ ſe ferant actus, quibus infinitæ illæ collatarum adinuicem quantitatum diuerſitates, à ſeipſis recedere certa intelligibilique diſcrepantia notari poſſint. Arithmeticen igitur ſcrutatus Euclides, vt quod in ea generalius liberiúſque præceptum, ſuo negotio decens ſibi foret ſumendum perquireret. Bina ſibiipſis conuerſa offendit principia, multiplicationem ſcilicet, & diuiſionem, reliqua totius ferè arithmetices in ſe primordia fouentes. Multiplicatio etenim omnes augendorum numerorum in ſe complectitur facilitates, diuiſio verò minuendorum. Sub augmento autem æqualitate, ac decremento cunctæ teguntur habitudinum alterationes (nam æqualitas nulli obnoxia exiſtit alterationi.) Binarum rurſus (multiplicationis & diuiſionis) altera tantùm infinitos præ ſe fert actus, ſcilicet multiplicatio: omnis namque numerus per omnẽ multiplicari poteſt, diuidi autem nequaquam. Inſuper omnis numerus infinitè multiplicari poteſt, contra verò diuidi tantùm poteſt numerus ad vnitatem vſque. Non igitur huic negotio diuiſionem, ob finitam eius potentiam vtilem comperit Euclides, ſed ideo multiplicationem aſciuit, vt per infinitas eius operationes, infinitas ſuarum geometricarum magnitudinum comparationes propalaret. Quam quidem multiplicationem ea ſagacitate in diuiſionis contorſit obſequium, vt eiſdem multiplicantibus numeris, propoſitam Geometricam magnitudinem decreſcat, frequẽtibus ſuiipſius partium detractionibus, quibus eandem increuit collatis frequentibus ſuiipſius repetitionibus. Sed partium frequens detractio nihil aliud quàm diuiſio operatur, quæ quidem frequentia, per liberam vnitatum multitudinem concipi poteſt. Diuiſionem igitur quam arithmetici finitam limitatámque patiuntur, multiplicatione perficit Euclides, quæ infinita conferendis quantitatibus profert exequia.

Hac ideo de cauſa multiplicationem tantum ſibi ſociauit Euclides, vt potiſſimè infi-

nitorum propoſitorum infinita eſſent, ſiue in augmentum, aut equidem in decrementum obſequia. Cùm autem his quinto & ſexto, vtræque & certarum, & incertarum quantitatum leges præſcribendæ ſint, generalia tantùm proferemus elementa, æquæ in certas vt in incertas quantitates imperantia, nullo earum perſpecto diſcrimine, quouſque ad decimum librum præfatis prius arethmeticorum elementorum tribus libris nos conferamus. Sed quia incertarum quantitatum methodus, ex certarum traditione patefieri debet, ſuſcipiet hoc quinto Euclides comparandas per multiplicationem, ſeu æquè multiplicia magnitudines, quibus adminiculis quantitatum reſpectus, ſiue reſpectuum naturam propalabit, collatis quidem maioribus ad minores, aut certè minoribus ad quantitates maiores, præfata multiplicandi lege. Quánam verò arte fiant, hæ decrementi multiplicationes, ſeptimo libro dicturi ſumus, ac binis eum ſequentibus, vt tandem decimum attingentes, quantitates numeros recipientes, à quantitatibus numeros non recipientibus ſecernamus: interdum quæ vtriſque conuenient fundamenta iacientes.

EVCLID

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber quintus.

Diffinitio 1.

PARS, est magnitudo minor, quæ à maiore sumitur.

Receptum est omne analogum prius distinguẽdum quàm esse diffiniendum: distinguemus itaque hãc geometricam partem, à parte arithmetica. Cùm etenim geometricæ denominationes quantitatem sonent confusam, Arithmeticæ verò quantitatis denominationem, numeris distributam proferant. Partem hanc geometricam esse dicemus, non tãtum (vt aliquibus placuit) eam quæ sæpius repetita totum præcisè cõstituit, quæ arithmeticis pecularis existit. Sed præter id eam quæ quouismodo à minore sumpta maioris quantitatem sui facta ad reliquum comparatione exprimat. Confusè autem hanc diffinimus partem, geometricum imitantes morem, eò quòd omnis quantitas minor à maiore detracta, pars eius liberè dici poßit. Detractiones autem illæ in varias incidentes quantitatũ naturas, ob immensam geometriæ in magnitudines potentiam, quid producant suis locis (Supero fauente) narrabimus, inchoantes interdum ab iis, quæ huic sese offerunt discutienda negotio. Pars itaque ea dicetur magnitudo, quæ ad totum relata ab ipsoque detracta aliquid residuũ relinquit. Siue ea pars sæpius repetita totum præcisè constituat, siue per nõ præcisas repetitiones, illud idem componat. Aut equidem per partis ablatæ reassumptionem idem totum reintegret: vt quandoque decimo dicturi sumus. Ea semper minor à maiore quauis arte sumpta, maioris pars apud geometras dicetur.

MONITVM.

Huius diffinitionis voces aliquas transtulimus, cùm dixisset Theon partem eam esse quæ totum metitur, non existimantes huic sententiæ Euclidem subiacere. Quippe qui futuro decimo incertam magnitudinem à certa proposita detrahere (vt incertam eam propalet) sibi futurum esse præuidet. Et proinde incertam veluti totius certæ abstractum, eiusdem certæ partem fore concludit, suo toti penitus incommensurabilem: nihilominus partem diffiniisset eam, quæ maiorem vel totam metitur magnitudinem (licet toti certe incommensurabilem futuram esse ab illa detractam, apotomen se ostensurum expectaret, 73 decimi, ac sectæ 11 secundi rectæ sectiones, partes esse videret) non credimus, obstante horum elemẽtorum ac totius geometriæ immaculata methodo, cuius facultas ad commensurabiles & incommensurabiles defertur quantitates. Non igitur Euclidem eius arithmeticæ partis diffinitonem geometriæ destinasse credemus. Quam ideo scripsit Theon partis diffinitonem, arithmeticis relinquemus. Is nãque vtriusque disciplinæ diffinitiones commiscuit, immemor quãto abinuicem distent. Nos itaque disciplinarum dignitatem obseruantes, quæq; cuiuis competant, seorsum explicanda esse consulimus, ne cùm ad decimum peruenerimus (vtriusque certæ scilicet ac incertæ quantitatis præcepta docentem) fædata extet huius matheseos immaculata methodus, exceptionibus, limitationibus, restrictionibus, ampliationibus, & huiusce cautelis incertarum professionum cultioribus ornamẽtis. Sed sibi perpetuo constans certis valletur principiis. Et tandem commune illud 9 eloquium (totum scilicet sua quauis parte maius haberi) veneremur.

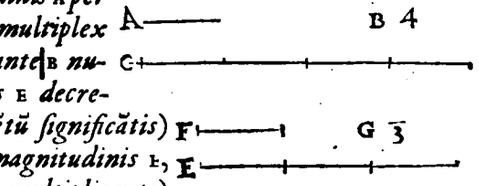
Diffinitio 2.

Multiplex est maior minore, quando eam metitur minor.

Hanc multiplicis vocem à numeris subfuratur Euclides, cuius relatiuam simplicem esse dicemus, non autem partem, vt Campanus & Theon asseruerunt. Totum namque parti relatiuè collatum, generaliora his existunt. Omne etenim multiplex simplicis est totum, simplexque multiplicis pars. Sed non à conuersa omne totum est suæ partis multiplex, cùm omne totum ad partem habitudinem numerorum non recipiat, quam multiplex ad simplicem magnitudinem suscipit. Et ideo eam dicit esse maiorem, quam minor metitur, quia per numerum maiorem multiplex, per minorem verò (aut verius vnitatem) simplex denominatur. Atqui omnem numerum metitur vnitas: facilè igitur conceptu erit, simplicem metiri multiplicem, vt autem hæc suo ordine distribuamus, Geometriæ imprimis quantitates continuas ac confusas, sola vnitate denominari iampridem suscepimus. Quæ

vnitas nullam ſectionem aut multitudinem in ſe patitur. Similiter geometrica quantitas multitudine, aut quauis ſectione caret, & eapropter nihil multiplicare poteſt.

Quemadmodum enim quantitas vnitate denotata in partes ſecta, relicto vnitatis nomine, ſuſcipit numeri partium nomen: Sic & geometrica quantitas, vnica, ſiue continua, adueniente ſectione diſcreti nomen, relicto continui nomine, ſuſcipit. Cùm autem multiplicis denominatio à multiplicatione dependeat, multiplicatio verò à numeris. Multiplex (numerorum legem proſequentes) dicemus operationem illam ſeu effectum multiplicandi, aut equidem eam actionem, qua numerus ſimplicem quantitatem ſua diſcretione ita in augmẽtum vel decrementũ alterat, ſuarum quidem vnitatum repetitione, quod ab hoc effectu procreata quantitas, reſpectum in ſimplicem ab alterante numero denominatum concipiat. Multiplex namque nec maius aut minus à magnitudinis quantitate dici poteſt, ſed ab actionis quantitate à maiori vel minori vnitatum frequentia genita. Quare non quantitati multiplicationem ineſſe putemus, ſed tantùm ei actioni ſeu operationi, qua per alterantem numerum ex ſimplici producitur multiplex. Quia igitur alteratio illa numero exequiũ parat, ſimplex verò vnitatis denominatione tegitur, manifeſtum erit multiplex illud exequium maius ſimplice exhiberi, cùm ſemper numerus vnitate maior exiſtat, ac numerum vnitas ſemper metiatur. Minor itaque ſimplex vnitate concluſa, quæ per vnitates alterantis numeri multiplicem producit, dicetur eam multiplicem, & ideo maiorem, per vnitates alterantis numeri metiri, & eiuſdem dicetur pars, aut partes arithmeticæ, quæ ad multiplex arithmeticum ſunt relatæ, non autem pars geometrica, cùm non ſemper geometrica pars, multiplex totum componens ſub numerorum reſpectu ſuſcipere poſſit. Quare hanc multiplicis vocem, non ad omnes geometricas magnitudines ſumpſit Euclides, ſed ad eas tantùm quæ reſpectum inter ſe ſeruant quem numeri. animaduertendũ autem eſt, geometriæ leges æquè in infinitũ quantitatũ decrementum, vt in infinitũ incrementũ ſua dilatare dominia. Quælibet namque magnitudo infinitè minui, vt infinitè augeri poteſt. Cùm igitur multiplicandum propoſitæ quantitatis augmentum ſuſcipimus, multiplex maiorem producet quantitatem multiplicata. Si verò decrementum, minorem multiplicata producet. Eorum tamen multiplicium vtrumque (vt iam diximus) à maiori denominatur numero: eò quòd ſemper multiplicatum quouis expreſſum numero pro vnitate tanquam vnum ſumatur, augendum quidem vel minuendum. Multiplicationem verò denominans, ſemper eſt numerus, à quo dictus multiplex, ſemper ſimplici multiplicato maior erit. Nam dictio multiplex actionem multiplicandi, non autem quantitatem ſonat, vt exemplo augmentum magnitudinis A per vnitates numeri B multiplicantes producemus C, multiplex ipſius A augmentum, ſcilicet quadruplum A multiplicante B numero denominatum. Si verò alicuius magnitudinis E decrementũ multiplicantes, per vnitates numeri G (decremẽtũ ſignificãtis) producamus F, erit idem F multiplex decrementum magnitudinis E, ſcilicet $\frac{3}{4}$ hoc eſt tertium à numero G ($\frac{3}{4}$ decrementum multiplicante) denominatum. vt de his latius cum de numeris peculiari traditione ſeptimo libro dicturi ſumus 16 diffinit. proprium agentes negotium, Supero propitio, tres multiplicandi diſcutientes differentias.



Manifeſtum itaque relinquitur magnitudinem C (vnicè A magnitudinis augmentum) maiorem eſſe augmenti denominatione, magnitudine A ſimplice, ſcilicet quadruplam: nam cum augmentum agimus, quæ huius augmenti plus exprimit actionem, maioris meretur denominationem. Similiter quia F maius expreſsit decrementum ſimplice propoſita E, ſuſcepto decrementi negotio, ea quæ maius indicat decrementum, ſeu maiorem decreſcendi actionem, eadem lege maioris meretur denominationem, ſcilicet effectus non quantitatis. Diximus enim multiplex effectui, actioni, vel operationi, non autem quantitati propriè adhærere. Vtraque igitur via cùm multiplex ſiue decrementum, ſiue fuerit augmentum numero exprimatur, multiplicanda verò quantitas vnitate, perſpicuum erit multiplex illud ſemper maius eſſe, & inſuper minorem vnitate ſignificatam. ſemper metiri multiplicem numero ſignificatam. Hanc confirmabit multiplicandi methodum 10 diffini. huius, ac poſtmodum theoremata. Cùm itaque multiplex ſit à numeris ſumpta denominatio, ea tantùm ad quantitates habitudinem ſeu reſpectum numerorum habentes pertinet. Quare cùm multiplicem denominabimus aliquam magnitudinem, non ſubſtantiam eius, non qualitatem, aut equidem eius quantitatem conſiderabimus, cùm hæc arithmetica nõ conſideret. Sed tantùm vnitatum frequentiam, maiorem vel minorem (quam vocant arithmetici numerum) per quam illa propoſita magnitudo plus vel minus optatum à geometria finem conſequitur, hoc eſt augmentum æqualitatem, vel decrementum. Maior igitur vnitatum frequentia magnitudinem augens, eam maius efficit multiplex. Veluti maior vnitatum frequentia eandem minuens, maius multiplex dicetur, aliud quidem incrementum,

mentum, aliud verò decrementum.

Diffinitio 3.

Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis, quoad quantitatem facta adinuicem habitudo.

Quoniam quantitatis proprium dixit Ariſtoteles eſſe ſecundum quam quid æquale maius, vel minus, dicitur, Diffiniemus rationem geometricã eam eſſe, quæ habitudinem ſiue reſpectum vnius magnitudinis ad alteram (quoad quantitatem comparatæ) in ſe habet. Quoad quãtitatem præcipuè dicimus, cùm inter quaſuis magnitudines, non ſequetur rationem haberi, ſed tantum inter eas quæ commune habent quantitatis genus, licet diuerſa in ſe patiantur quædam accidentia. Illud nanque genus exprimi patitur quæ earum maior, minor, aut æqualis fuerit, tanquam verum geometriæ ſubiectum, vt lineæ ad lineam, plani ad planum, ſolidi ad ſolidum, motus ad motum, temporis ad tempus, numeri ad numerum, ſoni ad ſonum, ſeu interualli (ſonorum rationem exprimẽtis) ad interuallum: quæ ſingula ita quantitati ſubiiciuntur, vt quælibet magnitudo reliqua poſsit maior, minor aut æqualis dici. Nihil item refert eas magnitudines diuerſas informare naturas, ſiue accidentium ſpecies, dum tamen inter eas illud quantitatis idem ſit vinculum, quo hæc illa maior, minor, aut æqualis dici valeat, vt veram rationem ſubeant geometricam. Diuidemus tamen hanc magnitudinum eiuſdem generis rationem incognitam & confuſam ſeu ſurdam. Nam magnitudines rationẽ ſiue reſpectum inter ſe habentes, quam habent numeri, ad ſe inuicem rationem cognitam, certam, ac determinatam habere dicentur, eò quòd numerorum comparatio ſit ſemper patula ob diſcretionis eorum laculentiam. Quæ verò eam habent affinitatem aut reſpectum, qui nullis exprimi poteſt numeris, & proinde rationem numerorum nõ habent. Illæ rationem confuſam, ignotam, ſiue ſurdam habere dicentur, quarum naturam (Deo duce) decimum exponentes, latius ſcrutabimur. Cùm enim ſola diſcretio (quæ numeris eſt propria) quantitatum continuarum nobis adaperiat habitudinem, manifeſtum erit quantitates diſcretione numerorum priuatas, & intelligentia ideo priuari. Has enunciarunt Euclidis interpretes, libro decimo Irrationales: ſed impropriè à negatiua priuante. Irrationales nanque ratione carentes, ſiue priuatas propriori voce denominari poterant. De his porro (quas incertas dicimus rationes) ſuperſedendum ad decimum uſque librum erit. Interdum rationes cognitas, certas, ac determinatas (morem præcedentium Euclidis interpretum referentes) ſubdiuidemus, in rationes maioris inæqualitatis, minoris inæqualitatis, ac æqualitatis. Maioris autem inæqualitatis ſunt rationes, quarũ antecedens maius eſt conſequente. Minoris verò inæqualitatis, quarum antecedens minus eſt conſequente. Æqualitatis demum, quarum antecedens conſequenti eſt æquale, hæc enim nullas in ſe patitur ſubdiuiſiones: maioris quidem inæqualitatis rurſus quinque fient ſpecies, ſcilicet multiplex, ſuperpartiens, ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiẽs, & multiplex ſuperparticularis. Multiplex ratio eſt cuius antecedens ſæpius in ſe repetit, ſiue multiplicat conſequens, vt 6 ad 2 (tripla) quia 6 continet in ſe ter binarium. 8 ad 2 quadrupla, quia 8 continet in ſe quaterbinarium, &c. Superpartiens eſt cùm antecedens continet in ſe ſemel conſequens & aliquas eius arithmeticas partes, vt 5 ad 3 (ſuperbipartiẽs tertias) cõtinet enim 5 ſemel ternariũ & inſuper ternarij duo tertia, & 7 ad 4 (ſupertripartiẽs quartas) &c. Superparticularis eſt cuius antecedẽs continet ſemel conſequẽs & vnã eius arithmeticã partem, vt 5 ad 4 (ſeſquiquarta) cõtinet enim 5 ſemel 4 & vnum ipſius quartũ, 4 ad 3 (ſeſquitertia) & 3 ad 2 (ſeſquialtera) &c. Multiplex ſuperpartiens ex multiplici & ſuperpartiente compoſita, ea eſt cuius antecedens pluries in ſe capit conſequens, & inſuper plures eius arithmeticas partes, vt 12 ad 5 (dupla ſuperbipartiens quintas) nam 12 continet 5 bis, & duo eius quinta, & 8 ad 3, (dupla ſuperbipartiens tertias) continet enim 8 bis 3, & duo eius tertia. Multiplex ſuperparticularis eſt, cuius antecedens continet pluries conſequens, & inſuper ipſius vnam arithmeticam partem, vt 5 ad 2 (dupla ſeſquialtera) continet enim 5, bis binarium & vnam eius partem dimidiam, & 7 ad 3 dupla ſeſquitertia, continet 7 bis ipſum 3, & tertiam eius partem.

Minoris autem inæqualitatis totidem aſsignarunt ſpecies, eodémque digeſtas ordine mutatis ſcilicet antecedentibus in conſequentes terminos ſiue quantitates. Cùm enim mutantur multiplicis rationis termini, fit ratio ſubmultiplex, vt 2 ad 6, & 2 ad 8. Cùm mutantur ſuperpartientis termini, fit ratio ſubſuperpartiens vt 3 ad 5, & 4 ad 7. Cùm mutantur ſuperparticularis termini, fit ſubſuperparticularis ratio, vt 4 ad 5, & 3 ad 4. Mutatis verò multiplicis ſuperpartientis terminis, fit ratio ſubmultiplex ſuperpartiens, vt 5 ad 12, & 3 ad 11. Mutatis demum multiplicis ſuperparticularis terminis, fiet ſubmultiplex ſuperparticularis, vt 2 ad 5, & 3 ad 10. Harum minoris ad priores

maioris inæqualitatis nihil esse dixerunt distantiæ, dempta sola particula (sub) denominationi præposita. Reliqua eis communia esse professi sunt, quicquid vni conueniret, alteri conuenire dicentes.

Vnde prospiciens plures quosdam in lapsus decidisse, quantitatem rationum minoris inæqualitatis ignorantes, Prænoscens insuper cœptum Euclidis per numerorum libros peragendum. Rationem nimirum certam, quæ inter discreta & continua ceciderit, ab ea quæ inter discreta tantùm cadet, lata differentia ob theorematum integritatem fouendam obseruaturum, cùm hæc pura arithmetica, illa autem partim geometrica complectatur elementa: si quidem discreti ad continuum respectum partim geometricum arbitremur, quemadmodum discretæ ad discretam arithmeticam iudicamus affinitatem. Hac de causa tẽpus ac operam redimentes rationem certam breuiori distributione secantes, per æqualitatis & inæqualitatis proferemus species. Rationem æqualitatis leui admodum cura prætermittentes, quæ suiipsius multiplicem parit denominationem, nulli alterationi obnoxiam, vnitate nempe significatam reponemus, rationum inæqualitatis species sequuturi. Rationem igitur inæqualitatis in binas maioris & minoris inæqualitatis rationes diuidemus. Maioris rursus inæqualitatis rationes in duas species. Multiplicem ac superpartientem discernemus. Minoris autem inæqualitatis rationes proximarum conuersas, in binas totidem distribuemus species, Particularem scilicet & partientem. Harum rationum singulas exponentes dicemus, æqualitatis rationem, eam quæ ab vnitate denominata antecedentis in consequens multiplicationem per vnitatem denominantem perficit, quæ secando aut multiplicando propriam quantitatem suapte natura alterare non valens, necessariò antecedens consequenti perpetuo relinquet æquali, vt 4 antecedens per vnitatem ductum in incrementum, siue decrementum semper producere eundem 4 multiplicem, suo simplici æqualem cernemus, quæ quidem terminorum æqualitas æqualitatis rationem suæ conuersæ æqualem esse cogit.

Inæqualitatis rationem verè multiplicem compellabimus. Eius namque denominatio per numerum expressa, antecedentis in consequens multiplicationem ac alterationem pronunciat, siue in augmentum, aut in decrementum, aut etiam in vtrumque pergat multiplicatio, quæ quidem numero non vnitati conuenit.

Hæc itaque per repetitionem consequentis in antecedente exprimetur. Illius verò repetitionis denominatio per vnitates numeri multiplicantis facta, in augmentum, vel decrementum, rationis antecedentis ad consequens quantitatem perfectè resonat. Huius inæqualitatis rationem quam in genere multiplicem diximus, in binas denuo discindemus rationes. Maioris inæqualitatis seu incrementi, & minoris inæqualitatis seu decrementi.

Maioris inæqualitatis ratio seu incrementi ea est, cuius antecedens ad consequens incrementum habet, vel cuius antecedens maius est consequente, hanc in binas distribuimus species, multiplicem ac superpartientem.

Multiplex ratio sui peculiari intelligentia hæc erit, cuius antecedentis quantitas pluries in se repetit consequentis quantitatem. Necnon ea quæ inter numeros & vnitatem cadit, aut equidem quæ discretum continuo confert. Hæc quandoque inter discreta quum eius termini numeris exprimentur reperiri potest, non tamen illi id est proprium, terminorum nempe eius affinitas ad eam quæ inter discretum & continuum decidit affinitatem, tandem reducitur. Huius multiplicis exempla, sunt veluti 2 ad 1. 3 ad 1. 7 ad 1. 10 ad 1 sicq; numeri discreti ad vnitatem continuam quouis exemplo cernimus conferentiam. Quod si 21 ad 3 rationem multiplicem, ac alias similes numeris expressas inter discretas dixerimus reperiri quantitates. Ad hæc, rationem his numeris 21 ad 3 expositam non esse puram numerorum, sed discreti ad continuum, nempe 7 ad 1, hoc est septenarij discreti ad vnitatem continuam & insolutam, siue numeri ad vnitatem ad quam cunctæ conueniunt tandem multiplices, ad minimas suæ rationis partes reductæ.

Superpartientem verò rationem eam esse diffiniemus, cuius consequentis quantitas antecedentis quantitatem præcisa repetitione suiipsius integrare nequit. Cùm autem hæc sit maioris inæqualitatis, antecedentem consequente maiorem possidet. Non tamen in se plures repetitiones consequentis præcisas recipientem, hac de causa consequentis quantitas necessariò discreta permanet. Hæc itaque superpartiens relicta priori multiplici, reliquas quatuor ab antiquis proditas, in se complectitur, cunctas scilicet vnica copulans essentia, qua discretum maius minori discreto confertur, siue numerus numero, nusquam inter continua aut inter discretum & continuum necessariò reducenda, vt 3 ad 2, 5 ad 3, 12 ad 5, &c. quas ad vnitatem & numerum reducere nequaquam fas est. His itaque superpartiente & multiplici, quasuis maioris inæqualitatis concludemus species certas.

Minoris

Minoris autem inæqualitatis binas totidem prioribus oppoſitas ſiue earundem conuerſas ſtatuimus particularem, & partientem.

Particularem rationem multiplicis conuerſam diffiniemus eam eſſe, cuius antecedentis quantitas pluries ſumpta conſequentis quantitatem producit, à conſequente ſumens vnicam tantùm particulam. Hæc ideo multiplicis dicitur conuerſa, quòd illius antecedens huius fiat conſequens, ac è contra, huius antecedens illius fiat conſequens; vt 1 ad 3, 1 ad 7, 1 ad 10, 6 ad 24, vel 1 ad 4 quæ idem ſonant, ad minimas partes reductæ.

Partientem verò rationem eam dicemus, cuius antecedens plures ſumit antecedentis partes diſcretas, nuſquam autem integrum antecedentem componentes. Hæc ſuperpartientis vera eſt conuerſa, vt 2 ad 3, 3 ad 5, 5 ad 12, quæ nulla arte ad continuas reduci poſſunt, eò quòd antecedens eum reſpectum quem vnitas in aliquem numerum, ad conſequentem habere nequeat.

Hac breui rationum diuiſione cunctas inæqualitatis rationes complectimur, multiplici ſcilicet ac eius conuerſa particulari continui ad diſcretum quaſlibet, ſuperpartiente autem & partiente reliquas quæ inter diſcreta quæq; cadunt, concludentes. Quæ videntur omnes rationes inæqualitatis quas certas dicere auſi ſumus referre. Nam ſi continui ad continuum rationes relinquère diceremur, has in priorem rationum ſectionem, ſiue diuiſionem decidiſſe, qua certas ab incertis diuiſimus rationes, nemores eſſe conueniret. Continui namque ad continuum reſpectus incertas æquè vt certas complecti poteſt rationes. Ratio namque geometricorum continuorum æquè rationes numerorum arithmeticorum ſiue certas continet, ac incommenſurabilium quantitatum, ſiue incertas vnica continuorum habitudine, quæ ſemper actione qua antecedentis quantitas in conſequentis quantitatem operatur, exprimenda venit. In diſcretis quidem per numerorum multiplicationem in continuis verò inexpreſſa, numeris obſiſtit.

Ratio certa diuiditur in rationes.

AEqualitatis vt inter 4 & 4.

Inæqualitatis

- *Maioris Inæqualitatis*
  - *Multiplex* — 6 ad 2 *Tripla.*
  - *Superpartiens* — 5 ad 3 *Superbipartiens tertias.*
  - *Superparticularis* — 5 ad 4 *Seſquiquarta.*
  - *Multiplex ſuperpartiens* — 8 ad 3 *Dupla ſuperbipartiẽs tertias.*
  - *Multiplex ſuperparticularis* — 7 ad 3 *Dupla ſeſquitertia.*
- *Minoris Inæqualitatis*
  - *Submultiplex* — 2 ad 6 *Tertia.*
  - *Subſuperpartiens* — 3 ad 5 *Tripartiens quintas.*
  - *Subſuperparticularis* — 4 ad 5 *Quadripartiens quintas.*
  - *Submult. ſuperpartiens* — 3 ad 8 *Tripartiens octauas.*
  - *Submult. ſuperparticularis* — 3 ad 7 *Tripartiens ſeptimas.*

Breuior rationum inæqualitatis diuiſio.

Inæqualitatis

- *Maioris Inæqualitatis*
  - *Multiplex* — 6 ad 2, 3 ad 1
  - *Superpartiens* — 5 ad 3, 5 ad 4, 8 ad 3, 7 ad 3
- *Minoris Inæqualitatis*
  - *Particularis* — 2 ad 6, 1 ad 3
  - *Partiens* — 3 ad 5, 4 ad 5, 3 ad 8, 3 ad 7.

Qua de cauſa omnium harum rationum antecedentes termini conſequentium dicantur multiplices, conſequentéſque antecedentium ſimplices, ſiue in augmentum, ſiue in decremẽtum, licet ipſis conſequentibus fuerint maiores, vel minores, illud triplici multiplicandi forma fieri declarabimus cùm ad numeros (ad quos verum ſpectat negotium) venerimus, interdum in habentibus rationem certam aut diſcretam, quamlibet antecedentis quantitatem cuiuſlibet conſequentis quantitatis multiplicem haberi poſſe profitebimur, binis quidem operationibus, aut qua numerus vnitatẽ multiplicat, aut equidem qua numerus numerum multiplicat, expreſſam, ſiue in augmentum, ſiue in decrementum peragatur multiplicatio, aut in vtrumque. Cùm itaque omnimodas rationes certas à multiplicantibus numeris exprimi dixerimus, rationem verè exprimere poſſumus per denominationem multiplicationis, qua antecedens multiplicat conſequentis augmentum, vel decrementum, ita quòd hac lege multiplicatio rationem, ſiue magnitudinum habitudinem exprimit. Non tamen ab ea maior vel minor dicitur ratio, eò quòd ratio non vnitatum frequentiam, ſed quantitatum reſpectum tantùm conſideret: multiplicatio verò vnitatum multiplicantium frequentiam, non magnitudinum quantitatem, cuius multiplicationis denominatio, rationis præcipuam ſubſtantiam profert, quia verò rationis quantitas à magnitudinum propoſitarum, quantitate depẽdet. Reperiemus quauis facta multiplicatione, rationem eſſe maiorem, cuius antecedens plus de conſequente ſumit, hoc eſt, cuius antecedens pluries in ſe continet conſequens, aut plures eius partes, ſeu partes maiores, inde conſequimur denominationem quantitatis rationum, non à ſimplicibus pendere numeris, ſed per multiplices exprimi numeros, eò quòd à multiplicatione ſint producti. Nam ſenarij ad binarum rationem multiplicem, triplam nominantes, eam multiplici denominauimus numero, (nempe triplici) & duplam duplici, quadruplam quadruplici, & reliquas huiuſce certitudinis rationes numerorum reſpectu copulatas, non ſimplicibus, ſed multiplicibus numeris denominari concludemus, oſtendentes eam habitudinem quæ ratio dicitur à ſola prodire multiplicatione. Sicuti enim ſimplex nmmerus ſimplici per additionem coniungitur, ita multiplex rationis denominator, multiplici rationis denominatori, multiplicatione copulatur. Additio igitur multiplicium ſola fit multiplicatione, eáque rationum erit additio: at quantitatum additio per ſimplicium numerorum magnitudines ſignificantium additionem, producitur. Rationem itaque dicemus eſſe, reſpectum ſeu habitudinem, quem inter ſe habent duæ magnitudines, idem genus quantitatis habentes. Qui quidem reſpectus in certis rationibus, per eam multiplicationem qua antecedens conſequentis multiplicat augmentum, vel decrementum, exprimitur. In incertis verò nulla multiplicandi diſcretione reſpectus ille patefit, ſed ſurdas & penitus inexpreſſas denominari eas rationes, ea de cauſa cogit, quod nullis numerorum diſcretionibus vti valeant, ſed tantùm confusè maiores, aut minores reliquis oſtendi poſſint. Affinitatem tamen ſibi ſumunt à muta illa ſumptione, qua antecedens plus vel minus de conſequentis quantitate repetit, non ſecus quàm certæ aut diſcretæ. Quare ſurdas rationes æquè à ſurda multiplicatione (ſi fas ſit dici) denominari, & certas ea quæ inter diſcreta cadit, exiſtimabimus.

Diffinitio quarta.

Rationem habere adinuicem magnitudines dicuntur, quæ multiplicatę, poſſunt ſe inuicem excedere.

Vbi expoſitum eſt quid ſit ratio, ſiue quantitatum habitudo, præponenda fuit hæc diffinitio, exponens inter quas magnitudines hæc habitudo dicta ratio cadat. Ait autem magnitudines inter ſe rationem habere dici, quæ multiplicatæ, hoc eſt, per aliquas numeri vnitates ſumptæ, ſe inuicem excedere poſſunt: illud præaſſumptum (quantitates rationem habituras eiuſdem optari generis) ſequitur Euclides: Si igitur idem habeãt quantitatis genus, facilè frequens vnius repetitio, aliam non repetitam ſuperabit, adepta namq; per repetitionem maiori quantitate. Quòd ſi diuerſa quantitatis habeant genera, inter eas facta habitudo, rationis nomine priuabitur, vt proxima expoſitum eſt diffinitione. Nec inſuper repetitæ illæ diuerſorum generum quãtitates, quibuſuis numerorum vnitatibus ſeſe excedere poterunt, eò ſcilicet quod ad ſe inuicem comparari nequeant, veluti ſonus ad motum, tempus ad pondus, linea ad ſuperficiem, & cæteræ huiuſcemodi differentiæ. Hora etenim per quemuis numerum in menſes & annos producta, ſtateræ ciclum nuſquam excedet, necnon & ciclus in quotuis talenta productus, horam nuſquam excedere dicetur, cùm quantitatum quoad genus diuerſitas, nullam inter eas haberi ſinat collationem, à qua ratio poſſit oriri, vnde propria denominatione, irrationales inter ſe à rationis priuatione dici poſſunt. Quòd ſi opponatur (vt à quibuſdam) angulum contingentiæ 16 tertij deſcriptum, nulla multiplicatione rectilineum angulum excedere,

ac

ac prȯinde nullam ad rectilineum conſequi rationem. Dicemus illius anguli contingentiam non eſſe quantitatis denominationem, ſed naturæ, ſeu potius qualitatis. Quare quantitatis anguli denominationem (quæ fuit linearum inclinatio) multiplicantes, hoc eſt, eaſdem lineas immoto contactu à ſeipſis remouentes, angulum producemus aliquo rectilineo maiorem, ac ideo inter eos angulos ratio quidem erit, ſed incerta ſiue incognita. Concludemus itaque magnitudines idem genus habentes quantitatis (quam ſolam intuetur geometria) ſeſe per multiplicationem excedere poſſe: ideóque inter eas tantum rationem haberi. Nec facilius iuxta quantitatis proprium, quid maius dici poteſt altero, quàm per multiplicationis exceſſum, nec quid minus, quàm per multiplicationis decrementum. Quæ igitur magnitudines multiplicatæ ſeſe excedunt, rationem adinuicem habent.

MONITVM.

In hac diffinitione dictionem (poſſunt) tranſtulimus, ne ſint qui huic verbo hærentes, magnitudines ſe adinuicem multiplicandas exiſtimẽt, quod longè abeſt, cùm ſint geometricæ magnitudines, ideóque continuæ ac vnitate denominatæ, omni multiplicãdi vi priuãtur. Non itaque dicemus, quæ poſſunt multiplicatæ inuicem, excedere, ſed multiplicatæ (ſcilicet quouis numero cuius eſt proprium multiplicare) ſeſe poſſunt excedere.

Diffinitio 5.

In eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam qua tertia ad quartam, quando primæ & tertię æquemultiplicia, ſecundæ & quartę æquemultiplicia, iuxta quamuis multiplicationem vtraque vtramque vnà excedunt, vnà æquales ſunt, vel ſimul deficiunt ſumptę adinuicem.

Dicto quid ſit ratio, deinde inter quas magnitudines ratio haberi dicatur, nunc poſtremò quæ eandem habent rationem exponendæ ſunt. Eo quidem ordine, quo primæ ad ſecundã ratio quóram-pacto rationi tertiæ ad quartam aſſimiletur, ſit inquirendum. Tum, inquit Euclides, eadem erit ratio, cùm æquemultiplicia primæ & tertiæ, ſimul excedent, ſimul deficient, aut ſimul æquabũtur multiplicibus ſecundæ & quartæ, à quouis alio multiplicante æquemultiplicatis, vt exemplo proponamus ſciſcitandum quánam arte prima A *ad ſecundam* B *in eadem ſit ratione, qua tertia* C *ad quartam* D. *Proferamus primæ & tertiæ* A *&* C *æquemultiplica, hæc* E *&* F, *inſuper ſecundæ* B *& quartæ* D *alia quæuis æquemultiplicia ſint* G H. *Si etenim multiplici* E *excedente multiplex* G, *quauis facta multiplicatione, reliquum* F *excedat* H *etſi æquetur, æquetur, ſi deficiat, deficiat. Eorum æquemultiplicium ſimplices,* A *prima ad ſecundam* B, *erit vt tertia* C *ad quartam* D.

E 18	A 6	B 3	G 15
F 12	C 4	D 2	H 10

Quod ſi (vt cum diffinito diffinitionem conuertamus) eadem fuerit ſimplicium ſuppoſita ratio, ſcilicet primæ ad ſecundam quæ tertiæ ad quartam. Sequetur primæ & tertiæ æquemultiplicia, ſimul excedere, deficere, aut æquari ſimul, æquemultiplicibus, ſecundæ & quartæ quauis multiplicatione progenitis. Cæterùm ad negatiuam properantes, vt vtroſque huius diffinitionis aggrediamur intellectus, in eadem ratione magnitudines dicentur non eſſe, prima ad ſecundam, qua tertia ad quartam. Quando primæ & tertiæ æquemultiplicia non ſimul excedent, deficient, aut æquabuntur, æquemultiplicibus ſecundæ & quartæ, quauis multiplicatione progenitis: Quam prioris inſtar conuertentes dicemus. Quòd ſi eadem non fuerit ratio primæ ad ſecundam, quæ tertiæ ad quartam, ſequetur primæ & tertiæ æquemultiplicia, non ſimul excedere, æquari aut deficere, à multiplicibus æquis ſecundæ & quartæ, quauis multiplicatione genitis. Hanc diffinitionem eouſque locupletem oſtendere voluimus, quod eius intelligentia, non parum conferat momenti, ſublimioribus attingendis. Sed quia hæc diffinitio omnimodam exoptat multiplicationem, antequam communes exceſſus, defectus, aut æqualitates, æquemultiplicium pariat, cuiuſquidem multiplicationis generalitas, à ſingularum multiplicationum ſcrutinio dependere videretur. Vt tamen non crucientur ingenia in diſquirendæ huiuſmodi multiplicandi lege, proximam conferemus methodum, qua aliquam multiplicationem æquemultiplicia ſimul æqualia producentem comperiemus. Argumentum inde ducentes ab ea, qua maior multiplicatio æquemultiplices ſimul excedere, minor verò eoſdem ſimul deficere coget. Propoſitis iiſdem primæ ad ſecundam, ac tertiæ ad quartam rationibus, dentur bini in

eadem ratione numeri. Conuersim autem numerus antecedens consequentia multiplicet, consequens verò antecedentia. Tum necessariò æqui orientur multiplices, vt olim (cor. 17. septimi) ostensuri sumus. Scilicet primæ & secundæ inter se, necnon tertiæ & quartæ inter se, vt aperiemus exemplo. Esto prima A *ad secundam* B *vt tertia* C *ad quartam* D. *Sit eorum ratio quæ numerorum 9 ad 3. Conuersim autem 9 antecedens, vtrasque multiplicet consequentes* B *&* D. *Consequens verò 3, vtrasque multiplicet antecedentes* A *scilicet &* C. *Sequetur binas* A B *per binos eiusdē rationis numeros, cōuersim ductas, æquales producere multiplices,* E *&* G. *Necnon binas* C *&* D *æquales producere* F *&* H. *Si igitur* E *&* F *primæ* A *& tertiæ* C *æquemultiplices, æquentur simul æquemultiplicibus secundæ* B *& quartæ* D, *sequetur alia quauis oblata æquamultiplicatione ipsorum* E *&* F, *aut eosdem* E *&* F *simul excedere ipsos* G *&* H, *scilicet si maior proposita fuerit multiplicatio. Siquidem minor, eosdem* E *&* F *simul deficere ab ipsis* G *&* H: *præter has autem nullæ fiunt multiplicationes. In quauis igitur multiplicatione id faciendum putabimus, huius inuenti facilitatem demonstrata veritate (vt diximus) confirmabit corollarium 17. septimi, interdum sufficiet hanc esse huius diffinitionis intelligentiam. Concludemus itaque eandem magnitudinum propositarū esse rationem, quando æquemultiplicia antecedentium simul excedent, defficient, aut simul æquabuntur, æquemultiplicibus consequentium, id quidem quauis multiplicatione genitis, & è conuerso, haud secus ad negatiuam. Eandem scilicet magnitudinum propositarum non esse rationem, quando æquemultiplicia antecedentium non simul excedent, deficient, aut non simul æquabuntur, æquemultiplicibus consequentium, quauis multiplicatione productis.*

E	A	B	G
18	6	2	18
F	C	D	H
9	3	1	9

Ante paucos annos obiectum fuit in hanc Euclidis diffinitionem, à quodam aliàs peritissimo huius figuræ argumentum, antecedentium 6 & 5 æquemultiplicia 18 & 15 simul excedunt consequentium 4 & 3 æquemultiplicia 8 & 6 tamen simplices 6 ad 4, non sunt in ratione 5 ad 3. ad hæc proponentem oblitum esse quanuis multiplicationem vt diximus. Nam optat Euclides hos communes æquemultiplicium excessus, æqualitates, aut defectus, non tantum in quadam proposita reperiri multiplicatione, sed iuxta quamuis id fieri postulat multiplicationem, quare si antecedentia binario ducamus, fient 12 & 10, si consequentia ternario fient 12 & 9, tum excedente vno scilicet 10 reliquum 9, non excedet alter, hoc est 12 ad 12. Quare per conuersam diffinitionis simplices non erunt in eadem ratione: videmus itaque multiplicium excessus, æqualitates, vel deffectus, non simul procedere facta quauis multiplicatione, vt saltem hoc patuit exemplo, quod quidem ad vniuersalem distribuendam sufficit. Licet namque cuiuis, primam & tertiam eousque multiplicare, quod vtraque reliqua excedat æquemultiplicia, atque hac vsque in decrementum, quod vtramque à reliquis æquemultiplicibus simul defficere cogat, non tamen id in quauis multiplicatione comperimus, vt fieri iubet Euclides, ad conseruandam vniuersalis distributiuæ veritatem. Nam ex Aristotele negatiua vniuersalem distribuit, vt non tantùm in aliqua sed in quauis id faciendum præcipit multiplicationem.

18	6	4	8
15	5	3	6

MONITVM.

Campanus exposuit has magnitudines in eadem esse ratione, quando earum æquemultiplicia in eadem erunt ratione. Dixit enim excessum hunc æquemultiplicium non intelligi de excessu quantitatis, sed rationis, quam proportionem vocat, idem per idem exponens. Nec id mirum, tacuit enim præcipuam diffinitionis substantiam, scilicet hanc quamuis multiplicationem, insuper continuam proportionem priori imponens, ac geometricam libertatem maculans. Nam in vtramque æquè discontinuam vt continuam possunt hæ diffinitiones, quicquid deprauati dicant codices. Qua de re autem Euclides simplicium magnitudinum rationem ex æquemultiplicium cognitione deprehendere voluerit, non autem ex earum simplicium inspectu. Illud (sanorum salua sententia) mihi occurrit. Cùm ratio inquirenda duarum inter se magnitudinum, à quantitatis earum cognitæ comparatione dependeat, Geometricæ verò magnitudines eò quòd sint continuæ & confusæ, nullam proferunt menti quantitatis intelligentiam siue discretionem, qua possint adinuicem comparari quantitatum vires. Cùm autem geometricas continuas & vnicas adhibita multiplicatione, per earum frequentem repetitionem plures efficit, illæ in quantitates discretas transeunt, numerorum speciem induentes, & perinde sensui non veluti continuum, sed discretum (intelligentiæ familiare) sese offerunt discernendæ. Nec omittendum insuper, quod maiorum magnitudinum eandem rationem habentium

bentium differentiæ, multo maiores sunt, & ideo plus intelligibiles. Perspexit etenim Euclides futurum esse, æquemultiplices simplicium magnitudinum eandem habere rationem se demõstraturum, & quaslibet magnitudines proportionales in permutatam rationem deuenturas ostensurum, ab his namque duabus orta est huius diffinitionis inuentio, scilicet à 15 & 16 huius quinti theorematis. Concludemus itaque, si hic præfatus excessus, æqualitas, aut defectus, iuxta quamuis multiplicationem accidat, simplices eandem habere rationem. Si autem econuerso simplices eandem habuerint rationem, id iuxta quamuis multiplicationẽ accidet, contra verò si excessus ille iuxta quamuis multiplicationem productus, non semper accidat, nec simplices eandem habebunt rationem. E conuerso si non habeant simplices eandem rationem, illud non accidet, iuxta quãuis multiplicationem, iuxta eas saltem quæ fiunt per numeros habentes conuersam rationem propositorum simplicium (vt diximus proxima methodo) licet iuxta quamplures alias accidat.

Sexta diffinitio.

Proportio verò est rationum similitudo.

Diximus his proximis duas rationes similes, hoc est easdem, posse (vt sæpius) inter diuersas quãtitates cadere, illa quippe rationum similitudo proportio appellatur, vt si dicamus eandem esse rationem magnitudinum A *ad* B *quam aliarum* C *ad* D, *has proportionem habere dicemus. Siue plures fuerint, nempe si eandem eis rationem habeat* E *ad* F, *sex magnitudines proportionem dicentur habere. Proportionum autem aliam continuam, aliam dicemus discontinuam. Continuam quidem eam dicemus, cuius rationes similes sequuntur, siue iungunt magnitudines nullo omisso interuallo, vt in datis* A B C D *magnitudinibus, si ea fuerit ratio* A *ad* B *quæ* B *ad* C *& eadem quæ* C *ad* D *nullo relicto interuallo.*

	A	B	C	D	E	F
	1	2	3	6	4	8

	A	B	C	D
	1	2	4	8

Discontinuam verò eam dicemus, quæ licet eisdem siue similibus constet rationibus, tamen aliquod omittit interuallum, vt si dicamus eã esse rationem A *ad* B, *quã* C *ad* D *non autem quàm* B *ad* C, *quæ cùm continuum videatur dissoluere, discontinua dicitur proportio: hæc autem cadere potest inter duo vel plura quantitatum genera. Possumus namq; conferre pondus ponderi, in ea ratione qua lineam lineæ conferemus, quaq; tempus tempori, planum plano: erunt igitur octo, quatuor generum magnitudines proportione discontinua coniunctæ. Prior verò quæ continua dicta est, vnicum recipit magnitudinum genus quantitatis, cum prima secundæ, eadem verò secunda tertiæ, tertia verò quartæ (& sic quantumuis) eadem ratione copulentur, quæquidem ratio eadem duas tantùm eiusdem generis cogitur connectere. Sunt alij plures qui rationem vocant proportionem, proportionem verò proportionalitatem, licet Euclides rationem dixerit λόγον, proportionẽ verò ἀναλογίαν, quæ similitudinem sonat rationum. Et proportionem dicunt proinde maiorem vel minorem, acsi maior vel minor daretur rationum similitudo, quod dissonum admodum censentes, potius eligemus Euclidis verba sectari, disciplinæ nuncia. Proportionem igitur non eam magnitudinum affinitatem, quæ ratio dicitur, sed rationum similitudinem esse dicemus, vt perfectè sonat proxima diffinitio sequens.*

Diffinitio septima.

Eandem autem habentes rationem magnitudines proportionales vocentur.

Vocat eas magnitudines proportionales, quarum interualla suscipiũt similes rationes, vel easdem (quod idem est hoc loco) siue continuè siue discontinuè suscipiant, quotquot tamen aderunt similibus, siue eisdem coniunctæ rationibus, sub proportionalium nomine comprehendentur.

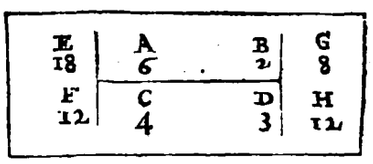
MONITVM.

Ad hanc septimam (Theonis ordinem transponentes) conuenimus. Posuit enim Theon proportionis diffinitionem, quæ ex rationũ similitudine deprehenditur ante eas diffinitiones, quæ quid sit rationem habere, quidve in eadem esse ratione interpretantur. Non igitur ex prioribus posteriora, sed ex posterioribus priora edocerentur, quam igitur quartam reperimus (vt suo cõgrueret loco) sextam ordine transtulimus diffinitionem.

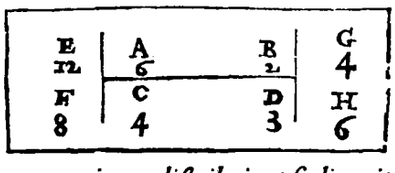
Diffinitio octaua.

Quando verò æquemultiplicium, multiplex primi exceſſerit, multiplex ſecũdi, multiplex autem tertij, iuxta quamuis multiplicationem non exceſſerit multiplex quarti, tũc primum ad ſecundum maiorem rationem habere dicetur, quàm tertium ad quartum.

Quinta huius expoſuimus quid ſit in eadem ratione eſſe, nunc autem quid maiorem rationem habere intelligamus, dicendum eſt. Supponit hæc eãdem haberi multiplicium legem, ei quam quintam ordine expoſuimus, ſcilicet primum & tertium æquè multiplicari. Secundum verò & quartum alia quauis æquamultiplicatione duci, tunc autem, ſi multiplex primi excedat multiplex ſecundi, aliqua multiplicatione verò facta, multiplex tertij non excedat multiplex quarti. Primum ad ſecundum, maiorem habebit rationem quàm tertium ad quartum. & è conuerſo, Si primum ad ſecundum maiorem rationem habeat quàm tertium ad quartum, multiplice primi excedente multiplex ſecundi aliqua fiet multiplicatio qua multiplex tertij, non excedet multiplex quarti.



Aperiamus exemplo poſitis quatuor A B C D, *quarum primæ* A, *& tertiæ* C *ſint æquemultiplicia* E *&* F, *ſecundæ verò* B *& quartæ* D *alia quæuis* G *&* H. *Patet* E *multiplice primæ* A *excedente* G, *multiplex ſecundæ* B, *tertiæ* C *multiplex* F, *iuxta quamuis multiplicationem non excedere multiplex* H, *quartæ* D, *nempe iuxta hanc propoſitam, à numeris conuerſam rationem habentibus ortã. Prima itaque* A *ad ſecũdam* B, *maiorem rationem habet, quàm tertia* C *ad quartam* D. *Ac è conuerſo, ſi prima* A *ad ſecundam* B *maiorem habeat rationem, quàm tertia* C, *ad quartam* D, *ſequetur multiplice* E *primæ* A *excedente multiplex* G *ſecundæ* B. *Et multiplex* F *tertiæ* C *iuxta aliquam multiplicationem non excedere multiplex* H *quartæ* D. *Ad minorem ac eius conuerſam modico negotio ſub eadem pictura quantitatum peruerſo ordine. ac ſi dicamus: Si multiplice* F *primæ* C, *non excedente* H *muliplex ſecunæ* D, *multiplex* E *tertiæ* A *excedat* G *multiplex quartæ* B, *quauis facta multiplicatione: Prima* C *ad ſecũdam* D *minorem habet rationem, quàm tertia* A *ad quartam* B: *haud ſecus in eius conuerſa. Si prima* C *ad ſecundam* D *minorem habeat rationem quàm tertia* A *ad quartam* B, *multiplice* F *primæ* C, *non excedente multiplex* H *ſecundæ* D, *ſequetur multiplex* E *tertiæ* A, *iuxta aliquam multiplicationem excedere multiplex* G *quartæ* B. *Quatuor huius diffinitionis expoſuimus ſumptiones, licet vnam tantùm receperimus. Id ſanè vt cum diffinito diffinitionem conuerti doceremus, præcipuum illud ab Euclide ſuſceptum quinta diffinitione huius memorantes, iuxta quamuis multiplicationem hos exceſſus fieri aut non fieri. Nam ſi Campani & Theonis inſtar hanc prætermiſiſſemus particulam diffinitionis huius, conuerſione caruiſſemus, vt hoc exemplo: Si prima* A *ad ſecundam* B *maiorem habet rationem, quàm tertia* C *ad quartam* D, *multiplice* E *primæ* A *excedẽte, multiplex* G *ſecũdæ* B, *ſequetur multiplex* F *tertiæ* C *non excedere multiplex* H *quartæ* D: *cuius oppoſitum patet niſi in quauis multiplicatione dixerimus. Cùm enim intelligat Euclides ſi facta quauis multiplicatione is exceſſus non accidat, perſpicuum fuit hãc vniuerſalem (quãuis) per negatiuam diſtribui, vt ſi dixerit: Tertium autem aliqua facta multiplicatione quartum nõ excedat, vt veram huius ac ſimilium diffinitionum integritatem tueamur, ab innumeris exemplorum incurſibus, vniuerſalis illius penuria labefactam inde colligemus antecedetis augmentum rationem augere, eius verò decrementum rationem minuere. E conuerſo autem, conſequentis augmentum rationem minuere, ac eiuſdem decrementum rationem augere. Auctis itaquè vel diſtractis ſimplicibus, æquè multiplicium incrementa generari liquet vel decrementa.*



MONITVM.

Huic à quinta voces, iuxta quamuis multiplicationem contulimus, vt diffinitionum more cum diffinitis conuerterentur, quod præter has voces fieri minimè poterat, vt oſtendimus quinta diffinitione huius, vltimóque huius diffinitionis exemplo, quo diſcuſſimus diſiunctiuam illam, ſi multiplex tertij non exceſſerit multiplex quarti, abſque vniuerſali (quamuis) diſtributa in aliquam, huius diffinitionis fore ruinam. Quare hanc vniuerſalem (quamuis) à quinta diffinitione affirmatiua ſumptam, huicque poſtremæ parti negatiuæ collatam, in particularem ſcilicet (aliquam) diſtribuimus.

Ac

Acsi dicat Euclides, Multiplex autem tertij, iuxta quamuis multiplicationem non exceſſerit multiplex quarti, licet iuxta aliquam excedat, vt patuit exemplo. Tum prima ad ſecundam maiorem rationem habet quàm tertiæ ad quartam, vel ſi aliqua fieri poſſet multiplicatio æqua ſecundi & quarti. Qua multiplice primi excedente multiplex ſecundi, multiplex tertij non excedat multiplex quarti, licet iuxta quamuis multiplicationem is exceſſus non accidat. Tum erit maior ratio, &c.

Diffinitio 9.

Proportio in tribus quantitatibus ſaltem conſtituitur.

Cùm proportionem ſexta diffinitione dixerimus eſſe rationum ſimilitudinem, duæ ſaltem conficiendæ proportioni optantur rationes. Quia verò rationem diximus eſſe duarum magnitudinum reſpectum, qui earum interuallo concipitur. Ad binas igitur rationes duo ſaltem requiruntur interualla: quæ quidem interualla non minus quàm tribus concluduntur quantitatibus. Intelligemus itaque proportionis minimũ numerum magnitudinum ſiue quantitatum ternario claudi, hoc eſt, tres ſaltem in proportione conſtituenda requiri quantitates, primæ etenim ad ſecundam ratio ſit vna, ſecundæ verò ad tertiam, ſit altera, quæ rationes cùm ſint ſimiles, proportionem conſtituunt vt A *ad* B *eam habeat quam* B *ad* C *rationem. Ipſæ* A B C *tres quantitates proportionem in minimo quantitatum numero conſtituunt.*

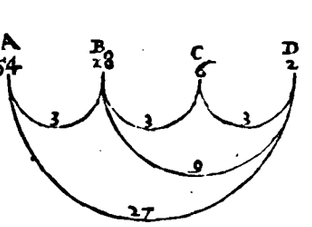
C
B
A

MONITVM.

Huic diffinitioni duarum dictionum (terminis & minima) improprias voces à Theone deſcriptas tranſtulimus. Terminos enim cuiuſlibet rationis ſiue argumenti antecedens, & conſequens vocamus, quare duæ rationes, ſaltem quatuor exigunt terminos. Proportio igitur binas complexa rationes, tribus terminis non poteſt conſtare tantùm, ſed quatuor. Quòd ſi obiiciatur terminos dici magnitudines, & ideo tres magnitudines proportionem efficere: Dicemus magnitudines nomen antecedentis aut conſequentis, non pro quantitatis reſpectu, ſed pro ſitus adeptione recipere. Nam magnitudo B *non ideo eſt antecedens, & conſequens quòd quanta ſit, ſed ſitum ipſi* A *poſtremum ipſi verò* C *priorem ſortita, ex binorum adeptione ſituum antecedentis & conſequentis, binas meretur denominationes: eius etenim* B *quantitas ſine ſitu nulla antecedentis vel conſequentis denominatione poteſt nuncupari. Quia verò dixit Theon proportionem minimam eſſe, tranſtulimus dictionem (minima) in aduerbiũ ſaltem, ne ſint aliqui qui proportionem maiorem vel minorem aliquã reliqua eſſe credant, cùm ſit enim rationum ſimilitudo, nulla poterit dici maior vel minor ſimilitudo reliqua. Quare autem Campanus & alij proportionem ſæpius maiorem, vel minorem dicant, dicemus illos proportionem pro ratione (ſatis tamen impropriè) ſumere, quæ quidem ratio maius & minus recipit. Proportio itaque tres ſaltem magnitudines optat, quatuor terminis expreſſas, binis ſcilicet antecedentibus, & binis conſequentibus.*

Diffinitio decima.

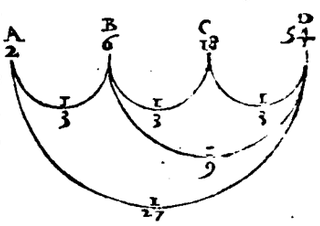
Quando tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicem rationem habere dicetur, eius quæ ad ſecundam. Quando autem quatuor fuerint, prima ad quartam triplicem retionem habere dicetur, eius quę ad ſecundam. Et ſemper ordine vna plus, quouſque abſoluatur proportionalium numerus.



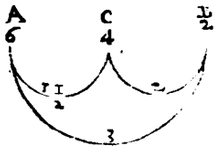
Hanc diffinitionem tantum in proportione continua intelligentes, reſumemus quod tertia huius diffinitione diximus. Rationem verè exprimi denominatione multiplicationis, qua antecedens multiplicat conſequens apud certas quantitates. Cùm igitur quælibet ratio tantũ in multiplicatione conſiſtat, duplicem rationem dicere poſſumus, duplicem eius denominationis multiplicationem, vt exemplo ratio C *ad* D *eſt tripla, hoc eſt* C *multiplicat* D *ter. Sed ratio* B *ad* C *rurſus eſt tripla, id eſt* B *multiplicat ipſum* C *ter. Si igitur tripla ipſius* B *ad* C, *triplam ipſius* C *ad* D *concipiat, ip-*

ſa B *ad* D *nocuplam pariet. Conſtabit igitur ratio magnitudinum* B *ad* D *duabus æqualibus, ſcilicet tripla* B *ad* C *& tripla* C *ad* D. *Duplam igitur habebit prima* B *ad tertiam* D *rationem, rationis quam habet idem* B *ad ſecundam* C, *ſcilicet triplam bis ſumptam, quæ (quoniam multiplicatione nō autem additione copulantur rationes) dupla, triplæ nocuplam efficiet, non autem ſextuplam: rationis enim denominator numerus, non ſimplex ſed multiplex exquiritur. ea igitur de cauſa rationum denominatores, multiplicatione, non autem ſimplicium numerorum additone iungūtur. Similiter progrediemur ſi fuerint quatuor magnitudines, nam ſi præferatur* A *ipſi* B *in eadem ratione, ſcilicet tripla, dicemus quoniam* A *eſt ipſius* B *tripla,* B *verò ipſius* D *nocupla, quæ multiplicatione copulatæ producent 27, ipſius* A *ad* D *rationis denominatorem. Quæ cùm in ſe concipiat rationes,* A *ad* B, B *ad* C, C *ad* D *æquales, ſua copulatione rationem* A *ad* D *producentes, ratio* A *ad* D *tripla dicetur cuiuslibet earū.*

Prima igitur A *ad quartā* D *triplicē habet eius quā habet ad ſecundā* B. *Similiter in infinitū gradientes, ſi quinque ponantur quantitates, prima ad quintā quadruplā rationē habebit quā ad ſecūdā. Et eo ſeruato ordine ſemper quotquot proponentur quantitates, tot vna minus denominationem ſequi rationis primæ ſcilicet ad vltimam, ſupra rationem primæ ad ſecundam. Multiplices etenim rationes, à numero interuallorum denominantur, atqui quantitatum numerus, interuallorum numerum ſemper vnitate excedit. Quantitatum itaque numerus eius rationis denominationem vnitate ſemper excedet. Videmus etenim trium quantitatum bina eſſe interualla, quatuor verò quantitatum tria, & ſic ordinatim. Vt autem oſtendamus ea quæ hac diffinitione diximus in rationibus maioris inæqualitatis, ſimiliter conſequi in rationibus minoris inæqualitatis, apponemus exemplum prioris conuerſum, translatis tantùm terminorum quantitatibus. Geometria etenim eadem facilitate minorum ad maiores exponit habitudines, qua maiorum ad minores. Eadem igitur qua diximus methodo, videmus rationem* C *ad* D *eſſe tertiam, cùm* C *magnitudo ipſius* D *magnitudinis decrementum per* $\frac{1}{3}$ *multiplicet. Rurſus autem* B *ipſius* C *decrementum per* $\frac{1}{3}$ *multiplicat, vnius igitur tertiæ decrementum per* $\frac{1}{3}$ *multiplicatum, vnam producet nonam, nona itaque vnius tertiæ erit dupla, ſcilicet ratio ipſius* B *ad* D ($\frac{1}{9}$), *dupla erit rationis* B *ad* C, *ſcilicet* ($\frac{1}{3}$) *haud ſecus, ſi quatuor fuerint magnitudines primæ* A *ad quartam* D *ratio, tripla erit rationis eiuſdem* A *primæ ad* B *ſecundam, hoc eſt ex ratione ipſius* A *ad* B *ter multiplicata producta: ratio enim* B *ad* C *multiplicans rationem* C *ad* D, *hoc eſt* $\frac{1}{3}$ *per* $\frac{1}{3}$ *producit* $\frac{1}{9}$, *rationem ipſius* B *ad tertiam* D, *ratio verò* B *ad* D *per rationem* A *ad* B *ducta, hoc eſt* $\frac{1}{9}$ *per* $\frac{1}{3}$ *producet* $\frac{1}{27}$, *rationem quippe ipſius* A *ad* D, *triplam rationis* A *ad* B. *Similiter in his quatuor* E F G H, *ratio* E *ad* H *octaua, erit tripla rationis* E *ad* F *dimidiæ. Vnde patet multiplex quādoque minorem quātitatem magnitud nis præ ſe ferre, non autem numeri, nam maior eſt octonarius denominator decrementi* E *ad* H, *binario denominatore decrementi* E *primæ ad ſecundam* F. *Et proinde multiplex eius maius illo erit, licet minorem ſignificet quantitatem, maius autem decrementum. Hinc ſequetur rationes extremorum ex qucrumlibet mediorum conſtare multiplicatis rationibus, hoc eſt rationum denominatoribus. Proponatur inquirenda ratio magnitudinum* A *ad* B, *inter ipſa* A *&* B *aliqua ponatur quantitas* C, *ſit autem ipſius* A *ad* C *ratio ſeſquialtera, reliquæ verò* C *ad* B *dupla, ducantur autem earum rationum denominatores adinuicem, ſcilicet* 1 $\frac{1}{2}$ *per* 2, *fiet* 3 *denominator multiplicatæ rationis, ipſius quidem* A *ad* C, *quæ conſtitit ex ratione* A *ad* C *&* C *ad* B, *hæc autem ratio* A *ad* B *non dicetur dupla ipſius* A *ad* C *rationis, cùm non conſtet ex duabus æqualibus, rationi* A *ad* C, *ſed maior dupla æquè poteſt eſſe ſicut & minor quādoque, vt latius dicemus quinta ſexti diffinitione, tantum ſuperſit Euclidem dixiſſe in continuæ proportionalibus, rationem primæ ad tertiam, duplam eſſe rationis primæ ad ſecūdam: primæ verò ad quartam triplam eiuſdem primæ ad ſecundam rationis, ſiue ea multiplex ratio primæ ad tertiam aut quartam, maior fuerit multiplicata, ratione primæ ad ſecundam, ſiue eadem fuerit minor. Et proinde multiplex quandoque maiorem, quandoque verò minorem ſuo multiplicato concipere quantitatem, licet ipſum multiplex maius ſemper (hoc eſt, maiori multiplicante numero) denominatum ſubſiſtat.*



2 4 8 16
E F G H



Diffinitio vndecima.

Similis rationis dicuntur magnitudines, antecedentia antecedentibus, & conſequentia conſequentibus.

Quo-

Quoniam diximus esse rationem habitudinem vnius magnitudinis ad reliquam, exponemus magnitudines dici similis rationis, eas quarum singula antecedentia ad singula consequentia eãdem habent habitudinem, ideo dicit antecedentia antecedentibus similẽ, ad consequentia habere respectum, & è conuerso consequentia consequentibus similes, pati antecedentium respectus. Ratio etenim semper ea dicitur, quæ respectum antecedentis ad consequens indicat. Non autẽ consequentis ad antecedens, nec antecedentis ad aliud antecedẽs, siue consequẽtis ad aliud consequens, vel omnimodæ aliæ eorũ mixtiones, nempe cùm proponitur duarũ rationũ quatuor quantitates copulãtium inuestiganda similitudo. Eo ordine disponendæ erunt magnitudines, quo semper ea qnæ in aliam multiplicando agit, sit antecedens. Reliqua verò quæ patitur sit consequens, nec minus in alterius rationis reliquis duobus terminis fiet. vnde sequetur: Si binæ rationes quatuor quantitates (scilicet duo antecedentia & duo consequentia) copulantes similes fuerint, cùm quantites illæ eo ordine disponuntur, similes esse etiam alio ordine dispositis eisdem quantitatibus, hoc est, mutatis antecedentibus in consequẽtia vel aliquibus eorum variæ pro natura proportionis, vt sequentibus diffinitionibus extabit. Quauis tamẽ variatione proposita, semper ea quæ in aliam multiplicando agit, antecedentis nomen sibi vendicat, reliqua verò consequentis.

Diffinitio duodecima.

Permutata ratio est, acceptio antecedentis ad antecedens, & consequentis ad consequens.

Hanc à prima terminorum variatione inchoat, quæ etenim quantitates prius fuerunt antecedentes binarum similium rationum, ita transferuntur, vt manente prioris rationis antecedente secundæ rationis antecedens, vice consequentis primæ rationis fungatur, & primæ rationis consequens, eiusdẽ antecedentis secundæ locum subeat, vel breuius antecedentis secundæ & consequentis primæ rationis fit commutatio. Eam terminorum transpositionem vocat proportionem permutata ratione compositam. Hæc autem ideò permutata dicetur, tanquam respectiuè sumpta ad præcedentem, cuius quantitatũ ordinem permutauit. Sed vbi vim proportionis iam adepta est, ab ea æque alia potest oriri permutata, vt à priori hæc orta dicetur permutata. Omnes nanque veræ erunt proportiones, vt patebit in theorematis harũ diffinitionum sensus demõstrãtibus, vt exemplo adaperiamus. Sint A B C D *quarum* A *antecedens sit ad* B *consequens, simili ratione qua* C *antecedens secundæ rationis, ad* D *consequens. Ratio permutata dicetur ea, quæ commutatis cõsequente primæ & antecedente secundæ, dicet esse* A *ad* C, *vt* B *ad* D.

A B C D
A C B D

Diffinitio decimatertia.

Conuersa ratio est, acceptio consequentis, tanquam antecedentis ad antecedens tanquam consequens.

Conuersam rationem suppositæ similis rationis relatiuam, vt permutatam diximus concipere necesse est. Suppositis igitur alicuius proportionis rationibus, cùm in priori ratione transfertur antecedens in consequens, & è conuerso. In posteriori verò ratione idem fit, hæc terminorum prius data proportione dispositorum conuersio. Proportionem à cõuersa ratione denominat, vt si in proposita proportione fuerit A *ad* B *vt* C *ad* D, *erit conuersim* B *ad* A *vt* D *ad* C.

A	B	C	D
B	A	D	C

Diffinitio decimaquarta.

Composita ratio est acceptio antecedentis cum consequente, tanquam vnius ad ipsum consequens.

Compositam rationem veluti præmissas à suppositа proportione oriri vult, scilicet, si primæ rationis antecedens & consequens coniuncta, eidem consequenti comparẽtur. Secundæ quoque rationi simile fiat, hæc proportio à composita denominabitur ratione, vt si suppositа proportione fuerit A *ad* B *vt* C *ad* D, *erit composita ratione* A B *simul ad* B, *sicut* C D *simul ad* D.

A	B	C	D
A B	B	C D	D

Diffinitio 15.

Diuiſio rationis eſt, acceptio exceſſus quo antecedens excedit conſequens, ad ipſum conſequens.

Quia hæc eſt præcedentis conuerſa, ex eiuſdem figuræ typo eam iudicabimus. Dixit enim compoſitam fieri coniunctis antecedente & conſequente ſimul, quod quidem tanquam vnicum antecedens comparatum fuit conſequenti. Et ideo verum fuit antecedens compoſitum, excedere ſimplex conſequens, ſimplici antecedente. Quare comparantes exceſſum antecedentis compoſiti ad ſimplex conſequens, reperimus eum exceſſum eſſe prius antecedens ſimplex, ſimplici conſequenti comparatum, vt ſumamus ordine conuerſo à poſteriori proportione incipientes. Si fuerit vt A B *ſimul ad ſimplex* B, *ſic* C D *ſimul ad ſimplex* D, *erit diuiſa ratione* A *exceſſus quo* A B *excedit* B, *ad ipſum* B, *ſicut* C *exceſſus quo* C D *excedit* D *ad ipſum* D, *hoc eſt, erit* A *ad* B *vt* C *ad* D, *quæ fuit prior ſuppoſita proportio, ad quam reuertimur. Non tamen intelligamus eum exceſſum determinatum eſſe, ſed liberum quemuis, rationibus proportionis coniunctum.*

Diffinitio 16.

Conuerſio rationis, eſt acceptio antecedentis ad exceſſum quo excedit antecedens ipſum conſequens.

Hæc ferè præcedenti opponitur. Cùm autem ſit comparatio antecedentis conſequente maioris ad conſequens, ſicut aliud antecedens ad aliud conſequens, hac poſita ratione per conuerſionem rationis ſequetur, antecedens eam rationem habere ad ſuiipſius exceſſum, quo excedit ſuum conſequens, quam aliud antecedens ad ſuum exceſſum quo excedit conſequens, A B C *vt ſi fuerit* A C *ad* A B *ſicut* D F *ad* D E, *erit ſicut* A C *antecedens* D E F *ad* B C *exceſſum, quo excedit ipſum* A B *conſequens, ſic* D F *antecedens ad* E F *exceſſum, quo excedit ipſum* D E *conſequens.*

Diffinitio 17.

AEqua ratio eſt, pluribus exiſtentibus magnitudinibus, & aliis eis æqualibus multitudine, binis ſumptis in eadem ratione. Quando fuerit ſicut in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ſic in ſecundis prima ad vltimam, vel aliter acceptio extremorum per ſubtractionem mediorum.

Ad hanc proportionem exponendam, binos magnitudinum ordines ſupponit Euclides, æquales quidem & multitudine & rationum ſimilitudine, ſi hac lege fuerit in primo ordine, prima ad vltimam: ſic in ſecundo, prima ad vltimam, vel ſi extremæ ordinis vnius eandem inter ſe habeant rationem, quam extremæ alterius totidem ſubtractis mediis: hæc proportio dicitur æqua ratione conſtitui, vt exemplo. Sint duo ordines totidem magnitudinum A B C D *& E F G H: ſumantur binæ rationes eædem ſcilicet* A *ad* B *vt* E *ad* F, *& binæ* B *ad* C *vt* F *ad* G *& C ad* D, *vt* G *ad* H. *Quãdo autẽ fuerit in primo ordine* A *prima ad* D *vltimam, ſic in ſecundo ordine* E *prima ad* H, *vltimam, vel cum ablatis totidem mediorum rationibus, rationes* A *ad* D *&* E *ad* H *extremorum æquales erunt, hæc proportio æqua ratione copulabitur. Huius autem neceſsitas à* 10 *huius depẽdet. Cùm enim rationes interuallorum* A B C D *&* E F G H, *vel* A *ad* D, *vt* E *ad* H *ſint æquales, neceſſariò rationes extremorum (ex eiſdem rationibus mediorum conſtantes) æquales erunt.*

A	B	C	D
8	6	4	2
E	F	G	H
12	9	6	3

Diffinitio 18.

Ordinata proportio eſt quando fuerit ſicut antecedens ad conſequens, ita antecedens ad conſequens, ſit autem conſequens ad rem aliam ſicut conſequens ad rem aliam.

Hæc

Hæc binos quantitatum ordines requirit. Disponit enim prius quatuor proportionales, binis æquis rationibus coniunctas, quarum binas consequentes efficit antecedentes, ad alias sibi consequentes relatas, eademque coniunctas ratione, vt exemplo, si fuerit A *ad* B *vt* C *ad* D, *sit autem* B *consequēs ad* E *rem aliam,* *sicut* D *consequens ad* F *rem aliam, hæc rationum dispositio ordinata dicetur proportio, eò quòd prioris ordinis ratio prior, priori secundi, posterior verò posteriori æqualis sit, & sic quotcunque fuerint rationes.*

A	B	E
6	3	12
C	D	F
4	2	8

Diffinitio 19.

Perturbata proportio est quando tribus existentibus magnitudinibus, & aliis eis æqualibus multitudine fit, sicut in primis magnitudinibus antecedens ad consequens. Sic in secundis magnitudinibus antecedens ad consequens, Sicut autem in primis consequens ad rem aliam, sic in secundis res alia ad antecedens.

Hæc similiter quatuor proportionales supponit, vt cùm primæ rationis consequens ad aliquam magnitudinem eam seruabit rationem, quam aliqua alia magnitudo ad secundæ rationis antecedens, hic ordo rationum perturbata vocetur proportio, vt exemplo, Esto A *ad* B, *vt* C *ad* D, *sit verò* B *primæ rationis cōsequens ad rem aliam* E, *sicut quædam alia res* F *ad* C *antecedens secundæ rationis. hic rationum ordo licet perturbatus sit, nihilominus verè proportionalis est: nam bini ordines binas rationes aliis binis æquales habent: est enim* A *ad* B *eadem rationi* C *ad* D, *sed* B *ad* E *est eadem rationi* F *ad* C, *ipsorum ordinum igitur binæ rationes, binis æquales existunt. Ostendit hac diffinitione, nihil referre an prioris ordinis ratio, posteriori rationi secundi ordinis æqualis fuerit, perturbato hoc ordine. Dum tamen quilibet ordo totidem rationes contineat, singulas singulis æquales, licet non ordinata proportione, sed perturbata serie. Id quidem vt tandem inter extremas eadem reperiatur ratio, ex eisdem mediis rationibus constans, siue ordinata siue perturbata serie dispositis, æquam rationem cōstituentibus.*

A	B	B
6	3	2
F	C	D
12	8	4

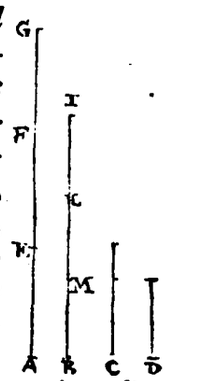
MONITVM.

Binas insuper apponit præter has diffinitiones Zambertus, quas easdem cum binis præcedentibus vltimis reperientes, data opera omisimus. Non enim eas Euclidem scripsisse fuit verisimile, nec forsan omnes ab Euclide scriptas, ad nos peruenisse credibile. Dissentiunt etenim Theon & Campanus, non tantùm ordine, & theorematum numero, sed quandoque & sensu, vnde verum fuisse arbitramur Zāberti scriptum in liminari ad perspectiuam, eum scilicet quandoqne reperiisse Euclidem, apud Socraticum, in vetustissimis & tineis, ac carie contritis græcis codicibus. Non igitur difficile videbitur multa ad nos temporis iniuriam heteroclita detulisse. Cùm itaque coniiciamus Euclidem multas alias proportionum varietates, quàm ab his receperimus, reliquisse, tamen has dēmonstrandis futuris elementorum theorematibus sufficere rati, studiosis si quas præter has disquirere cupiant, relinquimus exequendum. His igitur nouem ab vndecima quid conueniat exponere volentes, dicemus has geometricas proportiones omnibus quantitatum generibus inseruire, diuersis quidem respectibus. Nam licet vndecima similes antecedentium ad consequentia proferens rationes, omni quantitatum generi copuletur, cùm in diuersis genere similes possint dari rationes, attamen duodecima permutata, rationes easdem extra idem quantitatis genus esse non sinit. Nam primæ rationis antecedens ad secundæ rationis antecedēs comparatū, priores binas rationes inter eiusdē generis quantitates cecidisse cogit, conuersa verò binas rationes in bina quantitatum genera cadere patitur, nihil enim priorum cum posterioribus miscet, quod idem operatur & composita ratio, necnon diuisio rationis: eas insuper insequitur conuersio rationis, illæ etenim, quatuor magnitudinum numero quæquæ claudūtur. AEqua verò ratio sex aut plures postulās magnitudines binis ordinibus dispositas, diuersa quantitatū genera cuilibet ordini scilicet propriū genus inesse patitur. Ordinata autē duo quantitatū genera similiter defert, cui fit consors perturbata, cū earū singulæ binos quātitatū ordines præ se ferant, si libeat duobus quantitatum generibus obnoxios. Cū enim rationē dixerimus esse respectū siue habitudinē, qua prior duarum oblatarum magnitudinum, posteriorem sua quantitate multiplicat, multiplicationiq; huius quātitatem rationis itidē quantitatē denominare, illud præmonendum duximus: quòd scilicet cum rationis alicuius expressio, nil aliud sit quàm antecedentis ad consequens multiplicatio, per multiplicationum comparationes ordietur hoc quinto Eu-

clides, rationum aperire inter se differentias, habitudines siue respectus, illæ etenim cùm suas quantitates non simplicibus sed multiplicibus exprimant numeris, per multiplicium quantitatum additionem, detractionem & æquationem, ipsarum quantitates æquemultiplicibus inter se comparatis magnitudinibus edocebit, præcipuè sex prioribus huius quinti theorematis. Quicquid enim de multiplicatione vnius in alteram dicet quantitatis, idem de ratione dictum postremò patebit. Cùm autem binæ quantitates binarum æquemultiplicãt augmentum, hæc multiplicationis æqualitas, æquales inter eas denũciat rationes, maior maiores, minor verò multiplicatio, minores esse rationes edocet, quia verò augmenti verum est oppositum decrementum, conuerso argumento dicemus, binas quantitates binarum decrementum multiplicantes æqua multiplicatione, æquales ad eas rationes habere, veluti in augmenti diximus multiplicatione, sed cùm in augentibus maior multiplicatio maiorem rationis quantitatem asserat, perspicuum erit in minuentibus maiorẽ decrementi multiplicationem, plus rationis decrescere denominationem, & proinde maius decrementi multiplex, minorem præ se ferre rationem existimemus: maiori tamen expressam numero, vt idem quod de quantitatibus diximus rationibus conferri possit. Diximus enim quantitates per decremẽti earum multiplicationem minui, maiori verò (quanto minores fient) exprimi numero, vt percipiamus totius geometriæ legem in augmento, æquatione, vel quantitatum decremento consistere. Cùm enim æquatio nulla egeat multiplicatione, eò quòd vnitati assimiletur, reliquas geometriæ partes (quæ ab ea hinc inde recedunt) per numerorum auctas multiplicationem, plus ab ea æqualitate recedere fatemur, vt quæ plus in augmentum tendant maiori numero, maiores demonstrentur, quæ verò in decrementum maiori numero, minores effecta noscantur, quod idem rationum quantitatibus conuenire deduximus. Postmodum 7 huius incipit magnitudinum rationes in genere quidẽ, vt quæ maiores, minores, aut certè æquales dicantur, illico quædam particulariora subnectens. A, 16 verò proportionum variationem nouam vltimis diffinitionibus expositam demonstrat, vt ille arguendi species prius diffinitæ, geometrica demonstratione firmentur.

Propositio prima.

Si fuerint quotcunque magnitudines totidem magnitudinum singulę singularum æquemultiplices, quotuplex est vna vnius magnitudo, totuplices erunt omnes omnium.



Sint quotcunque magnitudines A *&* B, *totidem magnitudinum* C *&* D *æquemultiplices, singulæ singularũ: Dico omnes* A *&* B, *omnium* C *&* D *totuplices esse, quotuplex est vna* A *vnius* C, *quoniam* A *est multiplex ipsius* C. *Sumãtur in* A *quotcunque sint magnitudines ipsi* C, *æquales scilicet* A E, E F, F G. *Similiter in* B *ipsi* D *æquales* B M, M L, L I. *quot igitur ipsius* C *erunt in* A, *tot ipsius* D *erunt in* B. *sed binæ magnitudinum* A *&* B *partes binis* C *&* D *sunt æquales, quot autem sunt in* A *ipsius* C, *tot sunt in* A *&* B *ipsarum* C *&* D. *Binæ igitur* A *&* B, *toties repetunt ipsas* C *&* D, *quoties* A *repetit ipsam* C. *Quotuplex est itaque* A *vna vnius* C, *totuplices erũt omnes* A B *simul sumptæ omnium* C D *simul sumptarum, hoc ostendimus exemplum in multiplicantibus augmentum. Idem proinde ostendetur in multiplicantibus decrementum, conuerso quantitatum ordine, multiplicet* C *ipsius* A *decrementum æquæ vt* D *multiplicat ipsius* B *decrementum. Quoties igitur* C *diminuet sui distractione* A, *toties* D *diminuet ipsum* B. *Diminuant per magnitudines* A E, E F, F G, *&* B M, M L, L I, *quoties* C *aufert ad ipsius* A *decrementum scilicet* E F G, *toties* D *aufert ipsius* B *decrementum* M L I. *Toties igitur vtrumque* C D *vtriusque* A B *decrementum auferet scilicet* E M, F L, *&* G I, *quotuplex igitur erit* C *ipsius* A *decrementum, totuplex erunt omnes* C *&* D *simul sumptæ decrementum, omnium* A *&* B *simul sumptarum. Si fuerint itaque quotcunque, &c.*

MONITVM.

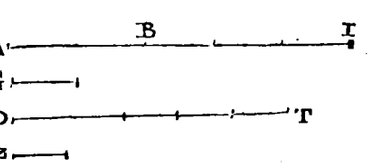
Hanc priorem in æquemultiplicantibus decrementum ostendere voluimus eadem absolui opera, qua in augmentum multiplicantibus prius ostendimus. Cùm enim decrementum multiplicantes numeri, æquè propositorum possint esse multiplices, vt hi qui augmentum multiplicant, sufficiet (vt tædium vitemus) futuris demonstrandis, alterum tantùm æquemultiplicium vel multiplicandi genus

profer

proferamus, augmenti quidē aut decremēti, vt contrariorū eadem intelligatur esse disciplina: haud secus æquemultiplices reperiemus, vtraque seu mixta proposita multiplicatione: ea nāque ex binis seigillatim operantibus cōstat. Nam quæ singulatim ad alias idem habebunt incrementum, idemq; decrementum, sequetur eas simul ad vtrasque eodem incremento ac decremento esse æquemultiplices: hæc succincta animaduersione quodammodo digna putauimus, licet Euclides (sola multiplicatione vsus) demonstrarit alterum tantùm, scilicet incrementum, veluti plus familiare primordia gustantibus. Sed ne in paralogismum decidamus, huius memores sub voce multiplices hinc inde quoduis multiplex suscipiamus, scilicet increscens, decrescens ac mixtum vtroque constans.

Propositio secunda.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, vt tertia quartæ: fuerit autem quinta secundæ æquemultiplex, vt sexta quartę, composita prima cū quinta æquè erit secundæ multiplex, vt tertia cum sexta quartæ.

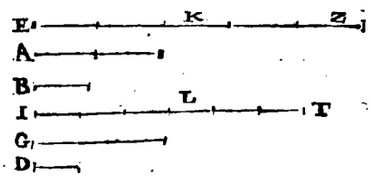


Sit prima A B *secundæ* G *æquemultiplex, vt tertia* D E *quartæ* Z, *sit insuper quinta* B I *eiusdem secundæ* G *æquemultiplex vt sexta* E T *quartæ* Z: *Dico compositam* A I *æquè esse secundæ* G *multiplicem, vt composita* D T *quartæ* Z. *Quoniam æqualis est multiplicatio* A B *ad ipsam* G, *ei quæ* D E *ad* Z. *AEqualibus illis æquales addantur ipsius* B I *ad* G, *&* E T *ad* Z *multiplicationes: igitur omnes* A B *prima &* B I *quinta ad* G *secundam: omnibus* D E E T *tertiæ & sextæ ad* Z *quartam, erunt (per secundam commun. sententiam) æquales multiplicationes. Si igitur prima secundæ æquè fuerit multiplex vt tertia, &c.*

Vel aliàs quoties A B *capit* G, *tot sunt in* D E *ipsius* Z: *sed quot sunt in* B I *ipsius* G, *totidem sunt in* E T *ipsius* Z. *Cùm igitur in* A B B I *tot sint ipsius* G, *quot in* D E E T *ipsius* Z: *prima* A B *& quinta* B I *æquemultiplex erit ipsius* G *secundæ, quotuplex tertia* D E *& sexta* E T *simul sumptæ, quartæ* Z. *Si igitur prima secundæ, &c.*

Propositio tertia.

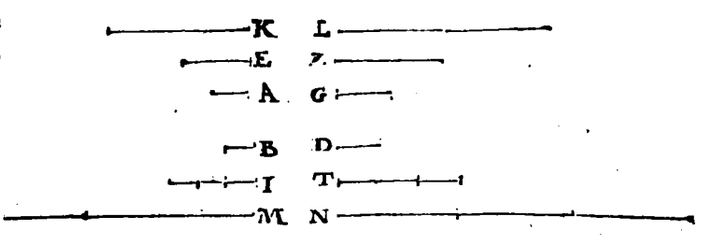
Si primum secundi æquè fuerit multiplex, vt tertium quarti, sumantur autem æquemultiplicia primi & tertij: æque sumptorum vtrumque vtriusque æquè erit multiplex, alterum quidem secundi, alterum autem quarti.



Sit primum A *secundi* B *æquemultiplex, vt tertium* G *quarti* D I: *sumantur autem æquemultiplicia,* E Z *quidem ipsius* A *primi, vt* I T *ipsius* G *tertij: Dico totuplex esse* E Z *secundi* B, *quotuplex* I T *est ipsius* D: *secentur* E Z *quidem in totidem magnitudines æquales ipsi* A (*quæ sint* E K K Z) *in quot secabitur* I T *æquales ipsi* G, *cùm sint æquemultiplicia singula singulorum. Quia verò æquemultiplex est* A *ipsius* B *vt* G *ipsius* D, *æquemultiplex erit* E K *prima secundæ* B, *vt tertia* I L *quartæ* D. *Similiter reliqua* Z K *quinta eiusdē* B, *vt reliqua sexta* L T *quartæ* D, *æquè erit multiplex. Sunt enim æquales ipsæ* E K I L, *rectis* A *&* G, *ipsarum* B *&* D *æquemultiplicibus, etiam si pluries repetant ipsas* A *&* G. *Sequetur itaque (per præcedentem) totam* E K, K Z *compositam à prima & quinta, æquemultiplicē esse ipsius* B *secundæ, vt tertia & sexta* I L, L T *ipsius* D *quartæ: sed ipsa* E Z *&* I T *sunt æque sumpta multiplicia ipsorum* A *primi, &* G *tertij. AEque sumptorum igitur vtrumque, vtriusque scilicet* E Z, *ipsius* B. *vt* I T *ipsius* D *æquemultiplex erit. Si itaque primum secūdi æque fuerit multiplex, vt tertium quarti, sumantur autem, &c.*

Propositio quarta.

Si primum ad secundum eandem habuerit rationem quam tertium ad quartum, AEquemultiplicia primi & tertij ad æquemultiplicia secundi & quarti, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem sumpta ad inuicem



Sit A *primum ad* B *ſecundum vt* G *tertium ad* D *quartum. Sintque ipſorum* A *&* G *æquemultiplicia* E *&* Z, *ipſorum verò* B D *alia quæuis* I *&* T: *Dico eſſe vt* E *ad* I *ſic* Z *ad* T. *Sint rurſus ipſorum* E *&* Z *æquemultiplicia* K *&* L, *ipſorum verò* I *&* T *alia quæuis* M *&* N. *Et cum* E *primum ſecundi* A *ſit æquemultiplex, vt* Z *tertium quarti* G. *Sint autem æquè ſumpta* K *&* L *primi & tertij æquemultiplicia. Ipſa* K *&* L *æquemultiplicia erunt ipſorum* A *&* G, *per præcedentem. Et eadem cauſa* M *&* N *ipſorum* B *&* D. *Sed cùm* A *ad* B *ſit vt* G *ad* D, *ipſæ* K L *ſimul excedent vel deficient ab ipſis* M *&* N, *per conuerſam* 5 *diffinitionis. Si autem ſimul excedant* K *&* L, *vel ſimul deficiant ab ipſis* M *&* N. *Quia ſunt* K *&* L *æquemultiplices ipſarum* E *&* Z, *& aliæ quæuis* M *&* N *ipſarum* I *&* T, *erit (per* 5 *diffinitionem)* E *prima ad* I *ſecundam, vt* Z *tertia ad* T *quartam. Si igitur primum* A *ad ſecundum* B *eam habuerit rationem quam tertium* G *ad quartum* D, *A Equemultiplicia* E *&* Z *primi & tertij, ad* I *&* T *æquemultiplicia ſecundi & quarti, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem ſumpta adinuicem.*

Corollarium.

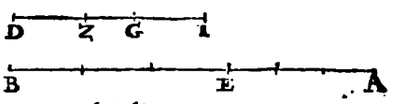
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint &conuerſim proportionales erunt. *Nam ſi* K *&* L *ſimul excedentes vel deficientes ipſis* M N, *efficiant* E *ad* I *ſicut* Z *ad* T, *ſequetur conuerſim, quod* M *&* N *ſimul excedentes vel deficientes ipſis* K *&* L, *efficient* I *ad* E *ſicut* T *ad* Z. *Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & conuerſim proportionales erunt, hoc corollarium exponit* 13 *diffinitionem.*

MONITVM.

Quoniam Campanus diffinitionũ quintæ & octauæ huius neceſſariam veritatem non expoſuit, Theon verò tacuit eius expoſitionem, per quintam hanc (ea non expoſita) demonſtrantes, an demonſtrata ſit, iudicandum relinquunt. Nam quintam prius exponens Campanus diffinitionem, ſimilem 15 *huius theoremati efficit. Quare hoc monitum præferendum arbitrati ſumus, vt huius potiſſimè veritatem, à diffinitionis quintæ conuerſa, à nobis expoſita conſtare præuideamus, id enim cauſæ fuit, cur prolixiores in ea & octaua diffinit. exponendis euaſerimus, vt perfectè hanc & plures ſequentes ipſius quintæ & octauæ obſequio demonſtrandas, certis præliba tis concluderemus.*

Propoſitio quinta.

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, vt ablata ablatæ, Et reliqua reliquę æquè erit multiplex, quotuplex eſt tota totius.



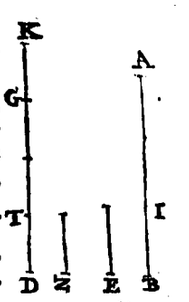
Sit tota A B *totius* G D *æquemultiplex, vt ablata* A E *ablatæ* G Z: *Dico reliquam* E B *reliquæ* Z D *æquè eſſe multiplicem, vt tota* A B *totius* G D, *ponatur* E B *æquemultiplex ipſius* I G, *vt* A E B *ipſius* G Z. *Quoniam ſingulæ* A E E B *ſingularum* G Z I G *ſunt æquemultiplices, vt vna* A E *vnius* G Z, *vel* E B *ipſius* I G, *tota* A B *totius* I Z *æquè erit multiplex, vt vna* A E *vnius* G Z, *per primam huius, ſed (per hypotheſim) quotuplex* A E *eſt ablatæ* G Z, *æquemultiplex eſt tota* A B *totius* G D. *Totæ igitur* A B *æquè erit multiplex ipſius* I Z, *vt ipſius* G D: *æquales igitur ſunt* G D *&* I Z. *Communis auferatur* G Z, *reliquæ* I G *&* Z D *erunt æquales. Quotuplex erit igitur* E B *ipſius* I G, *totuplex erit & ipſius* Z D *ſibi æqualis. Sed quotuplex* E B *ipſius* I G, *totuplex fuit* A E *ipſius* G Z, *&* A B *ipſius* G D, *per hypotheſes. Quotuplex itaque erit tota* A B *totius* G D, *vel ablata* A E *ablatæ* G Z, *totuplex erit reliqua* E B *reliquæ* Z D. *Si igitur magnitudo, &c.*

Propoſitio ſexta.

Si duę magnitudines, duarum magnitudinum æquè fuerint multiplices, & ablatę aliquæ, earundem æquè fuerint multiplices, etiam reliquæ eiſdem vel æquales ſunt, vel æquè ipſarum multiplices.

Sint

Sint duæ magnitudines A B G D, *duarum* E & Z *æquemultiplices, sint insuper ablatæ aliquæ ab ipsis, scilicet* G T A I, *earundem* E & Z *æquemultiplices: Dico reliquas* I B & T D *eisdem* E & Z *æquales, vel ipsarum æquemultiplices esse. Ostendamus primo cum altera reliquarum æqualis erit, & reliquam æqualem esse. Sit reliqua* I B *ipsi* E *æqualis: Dico proinde* T D *ipsi* Z *æquam esse, ponatur* G K *æqualis ipsi* Z. *Quoniam autem æquemultiplex fuit,* A I *ipsius* E & G T *ipsius* Z: *æqualis verò est* I B *ipsi* E, & K G *ipsi* Z, *æquè igitur multiplex erit tota* A B *prima & quinta, ipsius* E *secundæ, &* K T *tertia & sexta ipsius* Z *quartæ, per* 2 *quinti. Quotuplex autem est* A B *ipsius* E, *totuplex est* G D *ipsius* Z, *quotuplex itaque erit* K T *ipsius* Z, *totuplex eiusdem erit &* G D: *æquales igitur sunt* K T & G D, *per* 2 *communem sententiam. Communis auferatur* G T, *reliqua* T D *reliquæ* K G *æqualis erit. Et proinde* K G (*ipsi* Z *æqualis*) *efficit* T D *eidem* Z *æqualem. Reliquæ igitur* I B & T D *eisdem* E & Z *sunt æquales. Similiter ostendemus eas esse æquè multiplices siue augmento, siue decremento. Si ponamus* K G *æquè multiplicem ipsius* Z, *vt* I B *ipsius* E, *sequetur* T D *eiusdem* Z *totuplicem esse, quotuplex fuit* K G *eiusdem: & proinde quotuplex fuit* I B *ipsius* E. *Si itaque duæ magnitudines duarum, &c. Hæc nostram multiplicis expositionem necessariò concludit.*



Propositio septima.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.

Proponantur æquales magnitudines A & B, *ipsis autem alia quædam exponatur* C: *Dico æquales* A & B *eandem habere rationem ad* C: & *contrà,* C *ad singulas earum* A & B, *eandem habere rationem. Cùm enim ratio sit (per* 3 *diffinitionem huius) magnitudinum respectus quoad quantitatem, sed* A & B *magnitudinum æqualium ad eandem* C *magnitudinem, æquales sunt quoad quantitatem respectus: ipsarum igitur* A *vel* B *ad eandem* C *æquales erunt rationes. Erit igitur vt* A *ad* C *sic* B *ad* C. *Et proinde contra (per coroll.* 4. *huius)* C *ad* A *vt* C *ad* B, *æquales itaque ad eandem, eandem, &c.*

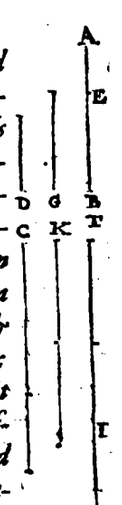
MONITVM.

Hanc poteramus ampliori apparatu per 5 *diffinitionem ostendere. Sed non arbitrati sumus eam quintam esse, vsque adeò huic intelligentiæ vicinam vt fuit tertia, Et insuper breuius & familiare admodum fuit hoc argumentum. Nam Theon & Campanus per primam cõmunem sententiam hanc & præcedentem nituntur demonstrare: quod facilius per secundam absoluetur. Omnis enim æqua multiplicatio æqualium quantitatum, fit per æquales æqualiter additas magnitudines, quas secunda sententia docet æquales producere.*

Propositio octaua.

Inæqualium magnitudinum, maior ad eandem maiorẽ rationem habet quàm minor, & eadem ad minorem maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

Sint inæquales magnitudines A B *maior &* G *minor, sit & alia quædam* D: *Dico* A B *ad* D, *maiorem habere rationem quàm* G *minor ad eandem* D, *& insuper ipsam* D *ad* G *minorem, habere maiorem rationem, quàm ad* A B *maiorem. Auferatur à maiori* A B, *æqualis ipsi* G, *sit q̃* B E, *ipsarum autẽ* B E & G *æquemultiplices sint* T I & K. *Reliquæ item* A E *æquemultiplex ponatur* I Z, *tali quidem multiplicatione qua minor ipsarum* T I I Z *excedat ipsam* D. *Augeatur autem* D *multiplicatione ea, qua quãprimum excedat* K, & *sit* C. *Quoniam minor ipsarum* T I & I Z *excedit ipsam* D, *reliqua* K (*ipsi* T I *æqualis*) *excedet eandem* D. *Ipsa autem* C *excedens quamprimum* K, *minor erit ipsa* T Z. *Sit ergo prima* A B, *secunda* D, *tertia* G, & *quarta eadem* D. *Quia æquemultiplicium* (T Z & K) *primi* A B, & *tertij* G, & *iuxta quamuis multiplicationem* (C *bis sumptũ*) *secundi & quarti* D *bis sumpti, multiplex primi, scilicet* T Z, *excedit* C *multiplex secundi: multiplex verò tertij* K, *non excedit multiplex quarti* C, *aliqua secundi & quarti facta multiplicatione. Sequetur (per* 8 *diffinitionem) primum* A B *maiorem habere rationem ad secundam* D, *quàm tertium* G *ad quartum idem scilicet* D. *Inæqualium igitur* A B & G, *maior* A B *maiorem rationem habet ad eandem* D, *quàm minor* G. *Conuersò verò argumento secunda pars prima conuer-*



ſa fiet nota. Namque poſitis D *prima,* G *ſecunda,* D *rurſus tertia,& A B quarta, patebit* C *æquemultiplex primæ excedere* K *æquemultiplex ſecundæ. Idem verò* C *æquemultiplex tertiæ, non excedere* T Z *multiplex quartæ. Prima igitur* D *ad ſecũdã* G *minorem, maiorem habebit rationem, quàm eadem* D *tertia, ad* A B *quartam & maiorem. Inæqualium itaque magnitudinum, maior ad, &c.*

MONITVM.

Huius demonſtrationis inuentio ab eo oritur, quo minor duarum magnitudinum liberè æquemultiplicetur cum maiore, quouſque horum multiplicium differentia excedat tertiam magnitudinem ſcilicet D, *id quidem, vt fieri poſſit ipſius* D, *talis multiplicatio, quæ ipſum* K *excedens, ab ipſo* T Z *deficiat.*

Propoſitio nona.

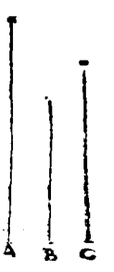
Quę ad eandem, eandem habẽt rationem, ęquales adinuicem ſunt, & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſę ſunt ęquales.

Hæc ex præcedente breuiſſimè deducitur: habeant enim binæ A *&* B *ad eandem* C, *eandem rationem: Dico* A *&* B *eſſe æquales. Si quidem non eſſent, maior ad ipſam* C, *maiorem rationem haberet, quàm minor, per 8 huius, ſed eandem habent rationem: æquales itaque erunt* A *&* B. *Rurſus ad ſecundum: habeat eadem* C *ad ſingulas* A *&* B *eandem rationem: Dico* A *&* B *eſſe æquales. quod ſi inæquales eſſent, eadem* C *ad minorem, maiorem haberet rationem, quod eſſet cõtra hypotheſim. Non ſunt igitur inæquales* A *&* B. *Quæ itaque ad eãdem, eandem habent rationem, æquales, &c.*

Propoſitio decima.

Ad eandem rationem habentium, maiorem rationem habens, illa maior eſt. Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.

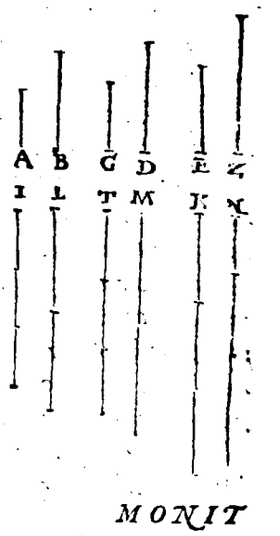
Ad eandem C *rationem habeant* A *quidem maiorem,* B *verò minorem: Dico* A *maiorem eſſe ipſa* B. *Nõ eſt enim minor* A *ipſa* B: *nam ſi minor eſſet, minorem haberet rationem ad ipſam* C, *per 8 huius. Nec quidem æqualis, nam æqualem haberet rationem, per 7 huius, quod eſſet oppoſitum ſuppoſito, cùm* A *maiorem habeat ad* C *quàm* B, *rationem ex hypotheſi. maior igitur erit* A *ipſa* B. *Ad ſecundam verò partem, habeat eadem* C *ad* B *maiorem rationem quàm ad* A: *Dico* B *eſſe minorem ipſa* A. *Si enim credatur maior* B *ipſa* A, *magnitudo* C *ad* B *maiorem, haberet minorem rationem (per 8 huius) quàm ad* A, *contra hypotheſim. Si verò æqualis credatur* B *ipſi* A, *eadem* C *ad* B *eãdẽ haberet rationẽ quàm ad* A, *per 7 huius: quod opponeretur ſimiliter hypotheſi, nam per eam* C, *habet ad* B *maiorem, quàm ad* A *rationem. Non itaque maior aut æqualis eſt: igitur* B *minor eſt ipſa* A. *Ad eandem itaque rationem habentium, &c.*



Propoſitio vndecima.

Quæ eidem eædem ſunt rationes, & adinuicem ſunt eædem.

Supponantur rationes A *ad* B *&* G *ad* D *eſſe eadem rationi* E *ad* Z: *Dico rationes* A *ad* B *&* G *ad* D *eſſe eaſdem adinuicem. Dentur ſingulis antecedentibus* A. G E *æquemultiplicia* I T K. *Singulis verò conſequentibus* B D Z *alia quæuis æquemultiplicia* L M N. *Quoniam* A *eſt ad* B *in eadem ratione qua* E *ad* Z, *ſed primæ & tertiæ* A *&* E *ſumpta ſunt æquemultiplicia* I *&* K, *ſecundæ verò & quartæ* B *&* Z *alia quæuis* L *&* N. *Sequetur per conuerſam quintæ diffinitionis. Si* I *ſit maius ipſo* L, *&* K *eſſe maius ipſo* N, *ſi æquale, æquale, ſi verò minus, minus. Similiter cùm ſit* G *ad* D *ſicut* B *ad* Z, *eodem argumento ſi* T *excedat* M, *&* K *excedet* N. *Si æquale, æquale, ſi autem minus minus, per eandem conuerſam. Si igitur* I *excedente* L K *excedat* N, *ipſo verò* K *excedente* N T *excedat* M *à primo ad vltimam liquet* I *excedente* L, T *excedere* M, *ſi æquale, æquale, etſi minus minus. Eorum itaque multiplicium ſimplices* A *ad* B *&* G *ad* D *in eadem erunt ratione, per 5 diffinitionem huius. Quæ itaque eidem eædem ſunt rationes & adinuicem ſunt eædem.*



MONIT

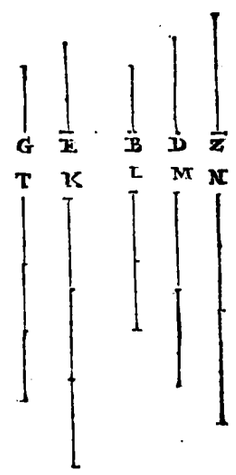
MONITVM.

Hæc & ferè omnes præcedentes huius quinti, eousque per se notæ existunt, vt potius principia quàm demonstranda theoremata dici debeant. Qua autem de causa Euclides eas difficiliori demonstratione petat, mea est sententia. Quòd hæc theoremata generali quadam maiestate in omnes geometricas quantitates commensurabiles scilicet & incommensurabiles imperant, quarum quidem habitudo, nullo modo potest exhiberi patula: per quantitatis earum cognitionem, vt fieret si omnes tantùm commensurabiles essent. Ac insuper quia multiplicationis discretio confusas geometriæ quantitates elucidat.

Propositio duodecima.

Si fuerint quotcunque magnitudines proportionem habentes, erit sicut vna antecedentium ad vnam consequentium, sic omnes antecedentes ad omnes consequentes.

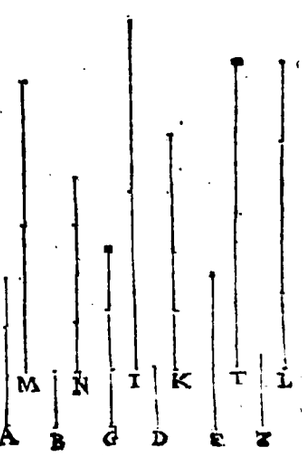
Sint quotcunque magnitudines proportionem habentes, scilicet A *ad* B *vt* G *ad* D, *vtque* E *ad* Z: *Dico esse sicut vna antecedentium* A *ad vnam consequentium* B, *sic omnes* A G E *antecedentes, ad omnes* B D Z *consequentes, sumantur ipsarum antecedentium* A G E *æquemultiplicia* I T K. *Reliquarum verò consequentium* B D Z *alia quæuis æquemultiplicia* L M N. *Quoniam quotuplex est* I *ipsius* A, *tam multiplices sunt* I T K *simul sumptæ ipsarum* A G E *simul sumptarum, per* I *huius. Similiter quotuplex erit* L *ipsius* B, *totuplices erunt omnes* L M N *omnium* B D Z, *simul sumptarum, per eandem. Quatuor igitur ordine disponãtur magnitudines, scilicet* A B A G E B D Z. *Quia verò singulæ antecedẽtes* A G E, *ad singulas* B D Z *consequentes, eandem habent rationem, sequetur (per conuersionem 5 diffinitionis)* I *multiplici primæ* A *excedente* L *multiplicem secundæ* B, *ipsam* T *excedere* M, *&* K, *ipsam* N. *Igitur si* I *multiplex ipsius* A *excedat* L *multiplicem ipsius* B, *omnes* I T K *excedẽt omnes* L M N, *si æquales æquales, si minores minores erũt. Ipsa igitur quatuor* A *ad* B *vt* A G E *ad* B D Z *proportionales erunt, per 5 diffinitionem huius. Si fuerint itaque quotcunque magnitudines, &c.*



Propositio decimatertia.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem & tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem rationem habeat, quàm quinta ad sextam, prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit quàm quinta ad sextam.

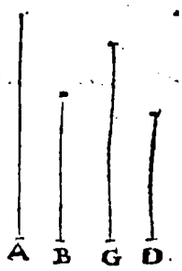
Habeat prima A *ad secundam* B *eam rationem quam tertia* G *ad quartam* D, *tertia verò* G *ad quartam* D *maiorem rationem habeat quàm quinta* E *ad sextam* Z: *Dico primam* A *ad secũdam* B *maiorem rationem habere, quàm quinta* E *ad sextam* Z. *Assumantur antecedentium* A G E *æquemultiplicia* M I T, *consequentium verò* B D Z, *sumantur alia quæuis æquemultiplicia* N K L: *quoniam* A *&* B *in eadẽ ratione sunt ei, quæ* G *ad* D: *sequetur (per conuersionem quintæ diffinitionis)* M *excedẽte* N *&* I, *excedere* K, *quia verò* G *ad* D *maiorẽ rationem habet quàm* E *ad* Z, *aliqua fiet multiplicatio qua* I *excedente* K, T *non excedet* L, *per conuersionem octauæ diffinitionis. Sequetur itaque* M *excedente* N, *aliqua multiplicatione facta,* T *nõ excedere* L, *& ipsorum* A *&* E *æquemultiplices sunt* M *&* T. *Ipsorum verò* B *&* Z *aliæ quæuis æquemultiplices sunt* N *&* L. *Igitur* A *ad* B *maiorem rationem habebit quam* E *quinta ad* Z *sextam, per octauam diffinitionem. Si itaque prima ad secundam eandem habuerit, &c.*



Propoſitio decimaquarta.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam, prima verò tertia maior fuerit, & ſecunda quarta maior erit, etſi æqualis æqualis, etſi minor, minor.

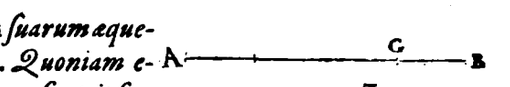
Prima A *ad ſecundam* B *eam habeat quam* G *ad* D *rationem, ſit q̃* A *maior ipſa* G: *Dico* B *eſſe maiorem ipſa* D, *& ſi æqualis æqualẽ, & ſi minor minorem. Quoniam* A *eſt maior tertia* G, *ipſa ad* B *maiorem rationem habet quàm* G (*per* 8 *huius*) *ſed eſt vt* A *ad* B *ſic* G *ad* D: *igitur* G *ad* D *maiorem habet quàm* G *ad* B. *Maior eſt igitur* B *ipſa* D, *per ſecundam partem decimæ huius. haud ſecus patebit ſi ſupponatur* A *æqualis ipſi* G, *ſecundam* B *æquari quartæ* D, *per ſeptimam, & ſecundam partem nonæ huius, ſi verò* A *ſupponatur minor* G, *&* B *ipſa* D *minor oſtendetur, per octauam, & ſecundam partem decimæ, vt prima parte. Si itaque prima ad ſecundam, &c.*



Propoſitio decimaquinta.

Partes eodem modo multiplicium, eandem rationem habent ſumptæ adinuicem.

Sint G B *&* E Z *partes magnitudinum* A B *&* D E *ſuarum æquemultiplicium: Dico eſſe ſicut* A B *ad* D E, *ſic* G B *ad* E Z. *Quoniam enim quot ſunt in* A B *magnitudines* G B, *totidem in* D E *ſunt ipſius* Z E, *ſingulæ ad ſingulas eandem rationem habentes, cùm ſint æquales. Sicut igitur* B G *vna antecedentium ad* E Z *vnam conſequentium, ſic* (*per* 12 *huius*) *erunt* A B *omnes antecedentes ad* D E *omnes conſequentes. Similiter oſtendemus ſi ipſarum* A B, D E *multiplicia decrementa ſint* G B *&* Z E, *conuerſa ratione, per coroll.* 4. *huius, cùm ab ipſis* A B *&* D E *quælibet ablatæ, æquales ſint ipſis* G B, Z E. *Eandem habebunt igitur rationem,* A B *ad* D E, *vt* G B *ad* Z E (*per eandem duodecimam huius.*) *Partes itaque eodem modo multiplicium, &c.*



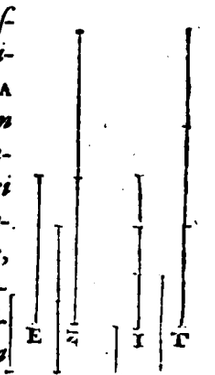
MONITVM.

Hoc theoremate oſtendit Euclides amplam, quam expoſuimus multiplicãdi legem, cùm dicit partes æquemultiplicium: nam ſi tantùm eas partes quæ totum præcisè metiuntur intelligeret, per primam diffinitionem, ab hac geometriæ lege, potiſſimam rationum multitudinem abſtraheret, nempe quatuor maioris inæqualitatis ſpecies, ſcilicet ſuperparticularem, ſuperpartientem, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartientem. Nos igitur æquemultiplices qualibet rationis ſpecie copulatas, huic adſcribemus theoremati, vt earum ſimplices eandem eis habeant rationem, non autem multiplices tantùm quas ſimplices metiuntur ſua repetitione præcisè, vt plures voluerunt.

Propoſitio decimaſexta.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

Sint proportionales (ſiue in eadem ratione) A *ad* B *qua* G *ad* D: *Dico eſſe viciſſim (hoc eſt permutata ratione)* A *ad* G *vt* B *ad* D. *Sint ipſarum* A *&* B *æquemultiplices* E *&* Z: *Ipſarũ verò* G *&* D *aliæ quæuis æquemultiplices* I *&* T. *Cùm autem ſit* A *ad* B *vt* G *ad* D, *erit* (*per præcedentem*) E *ad* Z *ſicut* I *ad* T (*æquemultiplices enim ſunt*) *quia verò proportionales ſunt. Si* E *maior fuerit ipſa* I, *&* Z *ipſa* T (*per* 14 *huius*) *maior erit, ſi minor minor, & ſi æqualis æqualis: variato igitur ordine, ſit* A *prima,* G *ſecunda,* B *tertia, &* D *quarta. Quoniam igitur* E *multiplici primæ excedente* I *multiplex ſecundæ, ſequitur* Z *multiplex tertiæ, excedere* T *multiplex quartæ, æquali verò exiſtente æquale, minori autem minus. Simplices* A *prima ad* G *ſecundam erunt, vt* B *tertia ad* D *quartam. Sunt enim primæ* A *&* tertiæ B *æquemultiplicia, ſecundæ verò* G *&* quartæ D *alia quæuis æquemultiplicia ſumpta, per quintam diffinitionem huius. Si quatuor itaque, &c.*

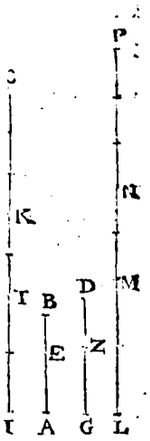


Prop

Propoſitio decimaſeptima.

Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, diuiſę quoque proportionales erunt.

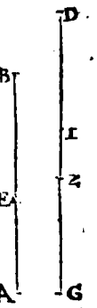
Sint compoſitæ magnitudines ſcilicet A B *ex* A E E B, *&* D G *ex* G Z Z D. *Sitque ſicut compoſita* A B *ad* B E, *ſic compoſita* G D *ad* D Z: *Dico diuiſas eſſe* A E *ad* E B *vt* G Z *ad* Z D. *Sumantur æquemultiplices ipſarum* A E E B, *ſintque* I T T K. *Ipſarum verò* G Z Z D, *ſint* L M M N, *ſingulæ ſingularum. Per primam igitur erunt omnes* I K *&* L N *omnium* A B *&* G D *æquemultiplices, rurſus quæuis aliæ æquemultiplices ipſarum* E B *&* Z D *ſumantur* K C *&* N P. *Cùm enim* T K *prima ſit ſecundæ* E B *æquemultiplex vt tertia* M N *quartæ* Z D, *quinta verò* K C *ſit eiuſdem* E B *ſecundæ, vt ſexta* N P, *quartæ* Z D: *æquemultiplex erit tota* T C *eiuſdem* E B, *vt tota* M P *ipſius* D Z, *per* 2 *huius, eſt autem* A B *ad* B E *vt* G D *ad* D Z. *Si igitur* I K *multiplex primæ* A B *excedat, æquetur, vel deficiat* T C *multiplici ſecundæ* E B, *&* L N *tertiæ multiplex, excedet &c.* N P *multiplicem quartæ* D Z, *per conuerſam* 5 *diffinit. huius. Quare ablatis cõmunibus* T K *&* M N, *ſequetur* I T *multiplici ipſius* A E *excedente* K C *multiplicẽ* E B, *&* L M *multiplicẽ* G Z *excedere, æquari, vel deficere ipſi* N P *multiplici ipſius* Z D. *Erunt igitur ſimplices* A E *ad* E B *vt* G Z *ad* Z D, *per quintam diffinitionem huius. Si itaque compoſitæ magnitudines, &c.*



Propoſitio decimaoctaua.

Si diuiſę magnitudines proportionales fuerint, compoſitę quoque proportionales erunt.

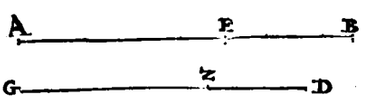
Sint diuiſæ magnitudines A E *ad* E B *ſicut* G Z *ad* Z D: *Dico eas compoſitas* A B *ad* B E *eſſe vt* G D *ad* D Z. *Quod ſi opponatur, erit vt* A B *ad* B E *ſic* G D *ad aliquam maiorem vel minorem ipſa* D Z, *ſit prius ad minorem quæ ſit* D I. *Quoniam enim compoſitæ* A B *ad* B E *ſunt vt* G D *ad* D I, *erunt (per præcedentem) diuiſæ,* A E *ad* E B *ſicut* G I *ad* I D, *ſed ſicut* A E *ad* E B *ſic ſupponitur* G Z *ad* Z D. *erit igitur ſicut* G I *ad* I D *ſic* G Z *ad* Z D. *Sequetur itaque (per* 14 *huius) ſi prima* G I *tertia* G Z *maior fuerit, &ſecunda* I D *quarta* D Z *maior erit, ſed & minor ſupponitur, quod eſt abſurdum. Non igitur habet* G D *ad minorem ipſa* Z D, *rationem quam* A B *ad* B E, *Similiter oſtendetur quod nec ad maiorem, nam* Z D *inueniretur maior alia maiore ſuppoſita, quod fieri non poſſet: igitur* A B *ad* B E *rationem habet quã* G D *ad* D Z. *Si itaque diuiſæ magnitudines proportionales, &c.*



Propoſitio decimanona.

Si fuerit ſicut totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum & reliquum ad reliquum, erit ſicut totum ad totum.

Sit tota A B *ad totam* G D *vt ablata* A E *ad ablatam* G Z, *erit vicißim (per* 16 *huius)* B A *ad* A E *vt* D G *ad* G Z, *ſed ſi coniunctæ* B A *ad* A E *fuerint vt* D G *ad* G Z, *erunt (per* 17 *huius) diuiſim* B E *ad* E A *vt* D Z *ad* Z G. *Rurſus igitur erit vicißim, vt reliqua* B E *ad reliquam* D Z, *ſic ablata* E A *ad ablatam* Z G. *Et proinde (per* 11 *huius) vt tota* A B *ad totã* G D. *Si itaque fuerit ſicut totum ad totum, ſic ablatum, &c.*

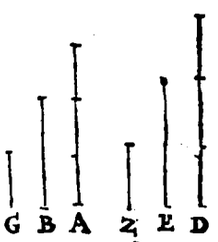


Corollarium.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & rationis cõuerſione, proportionales erunt. *Cùm enim ſit vt* A B *ad* G D *ſic* B E *ad* D Z, *erit vicißim vt* A B *ad* B E, *ſic* G D *ad* D Z: *ſed cũ fuerit antecedens* A B *ad conſequens* A E, *ſicut antecedens* G D *ad conſequens* G Z, *& conuerſione rationis erit antecedens* A B *ad* E B *exceſſum quo excedit ſuum conſequens* A E, *ſicut antecedens* G D *ad exceſſum* Z D *quo excedit ſuum conſequens* G Z, *per* 16. *diffinitionem huius.*

Propoſitio vigeſima.

Si fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ eiſdem æquales numero, binæ ſumptę in eadem ratione, æqua autem ratione in primis prima vltima maior fuerit, & in ſecundis magnitudinibus prima vltima maior erit, & ſi æqualis æqualis, & ſi minor, minor.



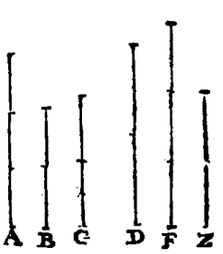
Sint quotcunque magnitudines A B G, *totidémque* D E Z, *ita binæ in eadem ratione, vt ſcilicet* A *ad* B *ſic* D *ad* E, *vtq;* B *ad* G *ſic* E *ad* Z, *ſit autem* A *maior quã* G: *Dico* D *maiorem eſſe ipſa* Z, *ſi minor minorem, ſi verò æqualis æqualem. Cùm autem (per hypotheſim)* A *ſit maior ipſa* G, *erit (per 8 huius) maior ratio* A *ad* B *quàm* G *ad eandem* B, *ſed cùm ſit vt* B *ad* G *ſic* E *ad* Z, *erit conuertendo (per corol. 4 huius) vt* G *ad* B *ſic* Z *ad* E. *Atqui rationes* A *ad* B *&* D *ad* E *cùm ſint eædem, maiores igitur ſunt quàm* G *ad* B *&* Z *ad* E, *ſingulæ ſingulis. ad eandem igitur* E *rationem habentium* D *&* Z, *maiorem rationem habens* D, *ipſa maior eſt (per 10 huius) reliqua* Z. *Si itaque fuerint quotcunque magnitudines, &c.*

MONITVM.

Huic liberam facultatem apponentes, diximus præter Euclidem (quotcunque) non tantùm tres magnitudines: nam ſi quotuis aliæ ponãtur inter A *&* G *cùm totidem inter* D *&* Z, *ſemper* A *maior, maiorem ad ſingulas earum habebit rationem quàm* G *minor. Quia verò* D *&* Z *ad ſingulas reliquarum inter eas poſitarum, eãdem ex hypotheſi habent rationem, & per allegata* D *ſimiliter ipſa* Z *maior erit, & ſi* A *ipſi* G *æqualis, &* D *ipſi* Z *æqualis, & ſi minor, minor. Præterea quotcũque fuerint magnitudines, ex tribus ſemper fiet demonſtratio.*

Propoſitio vigeſimaprima.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ totidem binę ſumptę in eadem ratione, fuerit autem perturbata earum proportio, æqua ratione verò prima, tertia maior fuerit, & quarta ſexta maior erit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor.



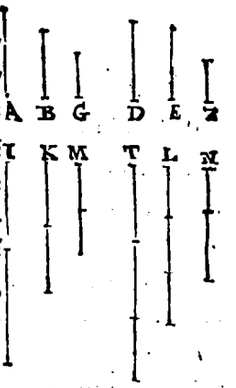
Sint tres magnitudines A B G *aliæ q; totidem ſint* D E Z, *binæ autem in eadem ratione perturbatim conſtituantur, vt ſcilicet* A *ad* B *ſic* E *ad* Z, *vtq; (per 19 diffinitionem huius)* B *ad* G *ſic* D *ad* E: *Dico ſi* A *maior fuerit tertia* G, *& quarta* D *maior erit vltima* Z, *& ſi minor, minor, & ſi æqualis, æqualis. Quoniam eſt* B *ad* G *vt* D *ad* E, *erit conuerſum (per coroll. 4. huius)* G *ad* B *vt* E *ad* D. *Sed cùm* G *minor ſit ipſa* A, *ea habet ad* B *minorem rationem quàm* A *ad eandem* B, *per 8 huius, quare ratio* E *ad* D *(quæ eſt eadem ipſi* G *ad* B*) erit minor ratione eiuſdem* E *ad* Z, *quæ eſt eadem rationi* A *ad* B: *erit igitur (per ſecundam partem decimæ huius)* D *quarta maior ipſa* Z *ſexta, nempe* A *fuit maior tertia* G, *ſi autem* A *fuerit ipſi* G *æqualis, eadem* B *ad* A *&* *ad* G *eandem habebit rationem, per 7 huius, ſimiliter* E *ad* D *&* Z, *ſunt enim eædem rationes, ſi autem minor ſit* A *ipſa* G, *ſimiliter oſtendetur (per 10 huius)* D *eſſe minor ipſa* Z. *Si fuerint igitur tres magnitudines, & aliæ totidem, &c.*

Propoſitio vigeſimaſecunda.

Si fuerint quotlibet magnitudines, & alię eiſdem ęquales numéro, binę ſumptę in eadem ratione, fuerit autem earum ordinata proportio, & ęqua ratione proportionales erunt.

Sint

Sint quotuis magnitudines A B G, *aliæque totidem ſint* D E Z, *binæ ſumptæ & ordinatim in eadem ratione, vt ſcilicet* A *ad* B *ſic* D *ad* E, *vtque* B *ad* G *ſic* E *ad* Z, *& ſic conſequenter quotcunque fuerint: Dico eſſe, æqua ratione primam* A *ad vltimã* G, *ſicut primam* D *ad vltimam* Z: *Sumãtur ipſarum* A B G *æquemultiplicia* I K M: *ipſarũ verò* D E Z *alia quæuis quæ multiplicia* T L N. *Cùm enim ſimplicia ſint in eadem ratione* A *ad* B *vt* D *ad* E *&* B *ad* G *vt* E *ad* Z: *erunt (per* 15 *huius) eorum multiplicia* I *ad* K *&* K *ad* M *vt* T *ad* L *&* L *ad* N. *Quotuis igitur magnitudines* I K M *& aliæ totidem* T L N *binæ ſumuntur in eadem ratione: quarũ (per* 20. *huius) prima vltimam in vtroque ordine ſimul excedunt, æquantur, vel ſimul deficiunt. Earum igitur ſimplices (per* 5. *diffinitionem huius)* A *ad* G *erunt vt* D *ad* Z. *Si itaque fuerint quotlibet, &c.*

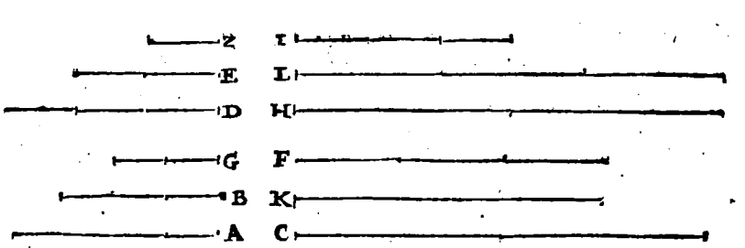


MONITVM.

Appoſuimus huic ordinatam proportionem, non ad cogenda theorematis verba huic ordinatæ proportioni, nam ex ſe idem ſonant, ſupponuntur etenim ſimiles rationes, eodem ſitu in vtroque magnitudinum ordine, haberi. Sed vt æquam rationem 17. *diffinitione expoſitam, in ordinata proportione, hoc theoremate intelligi, vt in perturbata proximè ſuccedenti, oſtenſuri ſumus, locum obtinere percipiamus. Fuit autem haud ſecus liberum* 20. *propoſitioni eam ordinatam accommodare, aut non: nam ea communi acceptione deordinata, intelligenda eſt, veluti hæc, vt præfatis* 20. *&* 21. *oſtenderemus, æquam rationem ſimul maiores, minores, vel æquas efficere magnitudines, in ordinata vt perturbata proportione: poſtmodum* 22. *&* 23. *eandem æquam rationem in vtraque ordinata, & perturbata proportionales efficere extremas, oſtenſuri, decimam octauam diffinitionem elucidantes.*

Propoſitio vigeſima tertia.

Si fuerint tres magnitudines, & alię totidem, binę ſumptę in eadem ratione, fuerit autẽ perturbata earum proportio, & ęqua ratione proportionales erunt.



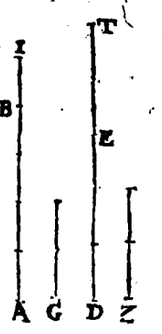
Sunto tres magnitudines A B G, *tres item aliæ* D E Z, *in proportione perturbata,* A *quidem ad* B *vt* E *ad* Z, B *verò ad* G *vt* D *ad* E *diſpoſitæ: Dico eſſe æqua ratione vt* A *ad* G *ſic* D *ad* Z *proportionales: Sint ipſarum* A B D *æquemultiplices* C K H, *reliquarum verò* G E Z *aliæ quæuis æquemultiplices* F L I, *cùm ſit vt* A *ad* B, *ſic* E *ad* Z, *erit (per* 15. *huius) vt* C *ad* K, *ſic* L *ad* I: *quia verò eſt* B *ad* G *vt* D *ad* E, *eadem ratio: primi & tertij* B *&* D *æquemultiplicia* K *&* H, *ad ſecundi & quarti* G *&* E *æquemultiplicia* F *&* L (*per quartam huius*) *eandem habebunt rationem. Tres itaque ſunt magnitudines* C K F, *& totidem aliæ* H L I *in perturbata ratione proportionales, vt ſcilicet* C *ad* K *ſic* L *ad* I, *vtque* K *ad* F *ſic* H *ad* L. *Si igitur* C *excedit* F, H *excedet* I, *æquabitur, vel deficiet, per* 21 *huius. Id propterea earum ſimplices* A *ad* G *erunt (per* 5 *diffinitionem huius) vt* D *ad* Z *æqua ratione proportionales. Si fuerint itaque tres magnitudines, & aliæ totidem binæ ſumptæ, &c.*

MONITVM.

Quia demonſtrauit hanc Theon permutatæ rationis obſequio, potiorem & compendioſam elegimus demonſtrandi viam, vt poſſint (ſi libeat) ſumi tres magnitudines vnius generis, tres verò alterius generis quoad quantitatem, quod non patitur permutata ratio. Hac etenim arte libera cedet facultas huic theoremati, æquè magnitudines diuerſorum, ac eiuſdem generis complectendi.

Propositio vigesimaquarta.

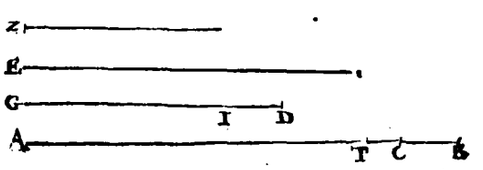
Si primum ad secundum eandem habuerit rationem quam tertium ad quartum, habuerit autem quintum ad secundum, eam rationem quam sextum ad quartum, etiam primum & quintum composita, ad secundum, eandem habebunt rationem, quam tertium, & sextum, ad quartum.



Sit primum A B *ad secundum* G *vt tertium* E D *ad quartum* Z, *sit etiam* B I *quintum ad* G *secundum, vt* E T *sextum ad* Z *quartum: Dico composita* A B B I *ita esse ad* G *secundum, vt* D E E T *ad* Z *quartum. Quoniam est* B I *ad* G *vt* E T *ad* Z, *erit (per corroll. 4. huius) vt* G *ad* B I *sic contra* Z *ad* E T. *Cùm autem sint tres magnitudines* A B G *&* B I, *& tres item aliæ* D E Z *&* E T, *binæ in eadem ordinata ratione, scilicet* A B *ad* G *vt* D E *ad* Z, *&* G *ad* B I *vt* Z *ad* E T, *æqua igitur ratione erunt* A B *ad* B I *vt* D E *ad* E T, *per 22 huius. Et quoniam diuisa* A B *ad* B I *sunt vt* D E *ad* E T, *coniuncta (per 18 huius) erunt vt* A I *ad* I B *sic* D T *ad* T E. *Rursus æqua ratione tres* A I I B G, *& tres aliæ* D T T E Z, *sunt ordinatim in eadem ratione binæ sumptæ. Æqua igitur ratione erunt (per 22 huius) vt* A B I *composita primum & quintum ad* G *secundum, sic* D E T *composita tertium & sextum ad* Z *quartum. Si itaque primum ad secundum eandem, &c.*

Propositio vigesimaquinta.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima earum reliquis maiores erunt.



Sint quator magnitudines proportionales A B *ad* G D, *vt* E *ad* Z, *quarum maxima sit* A B, *minima verò* Z: *Dico* A B *&* Z *reliquis* G *&* E *maiores esse. A magnitudine enim* A B *æqualis ipsi* E *abscindatur* A T, *ab ipsa verò* G D *æqualis ipsi* Z *tollatur* G I. *Cùm autẽ sit* A B *ad* G D, *vt* E *ad* Z, *ipsis verò* E Z *æquales positæ sint* A T *&* G I, *erit vt* A B, *ad* G D: *sic* A T, *ad* G I. *Reliquum igitur* T B *ad reliquum* I D *erit (per 19 huius) vt totũ* A B *ad* G D. *Maius igitur erit* T B, *ipso* I D, *per 14 huius. A maiori ergo* T B *minori* D I *æquum auferatur* B C, *quod quidem ablatum ipsi* Z *copuletur, quia* G I *ipsi* Z, I D *verò ipsi* B C *æquales sunt, tota* Z *&* B C *ipsi* G D *æqualis erit. Sed* A T *ipsi* E *posita est æqualis, binæ igitur* A T *&* Z *cùm* B C *ipsis* E *&* G D *æquales erunt. Superest autem ipsi* A C *magnitudo* C T, *binæ igitur* A B *maxima &* Z *minima, reliquis* E *&* G D *maiores erũt residuæ* C T, *Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c.*

MONITVM.

Vbi exposuit Euclides simplicium & cõtinuarum magnitudinum rationes, per æquemultiplicia: earum rationum, interdum sex varias proportiones, quas duodecima & quinque eam sequentibus diffinitionibus diffiniuit, propositionibus ac corollariis demonstrauit. Hæ etenim sex species eam quæ 11. *diffinita est sequũtur necessariò ponitam. Nã si quatuor magnitudines sint similis rationis antecedentia antecedentibus & consequentia consequentibus, sequetur eas esse proportionales, permutata ratione, per 16 conuersa per corollarium 4 huius, composita per 18, diuisa per 17 conuersione rationis per corollariũ 19. Æqua verò (cuius sunt duæ species, ordinata scilicet & perturbata) per 22 & 23 huius. Quæquidẽ sex species sunt modi arguendi, ex rationũ similitudine concluſi, & demõstrationibus propalati. Decem verò priores diffinitiones, nulla egent demonstratione, sed ampliori expositione, vt eas diffinitis cõuerti cernamus. Nusquã tamen in demonstrãdis theorematis alia acceptione qua diffiniuimus eas sumentes, vt extet inuiolata methodus. Campanus autem nouem ex Euclide sumptas, præter expositas à Theone apponit propositiones, quas data opera præteriimus. Per octo etenim priores ostendit maiores rationes his omnibus argumẽtis sequi maiores, sicut ostẽdimus similes sequi similes rationes, quod nulla eget demõstratione. Si enim similis ratio similem concludat, maior (sibi similem concludens) maiorem proposita concludet, & proinde in conuersis maior minorem concludens, ostendit similiter minorem, concludere maiorem. Haud dissimiliter transfert Campanus,*

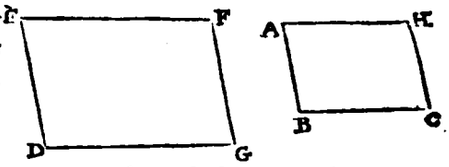
primæ

primæ propoſitionis huius æquimultiplicationẽ, in maiorem multiplicationem ſua 34 ſeu vltima, ſupponens priores rationes maiores ſubſequentibus, vt cõcludat omnium antecedentium ſimul ſumptorum ad conſequentia ſimul ſumpta, maiorem rationem haberi aliqua poſteriorũ rationum, quæ cùm facile ex demonſtratis percipiantur, atque ad ſequentia demonſtranda nulla neceſsitate exquirãtur potius Campani quàm Euclidis fuiſſe arbitramur inuenta: landãda quidem, ſed non neceſſaria: quæ per ea quæ diximus, ſuper octaua huius diffinitione, facile colligentur. ſcilicet antecedentium augmentum rationes augere, decrementum verò minuere. E contra conſequentium augmentum rationes minuere, decrementum verò augere. Cùm igitur quæ ad ſequentia demonſtranda requirantur, tantum exprimere ab Euclide ſumpta decreuerimus, reliqua ſaltem non neceſſaria ſtudioſis pro ſuis quiſque viribus adaperienda relinquimus.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber sextus.

Diffinitio prima.

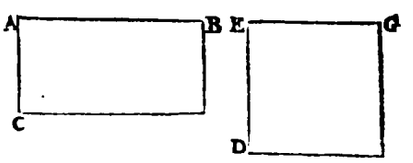
SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ singulos angulos singulis æquales habent, & quæ circa angulos æquales sunt, latera proportionalia.



Similes figuras rectilineas esse dicit, cùm singuli anguli vnius, singulis angulis alterius sunt æquales, vt si figuras A B C *&* E D G *similes esse dicat cùm anguli scilicet* A *ipsi* E, B *verò ipsi* D, C *autem ipsi* G, *&* H *ipsi* F *erunt æquales, & insuper quando latera æqualibus angulis terminata erunt proportionalia, vt* A B *ad* E D, *sit sicut* B C *ad* D G, *& sic in quibusuis rectilineis, dum tamẽ singuli anguli sint singulis æquales, & latera proportionalia, insuper quantumuis inæquales extiterint figuræ. Tamen similes erunt quemadmodũ vidimus 35 36 & 42 primi, dissimiles sæpius æquales fieri. Similiter autem positæ sunt figuræ ad datam rectã quæ datam rectam similis rationis cuilibet alterius datæ habent, aut quæ circum æquales angulos latera parallela, aut in rectum constituunt, quod præferendum fuit ad sequentium vsus intelligẽtiam. Non tamen pro diffinitione traditum cùm cuiuis satis se offerat intelligendum, nulla principij authoritate decoratum.*

Diffinitio secunda.

Reciprocę figurę sunt, quando vtriusquę figurarum antecedentes in alterius earum consequentes, mutuò proportionales fuerint.



Hæc præcedentem insequitur quoad proportionem laterũ, & æqualitatem angulorum, sed prior vtrosque proportionis antecedentes in vna, & consequentes in alia disposuit figura. Hæc autem vni figuræ antecedentẽ vnius rationis, cõsequentem verò alterius apposuit. Reliquæ demum figuræ, reliquos attribuens terminos, vt A B *ad* E G, *sicut* E D *ad* A C, *ea proportionis dispositio dicitur reciproca, siue reciprocæ figuræ ea proportione dispositæ.*

MONITVM.

Huius diffinitionis texturam alterare cogimur, longe etenim à vero eam descripsit Zambertus dicens, reciprocas figuras quarum termini rationales (cuius vice græca vox rationes scribit) fuerint, nec quid sit rationalem esse dixit, nec insuper rationales esse sufficeret, sed proportionales, ea quidem proportione, qua eius proportionis rationes suos antecedentes & consequentes mutuo siue alternatim disponant, vt diximus.

Diffinitio tertia.

Extrema & media ratione recta linea diuidi dicitur, quando fuerit sicut tota ad maius segmentum, sic maius ad minus.

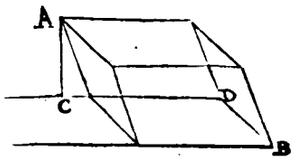
Hanc diffinitionem absoluit 11. *propositio secũdi, alio quidem sectionis prætextu ibi demonstrato: extrema autem & media eo dicitur, quòd trium propositarum maior in se binas, extremam ac mediam, contineat quantitates, vel maior binis reliquis æquetur.*

Diffinitio quarta.

Altitudo vniuscuiusque figuræ, est à vertice ad basim perpendicularis acta.

Quod

Quod enim hic vocat figuræ altitudinem, vocauit 35 primi, & ſex eam ſequentibus, in eiſdem eſſe parallelis rectilineas figuras. Nunc autem non tantum planas figuras, ſed & ſolidas intelligemus altitudinem ſuam metiri, perpendicularem à vertice in baſim demiſſam, quæ ſemper æqualis erit, diſtantiæ parallelarum, planam vel ſolidam figuram comprehendentium. Quia verò non ſemper à vertice ad baſim perpendicularis agi poteſt, ſequemur parallelarum doctrinam, ſcilicet extendentes baſim vndique quæ perpendicularem poſſit demiſſam recipere, vt in ſolido A B, *vel in plano* A D, *perpẽdicularis* A C *in baſim* D C *extenſam cadẽs, altitudo eius figuræ dicetur.*



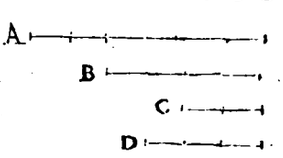
Diffinitio quinta.

Ratio ex rationibus conſtare dicitur, quando ràtionum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

Expoſuimus tertia quinti diffinitione quid ſit ratio, ibidem enim eam eſſe reperimus, veram quantitatem habitudinis duarum magnitudinum per multiplicationem, qua antecedens multiplicat conſequens, expreſſam. Cùm igitur rationis quantitas à multiplicatione pendeat, merito voluit Geometer rationes ſimul iungi multiplicatione, vt ex his compoſita prodeat; quæ compoſita ex ſimul coniunctis conſtare dicetur: ſic rationes ſeſquialteram, & ſeſquitertiam dicemus cõponere per multiplicationem ſuarum denominationum, rationem duplam: nam ratio 6 ad 4 ſeſquialtera denominatur, ab 1 & $\frac{1}{2}$: reliqua verò 4 ad 3 ſeſquitertia, per 1 $\frac{1}{3}$: illæ igitur rationum quantitates, ſcilicet 1 $\frac{1}{2}$ per 1 $\frac{1}{3}$ multiplicatæ inuicem, producunt 2 quantitatem, ſcilicet duplam rationis 6 ad 3 extremarum. Cùm autem tertia quinti diffinitione diximus, rationis minoris inæqualitatis quinque ſpecies, ſub duabus quantitatis denominationibus arctari, particulari ſcilicet & partiente, vt ab his veram Euclidis mentem deducamus, earum rationum quantitates multiplicantes, ac compoſitas productas (iuxta huius diffinitionis methodum) exerentes rationes, oſtendamus qua lege hoc abſoluatur negotium. Quoniam geometrarum eſt quantitates comparare, Arithmeticorum verò comparationem eam numeris diſcernere, vbi cadant numerorum vires, ſeruata tamen vera diſcrepantia quantitatis rationum maioris inæqualitatis, à minoris inæqualitatis rationum quantitate, maximè in rationibus componendis. Nihilo ſecius plures fuerunt arithmetici, rationes minoris inæqualitatis ab eiſdem numeris eas denominantibus exprimi, quibus earum conuerſæ maioris inæqualitatis (præpoſita tantùm particula ſub) aſſerentes, vt triplæ ſubtriplam opponẽtes, ſeſquialteræ verò ſubſeſquialteram, ſuperbipartienti verò tertias, ſubſuperbipartientem tertias: duplæ verò ſeſquialteræ ſub duplam ſeſquialteram. Triplæ autem tripartienti quartas, ſub triplam tripartientem quartas, vnde aliqui ex harum denominationum numeris, per hanc diffinitionem, rationum quantitates conſtare arbitrati ſunt, cenſentes rationem 4 ad 6 ſubſeſquialteram nominari, eò quòd eius conuerſa 6 ad 4 maioris inæqualitatis ſeſquialtera nuncupetur, ac proinde eandem earum eſſe quantitatem, vt quicquid vni conueniat alteri conuenire dixerint. Cùm autem obſequendum fuit (horum more) huius diffinitionis imperio, ſcilicet omnes rationum compoſitiones, per multiplicationem abſolui, propoſita fuit ratio 4 ad 2 conſtare ex ratione, 4 ad 6 quæ ab eis nuncupata fuit ſubſeſquialtera, & 6 ad 2 tripla, ſub ſeſquialteram verò 1 $\frac{1}{2}$ per triplam 3 multiplicantes repererunt 4 $\frac{1}{2}$ (productum rationis 4 ad 2 denominatorem) longè à vero diſtare. Quónam pacto autem iuxta Euclidis verba, hanc 4 ad 2 rationem, ex rationibus mediis 4 ad 6 & 6 ad 2 reſtituerent inquirentes, quàm abſurdum & Euclidis præcepto penitus oppoſitum protulerunt inuentum, ſcilicet denominatorem rationis maioris inæqualitatis 6 ad 2, qui fuit 3, per minoris denominatorem quem dicunt 1 $\frac{1}{2}$ diuidentes, vt tandem iure vel iniuria producant 2 denominatorem, 4 ad 2 extremorum, licet Euclides omnes illas rationum compoſitiones multiplicatione produci iubeat, non diuiſione, ſubinferentes hanc diffinitionem, tantùm in omnino maioris vel omnino minoris inæqualitatis rationibus intelligi, non autem quando altera maioris, alia verò minoris fuerit inæqualitatis. Nam id per multiplicationem iubente Euclide adimplere non potuerunt, ea namque de cauſa quòd denominationes rationum maioris, pro denominationibus rationum conuerſarum minoris inæqualitatibus impropriè ſumpſerant. Et cùm binæ denominationes inter ſe ad incrementum aut decrementum multiplicatæ, idem producant denominans, incremento aut decremento referendum, eas ideo confundi ac rationes incrementi (vel maioris in-

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$
6 4 3
2
4 6 2
$\frac{1}{2}$ 3

æqualitatis) eadem denominationis quantitate, qua ipſis conuerſas rationes decrementi (ſeu minoris inæqualitatis) nuncupari putarunt, maximè cum idem produci viderint, ſi quantitatem per aliquem numerum diuidamus, aut equidem ſi eandem per eundem numerum in decrementum multiplicemus, ſumentes autem binarum denominationum, alteram in incrementum, alteram verò in decrementum multiplicandas, non idem ac ſi binas multiplicarent, aut binas diuiderent, produci perceperunt. Quare vt idem producant, rationem incrementi ſeu maioris inæqualitatis, per rationem decrementi, ſeu minoris inæqualitatis diuidi iuſſerunt: hácque lege huic diffinitioni multiplicationem quandoque & diuiſionem quandoque aſcripſerunt, contra Euclidis mentem, qui ſola multiplicatione eius abſolui præcepit operam, quapropter nos improprias rationum maioris inæqualitatis denominationes abſtulimus, eas ſcilicet, quæ earum conuerſis conuenirent, vt diximus tertia quinti diffinitione. Proprias eis denominationes ex habitudinis vera ſubſtantia deprehenſas aſcribẽtes, vt ex his quælibet rationis determinata quantitas, per multiplicationem quantitatis mediarum depromatur, nulla adducta diuiſionis alteratione, Euclidémque per multiplicium legem ſua edocendi propoſita capacem ſatis ſupérque fuiſſe demonſtremus. Quod exemplo, in omnino maioris, omnino minoris, & mixtis oſtendamus rationum compoſitionibus, ſit componenda ratio A ad C, ex binis A ad B, & B ad C, maioris inæqualitatis rationibus, ſcilicet A ad B ſeſquialtera $1\frac{1}{2}$ & B ad C ſeſquitertia $1\frac{1}{3}$ inuicem multiplicatis producentibus 2, dicemus A ad C rationem duplam eſſe. Sit rurſus eadem figura in rationibus omnino minoris inæqualitatis componenda ratio C ad A, ex binis ſcilicet C ad B tripartiente quartas $\frac{1}{4}$, & B ad A bipartiente tertias $\frac{2}{3}$, ductis $\frac{1}{4}$ per $\frac{2}{3}$ producemus $\frac{1}{2}$, dimidiam rationis C ad A denominatricem. Haud ſecus in mixtis, Sit componenda ratio, A ad C ex ratione A ad B minoris inæqualitatis (nempe bipartiente tertias) & ex ratione B ad C (maioris ſcilicet tripla) multiplicatis earum quantitatibus $\frac{2}{3}$ per 3 fiet 2, denominator quippe quantitatis rationis ipſius A ad C duplæ. Si etenim ex pluribus duabus componendæ ſint rationes extremarum quantitatum, idem fiet, vt exemplo in his quatuor magnitudinibus A B C D, Sint inter extremas A & D tres rationes, ſcilicet A ad B ſeſquialtera $1\frac{1}{2}$ B ad C dupla (2) C verò ad D bipartiens tertias ($\frac{2}{3}$) prima ($1\frac{1}{2}$) per ſecundam 2 ducta fiet 3, rurſus 3 per reliquam $\frac{2}{3}$ ducta fiet 2, denominator quippe rationis extremarum A ad D. Hac etenim lege quaſuis rationum compoſitiones, ſola multiplicatione (Euclidis ſcripta ſeruantes) complebimus. Ac veras rationum quantitatibus denominationes præſtabimus, præcipuam earum quantitatis affinitatem ſonantes. Licet aliqui rationi quantitatem ineſſe negauerint, non animaduertẽtentes rationem ab Euclide dici maiorem minorem, vel æqualem, ad alteram, veram quantitatis eſſe demonſtrante eſſentiam. Ididem quantitati proprium aſſerit Ariſtoteles, ſecundum quam quid maius, minus aut æquale dicatur. Quoniam hæc rationum compoſitio à decima diffinitione quinti orta eſt. Qua ratione primæ ad tertiã multiplicem ait Euclides rationis primæ ad ſecundã, ſcilicet duplã, primæ verò ad quartam triplicẽ eiuſdem primæ ad ſecundam, vt percipiamus rationes extremarum (primæ ſcilicet & tertiæ) ex rationibus mediarum, inuicem multiplicatis, produci, vt hac diffinitione denunciat. Quæ quidem multiplicatio ſi per ſeipſam fiat, duplam producet: ſi quidem per aliam fiat multiplicatio, aliud producet conſurgens, nec duplum, nec triplum quadruplumve, vt oſtendimus exemplis rationum quæ numeris exprimi poſſunt multiplicandæ. Quod attamen locum obtinet in reliquis rationibus eouſque ſurdis, quæ numeris exprimi non valeant, vt patebit 30 propoſitione huius, per lineam extrema & media ratione ſectam, tres rectas proportionales efficientem: nam primæ ſeu totius ad tertiam, ſiue minus ſegmentum ratio, dupla eſt rationis primæ ad maius ſegmentum, per 10 diffinitionem quinti, & igitur multiplex. Nihilominus illarum trium linearum rationes nullis exprimi valent numeris, tamen per multiplicationem rationis primæ ad ſecundam, in ſe neceſſariò conſurgit primæ ad tertiam ratio, quamuis ignota penitus exiſtat huiuſmodi multiplicatio, nobis non autem naturæ, cuius proprium eſt ea multiplicatione ignota nobis ſimiles ſurdas producere rationes, æquè vt reliquas, nobis ob numerorum facilitatem familiares. Ratio itaque quæuis ſiue ſurda, ſiue numeris expreſſa conſtat (inter extremas quaſuis quantitates eiuſdem generis) ex multiplicatione rationum mediarum quarumcunque. Illud idem affirmat Euclides 23 huius, dicens æquiangula parallelogramma, ex rationibus laterum conflare rationem. Quòd abſoluit demonſtratio ex rationibus mediorum componens rationes extremorum iuxta harum diffinitionum methodum.



MONITVM.

Ex his neceſſarium prodit, rationem extremarum ex rationibus quotcunque mediarum quantitatum naſci. quia licet ratio A *ad* B *excedat rationem extremarum* A *ad* C, *& ſit maior: Ratio tamen reliqua* B *ad* C *tanto minor reperietur, vt exceſſum quem habuit* A *ad* B *ſuper* A *ad* C *præcisè minuat & auferat. Quare ſi media quantitas vtraque extremarum minor fuerit, rationum componentium prior, maioris, poſterior verò minoris erit inæqualitatis. Si verò media quantitas maior fuerit, prior ratio minoris, poſterior verò maioris inæqualitatis erit: ſic in quotlibet terminis mediis, prior etenim extremorum, proportionem inchoans, & vltimus eam concludens, cogunt rationes mediorum nulla arte extremorum rationem variare poſſe: ſed ſemper ad extremorum rationis quantitatem redire, quod per numeros facilè demonſtratur. Sint extremi 4 & 3 & quotcunque medij 6 & 8, licet vltimus 3 ſit minor primo 4: tamen videmus 6 addere ad 4*

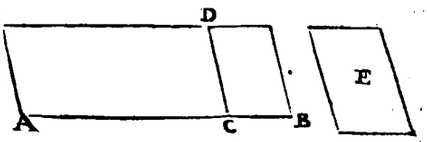
4 6 8 3

binarium: rurſus 8 addere ad 6 binarium: ſunt igitur iam priori addita duo binaria, quæ videmus per 3 auferri ab vltimo medio, vt ea tantùm ſuperſit vnitas, qua 4 prior excedit 3 vltimum, ac ad veram ipſius 4 ad 3 habitudinem, ſiue rationem fiat reductio. Quare quantæcunque fiant mediarum rationum additiones, vel quantitatum ſubtractiones, illæ nihilominus per extremorum reſpectum ea arte cogentur, vt omnes ſimul ſumptæ mediorum rationes, ad extremorum rationis quantitatem reducantur, id equidem facta earum rationum inter ſe multiplicatione. Ideo diximus inter ſe eas multiplicandas eſſe rationum quantitates, ne iuxta Theonis verba hac quinta ſexti peŕ quemuis multiplicantem eas ducere liceret, veluti licuit ex quarta diffinitione quinti magnitudinem quouis multiplicante excedentem, rationem habere, dici. Sed adinuicem multiplicandæ ſunt rationes. Si verò media quantitas inter extremas, maior vna, minor verò reliqua conſtituatur, vtraque ratio aut maioris, aut ſimul minoris erit inæqualitatis, vt 4 6 8 minoris, & 8 6 4 maioris. Illic enim dimidia ratio, 4 ad 8 ex bipartiente tertias, & tripartiente quartas, colligitur, hic verò dupla 8 ad 4 ex ſeſquitertia & ſeſquialtera componitur, vbique ſeruata multiplicatione, iuxta diffinitionis veram mentem.

Diffinitio ſexta.

Deficere ſpecie parallelogrammo ſimili dato, dicitur parallelogrãmum ad rectam lineam applicatum, quando applicatum ad totam lineam occupandam deficit, parallelogrammo ſimili dato, excedere verò quando excedit ſimili dato.

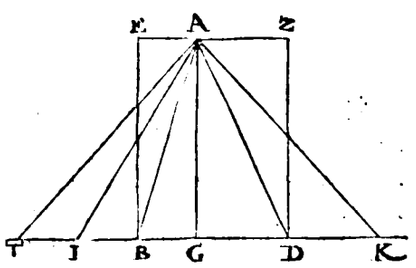
Vt ſi A D *ad rectam* A B *applicatum, deficit ipſo* D B *ſimili dato* B, *vel ſi ad rectam* A C *applicatum excedit eodem* D B *ſimili dato* E *dicetur deficere ſpecie ſimili dato, aut excedere.*



Propoſitio prima.

Triangula & parallelogramma quæ ſub eadem ſunt altitudine, ad ſe inuicem ſunt vt baſes.

Sint bina triangula A B G, A G D *ſuper eadem altitudine* A G. *Sint item bina parallelogramma* A E B G *&* A G D Z, *ſimiliter ſub eadem altitudine* A G *vel* E B, *per 4 diffinitionẽ huius: Dico eſſe vt* G B *baſis ad* G D *baſim, ſic* A G B *triangulum ad* A G D *triãgulum, ſicque* E G *parallelogrammum ad* G Z *parallelogrammum. Sint ordine quatuor magnitudines, ſcilicet* B G *&* G D *baſes prima & ſecũda:* A B G *&* A G D *verò triangula tertia & quarta. Producatur recta* B D *ad vtraſqne partes verſus,* T *&* K, *ipſi* G D *æqualis ſit* D K, *ipſi verò* B G *quotcunque æquales fiant,* I B T I, *coniunctis* A T A I A K: *quoniam per 38 primi, æqualia ſunt ſingula* A T I *&* A I B *triangula ipſi* A B G. *Similiter*



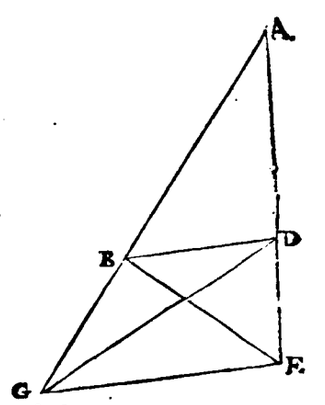
& A D K ipſi A G D. Totidem erunt triangula ipſi A B G æqualia, quot & baſes ipſi B G æquales: ſimiliter totidem erunt triangula ipſi A B G æqualia, quot & baſes ipſi G D æquales, cùm ſuper qualibet baſi vnum conſtitutum ſit triangulum. Primæ & tertiæ igitur ſcilicet baſis B G & trianguli A B G æquemultiplicia, ſcilicet tota T G, & totum A T G triangulum, ſecũdæ & quartæ ſcilicet baſis G D & trianguli A G D æquemultiplicia (totam ſcilicet G K, & totum A G K triangulum) ſimul excedunt, æquantur, vel deficiũt, hoc eſt, ſi T G excedat G K, triangulum A T G excedet A G K, ſi deficiat, deficiet: ſi æquetur, æquabitur per 38 primi. Quatuor igitur ſimplices prima B G ad ſecũdam G D baſes, erunt ſicut tertia A B G ad quartam A G D triangula. Quia verò ea triangula dimidia ſunt parallelogrammorum A E B G & A G D Z, per 41 primi, quæ per 15 quinti ſunt in eadem ratione partium, ſcilicet triangulorum A B G & A G D, Erũt & parallelogramma in eadem ratione baſium B G & G D, per 11 quinti. Potuerunt per æquemultiplicia demonſtrari parallelogramma, veluti triangula. Triangula igitur & parallelogramma quæ ſub eadem ſunt altitudine, ad ſe inuicem ſunt vt baſes.

Corollarium.

Si binarum rectarum altera ſeccetur vtcumque, rectangula ſubintegra & quolibet ſegmento ſectæ comprehenſa ad ſe inuicem ſunt vt ſegmenta. *Nam rectangula ſub A G integra & ſegmentis B D ſectæ, ſcilicet B G, G D ad ſe innicem ſunt, vt B G ad G D ſegmenta, ſic B A ad A D rectangula quotcunque fuerint.*

Propoſitio ſecunda.

Si triãguli ad vnum laterũ acta fuerit aliqua recta linea parallela, proportionaliter ſecat ipſius trianguli latera: etſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint. Per ſectiones ducta linea recta, parallela erit ad reliquum trianguli latus.



Sit triangulum A G E, ad cuius vnum laterum G E parallela B D ducatur introrſum: Dico B D ſecare reliqua latera A G & A E proportione A B ad B G, vt A D ad D E. Quoniam enim triangula B D E & B D G ſuper baſi B D & eiſdem parallelis exiſtentia, ſunt per 37 primi æqualia: ſed idem triangulum A B D ad æqualia ſcilicet B D E & B D G eandem rationem habet per ſeptimam quinti, & per præcedentem, eam habet A B D ad D B E quàm A D ad D E, & A B D ad B D G, quàm A B ad B G habet. Sequetur igitur per 11 quinti eſſe A B ad B G, ſicut A D ad D E. Ad ſecundam autem partem ſupponantur latera ſecta A B ad B G ſicut A D ad D E: Dico B D eſſe ipſi G E parallelam, cùm autem ſit A B ad B G vt A D ad D E, erit (per præcedẽtem) A B D ad D B E, ſicut idem A B D ad B D G. Ad quas igitur eadem A B D magnitudo, eãdem habet rationem, ipſæ (per 9 quinti) ſunt æquales. Triangula igitur D B G & B D E erunt æqualia, ſuper eadem itaque baſi B D exiſtentia, in eiſdem ſunt parallelis B D G E, per 39 primi. Si itaque triãguli ad vnum laterum acta fuerit aliqua recta linea, &c.

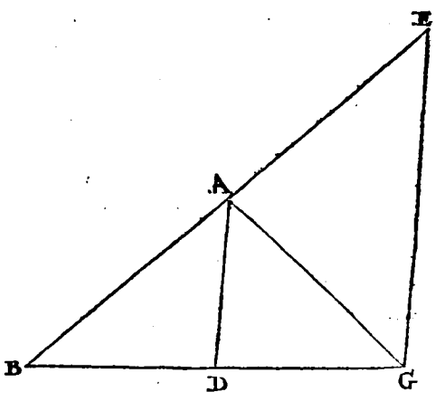
Corollarium.

Si parallela vni laterum trianguli triangulum ſecuerit, ſimile toti à toto tollet. *Nam proportionales ſecat vt patuit A G ad A B vt A E ad A D, erit igitur viciſſim (per 16 quinti) A G ad A E vt A B ad A D, proportionalia igitur ſunt circa communẽ ad A angulum latera, ſed æquiãgula: nam A B G A D E rectæ, cadunt in parallelas, quare angulos A D B ipſi A E G & A B D ipſi A G E æquales efficient, (per 29 primi.) Similia igitur erunt, A B D ablatum, & A B G totum (per primam diffinitionem huius.)*

Propoſi

Propoſitio tertia.

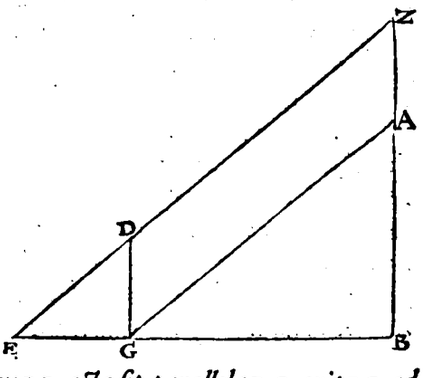
Si trianguli angulus bifariam ſeccetur, diſpeſcens autem angulum recta ſecuerit & baſim, baſis ſegmenta eandem habebunt rationẽ, reliquis ipſius trianguli lateribus. Et ſi baſis ſegmenta eandem habuerint rationem reliquis ipſius trianguli lateribus, à vertice ad ſectionem coniuncta recta, bifariam ſecat ipſius trianguli angulum.



Trianguli A B G *angulus* A *bifariam ſeccetur ducta* A D, *per 9 primi, ſecante baſim in* D: *Dico eſſe* B D *ad* D G *ſicut* B A *ad* A G. *Per ſignum* G *parallela excitetur ipſi* A D *ſit q*ꝫ G E. *Extendatur autem recta* B A *in* E, *in parallelas autem* A D E G *cadens* B E, *angulum* B E G *angulo* B A D *æqualem (per 29 primi) efficit, in eaſdem rurſus parallelas cadens* A G, *alternatim* A G E *&* G A D *angulos æquos efficit, per eandem, ſinguli igitur* A E G, A G E *anguli ſingulis* B A D *&* G A D *ſunt æquales. Et igitur adinuicem, cùm ipſi* B A D *&* G A D *ſint per hypotheſim æquales. Latera igitur* A E, A G *æquis angulis ſubtẽſa (per 6 primi) æqualia erunt: quia verò ad vnum laterum trianguli* B E G *acta eſt parallela* A D, *proportionaliter erit* B D *ad* D G *ſicut* B A *ad* A E *(per 2 huius) hoc eſt ad* A G *ſibi æqualem. Ad ſecũdam verò partem, ſi fuerit* B D *ad* D G *vt* B A *ad* A G: *Dico à vertice* A *ad ſectionem* D *coniunctam, angulum* B A G *bifariam ſecare, diſponantur* B E *&* G E *vt prius, quoniam eſt* B D *ad* D G, *ſic* B A *ad* A G, *erit (per præcedentem)* B D *ad* D G *vt* B A *ad* A E, *æquales igitur ſunt* A E, A G *rectæ, & proinde (per 5 primi) anguli* A E G, A G E *(qui ad baſim) ſimiliter æquales: ſequetur igitur (per 29 primi)* B A D *ipſi* A E G *&* G A D *ipſi* A G E *eſſe æquales, & adinuicem igitur æquales erunt* D A B, D A G, *cùm ſint æqualibus æquales. Bifariam itaque ſecuit recta* A D *angulum* B A G. *Si igitur trianguli angulus, &c.*

Propoſitio quarta.

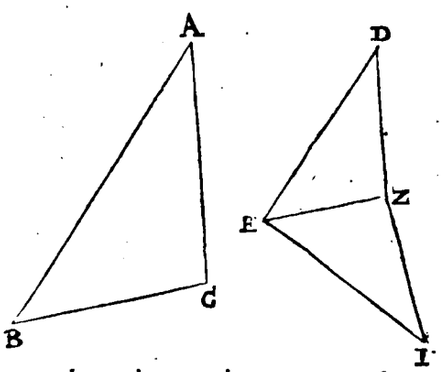
Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera quæ circum æquales angulos, & ſimilis rationis ſunt, quæ æqualibus angulis latera ſubtenduntur.



Sint triangula æquiangula A B G, D G E, *habentia angulos æquales* A B G *ipſi* D G E, *&* A G B *ipſi* D E G, *ac* B A G *ipſi* G D E: *Dico ea proportionalia habere latera,* A B *ad* D G *vt* B G *ad* G E, *vt q*ꝫ A G *ad* D E *æqualibus angulis ſubtenſa. Ponatur trianguli* D E G *(vel ſimiliter deſcripti) latus* E G *in rectam ipſius* G B, *quoniam anguli* A G B *&* D E G *ſunt æquales, per 28 primi, parallelæ erunt* E D *&* G A, *quia verò anguli* A B G *&* D G E *ſunt æquales, erunt (per eandem) parallelæ* A B *&* D G. *Compleatur igitur parallelogrammum* A G D Z, *in rectam cadent* E D, D Z, *per 30 primi, cùm ſint eidem* A G *parallelæ, & concurrant in* D, *ſimiliter* B A, A Z, *cùm parallelæ ſint ipſi* G D. *Cùm autem trianguli* B E Z *ad vnum latus* B Z *acta ſit parallela* D G, *erit* E G *ad* G B *ſicut* E D *ad* D Z, *hoc eſt, ad* G A *ſibi æqualem. Similiter quia ad vnum rurſus latus* E Z *acta eſt parallela* A G, *erit* B G *ad* G E *ſicut* B A *ad* A Z, *hoc eſt* G D *ſibi æqualem, ſicut igitur conuerſim (per corol. 4. quinti)* B G *ad* G E, *ſic* A G *ad* D E, *& ſic fuit* A B *ad* D G. *Æquiangulorum itaque triangulorum proportionalia ſunt, &c.*

Propoſitio quinta.

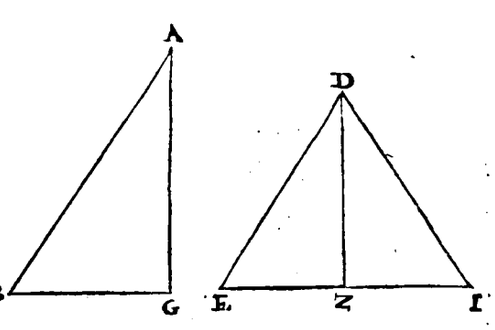
Si duo triangula latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, ſub quibus eiuſdem rationis latera ſubtenduntur.



Sint duo triangula A B G *&* D E Z, *quorum latera ſint proportionalia* A B *ad* A G *vt* D E *ad* D Z, *vtque* A B *ad* B G *ſic* D E *ad* E Z, *& ſicut* A G *ad* G B *ſic* D Z *ad* Z E: *Dico ea triangula eſſe æquiangula, & æquales habere angulos, quos eiuſdem rationis latera ſubtendunt, ſcilicet* A *ipſi* D, *&* B *ipſi* E, *ac* G *ipſi* Z, *ſuper rectam* E Z *ad ſignum* E *angulus angulo* B *æqualis conſtituatur* Z E I, *ad ſignum verò* Z *æqualis ipſi* G *ſit* E Z I, *per 23 primi, reliquus igitur* Z I E *reliquo* A *eſt æqualis, per corollarium primum 32 primi. Æquiangula igitur ſunt* A B G *&* I E Z *triangula. Erunt itaque (per præcedentem) circa* A *&* I *(æquales angulos) latera proportionalia,* A B *ad* A G *vt* I E *ad* I Z, *&* A B *ad* B G *vt* I E *ad* E Z, *&* A G *ad* G B *vt* I Z *ad* Z E, *ſed ſicut* A B *ad* B G *ſic fuit* D E *ad* E Z, *igitur* I E *&* D E *ad eandem* E Z *eandem rationem habẽtes, ſunt (per 9 quinti) æquales, ſimiliter* D Z *&* I Z *æquales erunt. Sequetur itaque (per 8 primi) cũ* D E D Z *ipſis* I E I Z *& baſes ſint æquales æquiangula eſſe* D E Z *&* I E Z *triangula, ſed ipſi* A B G *triangulo æquiangulum fuit* I E Z. *Per primam igitur communem ſententiam, eidem* A B G *æquiangulum erit* D E Z *triangulum, & æquales erunt anguli* B A G *ipſis* E D Z *eiuſdem rationis lateribus ſubtenſis. Si igitur duo triangula latera proportionalia habuerint, &c.*

Propoſitio ſexta.

Si bina triangula vnum angulum vni angulo ęqualem habuerint, & circum æquales angulos latera proportionalia æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos ſub quibus eiuſdem rationis lateta ſubtenduntur.

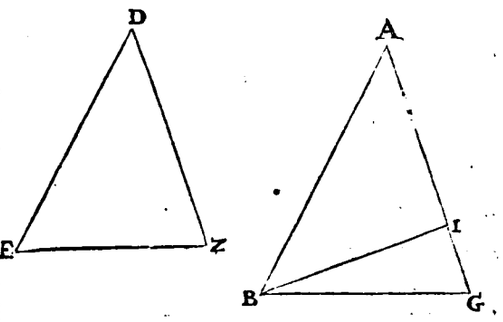


Sint duo triangula A B G *&* D E Z, *vnũ angulum* A *vni angulo* D *æqualem habẽtia, circum eos autem angulos, latera* B A *ad* A G, *ſicut* E D *ad* D Z: *Dico reliquos angulos ſcilicet* B *ipſi* E *&* G *ipſi* Z *(eiuſdem rationis lateribus ſubtẽtenſos) æquos eſſe. Ad datam rectam* D Z *ſignúmque eius* Z *ipſi* G, *æqualis angulus conſtituatur* D Z I: *ad ſignũ autem* D *ipſi* A *æqualis fiat* Z D, *reliquus itaq; B reliquo* I *æquus erit per corollarium 32 primi. Æquiangula igitur erunt* A B G *&* D I Z *triangula, & proinde (per 4 huius) erit* A B *ad* A G, *ſicut* D I *ad* D Z. *Susceptum eſt autem vt* B A *ad* A G, *ſic* D E *ad* D Z: *ſicut igitur (per 11 quinti)* D E *ad* D Z, *ſic* D I *ad* D Z, *æquales igitur ſunt (per 9 quinti)* D E *&* D I. *Sed triãguli* E D Z *duo latera* E D D Z *duobus* I D D Z *& angulus* E D Z *angulo* I D Z *ſunt æqualia. Æquiangula igitur, per 4 primi, erunt triangula* E D Z I D Z, *& æqualia, æquiangula proinde erunt, per primam communem ſententiã,* A B G *&* D E Z: *quia verò, per hypotheſim, æqualis fuit angulus* B *ipſi* I, *& eidem* I *æquus oſtenſus eſt* E, *& ideo* E *ipſi* B *æquus erit, ſimiliter* Z *ipſi* G, *reliqui quidem ſub quibus eiuſdem rationis latera ſubtenduntur. Si igitur bina triangula vnum angulum vni angulo æqualem &c.*

Propoſitio ſeptima.

Si bina triangula vnũ angulum vni angulo æqualem habuerint, circum autem alios angulos latera proportionalia: Reliquorum verò vtrumque ſimul aut minorem aut non minorem recto, ęquiangula erunt triangula, & ęquales habebunt angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.

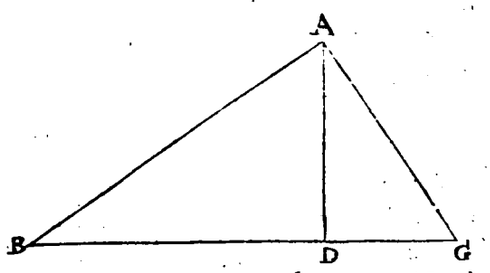
Sint



Sint duo triangula A B G, *&* D E Z, *angulum* A *angulo* D *æqualem habentia, circa verò alios angulos* B *&* E *latera proportionalia* A B *ad* B G, *vt* D E *ad* E Z, *Reliquorum verò* G *&* Z *ſit primo minor recto quilibet eorum: Dico æquiangula eſſe triangula* A B G *&* D E Z, *& æquales habere angulos* B *&* E, *circum quos proportionalia ſunt latera, quod ſi non ſint æquales* B *&* E, *ſit* B *maior. Ad ſignum* B *rectæ* A B, *per 23 primi, conſtituatur ipſi* E *æqualis angulus* A B I: *Cùm enim æquales ſint* A *ipſi* D *&* A B I *ipſi* D E Z *anguli, reliquus* A I B *reliquo* Z *æquus erit, per corollar. 32 primi. Sicut igitur* D E *ad* E Z, *ſic erit* A B *ad* B I, *per 4 huius: ſed ſicut* D E *ad* E Z, *ſic fuit* A B *ad* B G, *ſicut proinde* A B *ad* B I, *ſic* A B *ad* B G. *Æquales igitur ſunt* B I *&* B G, *per ſecundam partem 9 quinti. Anguli itaque* B I G B G I *(ad baſim) ſunt æquales, per 5 primi, quia verò idem* B I G *&* B G I *ſunt (per 17 primi) duobus rectis minores, ipſo* B I G *exiſtente vno recto minore, reliquus* A I B *vno recto maior erit, per 13 primi. Et oſtenſus eſt æqualis ipſi* Z *angulo, recto quidem minori poſito, quod fieri nõ poteſt. Neuter itaque angulorum* A B G *&* D E Z *altero maior eſt, æquales igitur ſunt. Sit rurſus ſecũdo nõ minor recto quilibet angulorũ* G *&* Z: *Dico* A B G *&* D E Z *æquos eſſe: Si autem non, ſit* B *maior, &* (*vt prius*) *ſit* A B I *æquus ipſi* D E Z. *Reliquus* B I A *reliquo* Z *æquus erit, per coroll. 32 primi. Et tandem anguli* B I G *&* B G I *æquales erunt, ſed* B G I *non minor recto ſupponitur, bini igitur* B I G *&* B G I *eiuſdem trianguli anguli, duobus rectis non ſunt minores, contra oſtenſum 17 primi, quod eſt abſurdum. Qualibet igitur via* B *&* E *anguli ſunt æquales, circum quos proportionalia ſunt latera, & proinde (per præcedentem) æquiãgula ſunt triãgula* A B G *&* D E Z. *Si itaque bina triangula vnum angulum vni angulo, &c.*

Propoſitio octaua.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſim perpendicularis agatur, quę ad perpendicularem triangula ſimilia ſunt toti & ad inuicem.



Sit triangulum A B G *habens angulum rectum* A, *à quo perpendicularis in baſim demittatur* A D: *Dico tri angula* A B D *&* A D G *ſimilia eſſe toti* A B G, *& adinuicem. Triangulorum* A B G *&* A B D *recti ſunt anguli, ſcilicet per hypotheſim* B A G, *& per demiſſam* A D, *angulus* A D B, *communis verò eſt* B *angulus. Reliqui igitur* B A D *&* A G D (*per corollarium 32 primi*) *erũt æquales: quia ſimiliter triangulorum* B A D *&* A G D *duo anguli* B D A A D G *recti ſunt æquales, & duo alij* B A D A G D *fuerunt æquales, reliqui (per idem coroll. 32 primi)* A B D G A D *æquales erunt. Æquiangula igitur erunt triangula* A B G A B D *&* A G D: *Circum igitur æquales angulos latera proportionalia erunt, per 4 huius. Et proinde (per primam diffinit. huius) ſimilia erunt, ſcilicet* A B D *&* A G D (*quæ ad perpendicularem*) *adinuicem, & toti* A B G. *Si itaque in triangulo rectangulo, &c.*

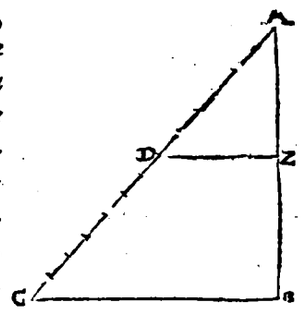
Corollarium.

A trianguli recto angulo in baſim perpendicularis media eſt proportionalis inter baſis ſegmenta: inſuper inter baſim & vnumquodque ſegmentorum medium, proportionale eſt latus quod ad idem ſegmentum. *Cùm ſit vt* B D *ad* D A, *ſic* D A *ad* D G *circum æquales angulos, media eſt proportionalis* A D *inter baſis ſegmenta. Præterea erit medium latus* A G *inter* B G G D, *ſicut latus* A B *inter* G B B D, *comprehendunt enim eoſdem angulos, ſcilicet* G *&* B.

Propoſitio nona. *Problema 1.*

A data recta linea, ordinatam partem abſcindere.

Proponatur A B *recta, à qua imperemus aliquam partem abſcindi, ſcilicet ſex tertiaſdecimas vel* $\frac{6}{13}$ *vt omni geometricæ parti conuenire hæc oſtendatur iuxta primã quinti diffinitionẽ. Concurrat cũ* A B *recta quædã* A G *ad ſignum* A *in acutum angulum, rectæ verò* A G *quotcũque propoſitæ ſignentur partes ſcilicet* 13, *ad ſextam autem ſit* A D, *Tredecim verò habeat* A G, *coniunctæ autem* G B *parallela fiat* D Z: *Ipſa ſecat trianguli* A B G *latera* A B A G *proportionaliter, per* 2 *huius. Sicut itaque* G D *ad* D A *ſic* B Z *ad* Z A. *Et componendo ſicut tota* G A *ad ordinatam partem* A D *ſic* B A *ad ordinatam partem* A Z, *per* 18 *quinti. Data igitur recta* A B *ordinatam partem* A Z *abſcidimus.*



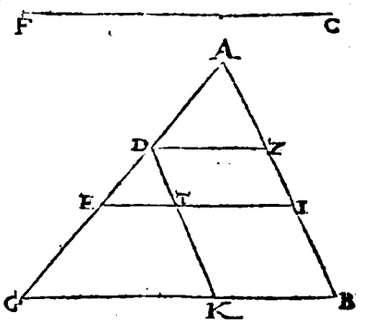
MONITVM.

Similiter ſi abſcindere à data A B *ordinatam incertam velimus, ſecetur* A G, *per* 11. *ſecundi in* D, *Tum ſimilis fiet* A Z *pars rectæ* A B, *qualis fuerit* A D *rectæ* A G, *quæ tamẽ incertæ erunt, vt quandoque latius. Hac de cauſſa hæc incerta æquè pars ordinata erit rectæ* A B, *vt alia quæuis diſcreta.*

Propoſitio decima. Problema 2.

Datam rectam lineam non ſectam, datæ rectæ lineæ ſectæ ſimiliter ſecare.

Eſto data recta A B *non ſecta, data verò ſecta eſto* C F, *cuius primo ſegmento æqualis ſit* A D, *ſecundo* D E, *tertio verò* E G, *quotquot fuerint in recta* C F. *Coniunctæ autem* G B *parallelæ ducantur* D Z *&* E I. *A ſigno* D *parallela ipſi* A B *ducatur* D K *ſecans* E I *in* T, *Parallelogramma igitur ſunt* D I T B D B. *Æquales itaque ſunt* D T Z I *&* T K I B *rectæ. Et quoniam parallela eſt* E T I *ipſi* G K B, *erit, per* 2 *huius,* G E *ad* E D *vt* K T *ad* T D, *vel ſicut* B I *ad* I Z *ipſis æquales. Et cùm* D Z *ſit parallela ipſi* G B, *erit (per eandem) vt* G D *ad* D A *ſic* B Z *ad* Z A. *Eſt igitur* B I *ad* I Z *vt* G E *ad* E D *&* I Z *ad* Z A *ſicut* E D *ad* D A. *Datam igitur rectam lineam* A B *non ſectam, datæ rectæ* C F *lineæ ſectæ ſimiliter ſecuimus.*



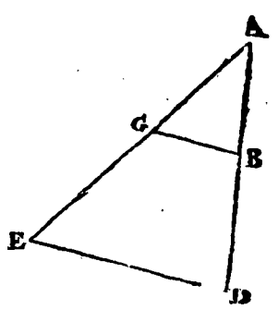
Corollarium.

Hinc fit datam rectam lineam in datarum rectarum ratione, ſecare. *Nam coniungantur in rectam lineam angulum cum data recta efficientem, datæ rectæ rationes habentes, veluti* A D *ad* D E G, *nam hoc theoremate data* A B *in earum rationes habentes* A Z Z I I B *rectas, ſecta eſt.*

Propoſitio vndecima. Problema 3.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

Sint binæ rectæ A B A G *ad angulum* A *diſpoſitæ, quæ producantur in rectum ad* E *&* D: *Rectæ verò* A G *æqualis ponatur* B D, *&* *coniunctæ* B G *parallela fiat* D E. *Quoniam trianguli* A D E *ad vnum latus* D E *parallela exiſtit* B G, *erit (per* 2 *huius)* A B *ad* B D *ſicut* A G *ad* G E. *Sed* A G *&* B D *ſunt æquales: erit igitur ſicut* A B *ad* A G, *ſic eadem* A G *ad* G E. *Duabus igitur datis* A B A G *rectis, tertiam* G E *proportionalem reperiimus.*

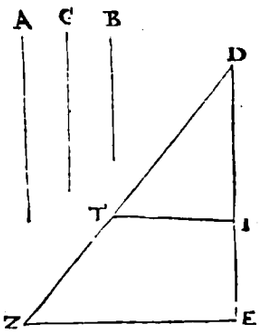


Propoſitio duodecima. Problema 4.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Exponan-

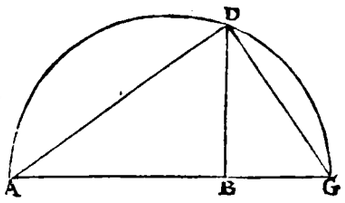
Exponantur tres rectæ ſcilicet A B G, *oportet iam ipſis quartam inuenire proportionalem, ſint binæ rectæ* D E D Z *contingentem angulum conſtituentes. Rectæ verò* A *æqualis ponatur* D T, *ipſi* B *verò æqualis ſit* T Z. *At ipſi* G *æquetur* D I, *coniunctæ* T I *parallela fiat* Z E, *productæ* D I *in* E. *Trianguli itaque* D Z E *ad vnum laterum* Z E *ducta eſt parallela* T I. *Proportionales igitur erunt (per 2 huius) quatuor rectæ,* D T *ad* T Z *ſicut* D I *ad* I E, *ipſis autẽ* D T T Z D I *æquales ſunt* A B G: *erit igitur ſicut* A *ad* B *ſic* G *ad* I E. *Tribus itaque datis rectis lineis, quartam inuenimus proportionalem.*



Propoſitio decimatertia. *Problema 5.*

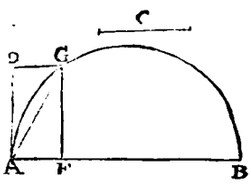
Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

Proponantur binæ datæ rectæ, A B B G *in rectum, quibus mediam inquiramus proportionalem, ſuper tota* A G *ſemicirculus deſcribatur* A D G, *ad ſignum verò* B *ipſi* A G *perpendicularis excitetur* B D, *coniunctis* A D D G *rectis, triangulum* A D G *rectangulum erit, per 31 tertij. Cùm autẽ ab angulo recto* D *in baſim* A G *ſit demiſſa perpendicularis* D B, *ipſa eſt media proportionalis inter ſegmenta* A B B G *baſis* A G, *per coroll. 8. huius. Duabus igitur datis rectis* A B B G *mediam proportionalem* D B *inuenimus.*



Corollarium.

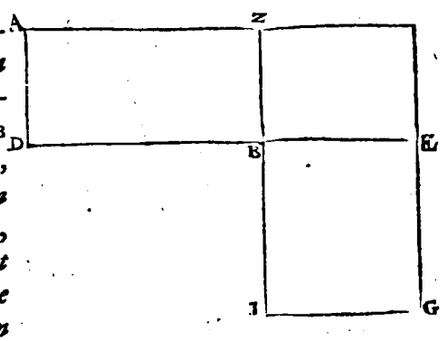
Hinc aſſequimur data recta linea, aliam rectam (duplum eius excedentem) in binas extremas proportionales illi ſecare. *Sit* C *data cuius duplum excedat* A B, *ad ſignum* A *perpendicularis fiat* D A *quæ æqualis ponatur datæ* C: *ſuper* A B *verò ſemicirculus deſcribatur* A G B, *ipſi verò* A B *parallela ſit* D G *quæ circulum ſecabit, cùm ſit minor ſemidiametro, per hypotheſim, perficiatur parallelogrammum* D F *coniunctis* G A G B: *Æqualis igitur erit* G F *ipſi* A D, *& quia perpendicularis eſt ad datam* A B (*per conſtructionem*) *ipſa* G F, *rectam* A B *datam ſecabit in extremas ſibi proportionales* A F F B, *per corol. 8 huius.*



Propoſitio decimaquarta.

AEqualium & vnum vni æqualem habẽtium angulum parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum, reciproca ſunt latera quæ circum ęquales angulos, ea quoque ſunt ęqualia.

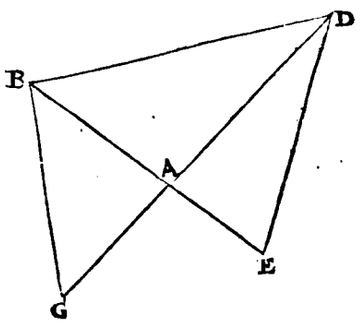
Sint æqualia parallelogramma A B *&* B G *vnum angulum* D B Z *vni angulo* I B E *æqualem habentia: Dico latera* D B *ad* B E *eſſe reciprocè, ſicut* I B *ad* B Z *circũ æquales angulos, cùm anguli* D B Z *&* I B E *ſint æquales, ponatur* I B *in rectum ipſius* B Z, *reliqua* D B *erit in rectum ipſius* B E, *ſunt enim ad verticem, perficiatur parallelogrammum* Z E, *erit (per 7 quinti) ſicut* A B *ad* Z E *parallelogramma, ſic* B G *ad idem* Z E, *ſunt enim æqualia* A B *&* B G, *ſed ſicut* A B *ad* Z E *ſic recta* D B *ad* B E, *per primam ſexti, ſicútque* B G *ad* Z E *ſic* I B *ad* B Z, *per eandem, ſunt enim adinũicem vt baſes, ſicut igitur (per vndecimam quinti)* D B *ad* B E *latera, ſic reciprocè* I B *ad* B Z. *Continet enim vnum parallelogrammum antecedens, & conſequens conſequentis & antecedentis alterius, per ſecundam huius diffinitionem. Similiter econuerſo oſtendetur ſecunda pars, ſcilicet ſi latera* D B *ad* B E *ſint reciprocè, vt* I B *ad* B Z: *Dico parallelogramma* A B B G *eſſe æqualia, cùm ſit eadem*



ratio (ex hypotheſi) D B *ad* B E, *rationi* B I *ad* B Z, *eadem erit (ex prima ſexti) parallelogrammorum* A B *ad* Z E, *quæ* B G *ad idem* Z E. *Ipſa igitur* A B *&* B G *ſunt (per 9 quinti) æqualia. AEqualium itaque & vnum vni æqualem habentium, &c.*

Propoſitio decimaquinta.

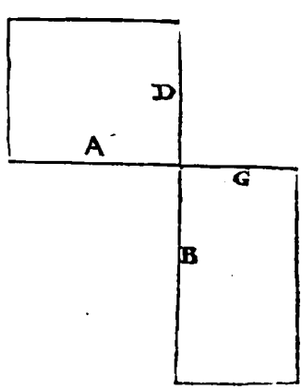
AEqualium & vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca ſunt latera quę circum æquales angulos. Et quorum vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca ſunt latera, quę circum æquales angulos, ea quoque ſunt æqualia.



Triangula A B G *&* A D E *ſint æqualia, & angulos* B A G *&* D A E *æquales habeant, ad verticem ſcilicet: Dico circa eos angulos latera eſſe reciproce* G A *ad* A D, *ſicut* E A *ad* A B. *Cùm autem anguli ſint ad verticem in rectum erũt* B A E *&* G A D *rectæ, triangla itaque* A B G A B D *(cùm ſint ſub eadem altitudine) ad ſe inuicem ſunt vt baſes* G A *ad* A D, *per* 1 *huius. Similiter triangula* A D E *&* A D B *ſunt ſicut* A E *ad* A B, *baſes. Sed cùm ex hypotheſi* A B G *&* A D E *triangula ſint æqualia, & ad idem* A B D *rationem habeant, eandem habebunt ratonem, per* 7 *quinti. Rectæ igitur* G A *ad* A D, *&* E A *ad* A B *(eandem ipſis triangulis habentes rationem) adinuicem eandem habebunt, per vndecimam quinti. Alternatim igitur erunt proportionales* G A *ad* A D, *vt* E A *ad* A B, *per* 2 *diffinitionem huius. Ad ſecundam autem partem ſupponantur eſſe reciprocæ* G A *ad* A D, *ſicut* E A *ad* A B: *Dico triangula* A B G *&* A D E *eſſe æqualia: quoniam enim eſt eadem ratio* G A *ad* A D, *quæ* E A *ad* A B, *ſed vt* G A *ad* A D, *ſic* A B G *ad* A B D *triangula, per primam ſexti, ſicútque* E A *ad* A B, *ſic ſimiliter* A D E *ad* A D B *Eadem igitur erit ratio* A B G *trianguli ad* A D B, *quæ ipſius* A D E *ad idem* A D B. *AEqualia proinde erunt* A B G *&* A D E *triangula, per 9 quinti. Aequaliũ igitur & vnum vni æqualem habentiũ, &c.*

Propoſitio decimaſexta.

Si quatuor rectę lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenſum rectangulum, æquum eſt ei quod ſub mediis continetur rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquum fuerit ei quod ſub mediis continetur rectangulo, quatuor rectę lineę proportionales erunt.



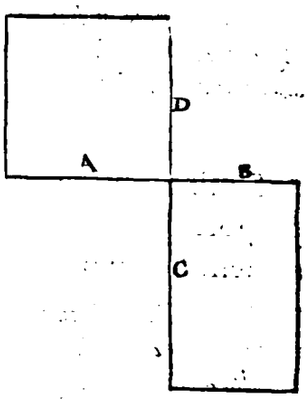
Sint quatuor lineæ proportionales A *ad* G, *vt* B *ad* D: *Dico comprehenſum rectangulum ſub extremiis* A *&* D *æquum eſſe, ei quod à mediis* B *&* G *fit rectãgulo. Fiat ex* A D *rectãgulum, item ex* B *&* G *aliud rectangulum: quoniam parallelogrãmorum* A D *&* B G *reciproca ſunt latera,* A *quidem ad* G, *ſicut* B *ad* D, *ea ſunt æqualia, per* 14 *huius. Rurſus ad ſecundam partem, & ſi ſupponamus ſub extremis* A *&* D *contẽtum, æquum eſſe ei quod ſub mediis* B G *continetur: Dico ipſas quatuor* A *ad* G *eſſe vt* B *ad* D. *Cùm æqualia ſint rectãgula* A D *&* B G *latera habebunt reciproca, erit igitur* A *ad* G *vt* B *ad* D *(per eandem* 14 *huius). Si itaque quatuor rectæ lineæ proportionales, &c.*

Propoſitio decimaſeptima

Si tres rectæ lineę proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenſum rectangulum, ęquum eſt ei quod à media quadrato, etſi quod ſub extremis comprehenſum rectangulum ęquum fuerit ei quod à media quadrato ipſę tres rectę lineę proportionales erunt.

Propo-

Proponantur tres rectæ lineæ proportionales A B D *ſcilicet* A *ad* B, *ſicut* B *ad* D, *ex* A *&* D *verò fiat rectangulum* A D, *& ex* B *quadratum* B C *fiat: Dico æquum eſſe rectangulum* A D *quadrato* B C, *cùm enim ſint æquales* B *&* C, *erit ſicut* A *ad* B, *ſic* C *ad* D: *quatuor igitur ſunt rectæ proportionales* A B C D: *ſub extremis itaque earum* A *&* D *rectangulum, æquum eſt (per præcedentem) rectangulo ſub mediis* B C *comprehenſo, quod quidem eſt quadratum ipſius* B *mediæ. Æquum eſt igitur rectangulum* A D *quadrato* B C: *ſi verò è contra rectangulum æquum fuerit quadrato* B C, *ipſæ* A B C D *(per præcedentem) erunt proportionales: ſed cùm* B *&* C *ſint æquales, erit ſicut* A *ad* B, *ſic* B *ad* D. *Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quod, &c.*



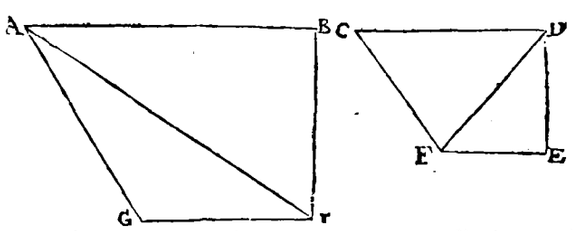
Corollarium.

Hinc aſſequimur, quamlibet rectam eſſe mediam proportionalem, inter quaſuis duas rectas, æquale ſuiipſius quadrato rectangulum conſtituentes.

Propoſitio decimaoctaua. *Problema 6.*

A data recta linea, dato rectilineo ſimile, ſimilitérque poſitum rectilineum deſcribere.

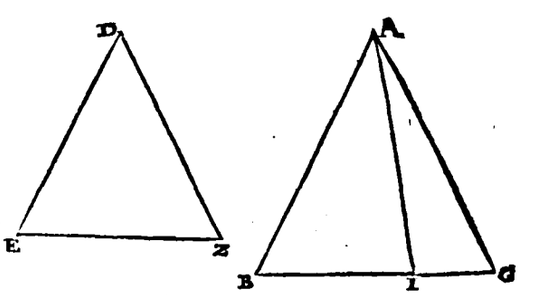
Eſto data recta A B, *à qua deſcribendum ſit rectilineum ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi* C D F E, *ſubtendat angulum* C *recta* D F, *& ſic quotcunque angulos rectilinei ſubtendamus, ipſum in triangula reſoluentes, ſcilicet* C D F, D F E: *Ad ſignum* A *& datam rectam* A B, *æqualis conſtituatur angulus ipſi* D C F, *ſitque* B A G, *per 23 primi, & ipſi* C D F *æquus fiat* A B G, *reliquus* A G B *reliquo* C F D *(per corollarium 32 primi) æquus erit. Æquiangulum itaque eſt triangulum* A B G *triangulo* C D F: *ſimile igitur ſimilitérque erit poſitum, ſicutque* F D *ad* G B, *ſic erit* C D *ad* A B, *per 4 huius. Ad rectam autem* B G *ſimiliter deſcribatur triangulum* B G I *ipſi* D F E, *quia verò æquales ſunt bini anguli* A B G G B I *binis* C D F F D E, *totus* C D E *toti* A B I *æquus erit, ſimiliter* A G I *ipſi* C F E, *necnon* E *ipſi* I. *Erit itaque* F D *ad* G B, *ſicut* D E *ad* B I. *Sed fuit* F D *ad* G B *ſicut* C D *ad* A B, *erit itaque* C D *ad* A B, *vt* D E *ad* B I, *circum æquales angulos, ſimiliter oſtendetur* C F *ad* A G, *vt* C D *ad* A B, *&* F E *ad* G I. *Totum itaque* A B G I *rectilineum toti* C D, F E *rectilineo ſimile ſimilitérque poſitum eſt, & circum æquales angulos latera proportionalia habet. A data itaque recta linea dato rectilineo, &c.*



Propoſitio decimanona.

Similia triangula, adinuicem in dupla ſunt ratione laterum ſimilis rationis.

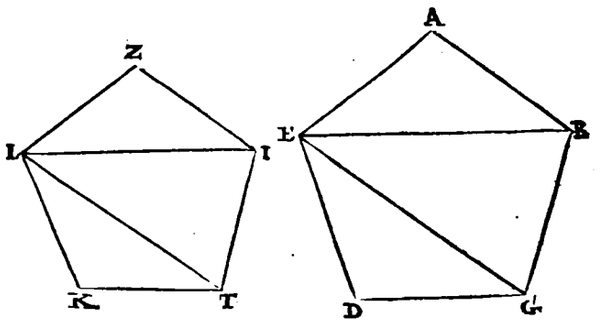
Sint bina triãgula A B G *maius &* D E Z *minus ſimilia, angulos* A G B *angulis* D Z E *æquos habentia: Dico triangulum ad triangulum duplam habere rationem, quam latus ad latus, ſcilicet* B G *ad* E Z. *Quoniam enim triangula ſunt æquiangula, per* I *diffinit. huius, proportionaliter erit* A B *ad* D E *ſicut* B G *ad* E Z *per 4 huius. Sit autem vt* B G *ad* Z E *ſic (per* I I *huius)* Z E *ad* B I. *Tres itaque proportionales erunt, quarum prima* B G *ad tertiam* B I *duplam habet rationem, quam ad ſecundam* E Z *per* I O *diffinitionem quinti. Quia verò* A B *ad* D E *ſupponitur vt* B G *ad* E Z, *& vt* E Z *ad* B I. *Erit* A B *ad* D E *vt* E Z *ad* B I *reciprocè, per 2 diffinitionem huius. Quare (per ſecundam partem* I 5 *huius) æqualia erunt* A B I *&* D E Z *triangula, cùm anguli* E *&* B *ſint æquales. Eſt autem* B G *ad* B I *baſim, vt triangulum* A B G *ad* A B I *per primam huius. Eſt igitur* B G *ad* B I *vt* A B G *ad triangulum* D E Z, *æquum ipſi* A B I. *Sed* B G *ad* B I *duplam oſtenſa eſt habere rationem, quam latus* B G *ad latus* E Z. *Triãgulum igitur* A B G *ad trian-*



gulum DEZ, *duplam habet rationem quam latus* BG *ad latus* EZ, *& proinde quam ſimilis rationis reliqua latera. Eadem eſt enim ratio (per* 1 *diffinitionem huius) laterum. Similia itaque triangula, adinuicem in dupla ſunt ratione, &c.*

Propoſitio vigeſima.

Similia poligona in ſimilia triangula diuiduntur, æqualia numero, & proportionalia totis: Poligonum autem ad poligonum, duplam habet rationem, quam ſimilis rationis latus, ad ſimilis rationis latus.



Sint ſimilia poligona ABGDE *&* ZITKL: *Dico ea diuidi in ſimilia triangula & æqualia numero. Et ſingula ad ſingula, eſſe vt totum ad totum poligonum. Poligona verò adinuicem habere duplam rationem laterum ſimilis rationis, ſcilicet quam* AB *ad* ZI, *vel aliud ad aliud ſimilis rationis latus. Cùm (per hypotheſim ſeu figurarum ſimilitudinem) æqualis ſit* BAE *angulus* IZL *angulo. Et circum æquales angulos proportionalia latera, ſcilicet* BA *ad* AE *ſicut* IZ *ad* ZL. *Coniunctis* BE *&* LI *rectis, æquiangula erunt, per 6 huius, triangula* AEB *&* ZLI, *& angulus* ABE *angulo* ZIL *æquus erit. Sed cùm per conſtructionem totus* ABG *toti* ZIT *angulo ſit æquus, & ablatus* ABE *ablato* ZIL, *reliquus* EBG *reliquo* LIT *æquus erit, per decimamnonam quinti: iunctis autem* EG *&* LT *rectis, quoniam eſt vt* EB *ad* AB *ſic* LI *ad* ZI *circa æquales angulos. Et ſicut* AB *ad* BG *ſic* ZI *ad* IT, *æqua ratione (per* 22 *quinti) erit vt* EB *ad* BG *ſic* LI *ad* IT. *Atqui cùm* EBG *angulus* LIT *angulo, oſtenſus ſit æqualis, æquiangula & proinde ſimilia erunt* EBG *&* LIT *triangula, per 6 huius. Quoniam enim æqualis eſt angulus,* BGD *angulo* ITK *&* EGB *ipſi* LTI. *Reliquus* EGD *reliquo* LTK *æquus erit. Et eodem argumento patebit angulos* DEG *&* KLT *æquos eſſe, & proinde (per hypotheſim & ſextam huius) triangulum* EGD *triangulo* LTK *æquum eſſe. Poligona igitur in ſimilia triangula, & numero æqualia diuiſa ſunt. Cæterùm, quia ſingula triangula ſingulis ſunt ſimilia, erit vt* AB *ad* BE *ſic* ZI *ad* IL. *Permutatim verò (per 16 quinti) vt* AB *ad* ZI *ſic* EB *ad* LI. *Sit autem* EB *commune latus triangulorum* AEB BEG. *Similis verò rationis ſit latus* LI, *commune triangulorum* ZLI ILT. *Duplam habent igitur rationum (per præfatam) ſingula triangula* AEB *ad* ZLI, *&* EBG *ad* LIT *adinuicem, quam habent ſimilis rationis latera* EB *ad* LI. *Eandem itaque adinuicem (per ſextam communem ſententiam) habebunt. Idem oſtendetur de triangulis* EGD *&* LTK *eandem habere quam* EBG *ad* LIT, *ſcilicet duplam communium* EG *ad* LT *laterum. Sed ſicut* AB *ad* ZI *ſic fuit* EB *ad* LI. *Duplam igitur habebunt ſingula triangula ad ſimilia rationem quam* AB *ad* ZI. *Totum igitur poligonum* ABGDE *ad totum* ZITKL, *eandem habens rationem (per* 12 *quinti) quam triangula ſimilia, duplam habet rationem quam* AB *ad* ZI *ſimilis rationis latera. Similia itaque poligona in ſimilia triangula diuiduntur, & æqualia numero, & proport. &c.*

Corollarium primum.

Hinc aſſumitur, omnes rectilineas figuras ſimiles, duplam habere laterum ſimilis rationis rationem. *Omnes enim figuræ rectilineæ ſimiles in ſimilia reſoluuntur triangula, pérque id demonſtratum eſt.*

Corollarium ſecundum.

Tribus datis lineis rectis proportionalibus, erit ſicut prima ad tertiam, ſic quod à prima rectilineum, ad illud quod ex ſecunda ſimile, ſimilitérque deſcriptum rectilineum. *Nempe in dupla ratione primæ ad ſecundam.*

MONITVM.

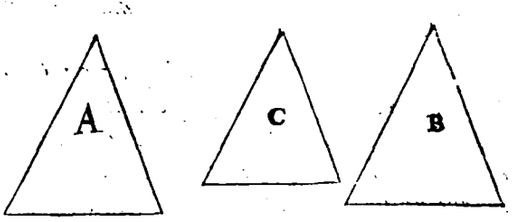
Supereſt huic theoremati obiectum imminens diſcutiendum. Ait namque ſecunda pars ſimilia poligona duplam habere laterum rationem. Quid tum cùm æqualia & ſimilia fuerint poligona? quánam arte duplam habebunt laterum rationem, iuxta huius ſententiam? Quinimò potius eandem habere non duplam comperimus.

Ad

Ad hæc, rationis duplæ aut cuiuſuis multiplicis ortum, à ſuiipſius per ſe ducta quantitate, propalant decima quinti necnon quinta huius diffinitiones: atqui æqualitatis ratio, vnitate denominata ſuiipſius quantitatem, hoc eſt, vnitatem vnitate multiplicans in ſeipſam denuò incidit, eò quòd nulli ſit alterationi obnoxia. Qua de cauſa vnitatis duplam triplam aliámque multiplicem per ſe productam, ab vnitate nuſquam receſſuram arbitremur: In rationibus nimirũ duplæ triplæ aut aliæ quæuis multiplices ſimplicis in ſe ductu gignuntur, non per quantitatum additionem ſiue vnitatum repetitionem vt apud arithmeticos, quod latius his diffinitionibus expreſimus. Idcirco rationẽ æqualitatis ab vnitate denominauimus, quod ea vnicum ſit interſtitium, inter inæqualitatum exceſſus incremento genitos, aut defectus decremento prolatos. Exceſſus quidem integris numeris vnitatem in incrementum iterantibus, defectus verò fractis eandem in decrementum repetentibus, æqualitatem autem vnitate, nulli alterationi ſubdita, incremento ſcilicet aut decremento iamdudum expoſuimus: quare æqualitatis rationem ſuiipſius multiplicem veluti vnitatem dicere non verebimur.

Propoſitio vigeſimaprima.

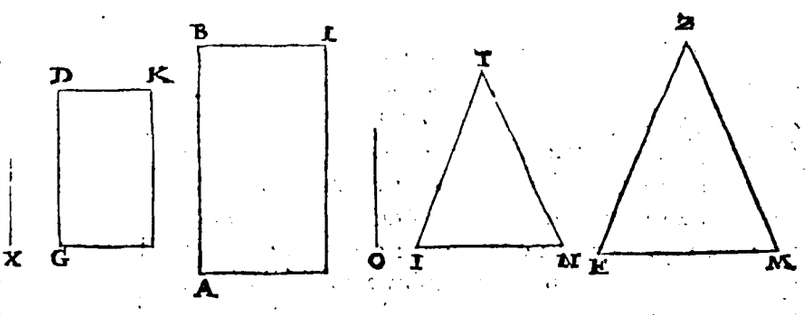
Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & adinuicem ſunt ſimilia.



Sint eidem rectilineo C *ſimilia rectilinea* A *&* B: *Dico ipſa* A B *eſſe ſimilia. Cùm enim* A *&* B *ſint ipſi* C *ſimilia, æquales ipſi* C *habent angulos, per primam diffinitionem huius ergo & adinuicem (per primam communem ſententiam) æquales: quia verò circumæquales angulos ipſi* C *habent latera proportionalia, hoc eſt, eiuſdem rationis, per primam diffinitionem, & adinuicem circumæquales angulos latera habebunt eiuſdem rationis, per vndecimam quinti. Quæ itaque eidem rectilineo ſunt ſimilia, & adinuicem (per primam diffinitionem huius) erunt ſimilia.*

Propoſitio vigeſimaſecunda.

Si quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, quę ab eis rectilinea ſimilia, ſimilitérque deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi quæ ab eis rectilinea ſimilia, ſimilitérque deſcripta proportionalia fuerint, ipſę quoque rectę lineæ proportionales erunt.



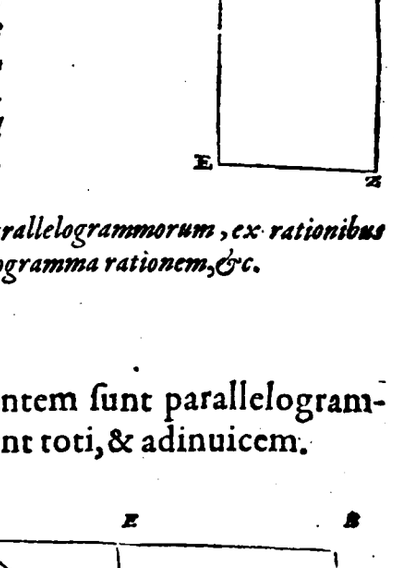
Exponantur quatuor rectæ lineæ proportionales, A B *ad* G D *vt* E Z *ad* I T: *Dico rectilinea ex* A B *&* G D *ſimilia, eam adinuicem ſeruare rationem, quam rectilinea ſimilia ſimilitérque deſcripta, ex* E Z *&* I T *ad ſe ſeruant: Datis* A B G D *tertiam* X, *ipſis verò* E Z I T *tertiam* O *proportionalem (per vndecimam huius) inueniamus. Erit igitur ſicut prima* A B *ad tertiam* X, *ſic* A B L, *à prima deſcriptum, ad* G D K *à ſecunda deſcriptum ſimile rectilineum, per ſecundum corollarium vigeſimæ huius, & per idem corollarium* E Z *ad* O *ſicut* E Z M *rectilineum ad* I T N: *ſed cùm ſit* A B *ad* G D *vt* E Z *ad* I T, *&* G D *ad* X *vt* I T *ad* O, *erit æqua ratione (per vigeſimã ſecundam quinti) vt* A B *ad* X *ſic* E Z *ad* O. *Sicut itaque* A B L *ad* G D K *ſic* E Z M *ad* I T N, *per vndecimam quinti, quæ ab eis itaque rectilinea ſimilia proportionalia erunt, Sed iam ad ſecũdum, ſunto quæ ex* A B *&* G D *ſimilia (*A B L *&* G D K*) in ea ratione qua ex* E Z *&* I T *ſimilia,* E Z M *&* I T N: *Dico ipſas* A B *ad* G D *eſſe vt* E Z *ad* I T, *cùm enim ea rectilinea ſint in eadem ratione, per hypotheſim, & rationem habeant laterum* A B *ad* G D, *&* E Z *ad* I T *duplam, per corollariũ vigeſimæ huius, ipſa laterum ratio (per ſeptimam communem ſententiam) eadem erit, ſcilicet* A B *ad* G D *vt* E Z *ad* I T. *Si itaque quatuor rectæ lineæ, &c.*

MONITVM.

Subnectit Theon huic theoremati lemma secundæ parti huius obaudiens, cui obiicit ostendendam esse æqualitatem laterum, cùm rectilinea sunt æqua & similia quod ab huius theorematis sententia secernitur, quæ tantùm similes rationes non laterum excessus, æqualitates aut defectus exoptat, illæ vtique similes sub generali proportionalium demonstratione satis supérque fouentur. Non enim æqua & similia esse possunt absque æqualium rectarum descriptione. Id equidem lemma non inconsulto prætermisimus, tanquam minimè necessarium. Sed potiori obiecto occurrentes, prælibatæ vigesimæ monitum impendimus quo periculum ex æquis similibus emergens erumpamus.

Propositio vigesimatertia.

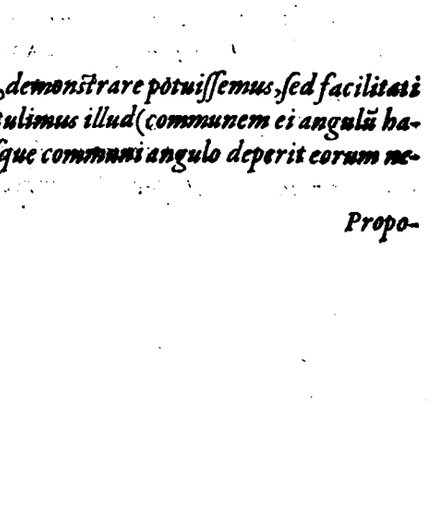
AEquiangula parallelogramma, rationem adinuicem habent, compositam ex lateribus.



Quia demonstrauimus decima diffinitione quinti, & quinta huius extremorum rationes ex mediorum rationibus constare, Proponamus bina parallelogramma æquiangula, quorum singuli æquales anguli in G *concurrant, sintq́;* A B G D *&* G E Z I, *sit autem in rectum* B G I *recta reliqua* E G D (*per conuersam* 15 *primi*) *in rectum erit, & perficiatur parallelogrammum* G T: *Dico rationem* A G *ad* G Z *parallelogrammorum, componi ex rationibus laterum* B G *ad* G I *&* D G *ad* G E, *quoniam tres sunt magnitudines* A G G Z *& earum media* G T, *ratio extremarum* A G *ad* G Z *constat ex rationibus mediis, per quintam diffinitionem huius, scilicet* A G *ad* G T *&* G T *ad* G Z, *sed ratio* A G *ad* G T *eadem est rationi* B G *ad* G I *laterum, per primam huius, ipsius verò* G T *ad* G Z *ratio, eadem est rationi alterius lateris,* D G *ad reliquum* G E, *per eandem. Constat igitur ratio* A G *ad* G Z *parallelogrammorum, ex rationibus laterum* B G *ad* G I *&* D G *ad* G E. *Æquiangula igitur parallelogramma rationem, &c.*

Propositio vigesimaquarta.

Omnis parallelogrammi quę circa dimetientem sunt parallelogramma, communem ei angulum habentia, similia sunt toti, & adinuicem.



Sit parallelogrammum A B G D *cuius dimetiẽs esto* A G, *circa quam existant parallelogramma* E K *&* T I *communes ei angulos habentia ad* A *&* G: *Dico ea scilicet* E K, T I *similia esse toti* D B, *& adinuicem, quoniam parallelogrãma sunt* B D, E K *&* T I, *in parallelas* A E B, K Z T *&* D I G *siue* A K D, E Z I, K T G *cadens* A Z G *recta. Angulos* E A Z *ipsi* K K Z A, E Z A *ipsi* K A Z, T Z G *ipsi* Z G I, T G Z *ipsi* I Z G, B A G *ipsi* A G D, *ac* B G A *ipsi* D A G *æquos* (*ex* 29 *primi*) *efficit: reliquos itaque* B *ipsi* D, E *ipsi* K, *&* T *ipsi* I (*per* 1 *coroll.* 32 *primi*) *æquales, haud secus faciet. AEquiangula igitur & ideo similia sunt triangula* A B G *ipsi* G D A, A E Z *ipsi* Z K A, *&* Z T G *ipsi* G I Z, *sicut ideo* A B *ad* B G *sic* A E *ad* E Z, *ac* Z T *ad* T G, *sub iis itaque rectis comprehensa parallelogramma* A B G D, E K T I *similia sunt, ex prima diffinitione huius. Omnis itaque parallelogrammi quæ circa dimetientem sunt, &c.*

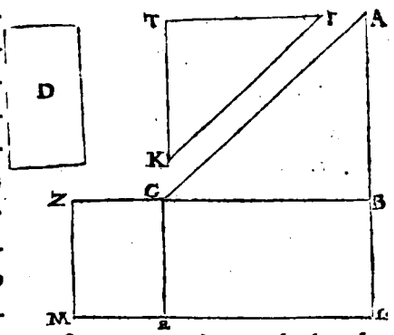
MONITVM.

Ampliori fastu hanc per 2 *huius, & per* 16 *&* 18 *quinti, demonstrare potuissemus, sed facilitati consulentes, compendium prolixitati prætulimus. Insuper contulimus illud (communem ei angulũ habentia) tãquam necessariam conclusioni generandæ: nam absque communi angulo deperit eorum necessaria similitudo, vt proxima* 26 *patebit.*

Propo-

Propositio vigesimaquinta. Problema 7.

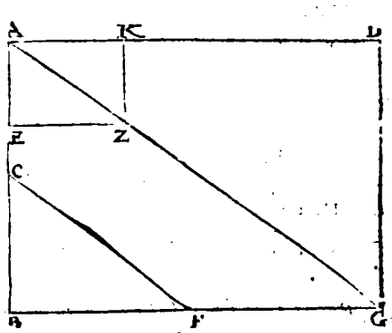
Dato rectilineo simile, & alij dato æquale, idem constituere.



Esto datum rectilineum A B G, *cui oporteat simile constituere, & ipsi* D *dato æquale. Ad datam rectam* B G *dato* A B G, *æquale constituatur rectangulum* B G E L, *per 45 primi, producta verò* B G *in* Z *ad rectam* G E *angulúmque* Z G E *ipsi* D, *æquum rectangulum sit* G E Z M. *Rectis porrò* B G G Z *media proportionalis inueniatur* I T, *per 13 huius, à recta* I T *dato* A B G *simile describatur rectilineum* K I T, *per 18 huius: Dico* K I T *simile dato* A B G, *æquúmque esse dato* D, *cùm sint tres proportionales* B G, I T, G Z *rectæ, erit* B G *ad* G Z *tertiam, dupla ratio quam eiusdem* B G *ad secundam* I T, *per 10 diffinitionem quinti. Sicut* B G *ad* G Z, *sic per primam huius rectangula* B E *ad* G M. *Ipsa igitur* B E *&* G M *duplam habent rationem quam* B G *ad* I T, *sed duplam quam* B G *ad* I T *habent,* A B G *&* K I T, *per 20 huius. sicut igitur* B E *ad* G M, *sic* A B G *ad* K I T, *vicißim igitur erit* B E *ad* A B G *vt* G M *ad* K I T, *per 16 quinti. Æquale est autem* B E *ipsi* A B G, *æquale igitur erit (per 14 quinti)* G M *ipsi* K I T: *eidem verò* G M *æquum fuit* D *datum, ipsi itaque* D *dato æquum erit* K I T, *simile autem descriptũ ipsi* A B G *dato. Dato igitur rectilineo simile, & alij dato æquale idem constituimus.*

Propositio vigesimasexta.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem angulum habens ei, circum eundem demetientem est toti.



A parallelogrammo A B G D *parallelogrammum auferatur* A E Z K, *simile & similiter positum toti* A B G D, *& insuper communem habens angulum* A, *cum toto: Dico vtriusque dimetiẽtem* A Z *&* A Z G *eandem esse rectam, sectis bifariam* A B *&* B G *lateribus in* C *&* F, *iuncta* C F *parallela erit rectæ* A G, *per corollarium secundum 39 primi, quare anguli* B A G *&* B C F *æquales erunt per 29 primi, atqui angulo* B A G *æquus est* E A Z *angulus, ex parallelogrammorum posita similitudine. Idem itaque* E A Z *angulus angulo* B C F *æqualis erit, exterior interiori opposito, parallelæ igitur erunt* A Z *&* C F, *per 28 primi, sed* A Z *&* A G *eidem* C F *parallelæ concurrunt in* A, *ipsæ itaque in rectum sunt positæ, per 30 primi. Parallelogramma ideo* A B G D *&* A E Z K *circa eandem sunt dimetientem. Sit igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, &c.*

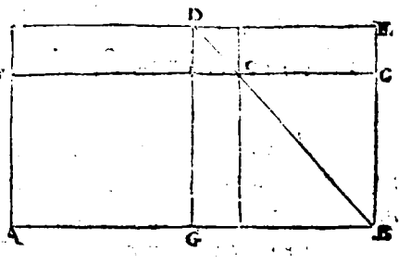
MONITVM.

Demonstrationem huius mutauimus, eò quòd plures ab impossibili eam demonstrant negatiuam destruentes. Nos autem affirmatiuam probatam plus congruere rati, hanc breui admodum argumẽto concluſimus, vt insuper ad parallelogramma externa similia similiter posita, ac ad idem A *signum angulos habentia, extẽdatur. Semper enim figurarum similitudo, & similis positio efficit angulos* A Z B *&* A G B *æquales, vt prima huius diffinitione diximus, & proinde ad rectam* E Z *cadentes rectas* A Z Z G, *per 14 primi vnicam efficere rectam.*

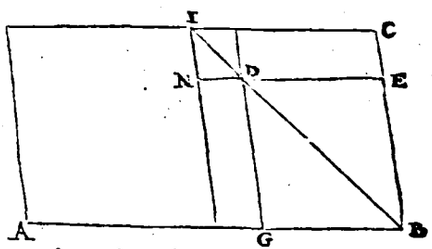
Propositio vigesimaseptima.

Omnium parallelogrammorũ ad eandem rectam lineam applicatorum deficientiúmque specie parallelogrammis similibus similitérque positis, ei quod à dimidia descriptum est, maximum id est, quod ad dimidiam applicatum parallelogrammum, simile existens ei quo deficit.

Secetur AB *recta bifariam in* G, *ad dimidiam autem* GB *aliquod applicetur parallelogrammum* GE, *cuius dimetiens sit* DB: *quoniam parallelogrammum quo deficere debet aliud applicatum, est simile ipsi* GE (*quod à dimidia*) *& similiter positum, ipsum erit circa eundem dimetientem* DB, *per præcedentẽ. Nam eorum communis angulus est* B, *quare vt applicatum ad rectam* AB, *deficiat à recta* AB *simili ipsi* GE, *à signo* A, *vsque ad dimetientem id describi necesse est. Sit igitur applicatum* AI, *id verò quo deficit ad complementum rectæ* AB, *sit* IB



simile existẽs ipsi GE, *quod scilicet ad dimidiam: Dico omnium parallelogrammorum ad ipsam* AB *sic applicatorum inter* A *& rectam* DB, *maximum esse id quod applicatur ad dimidiam, scilicet* AD *vel* GE *sibi æquale. Si enim applicatum tangat rectã* DB *inter* D *&* B, *sit* AI: *Dico* AD *maius esse ipso* AI. *Cùm* IE *&* IG *supplementa sint æqualia, per 43 primi,* FD *verò &* DC (*per 36 primi*) *sunt similiter æqualia. Est autem* FD *maius ipso* IE *cum sit æquum ipsi* DC, *maius igitur erit* FD *ipso* IG. *Commune addatur* FG, *maius itaque erit* AD *ipso* AI. *Sed ipsi* AD *æquũ est* GE *per 36 primi, igitur* GE *maius est ipso* AI, *parallelogrammo quidem* DI. *Si verò* AI *tangat* DB *extrinsecus, sit vt in sequenti figura: Dico* FGE *maius esse ipso* AI. *Cùm enim æqualia sint* FG GC, *per 36 primi, & æqualia sunt* DC NG (*per 43 primi*) *supplemẽta. Ab æqualibus itaque* FG GC *æqualia auferantur* NG DC. *Reliquum scilicet* AI *cùm quadrangulo* ID, *simul sumptum, æquum erit reliquo* GE *quod ad dimidiam* GB *applicatum est. Eodem igitur quadrangulo* ID *maius erit* GE *ipso* AI. *Omnium itaque parallelogrammorum, ad eandem, &c.*



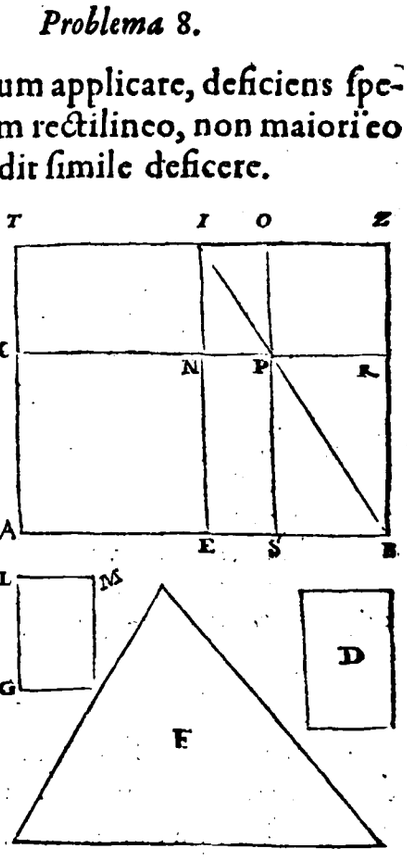
MONITVM.

Voces propositionis (græcum imitantes) variauimus, vt proiectum ad lineam applicatum intelligatur, sumptum verò, quo in fine vtitur, id quo deficit proiectum, censendum est.

Propositio vigesimaoctaua. Problema 8.

Ad datam rectam lineam parallelogrammum applicare, deficiens specie parallelogrammo simili dato, æquale autem rectilineo, non maiori eo quod ad dimidiam sic applicatur, vt id cui expedit simile deficere.

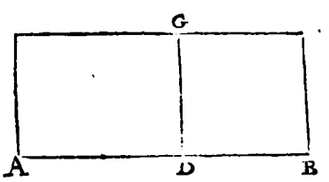
Recta linea AB *bifariam secetur in* E, *Oportet iam ipsi* AB *applicare parallelogrammum deficiens specie parallelogrammo simili ipsi* D *dato. AEquale autem rectilineo* F, *quod quidem non est maius eo parallelogrammo quod super dimidiam* AB *sic applicatur, vt ipsum* D, *simile similitérque positum. Ad rectam igitur* EB *ipsi* D *simile applicetur* EBZI, *per 18 huius, & perficiatur* TB. *Quoniam autem* F (*cui æquale expedit applicare*) *non est maius eo quòd ad dimidiam* AE *applicatur, scilicet ipso* AI. *Si fuerit ei æquale, consequimur optatum. Nam ad rectam* AB *applicatum est* AI, *deficiens specie ipso* EZ *simili dato* D, *æquale autem est* AI *dato* F *rectilineo, non maiori (sed ex hypothesi æquali) eò quòd ad dimidiam* AE *sic quidem applicatur, vt* D, *cui expedit simile* EZ *deficere. Si verò* F *cui æquum applicandum est, sit minus ipso* AI, *cui æquum est* EZ. *Sit minus aliquo rectilineo, ei porrò rectilineo æquum, simile verò ipsi* EZ (*per 25 huius*) *describatur* GLM, *rectæ autem* LM *æqualis sit* IO *ipsi verò* LG *æquetur* IN, *& perficiatur parallelogrammum* IP. *Quod quidem est æquum ipsi* GM, *simili verò ipsi* EZ *toti similitérque positum. Quare circum eundem dimetientem est toti* EZ, *per 26 huius, coniungatur recta* IPB *dimetiens, ipsis* EZ NO *communis, producantur*



tur O P *quidem in* S, *&* N P *in* C *&* R *latera parallelogrammi* T B: *Dico* A P *esse applicatum ad rectam* A B, *deficiens specie ipso* S R *simili ipsi* D, *æquum autem ipsum* A P *dato* F *rectilineo. Cùm autem* E Z *excedat (per hypothesim) rectilineum* F *ipso* G M, *hoc est ipso* N O. *AEquum erit* F *gnomoni* N S S Z. *Quia verò* A N N B *sunt (per 36 primi) æqualia. Si eis æqualibus æqualia* N S *&* P Z *(per 43 primi) addas, totum* A P, *gnomoni* N S S Z *æquum erit, per 2 commun. sententiam. Et proinde ipsi* F, *eidem gnomoni æquo ostensо. AEquum igitur erit* A P *ipsi* F. *Quoniam autem à parallelogrammo* E Z *parallelogrammum* S R *aufertur, circum eundem dimetientem. Simile erit* S R *ipsi* E Z, *per 24 huius. Et proinde ipsi* D *eidem* E Z *simili positóque similiter. Ad datam igitur rectam* A B *parallelogrammum* A P *applicauimus, deficiens specie ipso* S R *simili dato* D. *AEquale autem (ipsum* A P*) dato* F *rectilineo, non maiori eo (scilicet* A I*) quod ad dimidiam* A E *sic applicatur, vt id (scilicet* D*) cui expedit simile deficere* S R.

Corollarium.

Colligemus, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens specie quadrata, ipsum applicatum æquum erit, ei quod sub segmentis per applicationem factis propositæ rectæ cõtinetur. *Nam reliquum lineæ segmentum æquum est, reliquo parallelogrammi applicati lateri. Cùm sint latera eiusdem quadrati, vt* A G *constat ex* A D, D B, *vel* D G.

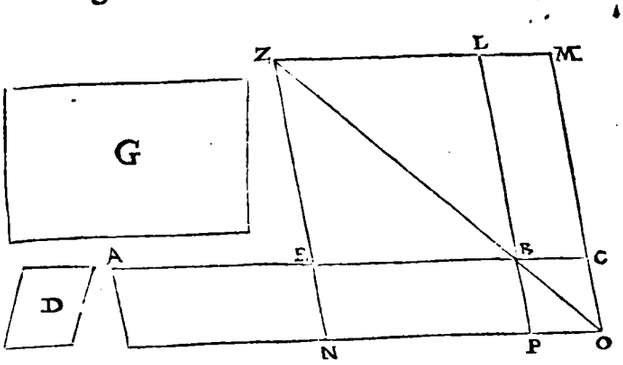


MONITVM.

Diximus parallelogrammum applicandum non maius optari, eò quòd ad dimidiam sic applicatur, vt id cui expedit simile deficere, vt Campani & Theonis dicta clarius resonemus, atque ad dimidiam applicatum E Z, *similiter applicandum fuisse, vt id* D *cui expedit simile deficere scilicet* S R, *similiter ipsi* D *positum intelligentes, ne possit defectus* S R *transponi, manēte* F *maiore applicato* E Z, *ipsum verò* F *eodem* E Z *non maius, nam si tantùm simile non autem similiter positum proponeremus. Quandoque ob situum differentiam, non supereſſet locus inter* A *& dimetientem* I B, *ad applicandùm ipsi* F *æquum, specie deficiens simili ipsi* D *dato, quod minimè intelligentes quidam dixerunt hanc in errorem posse inducere, etiam bene exercitatos, licet nihil admirandæ difficultatis extet geometriæ rudimenta intelligentibus. Insuper, liberiora sunt problemata theorematis, necessariam hypothesim sequentibus.*

Propositio vigesimanona. Problema 9.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale, parallelogrammum comparare, excedens specie parallelogrammo simili dato.

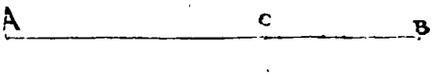


Esto data recta A B *quæ bifariam in* E *secetur, datum verò rectilineum cui æquale comparandum est, sit* G: *cui verò simili excedet sit* D. *Ad rectam* E B *simile (per 18 huius) ipsi* D *ponatur* E B Z L. *binis autem* E L *&* G *æquale, ipsi verò* D *vel* E L *simile, ad angulum* Z *ponatur (per 25 huius)* Z M O N, *& ducta* L B *in in* P, *ac* E B *in* C, *dimetiētique* Z B O *perficiatur* N A *parallelogrammum, quoniam æquale est totum* M N *binis* E L *&* G, *communi ablato* E L, *reliquum* G *reliquo gnomoni* E P M *æquum erit: sed quia (per 43 primi)* M B *ipsi* B N *supplemēto, &* (*per primam huius*) B N *ipsi* A N *sunt æqualia, erit* B M *ipsi* A N *æquale, & proinde totum* A O *gnomoni* E P M *æquum erit. Atqui eidem gnomoni æquale ostensum est rectilineum* G, *æquum igitur erit* A O *eidem* G *rectilineo: cùm autem similia sint* E L *&* N M *parallelogramma, circa eandem erunt dimetientem, per 26 huius, reliquum igitur* P C *quod circa eandem dimetientem est toti* N M, *eidem simile erit, per 24 huius, & proinde ipsis* E L *vel* D *simile erit* P C. *Ad datam itaque rectam* A B, *dato rectilineo* G, *æquale parallelogrammum comparauimus* A O, *excedens specie rectam* A B *parallolegrammo* P C *simili dato* D.

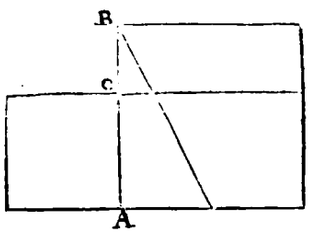
Propositio trigesima. *Problema* 10.

Datam rectam lineam terminatam, extrema & media ratione secare.

Seccetur recta linea AB (*per* 11 *secundi*) *in* C, *erit quod sub* AB BC *æquum ei quod ex* AC. *Tres igitur* AB AC *&* BC *sunt* (*per secundam partem* 17 *huius*) *sicut tota* AB *ad maius segmentum* AC, *sic maius* AC *ad minus* BC. *Recta itaque* AB *extrema & media ratione secta est in* C, *per* 3 *diffinitionem huius.*



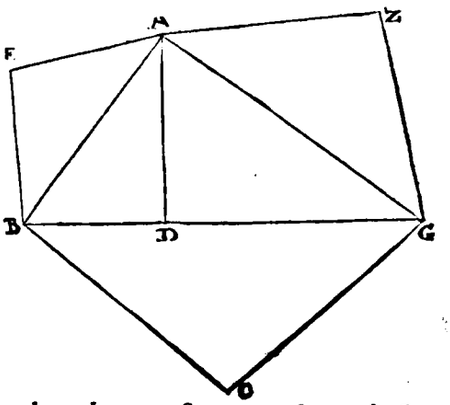
Poterat hæc admiranda sectio prolixius demonstrari, applicato ad rectam AB *excedente quadrata specie, quadrato suiipsius æquali, per* 29 *huius. supererit in quadrato ex* AB *rectangulum sub tota* AB *& minori segmento* CB, *æquum quadrato excedenti, scilicet ei quod ex maiori segmento* AC, *quorum latera reciprocè* (*per* 14 *huius*) *totam ad maius, vt maius ad minus segmentum proportionales efficiunt. Hanc sic ostenderunt plurimi.*



Propositio trigesimaprima.

In triangulis rectangulis quę à rectum angulum subtendẽte latere speciẽs, equalis est eis quæ à rectum angulum comprehendentibus lateribus speciebus similibus similitérque descriptis.

Esto triangulum rectangulum ABG, *cuius angulus sit rectus: Dico quæuis poligona similia similitérque descripta, à lateribus* AB, AG, *rectum continentibus angulum, æqualia esse ei, quod simile similitérque describetur, à latere* BG *rectum angulum subtendente. Demittatur ab angulo* A *recto in basim perpendicularis* AD, *quoniam* (*per* 8 *huius*) *similia sunt triangula* ABG, ADG *&* ADB, *erit* BG *ad* BA *vt* BA *ad* BD. *Quod igitur à prima* BG *similiter descriptum, ad id quod à secunda* BA, *erit* (*per coroll.* 20 *huius*) *sicut prima* BG *ad tertiam* BD, *simili argumẽto quod ex eadem* BG, *erit* AD *quod ex* GA, *sicut* BG *ad* GD. *Nam* GA *est media inter* BG GD, *per coroll.* 8 *huius.*



Conuertendo igitur (*per coroll.* 4 *quinti*) *erit quod ex* BA *ad quod ex* BG, *sicut* BD *ad* BG, *& sicut insuper quod ex* AG *ad quod ex* BG, *sic* GD *ad* BG. *Sex igitur sunt magnitudines, quod ex* BA *prima, ex* BG *secunda,* BD *tertia,* BG *quarta, quod ex* AG *quinta, &* GD *sexta: composita itaque prima & quinta scilicet quæ ex* AB *&* AG, *ad secundam ex* BG, *erunt vt tertia & sexta* BD GD *rectæ, ad quartam* BG, *per* 24 *quinti, sed* BD GD *sunt ipsi* BG *æquales, cùm sint partes totius, quæ igitur ex* AB *&* AG *ei quod ex* BG *speciei similiter descriptæ, æquales erunt species. In triangulis itaque rectangulis, quæ à rectum angulum, &c.*

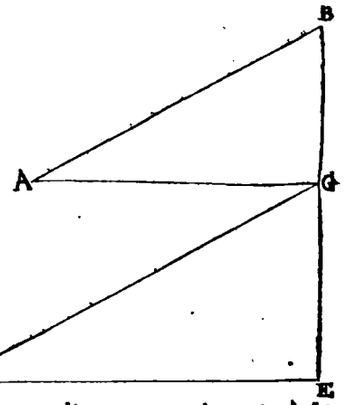
Aliter.

Vt autem noscamus hanc originem à 47 *primi duxisse, per eam hanc demonstrabimus compẽdio. Cùm enim ex* AB AG *quadrata, ei quod ex* BG *quadrato, sint æqualia, per* 47 *primi. Sed ab ipsis rectis similes descriptæ species, quadratorum habent rationem, per* 20 *sexti: nempe duplam similis rationis laterum. Ergo ab ipsis* AB AG *similes species ei, quæ ex* BG *simili æquales sunt speciei, per* 11 *quinti.*

Propositio *trigesimasecunda.*

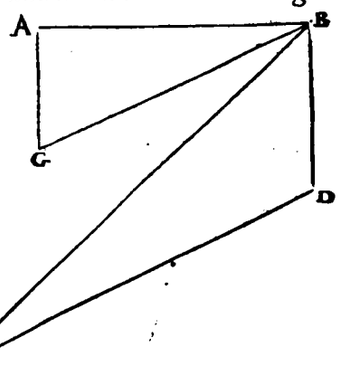
Si inter duo triangula eorum bina latera angulum componãt, eáque binis reciproca fuerint & parallela, reliqua triangulorum bina latera, in rectã lineam erunt.

Triãgulorum A B G *&* D G E *bina latera* A G G D *angulum* A G D *componant, Sintque ea latera binis aliis lateribus reciproca & parallela, ſcilicet ipſis* A B, D G, *ſicut quidem* D G *ad* A B, *ſic* D E *ad* A G, *parallelæ verò* A G D E *inuicem, &* G D, A B *adinuicem: Dico reliqua triangulorum* A B G, D E G *latera ſcilicet* B G, G E *in rectam eſſe lineam. Cùm parallelæ ſint* A B, D G *in eas cadens* A G *angulos* B A G A G D *efficit æquales, per 29 primi. Quia verò parallelæ ſunt* A G D E *in eas cadens* D G *angulos* A G D G D E, *ſimiliter æquos efficit, per eandem. Aequales igitur erunt* B A G G D E *adinuicem, eidem namque* A G D, *æquales. Circum autem æquales angulos latera proportionalia* D G *ad* A B, *vt* D E *ad* A G *oſtenſa ſunt. Aequiangula itaque erunt* A B G, D G E *triãgula, per 6 huius, & angulum* D G E, *ipſi* A B G, *æquum habebunt. Quare & totum* A G E *angulum binis* A *&* B *angulis æquum, & proinde binos* A G E *&* A G B *duobus rectis æquales, per 32 primi, cùm ſint æquales tribus trianguli* A B G *angulis: quia igitur ad rectam aliquam* A G, *duæ rectæ* B G G E, *duobus rectis æquales efficiunt angulos, ipſæ* B G G E *in rectam lineam erunt per 14 primi. Si igitur duorum triangulorum bina latera, &c.*



MONITVM.

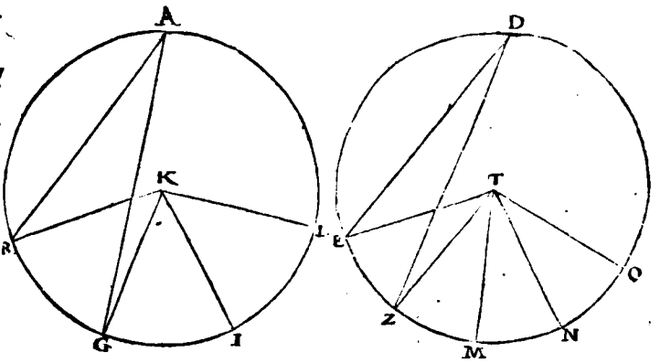
Hoc theorema reperimus velut confuſum, cuius licet ponantur à Theone ſumptæ hypotheſes, non ſemper ſequetur haberi neceſſariam concluſionem, ſupponit quidem triangula componi ad vnum angulum, cùm debeat tantùm duo triangulorum latera, inter quæ nullum aliud cadit latus angulum componentia proferre. Bina etenim triangula A B G *&* D B E *(ſiquidem Theonem inſequamur) ad vnum angulum abſque angulorum communitate componi non poſſunt: ſi verò ad ſignum concurrere intelligat, nec id ſubſiſtet. Duo nanque triangula* A B G D B E *cõponuntur ad vnũ angulum* B, *duo latera* A G G B *duobus* B D D E *proportionalia habentia, vt ģ eiuſdẽ rationis latera ſint parallela, ſcilicet* A G *ad* B D *&* G B *ad* D E. *Huc vſque ſeruata hypotheſi incorrupta, nihilominus abeſt concluſio, ſcilicet reliqua latera* A B B E *eſſe in rectum poſita. Cãpanus autem nulla ſupponit in hypotheſi triangula, & tamen poſtmodum triangula concludit, ſuper eandem rectam conſtitui, quæ confuſiones eos hanc quodammodo intellexiſſe fatẽtur, poſteris autem tradidiſſe minimè. Qua de re, quod Geometriæ plus conducere arbitrati ſumus Euclidem ſenſiſſe diximus. Duo quippe triangula duobus ſingulorum lateribus vnicum angulum componere, & inſuper ea angulum componentia latera ſingula, ſingulis aliis parallela eſſe, eáque eadem ad ſibi parallela latera rationes habere reciprocas. Nam id cogit triangula tandem æquiangula fieri: ſi etenim angulum conſtituentia, ad parallelas ſimiles haberent rationes, reliquæ in rectam non caderent lineam. Ea quippe de cauſa videmus Theonem ſua demonſtratione tacuiſſe angulum, ex hypotheſi memoratum, ſcilicet* A G D, *cùm eius anguli latera ſimilem non habeãt ad parallela, ſed reciprocam rationem. Aſſumitur autem hoc theorema demonſtrandis poſt vndecimum librum propoſitis maximè decimoſeptimo decimi tertij ac aliis pleriſque.*

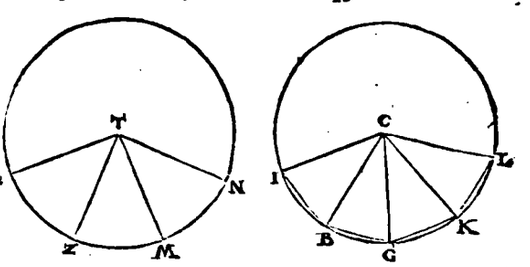


Propoſitio trigeſimatertia.

In æqualibus circulis anguli, eandem habent rationem ipſis circunferentiis in quibus conſiſtunt, etſi ad centra, etſi ad circunferentias fuerint conſtituti, tum etiam ſectores ad centra conſtituti.

Sint in æqualibus circulis ABG *&* DEZ *anguli* BAG *&* EDZ *ad circunferentias. Sint autem ad centra* BKG *&* ETZ*: Dico esse vt* BG *arcum ad* EZ *arcum, sic angulum* BKG *ad* ETZ*, sic & angulus* BAG *ad* EDZ*. Ponantur ipsi* BG *æquales* GI *&* IL*. Ipsi verò* EZ *æquales sint quotuis* ZM MN NO *per* 28 *tertij, coniunctis* KI KL TM TN *&* TO*. Quoniam æquales sunt arcus, æquales erunt qui eis insistũt anguli, per* 26 *tertij. Quotuplex itaque est totus* BKL *angulus, ipsius* BKG *anguli, totuplex erit totus* BL *arcus ipsius* BG*. Similiter quotuplex erit* OTE *anguli* ETZ*, totuplex erit* EO *ipsius* EZ *arcus. Quare si* BL *arcus excedat* EO *arcum,* BKL *angulus, excedet* ETO *angulum, si deficiat deficiet, & si æquetur æquabitur. Quatuor igitur sunt magnitudines, scilicet* BKG *&* ETZ *anguli,* BG *&* EZ *arcus. Quarum primæ & tertiæ æquemultiplicia, scilicet* BKL *angulus, &* BGL *arcus, simul excedunt, æquantur, vel deficiunt à multiplicibus secundæ & quartæ,* ETO *angulo &* EMO *arcu. Eorum igitur simplices* BKG *angulus ad* ETZ *angulum, sunt vt* BG *arcus ad* EZ *arcum, per quintam diffinit. quinti. Quia verò qui ad circunferemias anguli* BAG *&* EDZ *dimidij sunt ipsorum* BKG *&* ETZ*, per* 20 *tertij, illi eandem ipsis habebunt rationem, per* 15 *quinti, & ideo eam quam arcus: Dico insuper sectorem* ICB *ad sectorem* ETZ *sic esse, vt arcum* IB *ad arcum* EZ*, ducantur æquales rectæ* IB BG GK KL*, quæ æquales subtendant arcus, per* 28 *tertij, & æquales angulos ad* C *centrum, per* 27 *eiusdem. Æqualia igitur erunt triangula* ICB CBG CGK *&* CKL *per* 4 *primi. Æquales item erunt sectiones* IB BG GK KL *æqualibus rectis subtensæ, cùm sint similes per* 24 *tertij. Quæ æqualibus additæ triangulis, efficient sectores,* ICB BCG GCK KCL *ex ipsis compositos æquales, per* 2 *commun. sentent. Similiter & adinuicem æquales erunt reliqui* ETZ ZTM MTN *sectores. Quotuplex igitur erit arcus* LGI *ipsius* IB *arcus, totuplex sector* ICL *sectoris* ICB *erit. Similiter quotuplex* EZN *arcus ipsius* EZ *arcus, totuplex erit* ETN *sector ipsius* ETZ *sectoris. Quatuor itaque magnitudinum* IB EZ *arcuum, &* ICB ETZ *sectorum sumuntur æquemultiplicia primæ & tertiæ, scilicet* LGI *arcus &* ICL *sector. Secundæ item & quartæ æquemulciplicia,* EZN *arcus &* ETN *sector. Si igitur multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex tertiæ excedet multiplex quartæ, si deficiat, deficiet, si æquetur, æquabitur. Earum itaque simplices magnitudines* IB *arcus, ad* EZ *arcum erunt vt* ICB *sector ad* ETZ *sectorem, per quintam diffinitionem quinti. In æqualibus itaque circulis, &c.*





MONITVM.

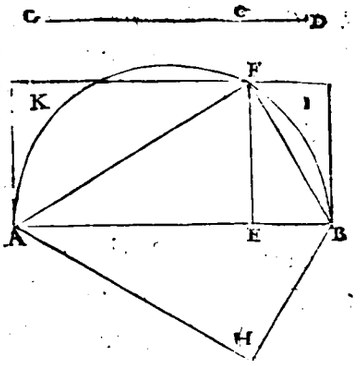
Hoc theorema planè demonstrat quod diximus nos exhibituros duodecima diffinitione primi, & octaua diffinitione tertij, magnitudinem scilicet anguli (quæ sola est linearum inclinationis varietas) vnicum habere mensorem, arcum illi subtensum, æqualibus quidem rectis contentum. Videmus namque angulorum & eos subtendentium arcuum, easdem esse rationes, quæ quantitatum sunt maximè affinitates.

Cæterùm, primi libri quadrageſimam ſeptimam & quadrageſimam octauam exponentes, à quibus originem duxit 31 *huius, multa earum obſequia data opera reliquimus, eò quòd illuc vſque nihil de rationibus ſeu proportionibus diſcuſſum erat, ne id quod eadem facilitas compendio poteſt edocere, faſtuoſa potius quàm vtili theorematum numeroſitate tradamus, eorum, quæ ab eadem* 47 *primi nata ſunt, pauca exponentes.*

Propoſitio trigeſimaquarta. Problema II.

Dato rectilineo bina æqualia rectilinea ſimilia ſimilitérque deſcripta, datam rationem habentia, exhibere.

Eſto



Esto datum rectilineum A B H, *data verò ratio sit rectarum* G C C D. *Secetur* A B *similiter ipsi* G D *in* B, *per* 10 *huius, Super* A B *autem fiat semicirculus* A F B. *A signo verò* E *rectæ* A B *perpendicularis excitetur* E F. *Coniunctis* A F F B, *ex singulis earum similia similitérque describantur rectilinea ipsi* A H B, *sintq́;* A K F *&* F I B *per* 18 *huius: Dico rectilinea* A K F *&* F I B *rationem habere datam quam* G C *ad* C D, *æqualia autem esse,* E I *quòd ex* A B *simili similitérque descripto. Quoniam semicirculus est* A F B *rectus erit* A F B *angulus, per* 31 *tertij, perpendicularis autem est* F E. *Triangula igitur* A F E F B E, *similia sunt toti* A F B *& adinuicem, per* 8 *huius. Sicut igitur* A F *ad* F B *sic* A E *ad* E F, *&* E F *ad* E B *circum æquales angulos, per* 4 *huius. Sicut igitur quòd ex* A F *ad quod ex* F B *sic quod ex* A E *ad id quod fit ex* E F *simile, per* 22 *huius. Sed sicut quod ex* A E *prima ad ex* E F *secunda, sic prima* A E *ad tertiam* E B *per* 2 *coroll.* 20 *huius. Quod itaque ex* A F *ad id quod ex* F B, *sic* A E *ad* E B. *Sed sic fuit ratio data* G C *ad* C D. *Sicut itaque* G C *ad* C D *sic quod ex* A F *ad simile ex* F B *similitérque descriptum. Quæ autem ex* A F *& ex* F B *æqualia sunt similiter descripto ex* A B, *per* 31 *huius. Dato itaque rectilineo bina æqualia rectilinea, &c.*

Corollarium primum.

Datum rectilineum in bina rectilinea similia ex rectis rationem datam habentibus resoluere. *Nam si in ratione proposita dentur tres rectæ & secetur* A B *in ratione primæ ad tertiam proportionalem, quæ ex* A F F B (*rationem sectionum* A E *ad* E B *habentia*) *duplam habebunt quam* A F *ad* F B *rationem, per primum coroll.* 20 *huius. Rectæ igitur* A F *&* F B *dimidiam eorum rationem habentes, erunt sicut trium prima fuit ad secundam, nam prima ad tertiam* (A E *ad* E B) *duplam habet quam ad secundam ex decima diffinitione quinti.*

3
2
1

Corollarium secundum.

Hinc assequimur, A dato rectilineo ordinatam partem auferre, reliquum simile toti relinquentes. *Nam si secetur à recta* A B *pars ordinata* E B, *per* 9 *huius, erit sicut* A E *ad* E B, *sic simile ex* A F *ad quod ex* F B, *ablato igitur ab eo quod ex* A B, *eò quòd ex* F B, *reliquum quod ex* A F *supereſt, simile similitérque positum toti quod ex* A B *dato.*

Corollarium tertium.

Bina similia rectilinea in simile ac eisdem æquale rectilineum componere. *Constituantur eorum similia latera ad angulos rectos, vt* A F F B, *tum quod à subtendente* A B *simile similitérque positum reliquis* (*per* 18 *huius*) *fiet, æquum erit per* 31 *huius binis.*

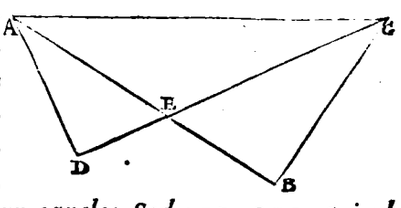
MONITVM.

Cur autem non deduxerit Euclides modum proportionis similium rectilineorum, veluti de lineis dixit decima huius & tribus eam sequentibus. Id equidem absoluit 22 *huius. Nam duobus datis rectilineis similibus tertium scrutari proportionale. Item duobus datis medium perquirere. Tribus quoque datis quartum simile similitérque descriptum, & id genus proportionum per linearum proportiones reperiemus. Si binis similis rationis lateribus tertium demus proportionale, per* 11 *huius. Ex eo rectilineum descriptum tertium erit proportionale, per* 22 *huius. Siquidem binis lateribus medium proportionale* (*per* 13 *huius*) *detur latus. Ex eo descriptum, medium proportionale rectilineũ similiter erit. Haud secus si tribus datis quartũ latus, per* 12 *huius, detur proportionale, ex ipso descriptum rectilineum simile, quartum erit proportionale. Nam si rectæ lineæ sint proportionales, ex eis descripta similia* (*per* 22 *huius*) *proportionalia erunt. Licet tamen ea vigesima secunda quatuor proponat rectas. Idem sentiendum est de tribus, nempe cum bis repetetur media, fient quatuor, quod vnum ac idem est hoc loco, horum vltimum reliquit Euclides, scilicet binis datis, bina media continuè proportionalia scrutandum, discentibus simul ac docentibus, vt ludant eorum ingenia in*

huiuſmodi problemate diſquirendo, quouis vſu mechanico poſtpoſito. Quoniam autem pauca propoſuit Euclides de ratione reciproca quam diffinientes Campanus & Theon longè à vero ſenſu traditam reliquerunt, nos diſcentium exercitio conſulentes, aliqua theoremata huius rationis enunciata ſelegimus.

Propoſitio trigeſimaquinta.

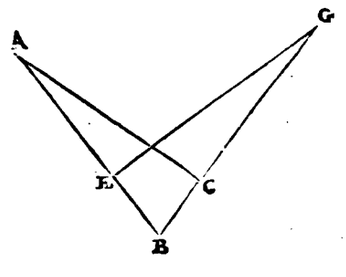
Si binæ rectæ lineæ ſeſe ad obtuſum angulum ſecuerint, à ſecantium autem limitibus perpendiculares ſibi inuicem demittantur, quæ inter limites & perpendiculares, reciprocè proportionales ſectæ ſunt.



Sint binæ lineæ A B G D *angulum obtuſum in ſectione* E *efficientes: ab ipſarum autem ſecantium limitibus* A *&* G *ſibi inuicem perpendiculares demittantur, ſcilicet à ſigno* A *in rectam* G D, *quæ ſit* A D, *& à ſigno* G *in rectam* A B *quæ ſit* G B: *Dico rectas* A B G D *inter* A *limitem &* B *perpendicularem, &* G *limitem &* D *perpendicularem, ſeſe ſecare in* E *reciprocè,* A E *ad* E D, *ſicut* G E *ad* E B: *quoniam recti ſunt* A D E G B E *anguli, & igitur æquales. Sed* A E D G E B, *qui ad verticem ſunt (per decimam quintã primi) æquales. Reliqui igitur* E A D E G B (*per corollar. 32 primi*) *erunt æquales. Æquiangula itaque erunt* A E D G E B *triangula, quæ circum æquales igitur angulos latera proportionalia, per 4 ſexti,* A E *ad* E D *vt* G E *ad* E B. *Si itaque binæ rectæ lineæ ſeſe ad obtuſum angulum, &c.*

Propoſitio trigeſimaſexta.

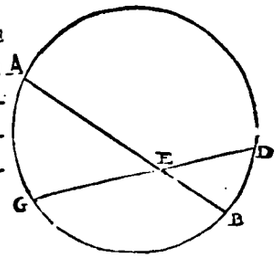
Si duę rectę lineę angulum acutum componant, ab earum autem limitibus in ſeipſas perpendiculares ſecantes mittantur, ipſæ vt ſegmenta quę circa angulum ſunt, reciprocè erunt proportionales.



Sint binæ rectæ A B G B, *angulum acutum* A B G *componentes: à ſignis autem* A *&* G *perpendiculares ipſas ſecãtes, mittantur* A C *&* G E: *Dico ipſas* A B *ad* G B *vt ſegmenta* C B *ad* E B, *quæ circa angulum ſunt, reciprocè proportionales eſſe. Quoniam enim recti* A C B, G E B *anguli ſunt æquales, communis autem* A B G, *triãgulorũ* A B C, G B E, *reliqui* E A C, E G B *æquales erunt, per corollarium 32 primi. Æquiangula igitur ſunt* A B C *&* G B E *triangula: circum æquales igitur angulos latera proportionalia* A B *ad* B C, *ſicut* G B *ad* B E, *per 4 ſexti. Viciſſim igitur erit* A B *ad* G B, *ſicut* C B *ad* E B, *per 16 quinti. Si duæ itaque lineæ rectæ, &c.*

Propoſitio trigeſimaſeptima.

Si binæ rectæ in circulo ſeſe ſecuerint, vnius ſectiones ad alterius ſectiones reciprocè proportionales exiſtunt.

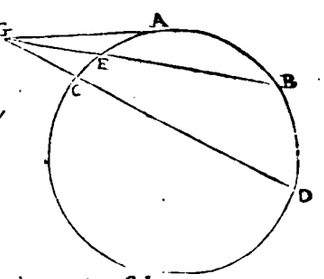


In circulo A G B *binæ* A B G D *rectæ ſeſe ſecent in* E: *Dico eſſe ſicut* A E *ad* E D, *ſic reciprocè* G E *ad* E B, *quoniam enim (per 35 tertij) quod ſub* A E E B, *æquum eſt ei quod ſub* G E E D *rectangulum, ſed æqualium parallelogrammorum rectangulorum reciproca ſunt latera circum æquales angulos, per 14 ſexti. Erit igitur* A E *ad* E D, *ſicut* G E *ad* E B, *& igitur reciprocè, per ſecundam diffinitionem ſexti. Si itaque binæ, &c.*

Propo-

Propoſitio trigeſimaoctaua.

Si à dato ſigno in circuli circunferentiam cauam binæ rectę lineę in plano ducãtur, ipſę ſuis partibus extra circulum ſumptis reciprocè proportionales exiſtunt, & inſuper inter totam & exterius ſegmentum media proportionalis, à ſigno ducta, circulum tanget.



Proponatur circulus A B D *ſignum verò* G, *à quo in circunferentiam cauam cadant binæ rectæ* G B, G D, *circulum ſecantes in* E *&* C, *ſitq; recta* G A *tãgens circulum in* A: *Dico lineas eſſe adinuicem* G B, *ad* G D *reciprocè, ſicut earum partes extra circulum ſumptæ* G C *ad* G E. *Quoniam (per corollarium 36 tertij) rectangulum ſub* G B G E *comprehenſum, eſt æquum rectangulo ſub* G D G C *comprehenſo, erit (per 14 ſexti) reciprocè, ſicut* G B *ad* G D, *ſic* G C *ad* G E, *ſunt enim latera circum æquales angulos: Dico inſuper inter* G B *&* G E, *vel inter* G D *&* G C *mediam eſſe proportionalem rectam* G A *tangentem. Cùm enim ſub* G B G E *comprehenſum, æquum ſit ei quod à recta* G A *fit quadrato, per 36 tertij. Sequetur inter extremas* G B G E *mediam eſſe* G A *tangentem, per ſecundam partem decimæſeptimæ ſexti, cùm ipſæ* G B, G A, G E, *ſint proportionales. Similiter oſtendetur* D E *rectis* G D G C *& quibuſuis aliis, per eaſdem. Si igitur à dato ſingo in circuli, &c.*

Plures aliæ inſuper poſſunt addi hac methodo demonſtrationes, ſed de his hactenus ſufficiat.

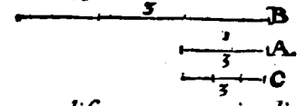
GEometriam liberarum artium ampliſsimam & præcipuam edoƈturus Euclides, eius facultatẽ in vtraſque dilatari quantitates ſupponit, in eas ſcilicet quæ rationem ſiue habitudinem habent numerorum, quas inter ſe commenſurabiles aliquando vocabimus: & inſuper in eas quæ inter ſe nullo numerorum reſpeƈtu copulantur, quas incommenſurabiles dicemus. Magnitudinum autem commenſurabilium ſiue numerorum reſpeƈtum habentium intelligentiam præſtare cupiens, haud ſanius quàm per numerorum obſequia id exequi potuit, vt præciniuimus proximis quinto & ſexto, partes ſcilicet geometricas à ſuis totis confusè detraƈtas per multiplicationem à numeris ſubfuratam, qua ratione ſuis totis copulentur lucidius eum expoſuiſſe. Nimirum per eam multiplicationis arithmeticæ legem geometricis quantitatibus adaptatam, alteram geometriæ partem edoƈturus, eam ſcilicet quæ operationes habentes numerorum rationem continet, quarum quidem cognitionem, vt latius diſcentibus erroget, his tribus ſequentibus libris, quæ ex arithmeticis elementis, huic operationum generi deſeruire opinatus eſt, exegit principia, vt tandem cognitis inter ſe numerorum habitudinibus eoſdem quantitatum (numerorum affinitatem ſeruantium) noſcamus adeſſe reſpeƈtus, qui quidem ob numerorum diſcretam & intelligentiæ familiarem naturam, non minus quàm ipſi numeri diſcentibus familiares ſeſe offerent. Et demum prælibata commenſurabilium intelligentia, incommenſurabilium notitiam (cùm maximè ad eam ventum ſit) facilius adaperiat, illud equidem decimo libro hos tres proximè ſequenti efficiet. Quæ igitur his ſeptimo, octauo, & nono præponit elementa, non pura arithmetica eſſe cenſeamus, ſed quandoque geometrica, quandoque verò arithmetica, geometriæ tamen obſequio deſponſa, ea namque de cauſa ſumpſit numerorum leges, tantùm ſuis quantitatibus commenſurandis ac deſignandis neceſſarias. Non ideo volumus lectorem arbitrari, nos arithmeticam ſub geometria confundere, numerus namque tantùm ſoli quantitati non accommodatur, ſed pluribus aliis exiſtentiis, quas geometria minimè complectitur, & idcirco geometriam cõplecti arithmeticam non dicemus, ſed ea duntaxat quæ ſibi ex arithmeticis vtilia perſpexerit angariare, obſequia fatemur. Reliquas verò geometricæ ditioni nulla arte obnoxias arithmeticæ facultates eſſe conſtabit, vt autem quam legem incommenſurabilibus quadam arte proportionandis imponat numerorum diſcretio, dicamus, per commenſurabilium methodum, ab ea numeri parte ordiemur, quæ ſola geometricam ſectatur naturam, ob indiuiſibilem ſuæ magnitudinis compaƈtionem. Hácque via futuræ illæ magnitudines geometrica natura continuæ ſiue ita compaƈtæ, quòd abſque arithmeticarum diſcretionum ſubuentu confuſionem pariant, & diſcentibus penitus denegent intelligentiam, facilitate quadam percipientur. Tum maximè cum arithmetica exequia numeris diſcernentibus in continuas quantitates confuſas, proferemus, quas licet numeris ſignificemus, non tamen hi ſignificantes numeri vera numerorum denominatione donari poſſunt, ſed hi tantùm qui in numeros quantitates ſignificantes arithmeticas exercent operationes, verè arithmetici nuncupandi ſunt. Cùm itaque quantitates numeris ſignificabimus, inter eos numeros omnes numeri partes recipiemus, eò quòd omnis quantitatis pars ſit quantitas, ſi verò operationes ſeu arithmetices exequia ſignificemus numeris, tum ſolos numeros diſcernentes, numerorum appellatione ſuſcipiemus, vnitatem verò ab his excludemus, eò quòd ea ſit continua, nullámque ſignificans diſcretionem, cuius naturam exponentes ſic eam diffinien-dam eſſe rati ſumus.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM reſtitutarum Liber ſeptimus.

Diffinitio prima.

VNitas eſt qua vnumquodque eorum quæ ſunt, vnum dicitur.

Quoniam arithmeticorum numerorum obſequium multis aliis præter geometriam conuenire diximus, quæ tractanda ſuſcipimus, ex arithmeticis elementis ſumpta in quantitatum denotandarum auxilium imploramus, vnitatem ergo diffiniemus eſſe eam ſignificationem, qua ſiue ſecundum quam omnium exiſtentium vnumquodque, vnum dicitur. Quia tamen quantitati illud accommodamus ſignificatum, vnum illud idem ita continuum, & compactum intelligemus, vt ſecundum eam vnitatem nulla in eo concipi poſſit ſciſſura aut ſectio, ſed vnica quantitas continua geometriæ legibus obnoxia, ſcilicet quamdiu aliqua quantitas vnitate denominabitur, eam inſolutam haberi exiſtimemus. Quod ſi ea quantitas vnitate ſignificata (non autem ipſa vnitas) per augmenti vel decrementi multiplicationem alteranda ſit, non vnitatem, ſed quantitatem vnitate ſignificatam alterari concipiemus. Cùm itaque vnitas per ſe diuidi aut multiplicari non poſſit, ſubſtantiam denotat, nec ſectam, nec ſibi additis partibus compoſitam conſtare, ſed ita alterandam vt facta illico ipſius ſolutione, aut per ſuiipſius additionem multiplicatione, vnitatis nomine priuetur, diſcretæ quantitatis ſuſceptura nomenclaturam, qui quidem numerus dicetur, ſiue per frequentes ſignificatæ ſubſtantiæ ſumptiones, ſiue per plures eiuſdem integræ ſubſtãtiæ factas ſolutiones productus fuerit. Hac igitur de cauſa videmus vnitatem frangi non poſſe. Cùm enim ſignificata per eam res frangitur, eo ipſo vnitatis nomen illa relinquit, ſtatim numeri ſuſcipiẽs denominationem, rurſuſq; eiuſdem numeri pars minima vna dicetur. Similiter nec multiplicem eſſe, vbi namque multiplicis induit ſpeciem, illico numeri non vnitatis nomine denunciatur, vt exemplo A *magnitudo vnitate denominata per ſuiipſius frequentem ſumptionem multiplicem efficit* B, *à ternario numero denominatam, non ab vnitate. Similiter eadem* A *vnitate denominata, per frequentem eius ſolutionem producente* C *diſcretam magnitudinem, videmus* C *vnitatis priuari nomine, ac ſtatim numeri nomine denũciari (nempe tribus tertiis) qui rurſus minimam partem vnum denominat tertium, ab vnitate dictũ, haud ſecus in reliquis. Si itaque vnitas ſit magnitudo omnium magnitudinum minima dici poterit, nulla arte ſecanda, non igitur vnitatis fractiones dicentes vnitatem, ſed per eam ſignificatam quantitatem frangi exiſtimemus: In eas quidem partes quarum quælibet dicetur vna. Hinc patet quod diximus ſecunda quinti diffinitione, tot poſſe dari numeros quãtitatem vnitate ſignificatam ſecantes, quot & multiplicantes. Qui licet iidem ſint numeri, diuerſis tamen functuri muneribus, alij quidem quantitatis augmentum, alij verò eiuſdem decrementũ proferent, oppoſitis autem operationibus. Idem ferè in rationum denominationibus dicemus, rationem ſcilicet æqualitatis ab vnitate denominari. Inæqualitatis verò tam maioris quàm minoris rationes per numeros exprimi: quinetiam æqualitatis rationem vnitati plurimum aſſimilari. Cùm enim duorum terminorum ſit vna & eadem quãtitas, ea rationis denominatio per vnitatem exprimitur, componendo, ſecando, ſiue multiplicando, quemadmodum vnitas per ſe multiplicata, vel ſecta, ſeipſam producit. Similiter & æqualitatis ratio, per ſui denominationem ducta, nihil aliud profert: inæqualitatis verò ratio à numeris expreſſa ſcilicet maioris inæqualitatis à numeris augmentũ exprimẽtibus. Minoris verò inæqualitatis à numeris decremẽtum denotantibus, per multiplicationem aliam generat rationem: veluti & numeri per quos exprimuntur, vt vidimus quinta diffinitione ſexti. Rationes quidem extremorum ex compoſitione rationum mediorum procreari, & decima diffinitione quinti, binas æquales rationes duplam, tres triplam, & quatuor quadruplam, &c. earundem componere rationem. In hoc autem conuenit vnitati æqualitatis ratio, quod ſecta vel multiplicata, æqualitatis relinquit nomen veluti & vnitas. Quæ cùm ſit tantum ſuæ quantitatis denominatrix, vbi ſecatur quantitas, ab ea recedit (vt diximus) ipſius vnitatis denominatio, aduenientе quidem numero ſectiones denominante, aut certe repetitiones. Siquidem à maiori numero denominatur ratio, tum plus ea ab æqualitatis recedit ratione, ſiue in augmentum, ſiue in decrementũ pergat, ſicut & numerus quo maior ſit, eò plus ab vnitate recedit, licet in augmẽ-*



tum aut decremẽtum vnitatis significatum dirigat. Vnitatem igitur nusquam secari fatebimur, sed tantùm quantitatem vnitate denominatam: & proinde per antiquum illud soluemus obiectum, omnem quantitatem scilicet infinitè secari posse. Nam accedente sectione, quantitas vnitatis illico nomen relinquit, non igitur secatur vnitas, sed tantum per vnitatem significata quantitas.

Cæterùm vt qua lege vnitatem suscipiat Geometria (numeros recipiens) enarremus Geometriam (vt sæpius diximus) numeros in elucidandarum suarum magnitudinum quantitatem conuocasse credemus: quorum quidem numerorum vsum bino respectu suscipit, alterum quo propositarum magnidinum quantitates discernant. Reliquum verò quo discretas numeris illis significatas ita alterẽt impensa in illas operatione, vt inde facta earum quantitatum comparatione, affinitatis elucescat intelgentia. Quare numeros propositam quantitatem sua discretione significãtes, geometricos nempe geometricis quantitatibus coniunctos dicemus. Reliquos verò quãtitates numeris significatas, arithmeticis legibus alterantes, augmento quolibet aut decremento, arithmeticos dicemus numeros. Quia verò quamlibet minimam quantitatis partem sub quantitatis nomine suscipit Geometria, sequetur vnitatem (numeri partem minimam) sub numeri nomine, geometricos suscipere numeros, eò quòd quantitatem denotet.

Arithmetici verò numeri quantitatem non respicientes, vnitatem inter numeros minimè suscipiunt, cùm ea non sit vnitatum multitudo. Et hac de causa numeros operationes arithmeticas exercentes, in numeros quantitatem significantes, nusquam numerorum nomine vnitatem suscipere concludemus. Binas illas igitur numerorum acceptiones, quarum prior vnitatem sub numeri denominatione suscipit, posterior autem minimè, considerabimus his tribus numerorum libris, paralogismos euitantes, vt autem qui ex diffinitionibus numeri singulis disciplinis vt plurimum adhæreant excutiamus, hoc est, qui geometriæ adhærentes vnitatem suscipiant. Qui verò arithmeticen sectantes eandem respuant, Dicemus vnitatem, totum, partem, planum, solidum, quadratum, cubum, proportionales, similes planos, aut solidos, geometricos iure vocari numeros, cùm aliquid præ se ferãt quantitatis, vel dimensionis quæ quantitati præcipuè conuenit. Numerum verò, & partes, multiplices, pares, impares, primos, minimos, cõpositos, perfectos, mensores, arithmeticos esse puros, cùm non quãtitati propriè adhereant, sed potius arithmeticas operationes in numeros quantitatem significantes exerceant. Quare in theorematũ intelligentia hos veluti agentes, illos verò patientes, vt plurimum comperiemus numeros. Quia verò (vt diximus) vnitas numerorum quantitates significantium nomine venit, Illi etenim non numerũ ab vnitatum multitudine sumunt, sed potius numerum quantitatem discernentem, & significantem considerant. Arithmetici verò numeri, puram actionem seu operationem in numeros quantitatum discretores explendam exercentes, vnitatem nulla arte recipere possunt. Cùm hi alterationem eorum in quos operantur exquirant, quod vnitatis naturæ summopere obsistit, ea namque æqualitatem solam, nullum verò augmentum vel decrementum suæ actione prouocat, nec proinde alterationem. Quare inter numeros alterantes eam recipi posse non arbitrabimur, sed tantùm inter numeros alterandos siue quantitatem significantes, eius proprium haberi situm, cùm quantitas cuiuis alterationi perpetuò sit obnoxia, augmento scilicet ac decremento. Cùm autem dixerimus vnitatem esse numeri materiam, illud animaduertamus oportet, vnitatem eius naturam induere, cui confertur numerus, veluti si per numeros lineæ longitudinem exprimere velimus: singulas vnitates naturam longitudinis tantùm habere, & latitudine sublimitatéque priuari, iuxta lineæ naturam, cui adaptatus est numerus, quæ quidem latitudine sublimitatéque priuatur. Si verò superficiem numeris metiri velimus, singulas eius vnitates superficiei more longas & latas esse, profundas verò nequaquam. Siquidem solidum numeris metiamur, eorum vnitates tribus mensuris longitudine, latitudine, ac profunditate (solidorum naturam sectantes) ornari debere credemus, vnitates igitur naturam hypothesis sumptæ cui adaptantur numeri, semper sequi debent. Est enim vnitas discretio partis substantiæ per numerum significatæ. Quia itaque in figuris regularibus vnitates numerorũ eas metientium, naturam figuræ sequuntur: non mirum ducemus vnitatem quandoque dici numerum planum, numerum quadratum, numerum solidum, hoc est, figuram planam, quadratam, vel solidam significantem, iuxta quas suis hypotheses sumptas numeris coaptatas quantitates significantibus. Quare ea ad numeros rationem plani ad planum, quadrati ad quadratum, cubi ad cubum, solidi ad solidum habere poterit, cùm singulorum species sibi possit assumere. Et ideo inter numeros inter quos non recipitur vnitas (scilicet arithmeticos seu operãtes) nec recipiemus rationem multiplicem in minimis numerorum partibus, nẽpe ea ad vnitatem minimas eius partes collocat, quam non recipiunt arithmetici seu operantes numeri. Reliquæ verò cunctæ rationes, in numeris minimas earum partes seu terminos constituunt, nusquam ad vnitatem properantes. Si igitur in theorematum discussione proponantur primorum aut minimorum numerorum

obsequia

obſequia rationes producentia. Multiplices rationes neutiquam inter eos ſuſcipi arbitrabimur, ſed ſi eundem effectum illis per minimas partes conuenire oſtenſuri ſumus, illud particulari demonſtratione modico exequemur negotio. Quæ etenim primis ac minimis conueniunt numeris, non omnia vnitati, & numero conuenire putabimus, & è contra. Qui autem ſint primi & minimi poſthac dicturi ſumus, vt quæ præmiſimus faciliori percipiantur intelligentia, cognitis terminorum diffinitionibus.

Diffinitio ſecunda.

Numerus autem eſt ex vnitatibus compoſita multitudo.

Huius expoſitio à priore deducitur. Quemadmodum enim vnitas ſubſtantiam quantam, continuam, inſectam (vt diximus) denotat, ſic numerus diſcretionem ſignificatæ ſubſtatiæ quam per vnitatum repetionem conſequutus eſt. In tot partium multitudines, quot vnitatum repetitionibus idem componetur numerus ſectam eſſe denotabit. Quarum quidem partium ſingulæ eam quam diximus circa vnitatem naturam ſeruabunt. Sicut igitur vnitas, vnitam & continuam denotat ſuapte natura quantitatem, ſic numerus diſcretam & ſectam per vnitatum multitudinem referet eandem, ſiue quantitati, ſiue operationi (vt diximus) deſtinatus fuerit.

Diffinitio tertia.

Pars eſt numerus minor numeri maioris, quando metitur maiorem.

Diffinitio quarta.

Partes autem, quando non metitur.

Cur diffiniens Euclides partem libro quinto partes non diffinierit, id potiſſimum cauſæ dicemus eſſe, quod ſcilicet libro quinto elementa geometrica præcipuè tractans, partem apud geometras tantùm recipiat, non autem partes, ſub vnius quantitatis denominatione comprehenſas, eò quòd nihil in geometria diſtributum recipiatur. Quia verò arithmetices ducimus principia (cuius verum obiectum eſt diſtributio, ſeu diſcretio) partem à partibus ſegregantes dicemus. Partem in numeris eum eſſe numerum qui à maiori ſumptus ipſum præcisè ſua repetitione componit, & ad numerum eam ſeruat rationem quam vnitas. Partem verò eum vocamus numerum minorem à minori ſumptum, qui ſua frequenti repetitione maiorem præcisè non conſtituit, ſed quandoque ab eo defficit vel eundem excedit. Hic namque numerus ad maiorem ſemper rationem habet quam numeri inter ſe, non autem eam quam vnitas ad numerum. Exemplum partis, ponemus tria partem eſſe quartam quidem numeri 12, & 2 quintam ipſius 10. Partes autem vt 4 numeri 10 duas quintas, & 2 ternarij duas tertias eſſe. Has igitur binas diffinitiones deſcripſit Euclides, vt ſequatur potiſſimam illam rationum quæ inter numeros concidunt diuiſionem. Quæ diuiſio in rationem numeri ad numerum & vnitatis ad numerum fit, quarum illa generalior hac ſemper habetur, geometræ verò binas illas rationum acceptiones ſub vnicæ partis ad totum ratione complectuntur, & præter has aliam quam partis ad ſuum totum incommenſurabilis frequenter apponunt, quæ ab arithmeticis diſcretionibus penitus aliena reperitur. Partis igitur ad totum is erit reſpectus, qui à continua in diſcretam quantitatem fertur, hoc eſt, vnitatis continuè ad numerum qui ſemper diſcretus eſt. Partium verò ad totum reſpectus quilibet is erit, qui minoris numeri ad maiorem concipietur, ſiue qui inter binas diſcretas quantitates cadet.

Diffinitio quinta.

Multiplex eſt numerus maior minore, quem metitur minor.

Quoniam hæc vox multiplex arithmetico tantùm conuenit ſignificato (vt perfectè docuimus ſecunda diffinitione quinti) geometras dicemus multiplicium obſequium ab arithmeticis ſumpſiſſe. Quippe qui continuas nulla diſcretione quãtitates ſignare poſſunt, ab arithmeticis (quorum proprium eſt diſcernere) multiplicandi methodum adepti ſunt. Quare cùm ſoli arithmeticæ conueniat multiplicatio, eandem his arithmeticis principiis obſeruari dicemus, quam apud geometrica præce-

pta ab arithmeticis ſumptã diffiniuimus quinto libro. Multiplex itaque numerus erit maior quem metitur ita minor, vt propoſita multiplicationis ſpecie inter eos ſeruata, minor ſua repetitione maiorem præcisè reſtituat. Quæ quidem minoris multiplicatio maiorem reſtituens, triplex oſtenſa fuit, ſcilicet quæ augmentum multiplicat ſignificatæ quantitatis per numeros, quæ inſuper decrementum eiuſdem multiplicat, & quæ denique vtrumque augmentum & decrementum eiuſdem quantitatis per numeros expreſsè multiplicat. Id equidem quauis via fit ſumpto minore per vnitates numeri multiplicantis, vt reſtituatur maior, iuxta diffinitionem 16 huius quam exponentes hanc multiplicandi formam exemplis edocebimus. Sed vt quibus notis deſignentur numeri augmentum vel decrementum multiplicantes, intelligamus. Ab arithmeticis practicis ſumemus notas ſcilicet cum figuræ ſimplices & abſolutæ proponentur vt 3 4 12 37, &c. Illæ augmentum deſignabunt, cùm verò ſuperpoſita virgula deſcribantur, vt $\frac{}{3}$ $\frac{}{4}$ $\frac{}{12}$ $\frac{}{37}$. Illæ decrementum præ ſe ferent, quæ ab arithmeticis fractiones nuncupantur, ſcilicet tertium, quartum, duodecimum, trigeſimum ſeptimum, &c. Siquidem vtriuſque augmenti ſcilicet & decrementi actionem deſignare fuerit opus, ab vtroque ordine figuras ſumemus, vt 4 & $\frac{1}{3}$ vel 6 & $\frac{1}{5}$, &c. Nam qui ſine virgula aut virgulæ ſuperponitur, augmẽtum denotat, qui verò ſupponitur, decrementum, vt hac lege mixta abſoluatur multiplicatio.

Diffinitio ſexta.

Par numerus, eſt qui bifariam diuidi poteſt.

Diffinitio ſeptima.

Impar verò, qui bifariam diuidi non poteſt, vel qui vnitate differt à pari.

Parem numerũ diffinit Euclides, eum eſſe qui bifariam ſecari poteſt, quo perſpicuè oſtendit quod diximus prima huius diffinitione, vnitatem ſcilicet ſecari non poſſe. Nam ſi ſecaretur vnitas, quilibet numerus per hanc ſextam diffinitionem par eſſet, ſimiliter & nullus impar eſſet, conceſſa diuiſione vnitatis, quod eſſet abſurdum: non igitur vnitatem ſecari fatebimur. Par igitur numerus is erit qui ex binis vnitatum ordinibus numero æqualibus conſtabit, impar verò qui in duos vnitatum ordines numero æquales ſecari nõ poteſt: ſique ſemper vnitate differt à pari, ablata quidem vel addita vni ordinum vnitate. Hinc ſequetur aliam eſſe numerorum, aliam rerũ ſignificatarum diuiſionem. Licet enim impar numerus biſariam ſecari non poſsit, tamen ab impari numero denominata quantitas bifariam ſecari poterit, ac inſuper variis ſecandi formis per numeros exprimi non valentibus: quæ autem numeris exprimuntur ſectiones, illæ ſingulæ rurſus ab vnitate denominandæ erunt, inſecta quidem ac continua.

Diffinitio octaua.

Pariter par numerus eſt, quem ſolus par metitur numerus.

Huius eſt facilis intellectus, cùm enim nullus alius à pari aliquem numerum metitur, is menſus pariter par dicetur, vt 2 4 8 16, &c. quotlibet poſt binarium dupli vt oſtendemus 33 noni theoremate.

MONITVM.

Non arbitramur Euclidem hanc iuxta Theonis tradita ſcripſiſſe, Pariter parem ſcilicet eum eſſe, quẽ par per parẽ metitur numerum: nam hæc diffinitio ob nimiam generalitatem conuerti cum ſuo diffinito nequit. Omnis etenim numerus quẽ par per parem metitur, non erit neceſſariò pariter par, vt 24, quem 4 per 6 metitur, & infiniti ſimiles, quare mutare cogimur dictiones in eam ſententiam, quæ trigeſimætertiæ propoſitioni noni conueniat. Quæ quidem pariter paris naturam ſatis ſuperque explicat.

Diffinitio nona.

Pariter autem impar eſt, quem impar tantum per parẽ metitur numerũ.

Idem intelligit Euclides dici pariter imparem, & impariter parem numerũ, eum quidem quẽ par quiuis per imparem, aut impar tãtum per parem metietur numerũ (quæ ad idem redeunt) vt 6, 10, 30, &c. quos pares metientes per imparem numerum repetunt, vel ſoli impares per parem.

MONI

MONITVM.

Idem huic deficiebat quod & præcedenti octauæ, ſcilicet excluſiuæ (tantùm) vt eam efficeret, cum diffinito conuerti. Non omnis enim numerus quem par metiens per imparē metitur, erit pariter impar, aut impariter par, quod idem ac vnum eſt: nec conuerteretur, ſi hæ ſint voces (cum ſuo diffinito) ſed in ſequentem diffinitionem caderent binæ præcedentes. Quare neceſſariò apponendæ fuerunt hæ voces, in imparem tantum, per parem eum metientem.

Diffinitio decima.

Pariter par & impar eſt quem par per parē & imparē numerum quandoque metitur.

Numerum pariter parem & imparem dicit eum, quem aliquis par per parem, alius verò per imparem numerum metitur, vt 12, quem 2 per 6 & 4 per 3 metiuntur, & 20, 24, & ſimiles.

MONITVM.

Huic diffinitioni hæſit Theon, quam oblitus ſuo Græco exemplari, & eam addere volēs Zambertus, à vero eius ſenſu decidit, & in alterā præcedentis partem incidit. Quod autem eam exquirat vera methodus, oſtendetur 35 propoſitione noni, quæ huius verū intellectum planè demonſtrat, quam ideo huic ſuo loco apponendam eſſe cenſuimus.

Diffinitio vndecima.

Impariter verò impar numerus eſt, quem impar tantùm metitur numerus.

Hæc ſimiliter octauæ diffinitioni opponi videtur, ſicut & opponuntur diffinita: nam ſicut pariter par à ſolo pari menſus eſſe patuit, ſic impariter impar is erit, quē ſolus impar metietur, vt 15, quem 3 per 5 metietur, & 21 25, & reliqui huiuſmodi, à nullo pari menſi.

Diffinitio duodecima.

Primus numerus eſt, quem ſola vnitas metitur.

Primum poſt modum diffinit numerum eum eſſe, qui nulli quatuor præcedentium diffinitionum ſubiicitur: omnes enim in alios diuiduntur numeros, hic autē primus in ſolas ſecatur vnitates, nullas alias ab vnitatibus habens partes, vt 2, 5, 7, 11, 13, &c.

Diffinitio decimatertia.

Primi adinuicem numeri ſunt, quos ſola vnitas communi menſura metitur.

Primos adinuicem numeros eſſe dicit eos, quorum nullus numerus eſt pars communis, ſeu qui nullam habent communem menſuram præter vnitatem, vt 11 ad 13. cùm ſint primi ſinguli, fortius adinuicem primi erunt, ſed 15 ad 22 & 9 ad 14 licet non ſint ex ſe primi, tamen quia nullus numerus vtroſque metitur, ſed tantùm ſola vnitas, ipſi ideo primi adinuicem dicentur.

MONITVM.

Memorandum eſt quod diximus prima & quarta huius diffinitione, ſcilicet aliam eſſe vnitatis ad numerum, & numeri ad numerum rationem: cùm enim vnitas ſit pura geometrica magnitudo, ea ad numerum rationem habet, quam quantitas continua ad diſcretam, numerus verò ad numerum eam habet rationem, quam quantitas diſcreta ad diſcretam, & hæc quidem ratio arithmeticis propria eſt magnitudinibus.

Cùm autem rationem tertia quinti diffinitione in quinque maioris & minoris inæqualitatis ſpecies diuiſerimus, omnes autem eas rationes (dempta prima & eius conuerſa, ſcilicet multiplici) reſpectum præ ſe ferre quem numerus ad numerum, non autem quem vnitas ad numerum dixerimus: Multiplicem verò ac eius conuerſam rationem tantum denunciare, quam vnitas ad numerum, & è conuerſo quam numerus ad vnitatem: & proinde, vt diximus, eam quam continua ad diſcretam

eam repetentem quantitatem habet, vel discreta ad continuam, fatebimur in quauis ratione multiplici, ac eius conuersa, vnum terminum semper metiri alterum, & igitur numeros multiplicem rationem habentes, nusquam adinuicem primos esse, cùm semper minor maiorem & seipsum metiatur, vtrosque itaque metitur, non igitur primi erunt aliqui numeri rationem habentes multiplicem. Qui verò reliquis rationibus copulantur, omnes rationem numerorum habent, quare appellatione numerorum primi adinuicem esse possunt, nunquam enim ad vnitatem (quæ non est numerus) deueniunt, veluti multiplices semper ad eam tandem concidentes. Ea namque ratio non est pura numerorum cùm alter terminorum sit quantitas continua, quare nec minimi eius rationis numeri dici possunt, eò quòd non sint numeri, sed alter eorum est vnitas, si ad minimas numerorum partes deferrant, veluti in tripla ratione 12 ad 4 reperiemus primos non esse adinuicem: nam 4 metitur seipsum & 12, quare vtrosque metitur. Quod autem ad minimos numeros, hæc ratio non perueniat, patet si suscipiamus 3 ad 1, videmus triplæ rationis minimas esse numerorum partes, non tamen numeros, eò quòd alter sit vnitas, in reliquis verò rationibus secus accidet: omnes enim sunt rationes numerorum. Nam semper minor sit maioris partes, non autem pars, quæ vnitatis locum obtinet, sicque minimè eorum partes sunt semper numeri. Cùm itaque de primis adinuicem aut alicuius rationis minimis numeris loquetur Euclides, nos memores esse oportet, numeros rationem multiplicē habentes, in eis non comprehendi, cùm non habeant veram numerorum rationem, hoc est, discretæ quātitatis ad discretam, sed sanius continuæ ad discretam, aut discretæ ad continuam, maximè cū ad minimos perueniet, eò quòd semper vnitatem pro altero terminorum reperiat, quod si de rationibus in genere, non autem primorum, aut minimorum numerorum dixerit, ibi simul rationes multiplices cum reliquis contineri credamus demonstrandas (vt prima huius diximus diffi. in fine) tam discretorum quàm continuorum.

Diffinitio decimaquarta.

Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

Diffinitio decimaquinta.

Compositi adinuicem numeri, sunt quos aliquis numerus communi mensura metitur.

Compositum vocat numerum qui ex alicuius numeri frequenti sumptione constat, cùm autem ea sumptio frequens per numerum alium exprimatur, sequetur numerum compositum constare semper ex duorum facta multiplicatione adinuicem. Cōpositos similiter vocat numeros adinuicemeos, qui aliquem numerum pro communi eorum mensura suscipiunt, qui quidem communis mensor, variis suiipsius sumptionibus, varios sæpius producet, æqualibus verò æquales compositos, vt 15 est compositus, eò quòd 3 per 5 repetitus eum producat, 8 verò ad 12 adinuicem compositi dicentur, eò quòd communem mensorem habeant 4 numerum, 9 autem ad 15 habent 3, & 10 ad 35 habet 5, communem mensuram. Non tamen sequetur idem in primis numeris quod in compositis: nam si duo sint cōpositi adinuicem, & quisque eorum compositus erit, quòd si duo primi adinuicem fuerint, non sequetur ideo eos esse singulos primos. Nam hi per priuationem, illi verò per habitum qui plus naturæ conuenit suas consequuntur species.

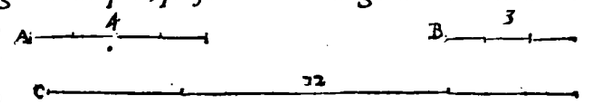
Diffinitio decimasexta.

Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in ipso vnitates, toties componitur multiplicatus, & gignitur aliquis.

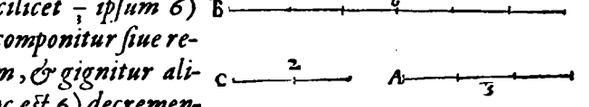
Quoniam analoga prius distinguenda quàm diffinienda esse præcipit Aristoteles, antequam quid sit numerum multiplicare alium numerum dicamus, multiplicandi species distinguemus, eas maximè quæ quantitati (cuius præcipuum agimus negotium) conueniunt. Omnis itaque multiplicatio aut fit ad quantitatem propositæ magnitudinis augendam, aut ad eiusdem magnitudinis quantitatem minuendam, aut equidem ad partim augendam, partimque minuendam. Sed quia hæc multiplicationum distributio, paululum à vulgari distat, eam ex eadem sumere non dedignabimur, quoniam diximus libro quinto multiplex diffinientes, nos hoc septimo ostensuros varias illas multiplicium leges ab Euclide in obsequium quantitatum continuarum elucidandarum imploratas extra communem arithmeticorum vsum. Id animaduertendum obtestamur, Euclidem sola multiplicatione his tribus numerorum libris sua quæque præclare axiomata. Ea namque sola apud arithmeticos

insi-

infinitarum operationum comperta fuit actio: quippe volens non minus Euclides quantitatum decrementa (quæ arithmetici diuisione seu partitione exequuntur) peragere æquè vt incrementa, ab eisdem multiplicatione contracta, vtramque ea sola operationem concipiens, huius speciem in triplam multiplicandi formam distribuit, in priorem scilicet quæ propositæ quantitatis incrementum multiplicat: secundam quæ propositæ decrementum multiplicat: ac postremam quæ eiusdem quantitatis propositæ partim incrementum, partim decrementum multiplicat. Harum trium specierum operationes ab arithmeticorum communi praxi cõmodabimus: conuertentes quæ ab arithmeticis in partitionem, diuisionem, seu fractarum partium vsum, veniunt, in decrementi multiplicationem, quæ vnum idémque resonant, ac præter hæc infinitum operandi exequium soli multiplicationi inter omnes arithmeticas operationes proprium. Numerorum insuper picturam arithmeticorum more sumentes, scilicet numeros quantitatem augentes, simpliciter statuemus, vt 3.4.7.10.25.34, &c. Numeros verò quantitates minuentes, siue decrementum significantes more fractorum in idem opus ab arithmeticis practicis depictorum, scilicet $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{34}$, &c. virgula superposita decremẽtum significante proponemus. Mixtos verò cum vtraque incrementum scilicet & decrementum petemus, vtraque forma describemus scilicet $3\frac{1}{4}$, $4\frac{2}{3}$, $7\frac{3}{4}$, &c. vt libet expostulatos. Quare vt ostendamus hac arte diffinitionem Euclidis ad futura rectè peragenda, his multiplicationibus niti, cæpta peragamus. Numerus igitur numerum multiplicare dicitur, quando quòt sunt in ipso multiplicante vnitates, toties componitur, siue repetitur quantitatis per multiplicatum designatæ, augmentum, vel decrementum, & hac multiplicatione gignitur aliquis, qui scilicet illud augmentum vel decrementum exprimat, vt exemplo aperiamus.



Numerus A numerum B multiplicat: dicitur, quando quot sunt in ipso A vnitates, scilicet 4, toties componitur siue repetitur numeri B multiplicandi, scilicet 3 augmentum, & & gignitur aliquis C, hoc est, 12, qui quidem toties concipit in se multiplicatum B sumptum pro numero quantitatem B significante quot sunt vnitates in ipso A agentes in vnicam B quantitatem, scilicet quater cùm sint quatuor. Quare 12 dicetur æquè ipsius 3 quadruplex incrementum, vt 4 agens quantitatis passiuè B quadrupla actio. Hac de re haud secus refertur numerus 12 productam quantitatem denotans, ad numerum 3 propositam simplicem significantem, quàm numerus 4 agens ad eandem simplicem vnicam ac passiuam per suas vnitates sumptam, vnde sequitur hanc simplicem B pro vnitate à numero agente per suas vnitates repetitam, semper metiri maiorem à numero significatam, nam vnitas numerum quemuis metitur. Hoc equidem exemplum in augmento multiplicando proposuimus, sequens verò in decremento multiplicando supponamus. Numerus similiter A numerum B multiplicare dicitur (scilicet $\frac{1}{3}$ ipsum 6)

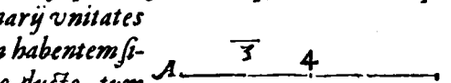


quando quot sunt in ipso A vnitates, toties componitur siue repetitur ipsius B multiplicandi decrementum, & gignitur aliquis C, qui quidem fit ex triplo ipsius B (hoc est 6) decremento, scilicet 2 qui ipsius 6 est pars tertia $\frac{1}{3}$ siue triplex decrementum per vnitates numeri A agentis detractum.

Tertiam multiplicandi speciẽ ex binis prioribus cõpositam proponere possumus, scilicet eam, qua vtrũque multiplicamus, augmentum quidẽ propositæ magnitudinis, & decrementũ, quod cùm simul ac semel fieri non possint, sed diuersis tantum multiplicationibus, hanc multiplicandi speciem, inter simplices collocare noluimus. Nam hæc binas efficit multiplicationes, quarum productas iungit magnitudines, vt si numerus 12 per 3 & $\bar{4}$, hoc est, per numerum 3 augentem, & per $\bar{4}$ minuentem multiplicari iubeatur, fient binæ multiplicationes, prior quidem 12 per 3 in augmentum producet 36. Idem verò 12 per $\bar{4}$ decrementum producet 3, quæ productæ simul iunctæ component 39 productum ex multiplicatione 12 per 3 & $\bar{4}$. Quauis igitur multiplicatione productus, componitur ex ea multiplicati sumptione, quæ fit per multiplicantis vnitates, siue in augmentum, siue in decrementum pergat. Cùm autem (vt sæpius diximus) Geometria numeros tãtùm accomodet ad discernendas magnitudines, quas postmodum commẽsurabiles dicet, numerorum leges exponit, eas maximè quæ suis geometricis quantitatibus proprias fore existimat: quare cùm multiplicandum hic proponit aliquem numerum, illum tanquam vnitatem repetendam in augmentum, vel decrementum sumit. Nam dicit illum sumi per vnitates multiplicantis, eò quòd tanquam quantitas continua sæpius repetatur, cuius intelligentia discretionis, à producto per numerum multiplicãtem prodeat. Et igitur multiplex semper producetur maius multiplicato, siue maius efficiat augmentum, siue maius decrementũ proposito multiplicando fecerit. Cùm enim multiplicatio nec sit numerus, nec per eum significata magnitudo: sed tantùm frequens illa repetitio, perspicuum est omnem frequentiam repetitionis susceptum auge-

re negotium, & repetitum se ipso non repetito semper maius esse, quod idem est quod & multiplex, & simplicis repetitione compositum, & ideo semper maius simplici vel multiplicato, quare multiplicationem non magnitudini attribuemus, sed eiusdem augmento vel decremento.

Animaduertendum est tamen non quosuis numeros se inuicem multiplicare posse, æquè in decrementum, vt in augmentum, maximè cùm solo arithmetico more nullam quantitatem significantes sumuntur, veluti 4 per 3 in augmentum potest duci vt producat, 12. Sed si 4 per 3 in decrementum ducamus, non reperiemus 4 tertiam habere partem. Quare videretur hæc multiplicandi methodus in quibusdam manca esse numeris. Ad hæc Euclidem numeros pro quantitatibus elucidandis tantùm, non vt numerorũ naturam propriam doceat sumpsisse dicemus, idque præcipuum eiusdem fuisse scopum credamus. Quilibet igitur numerus geometriæ obsequio destinatus, quantitatem aliquam denotabit. Si itaque quaternarij magnitudo A per ternarij vnitates decrementum petat, ea per numerum tertiam partem habentem significetur. Per ternarium ipsius quaternarij augmento ducto, tum producemus 12 quæ quidem 12 ipsi A magnitudini accommodantes, reperiemus ipsam A magnitudinem vt significantis numeri 12 triplex susci-



pere decrementum per $\frac{1}{3}$ ipsius 12 signatum scilicet 4, vt tandem dicamus qualium A fuit 12 eorum eiusdem A $\frac{1}{3}$ fuit 4. Sic itaque quælibet magnitudo per quemlibet numerum in decrementum duci poterit, cùm cuilibet magnitudini quilibet possit attribui discretor numerus, & quælibet magnitudo in quotuis segmenta sic infinitè secabilis, est enim quantitas. Cur autem hac multiplicandi lege, ab arithmetica praxi admodum aliena, quæ tantum multiplicandum postulat augmentum vtatur Euclides, ea est causa quã iam antea libro quinto diximus: quòd multiplicium naturam sumpsit, ad quantitatum continuarum & cõfusarum respectus mutuos indicandos. Qui quidem respectus eo more se habent, quo si prior posteriorem multiplicet, posterior priorem diuidit. Ideóque sola multiplicatione vtitur Euclides, vtrũque absoluens & multiplicandi & diuidendi negotium. multiplicans etenim augmentum multiplicat, multiplicans verò decrementum secat vel diuidit: vtrũque tamen productum multiplex vocat, vt ostendimus decima diffinitione quinti, scilicet quemadmodum ratio ab 8 denominata tripla est, eius quæ à 2 denominatur, & maior, sic ea quæ ab $\frac{1}{8}$ denominatur, tripla erit eius quæ ab $\frac{1}{2}$ denominabitur, & minor, cùm hæc decrementum, illa verò augmentum eadem petant multiplificatione facta per 8: quare Geometriæ numeros accõmodantes aspectemus oportet, multiplicantem numerũ nullam præ se ferre quantitatis significationem, sed tantùm vnitatum frequentiam, multiplicatum verò & productum, semper quantitatẽ denotare, cui elucidandæ attribuuntur numeri. Et licet his tribus libris Euclides solùm de numeris disponat, nihilominus concipere nos decet, eum ad quantitatum continuarum obsequium numeros tantum referre. Quæ igitur theoremata suis Geometricis quãtitatibus ex arithmeticis subfurari valuit congruentia, ea his tribus libris proponet, reliqua puris tantùm arithmeticis relinquẽs geometricis documentis non eousque necessaria. Sed quia multiplicandum decrementum quibusdam difficilius erit multiplicando augmento proponamus exemplum, ac à multiplicationis exemplo ordiamur, dicamúsque à multiplicatione B produci C multiplex tum C numerus aut quantitas dicetur multiplex numeri aut quantitatis B, sed multiplicandi actio semper numero A designatur, quiquidem semper numerus existet: agens autem nunc in incrementum nunc in decrementum in B vnicam passiuam & continuam quantitatem quibusuis numeris explicandam, qua A maior erit semper A numerus agens vnico B patiente atque perinde B metietur A vt minor simplex maiorem actione multiplicem. Cùm semper eandem habeat A numerus ad B vnitatem rationem quam seruat C productus ad B sumptum pro numero siue quam C quantitas in B quantitatem. Quia verò A nullius est quantitatis significator, sed solius actionis, C autem prælibatæ actionis significat quantitatem, sequetur B binos effectus suscipere, alterum quo tanquam simplex passiuus actiuo A confertur túmque tanquam minor seu vnitas maiorem pluralem metitur, alterum quo veluti quantitas aut numerus numero C confertur, qui licet B non semper quantitate metiatur C quãtitatem quia tamen eandem actione aut passione seruat ad C rationem vt numerus quàm idem B simplex vnicus ad A agentem, semper B vt quantitas simplex metietur C multiplicem, non minus quam B idem vt vnus metitur A numerum agentem siue per suas vnitates eundem B repetentem in augmentum quandoque vel in decrementum. Nam semper multiplex maior est simplice actione quidem multiplicandi, licet quandoque quantitate vel numero sit minor, quia in multiplicibus actio non quantitas potissimum inspicitur. Insuper exemplum decrecrementi multiplicãdi, aliud à præfatis, maximè si superponatur numero decrementum significãti alius numerus more vulgarium fractorum tertiæ multiplicãdi speciei applicatorum, vt $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$, &c. per quem multiplicandus sit aliquis vt 12. Tertiam speciem sectabimur (cùm proponantur bi-

ni multiplicantes in his coniunctis numeris $\frac{1}{4}$ *ſcilicet 3 & 4, quorum prior augmentum cùm virgulæ ſuperponatur) poſterior autem decrementum (qui virgulæ ſupponitur) denotat. Multiplicantes igitur ipſius* 12 *propoſiti augmentum, per 3 producemus, 36 cuius 36 decrementum per 4 (virgulæ ſuppoſitum) ducentes inuenicmus 9 ipſius quidem 36 quartam partem, ſiue propoſitæ multiplicationis productum, ſcilicet propoſitæ* 12 *tria quarta. Cur autem multiplicato* 12 *per augmentum in 36, ipſum 36 in decrementum, non autem* 12 *propoſitum duxerimus, id cauſæ dicemus eſſe, quod ſcilicet hi coniuncti multiplicantes* $\frac{1}{4}$ *duobus numeris vnicam reſonent quantitatem, hoc eſt, vnius quantitatis relatiuam: tria namque quarta vnius integræ magnitudinis ſunt relatiua, quare multiplicato per primum augmento, illico multiplicatur productum in decrementum. Secus ſi fuerint duæ numerorum naturæ, licet idem ſint numeri, ſcilicet ſi proponatur idem* 12 *multiplicãdus, per 3 &* $\bar{3}$ *per primum producet 36 augmentum, quia verò diſiuncti ſunt multiplicãtes, ſinguli in propoſitum ſuas exequentur multiplicationes,* $\bar{3}$ *igitur ipſius* 12 *multiplicans decrementum producet 4, harum itaque binarum multiplicationum producta per vnitates multiplicantis repetita producent coniuncta 40, quod erit propoſitæ multiplicationis nempe ipſius* 12 *per 3 &* $\frac{1}{3}$ *productum, hac equidem ratione ſemper multiplex actio ſimplice propoſita maior erit, nam multiplicatio actionem non autem quantitatem denotans, maiorem efficit actionem, licet minorem producat, quandoque multiplicem quantitatem ſimplice, ſed maius ſemper augmentum ipſius ſimplicis, vel certe maius eiuſdem decrementum, quæ ſunt veræ multiplicationis actiones. Id quidem in ſimplici multiplicatione augmenti tantùm vel equidem decrementi tantùm iudicabimus. Quòd ſi mixta offeratur multiplicatio ſcilicet augmenti & decrementi, ſemper quidem augentur bini effectus, augmenti ac decrementi. Sed quæ maiori numero proponitur facienda, multiplicatio, maiorem producit effectum, vt* $\frac{1}{4}$ *aliquem multiplicantia numerum maiorem decrementi effectum quam augmenti efficient (cùm* $\bar{4}$ *decreſcens ſit ipſo* $\frac{1}{4}$ *augente maior) Si verò* $\frac{1}{3}$ *aliquem multiplicent, hi maiorem augmenti producent effectum, cùm* $\bar{3}$ *augens ſit maior ipſo* $\bar{3}$ *minuente. Si quidem per æquales, vt* $\frac{1}{3}$ *aliquem multiplicemus, æqualem producemus effectum, cùm vtrique ſint æquales numeri.*

Huic autem intelligentiæ non parum conferet hæc ſequens formula, qua concipiemus magnitudinem, A, *hoc eſt, quemlibet multiplicandum vtroque modo numerum (vt hic ponimus* 12*) vnitate foueri, hoc eſt, vnum eſſe, ac binis multiplicandi modis obnoxium, ſcilicet per* B C *vel* D *in augmentum, per* E F *vel* G *verò in decrementum. Si enim per* B *augentem ſcilicet 2, ducatur ille* 12*. Ipſe idem repetetur tanquam ipſius binarij vnitates, hoc eſt, qualium* A *vnitas eſt* 12*, eorum* B *binarius augens eſt 24, &* C *ternarius 36,* D *verò quaternarius 48. Similiter eorundem* E *minuens binarius erit 6,* F *verò ternarius erit 4,* G *autem erit 3, qui quidem* E F G *eò quòd decrementum multiplicant, virgulæ ſupponuntur. Hac equidem methodo videmus multiplicationem efficere multiplex maius multiplicato, ſcilicet* G *maiorem ipſo* A*, ſicut &* D*, actione quidem (cum* G *&* D*) ſint multiplicationis actione æquales, quantitate tamen ſecus: nam licet 48 ex multiplicatione ipſius* A *in* D *productum, ſit maior quantitas ipſa* A *magnitudine, tamen 3 ex multiplicatione, eiuſdem* A *in* G *productum, minor erit quantitas eadem* A *quantitate (hoc eſt, ipſo* 12*) æquali tamen vnitatum agente copia producta. Cùm igitur inſpiciuntur quantitates, producta ex augmenti multiplicatione, ſemper maior erit ſimplice multiplicata, quæ verò ex decrementi multiplicatione orietur, minor erit eadem multiplicata. Si verò inſpiciatur multiplicatio, hoc eſt, illius actionis denominatio, ſemper multiplex maius erit multiplicato, nam in ea actione, quilibet multiplicandus numerus, pro vnica magnitudine continua ſumitur, quam quidem plures vnitates augentes plus augent, plures verò minuentes plus minuunt. Inde orietur, quemlibet numerum cuiuſlibet numeri multiplicem dici poſſe, diuerſis autem aſpectibus. Si quidem multiplicetur incrementum, maiores numeri minorum erunt multiplices. Si verò decrementum multiplicemus, è conuerſo minores maiorum multiplices erunt. Si rurſus mixta fuerit multiplicatio, in ea verò exuberet incrementum, multiplex numerus maior erit ſimplice. Siquidem in eadem mixta maius fuerit decremẽtum incremento, minor numerus tum maioris erit multiplex. Hæc ideo ſuggeſſimus vt (menti Euclidis concordes) quaſlibet antecedentis ad conſequens rationes ex multiplicatione quæ*

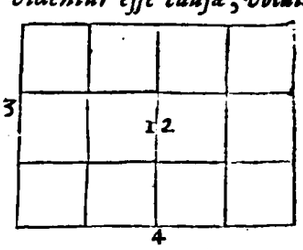
Quadrupla	4	D	o o o o	48
Tripla	3	C	o o o	36
Dupla	2	B	o o	24
Magnitudo	1	A	12 *ſimplex*	
Secunda	$\frac{1}{2}$	F	o o	6
Tertia	$\frac{1}{3}$	ſ	o o o	4
Quarta	$\frac{1}{4}$	G	o o o o	3

antecedens multiplicat consequens oriri doceamus, siue ea fuerit in augmentum, aut in decrementum, vel sanè in mixtam augmenti & decrementi operationem constituta. Cùm ideo ratio sit æquè maiorum ad minores vt minorum ad maiores, semperque antecedens sit consequentis multiplex, necessarium duximus omnes & quosuis numeros quorumuis numerorum multiplices quandoque dici posse, æquè minores maiorum, vt maiores minorum, iuxta oblatum exemplar. Multiplex igitur æquè dici poterit, is qui partibus multiplicatis in decrementum minor efficitur, simul ac is qui per sui ipsius repetitionem in augmentum maior fit. Nam vtraque via per vnitatum multitudinem sumitur, siue in augmentum, aut decrementum pergat, hanc quippe multiplicandi legem sibi sumpsit Euclides, vt rationum quantitates sola multiplicatione (quæ earum vera est substantia) exprimeret. Maioris inæqualitatis per multiplicationem augmenti qua antecedens multiplicat consequens. Minoris verò inæqualitatis per multiplicationem decrementi qua idem antecedens multiplicat consequens, cùm ratio certa nihil aliud sit quàm antecedentis ad consequens multiplicatio, vt tertia diffinitione quinti satis latè diximus. Qua verò de causa sola vsus sit Euclides multiplicatione, nulla autem diuidendi methodo, sed diuisionem simul multiplicatione absoluisse visus est, id potissimum causæ esse arbitramur, quod rationes magnitudinum inter se inuestigandas præcipuo curet negotio. Duarum autem magnitudinum rationem (vt diximus) nihil aliud esse ostensum est, quàm respectus antecedentis ad consequens, non autem consequentis ad antecedens, & proinde ea multiplicatio qua antecedens multiplicat consequens (hoc est, continet) vt rationis quantitas sola multiplicantis quantitate exprimatur, & idcirco facilius multiplicatio multiplicationi quam diuisioni comparabitur, vt inde rationum oriantur conferentiæ, vt exemplo, Sit ratio 12 ad 4, cuius differentiam quantitatis cum ratione 4 ad 12 eius conuersa, inuestigemus. Comperiemus antecedens primæ 12 multiplicare consequens 4 per 3 denominatorem multiplicationis triplæ. Rationis verò 4 ad 12 reperiemus antecedens 4 sui consequentis decrementum per eadem $\frac{1}{3}$ multiplicare, cuius denominatio erit $\frac{1}{3}$ (hoc est tertia) Patet igitur facilius horum multiplicantium 3 & $\frac{1}{3}$ differentia has rationes denominantium, quàm si primæ rationis antecedens suum multiplicaret consequens per 3. Secundæ verò antecedens diuideret suum consequens per eundem 3. Trium enim ad tria nullam concipimus esse distantiam. Operandi tamen modum diuersum, diuersaque producta efficere, sub eadem itaque denominatione, binas illas rationes conuersas opprimentes, absurdissimum proferemus methodi defectum. In quem plures lapsi sunt denominantes rationes conuersas sub eodem numero, quanto autem differant, cuilibet relinquimus iudicandum. Et insuper multiplicationem sumpsit Euclides, relicta diuisione, eò quòd omnis numerus per quemlibet multiplicari potest, non autem per quemlibet diuidi, &c. vt iam quinto diximus. Quia itaque infinitas operandi libertates (in augmentum, scilicet & sectionem) appetit geometria, solam multiplicandi legem ab arithmetica (quæ illi vnica infinita existit) non autem diuisionem (cuius terminata per vnitatem reprimitur facultas) sibi asciscendam arbitrata est, vt latius posthac monebimus.

Diffinitio decimaseptima.

Planus numerus est, qui ex duobus se inuicem multiplicantibus producitur, latera verò illius sunt se inuicem multiplicantes numeri.

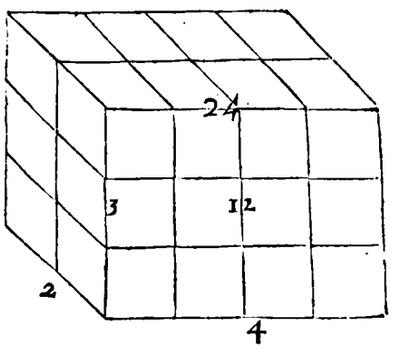
Quoniam omnis numerus numerum multiplicans progenitum metitur, idem numerus planus & compositus erit (vt diffi. 14 huius.) Sed quia huius effectus diuersæ videntur esse causæ, voluit Geometria binis denominationibus has exornare species. Planus etenim superficiei rectãgulæ capacitatem dicit, sub binis lateribus quantitatem denotantibus contentam, vt prima diffi. secundi. Compositus verò producti ex numero eum metiente per aliquem numerum, generationem profert, vt 3 per 4 multiplicata latera rectangulum planum efficiunt 12. Compositum verò non eò quòd contineatur binis lateribus, sed eò quòd aliquis numerus per numerũ eum metiatur, scilicet 3 per 4, vel 4 per 3, aut 2 per 6, &c. producent compositum 12, numerorum operationes tantùm non autem significatas quantitates aspectantes, vt prima diffinitione planè docuimus, secus in plano qui significatas quantitates aspectat tantùm.



Diffini

Diffinitio decimaoctaua.

Solidus verò qui ex tribus ſeſe multiplicantibus producitur, latera autem illius, ſunt multiplicantes ſe inuicem numeri.



Solidum ea de cauſa vocat, quòd tribus foueatur dimenſionibus, longitudine, latitudine, & ſublimitate, quia planum duabus tantũ contineri dixit, vt ordinem numerorum iuxta quantitatum continuarum dimẽnſiones diſponat, ſcilicet numerum primum qui vnicam habet longitudinem, cùm nullus eum metiatur numerus inſtar lineæ. Planum verò longitudine & latitudine (veluti ſuperficies) conſtantem, ſolidum autem tribus, longa, lata, ac ſublimi, comprehenſum (ſolidi corporis inſtar) dimenſionibus, vt 4 per 3 latera ducentes, planum efficimus 12. Ipſum rurſus 12 planum per tertiam dimenſionem, ſcilicet 2 multiplicantes, ſolidum 24 effecimus, tribus dimenſionibus 4 3 2 ſe inuicem multiplicantibus compoſitum, quarum quælibet quantitatem indicat.

Diffinitio decimanona.

Quadratus numerus, eſt qui æquè æqualis, vel ſub duobus æqualibus numeris continetur.

Diffinitio vigeſima.

Cubus numerus, eſt qui æquè æqualis æquę, vel ſub tribus æqualibus numeris continetur.

Quia omnis quadratus planus eſt, ſicuti omnis cubus numerus ſolidus eſt, quadratus verò ſolus ſub duobus æqualibus numeris inter omnes planos continetur, cubus verò ſub tribus æqualibus inter omnes ſolidos. Tamen ſeorſum diffinire dignatus eſt Euclides propter eorum regularitatẽ, infinitis geometriæ obſequiis vtilem. Dicit autem æquè æqualem eſſe quadratum, vt dimenſionem geometricam laterum exprimat, ſub duobus verò numeris æqualibus, contineri, vt arithmeticam componẽdi ſpeciem deſignent. Cubum ſimiliter æquè æqualem æquæ, vt tribus eum geometricis æqualibus, menſuris contineri doceat, ſub tribus verò æqualibus numeris, vt arithmeticam componendi methodum inſinuet, veluti in quadrato. Ex his facilè percipimus Euclidem numeros ad geometriæ auxilium conuocaſſe, cùm eos ad geometriæ ſæpius dimenſiones reducat.

Diffinitio vigeſimaprima.

Numeri proportionales, ſunt quorum primus ſecundi, & tertius quarti, æquè fuerit multiplex, ſiue eadem pars, ſiue eædem partes fuerint.

Proportionem (vt diximus tertia diffinitione quinti) magnitudinum ſub æqua earum multiplicatione foueri docet. Nam proportionales dicit numeros (hoc eſt eandem rationem habentes) eos quorum primus æquè ſecundi, vt tertius quarti fuerit multiplex, ſiue fuerit eiuſdem pars, ſiue partes, hoc eſt idem decrementum, quouis modo æquè multiplices dicit, & idcirco in eadem ratione ſeu proportionales quauis multiplicatione augmenti ſiue decrementi, aut equidem vtriuſque ducti fuerint, vt 6 ad 3 ſicut 4 ad 2, & 3 ad 6 vt 2 ad 4 pars, & 2 ad 5 vt 4 ad 10, ac 8 ad 6 vt 12 ad 9 partes, ſemper quauis arte primus ſecundi æquè vt tertius quarti dicetur multiplex, & igitur proportionales erunt.

MONITVM.

Verterus Zambertus græcum Theonis exemplum, ſuper hac diffinitione, vltimam reliquit dictionem noſtro negotio vtiliorem (ſcilicet ὡσιν. Cùm enim dicit Euclides numeros proportionales eſſe, quorum primus ſecundi & tertius quarti æquè fuerit multiplex: hic finis eſt ſubſtantiæ diffinitionis, nam æqualitas multiplicationis, vt ſæpius diximus, æqualitatem rationum & proinde propor-

tionem neceſſariò producit. Quod autem poſtmodum addit (vel eadem pars vel eædem partes fuerint) illud ſimile ſubiungit, vt oſtendatur quauis arte, ſiue vt pars continua diſcreti ſiue vt partes diſcretæ diſcreti (quæ ſunt omnes rationes cognitæ) æquè fuerit multiplex primus ſecundi, vt tertius quarti, ipſos eandem habere rationẽ, & ideo proportionales eſſe: quare dixit Græcum exẽplar, ſiue eadem pars, ſiue eædẽ partes fuerint, id eſt quoquo modo æquè multiplices, vt decrementi ac incrementi multiplicationẽ exprimat: quòd ſi relinquamus vltimam dictionem (fuerint) intelligemus proportionales eſſe eos tantùm qui ſunt æquè multiplices, vel eos qui ſunt eadem pars vel partes. Quid igitur in hoc ſubfurato verbo depereat, quiſque iudicabit: nam à multiplicibus omnes excluderentur ferè quantitatum rationes (vt diximus diffinitionibus quinti) hoc latè prædixit Euclides decima diffinitione quinti, cùm oſtendit in rationibus minoris inæqualitatis, minores eſſe maiorum multiplices, eò quòd decrementum ipſæ multiplicent maius, ſicq; multiplicationem actioni, non autem quantitati conuenire docuit. Præterea patet hinc rationem nihil aliud quàm antecedẽtium ad conſequentia multiplicationem eſſe: dicit enim primum antecedens æquè multiplicare ſecundum conſequens, vt tertium antecedens quartum multiplicat conſequẽs. Variata igitur multiplicationis ſpecie, variatur & rationis quantitas, inſuper ſi nulli proportionales eſſent exceptis æquè multiplicibus, & eadem parte, ſiue partibus. Quid in his accidet, ſicut 8 ad 6 ſic 4 ad 3, quorum primus & tertius ſecũdi & quarti, neque multiplices, neque pars aut partes, à Cãpano & Theone dicuntur, ac ideo proportionales non eſſent, ſi cum diffinito (vt moris eſt) diffinitionem conuertamus, quod planè abſurdum conſtat. Non itaque poſtremam hanc orationem, vt diſiunctiuam, ſed vt interpretem legemus.

Diffinitio vigeſimaſecunda.

Similes plani, & ſimiles ſolidi numeri, ſunt qui proportionalia habent latera.

Quoniam plani numeri duo tantùm habent latera, eos producentia ſua multiplicatione, ſolidi verò tria habent, ſimilitudinem planorum inter ſe ac ſolidorum inter ſe, ponit in rationis laterum ſimilitudine. Si enim duo latera vnius plani numeri, eam habeant inter ſe rationem, quam duo latera alterius plani, ipſi ſimiles erunt plani, haud ſecus in ſimilibus ſolidis, cùm enim tria vnius latera inter ſe, eam quam tria alterius obſeruãt latera rationem, ipſi ſimiles erunt ſolidi. Quia verò latera ſimiles habent rationes, proportionalia dicuntur, & ſimilium planorum ac ſolidorum numerorum latera erunt, vt exemplo, quia 2 & 3 ſunt in eadem ratione qua 4 & 6 numeri ab his lateribus cõpoſiti, ſimiles plani erunt, ſcilicet 6 & 24, in ſolidis verò 2 3 4 ſunt in ratione horum 4 6 8, quare ab eis compoſiti ſolidi, ſcilicet 24 & 1 9 2, ſimiles erunt ſolidi.

Diffinitio vigeſimatertia.

Numerus partem cognominans, eſt is per quem pars repetita totum conſtituit.

Vt 4 eſt tertia pars 12 eò quòd ter repetitus totum 12 componat, quare repetitionis frequentia partem à ternario cognominat.

Diffinitio vigeſimaquarta.

Perfectus numerus, eſt qui ſuarum ſectionum ſingulis partibus ſimul ſumptis eſt æqualis.

Quoniam eidem numero plures ineſſe poſſunt partium quotarum diuerſæ ſectiones, diximus perfectum eum eſſe numerum, qui ex ſingulis ſuarum ſectionum partibus conſtat, vt in ſenario qui quidem habet ſecundas, tertias & ſextas partes. Sumantur itaque earum partium ſingulæ, ſcilicet ſecunda 3 tertia 2 & ſexta 1, quæ 3 2 & 1 ſimul ſumpta, componunt ſenarium, perfectum igitur numerum. Similiter 28 qui ſuis conſtat partibus ſcilicet 14 7 4 2 1 ſingulis eum ſimul componentibus, vt latius trigeſimaſeptima noni.

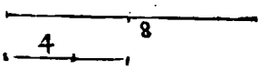
MONITVM.

Huic addidimus hanc vocem (ſingulis) ne hac Theonis diffinitione ambigeremus circa partium queſtum,

queſtum, videmus etenim omne totum ſuis partibus æquum eſſe, omnes igitur numeros perfectos crederemus: quare ſi ex ſingulis ſuarum partium eum componamus, intelligemus ſingulas tantùm à ſectionibus ſumendas eſſe partes, quæ coniunctæ ipſum componant.

Communes ſententiæ. Prima.

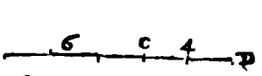
Si numerus metiatur partem, metietur & totum.



Cùm pars ſit ea quæ totum ſuiipſius præciſa repetitione conſtituit, perſpicuum eſt, ſi aliquis numerus præciſa ſua repetitione partem conſtituat, & eundem ampliori repetitione totum conſtituere, vt A ſua repetione generans B partem ipſius C, perſpicuum eſt A ampliore facta repetitione, quaquidem producit ſingulas ipſius C partes æquales ipſi B tandem totum C metiri.

Secunda.

Sinumerus metitur totum & ablatum, metitur & reliquum.



Si numerus A ſua repetitione producat numerum B D totum, & præterea ſua repetitione conſtituat ablatum B C, perſpicuum erit: ſi A præciſis repetitionibus ipſius A in toto B D, tollantur præciſæ repetitiones eiuſdem A in B C, quæ ſupererunt in C D repetitiones ipſius A, ipſum C D reliquum metientur, cùm eundem repetant.

MONITVM.

Licet præcipui, quorum ſudore potiſſimum Euclidis intellectum adepti ſumus, fuerint Campanus & Theon, & inter eos plus videatur veræ interpretationi acquirendæ incubuiſſe Campanus, nihilominus qua de re ſæpius pugnantias quaſdam Mathematicam veritatem maculantes, pluribus locis (maximè quinto & his tribus numerorum libris) paſsi ſint, admirari non deſino: ni tantùm illud præcipuum fuerit, quod ſcilicet arithmeticarum magnitudinum naturam, cum geometricarum magnitudinum natura confundentes, earum documenta iiſdem præceptis tradi poſſe, ſæpe exiſtimauerunt, quaſi diſcretum & continuum eiſdem vallari poſſet legibus. Partem etenim geometricam prima quinti diffinitione, non aliàs quàm tertia ſeptimi antea diſinierunt, licet illa generalior ob confuſorum naturam, hæc verò minus fuerit generalis ob diſcretorum facilitatem. Partem inſuper multiplicis relatiuam eſſe dixerunt: quod videtur quodammodo abſurdum, partem ſcilicet quæ verè geometrica confuſa & indiſcreta quantitas eſt, multiplicis quæ pura arithmetica & diſcretionem præ ſe fert, relatiuam eſſe indecens admodum appareret: nam quam magnitudinem Geometræ partem dicunt (à toto quauis arte abſtractam) non ſemper ſuſcipit Arithmetica, ſed tantùm hac generali acceptione eas magnitudines à toto abſtractas, quæ ipſi toti commenſurabiles exiſtunt, eò quòd numerorum natura ſemper magnitudinum commenſurationem præ ſe ferat. Quare eam in binas diſtribuit Arithmetica ſumptiones, partem nempe & partes, vt diximus tertia & quarta huius diffin. reliquas ſuo toti incommenſurabiles geometricæ amplitudini reſeruans. Partem itaque toti relatiuam poſuimus, generali apud Geometras & Arithmeticos ſumptione, quæ ſemper propoſitæ magnitudinis decrementum profert, nuſquam verò augmentum multiplicat: multiplicis verò relatiuam, ſimplicem eſſe diximus magnitudinem. Cùm enim magnitudo ſimplex (quæ ſcilicet augmento æquè vt decremento obnoxia eſſe reperitur) æquè per frequentes additiones alterari poſsit, vt per frequẽtes detractiones, actiones illas quibus propoſita magnitudo in augmentum vel decrementum alteratur, multiplicationes diximus, à multitudine vnitatum numeros componentium, denotatas: quare illæ multiplicationes ſolis adhærent arithmeticis legibus ob earum diſcretionẽ. Hac de cauſa cùm multiplicem maiorem minore dicimus, non quantitatem vel eius magnitudinem maiorem dici credemus, ſed tantùm actionem illam multiplicãdi maiorem denominationem multiplici numero deſignatam producere, denominatione ſimplicis quam ſemper multiplex (ſimplicis relatiua) ſub vnitatis nomine contineri cogit. Ac ideo numerus (ſemper vnitate maior exiſtẽs) multiplicem actionem (numero ſignificatam) ſimplice paſsiua maiorem eſſe, ſiue ea actio in augmentum, ſiue in decrementũ pergat, aſſeremus, hinc ſuſcipiemus à propoſita ſimplice magnitudine poſſe educi per multiplicatum eius decrementum, partem aliquam eiuſdem quæ quidem ipſius ſimplicis & maioris multiplex dici

poterit,(ſcilicet decrementum) & ab eadem ſimplice poſſe educi per multiplicatum eius augmẽtum, aliam maiorem ipſa propoſita,quæ eius ſimplicis & minoris multiplex dicetur(ſcilicet augmentum) & igitur vtraque via altera alterius multiplex dici poterit,ſiue pars eius fuerit,ſiue eandem repetat,& tamen multiplex ſemper maior erit ſimplice,cùm multiplicatio non quantitatem, ſed actionẽ reſpiciat tantùm.Id equidem ea de re dicimus,vt oſtendamus Euclidem non omiſiſſe rationes ſuperparticulares, ſuperpartientes,necnon omnes minoris inæqualitatis rationes,quas omittere videretur,ſi multiplex numerorum in ſola ratione multiplici ſumeret,ſcilicet circa ſolum ac præcisè repetitum augmentum.Cùm autem apponit & decrementum,ea duplex multiplicatio omnes comprehendit habitudines,& maioris & minoris inæqualitatis (vt optat Euclides) qui ſolam multiplicationẽ ſuis theorematibus tradit,nullam autem diuiſionem,eò quòd vnitas ſoli multiplicationi non diuiſioni ſit obnoxia.Quare omnimodas rationum compoſitiones, ſola multiplicatione præcipit Euclides fieri (quinta ſexti diffinitione) non autem diuiſione,quam neſcio qua arte omiſit Campanus, Theon verò penultimo exemplo eam exponere conatus, rationem 1 ad 2 dimidiam,non autem ſub duplam vocauit,rationem verò 3 ad 1 triplam,vt oſtenderet triplam per dimidiam ductam rationem ſeſquialteram producere,ex his compoſitam:quòd illum potius caſu quàm ex voto offendiſſe,aut ex antiquioribus ſubfuraſſe arbitramur,eò quòd nullas rationum minoris inæqualitatis denominationes, per decrementi multiplicationem productas oſtenderit,vt verè oſtendere debuiſſet,ne in illud caderer offendiculum modernorum quorundam,qui ex binis maioris,& minoris inæqualitatis rationibus (vt præfato Theonis exemplo) rationem componere volentes, maiorem denominationem, per minorem diuidendam iubent:Euclides verò multiplicandam(vt expoſuit Theon)quod fieri non poteſt,ſi rationem maioris & eius conuerſam minoris inæqualitatis ſub eadem denominatione (vt docent moderni) concludamus:nunquam enim ex his duabus conſurgentem rationem generabimus vt ſi ex tripla & ſubdupla aliquam componere velimus (3 per 2 multiplicantes) ſextuplam produ-

cemus, longè à ſeſquialtera (quæ verè ab his producitur) alienam. Quare autem Theonem id potius offendiſſe quàm ex voto feciſſe diximus, ea eſt cauſa. In vltimo ſequenti namque exemplo ad quantitatum comparationem, non autem ad denominationum multiplicationem (qua facile negotium illud exequeretur) recurrit, vt qualium ait A B *eſt duorum, talium eſt* G D *quatuor, qualium autem* G D *quatuor, talium* E Z *trium, & qualium igitur* A B *duorum, talium* E Z *trium. Illud tandem nulla ab his denominata ratione quæ ex dimidia & ſeſquitertia conſtaret, quod leuius abſoluiſſet ductis inuicem, $\frac{1}{2}$ per 1 $\frac{1}{3}$ denominatoribus, iuxta Euclidis mentem producens bipartientem tertias ipſius* A B *ad* E Z. *Quare quòd priori exemplo dixit, ſorte non arte offendiſſe Theonem arbitrati ſumus, licet in eo veram Euclidis mentem ſequutus fuerit.*

Cùm inſuper qui Euclidem interpretati ſunt,geometricarum magnitudinum ab arithmeticis differentiam non ſatis docuerint, à primorum numerorum ac datæ rationis minimorum intelligentia, diſcentes maxime auertere viſi ſunt:nam primos numeros ſola metitur vnitas,vnica quidem ac continua magnitudo geometrica,quæ nullo numerorum nomine comprehenditur,ſed tantũ numeri pars dicitur.Vnde quamlibet rationis ſpeciẽ primos numeros(dẽpta multiplici)recipere videmus. Nã in multiplici ac eius cõuerſa,minor numerus ſemper vtrumque(contra primorum diffinitionem) metitur.Similiter quamlibet rationis ſpeciem(dempta multiplici)minimos numeros ſuſcipere videmus. Nam ratio multiplex & eius conuerſa ſemper cadit inter continuam ac diſcretam quãtitatem,cùm minor ſit ſemper maioris pars vnica,non autem partes,non igitur eſt pura ac ſimplex numerorum ratio.Cùm itaque ad minimas numerorum partes,ea ratio multiplex ducitur,alterum terminorũ ſemper efficit vnitatem, quæ cùm non ſit numerus, inter numerorum rationes,minimorum multiplicis rationis numerorum comprehendere rationes vitabimus. Reliquarum autem rationum ſpecies cùm ſemper minor ſit maioris partes,in numeris minimas eorum partes collocare cenſebimus. Cùm igitur de minimis datæ rationis ac primis loquemur poſthoc numeris, Euclidem rationem multiplicem ac eius conuerſam, his comprehendere non putemus, vt latius diximus decimatertia diffinitione huius.

Campanus autem ſibi futuras has difficultates cernens, multitudine principiorum huic ſeptimo (neſcio ſi ab Euclide) præpoſitorum, ab his liberari conatur: præſentit enim difficile negotium, ſcilicet quandoque vnitatem non eſſe numerum, vt ex diffinitione ſecunda huius, & pluribus aliis locis. Quandoque verò eſſe, vt quoties eam inter numeros proportionales collocat, cùm de rationibus in genere agit,eò quòd ibi multiplex contineatur, inter cæteras quæ ſecum ducit vnitatẽ. Quandoque inſuper vnitatem non ſecari, vt 4 petitione & 15 diffinitione dicit ſimplicem numeri par-

tem

tem vnitatem, ac nullum posse infinitè secari numerum, quandoque verò eam secari, cùm quantitatem ab illa denominatam, 5 communi sententia in partium denominationes distribuit. Præterea partem diffiniens non autem partes, huius discretè ab illa continua differentiam reliquit, ac vnitatis naturam à significata per eam quantitate non satis distare docuit (vt primo huius diffinitione diximus) & quamplura alia, quæ ideo principiorum superflua admodum multitudine initiare voluit, vt obscura quæque tollere conaretur, quod frustra videtur fecisse. Non enim prædixit qua ratione numeros sibi sumpsit Euclides, vt confusam geometricarum magnitudinum propallaret habitudinem, non autem vt arithmeticam artem tantùm edoceret, maius etenim ea exquirit opus. Quarè non indignum arbitratur Euclides, in demõstrandis futuris, horum trium librorum theorematis argumenta geometricis principiis prioribus sex libris edoctis fulciri, cùm numeros ad quantitates geometricas illustrandas tantùm sumpserit, non autem ad arithmeticam edocendam.

Aliud insuper monendum curabimus, cùm susceperimus Euclidem numeros in Geometriæ subsidium, non in arithmetices eruditionem tantùm accommodasse: intelligendum est Euclidem hac vti solertia, qua potissimũ pura Arithmetices doctrinæ theoremata interponit, his quæ geometricas magnitudines numeris designant, vt subsequentia quæque prælibatis edoceat. Quare cùm verus theorematum excutiendus erit intellectus, illud maximè curandum est, an scilicet theoremata solas complectantur numerorum leges, ac eorum sequantur simplicem naturam, an verò numeris illis quantitates significent, lineam scilicet planum aut solidum. Tum demum vbi proposita theoremata numerorum tantùm discretiones, nullæ dimentioni coaptatas proponent, sed tantùm Arithmeticæ operationi, ea iuxta pura arithmeticorum principiorum elemẽta Euclidem intellexisse arbitremur: siquidem theoremata numeris areas lineas, aut solida quandoque designent. Ea (iuxta Geometriæ naturam) quantitatibus numeros adaptatos, pro significatis ab ipsis numeris quãtitatibus sumpsisse credamus. Tunc igitur numerorum particularem relinquentes naturam, eorum discretionem in quantitatis per eos significatæ deuoluemus proprium: cùm enim dixerimus (vnitatem diffinientes) numeros ex se nullam quantitatem producere, sed plurium subiectorum discretioni adaptabiles esse: quæ si quantitates fuerint, quælibet numeri vnitas naturam subiecti cui applicanda est, informat, vt si numeris lineam significare velimus, quælibet vnitas longitudinem tantùm præ se fert. Si planum, longitudinem ac latitudinem, siquidem solidum, tres dimẽsiones eadem suscipiet vnitas, quæquidem dimensiones infinitè secari possunt, vnitas verò eas significans minimè secari potest, ab arithmeticis. Cùm igitur ab vnitate denotata quantitas secta fuerit, per numeros rursus quorum minima pars est vnitas, eadem quantitas referetur. Quare hi numeri respectum numerorum ad alios habẽtes numeros, huius quantitatis (quæ antea vnitate significabatur) habitudinem, ad quãtitatem alio numero significatam, in rationem numerorum haberi edocent. Cùm igitur sub generali alicuius theorematis traditione qua numeri dicuntur numeris comparari, vt lineæ plani vel equidem solidi explicent naturam, intelligemus simul & numeris vnitatem comparari sub numerorum nomine posse, non equidem apud arithmeticos, qui vnitatem pro numero non sumunt, sed apud geometras, qui vnitate significatam quantitatem infinitè secantes vnitatis denominationem in numeri denominationem conuertunt, eandem quantitatem quam vnitas antea denotabat referentem. Quare eorum theorematum sententias (licet ab arithmeticis traditæ sint qui non infinitè, sed ad vnitatem vsque secant) infinitè secare quantitates existimemus, ac vnitate significatam quantitatem, inter quantitates numeris significatas haberi, eò quòd ea distributa in numerum conuertatur eam significantem, vt exemplo, Sumatur, 20 propositi. octaui, quæ dicet similes planos esse eos, quorum vnus est medius proportionalis. Ab hoc orietur primo aspectu difficile, nam inter septem & viginti octo medius datur 14 & igitur similes plani erunt 7 & 28, & proinde 7 planus qui primus est, quod fieri non potest: nam ex binis sese multiplicantibus, non fit (cùm nullus eum metiatur) sed sola vnitas ex diffinitione primi numeri. Ad hæc dicemus hoc theorema purum arithmeticum non esse, nam similitudo hæc planorum, proportionem laterum areas continentium præ se fert, quòd ab arithmetica recedit, vt vidimus vigesima secunda diffinitione huius & prima diffinitione sexti. Nam hoc theorema numeros tantùm non concipit, sed ab eis significatas areas, atque ab eorum lateribus lineas, vt intelligat latera siue lineas, vnitate ac septenario significatas, eandem concludere plani similitudinem, quam lineæ binario & denario quarto significatæ, eò quòd ad numeros (vt arithmeticam subeant) reduci possunt, scilicet per multiplicationem qua sola vtitur Euclides. Si enim per eundem numerum scilicet 3 ducantur 1 & 7, fient 3 & 21 ac insuper 2 & 14 per eundem 3 fient 6 & 42. Repericmus vnitate denotatã lineã trifariam sectam, numero ternario denotari, qui quidem ad 21 eandem habẽs quam 6 ad 42 rationem, similem aream sub 3 & 21 areæ sub 6 & 42 contentæ, cõcludit, & eandem quam concluserant, vnitas & septenarius ipsius septem primi numeri latera, quod hac lege ab arithmeticis

non reciperetur, cùm primus numerus planus esse non posſit propter vnitatis integritatem insolubilem, sed per multiplicationem in eiusdem rationis numeros reductis planorum eisdem lateribus, reperiemus hoc theoremate semper extremos similes esse planos, non etenim ipsos numeros, sed semper à numeris denotatas superficies. Huius prolixam animaduersionem dare cogimur, ne qui numeros pro significatis quantitatibus quandoque sumptos, quandoque verò arithmeticis operationibus sumendos esse non præuidisſent, disciplinas fœdatas esse opinentur. Et insuper vt hoc exemplo, plures aliæ Euclidis propositiones his tribus proximis libris appositæ (quæ quantitates præcipuè respiciunt) interpretandæ sunt. Quare Euclidem his tribus libris arithmetica principia, se traditurum non expectemus, sed præcipuè geometricarum quantitatum arithmeticis subsidiis discretarum affinitates, comparationes, ceu collationes, numeris significantibus expressas, postmodum autem arithmeticas operationes, seu in numeros (quantitates exprimentes) collatas actiones, per numeros arithmecis præceptis vallatos se doctũ arbitremur. Vnde præcipuũ numerorum vsum in binas acceptiones his tribus libris Euclidem distribuisse dicemus, in actiuos scilicet, & passiuos numeros: quorum differentias antequam ad demonstrationes vẽtum sit, explanare voluimus, ne qui hæc numerorum præcepta arithmeticis tantùm legibus obnoxia esse existimarent, plures horũ trium librorũ demonstrationes sibiipsis pugnare arbitrarentur, ac proinde in earum veras intelligentias impingerent. modos quibus Euclides geometricis quantitatibus edocendis, numeros adoptauit ignorantes.

Actiui numeri sunt hi, qui arithmeticas operationes in numeros quantitatem significantes exercent.

Passiui autem sunt hi, qui quantitates significantes, vel quantitatum rationes suscipientes, per actiuorum numerorum operationem alterantur.

Vt confusas edoceat Geometriæ quantitates, numerorum obsequia in binas discernit Euclides (vt iam diximus) acceptiones: quarum priorem actiuos suscipere dicemus numeros, qui sunt hi per quos arithmeticas operationes exequimur in numeros quantitatem significantes, vt his operationibus vnitate, ac numeris significatas quantitates (quæ suapte natura aliàs confusæ sunt) propalemus. Ac earundem affinitates occultæ numerorum opera clarius eluceſcant, vt exemplo discutiamus, qui numeri vt plurimum actiones, siue arithmeticas operationes exerceant. Multiplicantes siue producti multiplices numeri, nullam ex se quantitatem demonstrant geometricam tanquam multiplices, sed tantùm multitudinem repetitionum, qua numerum passiuum multiplicatũ quantitatem significantem sibi sæpius sumunt. Partes insuper quæ discretionẽ abstracti à toto (quantitatem significante passiuo) præ se ferunt, quandoque sua multitudine totum excedentes, quandoque verò à toto deficientes pro negotij opera, & compositi quorum natura multiplex est, constãs ex duorum multiplicatione, huius autem præcipua operatio 7 noni patefiet, vt solidum quantitatem significantem producat. Præterea pares ac impares, qui significatam à parte vel vnitate quantitatẽ, iuxta numerorum discretiones distribuunt, cùm vnitatem suis operationibus secare non valeant. Primi verò numeri vnicæ tantùm discretionis capaces, qui per vnitates diuisi, hãc solam patiuntur distributionem, nullam autem subdiuisionem, nam per insecabiles partes sunt diuisi. Minimi demum alicuius rationis numeri, qui quantitatum numeris significatarum affinitatem, tali terminorum exhibent discretione, quæ vltima existens posteriorem his terminis fieri non patitur (hac permanente affinitate) discretionem. Perfecti denique qui necessariis partibus coassumptis conflantur.

Hi omnes necessariam suæ substantiæ diffinitionem, absque discretione siue multitudine patefacere non possunt, qua operationes arithmeticæ exercendæ sunt, in quantitates geometricas siue numeris distributas, siue insecta vnitate significatas, præfatorũ numerorum actiones (quæ in se operãtur) patientes. Quas quidem actiones ab his numeris innatam ac necessariam in se discretionem accipere videmus, nam cuiuslibet horum pura substantiæ diffinitio, discretionem eidem conferre cogitur. Quare hi omnes actiui, cùm discretionem præ se ferant, suis operationibus necessariam, numerorum particulari lege vallandi erunt, ac præceptis purè arithmeticis subiiciendi.

Quod secus in passiuis accidit, quantitates significantibus, hi namque ab Euclide suscepti sunt, vt quantitatem alterandam siue in incrementum, siue in decrementum actiuorum opera significent. Substantiæ etenim eorum diffinitio, nullã in se necessariò discretionem requirit, sed tantùm alterandam actiuorum operatione quantitatem, ea de causa numeris expressam, quod agentibus numeris, numeri tantùm ceu eorũ vnitates correspõdeant, vt productas (numerorũ actione) passiuorũ alterationes indicent: quorũ exempla veluti in actiuis proferemus. Primùm ab vnitate inchoãtes, cuius natura integrã ac insolutam profert substantiam. Totum pariter nullam ex se denotat distributionem,

vt

vt totum dici possit, sed potius integritatem pars simulac substãtiam insectam denotat. Planus numerus non discretionem respicit, sed binas (instar rectanguli) dimensiones (longum scilicet & latum) numeris aut vnitate significatas, solidus verò ternas. Quadratus autem & cubus, laterum siue dimensionum æqualitatem, non discretionem intuẽtur. Proportionales affinitatum similitudinem, non autem discretionum numerũ, siue multitudinem conspiciunt. Multiplicandus tandem simplicem ac verè vnicã integram magnitudinẽ à numeris operantibus alterandam demonstrat. Quare licet per numeros hæ significentur quantitates, non ideo in se aliquid optant discretionis, sed tantùm numeris significantur, vt facilius numerorum actiuorum in se operantium suscipiãt actionem, ac in cognitum incrementum, seu decrementum, aut æqualitatem (passiuis numeris significatam) transferantur. Passiuos itaque numeros vnitatem recipere non ducemus absurdum, eò quòd vnitas quantitatem æquè vi illi significet, ac præcipuum eorum negotium non numeros, sed significatas quantitates aspectet actiuorum numerorum arithmeticis operationibus seu actionibus obnoxias, vnde orietur multiplicem rationem inter numerorum puras ac particulares rationes censeri nõ posse, cùm ea sit ratio partis ad totum, siue simplicis ad multiplex, ac eius conuersa ratio multiplicis ad simplex. Nam alter terminorum huius rationis, semper integram ac insolutam denotat quãtitatem, vt iamantea diximus. Ac insuper ea est tantùm ratio vnitatis, siue continui ad numerum, licet per binos quandoque exprimatur numeros, quorum alterius necessariò pars vnica (totum metiens veluti vnitas numerum reperietur: non igitur discreti ad discretum erit ratio, sed discreti ad continuum, seu continui ad discretum. Reliquæ verò rationes quælibet (dempta multiplici & eius conuersa) puræ sunt arithmeticæ, quarum semperuterque terminus erit numerus, nusquam autem vnitas. Qua de re eas rationes numerorum esse dicemus, eò quòd alter harum rationum terminus, alterius sit partes, quòd discretionem arithmeticam, necessariò his rationibus confert. Si itaque his tribus numerorum libris de rationibus numerorum actiuorum loquatur Euclides, rationem multiplicem inter eas rationes comprehendi non patiemur (cùm hæc sit continui ad discretum, illæ verò discretarum sunt rationes) quod si de numerorũ rationibus in genere discutiat, quaslibet rationes intelligi putabimus, æquè continui ad discretum, vt discreti ad discretum: nam (vt frequentius diximus) Geometria multò generalior euadit ipsa arithmetica: quælibet enim numerorum rationes inter quantitates continuas reperiri possunt, continuorum verò quælibet inter numeros reperiri minimè fas est. Cùm igitur numerorum actiuorum (qui puri sunt arithmetici) rationem narrabit Euclides, non necessariò multiplicem his legibus arctari putabimus, sed inter numeros passiuos seu quantitatis denunciatores eam haberi credemus. Numeros itaque in binas acceptiones Euclidem exposuisse concludemus, in actiuos scilicet exequium alterandarum quantitatum adimplentes: ac inpassiuos alterandas siue discernendas (actiuorum opera) quantitates denotantes: quod si quandoque numeros actiuos pati, aut è contra passiuos agere videbimus, illud est animaduertendum, non tanquam quantitates numeris significatas agere passiuos credemus, sed eundem numerum quandoque actioni, quandoque verò passioni deputari posse non admirabimur, diuersis tamen respectibus. Nam simul & semel eũdem numerum actionem & passionem ferre posse negabimus, sed eundem nunc actiuum, nunc verò passiuum esse non vetari.

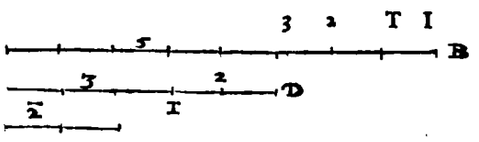
Si itaque alicuius theorematis hypothesis numeros arithmeticos, seu actiuos poposcerit, huius conclusioni rationem multiplicem aut vnitatem non subiici dicemus: siquidem passiuos poscat eadem hypothesis his vnitatem ac perinde rationem multiplicem contineri fatebimur. Quod si de numeris in genere fiat theorema quoslibet subiiciemus, hac tamen solertia qua actiuos actiuis, & passiuos passiuis, dedicemus operibus.

NVMERORVM GEOMETRIÆ OBSEQVIO imploratorum alij ſunt actiui, diſcreti ſeu Arithmeticarum operationum actores, alij verò paſſiui, continui, ſeu Geometricarum quantitatum ſignificatores.

Arithmetici, ſeu actiui	*Geometrici ſiue paſsiui*
numeri,	*numeri,*
Multiplicantes	*Vnitas*
Multiplices	*Totum*
Partes	*Pars*
Compoſiti	*Planus*
Pares	*Solidus*
Impares	*Quadratus*
Primi	*Cubus*
Minimi	*Proportionales*
Perfecti,	*Multiplicandus vel ſimplex.*

Propoſitio prima.

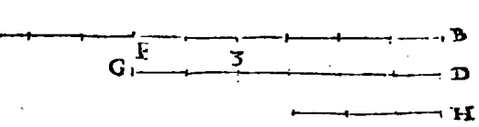
Si duobus numeris expoſitis, ſublato ſemper minore à maiori, reliquus minimè metiatur præcedentem quoad aſſumpta fuerit vnitas, qui à principio numeri primi adinuicem erunt.



Exponantur duo numeri A B *maior &* G D, *à maiore autem* A B *auferatur* G D *relinquens* Z B, *ab ipſo autem* G D *tollatur* Z B *relinquens* I D *numerum.* Z B *verò dematur* I D, *ſicq; ſemper quoad ſuperſit tantùm vnitas quæ ſit* T B: *Dico nullum numerum ipſos* A B *&* G D *metiri, quòd ſi credatur aliquis eos metiri ſit* E, *quoniam* E *metitur* A B *totum &* G D *ablatum, metitur idem* E, *reliquum* Z B (*per ſecundam communem ſententiam huius*) *quia ſimiliter idem* E *metitur totum* G D *&* Z B *ablatũ metietur & reliquum* I D (*per eandem*) *Et tandem cùm metiatur totum* Z B *& ablatum* I D *metietur idem* E *numerus reliquum, vnitatem ſcilicet* T B, *quod eſſet abſurdum, cùm maior ſit* E *numerus vnitate. Nullus igitur numeros* A B, G D *numerus metietur, ſed ſola vnitas & proinde expoſiti primi erunt* (*per* 13 *diffinitionem huius*) *Si itaque duobus numeris, &c.*

Propoſitio ſecunda. *Problema* 1.

Duobus numeris datis non primis adinuicem, maximam eorum communem menſuram inuenire.



Dentur bini numeri A B G D *non adinuicem primi, à quibus auferatur minor à maiore, donec reliquus metiatur præcedentẽ, quod neceſſariò reperietur, nam ſi ad vnitatem venirent, ipſi* (*per præcedentẽ*) *eſſent primi, quod eſſet contra hypotheſim, non igitur ad vnitatẽ veniunt, ſed ad numerum, qui ſit* G Z *ablato quidem* G D, *ab ipſo* A B (*qui ſit* E B) *&* A E *ex* G D (*qui ſit* Z D) *Dico maiorem reliquo* G Z *nullum vtroſque* A B *&* G D *metiri: ſi itaque aliquis fuerit, ſit* H *numerus maior ipſo* G Z *metiens datos* A B *&* G D, *quoniam* H *metitur totum* A B *&* *ablatum* G D, *metietur & reliquum* A E: *quia verò metitur totum* G D *&* *ablatum* A E *metietur reliquum* G Z, *per ſecundam cõmunem ſentẽtiam huius. Igitur* H *maior, minorem* G Z *metietur, quod fieri non poteſt, non itaque maior ipſo* G Z *alius dari poteſt, maximam igitur menſuram ipſorum* A B *&* G D *inuenimus.*

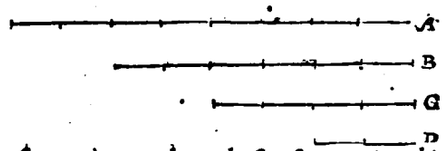
Coroll.

Corollarium.

Si numerus duos numeros metiatur, & maximam communem eorum mensurã metietur. *Nam si metiatur totum & ablatum, semper metietur & reliquum, qui tandem est maxima mensura duorum.*

Propositio tertia. Problema 2.

Tribus numeris datis non primis adinuicem, maximam eorum communem mensuram inuenire.



Tres sint dati numeri A B G *non adinuicem primi, quorum inuestiganda sit communis & maxima mensura, sumatur (per præcedentem) duorum* A *&* B *maxima mensura* D: *quæ aut metietur reliquũ* G *aut non, siquidẽ tertium* G *metiatur numerus* D, *is erit trium maxima mensura, cùm per hypothesim sit maxima binorum* A *&* B, *sicq; optatum consequimur. Si verò* D *non metiatur* G, *ostendamus* G *&* D *non esse primos adinuicem. Cùm enim tres* A B G *ex hypothesi non sint primi, aliquis eos metietur, is itaque binos* A *&* B *metietur, & proinde (per corollarium præcedentis) idem metietur numerorũ* A *&* B *maximam mensuram* D, *sed metitur &* G: *igitur* G *&* D *non sunt primi. Metiatur ergo eos* G *&* D *(per præcedentem) numerus* E *maxima mensura: Dico* E *maximam esse trium* A B *&* G *mensuram, quoniam enim* E *metitur* D *metietur ipsos* A *&* B, *per primam communem sententiam, est enim* D *ipsorum* A *&* B *pars, per hypothesim. Igitur* E *metitur tres* A B G, *& vt maximus metiens, si enim maior alius credatur, sit* Z. *cùm* Z. *metiatur* A *&* B, *metietur &* D *maximam eorum mensuram, per coroll. præceden. sed metitur &* G *ex hypothesi, itaque* Z *metitur binos* G *&* D, *& igitur maximam eorum metietur mensuram* E, *maior quidem minorem, quod est absurdum: nullus igitur maior ipso* E, *tres* A B G *metietur numeros. Tribus igitur datis non primis adinuicem numeris* A B G, *maximam eorum communem mensuram* E *inuenimus.*

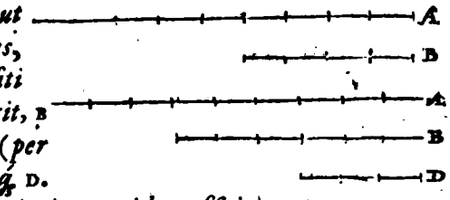
A	12
B	12
G	8
D	6
E	2
3	3

Corollarium.

Si numerus quotuis metiatur numeros, & maximam eorum communem metietur mensuram. *Metitur enim maximam duorum, & tandem maximam maximæ & tertij, scilicet ipsorum* G *&* D *quæ est* E *maxima quidem trium, & insuper simili argumento plurium numerorum communis reperietur mensura, inuenta enim mensura trium, reperietur mensura quarti, & maximæ mensuræ trium, &c.*

Propositio 4.

Omnis numerus minor, omnis numeri maioris, aut pars est, aut partes.



Sint duo numeri A *&* B, *quorum minor sit* B: *Dico* B *partem esse maioris* A *aut partes, sunt enim* A *&* B *primi aut compositi. Si primi vnitates minoris sunt maioris partes, cùm vnitates sint omnis numeri partes. Si verò compositi sint* A *&* B, *aut* B *metitur* A *aut non. Si metiatur, pars erit,* B *maioris* A. *Siquidem non metiatur* B *numerum* A. *Detur (per* 2 *huius) maximus eos metiens (cùm sint compositi) sitq;* D. *Quia* D *vtrosque* A *&* B *metitur. Quot igitur sunt numeri* D *in* B, *totidem efficiet partes totus* B *maioris* A. *Minor igitur* B *maioris* A *partes erit. Omnis itaque numerus minor, omnis numeri maioris, aut pars est, aut partes.*

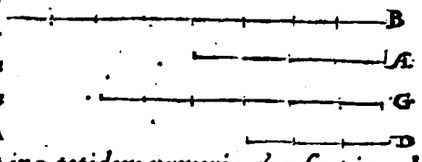
MONITVM.

Idem ait Euclides ac si dixisset, Omnis minor numerus ad maiorem, habet aut rationem quantitatis continuæ ad discretam, aut discretæ ad discretam quantitatem: omnis enim partis ad numerum ratio, in rationem vnitatis ad numerum cadit. Reliqua verò ratio partium ad numerum, cadit semper in rationes numeri ad numerum, non autem vnitatis ad numerũ. Præsentiendum est tamen inter quosuis numeros non cadere veram & simplicem numerorum (hoc est, discretarum quantita-

tum)rationem. Sed inter eos duntaxat, quorũ minor partes est maioris. Nam inter reliquos, quorum scilicet minor est maioris pars, non cadit omnis numeri ad numerum ratio, siue discretæ ad discretam quantitatem, sed sola vnitatis ad numerum (hoc est continuæ ad discretam) vt exemplo, ratio 4 ad 12 non est simplex numerorum ratio, eò quòd reducatur ad rationem, vnitatis ad numerum 3, & sit eadem: ratio verò 4 ad 14 & reliquæ partium ad totum, sunt tantùm inter numeros, nec vsquam cadere possunt, in rationem vnitatis ad numerum, sed semper inter discretas quantitates comperiuntur, eò quòd sint rationes partium ad totum, reliquæ verò partis ad totum, licet numeris quandoque exprimantur, tamen semper reducentur ad rationem vnitatis ad numerum aliquem, siue continui ad discretum: ceu illis peculiaris.

Propositio 5.

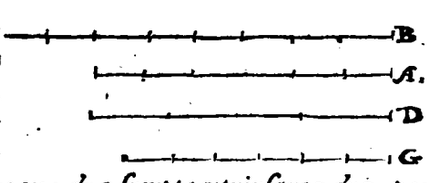
Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & vterque vtriusque eidem pars erit, quæ vnus vnius.



Idem in continuis ostendit prima quinti, quod hæc in discretis cum sequente. Sit numerus A *numeri* B *ea pars, quotta numerus* D *est alterius* G: *Dico vtrumque* A *&* D *eandem esse partem vtriusque* B *&* G, *quæ est* A *vnius* B. *Cùm autem* A *eadem sit pars ipsius* B *quota* D *ipsius* G, *quot numeri* A *sunt in* B, *tot numeri* D *sunt in* G. *Quot itaque numeri* A *sunt in* B, *totidem numeri* A *&* D *sunt in* B *&* G. *Si igitur numerus* A *ea pars fuerit numeri* B, *&* D *alterius* G, *vterque* A *&* D *eadem pars erit numerorum* B *&* G *quæ fuit* A *vnius* B. *Si itaque numerus, &c.*

Propositio 6.

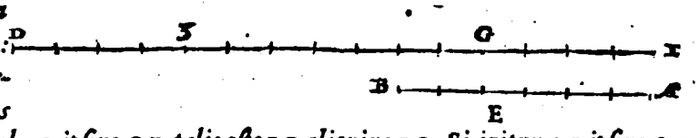
Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & vterque vtriusque eædem partes erunt, quæ vnus vnius.



Si numerus A *fuerit eæ partes numeri* B *quotæ* G *est alterius* D: *Dico vtrumque* A *&* G *vtriusque* B *&* D *easdem esse partes, quæ* A *totius* B. *Quoniam eædem sunt partes* A *ipsius* B *quæ* G *numeri* D, *singularum ipsius* A *in* B *æqualis erit multitudo, multitudini singularum* G *in* D. *Quæ igitur pars est vna partium numeri,* A *ipsius* B, *ea pars erit vtraque ex* A *&* G *sumpta, vtriusque* B *&* D, *per præcedentem: similiter & reliqui ex* A *&* G *sumptæ cùm sint prioribus æquales. Vterque igitur* A G *ipsorum* B D *eædem partes erit, quæ vnus* A *fuit vnius* B. *Si itaque numerus numeri partes fuerit, &c.*

Propositio 7.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati, & reliquus reliqui pars erit, qualis totus totius.

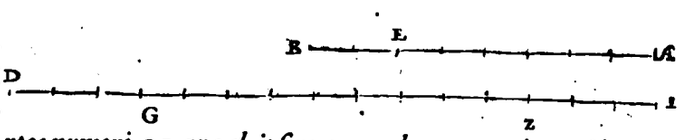


Sit A B *numerus, numeri* G D *ea pars, qualis ablatus* A E *ablati* G Z: *Dico reliquum* E B *reliqui* Z D *partem esse, qualis est totus* A B *totius* G D. *Qualis est* A B *numeri* G D *vel* A E *ipsius* G Z, *talis esto* E B *alicuius* I G. *Si igitur* A E *ipsius* G Z *pars fuerit qualis* E B *numeri* G I, *totus* A B *totius* Z I *ea pars erit quæ vnus* A E *vnius* G Z, *per quintam huius: sed qualis est* A E *ablati* G Z, *talis est (per hypothesim)* A B *ipsius* G D. *Qualis itaque* A B *est ipsius* G D, *talis erit eadem* A B *numeri* Z I. *æquales erunt igitur* G D *&* Z I *numeri, communis autem tollatur* G Z, *reliquus* Z D *reliquo* G I *æquus erit. Qualis itaque pars est* E B *positi* I G, *talis erit idem* A B *ipsius* Z D. *Sed qualis est* A B *totius* G D *talis positus est* E B *ipsius* G I. *Qualis igitur pars erit* A B *totus totius* G D, *talis erit* E B *reliquus reliqui* Z D. *Si itaque numerus numeri pars fuerit qualis ablatus ablati, &c.*

Propos

Propositio 8.

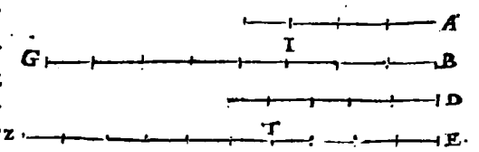
Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati, & reliquus reliqui eædem partes erit, quæ totus totius.



Esto numerus AB *numeri* GD *partes quæ ablatus* AE *ablati* GZ: *Dico reliquum* EB *reliqui* ZD *eadem esse partes quæ totus* AB *totius* GD *numeri. Ponatur* EB *eædem partes numeri* GI *quæ ab ipsius* GD, *vel* AE *numeri* GZ. *Si autem* EB *numeri* GI *partes fuerit quæ* AE *ipsius* GZ, *& vterque* AE EB *vtriusque* GZ GI (*hoc est, totus* AB *totius* ZI) *eædem partes erit, quæ vnus* AE *vnius* GZ, *per sextam huius, sed quales sunt* AE *ipsius* GZ, *tales sunt* AB *numeri* GD, *per hypothesim. Quales igitur sunt* AB *numeri* ZI, *tales sunt idē* AB *ipsius* GD. *AEquales igitur sunt* ZI *&* GD *numeri. Communis auferatur* GZ *reliqui* GI *&* ZD *æquales erūt. Quales igitur partes est* EB *numeri* GI *tales erit idem* EB *ipsius* ZD, *sed quales* EB *ipsius* GI *tales positus est* AB *ipsius* GD. *Quales itaque reliquus* EB *reliqui* ZD, *tales erit totus* AB *totius* GD. *Si itaque numerus numeri fuerit partes, &c.*

Propositio 9.

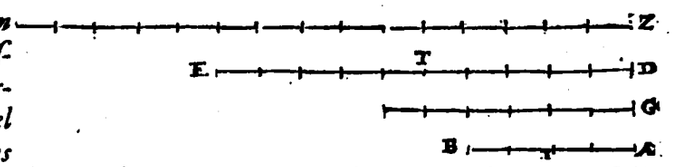
Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & vicissim qualis pars vel partes erit primus tertij, eadem pars erit, vel partes, secundus quarti.



Sit numerus A *numeri* BG *ea pars quæ* D *ipsius* EZ: *Dico vicissim eam partem vel partes esse* A *primum numeri* D *tertij, quam* BG *secundum ipsius* EZ *quarti. Secetur* BG *in numeros æquales ipsi* A *qui sint* BI IG. *Similiter numerus* EZ *in numeros æquales ipsi* D (*cùm sint eorum partes*) *qui sint* ET TZ. *Quoniam ea pars est* A *numeri* BG *quæ* D *ipsius* EZ, *æqua erit multitudo* A *in* BG *quæ* D *in* EZ, *scilicet* BI IG *&* ET TZ. *Cæterùm cum* BI IG *sint æquales ac* ET TZ *æquales, singuli* BI *&* IG *singulorum* ET *vel* TZ *eædem pars vel partes erunt. Si autem numerus* BI *numeri* ET *& alter* IG *alterius* TZ *eadem pars vel partes fuerit, & vterque (totus scilicet* BG) *vtriusque (totius* EZ) *eadem pars erit, quæ vnus* BI *vnius* ET, *per quintam & sextam huius. Atqui numerus* BI *ipsius* ET *eadem pars, vel partes est, quæ* A *numeri* D, *cùm* A *&* D *sint ipsis* BI ET *æquales. Qualis itaque pars vel partes est* A *tertij* D, *ea pars vel partes erit* BG *secundus numeri* EZ *quarti. Si igitur numerus numeri pars fuerit, & alter, &c.*

Propositio 10.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eędem partes, & vicissim, quæ partes est primus tertij, vel pars eædem partes erit, & secundus quarti, vel eadem pars.

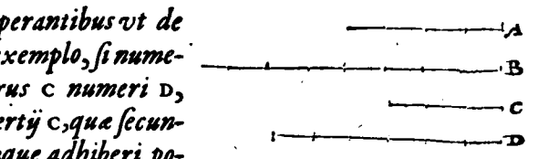


Sit numerus AB *numeri* G *eadem partes, quæ* DE *numeri* Z: *Dico vicissim primum* AB *easdem esse partes tertij* DE *& secundum* G *quarti* Z, *vel eandem partem. Sint in* AB *partes ipsius* G *hæ* AI IB. *In* DE *verò partes numeri* Z *sint totidem* DT TE, *sunt enim eædem partes. Quia quæ pars est* AI *secundi* G, *ea pars est* DT *quarti* Z. *Erit* AI *primus tertij* DT *eadem pars vel partes, quæ secundus* G *quarti* Z (*per nonam huius*) *sed cùm* AI *ipsi* IB *&* DT *ipsi* TE *sint æquales, qualis est* AI *ipsius* DT *talis est* IB *ipsius* TE. *Quæ itaque pars vel partes est, vtraque* AI IB *vtriusque* DT TE *eadem pars vel partes erit, vna* AI *vnius* DT (*per quintam & sextam huius.*) *Et proinde quæ* G *quarti* Z (*cùm ostensa sit eadem esse* AI *ipsius* DT *quæ* G *ipsius* Z) *si igitur numerus* AB *numeri* G

partes fuerit, & alter D E *alterius* Z *eadem partes, & vicissim quæ partes est primus* A B *tertij* D E *vel pars, eadem partes erit secundus* G *quarti* Z *vel eadem pars.*

MONITVM.

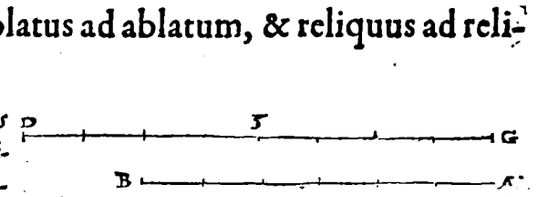
Hæc cum præfata æquè de partibus totum superantibus vt de parte & partibus toto minoribus intelligitur, vt exemplo, si numerus A *numeri* B *fuerit pars vel partes, quæ numerus* C *numeri* D, *Erit vicissim primus* A *eadem pars vel partes tertij* C, *quæ secundus* B *quarti* D *scilicet quatuor tertiæ, tanta namque adhiberi potest partium copia, quæ totum excedet, nempe quatuor quartæ tres quartas excednnt.*



Propositio II.

Si fuerit sicut totus ad totum sic ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit sicut totus ad totum.

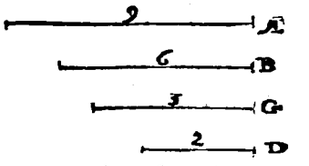
Esto totus numerus A B *ad totum* G D *sic ablatus* A E *ad ablatum* G Z: *Dico esse reliquum* E B *ad reliquum* Z D *sicut fuit totus* A B *ad totum* G D. *Quoniam numeri proportionales sunt* A B *ad* G D *vt* A E *ad* G Z, *per hypothesim. Primus igitur* A B *secundi* G D *vt tertius* A E *quarti* G Z *æquè est multiplex siue eadem pars vel partes fuerint, per* 21 *diffinitionem huius. Sed si* A B *totius* G D *pars vel partes fuerit, quæ* A E *ablatus* G Z *ablati, & reliquus* E B *reliqui* Z D *eadem pars vel partes erit, quæ totus* A B *totius* G D, *per* 7 *&* 8 *huius. Numerus igitur* A B *primus ad secundum* G D *erit vt tertius* B E *reliquus, ad quartum* Z D *reliquum, per eandem diffinitionem. Si igitur fuerit sicut totus ad totum, &c.*



Propositio duodecima.

Si fuerint quotcũque numeri proportionales, erit sicut vnus antecedentium ad vnum consequentium, sic omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sit numerus A *ad numerum* B, *sic* G *ad* D: *Dico sicut vnã antecedentium* A *ad vnum consequentium* B, *vel* G *ad* D; *sic esse omnes antecedentes* A *&* G *ad omnes consequentes*, B *&* D: *quoniam proportionales sunt (per hypothesim)* A *ad* B, *vt* G *ad* D, *quotuplex est* A *numeri* B *tam multiplex est* G *ipsius* D, *vel eadem pars vel partes (per* 21 *diffinitonem huius) Et ideo primus* A *tertij* G *eadem erit pars vel partes, vt secũdus* B *quarti* D *(per* 9 *&* 10 *huius) Vterque igitur* A *&* G, *vtriusque* B *&* D, *eadm pars erit vel partes, per quintam & sextam huius, quæ vnus* A *vnius* B. *Et igitur (per* 21 *diffinitionem huius) proportionales erunt omnes, scilicet* A *&* G *ad omnes* B *&* D, *sicut vnus* A *ad vnum* B. *Si itaque fuerint quotcunque numeri proportionales, erit sicut vnus, &c.*



MONITVM.

Huius theorematis figura quam ab antiquis exemplaribus sumpsit Theon, perspicuè sequitur multiplicium legem à nobis expositam, scilicet augmenti ac decrementi: cùm autem existimet Theon partem aut partes multiplicis esse relatiuas, similiter & Campanus, satis tamẽ impropriè, cùm ad totum solùm referãtur. Nihilominus A *maiorem* B *minoris, partem vel partes in demonstrando theoremate dixit, similiter vt* G *maiorem ipsius* D *minoris: quare fateri cogẽtur eorum relatiuos, scilicet* B *&* D, *quæquidem ad ipsos* A *&* G *eandem habẽt rationem, eorum multiplices dici, licet minores. Multiplicatione igitur decrementi, dicemus* B *&* D *numerorum* A *&* G *esse æquè multiplices, scilicet* $\frac{2}{3}$ *duorum tertiorum denominatione multiplicationis expressos, hæc &* 3 *præcedentes sequũtur* 21 *diffinitionẽ huius, quoslibet scilicet æquemultiplices ad simplices (siue pars, siue partes fuerint illi multiplices) eandẽ habere rationem, & ideo proportionales vocari: & proinde duarũ magnitudinũ discretarum rationem, sola multiplicationis (qua antecedens est consequentis multiplex) quantitate exprimi posse, vt diximus sæpiuscule. Idem sequeretur in continuis, si illæ multiplicationẽ reciperent, quare rationum lex quippe eadem inter eas erit, sed non expressa, cùm absque discretione, rationis denominatio fieri non possit, apud continuas ac confusas geometriæ magnitudines: Veluti fit circa eas quæ*

numeris

numeris ac arithmeticis diſcretionibus elucidantur. Idcirco videmus partes æquè ſumi totum excedentes, vt à toto deficientes, hoc veluti Theonis exemplo, partem verò ſemper toto minorem, haud ſecus quàm ſimplex actio multiplice minor exiſtit.

Propoſitio decimatertia.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, & viciſsim proportionales erunt.

Sint quatuor numeri A *ad* B, *vt* G *ad* D *proportionales: Dico eos viciſsim* A *ad* G, *vt* B *ad* D *proportionales eſſe, quoniam proportionales ſunt* A *ad* B, *vt* G *ad* D, *æquemultiplex erit* A *minoris* B, *vt* G *ipſius* D, *ſiue eadem pars vel partes fuerint, per* 21 *diffinitionẽ huius. Si autem* A *ipſius* B *pars fuerit, & alter* G, *alterius* D *eadem pars vel partes, & viciſsim (per* 9 *&* 10 *huius) qualis pars vel partes eſt* A *primus* G *tertij, eadem pars vel partes erit ſecũdus* B *quarti* D. *Et proinde (per* 21 *diffinitionem huius) proportionales erunt* A *ad* G, *vt* B *ad* D. *Si itaque quatuor numeri proportionales fuerint, & viciſsim proportionales erunt, &c.*

Propoſitio decimaquarta.

Si fuerint quotcũque numeri, & alij eiſdem æquales numero, bini ſumpti in eadem ratione, & ęqua ratione proportionales erunt.

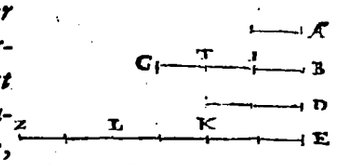
Sint quotcunque numeri A B G, *& alij* D E Z *ipſis æquales numero, qui quidem ſint bini in eadem ratione* A *ſcilicet ad* B, *vt* D *ad* E, *&* B *ad* G, *vt* E *ad* Z: *Dico eos æqua ratione (id eſt ſubtractis mediis) proportionales eſſe,* A *ad* G, *vt* D *ad* Z, *quoniam (per hypotheſim) proportionales ſunt, qualis eſt* A *ipſius* B, *talis eſt* D *numeri* E, *cùm ſint in eadem ratione. Et viciſsim qualis eſt* A *numeri* D, *talis erit (per nonam & decimam huius)* B *ipſius* E. *Cæterùm cùm ſint (per hypoteſim)* B *ad* G, *vt* E *æd* Z: *qualis erit* B *numeri* G, *talis erit* E *ipſius* Z, *per* 21 *diffinitionẽ. Viciſsim itaque qualis erit* B *numeri* E, *talis erit* G *ipſius* Z, *par eandem* 9 *&* 10 *huius. Sed qualis fuit* B *ipſius* E, *talis fuit* A *numeri* D *oſtenſus: qualis itaque eſt* A *numeri* D, *talis eſt* G *ipſius* Z. *Et viciſsim igitur qualis eſt* A *ipſius* G, *talis eſt* D *numeri* Z. *Et prinde (per vigeſimam primam diffinitionem huius)* A *ad* G, *erunt vt* D *ad* Z, *æqua ratione proportionales. Si igitur fuerint quotcunque numeri, &c.*

MONITVM.

Iam antea ſæpius diximus quaſcunque diſcretarum magnitudinum rationes, inter cõtinuas cadere poſſe, non autem è conuerſo, quaſuis ſcilicet continuarum rationes, inter diſcretas cadere. Quare Euclides his prioribus theorematis eas rationes quas inter diſcretas quantitates oriri depromit, à multiplicatione, qua antecedẽs ſumit conſequens, deduci iubet. Nam 21 *diffinitione, numeros proportionales æquemultiplices eſſe dixit. Quarto verò theoremate & ſex illud ſequentibus, idem inter ſimiles partes quod & inter ſimiles rationes accidere profert. Vndecimo autem & tribus ſequentibus, numerorum inter ſe rationũ, à partium ſimilitudine (per* 21 *diffinitionem) naſci exponit: quæ quidem partes ſimiles ab æqua multiplicationis denominatione productæ, numerorũ proportionem producunt, licet per augmentum multiplicatæ maius multiplex, vel per decrementum minus multiplex (quod partes vocant) educant: quare affinitas illa quæ ratio inter magnitudines dicitur, nihil aliud erit, quàm ea multiplicationis denominatio, qua antecedens multoties ſumit conſequentis augmentum vel decrementum. Id equidem voluit numeris exponere Euclides, cùm per continuas diſcernere non potuerit quãtitates, eò quòd continuæ vel geometricæ multiplicationem, velut diſcretæ & arithmeticæ non ſuſcipiunt.*

Propoſitio decimaquinta.

Si vnitas aliquem numerum metiatur, pariter autem alter numerus aliũ metiatur, & viciſſim pariter vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.



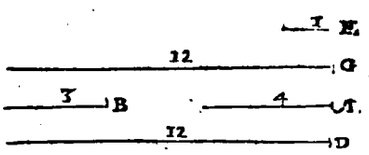
Metiatur vnitas A *aliquem numerum* B G, *pariter autem alter numerus* D *metiatur alium* E Z: *Dico vnitatem* A *metiri vicißim tertium* D *pariter vt ſecundus* B G *metitur quartum* E Z, *quoniã vniast æquè metitur* B G, *vt numerus* D *ipſum* E Z. *Quot ſunt in* B G *vnitates, tot erunt in* E Z *numeri, ipſi* D *æquales, ſcilicet in* B G *erunt* B I, I T, T G, *in* E Z *verò* E K, K L, L Z. *Sicut igitur vnitas* A *metitur* D *numerum, ſic ſingulæ partes ipſius* B G, *ipſi* A *æquales, ſingulas ipſius* E Z (*ipſi* D *æquales*) *metiuntur, vtraque igitur ſecundi* B G *vtraſque quarti* E Z *ſimiliter metiuntur, vt ſingulæ ſingulas* (*per quintam huius*) *ſed vt ſingulæ ſingulas metiuntur, ſic oſtenſa eſt vnitas* A *metiri numerum* D. *Vnitas igitur tertium* D *pariter metitur numerum, vt ſecundus* B G *quartum* E Z. *Si vnitas igitur aliquem, &c.*

MONITVM.

Idem hoc theoremate concludit Euclides in numeris paßiuis, quod 9 & 13 huius præmiſit in actiuis, ſeu arithmeticis numeris, vt oſtendat quoſuis numeros, ſiue actiuos diſcretos, ſiue paßiuos continuos, aut qui ſemper ad vnitatem reducuntur proportionales, proportionis vicißitudinem producere: quia verò idem eſſe exiſtimat Euclides, pariter metiri, vel eandem eſſe partem, æquè multiplicem eſſe, & eandem rationem habere, tria theoremata idem ex his tribus aſſumptis referentia propoſuit, ſcilicet 5 huius primam quinti, & 12 huius, quæ quidem binas illas decrementi vel augmenti æquas multiplicationes, rationum ſimilitudinem irrefragabili methodo generare cogunt.

Propoſitio decimaſexta.

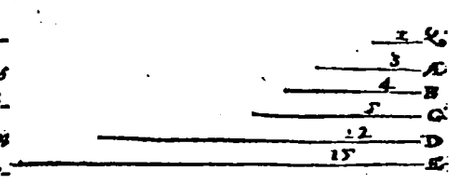
Si duo numeri multiplicantes ſe inuicem fecerint aliquos, geniti ex eis adinuicem æquales erunt.



Exponantur duo numeri A *&* B *ſe inuicem multiplicantes, ſcilicet* A *multiplicans* B *efficiat* G *&* B *multiplicãs* A *efficiat* D: *Dico* G *&* D *genitos æquales eſſe, Sumatur vnitas* E, *cùm enim* A *repetens* B *per ſuas vnitates producat* G, *ſequetur numerum* B *metiri ipſum* G *per vnitates ipſius* A, *ac per eaſdem vnitates* E *metiri eũdem* A. *Qualis itaque pars eſt* E *numeri* A, *talis eſt* B *numeri* G, *& vicißim* (*per præfatam*) *qualis eſt pars* E *numeri* B, *talis eſt* A *ipſius* G. *Rurſus quoniã* B *multiplicans* A *producit* D, *ſequetur* A *metiri* D *per vnitates numeri* B, *& per eaſdem* E *vnitas metitur eundem* B. *Qualis itaque pars eſt* E *ipſius* B *talis eſt* A *pars numeri* D, *ſed qualis eſt* E *numeri* B, *talis oſtenſa eſt eſſe* A *ipſius* G. *Qualis igitur eſt pars* A *ipſius* G, *talis eſt idem* A *pars numeri* D, *æquales itaque ſunt* G *&* D *adinuicem. Si igitur duo numeri multiplicantes, &c.*

Propoſitio decimaſeptima.

Si numerus duos numeros multiplicãs fecerit aliquos, geniti ex eis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.



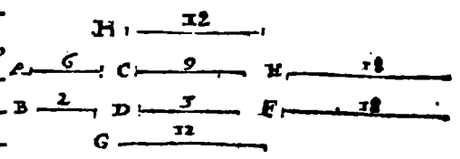
Multiplicet numerus A *duos numeros* B *&* G, *& producat duos* D *&* E: *Dico* D *ad* E *ſic eſſe vt* B *ad* G, *eſto vnitas* Z, *quoniam* A *multiplicans* B *ipſum* D *facit. Igitur* B *metitur* D *per vnitates numeri* A, *& per eaſdem* Z *metitur ipſum* A, *quæ itaque pars* Z *ipſius* A *talis eſt* B *numeri* D. *Eodem argumento* A *multiplicans* G *ipſum* E *efficit, quare* G *metitur* E *per vnitates ipſius* A *&* Z, *metitur numerum* A *per eaſdem vnitates. Qualis itaque pars eſt* Z *numeri* A, *talis eſt* G *ipſius* E, *ſed qualis* Z *fuit numeri* A *talis fuit* B *ipſius* D. *Qualis igitur* B *erit ipſius* D *talis erit* G *numeri* E, *& vicißim* (*per nonam huius*) *qualis erit* B *ipſius* G, *talis erit* D *ipſius* E, *ſicut igitur* B *ad* G *ſic erit* (*per 21 diffinit. huius*) D *ad* E. *Si itaque numerus duos numeros, &c.*

Corollarium.

Si duo numeri duos eandem eis habentes rationem, conuerſim multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex eis æquales adinuicem erunt.

Sins

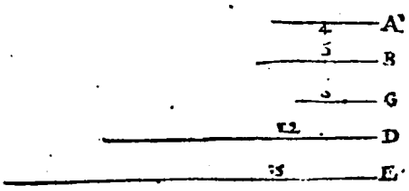
Sint duo numeri A *&* B, *insuper duo* C *&* D, *eandem ipſis* A *ad* B *rationem habentes, quos mutuè multiplicent, hoc eſt,* A *multiplicãs* D *faciat* F, *&* B *multiplicans* C *faciat* E: *Dico genitos* E *&* F *æquales eſſe, multiplicent ſeinuicem* A *&* B, *hac via vt* A *multiplicans* B, *faciat* G: *necnon,* B *multiplicans* A *faciat* H, *erunt ideo* G *&* H *æquales ex* 16 *huius. Rurſus quia* A *multiplicans binos* B *&* D *duos fecit* G *&* F, *erunt* Q *ad* F *vt* B *ad* D *ex hoc theoremate haud ſecus: quoniam* B *multiplicans binos* A *&* C, *duos fecit* H *&* E. *erunt ex eodem* H *ad* E, *vt* A *ad* C. *Eſt autem* A *ad* C *vt* B *ad* D *ex* 13 *huius: fuit autem ſimilis ratio numeri* A *ad* C, *quæ* H *ad* E *ſimiliſque numeri* B *ad* D *quæ* G *ad* F. *Erit igitur* H *ad* E *vt* G *ad* F, *ac viciſſim* H *ad* G, *vt* E *ad* F, *per* 13 *huius. Fuerunt autem* G *&* H *æquales. Erunt igitur* E *&* F *æquales, eandem ipſis* H *ad* G *rationem habentes. Si itaque duo numeri duos, &c.*



Propoſitio decimaoctaua.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex eis eandem habebunt rationẽ quam multiplicantes.

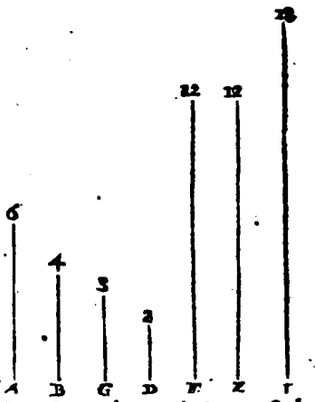
Duo numeri A *&* B *multiplicent numerum* G, *& producant* D *&* E: *Dico* D *ad* E *ſic eſſe vt* A *ad* B: *quoniã* A *&* B *ipſum* G *multiplicãtes idem producunt, quod producet* G *duos* A *&* B *multiplicans (per* 16 *huius) ipſos quidem* D *&* E. *ſi itaque* G *duos* A *&* B *multiplicans ipſos fecerit* D *&* E, *eandem rationem habebũt, quam* A *ad* B *multiplicati (per* 17 *huius) & igitur quam ipſi iidem* A *&* B *multiplicantes. Si itaque duo numeri numerum aliquem, &c.*



Propoſitio decimanona.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo & quarto fit, æqualis eſt ei qui ex ſecundo & tertio: Et ſi qui ex primo & quarto fit, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo & tertio, ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

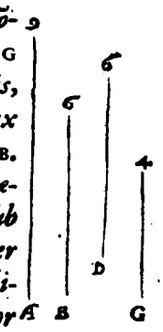
Sint quatuor proportionales numeri A *ad* B, *vt* G *ad* D, *ex primo autem & quarto* A *&* D *fiat* E: *ex ſecundo verò & tertio* B *&* G *fiat* Z: *Dico* E *&* Z *æquales eſſe. Multiplicãs* A *numerum* G *faciat* I: *Et quoniam idem* A *multiplicans* D *fecit* E, *erit (per* 17 *huius)* G *ad* D, *vt* I *ad* E: *ſed fuit* A *ad* B, *vt* G *ad* D, *ex hypotheſi, erit igitur* A *ad* B, *vt* I *ad* E. *Rurſus cùm* A *multiplicãs* G *fecerit* I, *at* B *eundem* G *multiplicans fecerit* Z: *erunt (per* 18 *huius)* A *ad* B, *ſicut* I *ad* Z, *ſed fuit* A *ad* B *ſicut* I *ad* E, *ſicut itaque* I *ad* Z, *ſic erit* I *ad* E: *ipſi itaque* E *&* Z, *ſunt æquales per* 9 *quinti. Ad ſecundam autem partem ſupponamus* E *&* Z *æquales eſſe: Dico quatuor* A *ad* B, *vt* G *ad* D *eſſe proportionales, eiſdem diſpoſitis, quoniam* A *ipſos* G *&* D *multiplicans facit* I *&* E: *erit (ex* 17 *huius)* G *ad* D, *ſicut* I *ad* E. *Quoniam autem æquales ponuntur* Z *&* E, *erit (per ſeptimam quinti)* G *ad* D *ſicut* I *ad* Z: *ſed cùm* A *&* B *multiplicantes* G *fecerint* I *&* Z, *erit (per* 18 *huius)* A *ad* B, *vt* I *ad* Z, *ſed fuit* G *ad* D, *vt* I *ad* Z: *erunt igitur ſicut* A *ad* B *ſic* G *ad* D *proportionales. Si itaque quatuor numeri proportionales fuerint, &c.*



Propoſitio vigeſima.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ſub extremis æqualis eſt ei qui à medio, & ſi qui ſub extremis æqualis fuerit ei qui à medio, ipſi tres numeri proportionales erunt.

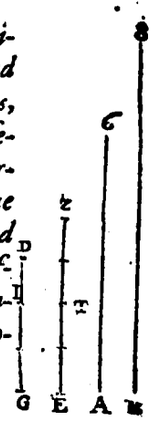
Sint tres numeri A B G *proportionales* A *ad* B, *vt* B *ad* G: *Dico ſub extremis* A *&* G *cõprehenſum æquũ eſſe ei, qui à medio* B *fit, ponatur medio* B *æqualis* D: *erit igitur* D *ad* G *vt* B *ad* G (*per 7 quinti*) *& proinde* A *ad* B, *vt* D *ad* G. *Qui itaque ſub* A *&* G *extremis, æquus eſt ei, qui ſub* B *&* D *mediis, per præcedẽtem: atqui ſub* B *&* D *æquus eſt ei qui ex* B, *cùm ſint* B *&* D *æquales: qui igitur ſub extremis* A *&* G *æquus erit ei, qui à medio* B. *Ad ſecundum autem, ſupponamus (eiſdem diſpoſitis) eum qui ſub extremis* A *&* G *æquum eſſe, ei qui à medio* B: *Dico ipſos* A *ad* B, *vt* B *ad* G *eſſe proportionales. Si qui ſub* A *&* G *æquetur ei qui ex* B *fit, æquabitur & ei qui ſub* B *&* D *æqualibus, erit itaque (per ſecundam partem præcedentis) ſicut* A *ad* B, *ſic* D *ad* G: *ſed ſicut* D *ad* G, *Sic eſt (per ſeptimum quinti)* B *ad idem* G: *ſicut igitur* A *ad* B, *ſic erit* B *ad* G. *Si igitur tres numeri proportionales, &c.*



Propoſitio 21.

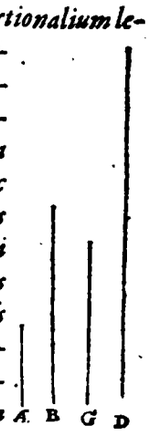
Minimi numeri eandem rationem habentium eis, metiuntur eandem rationem habentes æqualiter, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem.

Sint minimi numeri G D *&* E Z *in data numerorum* A *ad* B *ratione: Dico* G D *metiri numerum* A *æquè vt* E Z *numerum* B. *Cùm ex hypotheſi ſint proportionales* G D *ad* E Z *vt* A *ad* B. *Ipſi* G D *ad* E Z *minores, ſunt maiorum* A *&* B *pars aut partes, per 4 huius, & eadem, per 21 diffinitionem huius. Sed non ſunt eædem partes: nam ſi* G D *&* E Z *ſecarentur in eaſdem partes, ſcilicet* G D *in* G I I D, *&* E Z *in* E T T Z, *eorum rurſus partes,* G I *ad* E T *eandem rationem haberent quam* G D *ad* E Z, *per 15 quinti. Non itaque eſſent minimi huius rationis* G D *ad* E Z: *Nimirum minores eſſent eorum partes* G I *ad* E T. *Sunt itaque* G D *&* E Z (*per 4 huius*) *ipſorum* A *&* B *pars. Quare (per tertiam diffinitionem huius) metiuntur numeros* A *ac* B. *Et æqualiter* G D *antecedens ipſum* A *conſequens, vt* E Z *ipſum* B, *per 21 diffinitionem huius, cùm ſint proportionales, ex hypotheſi. Minimi itaque numeri eandem rationem habentium eis metiuntur, &c.*



MONITVM.

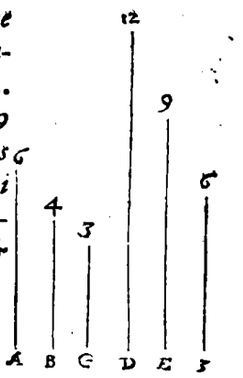
Huius theorematis demonſtratio per numeros fieri non poteſt in ratione multiplici, quæ ſemper vnitatem in minimis partibus eius producit. Quare proſequitur Euclides quod diximus, ſuper 13 diffinitione huius, & monito poſt principia huius appoſito, ſcilicet numeros multiplicem habentes rationem, non poſſe in minimos huius rationis numeros cadere, licet aliàs quaſuis proportionalium leges generales ſubeant, non tamen minimi datæ rationis numeri, nec inter ſe primi aliquando dici poſſunt. Ait enim Euclides minimos ſemper metiri maiores eandem rationem habentes, tamen hoc exemplo videmus A *&* B *minimos numeros eſſe triplicis rationis, qui tamen non metiuntur maiores ſcilicet* G *&* D, *ſed ſunt eorum partes, contra id quod demonſtratum eſt. Hoc argumentum ſoluitur per ea quæ iam diximus, hoc quidem exemplum in ratione multiplici propoſitum eſſe, cuius nuſquam minimæ partes numeri eſſe poſſunt, cùm non ſit pura numerorum ratio. Quare licet* A *&* B *ſint minimi huius rationis numeri, non tamen ſunt minimæ numerorum partes in his multiplicibus rationibus, velut in reliquis, quæ minimas numerorum partes in data ratione numeris depromunt. Multiplices verò vnitate & numero minimas ſuæ rationis partes exibent, non autem numeris, eò quòd ratio multiplex non ſit pura arithmeticorum numerorum ſiue diſcretarum tantùm quantitatum, ſed cadit inter continuam & diſcretam quantitates, ac eius conuerſa. Reliquæ verò tantùm inter diſcretas, per rationis denominationem, ſectas quantitates: non igitur in ratione multiplici minimos haberi numeros dicemus, ſed tantùm in rationibus numerorum. Cæterùm huius theorematis aliquas voces tranſtulimus, ſcilicet antecedentes & conſequentes. Nam vera quantitatum proportionalium relatio, non à magnitudine dependet, ſed à ſitu. Siquidem antecedens alium metitur antecedentem, non eò quòd ſit maior vel minor quantitas, ſed tantùm eò quòd ſimilem ſibi in proportione habeat ſitum. Idem de conſequentibus. Campanus verò id inſequi voluit cùm dixit, Quiſque ſuum correlarium (pro relatiuo) ſecundo exemplo.*



Propositio vigesimasecunda.

Si fuerint tres numeri & alij eisdem æquales numero, bini sumpti in eadem ratione, fuerit autem eorum perturbata proportio, & æqua ratione proportionales erunt.

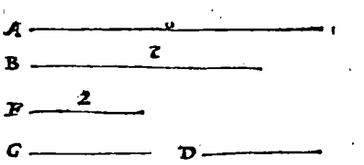
Sint tres numeri A B G *& alij tres* D E Z *bini sumpti in eadem ratione, ordine verò perturbato, scilicet* A *ad* B *sicut* E *ad* Z, *sicut verò* B *consequens ad rem aliam* G, *sic sit res alia* D *ad* E *antecedens: Dico æqua ratione esse* A *ad* G *vt* D *ad* Z. *Quoniam est* A *ad* B *sicut* E *ad* Z *qui sub* A *&* Z *æquus est ei qui sub* B *&* E *per* 19 *huius. Quia verò est vt* B *ad* G *sic (per hypothesim)* D *ad* E, *qui sub* G *&* D *æquus erit, ei qui sub* B *&* E, *per eandem* 19 *huius. Qui igitur sub* G D *æquus erit ei qui sub* A *&* Z, *per primam communem sententiam. Erit igitur (per secundam partem decimanonæ huius)* A *ad* G *sicut* D *ad* Z. *Si fuerint igitur tres numeri, & alij eisdem æquales numero, bini, &c.*



Propositio vigesimatertia.

Primi adinuicem numeri, minimi sunt eandem rationem habentiũ eis.

Sint primi A *&* B *numeri: Dico eos esse minimos suæ rationis, quòd si non sint, dẽtur (si fas sit) minores in eadem ratione qui sint* G *&* D, *quoniã* G *&* D *sunt minimi ipsi metiuntur ipsos* A *&* B *eandem rationem habentes æqualiter, scilicet* G *antecedens* A, *&* D *consequens reliquum* B *per* 21 *huius. Sequetur itaque* G *metiri* A *per tot vnitates, per quot* D *metitur ipsum* B, *sint illæ vnitates* E. *cùm autem* G *&* D *metiantur* A *&* B *per vnitates* E, *metietur* E *ipsos* A *&* B *per vnitates ipsorum* G *&* D *(per* 16 *huius) Nam* E *per* G *idem efficit quod* G *per* E. *Nõ igitur erunt* A *&* B *primi, cùm ipsos metiatur idem* E *numerus, contra hypothesim, quod fieri non potest: ipsis itaque* A *&* B *primis non possunt dari minores in eadem ratione. Primi igitur numeri, &c.*



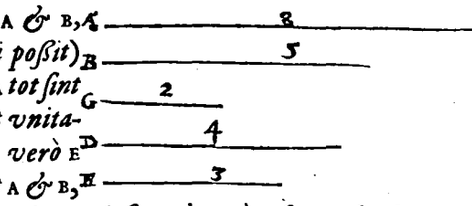
MONITVM.

Idem testatur Euclides hoc theoremate quod vigesimoprimo huius monuimus, scilicet rationem multiplicem, nec primos subire nec minimos suæ rationis numeros, quod si in multiplicibus primi adinuicem dicerentur minimi, falsum esset (cùm semper minor vtrosque metiatur) in quauis ratione multiplici simpliciter vt 2 & 6. Si verò credamus minores numeros in hac ratione dari 1 & 3, vnitatem pro numero (discretionem, non autem quantitatem significante) sumentes, contra secundã huius diffinitionem, in fœdiorem laberemur maculam, vnitas autem non est vnitatum multitudo. Multiplex igitur ratio primos nusquam suscipit numeros, cùm vnus eorũ semper alium metiatur. Præterea grauiores apparerẽt lapsus si huic indulgeremus culpæ, posthac scilicet 31 huius, cùm enim vnitas seipsam sola metiatur, si ea inter numeros quosuis ponatur, dicetur esse primus, sed omnis primus ad omnes tantùm quos non metitur (per 31 huius) primus erit, igitur vnitas ad nullũ primus erit (cùm ea omnes metiatur.) Ratio itaque multiplex vnitatẽ semper in minimis recipiens, primos non suscipiet numeros, nec vnitas inter numeros collocabitur, vt diximus, insuper fœdarẽtur multa subsequentia theoremata, scilicet 25, 27, 28, 29, 30, 31 huius 11, 15, 16, 17, noni. Nam omnes numeros metiens vnitas ad eosdem primus esset. Præterea 20 octaui reperiretur vnitas primus simul & planus numerus quod excedit possibile, nisi per nostram distinctionem numerorum quorum alij quantitati, alij verò operationi destinati sunt, vt prima huius diffinitione diximus, & proinde vniuersa numerorum traditio eousque fluctuaret, vt demum præ confusione demergeretur. quare vnitatem non esse operantem numerum, & idcirco rationes multiplices (in minimis partibus vnitatem semper recipientes) nec minimos nec quidem primos suscipere suæ rationis numeros intelligamus, cùm ea non sit discretorum pura ratio, sed continui ad discretum, & inter eos recipi tantũ qui quantitatem denotant, non autem discretionem, quod si circa vnitatis quantitatem eò quòd is semper sit minimus rationis multiplicis terminus, aliquid demonstrandum sit. Ex quinti ac sexti theorematibus sumi debet, quæ numeros continuas quantitates (veluti vnitatis natura concipit) significantes complectuntur, quòd si per numerorum leges idem efficere velimus, per respectum partis ad numerum id perfici debet. Vnitas etenim pars est cuiuslibet numeri.

Propoſitio vigeſimaquarta.

Minimi numeri eandem rationem habentium eis, primi adinuicẽ ſunt.

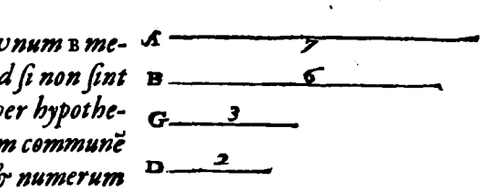
Sint minimi datæ rationis numeri A B: *Dico ipſos* A *&* B, *eſſe adinuicem primos, quòd ſi non ſint, detur (ſi fieri poſſit) numerus eos metiens, ſit* G. *Quoties autẽ* G *metitur* A *tot ſint vnitates in* D: *quoties verò idem* G *metitur* B *tot ſint vnitates in* E, *igitur* G *multiplicans* D *faciet* A, *multiplicans verò* E *faciet* B. *Si itaque* G *duos* D *&* E *multiplicans fecerit* A *&* B, *erit* A *ad* B *ſicut* D *ad* E, *per* 17 *huius, qui quidem ſunt minores ipſis* A *&* B, *cùm ſint multiplicati, & in eadem ratione (contra hypotheſim) quod non poteſt eſſe. Non datur itaque numerus ipſos* A *&* B *metiens, & ideo primi erunt numeri* A *&* B *adinuicem. Minimi igitur numeri eandem, &c.*



Propoſitio vigeſimaquinta.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, vnum eorum metiens, ad reliquum primus erit.

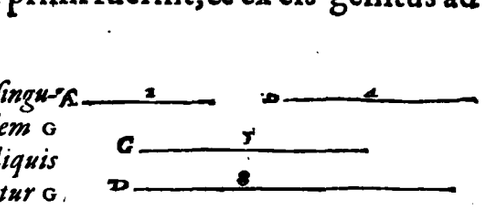
Sint bini numeri A *&* B *adinuicem primi, quorum vnum* B *metiatur* G: *Dico eundem* G *ad reliquum* A *primũ eſſe, quòd ſi non ſint primi* G *&* A, *metiatur eos aliquis* D. *Quoniã autem (per hypotheſim)* D *metitur* G, *ſed* G *metitur* B, *igitur* D *(per primam communẽ ſententiam huius) metietur* B. *Metitur autẽ idem* D *& numerum* A, *vtroſque itaque* A *&* B *idem* D *metitur, non igitur eſſent ipſi* A *&* B *primi, vt poſitũ fuit, quod fieri non poteſt. Vnum idcirco eorum* A *&* B *metiens aliquis numerus* D, *ad reliquũ* A *primus erit. Si igitur bini numeri primi, &c.*



Propoſitio vigeſimaſexta.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, & ex eis genitus ad eundem primus erit.

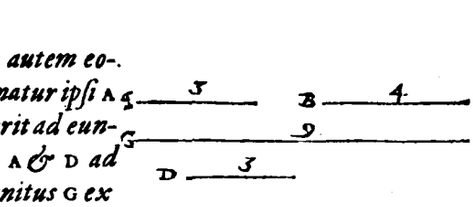
Sint duo numeri A *&* B *ad aliquem* G *primi eorum ſingu-li, ex ipſis autem* A *&* B *fiat* D: *Dico ipſum* D *ad eundem* G *primum eſſe. Quod ſi non ſint, metietur eos* D *&* G *aliquis numerus. Sit ille* E *(ſi fieri poſſit) Quia autem* E *metitur* G, *vnum primorum* A *&* G, *ipſe* E *ad reliquum* A *primus erit, per præcedentem. Tot ſint vnitates in* Z *quoties* E *metitur* D. *Itaque* E *multiplicans* Z *efficit ipſum* D: *Per conſtructionem autem* A *&* B *faciunt* D. *Si igitur qui ex primo* A *& quarto* B *æquetur ei qui ex ſecundo* E *& tertio* Z, *erit (per* 19 *huius)* A *ad* E *ſicut* Z *ad* B. *Inſuper cùm* E *&* A *oſtenſi ſint primi, erunt & minimi datæ rationis numeri per* 23 *huius. Metietur ergo* A *numerum* Z *ſicut* E *ipſum* B, *per* 21 *huius. Sed idem* E *metitur ipſum* G *qui primus ad* B *poſitus eſt, metiretur igitur* E *duos* G *&* B *qui poſiti ſunt primi, quòd fieri non poteſt. Nullus itaque ipſos* G *&* D *metitur, quare ipſi* G *ad* D *ſunt primi. Si ergo duo numeri ad aliquem numerum, &c.*



Propoſitio vigeſimaſeptima.

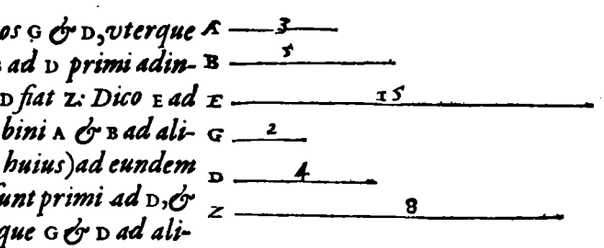
Si duo numeri primi adinuicem fuerint, qui ex vno eorum fit ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri adinuicem primi A *&* B *ex vno autem eorum* A *fiat* G: *Dico* G *ad reliquum* B *primum eſſe. Ponatur ipſi* A *æqualis* D. *Quoniam autem* A *primus eſt ad* B, *Primus erit ad eundem* B *ſimiliter &* D *ipſi* A *æqualis. Duo igitur numeri* A *&* D *ad aliquem* B *primi faciunt* G. *Igitur (per* 26 *huius) genitus* G *ex eis, ad eundem* B *primus erit, ſit etenim* G *ex* A *&* D *æqualibus, qui idem eſt ei qui ex vno eorum ſcilicet* A *in ſe. Si itaque duo numeri primi adinuicem fuerint, qui ex vno, &c.*



Propoſitio vigeſimaoctaua.

Si duo numeri ad duos numeros ambo ad vtrumque primi adinuicem fuerint, qui ex prioribus ad eum qui ex poſterioribus fiet, primus erit.



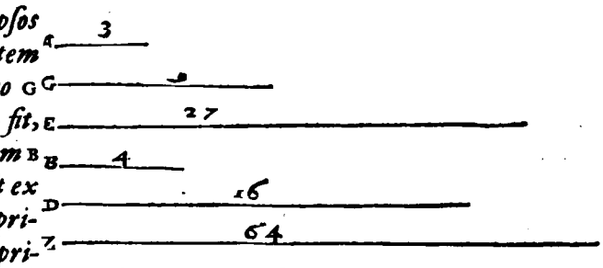
Sint bini numeri A *&* B *ad binos numeros* G *&* D, *vterque ad vtrumque, ſcilicet* A *&* B *ad* G, *&* A *&* B *ad* D *primi adinuicem, Ex* A *autem &* B *fiat* E, *ex* G *verò &* D *fiat* Z. *Dico* E *ad* Z *eſſe primos adinuicem. Quoniam enim bini* A *&* B *ad aliquem* G *primi ſunt, genitus ex eis* E *(per 26 huius) ad eundem* G *primus erit. Similiter quia idem* A *&* B *ſunt primi ad* D, *&* E *ad* D *primus erit, per eandem. Bini itaque* G *&* D *ad aliquem* E *primi, efficiunt compoſitum ex ipſis, ſcilicet* Z, *ad eundem* E *primum, per eandem 26 huius. Si igitur duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrumque, &c.*

MONITVM.

Mutauimus propoſitionis quædam dicta, eò quòd confusè ſatis præbuerit Theon, cùm ait (quæ ex eis fient) abſque vlla diſtributione, Ideo Campani ſententiam ſaniorem hoc loco ſequemur. Duo etenim tantùm conſurgunt, vnus quidem ex prioribus, alter verò ex poſterioribus.

Propoſitio vigeſimanona.

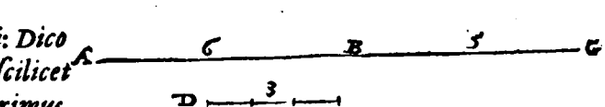
Si bini numeri primi adinuicem fuerint, & multiplicans vterque ſeipſum fecerint aliquos, qui ex eis fiunt primi adinuicem erunt. Et ſi qui in principio numeri, genitos multiplicantes fecerint aliquos, & illi quoque primi adinuicem erunt, & ſemper circa extremos hoc continget.



Sint bini A *&* B *primi numeri qui ſeipſos multiplicantes faciant,* G *&* D *factos autem rurſus multiplicantes efficiant,* E *&* Z: *Dico* G *ad* D *primos eſſe, necnon* E *ad* Z. *Quoniam* G *fit,* E *ex* A *vno primorũ* A *&* B, *is erit ad reliquum* B *primus, per 27 huius. Haud ſecus quia* D *fit ex* B, *ipſe erit primus ad* A. *Cùm autem* B *ſit primus ad* G, *qui ex* B *fit, ſcilicet* D *ad eundẽ* G *primus erit per eandem. Erunt igitur bini* A G *ad binos* B *&* D *vterque ad vtrumque primi. Qui igitur fit ex* A G *prioribus ſcilicet* E, *ad ipſum* Z *factum ex poſterioribus, primus erit, per præcedentem. Et ſemper ſi* A *&* B *multiplicantes ipſos* E *&* Z *aliquos fecerint, facti eiuſdem præcedentis argumento primi oſtendentur. Si itaque bini numeri adinuicem, &c.*

Propoſitio trigeſima.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, & vterque ſimul ad quemuis ipſorum primus erit. Et ſi vterque ſimul ad quemlibet ipſorum primus fuerit, & qui in principio numeri primi adinuicem erunt.



Sint A B *ad* B G *primi adinuicem numeri: Dico totum* A G *ad alterum quemuis ipſorum, ſcilicet* A B *primum eſſe, quod ſi* A G *ad* A B *non ſit primus, metietur eos aliquis numerus, qui ſit* D: *quoniã* D *metitur totum* A G *& ablatum* A B *metietur & reliquum* B G, *per ſecundam communem ſententiam, non igitur eſſent* A B *&* B G *primi (contra hypotheſim) quod fieri nequit. Ad ſecundum autem ponamus totum* A G *ipſi* A B *primum eſſe: dico* A B *ad* B G *primos eſſe: quod ſi non ſint, metiatur eos* D, *eiſdem diſpoſitis. Si igitur* D *metiatur, binos* A B *&* B G,

vel eos ſua repetitione componat, ipſe D *metietur totum* A G, *cũ ipſum multiplicatione componat, ſed metitur &* A B: *igitur* A B *&* A G *non eſſent primi, cõtra poſitum, nam eos metiretur* D, *quod eſſet abſurdum: non igitur metitur aliquis numerus* AG *&* A B, *qui ſunt igitur primi. Si bini itaque numeri primi, &c.*

Corollarium.

Si numerus metitur duos numeros, & compoſitum ab ipſis metietur. *Quoniam* D *metitur* A B, *&* B G: *ſequitur eum metiri totum* A G *compoſitum ex ipſis* A B *&* B G.

Propoſitio trigeſimaprima.

Omnis primus numerus, ad omnem numerum quem non metitur primus eſt.

Si numerus A *ſit primus, & non metiatur* B: *Dico, quod pri* A —— 7 ——
mi ſunt A *ad* B: *ſi enim non eſſent primi, metiretur eos aliquis* B —— 12 ——
G. *Primum igitur numerum* A *metietur aliquis* G, *quod fieri* G —— 3 ——
non poteſt, per duodecimam diffinitionem huius. Si enim G *fuerit æqualis ipſi* A, *non metietur ipſum* B *quem* A *non metitur, ex hypotheſi, nullus igitur eos metitur, primi erunt itaque* A *ad* B. *Omnis igitur primus numerus ad omnem, &c.*

MONITVM.

Proſequitur Euclides hoc theoremate, quod antea 20 *&* 23 *huius monuimus, ſcilicet rationẽ multiplicem à minimis numeris excludi, eò quòd à primis (qui ſemper ſunt minimi eius rationis) excludatur: hac igitur de cauſa dixit omnem primum ad numerum quem non metitur, primum eſſe. Nam ſi is primus alium metiatur, vt inter habentes rationem multiplicem, non erit ad eum primus, cùm alium ac ſeipſum metiatur, quod tantum multiplici conuenit rationi, vel eius conuerſæ, quarum numeri (cùm ſemper vnus metiatur alterum) nunquam in primos, ſeu datæ rationis minimos numeros incidunt.*

Propoſitio trigeſimaſecunda.

Si duo numeri ſeſe multiplicantes fecerint aliquem, factum autem ex eis metiatur aliquis primus numerus, & vnũ eorum qui in principio metietur.

Sint bini numeri A *&* B, *ex quorum multiplicatione pro-* A —— 2 ——
ductũ G *metiatur primus numerus* D: *Dico* D *metiri vnum* B —— 6 ——
eorum A *vel* B, *ſi autem non metiatur vnum eorum, ſcilicet* G —— 12 ——
A, *erunt* D *&* A *primi, per præcedentẽ. Quoties autem* D *me-* D —— 3 ——
titur G, *tot ſint in* E *vnitates: igitur* D *multiplicãs* E, *facit* G, E —— 4 ——
veluti A *multiplicans* B *eundem fecit* G *ex hypotheſi. Proportionales itaque ſunt ipſi* A *ad* D, *vt* E *ad* B *numeri, per* 19 *huius: qui enim ex primo* A *& quarto* B *æqualis eſt ei qui ex ſecundo* D *& tertio* E, *ſed cùm* A D *oſtenſi ſint primi, ipſi erũt minimi ſuæ rationis, per* 23 *huius, & proinde metiẽtur ipſos* B E *æqualiter, per* 21 *huius, antecedens* A *antecedentem* E, *& conſequens* D *conſequentem* B, *qui quidem* B *eſt vnus eorum* A *vel* B, *quem igitur metitur* D. *Si itaque duo numeri ſeſe multiplicantes, &c.*

Corollarium.

Si numerus ad aliquem factum ex duobus ſeſe multiplicantibus primus non fuerit, & ad vnum eorum qui in principio primus non erit. *Nam metiens numerum & factum, & repetẽs metientem in facto, ſemper ſunt cum ſeſe multiplicantibus reciproc è proportionales, per ſecundam partem* 19 *huius: nam qui ex primo & quarto æquatur ei qui ex ſecundo & tertio.*

Propoſitio trigeſimatertia.

Omnis compoſitus numerus, ſub alicuius primi numeri dimenſionem cadit.

Sit compoſitus numerus A: *Dico ipſum* A *ab aliquo primo menſum eſſe, quoniam compoſitus eſt* A *aliquis eum metitur, per* 14 *diffinitionem, qui ſit* B: *quod ſi primus ſit, habemus optatum: ſi verò* B *non ſit primus, metiatur eum aliquis* G, *qui quidem* G *primus erit, vel aliquis eum metietur, quem tandem metietur ſola vnitas, & hic primus erit. Non enim infinita ſit numerorum ſectio, licet infinita ſit multiplicatio, vt iam antea diximus, ex prima itaque communi ſententia, ille primus metietur* A. *Omnis igitur compoſitus numerus, &c.*

A 27
B 9
G 3

MONITVM.

Quia omnes primi numeri impares ſunt dempto vnico binario, pares tandem ad binarium, impares verò compoſiti tandem ad imparem primum aliquem eos metiẽtem deducũtur, & proinde ad primum, quæ eſt vltima & minima cuiuſlibet menſi menſura, vt ſequitur.

Propoſitio trigeſimaquarta.

Omnis numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

Quoniam omnis numerus aut primus eſt aut compoſitus, ſed compoſitum aliquis primus metitur, per præcedentem, Igitur omnis numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur cùm ſit compoſitus.

Propoſitio trigeſimaquinta. Problema 3.

Numeris quotcunque datis inuenire minimos eaſdem rationes habentium eis.

Proponantur quotcunque numeri A B G *in quorum rationibus minimos inueniamus, ſi quidem ipſi* A B G *fuerint primi, exequimur optatum, per* 21 *huius, ſi autem primi non fuerint ſit eorum maxima dimenſio* D, *per coroll.* 3 *huius. quoties porro* D *metitur ipſos* A B G *tot ſint vnitates in numeris* E Z I *ordine ſeruato, quoniam* D *metitur ſingulos* A B G *per vnitates ipſorum* E Z I *ſingulorum, ſequitur (ex* 18 *huius)* A B G *genitos, eandem habere rationem quam* E Z I *multiplicantes: Dico inſuper ipſos* E Z I *numerorũ* A B G *rationis, minimos eſſe. Si autẽ in ea ratione minores ipſis* E Z I *aliqui dari poſſint, ſint* T K L, *qui quidem metientur ipſos* A B G *æqualiter, per* 21 *huius. Metiantur itaque per vnitates ipſius* M, *metietur & è conuerſo* M *ipſos* A B G *per vnitates ipſorum* T K L, *per* 16 *huius, ſed cùm* T *multiplicans* M *ipſum* A *faciat, ſimiliter* E *multiplicans* D *eũdem* A *faciat, erit (per* 19 *huius) qui ex primo* E *& quarto* D *æqualis ei qui ex ſecundo* T *& tertio* M, *& ideo proportionales erunt* E *ad* T *ſicut* M *ad* D, *ſed* E *maior ponitur ipſo* T, *maior igitur erit* M *ipſo* D: *erit ideo* M *ipſorum* A B G *communis menſura maior ipſa* D, *maxima poſita, quod eſt abſurdum. Non itaque poſſunt in ratione propoſitorum* A B G *minores dari ipſis* E Z I *numeris, qui ea de cauſa minimi eius rationis numeri, meritò dicentur. Numeris igitur quotcunque, &c.*

K
L
T
M 3
Z 4
I 6
E 5
D 2
Z 4
I 6

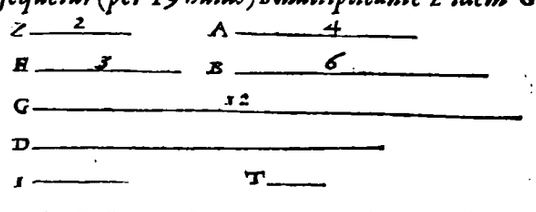
Propoſitio trigeſimaſexta. Problema 4.

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum metiantur numerum.

Sint dati duo numeri A *&* B, *inueniamus autem quẽ minimum metiãtur numerum, ipſi* A B *aut ſunt primi, aut non primi, ſumantur prius primi, &* A *multiplicãs* B *ipſum efficiat* G, *itaque* B *multiplicans* A *eundem* G *(per* 16 *huius) faciet, metientur ergo* A *&* B *ipſum* G: *Dico quòd & minimum, quòd ſi non, metiantur aliquem minorem ipſo* G *qui ſit* D, *quoties autem* A *metitur* D, *tot ſint vnitates in* E: *quoties verò* B *eundem* D *metitur, tot ſint vnitates in* Z. *Multiplicans igitur* A *ipſum* E *fecit* D, *& multiplicans* B *ipſum* Z *fecit eundem* D, *Erit itaque* A *ad* B *ſicut* Z *ad* E, *per ſecundam partem* 19 *huius, ipſi autem* A B *ſunt ex hypotheſi primi, & (per* 23 *huius) minimi*

A 3
B 4
G 12
D
E 3
Z 2

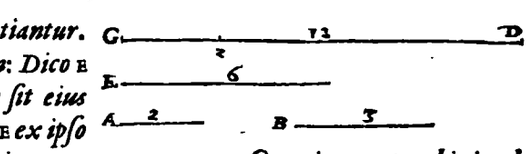
ſuæ rationis, ſi verò A *&* B *ſint minimi, ipſi metientur* Z E *eandem rationem habentes æqualiter, per* 21 *huius. Metietur ergo* B *conſequens ipſum* E *conſequentem, præterea quia* A *multiplicans duos* B *&* E *ipſos* G *&* D *fecit, erit (per* 17 *huius) ſicut* B *ad* E *ſic* G *ad* D, *ſed metitur* B *ipſum* E, *metietur ergo* G *ipſum* D, *maior minorem, quod fieri non poteſt. Si igitur* A *&* B *ſunt primi, nullum metiuntur minorem ipſo* G, *ſi verò ipſi* A *&* B *ſupponantur non primi, aut minor metitur maiorem, & ſic maior eſt, minimus quem ipſi metiuntur, aut non metitur, tunc inueniantur (per* 35 *huius) minimi rationis* A *ad* B *qui ſint* Z *&* E, *&* A *multiplicans* E *faciat* G *ſequetur (per* 19 *huius)* B *multiplicante* Z *idem* G *effici. Ipſi itaque* A *&* B *productum* G *metiuntur: Dico quòd & minimum, quòd ſi non, metiantur (ſi fieri poſſit) minorem ipſo* G *qui ſit* D, *quoties parrò* A *metitur* D *tot ſint vnitates in* I, *quoties verò* B *eundē* D *metitur, tot ſint in* T. *igitur* A *multiplicans* I *&* B *ipſum* T *eundem efficiunt* D. *Eſt itaque, ex* 19 *huius, vt* A *ad* B *ſic* T *ad* I. *Sed ſicut* A *ad* B *ſic fuit* Z *ad* E. *Vt igitur* T *ad* I, *ſic* Z *ad* E, *qui* Z *&* E *cùm minimi ſint, per conſtructionem, metiuntur ipſos* T *&* I, *per* 21 *huius. Sequetur igitur* E *metiri ipſum* I, *rurſus quoniam* A *multiplicans* E *&* I *ipſos* G *&* D *fecit. erunt per* 17 *huius,* G *ad* D *ſicut* E *ad* I, *ſed* E *metitur* I, *metietur ergo* G *maior ipſum* D *minorem quod eſt nefas. Non igitur metitur numeros* A *&* B *aliquis numerus minor ipſo* G, *quare datus eſt* G *minimus, quem metiuntur ipſi* A *&* B *numerus. Duobus igitur datis inuenimus, &c.*



Propoſitio trigeſimaſeptima.

Si duo numeri numerum aliquem mẽſi fuerint, & minimus qui ſub eorum dimenſionem cadit eundem metietur,

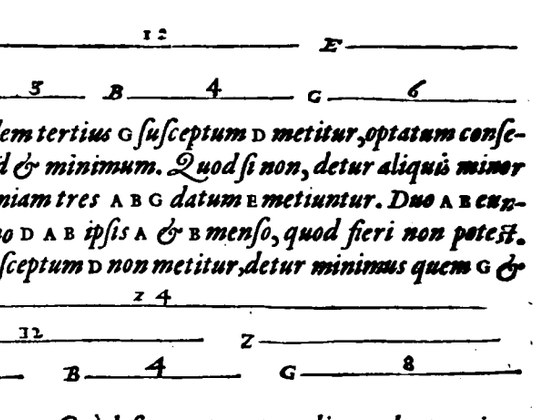
Duo numeri A *&* B *aliquem numerum* G D *metiantur. Et inſuper metiantur minimum* E *ab ipſis mẽſum: Dico* E *metiri etiam* G D, *quòd ſi* E *non metiatur* G D *ſiue ſit eius pars, ſaltem erit eius partes, per* 4 *huius, metiatur* E *ex ipſo* G D *maximum numerum* Z D, *relinquens ſeipſo minorem* G Z *numerum. Quoniam autem bini* A *&* B *metiuntur* E, *metiuntur &* Z D, *quem* E *metitur, per primam communem ſentẽtiam metiuntur autem & totum* G D, *per hypotheſim, metientur itaque & reliquum* G Z, *per ſecundam communem ſententiam, minorem quidem ipſo* E *minimo poſito, quod fieri non poteſt. Metitur itaque* E *numerum* G D. *Si igitur duo numeri numerum aliquem, &c.*



Propoſitio trigeſimaoctaua. *Problema* 5.

Pluribus numeris datis, inuenire quem minimum metiantur numerum.

Proponantur tres numeri A B G *oportet iam inuenire quem minimum metiantur numerum. Suſcipiamus (per* 36 *huius) minimum quem metiantur duo* A *&* B *qui ſit* D. *Siquidem tertius* G *ſuſceptum* D *metitur, optatum conſequimur: nam tres eundem* D *metiuntur: Dico quod & minimum. Quod ſi non, detur aliquis minor ipſo* D *quem metiantur omnes* A B G, *ſit q́* E. *Quoniam tres* A B G *datum* E *metiuntur. Duo* A B *eundem metientur* E. *Atqui* E *minor ponitur minimo* D A B *ipſis* A *&* B *menſo, quod fieri non poteſt. Non eſt igitur* E *minor ipſo* D. *Si verò tertius* G *ſuſceptum* D *non metitur, detur minimus quem* G *&* D *metiuntur, per* 36 *huius, qui ſit* E. *Quoniam* A *&* B *metiũtur* D, *metientur &* E *quem* D *metitur, per primam commu. ſententiam. Tres igitur* A B *&* G *metientur* E, *quem dico eſſe minimum. Quòd ſi non, ponatur alius* Z *dato* E *minor Quoniam* A B *&* G *metiuntur* Z, *duo* A *&* B *eundem* Z *metiuntur. Et proinde (per* 37 *huius) minimus* D *quem ipſi* A *&* B *metiuntur eundem* Z *metitur. Quia verò* G *&* D *eundem* Z *metiuntur, & per eandem, minimus ab ipſis* G *&* D *menſus eundem* Z *metitur, qui eſt* E, *maior quidem minorem* Z, *quod fieri*



fieri non poteſt. Minimus igitur ipſos A B G *metiens erit* E. *Simili progreſſu in quotcunque propoſitis numeris fiet demonſtratio. Nam ſi tribus* A B *&* G *quartus aliquis poneretur, ſiquidem is quartus datum* E *metiatur, is erit minimus quem ipſi quatuor propoſiti metientur. Si verò non metiatur* E, *inueniendus eſt, ex 37 huius, minimus quem* E *& quartus metiuntur. Is denique erit optatus, haud ſecus ſi quinque ſex, vel quotlibet propoſiti fuerint. Pluribus itaque numeris datis, &c.*

Propoſitio trigeſimanona.

Si numerum aliquis numerus metiatur, menſus cognominatam partem habebit à metiente.

Metiatur numerum A *aliquis numerus* B: *Dico* A *habere partem denominatam ab ipſo* B. *Quoties enim* B *metitur* A *tot ſint vnitates in* G, *Sit verò* D *vnitas. Quoniam* B *metitur* A *per vnitates numeri* G, *idem* G *metietur* A *per vnitates ipſius* B *per 16 huius. Igitur* D *vnitas toties metitur* B *quoties* G *ipſum* A. *Sed vnitas metitur* B *per partem* A *numero* B *denominatam, per 23 diffinitionem huius. Sequetur itaque* G *metiri* A *per partem ab ipſo* B *denominatam, habet igitur* A *partem denominatam à metiente* B. *Si itaque numerum aliquis numerus, &c.*

A — 12
B — 4
G — 3
D — 1

Propoſitio quadrageſima.

Si numerus partem habuerit quamlibet, numerus cognominans partem eum metietur.

Sit pars numeri A *numerus* B, *eam verò partem cognominans, ſit numerus* G: *Dico* G *metiri* A. *Eſto* D *vnitas: Quoniam* G *denominat ipſius* A *partem* B. *Idem* B *metitur* A *per vnitates numeri* G, *per 23 diffinitionem. Sed per eaſdem* D G *vnitas reſtituit eundem* G, *viciſſim igitur, per 15 huius, ſicut vnitas metitur* B *tertium, ſic* G *metitur* A *quartum. Quia verò vnitas ipſum* B *metitur, &* G *ipſum* A *metietur. Si itaque numerus partem habuerit, &c.*

A — 12
B — 4
G — 3
D — 1

Propoſitio quadrageſimaprima. *Problema 6.*

Numerum inuenire qui minimus exiſtens habeat datarum denominationum partes.

Sint datæ partes A *ſecunda,* B *tertia, &* G *quarta. Inueniendus ſit numerus minimus habens partes harum denominationum. Sint denominantes illas partes* A B G, *numeri* D E Z. *Minimus autem numerus quem* D E Z *metiuntur, ſit per 38 huius* I: *Dico* I *eſſe minimum habentem datas partes* A B G. *Quod ſi non ſit, eſto (ſi fieri poſſit) minor eas partes habens numerus* T. *Cùm* T *habeat partes* A B G *metientur eum numeri* D E Z *partium* A B G *denominatores, per 40 huius. Minorem quidem minimo* I *quem metiuntur, quod fieri non poteſt. Non igitur metiuntur* D E Z *numeri, minorem ſuſcepto* I. *Quòd autem numerus* I *habeat partes* A B G, *patet (per 39 huius) nam metiuntur eum denominatores, partium* A B G *ſcilicet* D E Z. *Numerum igitur inuenimus, qui minimus exiſtens, &c.*

D — 2 — A *ſecunda*
E — 3 — B *tertia*
Z — 4 — G *quarta*
I — 12
T

Corollarium.

Si numerum quotcunque numeri metiantur minimum, is minimus erit, habens partes ab ipsis denominatas. *Nam cùm inuenimus* 1 (*per* 38 *huius*) *minimum quem metiuntur* D E Z, *statim concluſimus eſſe* 1 *minimum habentem partes* A B G, *ab ipſis* D E Z *numeris denominatas.*

Additio.

Campanus huic addit poſt inuentionem prioris minimi, ſecundum inuenire, hoc eſt eum, qui dempto minimo minor eſt, & tertium & quartum, &c. Secundum quidem duplato 1: *nam numeri metientes* 1 *metiuntur eius duplũ, per primam cõmunem ſententiam huius. Maior, autem ipſo* 1 *& minor duplo, dari non poteſt (per ſecundam communem ſententiam) nam quia partes datæ metiuntur totum, ſcilicet duplo minorem, & ablatum ſcilicet* 1 *ſequetur ergo quod metirẽtur & reliquum, minimo* 1 *minorem, quod fieri non poteſt. Neceſſe eſt igitur excedentem* 1 *vſque ad duplum venire ſecundum, ad triplum autem tertium, ad quadruplum ſimiliter quartum, cùm nunquam partes illæ minorem ſuſcepto* 1 *aliquem metiri poſſint.*

Poſtmodum addit idem Campanus, inueniendum eſſe minimum habentem datas partium partes, quas facilius in vnicum fractionis genus reducentes, per hanc propoſitionem abſque tam prolixa ingeniorum tortura, noſtro iudicio reperiemus, vt ſi tertiam dimidiæ & quartam tertiæ partium partes minimum habentes optaremus, reducenda eſſet tertia dimidiæ in ſextam, quarta verò tertiæ in duodecimam: tum demum numerum perquiremus, habẽtem ſextam & duodecimam partes, per hoc problema.

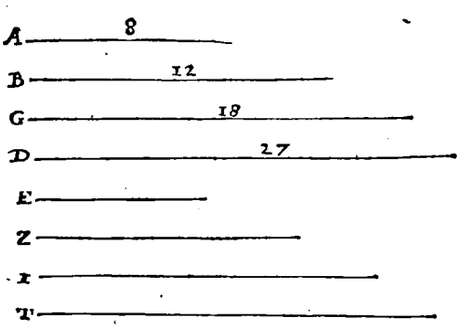
MONITVM.

Numerum qui minimus exiſtens datas partes habeat, Euclidem optare dicit Theon, Campanus verò datarum denominationum partes habentem optat, quod verius Euclidem inſequi arbitramur. Nam partes (abſque denominatione) etiam propoſitas numerum habentem, dare per hanc poſſumus, veluti damus eum qui propoſita ſola denominatione, non autem partium quantitate, poſtulatur. Sed eum numerum qui vtraque propoſita ſcilicet partium denominatione & earum quantitate, per numeros expreſſa inueniri iubetur, non dabimus, vt numerũ cuius tertia pars ſit 4 quinta verò 3 non dabimus, eò quòd vtrumque & denominationem, & partis quantitatem proponamus. Quare cùm ſemper cuiuſlibet numeri partem & eius partis denominatorem eundem numerum ſemper metiri (per quadrageſimam huius) intelleximus, eadem methodo facile propoſitas tantùm partes vel propoſitas tantùm partium denominationes minimum numerum habentem, facilè aſſequemur. Cuiuſlibet enim numeri vnica denominatio vnicam quantitatem partis pronunciat, ſicuti & vnica partis quantitas, vnicam denominationem tantùm profitetur in toto, aliàs ſequeretur quemuis numerum per quemlibet poſſe multiplicari, quod longè abeſt.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO num reſtitutarum Liber octauus.

Propoſitio prima.

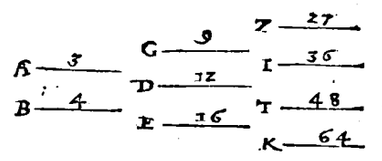
SI fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, extremi verò ipſorum primi adinuicē fuerint, omnes minimi ſunt eandem rationem habentium eis.



Sint quotcūque cōtinuè proportionales numeri A B G D, *quorum extremi* A *&* D *ſint primi: Dico ipſos* A B G D *eſſe tot minimos datæ rationis: quod ſi non, dentur minores ipſis* A B G D, *hi* E Z I T. *Qui cùm ſupponantur in eadem eſſe ratione, ipſis* A B G D *ex æquali erunt (per* 14 *ſeptimi) ſicut* A *ad* D, *ſic* E *ad* T: *ſed* A *ad* D *primi ſunt, per hypotheſim, & minimi, per* 23 *ſeptimi. Ipſi igitur metiūtur* E T *eandem rationem habentes æqualiter, per* 21 *ſeptimi: maiores igitur metirentur minores, quod fieri non poteſt, ipſi itaque* A B G D *minimi erunt, ſuæ rationis in hac multitudine. Si fuerint igitur quotcunque, &c.*

Propoſitio ſecunda. *Problema* 1.

Numeros quotlibet continuè proportionales in data ratione minimos inuenire.



Sit data ratio A *ad* B *(per* 35 *ſeptimi) in minimis numeris, et multiplicans* A *ſeipſum faciat* G: *multiplicãs verò* B *ſeipſum faciat* E, *ipſi autem* A *&* B *ſeinuicem multiplicantes efficiant* D: *Dico* G D E *tres minimos eſſe datæ rationis. Si verò optemus quatuor* A *multiplicans* G D E *ipſos faciat* Z I T, B *verò multiplicãs* E *reliquum efficiat* K: *Dico* Z I T K *eſſe quatuor minimos rationis* A *ad* B: *quoniam autem* A *duos numeros* A *&* B *multiplicans, fecit* G *&* D, *erit (per decimam ſeptimæ ſeptimi) ſicut* A *ad* B, *ſic* G *ad* D: *quia verò duo* A *&* B, *numerũ* B *multiplicantes ipſos efficiũt* D *&* E, *erit ſicut* A *ad* B, *ſic* D *ad* E *per* 18 *ſeptimi. ſed ſicut* A *ad* B, *ſic fuit* G *ad* D: *ſicut igitur* G *ad* D, *ſic erit* D *ad* E *ſicut q̃* A *ad* B. *Præterea dico tres* G D E *minimos eſſe, cùm* A *&* B *ſint minimi, ipſi (per* 24 *ſeptimi) primi erũt: quia verò ſeipſos multiplicãtes efficiunt* G *&* E, *& hi quoque (per* 29 *ſeptimi) primi erunt: ſed & extremi ipſorum* G D E, *ipſi itaque* G D E *minimi ſunt eandem rationem habentium, eis (per præfatam) Secundo quoniam* A *ipſos* G D E *multiplicans efficit* Z I T, *erunt (per* 17 *ſeptimi)* Z *ad* I, *&* I *ad* T, *ſicut* G *ad* D, *&* D *ad* E. *Cæterùm quoniam* A *&* B *ipſum* E *multiplicantes, fecerunt* T *&* K, *erit* A *ad* B *(per* 18 *ſeptimi) ſicut* T *ad* K: *ſed ſicut* A *ad* B, *ſic fuit* Z *ad* I, *&* I *ad* T. *ſicut igitur* A *ad* B, *ſic eſt* Z *ad* I, *&* I *ad* T, *ac* T *ad* K, *quos etiam minimos dico rationis,* A *ad* B *totidem. Cùm* A *&* B *primi qui in principio numeri genitos* G *&* E *multiplicantes fecerunt aliquos* Z *&* K, *& illi quoque (per ſecundam partem* 29 *ſeptimi) primi erunt, ſed & extremi horum quatuor* Z I T K, *ipſi igitur* Z I T K *omnes minimi ſunt eandem quam* A *ad* B *rationem habentium, per primam huius. Quia verò (per* 29 *ſeptimi) ſemper circa extremos illud contingit,* A *&* B *genitos* Z *&* K *multiplicantes, alios primos efficient, extremos quidem quinque proportionalium, & proinde (per primam huius) omnes quinque minimos huius rationis, & ſic infinitè. Numeros igitur quotcunque inuenimus minimos in data ratione, continuè proportionales.*

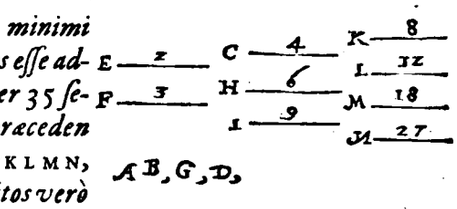
Corollarium.

Si fuerint tres numeri continue proportionales minimi eiuſdem rationis, extremi quadrati erunt: Si autem fuerint quatuor, extremi cubi erunt. *nã extremi trium fiunt ex ductu ipſorum*

A & B *in ſe. Extremi verò ipſorum quatuor, fiunt ex ductu radicum* A & B *in quadratos* G & E, *vt fiant cubi* Z & K.

Propoſitio tertia.

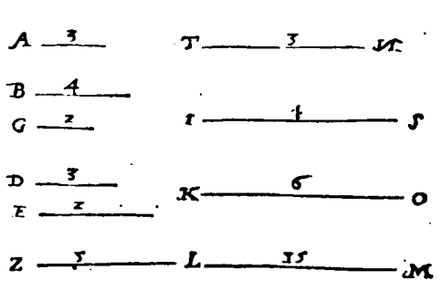
Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimi eandem rationem habentium eis, eorum extremi primi adinuicem erunt.



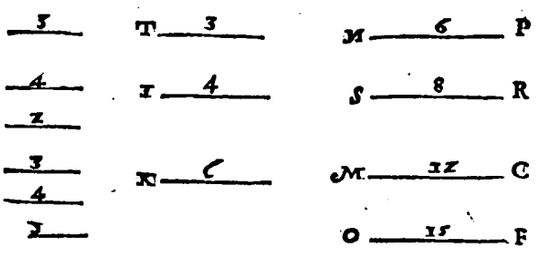
Sint quotcunque numeri continuè proportionales minimi ſuæ rationis A B G D: *Dico eorum extremos* A & D *primos eſſe adinuicem: ſumantur duo minini huius rationis* E & F, *per 35 ſeptimi, qui primi erunt, per 24 ſeptimi, ex his porro (per præcedentem) totidem ipſis* A B G D, *in eadem ratione producãtur* K L M N, *quoniam* E & F *ſeſe multiplicantes gignunt* C & I, *genitos verò multiplicantes, idem* E & F *faciunt* K & N. *Ipſi igitur* K & N *primi ſunt (per 29 ſeptimi) quia verò* K & N *(extremi) ſunt primi, omnes* K L M N *ſunt minimi huius rationis, per primam huius: ſed & minimi ſunt (ex hypotheſi)* A B G D *eiuſdem rationis, propoſiti* A B G D: *igitur ipſis* K L M N *ſunt æquales, non aliàs vtrique minimi eſſent, numeri itaque* A D *extremi (ipſis* K N, *extremis æquales) veluti* K & N *primi erunt. Si fuerint itaque quotcunque numeri continuè, &c.*

Propoſitio quarta. *Problema 2.*

Rationibus quibuſcumque datis in minimis numeris, numeros inuenire continuè proportionales minimos in totidem, & datis rationibus.



Proponantur in minimis numeris quælibet ac quotcunque rationes, ſcilicet A *ad* B, G *ad* D, & E *ad* Z, *ſumatur autem minimus quem metiantur* B & G, *per 36 ſeptimi, ſit* $\frac{g}{z}$ I. *quoties verò* B *metitur* I *toties* A *metiatur* T, *quoties autem* G *metitur* I *toties* D *metiatur* K, *ſed quoniam* E *ipſum* K *metitur vel non. Metiatur primum* E *ipſum* K, *toties verò* Z *ipſum* L *metiatur, cùm autem* A & B *æquè multiplicati, fecerint* T & I. *At* G & D *eodem item ducti, fecerunt* I & K, *ipſi verò* E & Z *rurſus eodem fecerint* K & L. *Erunt (ex decimaſeptima ſeptimi)* A *ad* B *ſicut* T *ad* I, *ac* G *ad* D *vt* I *ad* K, & E *ad* Z *ſicut* K *ad* L: *quatuor itaque* T I K L *in rationibus ipſorum* A *ad* B, G *ad* D, & E *ad* Z *poſiti ſunt continuè proportionales: Dico quòd & minimi ſunt aliorum totidem harum rationum, ſin minus, inueniãtur, ſi fieri poſſit, aliqui minores, ſint* $\frac{g}{z}$ N S O M *ſinguli ſingulis* T I K L *minores, cùm ſit* A *ad* B *vt* N *ad* S, *metietur* B *(minimus poſitus) ipſum* S, *per vigeſimamprimam ſeptimi, ſimiliter cùm ſit* G *ad* D *vt* S *ad* O *metietur* G *ipſum* S. *Metiuntur igitur* B & G *ipſum* S, *minorem quidem ipſo* I *qui poſitus fuit minimus, quem ipſi* B G *metiuntur, quod eſt abſurdum. Non igitur poſſunt dari minores ipſis* T I K L *alij in rationibus ipſorum* A *ad* B, G *ad* D, & E *ad* Z.



Ad ſecundum autem, non metiatur E *ipſum* K, *ſed ſit eius partes quantumuis repetitæ, Sumatur (ex trigeſimaſexta ſeptimi) minimus menſus ab ipſis* E & K *qui ſit* M. *Qualis eſt autem* K *ipſius* M, *talis ſit pars* I *numeri* S, & T *ipſius* N. *Quoties verò* E *metitur* M *toties* Z *metiatur* O, *quoniam* K I T *ipſos* M S N *æquè metiuntur, erit (per decimamoctauam ſeptimi)* T *ad* I, *vt* N *ad* S, & I *ad* K *ſicut* S *ad* M, *ſed ſicut* T *ad* I & I *ad* K, *ſic fuit* A *ad* B & G *ad* D. *ſicut igitur* A *ad* B & G *ad* D, *ſic erit* N *ad* S & S *ad* M. *Et (per eandem) ſicut* E *ad* Z *ſic* M *ad* O, *æquè etenim metiuntur* E & Z *ipſos* M & O *ex hypotheſi. Sunt igitur* N S M & O *continuè proportionati in rationibus ipſorum* A *ad* B, G *ad* D, & E *ad* Z: *Dico quòd & minimi ſunt earum rationum numeri, quòd ſi non, Dẽtur, ſi fieri poſſit, ipſis* N S, M O *minores, qui ſint* P R, C F. *Cùm autem* P R, R C & C F *ſint in rationibus ipſorum* A B, G D, & D Z, & *ipſi* A B, G D & E Z *ſint (ab hypotheſi) minimi. ſequetur* B *metiri ipſum*

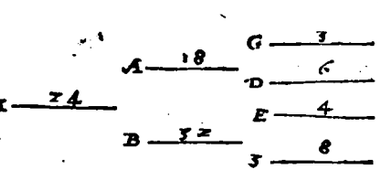
ipſum R, *vt* A *ipſum* P, *ac* G *eundem* R *vt* D *ipſum* C, *per vigeſimamprimam ſeptimi. Itaque* B *&* G *metientur* R. *Quare eundem* R *metietur, minimus quem* B *&* G *metiuntur, ſcilicet* I *per trigeſimamſeptimam ſeptimi. Cùm autem ſit* I *ad* K *ſicut* R *ad* C, *ſcilicet vtrique ſicut* G *ad* D, *erit viciſſim (per decimamtertiã 7)* I *ad* R *vt* K *ad* C. *Metitur autem* I *ipſum* R *metietur &* K *ipſum* C. *Eundem* C *porrò metitur* E, *cùm* E *&* Z *ſint minimi rationis ipſorum* C *ad* F *per 21 ſeptimi. Igitur* K *&* B *eundem* C *metientur. Et proinde eundem* C *metietur* M *minimus ab ipſis* K *&* E *menſus, per 37 ſeptimi, maior minorem, cùm minores ſint poſiti* P R C F *ipſis* N S M O, *quod inconuenit. Minimi itaque erunt* N S S M M O *in continuis ipſorum* A B G D *&* E Z *rationibus dati. Rationibus itaque quibuſcunque datis, &c.*

MONITVM.

Figurarum numeros transferre cogimur, eò quòd Theon in paralogiſmum deciderit, numeros potius ſecundæ parti deſtinatos primæ deputans. Nam qui comperiendi erant vbi E *numerum* K *non metitur, eoſdem vbi* E *eundem* K *prius metitur, comperit. Nimirum incipiens à ſumptione minimi quem metiuntur* B *&* G *hi ſcilicet 4 & 2 quem poſuit octanarium loco quaternarij, qui eſt minimus ab ipſis 2 & 4 menſus, vt trigeſimaſexta ſeptimi præter Theonem diximus. Quare prima huius parte numerus* E *numerum* K *metiri non poterat, quod vt fieret, numeros* T I K *(maiores iure debito) protulit indebitè.*

Propoſitio quinta.

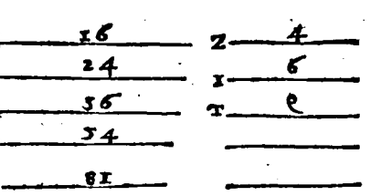
Plani numeri adinuicem rationem habent compoſitam ex lateribus.



Sint plani numeri A *&* B, *ipſius autem* A *latera ſint* G *&* D: *Numeri verò* B *latera ſint* E *&* Z, *at* D *multiplicans* E *faciat* I: *Dico rationem* A *ad* B *componi ex rationibus* G *ad* E *&* D *ad* Z, *hoc eſt, laterum* A *ad latera* B *planorum. Quoniam* D *multiplicans* E *fecit* I *multiplicans verò* G *reliquum latus facit* A, *per decimamſeptimam diffinitionem ſeptimi. Erit* A *ad* I *ſicut* G *ad* E, *per 17 ſeptimi. Rurſus quoniam* E *multiplicans* D *idem* I *facit, per 16 ſeptimi, multiplicans autem* Z *ipſum* B *facit, erit ſimiliter* I *ad* B *ſicut* D *ad* Z. *Eaſdem igitur ſequetur eſſe rationes laterum* G *ad* E *&* D *ad* Z, *rationibus* A *ad* I *&* I *ad* B. *Sed (per quintam ſexti diffinitionem) ratio extremorum* A *ad* B *componitur ex rationibus mediis, ſcilicet* A *ad* I *&* I *ad* B, *quæ eædem ſunt rationibus laterum* G *ad* E *&* D *ad* Z *oſtenſæ. Ratio itaque* A *ad* B *planorum numerorum, componitur ex rationibus laterum* G *ad* E *&* D *ad* Z. *Plani igitur numeri rationem habent, &c.*

Propoſitio ſexta.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimus autem proximum non metiatur, & alius nullus, vllum metietur.



Sint quotlibet numeri A B G D E *continuè proportionales, quorum minimus* A *non metiatur ſibi proximum* B: *Dico nullum alium eorum* A B G D E, *metiri reliquũ, cùm ſint proportionales continui. Si* A *non metiatur* B, *nec* B *metietur* G, *nec* G *ipſum* D, *nec* D *reliquum* E: *nam ſunt eædem eorum rationes. Præterea ſi dicamus intermiſſis quibuſdam, extremos ſeſe metiri, vt* A *ipſum* G, *ſi fieri poſſit. Dentur numerorum* A B G *rationes in minimis numeris, per 35 ſeptimi, qui ſint* Z I T. *Quorum extremi* Z *&* T *(per tertiam huius) erunt primi. Igitur* Z *ipſum* T *non metietur. Quoniam autem ipſi* A B G *&* Z I T *æquales numero, & bini in eadem ratione ponuntur, erit (per 14 ſeptimi)* A *ad* G *ſicut* Z *ad* T. *Sed* Z *ipſum* T *non metitur, nec igitur* A *ipſum* G *metietur. Eodem argumento patebit inter quoſuis, ſumptis minimis totidem, quorum extremos tertia huius efficit ſemper primos. Si igitur fuerint, &c.*

Corollarium.

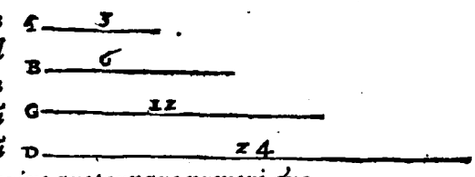
Si quotcunque numeri continuè proportionales fuerint in ratione non multiplici, inter extremos quoſque eorum nuſquam cadet ratio multiplex. *Nam ſi minimus proximum non metiatur, erit ratio non multiplex, & ſi proinde nullus alius alium metiatur, nec inter eos erit ratio multiplex.*

MONITVM.

Cùm dixerint Theon & Campanus (primus autem non metiatur ſecundum) videntur ab hoc Euclidis theoremate, omnes terminos habentes rationes maioris inæqualitatis deiicere (cùm in eis nuſquam primus ſecundum metiatur, maior ſcilicet minorem) quod non fuiſſe Euclidis mentem rati, diximus, ſi minimus proximum non metiatur, vt demonſtrationis hypotheſim à minimo ſemper ſumendam eſſe, vt recta oriatur concluſio, doceamus. Quod autem dicit Theon in demonſtratione Z *non eſſe vnitatem, fruſtra id probare nititur: nam id ſufficienter exprimit hypotheſis theorematis, dicens minimus proximum non metiatur, vt excludat omnes rationes multiplices, quæ (cùm non ſint puræ numerorum rationes) ſolæ in minimis numeris vnitatem adeſſe patiuntur, ac earum conuerſæ, & quarum ſemper vnus alterum terminorum metitur, ſcilicet minor maiorem. In reliquis verò rationibus, vnus nunquam alterum metitur, &c.*

Propoſitio ſeptima.

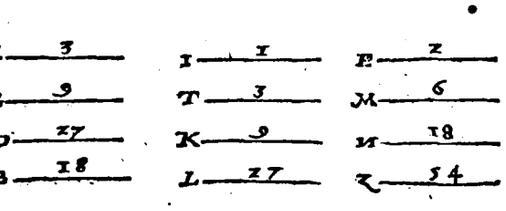
Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimus autem metiatur extremum, & proximum quoque metietur.



Sint quotlibet numeri continuè proportionales A B G D. *Quorum minimus* A *metiatur maximum* D, *vel extremum quod idem eſt: Dico quod & proximum* B *metietur idem* A. *Si autem non metiretur* A *proximũ* B, *nõ metiretur & extremum (per præcedentem nullũ enim metiretur) quod eſſet contra poſitum. Si itaque fuerint quotcunque numeri, &c.*

Propoſitio octaua.

Si inter duos numeros continuè proportionales ceciderint numeri, quot inter eos, tot inter eandem rationem habentes, eis continuè proportionales cadent.



Cadant inter duos numeros A *&* B *quotcunque continuè proportionales numeri,* G *&* D. *Sitq;* B *ad* Z *eadem ratio quæ* A *ad* B: *Dico tot cadere inter* E *&* Z *cõtinuè proportionales, quot inter* A *&* B *ceciderunt. Ponantur (per ſecundã huius) ipſis* A G D B *eandem rationem habentes totidem minimi, qui ſint* I T K L. *Erit itaque* I *ad* L *ſicut* A *ad* B *æqua ratione, per decimamquartam ſeptimi. Cùm autem* B *ad* Z *ſint vt* A *ad*, *erit* B *ad* Z *vt* I *ad* L, *per vndecimam quinti. Ipſi itaque* I *&* L *metientur ipſos* E *&* Z (*eandem rationem habentes*) *æqualiter, per vigeſimamprimam ſeptimi. Quoties autẽ* I *metitur* E *toties* T *metiatur* M, *&* K *ipſum* N *& reliqui qui inter* I *&* L *reliquos qui inter* E *&* Z *ponendi ſunt, quotquot fuerint. Quoniam enim* I T K L *æquè metiuntur ipſos* E M N Z, *viciſſim* I *metietur* T *vt* E *ipſum* M, (*vel eadem partes erit*) *&* T *ipſum* K *vt* M *ipſum* N, *ac* K *ipſum* L *vt* N *ipſum* Z, *per nonamſeptimi. Proportionales igitur (per vigeſimamprimã diffinitionem ſeptimi) & æquales numero ſunt* E M N Z *ipſis* I T K L, *& proinde ipſis* A G D B *quibus ipſi* I T K L *æquales numero, & in eadem ratione poſiti ſunt. Quot igitur proportionales* G *&* D *inter* A *&* B *ceciderunt, tot inter* E *&* Z *proportionales* M *&* N *cadent. Si itaque inter duos numeros, &c.*

Coroll

Corollarium.

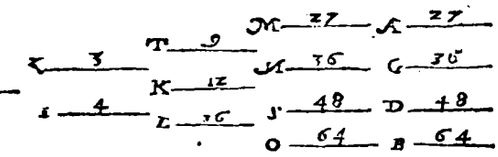
Inter numeros habentes rationem ſuperparticularem,& ſuperbipartientem non cadit aliquis medius proportionalis. *Quia minimi eius rationis numeri, ſola vnitate, vel binario diſtant. Si autem inter maiores caderet medius,& inter minimos (eandem rationem habentes) caderet,per hanc. Sed inter ſola vnitate vel binario diſtantes,nullus cadit. Inter numeros igitur,&c. Quare tonus muſicus (ſeſquioctaua conſtans) ſimul atque ſeſquialtera & ſeſquitertia bifariam ſecari non poſſunt,vt enim ratio bifariam ſecetur,in duas ſimiles ſecari debet,& tunc caderet medius proportionalis, quod fieri non poteſt,ſunt enim rationes ſuperparticulares. Praterea ſequitur hinc dimetientis quadrati,ad eiuſdē latus numeris non exprimi poſſe rationem. Nam quod ex dimetiente, ad quod ex latere quadratum eſt ſicut* 2 *ad* 1, *quæ ſola vnitate diſtant,ſed laterum ratio dimidia eſt,rationis quadratorū,per* 20 *& coroll.eius ſexti. Inter* 2 *igitur &* 1 *medius caderet,quod fieri nequit.*

MONITVM.

Quoniam per minimos numeros hæc demonſtratio fit, in quos ſæpius oſtendimus non cadere, habentes rationem multiplicem,ſeu particularem eius conuerſam, poſſent fortè obiicere quidam, hoc theoremate non poſſe comprehendi numeros habentes rationem multiplicem vel eius conuerſam. Ad hæc dicemus hoc theorema de rationibus numerorum proportionalium,in genere loqui, non autem de rationibus tantùm numerorum arithmeticorum,ſiue actiuorum inter quos ratio multiplex minimè verſatur. Quare cùm proportionales ſint paſſiui rationē multiplicem huic theoremati ſubiici ſentiemus,quòd ſi propriam multiplicibus demonſtrationem exhibere velimus,loco minimorum ſumemus totidē ab vnitate proportionales ITKL *(vt data opera in figura deſcripſimus) quibus idem conueniet (ex decimaquinta ſeptimi) quod numeris aſcripſit* 9 *eiuſdem,vt tandem proportionales, ac totidem ipſis* ITKL *reperiantur* EMNZ. *Hanc animaduerſionem ſufficere in ſimilibus obiectis (ſi fortè occurrerint) conſulimus.*

Propoſitio nona.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint,& inter eos proportionales cōtinui eciderint numeri,quot inter eos cadent,tot inter vtrumque eorum & vnitatem continuè proportionales cadent.



Bini numeri A *&* B *ſint primi. Inter eos verò quotcunque continuè proportionales cadant* O *&* D: *Dico inter vtrumque eorum* E A *&* B *&* *vnitatem,totidem cadere cōtinuè proportionales. Eſto* E *vnitas, ſint q, minimi rationis* AG DB *duo* ZI, *per ſecundam huius,poſtmodum tres* TKL, *deinde quatuor, vſque ad multitudinem ipſorum* AG DB, *qui ſint* MN SO *(per* 2 *huius.) Quoniam* MN SO *ipſis* AG DB *æquales ſunt multitudine,& rationis eiuſdem minimi. Nam* AG DB *ſunt primi,per* 23 *ſeptimi. Ipſi ſinguli ſingulis æquales erunt. Quia verò (per ea quæ demonſtrata ſunt ſecunda huius)* Z *metitur* T *per ſuiipſius vnitates,&* T *ipſum* M *per eaſdem. Sed* E *vnitas ipſum* Z *per eaſdem, ſequetur quatuor* EZ TM *continuè proportionales eſſe, Similiter* BI LO. *Cùm autem æquales ſint* A *ipſi* M *&* B *ipſi* O, *Inter* A *&* B *vnitatem cadent,* T *&* Z. *Inter* B *verò & eandem vnitatem* E *cadent* LI. *Quia verò inter* E *& numerum proportionalium* AG DB (*ſcilicet* MN SO) *æqualis eſt numero gradatio proportionalium, ipſis* GD *inter* A *&* B *cadentibus, nempe* ZT *vel* IL *eiſdem* GD (*per* 2 *huius.*) *Sequetur totidem inter vtrumque ipſorum* A *vel* B *&* *vnitatem* E *cadere proportionales* T *&* Z *aut* L *&* I, *quot inter ipſos* A *&* B *eciderunt* G *&* D. *Si igitur bini numeri primi,&c.*

Propoſitio decima.

Si inter duos numeros & vnitatem, totidem continuè proportionales cadant numeri, Quot inter vtrumque ipſorum & vnitatem continuè proportionales eciderunt,tot & inter eos continuè prōportionales cadent.

Inter duos numeros A *&* B, *& vnitatem* G, *cadant totidem proportionales numeri,* A E D G, *&* B I Z G: *Dico quot inter vtrosque* A *ſcilicet & vnitatem* G, *ac* B, G 1, D 3, E 9, A 27, Z 4, T 12, K 36, I 16, L 48, B 64 *& vnitatem ceciderint, totidem inter ipſos* A *&* B *cadere. Cùm enim* G D E A *ſint continuæ proportionales, per quas vnitates* G *metitur* D, *per eaſdē* E D *metitur, ac* E *ipſum* A. *Similiter per quas* G *metitur* Z, *per eaſdem* Z *ipſum* I, *ac* I *ipſum* B *metiuntur: ſed* G *metitur* D *per vnitates eiuſdem* D, *cùm* G *ſit vnitas. Per eaſdem igitur* D *ipſum* B *ac* E *reliquum* A *metientur, ſicut per* Z *vnitates* G *ipſum* Z *&* Z *proximum* I *ac* I *vltimum* B *metiũtur. Igitur* D *ſeipſum multiplicans fecit* E, *ipſum* E *verò multiplicans fecit* A, *ſic* Z *per ſeipſum facit* I, *per* I *verò efficit* B. *Sit autem vt* D *multiplcans* Z *faciat* T, *bini verò* D *&* Z *binos* K *&* L *numerum* T *multiplicantes efficiant, quoniam* D *binos* D *&* Z *multiplicans duos fecit* E *&* T, *erit per* 17 *ſeptimi,* E *ad* T *vt* D *ad* Z. *Quia verò bini* D Z *eundem* T *multiplicantes binos* K *&* L *efficiunt, erit* K *ad* L, *vt* D *ad* Z *per* 18 *ſeptimi, ſed* D *binos* E *&* T *multiplicans ipſos efficit* A K, *erit igitur* A *ad* K *vt* E *ad* T, *& proinde vt* D *ad* Z. *Fuit autem* K *ad* L, *vt* D *ad* Z, *erit igitur* A *ad* K *vt* K *ad* L, *per vndecimam quinti. Similiter cùm* Z *duos* Z *&* D *multiplicans, ipſos faciat* I *&* T, *erit* T *ad* I *vt* D *ad* Z, *multiplicans autem idem* Z *binos* T *&* I *ipſos fecit* L *&* B: *erunt igitur* L *ad* B *vt* T *ad* I, *per eandem* 18 *ſeptimi, & proinde vt* D *ad* Z. *Fuit autem* A *ad* K, *&* K *ad* L, *vt* D *ad* Z, *id propter* A *ad* K, *&* K *ad* L, *&* L *ad* B, *vt* D *ad* Z *proportionales erunt: inter* A *&* B *igitur poſiti ſunt totidem* K *&* L *continuæ proportionales, quot inter vtrosque* A B *&* vnitatem *ſcilicet* E D *vel* I Z *ceciderunt, per* 2 *huius, ea etenim docuit gradationem proportionalium inter vnitatem & propoſitum numerum proportionalium, eidem propoſito ſemper æqualem eſſe numero, nempe per vnitatum exceſſus ſcilicet* G *vnus,* D Z *duo,* E T I *tres,* A K L B *quatuor. Si itaque inter duos numeros, & vnitatem. &c.*

Propoſitio vndecima.

Duorum quadratorum numerorum, vnus eſt medius proportionalis numerus, & quadratus ad quadratum, duplam habet rationem quam latus ad latus.

Sint duo quadrati numeri A *&* B, *quorum latus* A *ſit* G, *ipſius* B *verò ſit* D: *Dico inter* A *&* B *medium cadere proportionalem numerum, ac inſuper ipſius* A *ad* B *duplam eſſe rationem laterum* G *ad* D: *quoniam* G *eſt quadrati* A *latus. Idem* G *ſeipſum multiplicans facit* A, *per* 19 *diffinitionem ſeptimi. Similiter &* D *latus ipſum* B *faciet, ponatur* G *multiplicans* D *ipſum* E *facere, quoniam* G *duos* G *&* D *multiplicans facit* A *&* E, *erit (per* 17 *ſeptimi)* A *ad* E, *vt* G *ad* D: *ſimiliter* D *binos* G D *multiplicans efficit duos* E *&* B, *erit (per eandem)* E *ad* B, *vt* G *ad* D, *fuit autem* A *ad* E *vt* G *ad* D. *Erit igitur (per* 11 *quinti)* A *ad* E *ac* E *ad* B, *vt* G *ad* D. *Inter* A *&* B *igitur medius cadit proportionalis* E *numerus: quia verò eſt* A *ad* E, *vt* G *ad* D, *dupla autem eſt primi* A *ad* B *ratio, rationis* A *ad* E, *per* 10 *diffinitionem quinti. Dupla igitur erit* A *quadrati ad* B *quadratum ratio, rationis* G *lateris ad* D *latus. Duorum itaque quadratorum numerorum, &c.*

Propoſitio duodecima.

Duorum cuborum numerorum bini medij proportionales ſunt, numeri & cubus ad cubum triplam rationem habet, quam latus ad latus.

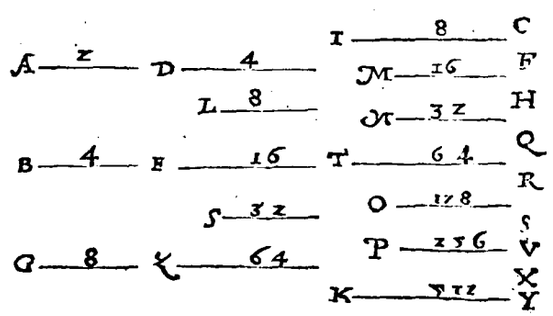
Sint duo cubi numeri A *&* B, *quorum latus vnius* A *ſit* G, *ipſius verò* B *latus* D: *Dico inter* A *&* B *binos medios cadere proportionales numeros, &* A *ad* B *rationẽ triplam habere quam* G *ad* D. *multiplicans ſe* G *faciat* E, *ipſum verò* D *multiplicans faciat* Z; *at* D *multiplicans ſe faciat* I: *ſed* G *&* D *ipſum* Z *multiplicantes faciant ipſos* T *&* K. *Erit igitur* T *ad* K *vt* G *ad* D, *per* 18 *ſeptimi, quia verò* G *duos* G D *multiplicans binos efficit* E Z, *erit* E *ad* Z *vt* G *ad* D, *per* 17 *ſeptimi, & cùm* G *binos,* E *ſcilicet per vigeſimam diffinitionem ſeptimi, et* Z (*per conſtructionem*) *multiplicans, duos efficiat* A *&* T, *erit* A *ad* T *vt* E *ad* Z, *per* 17 *eandem: & proinde vt* G *ad* D, *fuit autem* T

ad

ad K *vt* G *ad* D: *igitur* A *ad* T *&* T *ad* K *erunt vt* G *ad* D. *Quoniam autem* D *binos* G D *multiplicans, duos fecit* Z I, *erit* Z *ad* I *vt* G *ad* D. *Haud ſecus* D *multiplicans* I *facit* B, *per vigeſimam diffinitionem ſeptimi, multiplicans verò ipſum* Z *fecit* K, *per conſtructionem, erit* K *ad* B *vt* Z *ad* I, *per* 17 *ſeptimi: & proinde ſicut* G *ad* D, *fuerunt autem* A *ad* T, *&* T *ad* K, *vt* G *ad* D, *Ipſi igitur* A *ad* T, T *ad* K *&* K *ad* B, *vt* G *ad* D *proportionales erunt. Inter duos igitur* A B *cubos, bini medij proportionales* T *&* K *ceciderunt in ratione laterum* G *ad* D. *Cùm autem ſit* A *ad* T, *vt* G *ad* D: *ſed* A *ad* B *quartam triplam habeat rationem, quam ad* T *ſecundam, per* 10 *diffinitionem quinti: idem* A *cubus ad* B *cubum, triplam rationem habet quam* G *latus ad* D *latus. Duorum itaque cuborum numerorum binimedij, &c.*

Propoſitio decimatertia.

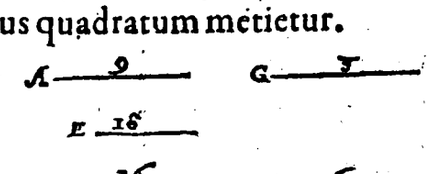
Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, & multiplicans vnuſquiſque ſeipſum fecerint aliquos, qui ex ipſis fiunt proportionales erunt. Et ſi qui in principio numeri, genitos multiplicantes fecerint aliquos, & ipſi quoque proportionales erunt, & ſemper circa extremos hoc eueniet.



Sint quotlibet proportionales numeri A B G, *quorum ſinguli ſe multiplicantes faciant ſingulos* D E Z, *ipſos verò* D E Z *multiplicantes iidem* A B G *faciãt* I T K: *Dico* D E Z *inter ſe ac* I T K *inter ſe proportionales eſſe continuos. Cùm* A B G *ſe multiplicantes faciãt* D E Z, *ipſos verò* D E Z *multiplicantes faciãt* I T K, *ipſi* D E Z *quadrati erũt, per* 19 *diffinitionẽ ſeptimi, ac duplam ipſis* A B G *rationem habebunt, per* 11 *huius. Ergo inter ſe eandem, per ſextam communem ſententiam, igitur proportionales ſunt* D E Z: *ipſi verò* I T K *cubi erunt, per* 20 *diffinitionem ſeptimi, ac triplam ipſis* A B G *habebunt rationem, per* 12 *huius, ergo inter ſe eandem per eandem ſextam communem ſententiam, eiuſdem namque rationis* A *ad* B *ſunt triplæ, inter ſe igitur ſunt proportionales ipſi* I T K. *Cæterùm quoniam* D E Z *ſunt quadrati, inter eos ſint medij proportionales ſinguli,* L *&* S *per* 11 *huius. Inter ſingulos verò cubos* I *&* T *ſint bini* M N, *inter* T *&* K *verò bini* O *&* P: *quoniam* A *tres* D L E *multiplicans tres efficit* I M N, *&* B *ipſum* E *multiplicans ipſum* T *fecit: ſimiliter* B *&* G *ipſos* T O P K *fecerunt, vt oſtendimus per octauã huius & ſequentes eam. Eadem lege* A *multiplicans ipſos* I M N T *&* B *multiplicans eũdem* T *genitos, quinque* C F H Q R *efficiẽt, veluti* B *&* G *alios quinque* R S V X Y *cum* B, *ipſos* T O P K *&* G *ipſum* K *multiplicabunt, & inter eos eadem erit ratio ipſis* A *ad* B, *per* 17 *ac* 18 *ſeptimi. Et igitur æqua ratione erit* C *ad* R, *vt* R *ad* Y, *per* 14 *ſeptimi. Sicque infinitè (per* 17 *ac* 18 *et* 14 *ſeptimi)* A *et* B *genitos* C R Y *multiplicantes, alios proportionales efficient. Si itaque fuerint quotcunque numeri continuè, &c.*

Propoſitio decimaquarta.

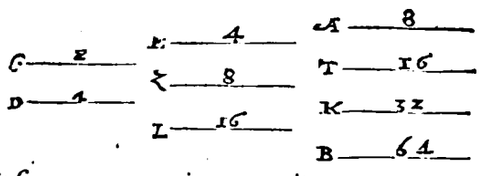
Si quadratus numerus quadratũ numerum metiatur, & latus latus metietur: & ſi latus latus metiatur, & quadratus quadratum metietur.



Metiatur A *quadratus numerus* B *quadratum, quadrati* A *latus ſit* G, *ipſius* B *verò ſit* D: *Dico* G *metiri* D: *et è conuerſo ſi* G *metiatur & et* A *metiri* B, *multiplicans* G *ipſum* D *faciat* E, *ſed ſeſe multiplicans facit* A, *per hypotheſim: igitur (per* 17 *ſeptimi) erit* A *ad* E *vt* G *ad* D. *Sed* A *metitur* B *(per hypotheſim) extremum, metietur igitur* E *proximum, per* 7 *huius, et* G *itaque ipſum* D *metietur, fuit enim* A *ad* E *vt* G *ad* D. *Secundò metiatur* G *ipſum* D *eiſdẽ conſtructis: Dico* A *metiri* B: *quoniam eſt* G *ad* D *vt* A *ad* E, *et* E *ad* B, *per* 17 *ſeptimi: ſed* G *metietur* D, *Metietur igitur* A *ipſum* E, *et proinde quadratum* B *quem* E *metitur, per primam communem ſententiam ſeptimi. Si itaque quadratus numerus &c.*

Propoſitio decimaquinta.

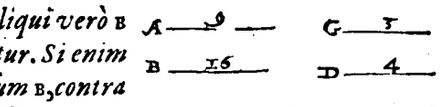
Si cubus numerus cubum numerum menſus fuerit, & latus latus metietur, & ſi latus latus menſum fuerit, & cubus cubum metietur.



Metiatur A *cubus numerus* B *cubum: Dico* G *latus ipſius* A *metiri* D *latus ipſius* B, *& è conuerſo, multiplicantes ſeſe* G *&* D *quadratos efficiãt* E *&* I, *per* 19 *diffinitionem ſeptimi, inter quos medius ſit* Z, *per* 11 *huius, ipſi verò* G *&* D *multiplicãtes* Z *duos faciant* T *&* K, *inter* A *&* B *cubos medios (per* 12 *huius) in ratione ipſorum* G D: *quoniam* A *metitur* B *extremum, metietur &* T *proximum, per ſeptimam huius, fuit autem* A *ad* T *vt* G *ad* D, *metietur itaque* G *ipſum* D. *Si verò ponamus* G *metiri ipſum* D, *eiſdem namque diſpoſitis, quoniam eſt* A *ad* T *vt* G *ad* D, *ſed* G *metietur* D, *metitur igitur* A *ipſum* T, *&* T *ipſum* K, *&* K *ipſum* B: *quare* A (*per primam communem ſententiam ſeptimi*) *metietur ipſum* B. *Si itaque cubus numerus cubum numerum menſus, &c.*

Propoſitio decimaſexta.

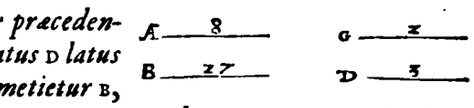
Si quadratus numerus quadratum numerum menſus non fuerit, neque latus latus metietur, & ſi latus latus menſum non fuerit, neque quadratus quadratum metietur.



Sint A *&* B *numeri quadrati, latus ipſius* A *ſit* G, *reliqui verò* B *ſit* D: *Dico ſi* A *non metiatur* B *neque* G *ipſum* D *metietur. Si enim* G *metiretur* B, *ſequeretur (ex* 14 *huius)* A *metiri ipſum* B, *contra hypotheſim. Non itaque metitur* G *quadratum* D, *Similiter ſi ponamus* G *non metiri* D *nec* A *ipſum* B *metiatur, quoniam ſi* A *metiretur quadratum* B, *&* G *latus* D (*ex eadem*) *metiretur, contra ſuppoſitum. Non igitur metitur* A *ipſum* B. *Si itaque quadratus numerus quadratum, &c.*

Propoſitio decimaſeptima.

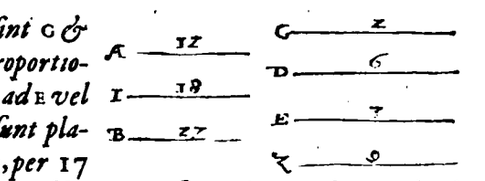
Si cubus numerus cubum numerum nõ metiatur, neque latus latus metietur, & ſi latus latus non metiatur, neque cubus cubum metietur.



Eadem demonſtrandi ratio hanc patefaciet quæ & præcedentem. Si enim A *cubus,* B *cubum nõ metiatur, neque* G *latus* D *latus metietur. Nam ſi* G *metiatur* D, *&* (*per* 15 *huius*) A *metietur* B, *contra hypotheſim, Similiter ſi* G *latus* D *latus non metiatur, neque* A *cubum* B *metietur. Si enim* A *cubum* B *metiatur &* G *latus* D *metiretur, per ſecundam partem eiuſdem, quod obſtat hypotheſi, & proinde inconuenit. Si igitur cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus latus metietur, &c.*

Propoſitio decimaoctaua.

Duorum ſimilium planorum numerorum, vnus medius proportionalis eſt numerus, & planus ad ſimilem planum duplam habet rationem quam ſimilis rationis latus ad ſimilis rationis latus.

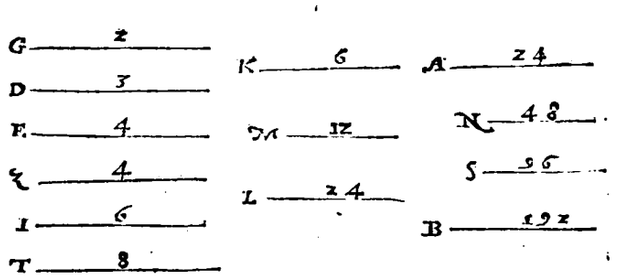


Sint duo ſimiles plani A *&* B, *latera autem ipſius* A *ſint* G *&* D, *ipſius* B *verò ſint* E *&* Z. *Dico inter* A *&* B *medium proportionalem cadere, & rationẽ* A *ad* B *duplam eſſe rationis* G *ad* E *vel* D *ad* Z, *ſimilis rationis laterũ, quoniam* A *&* B *ſimiles ſunt plani,* G *multiplicans* D *facit* A, *&* E *multiplicans* Z *facit* B, *per* 17 *diffinitionem ſeptimi. Eſt itaque* G *ad* E *vt* D *ad* Z, *per* 22 *diffinitionem ſeptimi. Deinde* D *multiplicans* E *faciat* I, *quoniam ergo* D *binos* G *&* E *multiplicans, facit duos* A *&* I, *erit* (*per* 17 *ſeptimi*) A *ad* I *vt* G *ad* E. *Eadem porrò de cauſa quia* E *multiplicans* D *&* Z *facit* I *&* B, *erit* I *ad* B *vt* D *ad* Z. *Et igitur*

tur A *ad* I *vt* I *ad* E *erit. Medius itaque proportionalis erit* I *inter* A *&* B *planos, & quoniam* A *ad* B *(per decimam diffinitionem quinti) duplam habet rationem quam ad* I, *duplam habebit idem* A *ad* B *quam* G *ad* E, *quæ rationi* A *ad* I *similis fuit. Duorum itaque similium planorum, &c.*

Propositio decimanona.

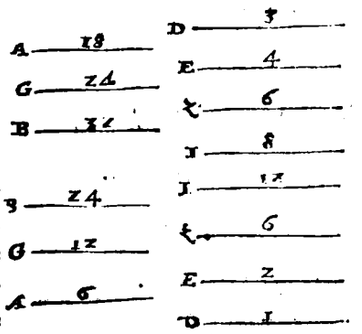
Duorum similium solidorum numerorum, bini medij proportionales sunt numeri, & solidus ad similem solidum, triplam rationem habet quam latus ad similis rationis latus.



Supponãtur duo solidi numeri A *&* B, *ipsius* A *latera sint* G D E, *ipsius* B *autem* Z I T: *Dico inter* A *&* B *binos cadere medios proportionales numeros, &* A *ad* B *triplam habere rationem quam* G *ad* Z *similis rationis latera, multiplicans* G *ipsum* D *faciat* K. *Ac* Z *per ipsum* I *faciat* L, *cum* G D E *et* Z I T *sint similis rationis latera, per* 22 *diffinitionem septimi, erunt similes plani ipsi* K *et* L. *Inter eos igitur medius cadit, qui sit (per præcedentem) factus ex* D *in* Z *ipse* M. *Similia verò latera* E *et* T *multiplicantia* M *faciunt* N *et* S, *cùm sit* G *ad* D *et* D *ad* E *vt* Z *ad* I *et* I *ad* T, *erit vicissim (per* 13 *septimi)* G *ad* Z *vt* D *ad* I, *et* E *ad* T. *Et cùm* D *multiplicans* G *et* Z *faciat* K *et* M, *erit* K *ad* M *vt* G *ad* Z, *per* 17 *septimi. Similiter quia* Z *multiplicans* D *et* I *facit* M *et* L *erit (per eandem)* M *ad* L *vt* D *ad* I, *sed* G *ad* Z *fuit vt* D *ad* I. *Igitur* K *ad* M *erit vt* M *ad* L, *proportionales in ratione laterum* G *ad* Z. *Præterea quoniam* E *multiplicans* K, *qui ex duobus reliquis lateribus* D *et* G) *facit* A, *per* 18 *diffinitionem septimi. Multiplicans verò idem* E *ipsum* M *fecit* N, *erit (per* 17 *septimi)* A *ad* N *vt* K *ad* M. *Similiter cum* T *multiplicans ipsum* L *(qui ex reliquis lateribus* Z I) *faciat* B, *multiplicans verò* M *fecerit* S, *per* 17 *septimi,* S *ad* B *vt* M *ad* L, *erit itaque* A *ad* N *&* S *ad* B *vt* K *ad* M *&* M *ad* L, *in ratione quidem laterum* G *ad* Z. *Et quia duo reliqua* E *&* T *latera multiplicantia* M *efficiunt* N *&* S, *erit* N *ad* S *vt* E *ad* T *latera. Inter* A *&* B *igitur duo ceciderunt* N *&* S *medij in ratione laterum* G *ad* Z, *scilicet* A *ad* N, N *ad* S *vt* S *ad* B. *Cùm autem* A *prima ad* B *quartam triplã habeat rationem quam ad secundam* N, *per* 10 *diffinitionem quinti, ipse* A *solidus ad* B *similem solidum, triplam habebit quam* G *latus ad* Z *vel* D *ad* I *aut* E *ad* T, *similis rationis latera. Duorum itaque similium solidorum, &c.*

Propositio vigesima.

Si duorum numerorum vnus medius fuerit proportionalis numerus, similes plani erunt ipsi duo numeri.



Sit inter duos numeros A *&* B *medius proportionalis numerus* G: *Dico* A *&* B *similes planos esse. Ostendamus prius in ratione pura numerorum siue non multiplici. Dentur (per* 35 *septimi) duo minimi in ratione ipsorum* A G B *qui sint* D E. *Hi metientur ipsos* A G *æqualiter, similiter & ipsos* G B *æqualiter, per* 21 *septimi. Quoties* D E *metiuntur ipsos* A G, *tot sint in* Z *vnitates, quoties verò metiuntur ipsos* G B, *tot sint in* I *vnitates. Quoniam* D *multiplicans* Z *facit* A, *& multiplicans* E *ipsum* I *facit* B, *plani sunt* A *&* B, *eorum verò latera* D Z *&* E I. *Cùm autem ex* D *primo &* I *quarto fiat* G, *ex secundo verò* E *&* tertio Z *fiat idem* G, *erit (per secundam partem* 19 *septimi)* D *ad* E *vt* Z *ad* I, *& (per* 13 *septimi) vicissim* D *ad* Z *vt* E *ad* I *proportionalia: igitur* D Z *&* E I *latera similes efficiunt planos* A *&* B, *per* 22 *diffinitionem septimi. Secundò in ratione multiplici, quæ est continui ad discretum, Sit inter duos numeros* B *&* A *medius proportionalis numerus* G: *Dico* A *&* B *similes esse planos. Quoniam ponitur ratio multiplex, minimus* A *metitur* B *extremum, quare (per* 7 *huius) metietur & proximum* G, *&* G *similiter ipsum* B: *nam sunt proportionales. Quoties* A *minor metitur* G, *toties* D *vnitas metiatur* E *numerum. Quoties igitur* D *metitur* E, *toties*

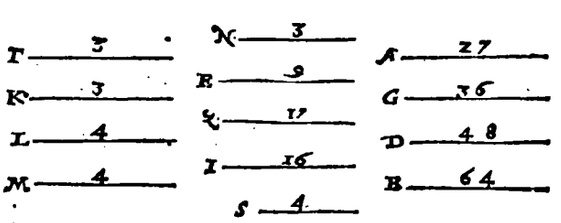
G metietur B, vicissim itaque D metietur A vt E ipsum G, ac insuper D metietur G vt E ipsum B, per 15 septimi. Quoties D E metiuntur A G, tot sint vnitates in Z. Quoties verò similiter metiuntur iidem D E ipsos G B, tot sint vnitates in I. Quoniam sub D & Z comprehenditur A, sub E & I verò continetur B, ipsi A & B plani sunt numeri, per 17 diffinitionem septimi. Eorum verò latera D Z & E I. Quia verò sub D & I extremis fit G & sub mediis E & Z fit idem G, quatuor magnitudines D ad E vt Z ad I sunt proportionales, per 16 sexti, & 19 septimi. Vicissim igitur, per quindecimam septimi, erunt D ad Z, vt E ad I latera proportionalia. Ipsi igitur A & B similes erunt plani, per 22 diffinitionem septimi. Si duorum itaque numerorum vnus medius fuerit, &c.

MONITVM.

Aliquas seorsum demõstrare voluimus propositiones, vt hac secũda parte segregantes rationis multiplicis naturam, ab aliarum rationũ natura, cùm ea minimos numeros in minimis eius partibus veluti reliquæ nõ suscipiat, sed loco minimorum semper vnitatem cum numerò recepit. Quod itaque per minimos in aliis rationibus ostenderunt Theon & Campanus, illud idem multiplici per vnitatem & numerum cõuenire rationi docuimus hoc loco, licet non semper quæ minimis numeris conueniunt, vnitati & numero conuenire recipiamus. Sed cùm rationes puras numerorum per primos & minimos ostendemus aliquid efficere, ididem cùm opus erit facto, rationes multiplices per vnitatem & numerum efficere demonstrabimus: nam ille sunt eius rationis minimè partes.

Propositio vigesimaprima.

Si duorum numerorum duo fuerint medij proportionales numeri, similes solidi erunt ipsi duo numeri.



Sint duorum A & B bini medij continuè proportionales G & D: Dico A & B similes esse solidos. Ponantur enim (per secundam huius) tres minimi in ipsorum A G D B ratione, sintq; E Z I. Ipsorum igitur extremi E & I sunt (per 20 huius) similes plani. Sint autem ipsius E latera T & K ipsius I verò latera M & L. Et cùm (per hypothesim) E Z I sint in ratione ipsorum A G D, erunt æqua ratione E ad I sicut A ad D, per 14 septimi. Insuper cùm E Z I sint minimi, ipsi metientur ipsos A G D æqualiter, per 21 septimi. Quoties autem E I metiuntur ipsos A D, tot sunt vnitates in N. Quoties verò metiuntur ipsi E I reliquos G B, eandem rationem habentes, tot sint vnitates in S. Cùm enim T & K sint latera ipsius E qui sumptus per vnitates numeri N faciat A, sequetur T K N latera esse ipsius A solidi, per decimamoctauam diffinitionem septimi. Similiter L & M faciunt I, qui per vnitates ipsius S sumptus facit B, quare L M S erunt ipsius B solidi latera, per eandem. Solidi itaque erunt A & B: Dico quòd similes erunt solidi, quoniam E multiplicans N & S ipsos fecit A & G. Erit (per 17 septimi) N ad S sicut A ad G. Sed sicut A ad G sic (per hypothesim) E ad Z, & Z ad I. Quia verò E ad I duplam habet rationem quam ad Z, per 10 diffinitionem quinti, & duplam quam T ad L vel K ad M latera, per 18 huius. Eandem igitur habent T ad L & K ad M rationem quam E ad Z vel Z ad I. Et proinde quam A ad G vel N ad S, quæ fuerunt eædem ostensæ. Sicut igitur A ad G sic fuit N ad S, sic T ad L, sicq; K ad M, latera scilicet ipsius A solidi, ad latera ipsius B solidi proportionalia, qui igitur (per 22 diffinitionem septimi) similes erunt solidi. Si itaque duorum numerorum duo fuerint, &c.

MONITVM.

Hanc in multiplici ratione noluimus ostendere, prolixitatem vitantes, sufficit enim præcedentem ac alias quasdam ostendisse. Cùm enim his demonstrandis exquiruntur minimi datæ rationis numeri, vt eos eandem rationem habentes alios metiri ostendamus. Scimus perspicuè eos quorum vnus est vnitas, verè propositæ rationis minimas numerorum partes obtinere, & proinde metiri reliquos necessario maiores (per 15 septimi) cùm sint multiplices, vt minimi reliquarum rationum, maiores metiuntur, per 21 septimi. Quia verò his demonstrationibus, numerorum generalem naturam docentibus, per minimorum numerorum methodum, facilis fit notitia an his conueniant rationes multiplices, minimos numeros non habentes, an non. Demonstrationem rationum non multiplicium

cium posthac sequemur tantùm. Quòd si aliquid occurrat obscurius, monito appositò exponemus illico.

Propositio vigesimasecunda.

Si tres numeri continuè proportionales fuerint, primúsque fuerit quadratus, & tertius quadratus erit.

Sint tres continuè proportionales numeri A B G, *quorum cùm extremorum unus sit medius, ipsi extremi similes plani erunt, per* 20 *huius. Quare si primus fuerit quadratus, & tertius (sibi similis planus) quadratus erit. Si itaque tres numeri, &c.*

A 4
B 6
G 9

Propositio vigesimatertia.

Si quatuor numeri continuè proportionales fuerint, primúsque cubus fuerit, & quartus cubus erit.

Haud secus hanc ostendet 21 *huius. Cùm autem inter* A *&* D *duo medij proportionales constituantur, sequetur* A *&* D *similes esse solidos. Atqui* A *cubus est primus, & quartus itaque* D *sibi similis solidus cubus erit. Si igitur quatuor numeri continuè proportionales, &c.*

A 8
B 12
G 18
D 27

Propositio vigesimaquarta.

Si duo numeri rationem habuerint, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, Primus autem quadratus fuerit, & secundus quadratus erit.

Duo A *&* B *numeri rationem habeant, quam quadrati* G *&* D. *Sit autem* A *quadratus: Dico &* B *quadratum esse. Quoniam duorum* G *&* D *unus est medius proportionalis numerus per* 11 *huius. Ipsorum* A *&* B *unus erit medius, per octauam huius, eandem enim habent rationem. Trium igitur primus* A *est quadratus, & tertius* B *quadratus erit, per* 22 *huius. Si itaque duo numeri rationem, &c.*

A 4 — G 16
6 — 24
B 9 — D 36

Propositio vigesimaquinta.

Si duo numeri adinuicem rationem habuerint quam cubus numerus ad cubum numerum, Primus autem cubus fuerit, & secundus cubus erit.

Duo numeri A *&* B *rationem habeant quam cubus* G *ad cubum* D. *Sit autem* A *cubus: Dico &* B *cubum esse. Quia duorum* G *&* D *bini sunt medij proportionales numeri, cùm sint cubi, per* 12 *huius. Ipsorum* A *&* B *(eandem rationem habentium) totidem erunt medij, per octauam huius. Sed quatuor continuè proportionalium primus* A *est cubus, & quartus* B *cubus erit, per* 23 *huius. Si igitur duo numeri rationem adinuicem, &c.*

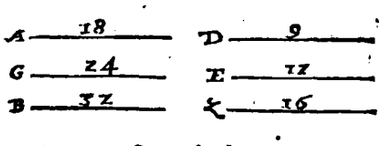
A 8 — G 64
12 — 96
18 — 144
B 27 — D 216

Corollarium.

Inter quadratum & non quadratum, non cadit ratio quadratorum. *Nam si primus quadratus sit & secundus quadratus esset, contra hypothesim. Similiter inter cubum & non cubum, non cadit ratio cuborum: si enim primus cubus esset & secundus (contra suppositum) cubus esset, quod fieri non potest.*

Propoſitio vigeſimaſexta.

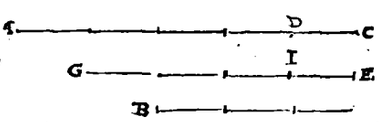
Similes plani numeri, adinuicem rationem babent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.



Sint ſimiles plani A *&* B *numeri: Dico* A *ad* B *rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Cùm autem* A *&* B *ſint ſimiles plani, inter eos cadet vnus medius qui ſit* G, *per* 18 *huius. Deinde ponantur in ratione ipſorum* A G B *tres minimi* D E Z *quorum extremi quadrati erunt, per corollarium ſecundæ huius. Et quoniam (per* 14 *ſeptimi) eſt* A *ad* B *æqua ratione vt* D *ad* Z. *Sed* D *&* Z *ſunt quadrati: Igitur* A *ad* B *rationem habet quam quadratus numerus* D *ad quadratum* Z. *Similes igitur plani numeri adinuicem, &c.*

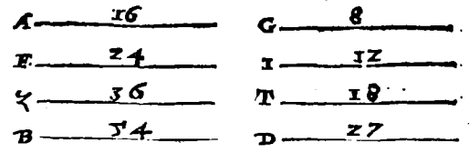
Corollarium.

Hinc ſequitur quotlibet non ſimiles planos dari numeros. *Habentes enim rationem ſuperparticularem numeri, diſſimiles ſunt plani. Si autem ſimiles eſſent plani, inter eos caderet medius, & rationem haberent quadratorum numerorum, per* 18 *&* 26 *huius, cuius oppoſitum patet per coroll.* 8 *huius. Superparticulares igitur non ſimiles ſunt plani, qui quidem ſunt numero infiniti (nempe ab vnitate & quauis parte dicti) Præterea habentes rationem ſuperbipartientem, non ſimiles ſunt plani, cùm minimi eius rationis numeri ſeſe binario excedant, inter quos nec cadit medius proportionalis. Si enim caderet exceſſus proportionalium, eſſent æquales, quod obſtaret* 19 *quinti, quod nec fieri poteſt, vt exemplo* 5 *ad* 3 *non recipit medium. Si enim reciperet is eſſet* 4 *cùm nullus alius inter eos cadat. Si enim fieri poſſit, eſto* A C *ad* G E *vt* G E *ad* B, *ab ipſo* A *æqualis ipſi* G E *ſecetur* A D, *ab ipſo* G E *verò ipſi* B *æqualis* G I. *Eſt igitur* A C *totum ad* G E *totum, vt* A D *ablatum ad* G I *ablatum, cùm* A D *&* G I *ipſis* G E *&* B *ſint æquales. Reliquũ igitur* D C, *vnitas ad reliquum* I E *vnitatem, erit ſicut totum* A C *ad totum* G E, *per* 19 *quinti, quod fieri non poteſt, cùm vnitates ſint æquales. Quia igitur inter minimos huius rationis nullus cadit, nec inter maiores cadet, per* 8 *huius. Inſuper duo quilibet primi numeri diſſimiles ſunt plani, cùm non habeant latera proportionalia iuxta* 22 *diffinitionem ſeptimi. Nam eorum latera ſunt vnitas & totus numerus. Sequeretur itaque contra octauam quinti eandem vnitatem ad duos inæquales numeros eandem habere rationem, quod fieri non poteſt.*



Propoſitio vigeſimaſeptima.

Similes ſolidi numeri, adinuicem rationem habent quam cubus ad cubum numerum.



Sint A *&* B *ſimiles ſolidi, dico eos habere rationem quam cubus numerus ad cubum numerum. Quoniam* A B *ſunt ſimiles ſolidi, inter eos cadant duo medij* E *&* Z, *per* 19 *huius. Dẽtur autem totidem minimi in ipſorum* A E Z B *ratione* G I T D, *per ſecũdam huius, quorum extremi* G D *cubi erunt, per corollarium ſecundæ huius. Cùm autem ſint omnes proportionales, æqua ratione erit* A *ad* B *vt* G *ad* D, *per* 14 *ſeptimi, ipſi itaque* A *ad* B *rationem habebunt cubi* G *ad cubum* D. *Similes igitur ſolidi numeri, &c.*

Corollarium primum.

Si duo numeri rationem habuerint quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani erunt ipſi duo numeri. Si vero rationem habuerint quam cubus ad cubum numerum, ſimiles ſolidi erunt.

Habeant

Habeant prius A *ad* B *numeri rationem quam habent* G *ad* D *quadrati numeri: Dico* A *&* B *ſimiles eſſe planos, cùm enim inter* G *&* D *quadratos vnus cadat medius, per* 11 *huius, inter* A *&* B *eandem rationem habentes totidem (per* 8 *huius) cadent. Ipſi igitur* A *&* B *ſimiles ſunt plani, per vigeſimam huius.*

A 18 G 16
B 72 D 64

Ad ſecundum.

Si A *ad* B *rationẽ habeant, quam* A *ad* D *cubi* G, *idẽ oſtẽdetur de ſolidis, cùm enim inter* G *&* D *cubos duo cadãt medij, per* 12 *huius inter* A *&* B *eandem rationem habẽtes, totidem cadẽt, per* 8 *huius, ipſi igitur* A *&* B *(per* 21 *huius) ſimiles erunt ſolidi. Si itaque duo numeri rationem habuerint, &c.*

A 16 G 8
B 54 D 27

Corollarium ſecundum.

Si aliquis numerus quadratum multiplicans, quadratum non fecerit, ipſe quadratus nõ erit. *Nam ſi quadratus eſſet, ipſi ſimiles eſſent plani qui medium haberent, per* 18 *huius, & ab ipſo medio productus æquus eſſet ei qui ſub extremis quadratis, per vigeſimam ſeptimi. Ipſe igitur ab extremis productus quadratus eſſet, æquus ei qui à medio, ſed quadratus non eſt is productus. Nec igitur propoſitus quadratum multiplicans quadratus erit.*

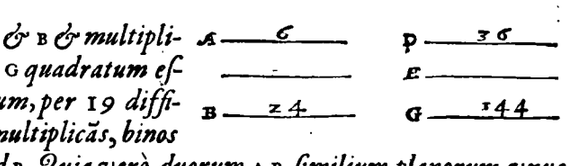
MONITVM.

Hæc corollaria addidimus in obſequium decimi, ne circa hæc demonſtranda hæreamus, cùm de rationibus quadratorum numerorum agendum erit, vt latera eorum ſint longitudine commenſurabilia abſque demonſtrandi prolixitate.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO-num reſtitutarum Liber nonus.

Propoſitio prima.

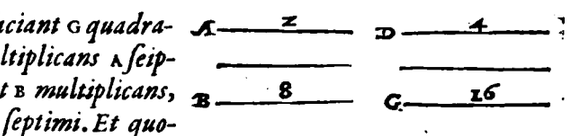
SI duo numeri ſimiles plani, ſe inuicem multiplicantes, aliquem fecerint, factus ex eis quadratus erit.



Sint duo numeri ſimiles plani A *&* B *& multiplicans* A *planum* B *faciat* G, *Dico* G *quadratum eſſe. Multiplicans* A *ſeipſum faciat* D *quadratum, per* 19 *diffinitionem ſeptimi, & quoniam* A *duos* A *&* B *multiplicãs, binos fecit* D G, *erit (per* 17 *ſeptimi)* D *ad* G *vt* A *ad* B. *Quia verò duorum* A B *ſimilium planorum vnus eſt medius proportionalis, per* 18 *octaui, & inter* D *&* G *eandem rationem habentes, vnus erit medius, per octauam octaui, qui ſit* E: *ſed trium* D E G *proportionalium primus* D *quadratus eſt, & tertius* G *quadratus erit, per* 22 *octaui. Si itaque duo numeri ſimiles plani, &c.*

Propoſitio ſecunda.

Si duo numeri ſe inuicem multiplicantes quadratum fecerint, ipſi ſimiles plani erunt.



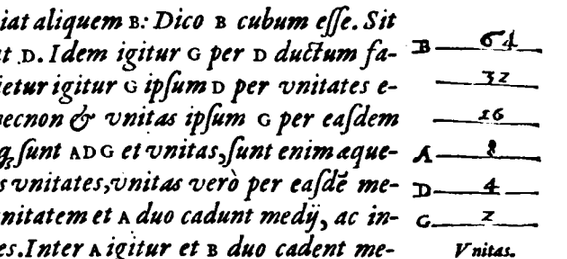
Bini numeri A *&* B *ſeſe multiplicantes faciant* G *quadratum: Dico ipſos* A *&* B *ſimiles eſſe planos, Multiplicans* A *ſeipſum faciet* D *quadratum: cùm autẽ* A *duos* A *et* B *multiplicans, binos faciat* D G, *erit* D *ad* G *vt* A *ad* B, *per* 17 *ſeptimi. Et quoniam duorum quadratorum* D G *vnus eſt medius, per* 11 *octaui, et inter* A *et* B *eãdem rationem habentes, vnus erit medius, per octauam octaui. Sed ſi duorum* A *et* B *vnus fuerit medius, ipſi* A *et* B *ſimiles plani erũt, per* 20 *octaui. Si itaque duo numeri ſe inuicem multiplicantes, &c.*

Corollarium.

Hinc fit, duos quadratos ſemper quadratum producere. *Sunt enim ſimiles plani (per primã huius.* Quadratum vero cum non quadrato, non quadratum facere. *Si enim facerent ſimiles eſſent plani, per hanc, ſed non ſunt. Non quadratum igitur faciunt.* Si vero quadratus cum aliquo quadratum fecerit, aliquis ille quadratus erit. *Nam cum quadrato ipſum multiplicante ſimilis planus eſt, per hanc, ille aliquis.* Si autem quadratus cum aliquo quadratum non fecerit, nec aliquis ille quadratus erit. *Si enim quadratus eſſet, cum quadrato quadratum efficeret, per primam partem huius corollarij.*

Propoſitio tertia.

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit, factus cubus erit.

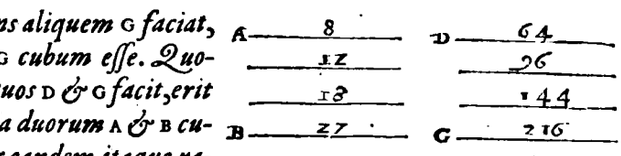


Numerus A *cubus ſeipſum multiplicans faciat aliquem* B: *Dico* B *cubum eſſe. Sit ipſius* A *cubi latus* G, *quod per ſe ductum faciat* D. *Idem igitur* G *per* D *ductum faciet ipſum* A, *per* 20 *diffinitionem ſeptimi, metietur igitur* G *ipſum* D *per vnitates eiuſdem* G *ac per eaſdem* D *metietur cubum* A, *necnon & vnitas ipſum* G *per eaſdem ipſius* G *vnitates metietur. Proportionales itaq; ſunt* A D G *et vnitas, ſunt enim æque multiplices, ſimiliter cùm* A *metiatur* B *per ſuas vnitates, vnitas verò per eaſdẽ metiatur* A, *erit vnitas ad* A *vt* A *ad* B. *Sed inter vnitatem et* A *duo cadunt medij, ac inter æquemultiplices eandem rationem habentes. Inter* A *igitur et* B *duo cadent medij, per* 8 *octaui. Quatuor igitur proportionalium numerorum primus* A *cubus eſt, per hypotheſim, et quartus* B *(per* 23 *octaui) cubus erit. Si itaque cubus numerus ſeipſum multiplicans aliquem, &c.*

Prop

Propoſitio quarta.

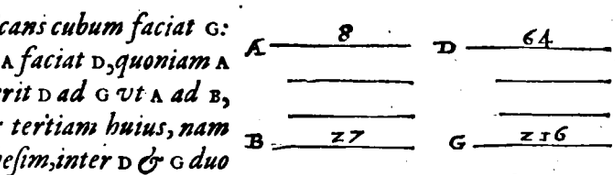
Si cubus numerus cubum numerum multiplicans aliquem fecerit, factus cubus erit.



Cubus numerus A *cubum* B *multiplicans aliquem* G *faciat, per ſeipſum verò idem* A *faciat* D, *Dico* G *cubum eſſe. Quoniam autẽ* A *duos* A *&* B *multiplicans aliquos* D *&* G *facit, erit (per* 17 *ſeptimi)* D *ad* G *vt* A *ad* B, *ſed quia duorum* A *&* B *cuborum duo ſunt medij, per* 12 *octaui. Inter eandem itaque rationem habentes* D *&* G *duo cadent medij, per* 8 *octaui. Sed* D *cubus eſt, per præcedẽtem: nam ex* A *cubo factus. Si igitur quatuor proportionalium primus* D *cubus fuerit, & quartus* G *cubus erit, per* 23 *octaui. Si itaque cubus numerus, &c.*

Propoſitio quinta.

Si cubus numerus numerũ aliquem multiplicans cubum fecerit, & multiplicatus cubus erit.



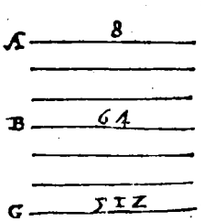
Cubus numerus A *aliquem* B *multiplicans cubum faciat* G: *Dico* B *cubum eſſe. Multiplicãs ſeipſum* A *faciat* D, *quoniam* A *binos* A B *multiplicans duos fecit* D *&* G, *erit* D *ad* G *vt* A *ad* B, *per* 17 *ſeptimi: cùm autem* D *ſit cubus, per tertiam huius, nam ex* A *cubo factus,* G *verò cubus, per hypotheſim, inter* D *&* G *duo cadent medij, per* 12 *huius. Et igitur inter* A *&* B *eandem rationem habentes, totidem cadent, per* 8 *octaui, atqui quatuor proportionalium* A *primus cubus eſt, per hypotheſim, & quartus* B *cubus erit per* 23 *octaui. Si itaque cubus numerus numerum aliquem multiplicans cubum fecerit, &c.*

Corollarium.

Hinc ſequitur, ſi cubus non cubum multiplicet, ipſe non cubum faciet. *Nam ſi cubum faceret, & multiplicatus cubus eſſet, contra hypotheſim, quod incõueniret, per hanc: ſupponitur enim non cubus. Si verò cubus aliquem multiplicans non cubum fecerit, nec aliquis ille cubus erit. Nam ſi ille aliquis cubus eſſet, factus ſimiliter eſſet cubus, per quartam huius, contra hypotheſim, quod fieri non poteſt.*

Propoſitio ſexta.

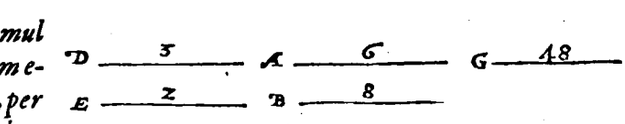
Si numerus ſeipſum multiplicans cubum fecerit, & ipſe cubus erit.



Numerus A *ſeipſum multiplicans faciat cubum* B: *Dico &* A *cubũ eſſe, multiplicans* A *cubum* B *faciat* G: *cubus erit ipſe* G, *per* 20 *diffinitionem ſeptimi, ex tripla ipſius* A *multiplicatione factus. Quoniam autem* A *duos* A *&* B *multiplicans ipſos* B *&* G *fecit, erit* G *ad* B, *vt* B *ad* A, *per* 17 *ſeptimi. Sed ſi bini* B *ad* A *rationem habeant quã cubus ad* G *cubum* B, *primus verò* B *cubus fuerit, & ſecundus* A *cubus erit, per* 25 *octaui. Si igitur numerus, &c.*

Propoſitio ſeptima.

Si compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, fecerit aliquẽ, factus ſolidus erit.



Sit cõpoſitus A *numerus qui ipſum* B *multiplicans faciat* G: *Dico* G *ſolidum eſſe: cùm enim* A *ſit cõpoſitus, metietur eum aliquis, per* 14 *diffinitionẽ ſeptimi, ſit ille* D, *qui eundem* A *per vnitates numeri* E *metiatur: quoniam duo numeri* D *&* E *ſeſe multiplicantes faciunt* A, *qui rurſus ipſum* B *multiplicans reliquum* G *fecit: ipſe igitur* G *ex tribus ſeſe multiplicãtibus* D E *&* B, *conſurgens (per* 18 *diffinitionem ſeptimi) ſolidus erit, latera verò eius ipſi* D E B *numeri. Si itaque compoſitus numerus, &c.*

Propoſitio octaua.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, Tertius ab vnitate quadratus erit, & vnum relinquentes omnes. Quartus autem cubus & binis relictis omnes. Septimus verò cubus ſimul & quadratus, & quinque relictis omnes.

Sint ab vnitate continuè proportionales A B G D E Z. *Dico tertium ab vnitate, ſcilicet* B *& vno relicto omnes, ſcilicet* D *&* Z, *quadratos eſſe: quartum verò* G *& binis relictis omnes, ſcilicet* Z, *&c. cubos eſſe. Septimum autẽ* Z *& quotquot fuerint quinque relictis omnes, ſimul cubos & quadratos eſſe: quoniam vnitas metitur* A *per ſui ipſius vnitates. Metietur quilibet ſequẽtem per eaſdem ipſius* A *vnitates, cùm ſint continuè proportionales. Igitur* A *ſeipſum multiplicans facit* B *quadratnm, per* 19 *diffinitionẽ ſeptimi: ſed quia trium* B G D *primus* B *quadratus eſt, & tertius* D *quadratus erit, per* 22 *octaui. Similiter ipſorum* D E Z *& quotlibet ſequentium,* D *exiſtente quadrato, & tertius* Z *quadratus erit, per eandem. Inſuper cùm* A *multiplicans ſe faciat* B, *multiplicans verò* B *faciat* G, *ipſe* G *cubus erit, per* 20 *diffinitiouem ſeptimi: ſiquidem quatuor proportionalium primus* G *cubus fuerit, & quartus* Z *cubus erit, per vigeſimam tertiam octaui, ſicque infinitè quotcunque poſtponantur ipſi* Z *proportionales continui. Sed & quadratus oſtenſus eſt idem* Z *& hoc ordine omnes, cùm tertius & quartus ſemper ſeptimum reſtituant. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c.*

Vnitas.
A — 1
B — 3
G — 9
D — 27
E — 81
Z — 243
H — 729

Propoſitio nona.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem quadratus fuerit, & reliqui omnes quadrati erunt, & ſi qui poſt vnitatem cubus fuerit, & reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales A B G D E Z. *ad primum, ſit qui poſt vnitatem quadratus, ſcilicet* A: *dico reliquos omnes quadratos eſſe. Ad ſecundum autem, ſi ipſe* A *fuerit cubus, dico omnes cubos eſſe: primò cùm vnitas multiplicet* A *per ſui ipſius vnitates, &* A *per eaſdem multiplicet* B, *quadratus erit* B, *per* 19 *diffinitionem ſeptimi, &* A *quadratus ex hypotheſi: ſed ſicut* A *ad* B, *ſic* B *ad* G, *&* G *ad* D, *&c. Si duo igitur* B *&* G *rationem habuerint quadratorum* A *ad* B, *primus verò* B *ſit quadratus, & ſecundus* G *quadratus erit, per vigeſimamquartam octaui, & ſic* G *&* D, *&c. omnes quadrati oſtendentur: ſi verò* A *poſt vnitatem cubus fuerit: quoniam ſimiliter vnitas metitur* A *&* A *ipſum* B *&* B *ſequentem* G, *& ſinguli ſuccedẽtes per vnitates ipſius* A, *ſed* A *cubus (ex hypotheſi) ſeipſum multiplicans* B *facit: igitur* B *(per tertiam huius) cubus erit. Sicut autẽ vnitas ad* A, *ſic* A *ad* B, *ſic* B *ad* G, *&c. quotcũque ſint in ratione* A *ad* B *cuborum, Si primus* B *cubus fuerit, & ſecundus* G *cubus erit, per* 25 *octaui: ſi verò* G *ſit, erit &* D *& reliqui omnes. Si itaque ab vnitate quotcunque numeri continuè, &c.*

Vnitas.
A — 1
B — 2
G — 4
D — 8
E — 16
Z — 32
H — 64

Propoſitio decima.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem quadratus non fuerit, nec alius vllus quadratus erit, quam tertius ab vnitate, & vnum relinquentes omnes, & ſi qui poſt vnitatem cubus non fuerit, nec alius vllus cubus erit, quam quartus ab vnitate ac duos relinquentes omnes.

Sint

Sint ab vnitate continuè proportionales quotcunque A B G D E Z *numeri. Qui verò post vnitatem scilicet* A *quadratus non sit: Dico nullum reliquorum esse quadratum, quam tertium ab vnitate & reliquos vno intermisso scilicet* B D Z, *&c. Si verò* A *cubus non sit, nec alium aliquem cubum esse, quam quartum ab vnitate ac binis relictis omnes scilicet* G Z, *&c. Quoniam proportionales sunt, erunt quadrati* B D Z, *&c. per octauam huius. Si enim aliquis alius posset esse quadratus, sit* G, *erit* G *ad* B *vt* B *ad* A *&* A *ad vnitatem, per corollarium quartæ quinti. Igitur* B *ad* A *rationem habent quadratorum* G *ad* B. *Si itaque primus* B *sit quadratus, secundus* A *(per 24 octaui) quadratus erit, contra hypothesim, quod fieri non potest, æquè probatur hæc (per 22 octaui) si* G *primus sit quadratus, &* A *tertius erit quadratus, supponitur autem non quadratus, ergo absurdum. Ad secundum autem existente* A *non cubo. Si fieri posit detur aliquis alius horum cubus, præter* G *quartum &* Z, *&c. sit q.* D. *Quoniam est* D *ad* G *vt* G *ad* B, *&* B *ad* A, *si primus* D *sit cubus. Quartus* A *cubus erit, per 23 octaui contra suppositum, positus est enim* A *non cubus, quod fieri nequit. Similiter per 25 octaui patet vt in quadrato, si itaque ab vnitate quotcunque continuè, &c.*

	Vnitas
A	3
B	9
G	27
D	81
E	243
Z	729

Propositio vndecima.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, minor metitur maiorem per aliquem præexistentem in proportionalibus numeris.

Sint ab vnitate quotlibet continuè proportionales A B G D *numeri: Dico minorem* A *metiri maiorem scilicet* B G *vel* D, *per aliquem ipsorum* A B *vel* G *in proportione existentium. Quia sunt proportionales quoties vnitas metitur* A *toties* A *metitur* B *&* B *ipsum* G, *&c. Et vicissim per 15 septimi, Quoties vnitas metitur* B *toties* A *metitur* G. *Sed vnitas metitur* B *per vnitates ipsius* B, *& igitur* A *metitur* G, *per easdem ipsius* B *vnitates. Præterea erit æqua ratione per 14 septimi, eadem vnitas ad* G *vt* A *ad* D. *Sed vnitas metitur* G *per ipsum* G. *Igitur* A *metietur* D *per eundem* G. *Et similiter in quotcunque numeris, per eandem decimamquartam septimi idem patebit. Si igitur ab vnitate, &c.*

	Vnitas
A	2
B	4
G	8
D	16

Propositio duodecima.

Si ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, Quot primi numeri vltimum metientur, tot & vnitati proximum metientur.

Sint ab vnitate quotlibet continuè proportionales numeri, A B G D. *Metiatur verò aliquis primus numerus qui sit* E *vltimum* D: *Dico eundem* E *metiri* A *vnitati proximum. Quod si* E *non metiatur* A, *erunt adinuicem primi, per 31 septimi. Quoniam* A B G D *sunt* A *vnitate proportionales,* A *seipsum multiplicans ipsum* B *facit. Itaque* B *ad* E *primus erit, per 27 septimi. Quia verò* A *multiplicans* B *fecit* G, *&* G *ad eundem* E, *primus erit, per 26 eiusdem. Similiter infinitè* A *ipsum* G *multiplicans efficit* D. *Quare &* D *ad* E *primus erit, per eandem, non igitur metitur* E *ipsum* D, *vt positum fuit, quod inconuenit. Metitur ergo* E *ipsum* A *vnitati proximum. Si igitur ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales, &c.*

	Vnitas.	
A	4	5
B	16	9
G	64	27
D	256	81
E	2	3

Propositio decimatertia.

Si ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, Qui verò post vnitatem primus fuerit, Maximum nullus alius metietur præter præexistentes in proportionalibus numeris.

Sint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales A B G D, *sit autem qui post vnitatem scilicet* A *primus: Dico nullum numerum metiri* D *maximum, præter ipsos* A B G D *in proportione præexistentes, si enim alius ipsum* D *metiri credatur, is erit primus aut compositus, si fieri possit, esto* E. *Qui primus esse non potest, siquidem* E *primus existens metiretur* D. *Is metiretur* A *primum ac vnitati proximum per* 12 *huius, quod fieri non potest. Non igitur potest esse* E *primus. Sed compositus esto* E, *tum metietur eum aliquis primus, per* 33 *septimi. Quiquidem non potest esse alius à numero* A. *Nam cum* E *metiatur* D, *quilibet primus metiens* E *metiretur &* D, *per primam sententiam septimi, metiens verò* D *maximum, metiretur &* A *vnitati proximum (per* 12 *huius) & primum, quod fieri non potest. Solus igitur* A *primorum metiri poterit* E *metientem maximum* D. *Quod si esse possit metiatur* A *ipsum* E, *per vnitates numeri* Z. *Igitur* A *binos* Z *&* G *multiplicãs, binos* E *&* D *fecit, erit itaq;* E *ad* D *vt* Z *ad* G, *per* 17 *septimi. Quia igitur* E *metitur* D *&* Z *ipsum* G *metietur. Similiter vt ostendimus in* E *docebimus non esse* Z *primũ & reliqua. Nam si primus esset,* Z *metiens* G *metiretur & ipsum* A *(per* 12 *huius) primum, quod fieri non potest. Quare compositus erit* Z, *quem (per* 33 *septimi) metietur aliquis primus. Is necessario erit* A *solus. Nam alius primus metiens* Z *metientem* G *metiretur, & eundem* G, *per primam sententiam septimi, & proinde ipsum* A *primum, quod fieri non potest, solus igitur* A *primus numerum* Z *metitur. Esto per* 1. *Ideo* A *binos* I *&* B *multiplicans efficit binos* Z *&* G. *Erit itaque (ex* 17 *septimi)* Z *ad* G *vt* I *ad* B, *sed metitur* Z *ipsum* G. *Metietur itaque* I *ipsum* B. *Quòd si rursus primus sit* I, *metiens* B *metietur &* A *(per* 12 *huius) primum, quod est absurdum. Est itaque* I *compositus. Quem solus* A *primorum metietur, vt iam antea in* E *&* Z *ostendimus. Metiatur itaque* A *ipsum* I *per* T. *Sequetur* A *multiplicante binos* T *& seipsum binos* I *&* B *producere. Quare erit* I *ad* B *vt* T *ad* A, *per* 17 *septimi. Sed metitur* I *ipsum* B. *Metietur itaque* T *ipsum* A *primum, est igitur eidem* A *æqualis* T. *Sed* A *est medius proportionalis inter* T *&* I, *per* 20 *septimi. Cùm sub extremis* I T *productus* B *æquetur ei qui à medio* A *idem* B *producitur. Quod est extra potentiam. Nullus itaque maximum* D *metietur præter numeros* A B G *in proportione præexistentes. Quorum quisque minor maiorem metitur, per* 11 *huius. Sunt enim in ratione multiplici ab vnitate proportionales. Si igitur ab vnitate quotlibet continuè, &c.*

Vnitas.
A — 3 — T
B — 9 — I
G — 27 — Z
D — 81 — E

Propositio decimaquarta.

Si minimum numerum primi numeri mensi fuerint, nullus alius primus numerus ipsum metietur, præter eos qui in principio metiuntur.

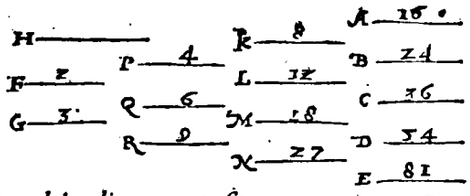
Esto minimus à quem metiantur quotlibet primi numeri B G D: *Dico nullum alium primum metiri numerum* A *præter ipsos* B G D. *Quòd si alius primus eum metiri credatur, sit ille* E, *qui numerum* A *per* Z *metiatur. Quoniam duo numeri* E *&* Z *faciunt* A, *quem metiuntur aliqui primi* B G D *sequetur (ex* 32 *septimi) ipsos* B G D *vnum ipsorum* E *vel* Z *metiri. Atqui ipsum* E *non metiuntur, cùm sit primus, ex hypothesi. Ipsi itaque* B G D *ipsum* Z *metientur, minorem quidem numero* A *quem* Z *per* E *mensus est. Prior igitur* A *positus non erit minimus ab ipsis* B G D *mensus (contra hypothesim) quod esset inconueniens. Nullus igitur alius præter ipsos* B G D *numerum* A *metietur, si itaque minimum numerum, &c.*

B — 2 — A — 30
G — 3 — E
D — 5 — Z

Propositio decimaquinta.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales minimi eandem eis habentium rationem: numerus aliquem eorum metiens, erit non primus alteri duorum minimorum huius rationis.

Sint



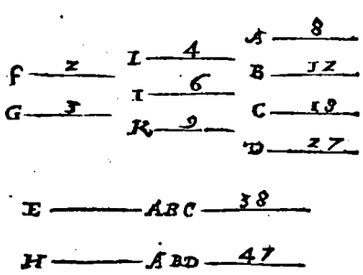
Sint quotcunque numeri A B C D E *continuè proportionales minimi eandem rationem habentium eis, quorum alterum (qui sit* C*) metiatur aliquis numerus* H, *sint ģ* F *&* G *duo minimi huius rationis: Dico* H *esse non primum ad* F *vel* G. *Ponantur (per 2 octaui) tres minimi huius rationis* A *ad* B, *qui sint* P Q R. *Postmodum verò quatuor* K L M N *per eandem, & sic vsque ad multitudinem propositorum* A B C D E. *Constat (ex demonstratione secunda octaui)* F *per* P Q *&* R *facere* K L M, *per* K L M N *verò eundem* F *facere* A B C D. *Cùm enim* H *metiatur* C. *Ipse* H *ad vnum eorum* F *vel* M *non erit primus, per corollarium 32 septimi. Quòd si fit* F *optatum consequimur, siquidem sit* M *ad quem* H *non sit primus, & ad vnum ipsorum* F *vel* R *erit non primus, per idem coroll. Quòd si rursus sit* F *erit vnus eorum* F *vel* G, *optatus, si autem non sed sit* R *ad quem* H *non sit primus, & ad ipsum* G *(eundem* R *facientem per 2 octaui) erit non primus idem* H, *per idē coroll. sed* G *est vnus eorum* F *vel* G *qui in principio minimorum huius rationis. Si igitur fuerint quotlibet numeri, &c.*

MONITVM.

Licet hanc decimā quintam in vulgato græco exemplari non reperiamus, tamen Campanum eam ab Euclide traditam scripsisse legimus, quod duabus de causis verum fuisse arbitramur, vt scilicet decimam sextam sequentem (quam Theon per numeros non demonstrauit, sed per 3 & 4 secundi) numeris demonstraret. Quamuis autem solos numeros qui geometricis quantitatibus conueniant, exponat Euclides, & ideo (ad extrema fugienti) sufficiat eos numeros per continuorum præcepta prioribus sex libris exposita demonstrare. Non tamen ea familiaritate numeros per continuorum notitiam, qua per eorundem numerorum intelligentiam consequi videbimur: altera quod huius 15 *auxilio proximam decimam sextam ampliorem ac vberiorem tradimus, ad quotcunque proportionales, quam Theon ad tres eam extendi tantùm docuit, ob assumptas linearum secundi libri sectiones, quare existimantes Euclidem geometriam potius fecundam quàm sterilem tradendam optasse. Non dubitamus quin hæc Euclidis fuerit, & insuper plures aliæ quæ vitio & temporis iniuria deperditæ iacent.*

Propositio decimasexta.

Si quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, minimi eandem eis habentium rationem, quilibet eorum ad compositum ex reliquis primus erit.



Sint quotcunque proportionales numeri minimi suæ rationis A B C D: *Dico quemlibet eorum (qui primò sit* D*) ad compositum ex reliquis* A B C *primum esse, quod si non sit, metiatur ipsum* D *& reliquum compositum* A B C *aliquis numerus* E. *Dentur insuper duo minimi rationis* A B C D *(per 35 septimi) hi* F *&* G. *Quoniam autem* E *metitur vnum eorum* A B C D, *erit idem* E *ad vnum ipsorum* F *vel* G *non primus, per 15 huius. Aliquis igitur numerus metietur ipsum* E *& vnum eorum* F *vel* G *qui sit* H. *Quoniam enim* H *metitur* E *metietur &* D *quem metitur idem* E, *per primam sententiam septimi. Præterea cùm* H *metiatur (per hypothesim) vnum ipsorum* F *vel* G, *idem* H *metietur omnes medios inter* A *&* D, *per eandem primam sententiam. Nam vterque ipsorum* F *vel* G, *omnes medios per proximos ipsis (vt* I, I K*) efficit, per secundam octaui. Rursus cum* H *metiatur* E, *metientem totum* A B C, *idem* H *metietur totum* A B C, *sed metitur ablatum* B C *(medios) metietur ergo & reliquum* A, *per 2 sentent. septimi: ipsum* H *itaque sequetur metiri extremos* D *&* A *qui primi sunt (per tertiam octaui) quod esset absurdum. Quare primus erit* D, *ad compositum* A B C *ex reliquis. Secundò dico idem esse in singulis, puta* C *primum esse ad compositum* A B D *quod si non sit, sumatur vt prius* E *metiens* C *ac ipsum* A B D, *qui quidem* E *erit non primus ad vnum ipsorum* F *vel* G, *per 15 huius, metiatur ergo eos* H. *Quoniam* H *metitur* E, *metietur & totum* A B C D *quem* E *metitur, & quoniam metitur* H *vnum eorum* F *vel* G, *metietur vnum extremorum* A *vel* D, *qui ex ipsis* F *vel* G *fiunt, per secundam octaui, si ducantur in medios* L *vel* K. *Et insuper idem* H *metietur medios*

B C, per primam ſententiam ſeptimi, cùm metiatur F vel G per hypotheſim eos metientes, per 2 octaui, ſed totum A B C D metitur idem H (vt oſtendimus) eò quòd metiatur E. Metietur ergo & reliquum, ſcilicet compoſitum, ex A & D extremis, per ſecundam ſententiam ſeptimi, atqui metitur vnum eorum A vel D, nam metitur vnum eorum F vel G ipſos A & D efficientium. Metietur ergo idē H vnum eorum A vel D & reliquum, per eandem ſecundam ſententiam, qui quidem A & D ſunt (per tertiam octaui) primi, quod eſt inconueniens, ſimiliter in quibuſlibet ipſorum A B C D oſtendetur. Non igitur vnum eorum A B C D & compoſitum ex reliquis, metietur aliquis numerus, primi itaque adinuicem erunt. Si igitur quotlibet numeri continuè, &c.

MONITVM.

Quod autem addit huic theoremati præter Euclidem Campanus, relinquemus, ſat etenim pro ſe quiſque lector ea deprehendet, ſunt equidem ea additamenta ſecundi libri theoremata, de lineis ſectis in ſectiones numerorum conuerſa, vbi maximè has ſectiones paſsi ſunt ferre numeri. quod ſi has ſectiones per numeros exprimere non potuit, illas impoſsibiles apud numeros eſſe demonſtrat, vt in vndecima ſecundi, quæ rectam extrema & media rationem ſecat, & cuius ſectiones quandoque apotomes eſſe videbimus, tertiodecimo. Hæc omnia viſo ſecundo facilè quiſque diſcernet, quæ ideo omiſimus, cùm Euclidis non eſſent, nec futuris demonſtrandis neceſſaria.

Propoſitio decimaſeptima.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, non erit ſicut primus ad ſecundum, ſic ſecundus ad aliquem alium.

Sint bini numeri A & B primi adinuicem: Dico non poſſe eis dari tertium proportionalem. Si autem fieri poſsit, eſto A ad B vt B ad G. cùm enim A & B ſint primi, hi erunt (per 23 ſeptimi) eius rationis minimi, ſi verò ſint minimi ſinguli A B metientur ſingulos B G (eandem rationem habentes) æqualiter, per 21 ſeptimi, metitur itaque A antecedens, B antecedentem, ſed & ſeipſum metitur idem A. Non igitur ſunt ipſi A & B primi, cùm aliquis A eos metiatur, cōtra ſuppoſitum, quod fieri nequit. Non datur ergo ipſis A & B primis tertius proportionalis. Si itaque bini numeri primi adinuicem fuerint, &c.

A 12
B 15
G

Propoſitio decimaoctaua.

Si fuerint quotcunque numeri cōtinuè proportionales, ipſorum autem extremi primi adinuicem fuerint, non erit ſicut primus ad ſecundum, ſic vltimus ad aliquem alium.

Sint quotcunque numeri A B G continuè proportionales, quorum extremi A & G ſint adinuicem primi: Dico non eſſe ſicut A ad B, ſic G ad aliquem alium. Si autem opponamus fieri poſſe, eſto A ad B vt G ad D: erit viciſsim A ad G vt B ad D, per 13 ſeptimi. Sed A & G (extremi) ſunt ex hypotheſi primi: ſi primi, erunt minimi, per 23 ſeptimi: ſi minimi ſinguli A G metiuntur ſingulos B D (eādem rationem habentes) per 21 ſeptimi igitur A antecedens metitur B antecedentem. Cùm autem ſit A ad B vt B ad G, ipſe B metietur G: quare & A metietur G, per primam ſententiam ſeptimi. Metitur autem ſeipſum A & reliquum G, primos quidem, quod fieri non poteſt: non erit igitur ſicut A ad B, ſic G vltimus ad quempiam alium. Si igitur fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, &c.

A 4
B 6
G 9
D

MONITVM.

Concludunt hæc bina theoremata neceſſariò, quod prius profeſsi ſumus vnitatem ſcilicet numerorum nomine priuari, inter actiuos numeros, cùm non ſit multitudo: & proinde rationē multiplicem, quæ in minimis partibus numeros nuſquam, ſed vnitatem & numerum ſuſcipit, minimos ſuæ rationis numeros nequaquam ſubire, ac ideo in ea multiplici ratione nunquam primos reperiri numeros (eò quòd non ſit pura numerorum ratio) vt cuique ſatis ſupérque conſtat. Attamen quia aliqui, putantes has multiplices rationes ad minimos vel primos deduci poſſe, cùm ad vnitatem & numerum ducētur, rationes numerorum à rationibus geometricis non diſcernentes. Eas ſub legibus 21 24 25

27 ſeptimi, 26 octaui, & plurium aliarum propoſitionum (operationes numerorum exequentium) contineri arbitrarentur: nam idem poteſt ſequi in harum rationum minimis partibus, quod in reliquarum minimis numeris. Et idcirco multiplicium minimas partes (quarum ſemper altera eſt vnitas) minimos earum vocare numeros crederent, contra numeri diffinitionem. In hanc labentibus caribdim, ſubuenit Euclides his duobus theorematis, per quæ patulè depromit vnitatem ad primos ſeu minimos numeros nuſquã venire: cùm dicat 17 ſi primi fuerint, licet primi ſint minimi, non erit ſecundus ad aliquem, vt primus ad ſecundum: Sciebat tamen Euclides rationem dari poſſe cuiuſlibet numeri oblati ad aliquẽ alium, eandẽ quæ vnitatis eſſet ad ipſum oblatum, cùm multiplicationes ſint liberæ. Similiter quia hæc decimaoctaua dicat, ſi extremi primi fuerint, nõ dari eam rationẽ vltimi ad alium quemquam, quæ fuerit primi ad ſecundum, licet intelligat Euclides, ſi in multiplicibus extremi primi poſtulẽtur, ad vnitatem veniendum eſſe. Sunt enim multiplices ab vnitate proportionales cuncti: & igitur vltimum numerum eodem multiplicari poſſe numero, quo & multiplicabitur vnitas quæ eſt primus huius ordinis terminus, ac proinde eandem dari (contra propoſita theoremata) rationem. Patet itaque Euclidem (antiquum) non intellexiſſe vnitatem numerorum actiuorum nomine contineri, vt facilè oſtendit per 9 & 10 ſeptimi, quæ tam geometricarum rationum quàm arithmeticarum oſtendunt ſeparatam legem, quam poſtmodum confirmat decimaquinta eiuſdem per partem ſcilicet & partes, ac vnitatem. Et quamuis ſub legibus partis ſimplicis ſemper vnitas cõtineri poſſit, cùm ea ſit ſingulorum numerorum pars vnica: quia tamen aliqui incidunt numeri in eam partem qui quidem aliorum dicuntur pars, vel partes, vt vnitatis legẽ prorſus Euclides à numeris diſtrahat. Illud idem quod de numeris dixit, per hæc nonum & decimum theoremata, fatur decimoquinto theoremate de vnitate, quod ſi vnitas pro numero haberetur, prorſus fieret ſuperuacaneum 15 theorema ſeptimi, ac inutile. Intelligamus igitur decet, quicquid minimis primis numeris, ac reliquis actiuis operantibus, conuenire docuit prioribus ac ſequentibus docebit Euclides, non neceſſariò minimis rationis multiplicis partibus conuenire (vt maximè hac & præcedẽti patuit) ſed ſi quæ præcepta illis conueniunt, & his conuenire viderimus, non has ab illorum legibus intelligentiam ſumere credamus: ſed ſuapte natura, quæ multiplicibus adhærebunt rationibus, per minimas earum partes numeri denominatione quamuis priuatas ſeorſum demonſtrare licebit. Quare ſumma cura decet numerorum duplicem ſumptionem reminiſci, quorũ actiui (arithmeticas operationes exequentes, in paſſiuos geometricas quantitates ſignificantes) ſemper diſcretos numeros, nuſquam autem vnitatem recipiunt. Paſſiui autem & numeros & vnitatẽ ſeu rationes omnimodas ſuſcipiunt, ſiue diſcreti ad continuum, ſiue diſcreti ad diſcretum, quæ tantùm actiuis conueniunt numeris. Inter operationes igitur diſcretorum numerorum, vnitatem recipi nefas eſſe ſuſcipiemus, ſimulac inter rationes diſcretorum multiplicem ſuſcipi rationem nequius, inter numeros verò paſſiuos ſeu quantitatis ſignificatores, quoſuis numeros ac vnitatem, ſiue quaſuis rationes cadere dicemus diſcretorũ, ſeu continuorum per diſcretos numeros non explicandorum: cùm multò fecundior ſit Geometria (paſſiuos ſibi ſumens numeros) ipſa Arithmetica, actiuos ſeu tantùm diſcretos ſumente numeros.

Propoſitio decimanona. Problema 1.

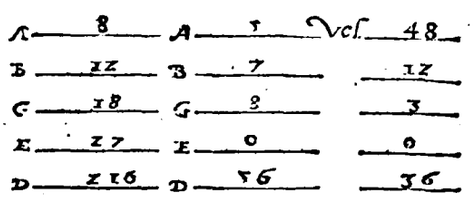
Binis numeris datis, conſiderare ſi poſſibile eſt eis tertium proportionalem inuenire.

Sint propoſiti bini numeri A & B, oportet enim ſcrutari eis tertium proportionalem ſi fieri poſſit: Dico, ſi primus metiatur quadratum ſecundi, poſſe dari tertium, ſiquidem non metiatur, nec poſſe dari. Primò B ſeipſum multiplicans efficiat G quadratum, quem metiatur A per D. Quoniam igitur A ipſum D multiplicans extremum, æquum producit G ei qui fit A medio B, hoc eſt eidem G, ipſi tres A B D ſunt (per 20 ſeptimi) proportionales A ad B vt B ad D, datus eſt igitur tertius D. Secundò non metiatur A quadratum ipſius B: Dico non poſſe, ipſis A B tertium dari, ſi enim fieri poſſit, eſto D tertius, quoniam A B D ſunt proportionales, qui ſub A & D extremis, æquus eſt ei qui à medio B (per 20 ſeptimi) ſit ille G, igitur A metietur G per vnitates ipſius D. Nam multiplicans D efficit ipſum G, ſed & non metitur (ex hypotheſi) quod fieri nequit. Binis igitur numeris datis conſiderauimus ſi poſſibile eſt eis, &c.

A	4	A	6
B	6	B	4
D	9	D	0
G	36	G	16

Propositio vigesima. *Problema 2.*

Tribus numeris datis considerare si est possibile, eis quartum inuenire proportionalem.



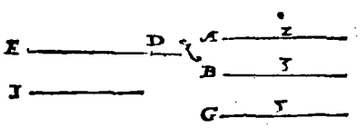
Datis tribus A B G *numeris, inquiramus si fieri possit, illis quartum proportionalem. Dico, si primus productum ex secundo & tertio metiatur, dari posse quartũ, si quidẽ non metiatur, nec posse dari. Metiatur primo* A *prior, productum ex* B *&* G *quod sit* D. *Quoties autem* A *metitur* D, *tot sint in* E *vnitates, igitur* A *multiplicãs* E *fecit* D, *sed* B *ipsum* G *multiplicans, eundem* D *fecit. Erit igitur (per decimamnonæ septimi secũdam partem)* A *ad* B *vt* G *ad* E. *Datus est igitur ipsis* A B G, *quartus* E, *si verò non metiatur* A *ipsum* D, *non erit* E *proportionalis, quod si secus fuerit, esto* E *quartus proportionalis. quoniam* B *ipsum* G *multiplicans fecit* D, *sequetur (ex 19 septimi)* A *ipsum* E *multiplicantem eundem* D *efficere. Metietur igitur* A *ipsum* D *per vnitates ipsius* E, *& non metitur (per hypothesim) quod est absurdum. non itaque erit* E *quartus ipsis* A B G. *Tribus itaque datis considerauimus si est possibile, &c.*

MONITVM.

Breuiores binas præcedentes fecimus demonstrationes, vt quadruplas Theonis & Campani in hanc subdiuisiones in vnicam redigeremus disiunctiuam, scilicet siue fuerint continuè proportionales, habentes extremos non primos, vel continuè & habentes eos primos, aut discontinuè primos, vel equidem discontinuè non primos. Has quatuor disiunctiuas in vnicam reduximus conditionalem disiunctam, scilicet si primus productum secundi & tertij metiatur, aut non.

Propositio vigesimaprima.

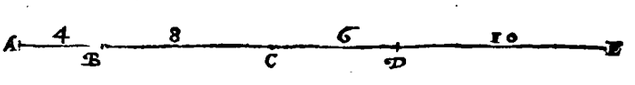
Primi numeri plures sunt omni multitudine proposita primorum numerorum.



Sit proposita quæuis multitudo primorum numerorũ A B G: *Dico alios posse dari præter hãc quamuis multitudinem, sumatur minimus quem ipsi* A B G *metiantur (per 38 septimi) qui sit* E D, *ipsi porro* A E D *addatur vnitas* D Z. *Aut enim* I *otus* E Z *est primus, & sic optatum consequimur (cùm ipse* E Z *præter eos* A B G *& ipsis maior datus sit) aut equidem* E Z *est compositus, & sic aliquis primus eum metietur, qui sit* I, *per 33 septimi. Dico* I *esse alium primum ab ipsis* A B G, *quod si non sit, sed idem vni eorum* A B G. *Metietur idem* I *ipsum* E D, *quem ipsi* A B G *metiuntur, sed, per hypothesim, idem* I *metitur totum* E Z. *Metietur itaque (per secundam sententiam septimi) reliquum* D Z, *vnitatem, quod obstat naturæ numerorum absurdissimum. Primus igitur erit* I *ipsorum* A B G *datæ multitudini additus. Primi itaque numeri plures sunt, &c.*

Propositio vigesimasecunda.

Si pares quotcunque numeri componantur totus par est.



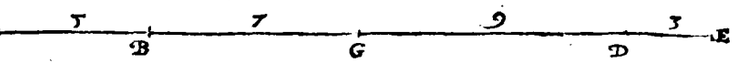
Proponãtur quotcũq; pares A B, B C, C D, *&* D E *in vnum* A E *compositi: Dico* A E *parem esse, quoniam quilibet par duas habet partes æquales. Si igitur æqualibus æquales addantur, omnes dimidiæ dimidiis erunt æquales. Et proinde totus* A E *par erit (per diffinitionem paris uumeri.) Si itaque pares quotcunque numeri, &c.*

Propositio vigesimatertia.

Si impares numeri componantur, fuerit autem multitudo par, totus par erit.

Comp

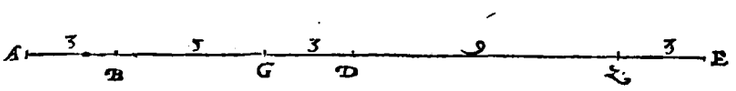
Cõponantur quilibet impares numeri pari multitudine propositi A B, B G, G D D E: *Dico totum* A B *parem esse, cùm enim, per septimam diffinitionem septimi, quilibet impar vnitate differat à pari, ablata vnitate à singulis, reliqui pares erunt, & pari multitudine (per præcedentem) totum parem ex ipsis compositum efficient. Si igitur vnitates pari numero ablatæ (parem numerum efficientes) pari addantur, totus (per eandem) par erit. Si itaque impares numeri, &c.*



Propositio vigesimaquarta.

Si impares numeri componãtur, multitudo autem eorum fuerit impar, totus impar erit.

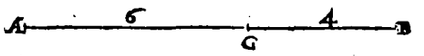
Componantur impares numeri multitudine impari A B B G G D D Z *&* Z E: *Dico totum* A E *imparem esse: tollatur à toto numerus* Z E, *reliquus* A Z *par erit, per 23 huius. Ab ipso verò* E Z *tollatur vnitas, reliquus similiter par erit (per septimam diffinitionem septimi) qui ipsi* A Z *iunctus parem efficit (per 22 huius) ipsi porro pari vnitas restituta, totum* A E *imparem efficiet, vnitate enim distat impar à pari ex septima diffinitione septimi. Si itaque impares numeri, &c.*



Propositio vigesimaquinta.

Si à pari numero par auferatur, reliquus par erit.

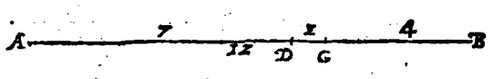
A pari A B *par auferatur numerus* G B: *Dico reliquum* A G *parem esse: quoniam ipsi* A B, A G, *&* G B *pares sunt, partes dimidias æquales habent. Si igitur ab æqualibus* A B *totius æquales ablati* G B *auferantur dimidiæ, reliquæ residui* A G *partes dimidiæ æquales erunt, cùm sunt tantùm binæ: quare par erit reliquus* A G, *per sextam diffinitionem septimi. Si itaque à pari numero, &c.*



Propositio vigesimasexta.

Si à pari numero impar auferatur, reliquus impar erit.

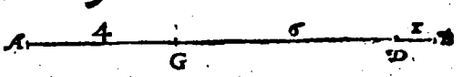
A pari numero A B *auferatur impar* G B: *Dico reliquum* A G *imparem esse. Auferatur ab ipso* G B *impari vnitas* G D, *quæ addatur ipsi* A G: *reliquus* D B *par erit, per septimam diffinitionem septimi: sed* D B *par, ablatus à toto* A B *pari, relinquit* A D *parem, per præcedentem. Ab ipso itaque* A D *pari, ablata* G D *vnitas, ipsum* A G *imparem (per septimam diffinitionem septimi) relinquit. Si igitur à pari numero impar auferatur, &c.*



Propositio vigesimaseptima.

Si ab impari numero impar auferatur, reliquus par erit.

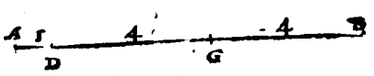
Si à toto A B *impari numero auferatur impar numerus* G B: *Dico reliquum* A G *parem esse. Auferatur ab ipso* G B *vnitas* D B, *reliquus* G D *par erit, similiter & totus* A D, *cùm vnitate distet ab impari. Si igitur à pari* A D *par auferatur,* G D, *reliquus* A G *(per 25 huius, par erit. Si itaque ab impari numero impar auferatur, &c.*



Propositio vigesimaoctaua.

Si ab impari numero impar auferatur, reliquus par erit.

Ab impari numero Z B, *auferatur par numerus* G B: *Dico reliquum* A G *imparem esse. Auferatur vnitas* A D, *quoniam ablata à toto* A B *vnitate,* A D, *reliquus* D B *par est. Atqui* G B *(ex*



hypotheſi) par eſt: igitur reliquus D G *(per 25 huius) par erit, cui addita* A D *vnitas, totum* A G *imparem efficit, per ſeptimam diffinitionem ſeptimi. Si itaque ab impari numero par auferatur, &c.*

Propoſitio vigeſimanona.

Si impar numerus parem multiplicans aliquem fecerit, qui gignitur par eſt.

Impar numerus A *parem* B *multiplicãs ipſum* G *faciat: Dico* G *parem eſſe, quoniam* A *impar ſumptus per vnitates* B *paris efficit multitudinem, ipſius* A *parem, productus ex eis itaque (per 23 huius) par erit, vel quoniam* B *par ſumitur per multitudinem quamcunque ipſius* A, *totum efficit* G *parem, per 22 huius. Si igitur impar numerus, &c.*

A 3
B 4
G 12

Propoſitio trigeſima.

Si impar numerus imparem multiplicans aliquem fecerit, factus impar erit.

Multiplicans A *impar imparem* B *ipſum* G *faciat: Dico* G *imparem eſſe, quoniam* A *impar per multitudinem imparem vnitatum ipſius* B *ſumptus, aliquem* G *efficit, totus* G *impar erit, per 24 huius. Si igitur impar numerus imparẽ multiplicans, &c.*

A 3
B 5
G 15

Propoſitio trigeſimaprima.

Si impar numerus parem numerum metiatur, & eius dimidium metietur.

Impar numerus A *parem* B *metiatur: Dico quòd* A *paris* B *dimidium metietur. Metiatur* A *ipſum* B *parem per* G, *dico* G *parem eſſe. Nam ſi impar eſſet* G, *ſequeretur* A *imparem per* G *imparem ductum, ipſum* B *imparem efficere, ex 30 huius. Sed ſupponitur* B *par, quod eſt abſurdum. Par eſt igitur* G. *Si igitur* A *per vnitates omnes ipſius* G *totum* B *efficiat, ſequetur eundem* A *per dimidium vnitatum ipſius* G *paris, dimidium ipſius* B *efficere. Metietur igitur* A *dimidium ipſius* B, *per dimidium vnitatum ipſius* G *paris numeri. Si itaque impar numerus parem numerum metiatur, &c.*

A 7
B 6
G 18

Propoſitio trigeſimaſecunda.

Si impar numerus ad numerum aliquem primus fuerit, & ad ipſius duplum primus erit.

Impar numerus A *ad aliquem* B *primus eſto, duplum verò ipſius* B *ſit* G: *Dico* A *ad* G *eſſe primum. Quod ſi non ſit, metiatur ipſos* A *&* G *aliquis* D, *quiquidem erit impar. Nam ſi par eſſet* D *metiens ipſum* A *parem efficeret, per 22 huius, contra hypotheſim per quam* A *impar eſt. Erit itaque &* D *impar qui parem* G *(cùm ſit ipſius* B *duplus) metiens, & eius dimidium* B *metietur, per præfatam, metitur autem &* A, *duos primos, quod fieri non poteſt. Non igitur metietur aliquis ipſos* A *&* G, *qui igitur ſunt primi. Si itaque impar numerus ad numerum aliquem primus fuerit, &c.*

A 7
B 8
G 16
D

Propoſitio trigeſimatertia.

A binario duplorum vnuſquiſque, pariter par eſt tantum.

Sint quotcunque numeri à binario dupli A B G D: *Dico illorum vnumquemque pariter parem esse, & illos tantum. Cùm enim ex binarij repetitione fiant, pares erunt, per* 22 *huius. Cùm autem sint à binario dupli, ipsi erunt ab vnitate proportionales: nam binarius vnitatem duplicat. Quilibet igitur eorum minor metitur maiorem, per aliquem præexistentem, in proportione, per* 11 *huius, qui quidem sunt pares, facti igitur omnes pares sunt. Et insuper pariter, per octauam diffinitionem septimi: nam nullus alius eos metitur, præter præexistentes, in proportione, per* 13 *huius, qui omnes sunt pares. Quòd autem nullus sit alius ab ipsis pariter par, patet. Si enim fieri possit, alius esto* E, *qui secetur bifariam semper quousque ad vnitatem vel imparem numerum venerit, quorum aliud necesse est. Si ad imparem venerit, is ipsum* E *metietur per sui ipsius frequentem duplicationē, non igitur pariter par erit, ex octaua diffinitione septimi. Si verò ad vnitatem venerit, is binarius aut à binario duplus erit. Cùm enim per dimidium continuè sectus fuerit, idem duplo auctus continuo eandem viam sequetur, dimidij enim duplum est conuersum. Non igitur ab his alius pariter par erit. A binario itaque duplorum vnusquisque pariter par est tantum.*

Vnitas
A 2
B 4
G 8
D 16
Z 48

MONITVM.

Quoniam falsò diffiniuit prius Theon pariter parem numerum, nescio si in alio aliud dixerit exemplari, vulgato tamen græco non videtur intellexisse, vt circa diffinitionem diximus. Hac de re demonstrationem eousque breuem ac mancam ab eis descriptam (cogimur prolixiorem efficere) instar Campani, vt vniuersalem (vnusquisque) ac excluſiuam (tantum) probemus, & huic Euclidis propositioni nostram (pariter paris) diffinitionem congruere, perfectè sciamus. Idem dicemus in sequente proxima.

Propositio trigesimaquarta.

Si numerus dimidium imparem habuerit, pariter impar est tantum.

Sit A *numerus habens dimidium* B *imparem: Dico ipsum* A *& huiusmodi tantùm, esse pariter impares. Sit* G *binarius, per quem* B *metiatur* A *duplum. Sit autem aliquis par* D *metiens eundē* A *per* Z, *quod fieri potest cùm* A *sit par. Quia qui ex* G B *æqualis est ei qui ex* Z D, *Erit (per decimamnonam septimi)* G *ad* D *sicut* Z *ad* B. *Sed metitur* G *binarius ipsum* D *parem, metietur ergo & Z ipsum* B *dimidium, impar est igitur* Z: *nam si par esset, faceret* B *quem metitur parē, per vigesimā secundā huius, quod obstaret hypothesi, impar est igitur* Z *alius scilicet quilibet, per quem* D *(par) metitur* A *ideo pariter imparem. Præterea nullus est alius pariter impar, quam is qui dimidium imparem habet. Nam si credatur alius habens dimidium parem, binarius (par) per dimidium (illum parem) ipsum metietur, non igitur erit pariter impar, ex diffinitione nona septimi, contra hypothesim. Non itaque est alius ab iis dimidium imparem habentibus, pariter impar. Si igitur numerus dimidium imparem, &c.*

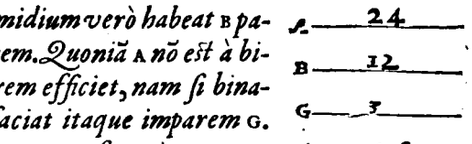
A 30 B 15 G 1
D 10 Z 5

MONITVM.

Harum duarum præfatarum intelligentiam facilè fallet Theon, cùm diffinitionem terminorum alterauerit, octaua & nona septimi diffinitione: nam vt falsas sequatur diffinitiones, videtur excluſiuam (tantùm) referre ad numerorum (vt ita loquar) paritatem vel imparitatem, quod non intelligit Euclides, sed pariter parem esse tantùm à binario duplum productum quotumcunque, ac nullum alium, similiter pariter imparem esse tantum, eum qui dimidium imparem habet, nullum verò alium. Non autem pariter imparem esse tantùm eò quòd non sit pariter par, excluſiua enim (tātùm) reliquos excludit numeros, non autem numeri qualitatem. Nam si rectè dixisset Theon idem numerus octauæ & decimæ diffinitionibus septimi, conueniret, Campanus verò rectius diffiniuit, sed excluſiuam nec ostendit in hac veluti in præcedente.

Propoſitio trigeſimaquinta.

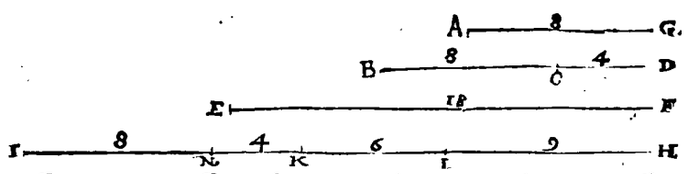
Si numerus neque à binario duplus fuerit, neque dimidium eius impar habuerit, Pariter par eſt, & pariter impar.



Sit aliquis numerus A *qui à binario duplus non ſit, dimidium verò habeat* B *parem: Dico ipſum* A *eſſe numerum pariter parem & imparem. Quoniã* A *nõ eſt à binario duplus, continuè bifariam ſectus numerum imparem efficiet, nam ſi binarium vel vnitatem efficeret, is eſſet à binario duplus, faciat itaque imparem* G. *Manifeſtum eſt imparem* G *metiri* A *per parem numerum: nam ſi per imparem metiretur ipſum* A *imparem efficeret, per 24 huius, igitur* G *impar mẽtitur* A *per parem. Et quoniam* A *dimidium habet parem, binarius (par) per dimidium (parem) eum metitur. Sequetur itaque ipſum* A *numerum (quem par aliquis per parem & quandoque alius par per imparem numerum metitur) eſſe pariter parem & imparem, per decimam diffinitionem ſeptimi. Et ſi* B *rurſus dimidium parem habuerit, alius adhuc par per parem eum metietur numerum, ſicq; infinitè quoad offendatur impar. Si igitur numerus neque à binario duplus, neque dimidium imparem, &c.*

Propoſitio trigeſimaſexta.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, auferantur autem à ſecundo & vltimo æquales, ipſi primo, erit ſicut ſecundi exceſſus ad primum, ſic vltimi exceſſus ad omnes ſe præcedentes.



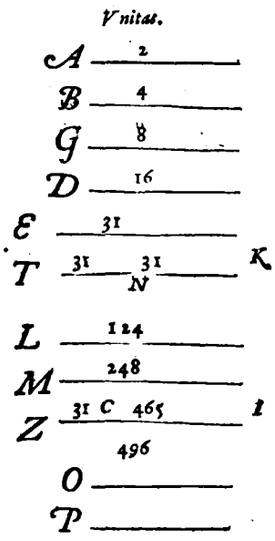
Sint quotcunque numeri continuè proportionales AG BD EF *&* IH. *Auferatur autem à ſecundo* BD *æqualis primo* AG *qui ſit* BC. *A maiori & vltimo verò, idem auferatur qui ſit* IN: *Dico eſſe vt* CD *exceſſum ad* AG *primũ. Sic* NH *vltimi exceſſum ad omnes* EF BD AG *ſe præcedentes. Quoniam* IH *eſt maximus (nam per hypotheſim ſecundus eſt maior primo) ponatur* IL *æqualis ipſi* EF *&* IK *æqualis ipſi* BD. *Ipſi verò* AG *eſt æqualis* IN. *Erit itaque ſicut* IH *ad* EF *&* EF *ad* BD, *ac* BD *ad* AG. *Sic idem* IH *ad* IL *&* IL *ad* IK *ac* IK *ad* IN, *ſunt enim æquales. Quare &* NK *ipſi* CD *æqualis erit, per 3 commun. ſentent. Sed cùm ſit ſicut* IH *totus ad totum* IL, *ſic ablatus* IL *ad ablatum*, IK. *Erit (per vndecimam ſeptimi) reliquus* LH *ad reliquum* KL *ſicut totus* IH *ad totum* IL. *Quia ſimiliter eſt* IL *ad* IK *vt* IK *ad* IN. *Erit per eandem* KL *ad* NK *ſicut* IL *totus ad totum* IK. *Sed ſicut* IH *ad* IL *&* IL *ad* IK *ac* IK *ad* IN, *ſic fuerunt* IH *ad* EF *&* EF *ad* BD *ac* BD *ad* AG. *Sicut igitur* LH *ad* KL *&* KL *ad* NK, *ſic erit* EF *ad* BD *&* BD *ad* AG. *Et viciſſim per decimamtertiam ſeptimi, ſicut* LH *ad* EF *ſic* KL *ad* BD *& ſicut* KL *ad* BD *ſic* NK *ad* AG, *& ſicut vnus antecedentium* NK *ad vnum conſequentium* AG, *ſic erunt per decimamſecundam ſeptimi omnes antecedentes* NK KL LH, *ad omnes conſequentes* AG BD EF. *Sed ipſi* NK *æqualis oſtenſus eſt* CD. *Sicut igitur* CD *exceſſus ſecundi* BD, *ad primum* AG *ſic erit totus* NKLH *exceſſus vltimi, ad* AG BD EF *omnes ſe præcedentes. Si fuerint itaque quotcũque numeri continuè proportionales, &c.*

MONITVM.

Quoniam Theon ac Campanus hanc ſuccinctè demonſtrarunt, prolixiores paululum eſſe cogimur, vt eam per numeros oſtendamus. Præterea animaduertendum eſt, in hac & ſimilibus, non neceſſario exprimendum eſſe quòd hypotheſis ex ſe poſtulat, vt ſi diximus hanc intelligi in rationibus minoris inæqualitatis tantùm, quod certum eſt. Sed cùm hypotheſis poſtulet à ſecundo auferri æqualem primo, illud ſatis manifeſtum aperit, priores ſiue antecedentes numeros, minores eſſe conſequentibus. Quare nec demonſtrando neceſſe erit dicere, incipientes à minimo vt ait Theon, dummodo exprimatur hypotheſis, optans conſequentes maiores antecedentibus eſſe.

Propositio trigesimaseptima.

Si ab vnitate quotcũque numeri continuè dupli exponantur, quoad tótus compositus sit primus, & totus in vltimum multiplicatus aliquem fecerit, qui gignitur perfectus erit.



Apponantur vnitati quotcunque numeri A B G D *continuè dupli, quoad aggregatus ex ipsis* A B G D *& vnitate sit primus, qui sit* E. *Idem autem* E *in vltimum* D *ductus faciat* Z I: *Dico* Z I *esse perfectum: sumantur totidem ipsis* A B G D, *qui post vnitatem* E T L M *dupli, Erit æqua ratione (per* 14 *septimi)* A *ad* D *vt* E *ad* M. *Qui itaque sub* A *&* M *æquus erit, ei qui sub* D *&* E, *per* 19 *septimi, similiter qui ex* B L *ei qui ex* G T, *per eandem: sed ex* D *&* E *fit* Z I, *per hypothesim. Ex* A *&* M *igitur fiet idem* Z I, *duplus itaque erit* Z I *ipsius* M, *cùm* A *sit binarius per hypothesim: sed &* M L T E *dupli fuerunt. Continui itaque proportionales dupli erũt,* E T L M Z I. *Abscindãtur autẽ* A *secũdo* T, *& vltimo* Z I, *æquales ipsi primo* E, *qui sint* T N *&* Z C, *relictis* N K *&* C I, *erit ex præfata sicut* N K *ad* E, *sic* C I *excessus ad omnes* M L T *&* E *se præcedentes, atqui* N K *æquus est, ipsi* E, *nẽpe dimidius dupli* T K. *Aequalis igitur erit* C I *ipsis* M L T *&* E, *sed vnitati &* A B G D *æquus erit* Z C, *cùm positus fuerit ipsi* E *vel* N T *æqualis, totus igitur* Z I *ipsis* M L T E, *ac ipsis* D G B A *ac vnitati æquabitur. Præterea dico omnes metiri eundem* Z I, *cùm enim* Z I *fiat ex* D E, *vterque eum metitur, & cùm ab vnitate dupli metiantur ipsum* D, *scilicet ipsi* A B G, *per decimamtertiam huius, ipsi metientur &* Z I *quem* D *metitur, per primam sententiam. Simili argumento cùm* E T L M *sint ad* Z I, *vt vnitas et* A B G *ad ipsum* D, *in ratione scilicet dimidia, & vnitas ac* A B G *ipsum* D *metiantur, & pariter* E T L M *ipsum* Z I *metientur. Insuper dico nullum alium ab his ipsum* Z I *metiri: quod si fuerit aliquis, esto* O *qui per vnitates ipsius* P, *ipsum* Z I *metiatur: sed* D *eundem* Z I *per* E *metitur, erit igitur sicut* E *ad* P, *sic per* 19 *septimi,* O *ad* D. *Quia verò* O *nullus horum ponitur, ipse non metietur* D, *quem soli præexistentes in proportione scilicet* A B G *metiuntur, per decimãtertiam huius, nec* E *igitur metitur* P, *cæterũ quoniã est* E *ad* P *vt* O *ad* D: *sed* E *primus est, ex hypothesi, & ad* P *quem non metitur, per* 31 *septimi primus erit. Quia verò* E *ad* P *sunt primi, ipsi erũt (per* 23 *septimi) minimi, & (per vigesimamprimam eiusdem) metientur ipsos* O *&* D *eandem rationem habentes. Metitur ergo* E *ipsum* O *&* P *ipsum* D. *Sed cùm nullus metiatur* D *præter præexistentes* A B G, *& vnitatem (per decimam tertiam huius) sequetur ipsum* P *vnum eorum* A B G *esse. Cùm autem ipsi* A B G D *metiantur* Z I, *per ipsos* M L T E *(vt diximus) &* P *metiatur* Z I *per ipsum* O, *sequetur* O *vnum esse ipsorum* M L T E, *sed & alium ab ipsis (per hypothesim) quod fit exra potentiam. Nullus igitur alius ab ipsis* M L T E, D G B A *& vnitate, ipsum* Z I *metitur, sed & ipsis* M L T E D G B A *ac vnitati, qui sunt singulæ eius* Z I *partes, per trigesimamnonam septimi ostensus est, ipse* Z I *æqualis. Ipse itaque* Z I *perfectus erit, per vigesimamquartam diffinitionem septimi. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri continuè dupli exponantur, quoad, &c.*

MONITVM.

Præmisimus nuper Euclidem numerorum auxilia tantum ad geometricas quantitates discernendas & ideo elucidandas imploràsse. Qua autem de causa singula documenta quæ numeris conuenirent, huic negotio conferentia non posuerit Euclides mirari desinemus. Cùm enim Geometriæ traditiones ampliores ac vberiores arithmeticis existant, quæ in geometricis tradidit Euclides quantitatum continuarum nomine, ea numeris adaptari cupit, maximè cùm continuarum illarum magnitudinum respectus, more ac numerorum habitudine sese respiciunt, vt exemplo ex prima secundi dicemus in numeris. Si duorum numerorum alter secetur, quomodolibet productus ex multiplicatione secti & insecti, æquus erit productis ex multiplicatione insecti per singula secti segmenta. Haud dissimili via in reliquis secundi sequetur, dempta vndecima, ea etenim inter eas vnica, sectionem incertam ac extra numerorum rationem supponit: quare hæc numeris applicari non debet. Reliquæ verò vtrasque suscipiunt rationes numerorum scilicet (quæ certæ sunt) ac incertas geometricam vbertatem ac amplitudinem ducentes. Similitérque dicemus in reliquis aliorum librorum

theorematibus ſub vbertate geometrica comparationem linearum in genere tractantes, vbi præcepta lineis rationem numerorum habentibus conuenient, hæc eadem de numeris dicta fuiſſe concipiemus. Neminem etenim latet geometricas magnitudines ſub continuorum confuſo reſpectu adinuicem collato, vtraſque complecti rationes, eas ſcilicet, quas numeri habent ad numeros, & eas quas numeri inter ſe non patiuntur cadere: quarum priores tantum his tribus numerorum libris, eorundem diſcretionibus adaperuit: diſcretiones numerorum binis acceptionibus proferens. Altera qua quantitates diſcernẽdas ac inuicem conferendas numeris adaptatis ſignificauit, integras verò ac inſolutas vnitate denotauit. Altera autem qua operationes arithmeticas (diſcretionem elucidantes) in quantitates prioribus ſignificatas minoris exercuit. Vtraque porro ſumptione continuarum ac cõfuſarum quantitatum abſtruſos inter ſe reſpectus ideo patefecit, vt continuis eaſdẽ habitudines ineſſe perciperemus, quas diſcretis eſſe nobis eſt notum: & præter has alias ineſſe habitudines, quæ licet numerorum diſcretione proferri non poſſint, tamen eorundem obſequio ſuffulti, naturam ac earum progeniem à diſcretorũ priuatione quadam arte oriri noſcemus, hoc proximo maximè decimo libro, qui quantitatum ac habitudinum præfatarum intelligentiam præcipuè docebit.

Proœmium decimi Elementorum Euclidis.

Optans Euclides ſuis Geometriæ elementis vtramque quantitatum naturam diſcentium ingeniis exhibere, earum quidem quæ ita ſibi inuicem comparari poſſunt, vt aliqua vnius pars alterius pars cognominari poßit, aut eadem, ſiue earum quæ ita ſibi comparantur, vt quæuis pars vnius nulla poßit alterius dici pars. Sed quibuſlibet ſectionibus æqualibus ſingulæ ſectæ quantitates, aut quibuſuis vnitatibus multiplicatæ, nuſquam æquales producant magnitudines, quæ prioribus nouem libris ſeorſum docuit, hoc decimo ea ſerie congeret, qua huius diſcrepantiæ progenituram ac ortum, mentibus percipiendum facilitet. Sex etenim prioribus, quæ ad quantitatum confuſarum (quia continuarum) intelligentiam ſpectarent, docuit, pluribus rudimentis ſæpius diſcretarum magnitudinum affinitates ac præcepta capientibus, Geometria nãque vtramque continet quantitatum naturam, ſcilicet rationes numerorum habentium, ac non habentium. Tribus verò poſtremis quæ ad quantitatum diſcretarum cognitionem pertinerent, legibus à numeris ſubfuratis edocuit, quibus earum quantitatum intelligentiam numerorum diſcretione (quã ſenſibus familiari) adaperiret. Cùm autem numerorum diſcretionem ab vnitate (quæ repetita ſemper æquas producit partes) generari ſit notum, ſequetur ſingulas numerorum vnitates ſibi inuicem æquales eſſe, ac exinde magnitudines numeris expreſſas ad æquales partes tandem reduci poſſe, ad eam ſcilicet quam vnitas operit. Nam cuiuſuis numeri vnitas eſt pars, nullius verò partes, quòd ſi alicui harum vnitatum magnitudini comparetur magnitudo ad eam habens rationem nullis numeris dicibilem, ſequetur ab his diuerſis vnitatibus compoſitas æqua repetitione magnitudines, rationem habere nullis numeris dicibilem: nam æquemultiplicium partes per decimamquintam quinti eandem rationem habent. Sed cùm nulla relinquatur mortalium ſenſibus quantitatis diſcretio, ſi abfuerint numeri, per quos exceſſum aut equidem defectum per partis aut partium denominationes exprimimus, quę quantitatis notitiã in intellectu generantes ſolùm quid ſit in magnitudine propoſita quantitatis pronunciant. Geometricarum ideo quantitatum comparationes duplicem habere naturam exponet Euclides, ſcilicet eam qua ſibi inuicem comparatæ rationem habere numerorum percipientur, quas certas dicet, ob diſcretam illam numerorũ certitudinem, notitiam determinatam, ac conſtantem propoſitarum quantitatum (mutuò collatarum) ingeniis exhibentem, & eam qua ſibi comparatæ rationem habent, quæ inter nullos poteſt cadere numeros, eáſque incertas idcirco dicet, quia certis comparatæ omni habitudinis diſcretione priuentur, vrgente affinitatis numerorum penuria, ac demum in quotcunque ſegmenta æqualia (licet numero inæqualia) ſingulæ illæ quantitates diſtribuantur infinitè. Nuſquam eadem vnitatis quantitas vtraſque numerare poterit, nam ſemper vnitates binas illas quantitates metientes, inæquales erunt, licet quauis diſtinctione ſecentur. Cùm autem infinitæ earum vnitatum poßint dari inæqualitates, ortæ quidem à numerorum diuerſis radicibus ſeu conferentiis, infinitas concludemus poſſe dari (vt 115 docebimus) incertarum magnitudinum ſpecies, inter quas haud ſecus interueniet comparationis incertitudo, quàm inter eas & certam incidere conſpiciemus, illud equidem cùm differre illas inter ſe ſpecie intelligemus. Nam quæ eiuſdem erunt ſpeciei, ad ſe inuicem more numerorum comparari poterunt, cùm ſingulæ quibuſuis numeris duci poßint, eas producẽtibus, quæ eorundem numerorum rationem habeant, ac proinde ſingularum illarum ſpe-

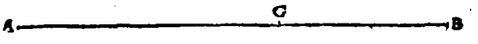
cierum magnitudines quælibet, ſolæ propoſitæ certæ dici poterunt, ad quam comparatæ reliquæ omnes ſpecies incertę nuncupabuntur, illud quidem (vt diximus) ob penuriam affinitatis numerorum inter ſe. Harum quippe aliquas hoc decimo generare docebit Euclides, *& ne infinitum videatur aggredi negotium, generalius infinitas fieri poſſe monſtrabit vnico theoremate. Vnde etenim illud tam abditum & occultum huius diſciplinæ arcanum naſci potuit conſideremus, cùm vnitatem eſſe, prima ſeptimi diffinitione, vnam ac inſolubilem ſuapte natura dixerimus. Ac proinde (cùm ad quantitates refertur) Geometricam & ideo continuam ac inſectam eſſe, facilè percipiemus eam inter numeros collatã, quę vera ac ſola eſt numerorum genitrix, naturam continuæ quantitatis inſequi, quę cùm inſolubilis ſit, neceſſariò omnium numerorum minimam eam eſſe partem fatebimur, quia per numeros in minores ſecari non poteſt, quòd ſi (vt ſeptimo diximus) eius quantitas per numerum ſecetur, ſemper minima pars ad vnitatem redit. Si itaque magnitudini per aliquas vnitates ſectæ, magnitudo comparetur, cuius quantitas collata quantitati prioris, in eam vnitatis ſectionem cadat, quæ nullo numero vnitatis illius quantitatem metiente exprimi poßit, ſed quauis illius quantitatis multiplicatione decrementi facta, ſemper comparatæ magnitudinis extremum, ſiue terminus, in vnitatis cadat ſectionem. Perſpicuum erit eius quantitatis comparatæ denominationem, extra numerorum vires haberi, eorum maximè priorem quantitatem numerantium: ſiquidem illud extremum facta aliqua decrementi vnitatis multiplicatione, in aliquem illarum vnitatum terminum caderet, non autem in vnitatis ſectionem, illius multiplicationis quantitates (ſaltem) vtraſque numerarent vnitatum magnitudines. Non igitur earum comparatio extra numerorum vires haberetur, ſed numeris exprimeretur. Cùm itaque numeris exprimi non poteſt ea determinatione ac ideo certitudine caret: comparationis etenim quantitatum certitudo, à nymerorum expreßione dependet. Quæ igitur numeris exprimi non poteſt, hac de cauſa incerta comparatio dici meretur: & idcirco quantitas quæ comparationem illam ad alteram producit quantitatem, illa eadem lege incerta quantitas dici poterit. Hæc inſuper omni denominatione priuata obmuteſcit, eò quòd in tantum proruperit ſcelus, vt vnitatis illam inuiolatam integritatem diſſoluere conata ſit, quæ nullam patitur ſectionis denominationem.*

Cæterùm illud ſequentes quod ait Zambertus *in liminari perſpectiuè ſe ſcilicet Euclidis exemplaria tineis ac carie contrita apud Socraticum vidiſſe. Sanè inferre poſſumus hunc eius decimum, id vel aliud quoddam ſuſcepiſſe detrimentum. Euclides quippe hanc propoſitam magnitudinem (quam lineam efficit) certam denominat hac dictione ῥητὴ, (quę propriè certam & determinatam & quæ tuto dici poteſt præ ſe fert) diffinitione quinta. Sexta verò profert, omnes eidem propoſitæ certæ commenſurabiles, certas ſimiliter eſſe eadem dictione ῥηταὶ à commenſurationis quidem habitu, quia commenſurabiles ſunt certæ propoſitæ, & ipſæ certæ ea de cauſa erunt, cùm autem ſeptima diffinitione arguit à priuatione, extra ſenſum diſcedit. Nam quod addit habitus, idem tollit priuatio, Dicit enim ſexta quia commenſurabiles fuerunt certæ, eas ideo certas eſſe. Septima igitur quia ipſi certę incommenſurabiles fuerunt, incertas eſſe (negatione priuante prepoſita) neceſſe ſequi fatur. Cur autem poſuerit Theon loco huius dictionis ἀῤῥήται quæ verè illi ῥηταὶ per priuationem opponitur, hanc ἄλογοι exiſtimans oppoſitum certi vel determinati eſſe irrationale, ſat admirari non poſſumus. Certum ètenim cum rationali nihil habet commune, ac inſuper abſurdius, licet etenim ſemper hoc ῥητὸ affirmante, vtatur, nihilominus eidem cõferre volens oppoſitum, ponit ἄλογον toto hoc decimo, quod nõ parum diſcentibus eſt incommodum.*

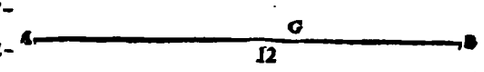
Nam

Nam ſi magnitudines quas incertas dicimus (propria denominatione) irrationales dixerimus, ab eis rationis habitum abſtulimus, quaſi aſſerentes eas aut inter ſuas ſpecies, aut equidem ad certas ratione priuari, quod longè abeſt. Licet enim ipſæ ad certas commenſuratione priuentur, non tamen ratione priuabuntur, ſed rationem habebunt, per 4 diffinitionem quinti, multiplicatæ etenim ſe inuicem excedent, ac inſuper (ex tertia eiuſdem diffinitione) ſunt eiuſdem generis quoad quantitatem, ſcilicet ſi fuerint lineæ, idem genus longitudinem habent quantitatis, Si ſuperficies longitudinem ac latitudinem, Siquidem ſolida tres dimenſiones. Rationem igitur habentes certæ ad incertas irrationales dici non poſſunt. Minus quoque irrationales dicentur, incertæ magnitudines incertis eiuſdem ſpeciei comparatæ, quæ ſcilicet inter ſe ſunt commenſurabiles, ac rationem ſuſcipiunt numerorum, vt diximus. Nam hæ rationem habent cognitam, illæ verò rationem ſurdam, aut incognitam, incertam, aut indeterminatam, cùm non habeant eam quam numeri inter ſe. Verius itaque eas magnitudines incertas dicemus quam irrationales, veluti & ſanius oppoſitas certas quam rationales, nihil enim habet rationale ad certitudinẽ: ſunt equidem diſiunctæ qualitates. Diuerſitas generis, quãntitatis rationem tollit (ex tertia diffinitione quinti) inter quantitates, ſicut & diuerſitas generis commenſurationis commenſurationem aufert: ratio etenim commenſuratione eſt generalior. Non enim omnes quantitates rationem habentes ſunt commenſurabiles, ſed omnes commenſurabiles rationem habere neceſſe eſt.

Commendandum præterea diximus nullam harum quantitatum (quas incertas nuncupamus, alij verò irrationales) ex ſe incertam dici poſſe. Sed omnium quælibet & ſingulæ ſuis locis incertæ dici poterunt adinuicem comparatę, quando ſcilicet vnius ſpeciei ad alteram fit collatio, quæ ſemper denominatione caret, hæc incerta collatio facta propoſitæ magnitudini incertã denominat collatã quantitatẽ, nõ tamen hac de cauſa incertã, qua incertitudinem à propria natura ducat, dicemus, ſed incertitudinem ab incerta comparatione factam cenſebimus, hanc itaque incertitudinem ſumunt quantitates, à collatione diuerſarum ſpecierum, non autem à quantitatis natura, vt exemplo facilitemus. Eſto linea A B ſecta in G extrema & media ratione, per 11 ſecũdi vel 30 ſexti. Tres igitur rectæ A B, A G & G B ſunt inter ſe (quouiſmodo comparatæ) incertæ, vt latius patebit ſexta decimitertij. Tamen quamlibet harum licet nobis proponere cæteris conferendam, ſi enim A G maius ſegmentum, proponamus, hæc propoſita recta (cui comparantur reliquæ A B & G B, ſibi incommenſurabiles) certa dicetur quæ collatione incerta alias ſibi collatas incertas efficit. Similiter ſi toti A B comparentur A G, G B ſingula ſegmenta, aut ſi minori G B tota & maius comparatæ fuerint. Quæuis igitur propoſita certa dici poterit, & eius quantitas cognita erit, reliqui verò illi (comparatione facta) incertæ, incognitæ, ac indeterminatæ erunt, non equidem quantitatis defectu, ſed collationis relatione, quæ incerta eſt, ac penitus denominatione caret. Quid enim vetat totam A B ſumi pro vlna, cuius maius ſegmentum ſit alia quæpiam vlna? Nam ſi vlnam Lugdunẽſem extrema & media ratione ſecemus, maius ſegmentum non longè ab vlna Antuerpienſi diſtabit, quælibet earum nihilominus apud ſuos certa & propoſita quantitas erit, reliqua verò eidem collata incerta dicetur. Nam ſingulæ per quotuis vnitates, ſiue in augmentum, ſiue in decrementum multiplicatæ, magnitudines producunt, eandem rationẽ habentes, ex decimaquinta quinti. Et proinde vnitates alteram metientes, ſiue numerantes, vnitatibus reliquam numerantibus, incommenſurabiles erunt, cùm tota toti fuerit incom-



menſurabilis. Quamlibet itaque quantitatem nobis proponere licet (vt certam) quæ ad alias collata, incertas eas (cum denominatione reſpectus carent) efficit. Qui tamen harum incertarum denominationes, à certarum denominationibus (vt quàm fieri poſſit, occultè earum aperiantur habitudines) depromere conati ſunt, propoſitas certas per numeros expoſuerunt, qui multiplicati, coniuncti, ſiue alia operatione arithmetica variati, numerum radice carentem producerent, hanc quippe radicem, ſiue quadrata, ſiue cubica, cenſica, aut alia quæuis fuerit, harum incertarum (propoſitæ certæ collatarum) denominationi imponunt, vt quàm proximè ex numeris certam quantitatem denotantibus, incertarum denominationes euellere poſſint. Hos autem numeros ſurdos, algebricos, radicales, ſeu incertos aut improprie irrationales, (priorem errorem ſequentes) nuncupant, quos nos hypotheticos verius quàm eſſentiales dicimus, eò quòd tantùm ex hypotheſi ſumantur, omni eſſentia ac denominatione priuati. Quorum tamen obſequio potiores certarum ad incertas habitudines conſequimur, hactenus humanis mentibus cultas, vt exẽplo elucidemus, propoſita recta A B ſecta extrema ac media ratione in G per eius A B vnitates, quæ ſint 12 ipſam A G reperiamus, quã fieri proximè poſſit, ducemus (ex vndecima ſecundi) A B in ſe fiet 144 & dimidiam ipſius A B ſcilicet B in ſe, fient 36, quæ coniuncta componunt 180, horum quippe radix quadrata minus B ipſam A G efficit. Quare maius ſegmentum A G denominabunt. Radix 180 minus B, quæ radix (cùm nulla ſit in numeris) omni denominatione priuatur, ſi autem quàm proximè exprimenda ſit: Dicemus qualium A B erit duodecim eorum A G eſſe 7 & $\frac{11}{36}$ proximè maius, vel proximè minus, 7 & $\frac{11}{37}$. Reliqua verò B G reliquum ipſorum 12 occupat. Quæ omnia potius obſequio quàm demonſtrationi conueniunt. Nos igitur ceptum peragamus.



EVCLIDIS DEMONSTRATIO num reſtitutarum Liber decimus.

Diffinitio prima.

COmmenſurabiles magnitudines dicuntur quas eadem menſura metitur.

Prioribus libris præmiſit Euclides maximè tribus poſtremis neceſſaria ad quantitatis intelligentiam, per vnius ad alteram relationis operationem, vt cognita vnius magnitudinis quantitate, eius opera ſiue auxilio alterius propoſitæ magnitudinis quantitatem vſque adeo præcisè ſiue exactè nouerimus, quòd nihil amplius ad earum quantitatum intelligentiam requiratur. Quòd autem hoc decimo proponet Euclides, aliud expectat negotium. Nam his cognitis quantitatibus per earum naturæ intelligentiam, ſimulac numerorum obſequio, incertarum magnitudinum quantitates generare docebit. Et licet quo differant, à cognitis ille incertè reticere cogatur (ob occultatam nobis à natura cognitionem) tamen propoſitarum ſiue cognitarum legibus, quid inter ſe illæ incognitæ aut incertæ habeant affinitatis proferre facilè poterit. Inchoans Euclides itaque à præcipuo quantitatum notarum vinculo, eo ſolo ſcilicet quo vnius magnitudinis ad alteram habitudo (quæ ratio dicitur) ſit. Commenſurabiles cœpit dicere magnitudines eas quas eadem magnitudo (quam communem vocant menſuram) ita præcisè conſtituit, vt alteram earum per quaſdam vnitates repetitam. Reliquam verò per quotuis ex eiſdem vnitatibus repetitam, præcisè conſtituat, illæ commenſurabiles, ſiue communem menſuram habentes, dici poterunt. Hoc autem dixit vt quàm differant ab his quas eadem vnitas quibuſuis repetitionibus complere vtraſque non poteſt (quæ proxima diffinitione patefient) edoceat.

Diffinitio ſecunda.

Incommenſurabiles autem, quæ ſub nullius communis menſuræ dimenſionem cadunt.

Incommenſurabiles oppoſita priori denominatione vocat eas magnitudines, quæ nullam patiuntur communem menſuram, eas complere. Sed quælibet magnitudo alteram earum ſuis repetitionibus componens, ab alterius dimenſione excludetur: nam ſuis repetitionibus reliquam aut excedet, aut equidem ab ea deficiet, ea nimirum quantitatis parte, quæ nullo numero (priorem exprimente) denominari poterit. Priorem autem exprimente ideo dicimus, quòd priores quas commenſurabiles diffinuimus, ab æqualium vnitatum numeris componantur, diuerſis aut æqualibus earum vnitatum repetitionibus. Hæ verò incommenſurabiles ex diuerſarum à primis vnitatum quantitatibus compoſitæ, nullam patiuntur inter ſe communem menſuram, eò quòd inter eas ſit diuerſum menſuræ genus ſub eodem tamen genere quantitatis concluſum, non autem ſub eodem menſuræ genere. Quæ igitur diuerſum genus habent menſuræ, incommenſurabiles erunt, ſicuti idem menſuræ genus habentes, commenſurabiles dicimus. Sed animaduertendum eſt, vnicum illud genus menſuræ inter omnia ſolum commenſurabile dici non poſſe. Cùm autem quælibet alia menſurarum genera (pro ſe quodque) commenſurabiles metiantur magnitudines. Quodlibet primum aſſumptum, eorum generum pro commenſurabili ea arte ſumi poterit, vt quæuis aliorum generum menſuræ magnitudines, ad has, comparatæ meritò, incommenſurabiles dici debeant. Et proinde commenſurationem idem menſuræ genus ſequi, ac veluti diuerſa menſuræ genera ſequi incommenſurationem fatebimur, vnde etenim oriatur hæc diuerſitas licet altiorem noſtra ſententia optet indaginem. Tamen vt paucis quæ id producant exponamus, Numeros quantitatem non eſſe memorari nos oportet, in numeris dixiſſe, ſed tantùm quantitatibus adaptabiles. Cùm igitur alicui quantitati adaptatur numerus, hæc, quantitas in tot partes æquales ſecatur, quot ſunt in adaptato numero vnitates: omnes etenim numeri vnitates, æquales ſunt. Si igitur huic quantitati alia comparetur quatitas quam prioris vnitates (quauis arte ſumptæ) nuſquam reſtituant, ſed ad eam exprimendam vnitas ſecari cogatur, con

tra fui ipſius præfatum natale genium, quod abſurdum producit, cùm dixerimus minimam numeri partem vnitatem eſſe, ac nulli ſectioni obnoxiam. Hæc quantitatis expreſsio quæ vnitatis requirit ſectionem, denominatione qualibet priuatur, quia vnitas ſectionem non patitur. Quare quantitas illa denominatione priuata ad propoſitam comparata, nullam rationis denominationem patitur. Sed equidem ad illam rationem habebit, cùm ſint magnitudines eiuſdem generis quoad quantitatem, licet non quoad commenſurationem. Attamen omni denominatione priuatam, quæ per numeros tantùm exprimi poteſt, vt diſcretionis vtilitate fruatur. Cùm autem harum magnitudinum quarum quantitas vnius in ſectionem vnitatis alterius cadit, infinitæ ſint ſpecies, infinitæque vnitatem ſecandi formæ: Infinitas dicemus poſthac poſſe dari, incommenſurabilium ſpecies adinuicem, licet inter ſe cuiuſlibet ſpeciei quantitates, ſint adinuicem commenſurabiles. Omnes tamen quarum denominatio vnitatis ſectionem exprimere cupit, ea voce qua res exiſtentes denominantur penitus priuari, quaſi non res exiſtentes dici, ſed potius hypotheſes exiſtimentur. Ab his diuerſis vnitatum ſectionibus orti ſunt numeri, qui ſurdi, aut irrationales, ſeu algebrici dicuntur, ſunt autem radices numerorum non vllam habentium. Quare licet illi potius hypothetici, quàm eſſentiales dici debeant. Nihilominus illorum fictæ hypotheſes, rebus difficilibus explanandis non parum conducunt. Illos itaque fictos ſeu hypotheticos, incommenſurabilibus infinitis, infinitos exprimendis (ſi quidem illud exprimere dicatur) promptiores eſſe dicemus. Cùm illæ ab his, & hi ſimiliter ab illis originem duxiſſe oſtenſi ſint. Quoniam autem vnitatem ſecari nunc per incommenſurabiles dixerimus, & antea apud numeros, ab ea denotatam quantitatem ſecari, Quid his interſit diſcernere ſuperuacaneum non ducemus. Diximus vnitate ſignificatam quantitatem infinitè ſecari, per partes, æquales infinitis numeris expreſſas, præciſam illam quantitatem componentibus. Tùncque demum vnitatem non ſecari, ſed in alias vnitates mutari, quarum ſemper minima quælibet eſt vnitas. Non igitur vnitatis huius numeri ſecatur natura, ſed quantitas vnitate ſignificata. Cùm autem vnitatem ſecari nunc dicimus, quantitas vnitate ſignificata in eas partes ſecatur, quæ nulla numeri denominatione, totam vnitatis quantitatem reſtituunt: eò quòd ea ſectio in vnitatum diſcretiones per infinitos quotuis numeros factas, nunquam incidat, ſed infinitè examinata, extra eam vnitatum (vt ita dicam) commiſſuram ſemper cecidiſſe reperiatur, quòd infinitis modis fieri poteſt, vt poſthac viſuri ſumus. Quare hanc quantitatem quantitati prioribus numeris expreſsè, eſſe incommenſurabilem dicimus, eò quòd exprimenda ſit per vnitates, quæ prioris vnitatibus penitus incommenſurabiles exiſtunt, & proinde numeri huius numeris illius ſemper incommenſurabiles erunt, Cùm ſinguli numeri ſuarum vnitatum ſequantur naturam. Incommenſurabiles igitur dicemus magnitudines, à menſuræ communis priuatione, idem menſuræ genus non habentes. Haud ſecus quàm eodem quantitatis genere carentes, irrationales merito à rationis priuatione tertia quinti diffinitione dici cautum eſt.

Diffinitio tertia.

Rectæ lineæ potentia commenſurabiles, ſunt quando quæ ab ipſis quadrata eadem area metitur.

Diffinitio quarta.

Incommenſurabiles autem, quando nulla area communis menſura eſſe poteſt, eorum quæ ex ipſis fiunt quadratorum.

Quoniam lineæ potentiam vocat Euclides eius lineæ quadratum, aut equidem ſuperficiem huic quadrato æqualem, ait igitur: Rectas lineas potentia commenſurabiles eſſe (hoc eſt, rectarum linearum quadrata, aut eis æquas ſuperficies commenſurabiles eſſe) quando eadem area vtraſque præciſè ſua repetitione conſtituit, vt diximus prima diffinitione de magnitudinibus in genere. Hæc autem dicit vt quamlibet quantitatem per idem quantitatis genus metiatur, & proinde menſuram illam numeris exprimat, vt tandem inter eas rationis cadat denominatio, numerorum virtute expreſſa: incommenſurabiles autem oppoſita voce, per priuationem exponendæ ſunt, cùm nulla pro communi menſura inter earum quadrata poteſt dari area. His diffinitionibus adaptauimus quæ diximus in genere prioribus, illud ſequentes, prima ſeptimi diffinitione, vnitatem ſcilicet eam ſuſcipere formam quantitatis, cui applicandus erit numerus. Si enim lineæ adaptetur numerus ſingulas vnitates longitudinem tantùm habere. Siquidem ſuperficiei longitudinem ac latitudinem, ac ſi demum ſolido, tres eas habere dimenſiones longum, latum, & ſublime. Cùm enim eas omnes metiatur

nume

numeros, metietur omnes magnitudines, quibus adaptantur numeri: sed mẽsuram idem genus quantitatis habere decet. Vnitas igitur idem quantitatis genus sibi sumit, quod & quantitas numero significata. Hoc tamen eodem genere quãtitatis sumpto, potest adesse commensuratio, & abesse eadem, non ex defectu generis eiusdem quoad quantitatem, sed quoad mensuram.

MONITVM.

Sequens variamus corollarium à Zamberti textura alieni, vt ostendamus Euclidem hoc decimo præcipuè docturum incommensurabilium siue incertarum magnitudinum notitiam, Græcum exemplar sequentes: Nam quas vocat potentia tantum commẽsurabiles, intelligit longitudine incõmensurabiles esse, reliquas verò vtroque & potentia & longitudine modo incommensurabiles, vt quæ comparantur expositæ, omnes incommensurabiles intelligantur.

His expositis indicatur, quod propositæ rectæ lineæ (cuius scilicet quantitas est certa ac determinata) infinitæ multitudine comparantur rectæ lineæ. Commensurabiles quidem, potentia tantum, incommensurabiles vero, longitudine & potentia.

Quia suscepit Euclides negotium quantitatum incommensurabilium hoc decimo, concludit sequi ex prædictis, cuilibet propositæ rectæ, hoc est certæ & determinatæ aut cognitæ quantitatis, infinitas multitudine comparari rectas lineas. Omnes autem incommensurabiles, sed binis respectibus: aliæ quidem commensurabiles, licet sint tantùm potentia, longitudine tamen incommensurabiles, aliæ verò per vtrumque incommensurabiles, longitudine scilicet, ac potentia: Sicque omnes eidem propositæ incommensurabiles erunt diuersis respectibus. Vt autem verã Euclidis mentem concipiamus, propositam rectam non eam tantùm qua significantur à nobis cognitæ magnitudines, vtpote cubiti, pedes, palmi, aut digiti (vt voluit Zambertus præter Græcum exemplar: sed quamcunque à nobis expositam cuiuscunque fuerit generis mensuræ. Cùm enim sit liberum quamlibet rectam in quotuis segmenta distribuere (ex nona & decima sexti) Hæc segmẽta attribuemus rectæ, quæ lineæ pedali aut cubitali erit incommensurabilis, & proinde huic propositæ pedalis aut cubitalis, incommensurabilis erit, ac aliæ eidem dari poterunt, incommensurabiles aut longitudine tantùm, aut longitudine, & potentia simul. Et hac ratione ex hac proposita omnes incommensurabilium species hoc decimo conscriptæ, eadem via generari poterunt, sicut & ex pedali vel cubitali: vt exemplo sumamus rectæ (per trigesimam sexti) sectæ maius segmentum, illud constabit esse longitudine ac potentia incommensurabile toti, ex sexta decimitertij. Attamen sumptum illud maius segmentum, in quotuis partes libuerit distribuemus, optato numero significatas, à quo tandem producemus infinitas rectas huic maiori segmento commensurabiles, potentia tantùm, & longitudine incommensurabiles, aliásque longitudine simul ac potentia incommensurabiles: siquidem sumptum illud segmentũ pro proposita sumpserimus ac certa, illíque incertas reperire velimus, eadem lege dantes eidem segmento incommensurabiles, incertas eius respectu producemus, vt in cubitali proposita, vel potentia tantùm, vel potentia & longitudine simul incommensurabiles.

MONITVM.

Licet hæc suo loco propriè nõ sint tradita, ea nihilominus animaduersione digna existimantes hic apposuimus, posteà satius intelligenda, ne qui post Zambertum laberentur, hanc Geometriæ libertatem tollerent, quod tantùm in rectis mensuras à quibusdam obseruatas proponere liceret, vt illæ propositæ dicerentur, quasi prohiberetur, diuersis regionibus pedes, aut palmos, siue cubitos, sibiinuicem incommẽsurabiles haberi, quiquidem omnes sunt propositæ rectæ. Et proinde super his propositas exhibere rectarum longitudines, quibus aliæ incommensurabiles darẽtur: quod esset absurdum. Quaslibet igitur magnitudines linearum proponere licebit, vt eisdem incommensurabiles comparẽtur, & ideo propositam eam esse, quæ ex hypothesi proponitur, dicemus.

Diffinitio quinta.

Vocatur igitur ipsa proposita recta linea, certa.

Hanc propositam lineam rectam vocat Euclides certam vel determinatam, cui scilicet cõparãdæ sunt reliquæ, vt cõmensurabiles aut certæ, vel incõmensurabiles aut incertæ dicãtur. Certam autem ea de re vocauit, quia eius quantitas nobis eò debet esse manifesta, vt nihil de eius quantitate dubitantes, verè certam nobis esse profiteamur, ac cùm eius propositæ certa nobis fuerit quantitas, certior

eiuſdem actionum vel paſsionum, nobis acquiratur intellectus. Hæc autem certitudo tum adeſt, cùm ſupponimus, aut intelligimus quãtitatis lineæ naturam ſiue originem, hoc eſt, denominationem: quia verò quamlibet nobis proponere licet (vt diximus proœmio) eam quæ propoſita fuerit certam nuncupabimus.

Diffinitio ſexta.

Et quæ huic commenſurabiles, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm certæ.

Diffinitio ſeptima.

Quę verò eidem longitudine & potentia incommenſurabiles, incertæ appellentur.

Quoniam dixit rectam rectè commenſurabilem poſſe fieri, potentia tantùm, ac inſuper potentia & longitudine aliam, has omnes quæ certæ, rectæ, vel potentia tantùm, aut equidem longitudine & potentia ſimul commenſurabiles exiſtunt, ſimiliter certas vul vocari. Sufficit etenim vt certa dicatur aliqua recta, eam aliqua commẽſuratione, longitudinis, vel potentiæ, cum certa coniungi propoſita. E cõuerſo autem incertam dicit eam, quæ cum certa propoſita nullam habet communem menſurã, ſiue ſua longitudine, ſiue ſuipſius potentia comparetur. Cur autem certam dixerit Euclides eam rectam, quæ propoſitæ certæ potentia tantùm commenſurabilis exiſtit, licet longitudine eidem propoſitæ ſit incommenſurabilis, quidam inquirendũ putarent. Cùm enim geometricarum quantitatum affinitas, quæ ratio dicitur, præcipua diuiſione. per cognitã & incognitam diuiſa ſit. Cognita autem per numeros tantùm exprimenda ſit, numerorum naturam ſequitur Euclides in exprimendis quantitatum reſpectibus: nam licet omnis numerus latus ſit cuiuſdam quadrati, non tamen omnis numerus latus habebit quadratum, omnes autem numeri inuicem ſunt commenſurabiles. Sequetur itaque ſi quadratum lineæ quæ propoſitæ certæ fuerit longitudine incommenſurabilis, ſit commenſurabile quadrato ipſius certæ (hoc eſt per aliquas numerorum vnitates eadem menſura vtraque quadrata metiatur) illa rationem numerorum inter ſe habere dicentur (nempe communẽ mẽſuram repetentium) ſed quadrata à lateribus in ſe ductis oriuntur. Sequetur igitur eas lineas quæ per ſe ductæ, areas rationem numerorum (hoc eſt certam) habentes, generant, non poſſe hac certitudine priuari, eò quòd eaſdẽ vnitates generant quas & certæ. Quare ea de cauſa certas eſſe reperit Euclides, reliquas verò è contra, quæ per ſe ductæ areas incommenſurabiles producunt, & proinde lõgitudinem ac potentiam incommenſurabiles habent, incertas nuncupauit, & ad certam rationem habent ignotam, eò quòd quælibet vnitates eis applicatæ, ſint adinuicem incõmenſurabiles, ac rationem habent incertam.

MONITVM.

Hanc autem certam verterunt Campanus & Zambertus latinè rationalem, longè quidem à Græco exemplari, vtitur enim Græcum hac voce ῥητή, quod verius pro certa determinata ac manifeſta legitur, & inſuper huic ſententiæ plus conſentiret certa, quàm rationalis. Nam dictio rationalis, habitum præ ſe fert, aut actione, aut paſsione. Si enim rationalis dicatur certa propoſita actione, eò quòd ad aliam rationem habẽt aliquam, aut paſsione, quod alia ad eam rationem habeat, hæc denominatio non tantùm ei conuenit, ſed quibuſcunque ſibi incommenſurabilibus, ſiue etiam incertis. Illæ nãque ad alias eiuſdem generis (quoad dimẽſionem) rationem habent cognitã inter ſe & certã, ad alias autẽ ſiue ad certas rationem habẽt, cùm ſint eiuſdem generis quoad quantitatem (per tertiam diffinitionem quinti) tamen ignotam. Omnes igitur rationales dici merentur, eò quòd inter ſe rationem habeant, ac ad alias, quod eſſet confuſum ac proinde abſurdum, haud ſecus ſi aliquam lineam ſolam rationalem vocaremus, à rationis habitu, nam ſola linea rationem non habet, cùm ratio duos ſaltem requirat terminos. Non igitur aptè denominari poterunt illæ propoſitæ rectæ rationales, ſed certæ aut determinatæ, &c. Præterea nec videmus Euclidem vocaſſe illas rationales, ſed certas. Cãpanum autem & Zambertum id ſibi ſumpſiſſe tantùm, quare cùm appoſitam huic ῥητῷ dictionem ſcripſit Theon ἄλογον ſeptima hac diffinitione non Græcã Euclidis vocem (quã potius ἄῤῥητον dixiſſet pro incertã) ſequutus eſt, ſed manifeſtum eſt eum extra Euclidis ſententiam irrationalis vocem protuliſſe: quaſi per rationis priuationem, incertas nuncuparet magnitudines, quæ inter ſe, vt diximus, certam & cognitam rationem habent, ad certas verò licet incognitam vel indeterminatam habeãt ra-

tionem

tionem, tamen eam habent habitudinem ſiue reſpectum, qui ratio dicitur inter quantitates eiuſdem generis, tertia diffinitione quinti, vt latius proœmio diximus. Quare poſthac cùm omnem irrationalis aut rationalis, licet tritam denominationem, ab huius decimi libri theorematis (lineis ac planis immeritò attributam) auferemus, eámque rationalis aut irrationalis vocem in certam aut incertam (propriam earum denominationem) conuertemus, Id nos feciſſe, vt veram harum quantitatum determinatarum aut indeterminatarum ſignificationem propria voce reſonemus. Quinetiam vt impropriarum dictionum (rationalis & irrationalis) alluſionem euitemus, eos qui hæc legerint, arbitrari precamur. Omnium igitur ſibiinuicem incommenſurabilium quamlibet certam dicere poterimus, cùm ea nobis propoſita ea de cauſa fuerit, vt illi reliquas conferentes certas aut incertas dicamus, hypotheſis etenim lineam proponens eam certam denominat, vt ait quinta diffinitio, quæ propoſitam certam dicit, eò quòd propoſita fuerit.

Diffinitio octaua.

Et quod quidem à propoſita recta linea quadratum certum.

Diffinitio nona.

Et quæ huic commenſurabilia, certa.

Diffinitio decima.

Quæ verò huic incommenſurabilia, incerta dicuntur.

Vbi expoſuit Euclides primi generis quantitatum naturam (quod eſt longitudo ſiue linea) ad ſecundum properat eiuſdem quantitatis genus, hoc eſt, ad ſuperficiem, quæ longum & latum continet. Ait igitur quadratum quod fit ex propoſita recta linea (ea inquam quæ certa ſuppoſita fuit) certum ideo eſſe, quòd à certa recta ſeſe multiplicante (veluti in numeris) naſcatur. Et inſuper quæ huic certo quadrato quadrata, areæ, ſuperficies, ſiue quælibet plana commenſurabilia fuerint, certa ſimiliter vocari præcipit. Cùm enim ſatis ſupérque dixerimus commenſurationis originem à numeris prodiiſſe, eò quòd omnes numeros metiatur vnitas. Præterea numeros ex ſe quantitates non eſſe, ſed quantitatibus adaptabiles. Si quantitati cuidam applicetur numerus, eam in totidem æquas partes ſectam eſſe, quot ſunt vnitates in eo numero intelligemus. Si enim illæ vnitates aliam quantitatem metiantur, alia quauis licet repetitione, erunt commenſurabiles (ex prima diffinitione huius) illæ magnitudines. Si itaque binæ lineæ æquales fuerint, æquales vnitates ac vnitatum æquam ſuſcipient multitudinem. Et igitur ſub illis comprehenſum quadratum vnitatibus conſtat ab earum linearum æquis vnitatibus originem ducentibus. Quinetiam naturam illius plani ſequentibus, nempe quadratis, cùm ſub æqualibus contineantur vnitatibus. Si itaque rectæ illæ æquales (hoc eſt, vnica illa certa bis ſumpta) quadratum ſuſcipiant, illud ideo certum erit, quod ex eiſdem propoſitæ lineæ vnitatibus generari potuerit. Quia verò quælibet planæ eidem quadrato commenſurabilia eadem menſura metiri poteſt, hæc menſura vnitatis vices vtrumque planum numerantis gerit, ac idcirco illa plana quæ ab eiſdem vnitatibus compoſita diuerſa quauis multitudine fuerint, commenſurabilia dicemus adinuicem, cùm illis eædem applicentur vnitates. Quòd ſi lineæ propoſitæ alia comparetur, potentia, tantùm commenſurabilis longitudine verò nequaquam, perſpicuum erit, comparatæ longitudinem (ſeorſum ſumptam) incertam eſſe, potentiam verò certam. Quare lineæ denominationem certam dicemus: Sufficit namque potentiæ aut longitudinis commenſuratio, ad certæ denominationem acquirendam. Quòd ſi ipſi propoſito certo quadrato ſiue plano, alia comparetur ſuperficies, cuius nullæ vnitates ipſum metiri poſſint quadratum, perſpicuum erit ipſas vnitates alienas eſſe ab his quæ eandem quadratam ſuperficiem compoſuerunt. Et proinde ipſi quadrato comparatam ſuperficiem ab alienis vnitatibus compoſitam, incommenſurabilem eſſe. Nam ſi commenſurabiles eſſent, eadem vnitas vtrumque eorum metiretur. Quare meritò hanc ſuperficiem (ipſi certæ incommenſurabilem) incertam dicemus, eò quòd ipſam certæ propoſitæ vnitates determinare ſiue certam reddere non valeant. Nam vt diximus, incertarum denominatio quælibet à relatione ipſius propoſitæ certæ dependet, quæcunque ea fuerit in ſpecie, ſiue quauis vnitatis quantitate numeretur. Mutatur autem

vnitatum ſpecies ſiue natura cum à numero radicem non habente, eandem radicem educi poſcimus. Cùm enim ea nullas huius numeri habeat vnitates (eò quòd eius nulla ſit radix) manifeſtum relinquitur, vnitates eidem applicatas à prioris numeri vnitatibus alienas eſſe, quoniam ſi alienæ non eſſent, ipſæ radicem numeri exprimerent, quod fieri non poteſt, cùm nullam habeat, ex hypotheſi. Idem in quauis radice numerorum dicemus, ſiue quadrata, ſiue cubica, ſiue ſurdè ſolida, aut alia fuerit quælibet. Quæ igitur quantitates à certarum vnitatibus componuntur, certæ erunt. Quæ verò ab earumdem vnitatibus componi non poſſunt, incertæ dicantur, tanquam ab alienis vnitatibus compoſitæ. Obiiceretur tamen quadrangulum rectangulum ſub lineis potentia tantùm commenſurabilibus comprehenſum, certum non dici, licet lineæ illæ certæ dicantur. Ad hæc dicemus harum linearum vtramque longitudinem, vt iam diximus, certam non eſſe, quæ quidem incerta longitudo illud producit rectangulum, ſed potentiã earum vtramque tantùm certam eſſe, quæ denominationem certitudinis lineæ eam potenti tribuit. Quare rectangulum ex earum potentia certa conſtans, certum erit, quod quidem ſub incerta, earum longitudine producetur. Incertum erit, vt latius patebit vigeſimaprima propoſitione huius. Ea de cauſa dicemus incerta rectangula bifariam præcipuè generari, ex binis certis longitudine tantùm incommenſurabilibus. Scilicet cùm ſub illis continetur rectangulum, per vigeſimamprimam, cùm ex illis coniunctis fit quadratum, per trigeſimamſextam, & cùm à maiori auferatur minor, reliquæ quadratũ (per ſeptuageſimamtertiã huius) vt poſt hac videbimus. Huius eſt cauſa quòd in his modis ſemper cõferuntur longitudines ſibiinuicem incommenſurabiles, & ideo incertum producunt. Si autem earum potentiæ (quæ commenſurabiles ſunt) collatæ planum componant, illud neceſſariò certum erit, cùm conſtet ex potentia potentiæ certæ commenſurabili.

Diffinitio vndecima.

Et illa potentes, incertę. Siquidem quadrata fuerint, eorum latera, incertæ. Si verò alia quædam rectilinea fuerint, Lineæ ęqualia ipſis quadrata deſcribentes, incertæ erunt.

Futurum loquendi modum ſibi ſumit Euclides, cùm dicat, & illa potentes, lineæ etenim potentes illa plana quæ proposito certo plano incommenſurabilia eſſe diximus, incertæ appellantur, quæcunque fuerint rectilinea. Nam ſi quadrata fuerint, eorum latera incertæ lineæ erunt. Si verò alia rectilinea fuerint, lineæ deſcribentes æqualia quadrata ipſis rectilineis, incertæ ſimiliter appellabuntur. Potentiam namque lineæ diximus eſſe ſuperficiem quadrato ab ea deſcripto æqualem. Cùm igitur linea in ſuas vnitates ducta, quadratam generat ſuperficiem, ipſam ſuperficiem ex ipſius lineæ vnitatibus genitam eſſe diximus. Si igitur genitæ ſuperficiei vnitates, vnitatibus propoſitæ ſuperficiei (ex hypotheſi) ſint alienæ, cùm ſint incommenſurabiles, ſequetur lineæ certæ propoſitam ſuperficiem generantis vnitates, vnitatibus lineæ, incommenſurabilem aream generantis alienas eſſe. Potens igitur aut generans incommenſurabilem aream certo plano recta linea, incerta dicetur, eò quòd alienas à certa propoſita habeat in ſe vnitates. Illud vnum ac idem eſſe ait Euclides, quæcunque fuerint plana. Nam ſi ſint quadrata, loquitur de eorum lateribus, ſiue radice. Si verò alia fuerint rectilinea, hoc eſt, rectangula, parallelogramma, pentagona, trapeſia, &c. Cùm ſingula in triangula & proinde in quadrata (per decimamquartam ſecundi) reducantur. Intelligit eorum quadratorum rectilineis præfatis æqualium latera, incerta dici: eò quòd areas incertis areis æquales, & proinde incertas, producant.

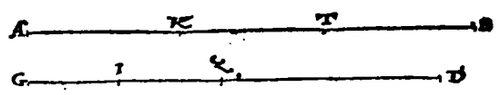
Quia verò diximus quadratam ſuperficiem ex vnitatibus lineæ illam componentibus fieri, Reminiſci oportet eorum quæ diximus ad finem primæ diffinitionis ſeptimi, vnitates ſcilicet naturam eius cui applicatur ſemper inſequi. Scimus quidem infinitas lineæ vnitates nuſquam generare ſuperficiem, cùm latitudine careant. Sed cùm dicimus ſuperficiem ab vnitatibus lineæ generari, Intelligemus vnitates illas contineri ſingulas ſub binis vnitatibus propoſitæ lineæ, in quaſuis vnitates ſectæ, & hac lege fient reſtangula, ſub binis lineis contenta, per primam diffinitionem ſecundi. Quæ dicentur vnitates quadratum totius rectæ propoſitæ metientes, & ipſius quadrati naturam ſectantes, quod ſemper ſub vnica contineri linea diximus. Siquidem binæ proferantur lineæ, quarum ab eis comprehenſum rectangulum vnitatibus diſtinguere velimus. Alteram earum (quæcunque fuerint) ſemper certam propoſitam dicere poſſumus, cui reliqua conferenda eſt, quæ ſi per vnitates propoſitæ certæ commenſurabiles, diſtingui poſſit, hæ vnitates ſingulæ à binis lineis ſumptæ, rectangu-

la

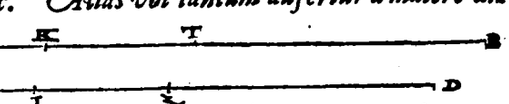
la comprehendent, ſub binis lateribus commenſuralibus comprehenſa, quæ quidem vnitates rectangulum totum numerantes, erunt. Quia verò cuiuſlibet vnitatis longitudo & latitudo certæ ſunt lineæ, cùm ſint certæ commenſurabiles. Ipſæ rectangulum certum producent, cuius quidem longitudo & latitudo eſt determinata, ſiue ῥητή. Quod ſi illi propoſitæ certæ alia comparetur certa, ipſi potentia tantùm commenſurabilis, longitudine verò nequaquam. Vulgatum eſt earum linearum vnitates incommenſurabiles eſſe, ex hypotheſi. Quare rectangulum ſub vnitate certæ lineæ, & vnitate reliquæ priori incommenſurabili comprehenſum, incertum ac indeterminatum eſſe. Nam alteram eius certam dimenſionem, reliqua incerta indeterminat. Idcirco ex his vnitatibus indeterminatis conſtans rectangulum, incertum ac indeterminatum erit, hoc eſt, à natura eius quòd ſit ex propoſita alienum. Si verò eidem propoſitæ binæ potentia tantùm commenſurabiles offerantur (adinuicem verò longitudine commenſurabiles exiſtant) quæ rectangulum comprehendant, Perſpicuum eſt eius rectanguli vnitates ſub lineis ipſi certæ incommenſurabilibus contineri, æquè ſecundum longitudinem ac latitudinem. Et nihilominus certas eſſe: nam ſub lineis longitudine ſibi, & potentia ſibi, ac propoſitæ commenſurabilibus continentur. Sed quia earum potentia certæ propoſitæ commenſurabilis fuit ſequetur ſub ipſis comprehenſum rectangulum, & ab his vnitatibus compoſitum, ipſius certæ quadrato commenſurabile (& ideo certum) eſſe. Nempe rectangulum ex iiſdem quadratorum vnitatibus conſtans, eidem potentiæ cui quadrata commenſurabilia extiterunt, commenſurabile fiet.

Propoſitio prima.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à maiore auferatur maius quàm dimidium, & eius quod relictum eſt maius quàm dimidium, ídque ſæpe fiat, Relinquetur tandem magnitudo minor, minore magnitudine expoſita.



Exponãtur duæ magnitudines A K *&* G D: *A maiore autem* G D *auferatur maius dimidio ſcilicet* D Z, *& rurſus reliqui* G Z *maius quàm dimidium ſcilicet* Z I, *& ſic ſæpe fiat: Dico tandem relinqui poſſe magnitudinem* G I *minorem magnitudine* A K *minore expoſita. Addantur ipſi* A K *tot æquales, quouſque aliam* D G *excedant, per 4. diffi. quinti, ſintq́* A K, K T *&* T B. *Quoties verò ſecta eſt* A B *in* T *&* K, *toties ſecetur* D G, *ablato ſæpe plus dimidio in* Z *&* I, *cùm autem* A B *ſit maior alia* G D, *ſed ex* A B *aufertur* T B *non maius dimidio, à reliqua verò* G D *aufertur* Z D *dimidio maius, reliquum* G Z *erit ideo reliquo* A T *minus. Eodem rurſus argumento, quia à maiori* A T *aufertur* K T *non maius dimidio, à minori verò* G Z *aufertur, ex hypotheſi,* Z I *maius dimidio, ſequetur reliquum* G I *minus eſſe reliquo* A K, *magnitudine inquam minore expoſita. Duabus igitur magnitudinibus expoſitis, &c.* *Aliàs vbi tantùm aufertur à maiore dimidiũ ſæpe, Dupletur* A K *minor quoad excedat* G D *maiorem in* T *&* B, *ſecetur autem bifariam* G D *inæquales numero ſectiones ipſis* K *&* T, *quæ ſint* I *&* Z: *quoniam ſicut tota* A B *ad dimidium* A T *ſicut q́* A T *ad* A K, *ſic ſunt* G D *ad* G Z *&* G Z *ad* G I (*nempe in dupla ratione*) *AEqua igitur ratione ſicut* A B *ad* A K *ſic erit* G D *ad* G I (*per 22 quinti*) *ſed maior eſt* A B *ipſa* G D (*per hypotheſim*) *maior itaque erit* A K *ipſa* G I (*per 14 quinti*) *& proinde* G I *ablato ſæpe dimidio fit minor ipſa* A K.



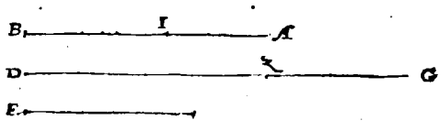
MONITVM.

Non defuerunt qui huius theorèmatis immenſam in quantitates poteſtatem reſtringere voluerint, oppoſito argumento ex decimaſexta tertij, inter quos potior fuit Campanus, cùm dicit angulum contingentiæ ſemper minorẽ relinqui quolibet rectilineo angulo. A quo ſæpius plus quàm dimidium ablatum fuerit, & ideo videri hoc theorema nugatoria exceptione fœdandum eſſe. Soluit autem hoc argumentum, dicens hos angulos non vniuocè dici angulos, ac curuum & rectum diuerſa eſſe genera, quod nos omnino fateri non poſſumus. Nam anguli rectilinei, & anguli contingentiæ idem eſt genus, quoad quantitatem, licet quoad commenſurationem ſint diuerſa, angulorum etenim quantitas in ſola inclinatione linearum continetur, vt quæ fuerit maior minor, vel æqualis inclinatio, quanti-

tates angulorum æquales vel inæquales oſtendat. Quare ſequitur omnes angulos planos idem habere quantitatis genus ſcilicet inclinationem, veluti omnes lineas idem quantitatis genus, longitudinem habere diximus, ſuperficies verò idem aliud genus longitudinem, ſcilicet cum latitudine, ſolida verò aliud genus tres quidem dimenſiones, vt quandoque dicemus. Et igitur omnes angulos planos rationem adinuicem habere, quæ eſt habitudo magnitudinum idem quantitatis genus habentium tertia diffinitione quinti: & licet angulus contingentiæ per multiplicationem rectilineum non poſſit excedere, tamen eius quantitas quæ in ſola linearum inclinatione conſiſtit, multiplicata rectilinei quantitatem excedet: quinetiam rectilineus multiplicatus contingentiæ angulum excedet, ac ideo inter eos ratio, erit per 4 diffinitionem quinti, alter enim multiplicatus alterum excedet. Non itaque Campani ſolutionem recipiemus eos equidem non eſſe vniuocè angulos aut eiuſdem generis, cùm hæc ſufficere non videatur. Sed dicemus hoc theoremate Euclidem generalem ſuo more quantitatibus geometricis legem præſcripſiſſe, quæ quidem in ſe habent omnes numerorum affinitates, ac inſuper alias quas nec patiuntur numeri inter ſe. Huius itaque rei gratia binas protulimus huius theorematis demonſtrationes, priorem qua maius dimidio abſtrahitur indeterminatè ac confusè, cùm illud nec determinet Euclides: poſteriorem verò qua dimidium præcisè ſubtrahi præcipientes, idem ſequi oſtendimus. Quæ poſterior cùm ad numeros tantùm attineat, obiectum illud 16 *tertij ſoluere non poterit, eò quòd anguli illi numerorum rationem non patiantur. Sed quia prior demonſtratio in vtraſque ſcilicet numerorum, ac quantitatum incertarum affinitates, geometrico more dominatur, ea ſatis ſupérque propoſitum illud ſoluet problema, ablato quidem anguli rectilinei pluſquam dimidio, ſcilicet ablato angulo mixto ex curua rectáque compoſito, vt liberam ab Euclide vltra dimidium quanuis permiſſam ſumamus quantitatem, tunc tandem minor relinquetur angulus, angulo contingentiæ propoſito, iuxta huius theorematis præſcriptam legem, quiquidem erit alius contingentiæ angulus, vt latius docuimus ſuper eadem decimaſexta tertij.*

Propoſitio ſecunda.

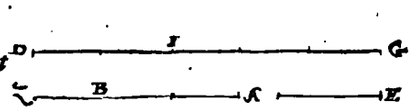
Si duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis ſublata ſemper minore à maiori, reliqua non metiatur precedentem, incommenſurabiles erunt ipſę magnitudines.



Exponantur duæ magnitunines inæquales A B *&* G D: *Tollatur autem à maiori* G D *ipſi* A B *æqualis* Z D, *quouſque ſuperſit* G Z *minor priore* A B, *à qua tollatur eidē* G Z *æqualis* I B, *ſicque ſæpius fiat: ac nuſquam reliqua* A I *metiatur præcedentem* G Z *vel* I B: *Dico poſitas* A B *&* G D *incommenſurabiles eſſe: quod ſi non ſint, metiatur vtraſque aliqua* E *magnitudo. Cùm enim* G Z *poſita ſit minor reliqua* Z D, *hoc eſt ipſa* A B, *ſimiliter* A I *minor reliqua* I B, *ab eiſdem* A B *&* G D *aufertur pluſquam dimidium, cùm vna tollatur ſæpius ab altera. Tollantur itaque (per primam huius) ſæpe quouſque ſuperſit aliqua magnitudinum* A I *vel* G Z *minor* E *metiente ipſas* A B *&* G D: *quoniam autem* E *metitur totam* G D, *& ablatam* Z D (*cùm metiatur* A B *ſibi æqualem*) *metietur & reliquam* G Z (*per ſecundā communem ſententiam ſeptimi*) *metietúrque ſibi æqualem* I B. *Si igitur metiatur totam* A B, *& ablatam* I B *metietur & reliquam* A I, *ſeipſa* E *minorem. Nam illud infinitè ſimiliter fiet, quoad ventum ſit ad minorem* E *metiente (per primam huius) vt diximus: maior igitur* E *metietur minorē ſcilicet* A I *vel* G Z, *quod fieri nō poteſt, nulla igitur metietur ipſas* A B *&* G D, *quæ ideo ſunt incommenſurabiles. Si itaque duabus magnitudinibus inæqualibus, &c.*

Propoſitio tertia. *Problema* 1.

Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem inuenire menſuram.



Proponantur duæ magnitudines commenſurabiles A Z *&* D G, *illa minore ſæpius à maiore detracta, tandem relinquent vltimam metiri præcedentem. Si enim non metiretur, incommenſurabiles eſſent (ex ſecūda huius) à maiori igitur* G D *tollatur* I G *ipſi* Z A *æqualis, ab* Z A *verò tollatur* A B *ipſi* D I *æqualis, ſicque quoad reliqua* Z B *metiatur præcedentem* D I: *Dico* Z B *propoſitarum*

A Z *&*

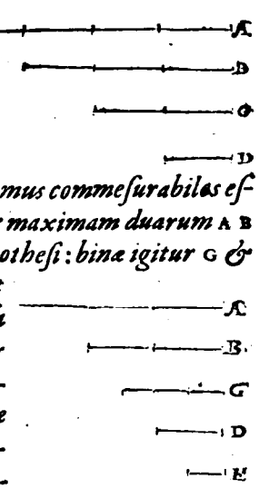
A Z & D G *communem esse mensuram, & earundem maximam: quia* Z B *metitur* D I, *metietur &* A B *sibi æqualem: sed & seipsam metitur, totam igitur* A Z *&* G I *sibi æqualem metietur. Metitur autem* Z B *reliquam* D I, *totam igitur* D G *metietur. Eadem igitur* Z B *communis est positarum* A Z *&* D G *mensura: quod autem sit maxima, ostendamus. Nulla ipsa* Z B *maior, positas* A Z *&* D G *metitur, quod si sit aliqua, esto* E: *quoniam* E *metitur totam* D G *& totam* A Z, *metietur & sibi æqualem ablatam* I G, *& igitur reliquam* D I, *per secundam communem sententiam septimi, siquidem metiatur* D I, *& sibi æqualem* A B *ablatam metietur: sed metitur totam* A Z, *ex hypothesi, eadē igitur* E *metietur & reliquam* Z B, *minorem seipsa, quod fieri non potest. Nulla igitur maior* Z B *expositas* A Z *&* D G *metitur. Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis maximam earum communem inuenimus mensuram.*

Corollarium.

Si magnitudo duas metiatur magnitudines, & maximā earum communem metitur mensuram. *Nam si metitur totas & ablatas, metietur & proinde reliquas, quarum una est maxima.*

Propositio quarta. Problema 2.

Pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem inuenire mensuram.



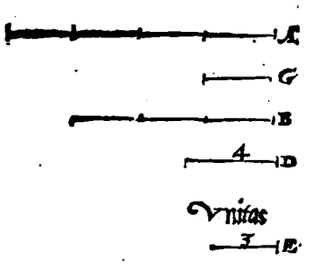
Proponantur prius tres magnitudines A B G, *quarū communem mensuram inquiramus maximam. Sumatur (ex præfata) maxima duarum* A *&* B *mēsura* D, *quæ si metiatur tertiam* G, *optatum consequimur, cùm tres* A B *&* G *metiatur, & maxima. Nam si alia sumpta* D *maior, metiretur priores* A *&* B, *eadem metiretur* D *minorem, per præfatum corollarium, quod fit extra potentiam. Si verò* D *non metiatur tertiam* G, *ostendamus commensurabiles esse* D *&* G. *Cum sint commensurabiles* A B G, *aliqua metiens eas, metietur & maximam duarum* A B *mensuram, quæ fuit* D, *per corollarium præcedentis, sed metitur* G, *ex hypothesi: binæ igitur* G *&* D *sunt commensurabiles. Sumatur maxima binarum* G *&* D *mensura, quæ sit* E, *cùm autem* E *metiatur* D, *metietur & ipsas* A *&* B, *quas* D *metitur. Ipsa itaque* E *tres* A B G *metitur, & maxima: nam si alia maior ipsa* E *metiatur* A B G, *eadem metietur &* D *positarum* A *&* B *maximam mensuram, per corollarium præcedētis. Si autem metiatur* D *&* G, *metietur & minorem* E, *quæ est eorundem* G *&* D, *maxima mensura, illa alia igitur maior* E *posita,* E *minorem metietur, per idem corollarium, quod est absurdum. Non est igitur alia maior sumpta* E, *metiens tres* A B *&* G *hoc secundo posito: quod si sint quatuor, &* E *quartam metiatur, ipsa erit maxima, si verò non metiatur quartā, sumemus eiusdem* E *ac quartæ maximam communem mensuram, quæ erit datarum quatuor maxima, & sic in quotcunque propositis, inuicem commensurabilibus. Pluribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, &c.*

Corollarium.

Si magnitudo metiatur quotcunque magnitudines, eadem metietur ipsarum maximam mensuram. *Nam datis tribus* A B G *patuit* D *maximam fieri ipsarum* A B G *mensuram, aut saltem quia* D *fuit maxima ipsarum* A B, *ex præfata, maxima duas* G *&* D *metiens scilicet* E *fuit maxima trium mensura. Quælibet itaque tres* A B G *metiens, quia metitur binas* A B *metietur &* D, *ex coroll. præfatæ, quia verò metitur* D *&* G *metitur ex eodem coroll. &* E, *quæ fuit maxima trium* A B G *mensura. Quælibet igitur metiens tres* A B G *metietur &* E *maximam earum communem mensurā, haud secus in quatuor. Nam si eadem* E *metiatur quatuor, metietur & maximam trium (ex nunc ostensis) cùm tres metiatur, quæ si fuerit maxima quatuor propositarum, sufficit: sin minus, eadem* E *metiens maximam trium & quartam, metietur & earum maximam mensuram, quæ quidem fuit maxima quatuor magnitudinum. Quia itaque* E *mensa est quatuor magnitudines, metitur & earum maximam mensuram. Hac lege in quotuis magnitudinum numero reperies, metientem magnitudines quotlibet, maximam earum metiri mensuram.*

Propoſitio quinta.

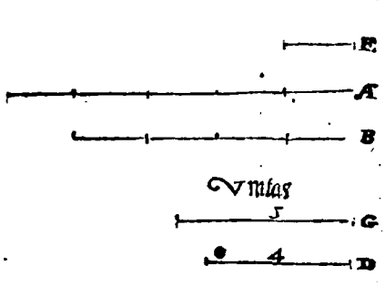
Commenſurabiles magnitudines, adinuicem rationem habent quam numerus ad numerum.



Sint commenſurabiles magnitudines A *&* B*: Dico eas habere rationem quam numerus ad numerum, metiatur ipſas* A *&* B *aliqua* G*: & quoties* G *metitur* A *tot ſint in* D *vnitates, quoties verò idem* G *metitur* B *tot ſint in* E *vnitates, quoniam vnitas toties repetitur in* D *&* E*, quoties* G *repetitur in* A *&* B*, ex hypotheſi, æquemultiplex erit* A *ipſius* G*, vt* D *vnitatis, ſimiliter* B *eiuſdem* G *vt* E *vnitatis. Erit igitur* A *ad* G *vt* D *ad vnitatem &* B *ad* G*, vt* E *ad vnitatem, & conuertẽdo (per corollarium quartæ quinti) erit* G *ad* B *vt vnitas ad* E*: æqua ratione igitur (per 22 quinti) erit* A *ad* B *ſicut* D *numerus ad* E *numerũ. Ipſæ itaque* A *&* B *rationem habent numerorum, eò quòd ſimiliter repetant communem eorum menſuram, vt numeri repetunt vnitatem, quæ eſt omnium communis menſura. Commẽſurabiles igitur magnitudines, &c.*

Propoſitio ſexta.

Si binæ magnitudines adinuicem rationem habuerint quam numerus ad numerum, commenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.



Sint binæ magnitudines A *&* B *rationem habentes, quam numerus* G *ad numerum* D *: Dico* A *&* B *commenſurabiles eſſe adinuicem. Quot vnitates ſunt in* G*, tot ſint æquales partes in* A*, vni earum partium æqualis eſto* E*, per 9 ſexti, quoniã æquè metitur* E *ipſam* A *vt vnitas numerum* G*, erit* E *ad* A *vt vnitas ad* G*. Sed fuit (ex hypotheſi)* A *ad* B *vt* G *ad* D*. Erit igitur æqua ratione* E *ad* B *vt vnitas ad* D*, per 22 quinti, Metitur autem vnitas* D *numerum, metietur igitur* E *magnitudinem* B*. At eadem* E*, metitur ipſam* A *(vt patuit) vtraſque igitur* A *&* B *eadem* E *metitur. Commenſurabiles igitur ſunt binæ* A *&* B *magnitudines, per primam diffinitionem huius. Si binæ itaque magnitudines adinuicem rationem, &c.*

Corollarium primum.

Hinc aſſequimur, propoſitæ cuilibet rectæ A aliam poſſe dari B rationem habentem quam numerus G ad numerum D. *Nempe ſi ordinemus* E *partem propoſitæ rectæ* A *denominatam à numero* G*, per nonam ſexti, ac poſtmodum, eam partem per vnitates alterius numeri* D *repetamus, fiet linea quæſita* B*, nam erit* G *ad vnitatem vt* A *ad* E*, atque vt vnitas ad* D *ſic* E *ad* B*, per decimãquintam quinti. Æqua igitur ratione (per 22 quinti) erunt* G *ad* D *numeri, vt* A *ad* B *recta.*

Corollarium ſecundum.

Præterea ſequitur poſſe dari quod ex A recta, ad ſimile quod ex aliqua alia, ſicut ſunt dati G ad D numeri. *Cùm enim rectis* A *&* B *media poſsit dari proportionalis, per decimamtertiam ſexti. Et (per corollarium decimænonæ ſexti) ſit quod à prima* A *ad id quod à media inter* A *&* B *ſicut eſt* A *ad* B*. Sed ſicut* A *ad* B *ſic eſt numerus* G *ad numerum* D*. Sicut igitur quod ex prima* A*, ad id quod ex media inter* A *&* B*, ſic erit numerus* G *ad numerum* D*, vel vt quadratus numeri* G *ad medium inter quadrata poſitorum* G *&* D*. Nam duorum quadratorum quæ ex ipſis* G *&* D*, vnus eſt medius proportionalis numerus, per vndecimam octaui, &c.*

Propoſi

Propositio septima.

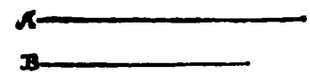
Incommensurabiles magnitudines, adinuicem rationem non habent quam numerus ad numerum.

Sint A *&* B *magnitudines incommensurabiles: Dico eas non habere rationem numerorum, quòd si crederentur rationem numerorum habere, iam commensurabiles essent, ex præfata, quod obstaret hypothesi, cùm incõmensurabiles supponãtur. Non itaque rationem numerorum habebunt. Incommensurabiles igitur magnitudines, &c.*

Propositio octaua.

Si binæ magnitudines adinuicem rationem non habuerint quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

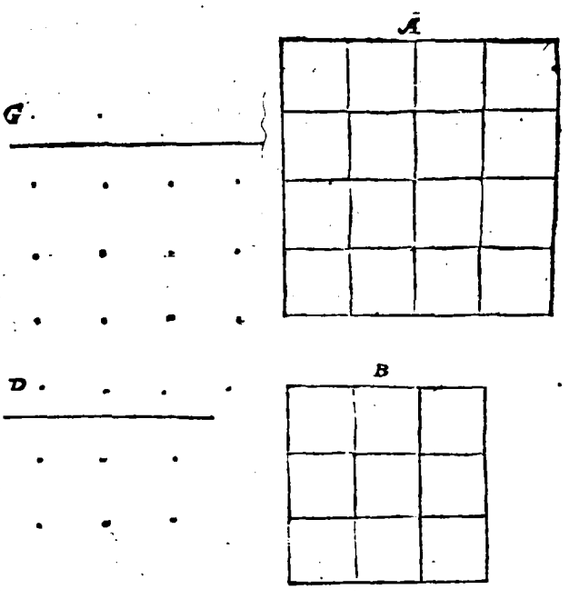
Sint binæ magnitudines A *ad* B *rationem non habentes quam numeri inter se: Dico eas esse incommensurabiles. Nam si commẽsurabiles essent, Ipsæ rationem numerorum haberent (per quintam huius) quòd obstaret hypothesi, quæ proponit eas rationem non habere numerorum. Si igitur binæ magnitudines adinuicem rationem non habuerint quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.*



Propositio nona.

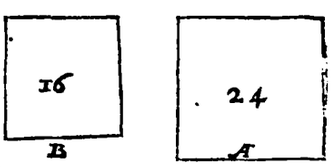
A longitudine commensurabilibus rectis lineis quadrata, adinuicem rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata adinuicem rationem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera quoque habebunt longitudine commensurabilia. A longitudine verò incommensurabilibus rectis lineis quadrata adinuicem rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata adinuicem rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

Huius prolixi theorematis duæ sunt conclusiones breuiores, scilicet quadrata rationem habere quam quadrati numeri, & quadrata habere latera, longitudine commensurabilia, sese semper necessariò sequi. Contra verò quadrata rationem non habere quam quadrati numeri, & quadrata non habere latera longitudine commensurabilia sese similiter necessariò sequi. Quòd autem dicit Euclides longitudine, licet per se sit notum, lineam tãtùm longitudinem habere, tamen quia linearum longitudines quadratorum ab eis genitorum notitiam præbent ea quadrata linearum potentiam diximus, earum verò particularem quantitatem, longitudinem nominauimus, vt ea quæ sua particulari quantitate vel ex se genita potentia certæ commensurabilem produxerit magnitudinem, certa dicatur ac numerorum ad certam rationem habens. Quæ verò nec particulari sibi longitudine nec ab ipsa genita potentia certæ commensurabilem produxerit magnitudinem, incerta dicetur, ac à numerorum rationibus ad propositam certam penitus aliena.



His expositis proponantur binæ rectæ A *&* B *longitudine commensurabiles à quibus fiant quadrata: Dico earum quadrata rationem habere quam quadratus ad quadratum numerum. Quoniam* A *&* B *sunt commensurabiles. Ipsæ rationem habent numerorum, per quintam huius, habeant quam numeri* G *ad* D. *Sed ipsarum* A *&* B *quadrata duplam habent rationem quam ipsæ* A *ad* B, *per corollarium vigesimæ sexti: numerorum autem* G *&* D *quadrati duplam similiter habent quam ipsi* G *ad* D, *per vndecimam octaui. igitur rationis* A *ad* B *vel* G *ad* D (*quæ eadem est per constructionem*) *duplæ sunt singulæ quadratorum planorum, aut equidem numerorum rationes. Quare æquales adinuicem sunt per sextam communem sententiam. Quoniam igitur est* A *latus ad* B *latus vt* G *numerus ad* D *numerum, sequetur esse quadratum rectæ* A *ad quadratum rectæ* B, *vt quadratus* G *ad quadratum* D *numeros.*

Secundò si ponantur quadrata rectarum A *&* B *rationem habere quam quadrati numerorum* G *&* D: *Dico rectas* A *&* B *latera, esse longitudine commensurabilia. Cùm enim quadrata rectarum* A *&* B *duplam ipsis habeant rationem, per coroll. vigesimæ sexti. Quadrati verò ipsorum* G *&* D *numerorum, similiter duplam quam ipsi* G *ad* D *rationem habent: quæ itaque æqualium rationum sunt dimidiæ, & ipsæ sunt æquales. Erunt igitur* A *ad* B *latera, vt* G *ad* D *numeri. Rectæ itaque* A *&* B *sunt commensurabiles longitudine, per sextam huius.*



Tertiæ verò & quartæ partium demonstratio, fit per argumentum ab hypothesis destructione. Si enim binæ lineæ A *&* B *ponantur longitudine incommensurabiles: Dico earum quadrata rationem non habere quam numeri quadrati. Quod si secus esse credatur, quadrata scilicet rectarum* A *&* B *rationem habere quam quadrati numeri, Ipsæ* A *&* B *erunt (per secundam huius partem) longitudine commensurabiles, contra hypothesim, quæ supponit eas incommensurabiles.*

Ad quartam autem, si quadrata rectarum A *&* B *ponantur non habere rationem quam quadrati numeri: Dico nec eorum latera, scilicet rectas* A *&* B *esse longitudine commensurabiles. Nam si essent longitudine commensurabiles, descripta ex ipsis quadrata, rationem haberent per primam partem huius quam quadrati numeri, quod obstaret hypothesi. Si igitur latera fuerint incommensurabilia, eorum quadrata rationem quadratorum numerorum non habebunt. Et proinde si quadrata rationem non habeant, quam quadrati numeri, nec eorum latera, longitudine erunt commensurabilia. A longitudine igitur commensurabilibus rectis lineis, &c.*

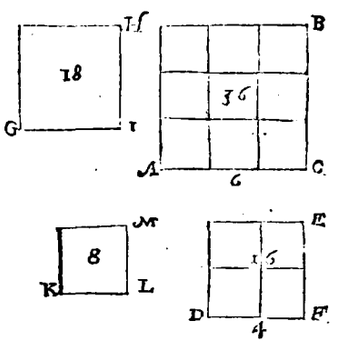
MONITVM.

Hanc demonstrauit secundò Theon per primam sexti, quam demonstrationem ideo reliquimus, breuitati consulentes: ac insuper quia sexti prima continuas, non autem discretas docuit quantitates, quare postponenda fuit hæc demonstratio ei quæ per theoremata vtrisque (discretis scilicet & continuis) propria, propositum concludit. Animaduertendum tamen existimauimus, soluentes aliquorum obiecta, scilicet cùm similes plani numeri non quadrati rationem quam quadrati habeant, per 26 octaui. Quadrata verò rationem similium planorum numerorum habentia habent ideo & quadratorum numerorum, & tamen illorum quadratorum latera numeris exprimi non poterunt, cùm plani non quadrati radicem quadratam non exprimant numeris: & proinde illorum latera numeris non expressa propositæ certæ incommensurabilia esse, contra secundam huius partem.

Ad hæc dicemus, licet quadrata rationem similium planorum numerorum habentia sua latera iisdem vnitatibus, quæ certam propositam metiuntur referre non possint, eáque de causa ipsi certæ longitudine

gitudine ſint incommenſurabilia: tamen cùm potentia eidem certæ cõmenſurentur, & rationem habeant inter ſe quam quadrati numeri, eorum latera rationem inter ſe ſeruabunt, quam ſeruant quadratorum numerorum (eam rationem habentium) radices, quare inter ſe longitudine commenſurabiles ſunt, ad certam verò potẽtia tantùm. Nam ſi diuidantur quadratorum latera in totidem æquas partes, quot ſunt vnitates in radicibus quadratorum numerorum eam rationem habentium, perſpicuum eſt eas partes in ſe ductas, totidem vnitates, quadrata componẽtes, producere, quot producunt radicum vnitates in ſe ductæ, cùm ſint æquales numeri. Quare ſi quadrata ſeruẽt numerorum quadratorum rationem, ſequetur eorum latera radicum ſeruare rationem: ſed radices cùm ſint numeri, ea latera (rationem numerorum ſeruantia) commenſurabilia erunt, per ſextam huius.

Sit in exẽplum quadrata numeris A B *&* D E *expreſſa, quorum radices ſiue latera ſint* A C *&* D F. *Sint autẽ quadrata* G H *&* K M *rationem habentia quam habent ſimiles plani iu ratione ipſorum* A B *&* D E *numerorum conſtituti. Propoſitæ verò rectæ ſint* A C *&* D F, *quoniam quatuor hæc quadrata numeris exprimuntur, commenſurabilia erunt. Quia verò quadrata* A B *&* D E *per numeros quadratos exprimuntur, eorum latera per numerorũ radices exprimentur: ſed cùm quadrata* G H *&* K M *per numeros non quadratos expreſſa ſint, eorũ latera numeris exprimi non poterunt. His maximè quorũ multiplicatio per ſe quadrata illa reſtituat, per hos ſimiles planos numeros expreſſa. Quare* 18 *&* 8 *numerorum quadrata* G H *&* K M *exprimentium, cùm nulla ſit radix: ipſorum quadratorum radices* G I *&* K L *nullis numeris exprimi poterunt: igitur rectæ* A C *&* G I *lõgitudine incommenſurabiles erunt, ſimiliter* D F *&* K L: *Potentia verò commenſurabiles, cùm areæ rationem habeant numerorum. Sed quia ſunt quatuor proportionalia* A B *ad* D E *vt* G H *ad* K M, *ſequetur eſſe* A C *ad* D F, *vt* G I *ad* K L *rectas, per* 22 *ſexti. Atqui* A C *ad* D F *rationem habet numerorum, & igitur* G I *ad* K L *rationem numerorũ habebit. Erunt itaque commenſurabiles rectæ* G I *&* K L (*quadratorun latera*) *per ſextam huius. Quoties igitur eadem menſura metitur rectas* A C *&* D F, *toties alia quædam metitur rectas* G I *&* K L, *cùm ſint in eadem ratione. Sicut igitur tota* A C *ad totam* G I, *ſic vnitas metiens* A C *ad vnitatem metientem eadem multitudine* G I, *per* 15 *quinti. Tota autem* A C *toti* G I *incommenſurabilis eſt. Et igitur vnitas vnitati incõmenſurabilis erit, vt patebit decimatertia huius.*



Hanc ferè non ſuo loco ponimus demonſtrationem, vt mentibus inculcemus omnem incertarum à certis & inter ſe differentiã, ab vnitatum eas exprimentium differentia oriri, quæ cùm nullas (etiam quantumuis abſciſas) vnitatis partes pro communi menſura ſuſcipiant, hac de cauſa incommenſurabiles, & proinde extra omnem affinitatem diſcretam deiectæ, incertæ ac indeterminatæ dicuntur, veluti à propoſitæ cognitione diuulſæ. Hinc ad futurorum intelligentiam facilè præuidemus, binas lineas certæ propoſitæ longitudine incommẽſurabiles (inter ſe tamen commenſurabiles) certam aream continere, cùm earum vnitates adinuicem ductæ certum producant quadratum, aut eidem quadrato commenſurabile, additis quidem aut ablatis vnitatibus. Sicut enim quadrata G H K M (*ſimilibus planis numeris expreſſa*) *à lineis ipſi certæ incommenſurabibus longitudine facta certum producunt, haud ſecus linearum ſcilicet* G I K L *ſegmenta, vnitatibus certarum* A C D F *multitudine æqualia, ac ipſis longitudine incommenſurabilia, per totidem vnitates poſitorum* A B D E, *certorum vnitatibus multitudine æquales ac cõmenſurabiles, magnitudine tamen inæquales, certa* G H K M *producũt quadrata, quorum quantitas eadem refertur per has vnitates à rectis incommẽſurabilibus certis ortas, quæ propoſita fuit per numeros planos (nõ autem quadratos)* 18 *&* 8, *quorũ vnitates certorum vnitatibus eædem aut æquales exiſtũt ſimilia plana conſtituentes: inæquales autem his quæ æqualia ipſis planis quadrata conſtituunt, numero ac quantitate, ipſiſque cõmenſurabiles. Planorum itaque æquales ſunt vnitates, laterum verò inæquales, eadem tamen ratione quælibet coniunctæ.*

Illatio.

Et manifeſtum eſt ex his, longitudine commenſurabiles lineas, ſimul eſſe & potentia. Quæ potentia verò non ideo eſſe & longitudine. Longitudine autem incommenſurabiles, non ideo eſſe & potentia. Quæ verò potentia, erunt ſimul & longitudine.

Infert ab hac nona quatuor Euclides, Primum quidem, cùm commensuratio à numerorum ratione producatur, ait lineas longitudine commensurabiles necessariò habere earum potentiam (hoc est ex eis descripta quadrata) commensurabilem. Cùm enim lineæ habeant numerorum rationem, & quosuis numeros per se liceat ducere vt quadratos producant, linearum igitur quadrata seu potentiæ, quadratorum numerorum rationem habentes, commensurabiles erunt. Ad secundum autem, si lineæ potentia sint commensurabiles, non ideo sequitur eas esse cõmensurabiles longitudine, maximè vbi potentiæ illæ rationẽ quadratorum, aut similiũ planorũ numerorũ non seruant. Nam earum potentiarum seu quadratorum latera, longitudine incommensurabilia erunt, ex vltima parte huius nonæ. Ad tertium, ait longitudine incommensurabiles rectas non ideo esse potentia incommensurabiles: Nam illæ lineæ quandoque esse possunt latera quadratorum, non habentium rationem quadratorum numerorum, quamuis habeant rationem numerorum, & sic commensurabilia existant. Hac igitur de causa, longitudo incommensurabilis non semper potentiam generat incommensurabilem, sed vt patet sæpe commensurabilem. Ad quartum autem, si lineæ potentiam incommensurabilem habeant, necessariò longitudinem simul habebũt, quòd si nõ esset earum longitudo incõmensurabilis, ipsæ rationem haberent numerorum, qui per se ducti potentias seu quadratos producerent commensurabiles, contra positum, cùm supponantur potentiæ incommensurabiles. Potentiarum igitur incommensuratio longitudinum præ se fert incommensurationem.

Corollarium.

Dissimiles plani numeri rationem non habent quadratorum numerorum. *Si enim haberẽt, similes essent plani, per corollarium vigesimæ septimæ octaui, contra propositum, non igitur habent. Et ideo quadrata rationem dissimilium planorum habentia numerorum, latera habebunt longitudine incommensurabilia, per vltimam partem huius nonæ, cùm ea quadrata rationem non habeant quadratorum numerorum.*

Lemma.

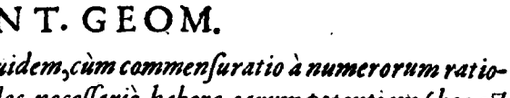
Quotlibet binos numeros dissimiles planos inuenire. *Proposito numero conferantur quotlibet in ratione superparticulari, aut superbipartiente. Nam has rationes habentes dissimiles sunt plani, per corollarium vigesimæ sextæ octaui. Præterea sumantur duo, quorum alter tantùm sit quadratus, tum hi rationem non habebunt quadratorum, per 24. octaui, quare similes plani non sunt, per vigesimam sextam eiusdem. Insuper si inter duos numeros medius cadat proportionalis, extremi rationem habebunt quam quadrati. Nam ex vigesima octaui ipsi sunt similes plani, & proinde (per vigesimam sextam eiusdem) rationem habent quam quadrati: siquidem èconuerso inter eos nullus cadat medius, ipsi rationem quam quadrati non habebunt. Nam si rationem quadratorum haberẽt, similes plani essent, per coroll. vigesimæ septimæ octaui. Et proinde inter eos vnus caderet medius, per decimamoctauam octaui, contra hypothesim, quod inconuenit.*

Aliàs.

Si duo numeri inuicem ducti quadratum non producant, ipsi dissimiles sunt plani. *cùm non habeant medium proportionalem, nempe latus medij ab extremis producti, per 20 septimi. Quare similes plani inuicem ducti, quadratum restituunt, per primam noni, & quadratum componentes similes sunt plani, per secundam eiusdem.*

Propositio decima.

Quæ eidem magnitudini commensurabiles, & adinuicem sunt commensurabiles.



Sint binæ magnitudines A *&* B *eidem* C *commensurabiles: Dico* A *&* B *esse adinuicem commensurabiles. Quoniam* C *vtrique ipsarum* A *&* B *est commensurabilis, ea ad illas rationem habet numerorum (per quintam huius) habeat quam* E *ad* D *&* Z *numeros. Quoniã est* G *ad* A *vt* E *ad* D, *erit (ex corollario quartæ quinti)* A *ad* G *vt* D *ad* E. *Sed est* G *ad* B *vt* E *ad* Z, *ex hypothesi*

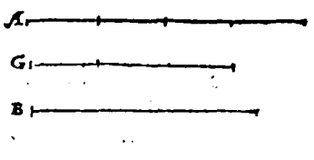
constr

constructionis. Erit igitur æqua ratione A *ad* B *sicut* D *numerus ad* Z *numerum, per* 22 *quinti. Commensurabiles itaque sunt (per sextam huius)* A *&* B *adinuicem. Quæ igitur eidem magnitudini, &c.*

Corollarium primum.

Si binarum magnitudinum altera commensurabilis fuerit alicui, Altera vero eidem incommensurabilis, ipsæ magnitudines incommensurabiles erunt.

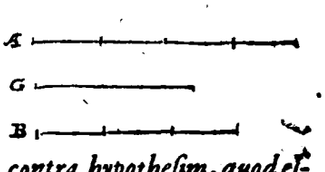
Sit A *commensurabilis ipsi* G, *& eidem* G *sit* B *incommensurabilis: Dico* A *ipsi* B *incommensurabilem esse. Nam si* B *ipsi* A *commensurabilis esset, & eidem* A *commensurabilis est* G, *sequetur (ex decima huius)* G *&* B *commensurabiles esse, contra positum, quod fieri non potest. Si igitur binarum magnitudinum altera, &c.*



Corollarium secundum.

Si duæ magnitudines commensurabiles fuerint, alteraque earum magnitudini cuidam incommensurabilis fuerit, & reliqua eidem incommensurabilis erit.

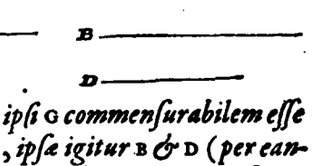
Sint binæ magnitudines A *&* B *commensurabiles, Alteráque earum* A *sit cuidam* G *incommensurabilis: Dico reliquam* B *eidem* G *incommensurabilem esse. Nam si* B *ipsi* G *sit commensurabilis, Iam idem* B *ipsi* A *commensurabilis fuit. Sequetur igitur* A *&* G *(eidem* B *commensurabiles) esse adinuicem commensurabiles, per decimam huius, contra hypothesim, quod esset absurdum. Incommensurabilis igitur erit* B *ipsi* G. *Si itaque duæ magnitudines commensurabiles fuerint, &c.*



Corollarium tertium.

Si duæ magnitudines duabus incommensurabilibus fuerint commensurabiles, Et ipsæ inuicem incommensurabiles erunt.

Sit A *scilicet commensurabilis ipsi* B, *&* G *ipsi* D, *sint autem* B *&* D *incommensurabiles: Dico* A *&* G *incommensurabiles esse. Quod si commensurabiles essent* A *&* G, *& eidem* A *fuit* B *commensurabilis, sequetur igitur* B *ipsi* G *commensurabilem esse per decimam huius. Sed eidem* G *fuit commensurabilis* D, *ex hypothesi, ipsæ igitur* B *&* D *(per eandem) commensurabiles erunt, & (ex hypothesi) incommensurabiles positæ, quod fieri nequit. Ipsæ itaque* A *&* G *incommensurabiles erunt. Si igitur duæ magnitudines, &c.*



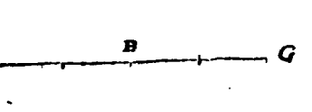
MONITVM.

Hæc tria præfata corollaria hanc decimam necessariò sequentia, varia scribentium sententia relicta sunt. Prius etenim lemma à Zamberto existimatum fuit: Ab altero verò Græcorum exemplarium theorema, & à reliquo lemma. Secundum autem, efficit Zambertus propositionem decimamtertiam decimi, Campanus verò suæ octauæ additionem efficit. Theonis demum vnum exemplar, decimum quartum dicit theorema. Tertium corollarium futuris demonstrandis vtile hoc loco proprium ordinem sibi ascitum fuisse iudicauimus. Namque hæc tria lemmata vnico hoc decimo demonstrantur theoremate. Quare eiusdem potius appendices quàm theoremata dici debent.

Propositio vndecima.

Si binę magnitudines commensurabiles compositæ fuerint, tota vtrique ipsarum commensurabilis erit. Et si tota vni earum commensurabilis fuerit, Quæ in principio magnitudines commensurabiles erunt.

Sint binæ A B *&* B G *commensurabiles: Dico totam* A G *compositam vtrique* A B *&* B G *commensurabilem esse. Quia commensurabiles sunt* A B B G, *metietur eas aliqua magnitudo, quæ sit* D, *per primam diffini-*



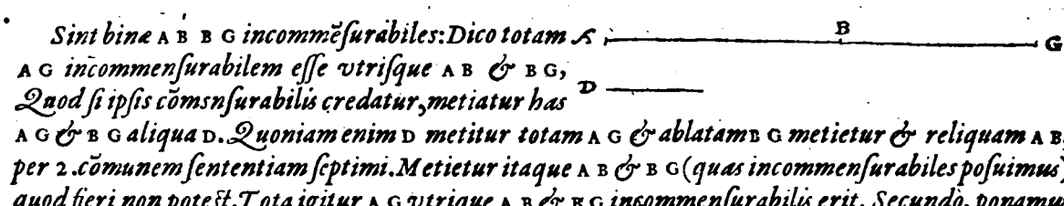
tionem huius, quoniam D *metitur* A B B G *partes, totam* A G *componentes, ipsa* D *metitur totam* A G. *Quæ igitur* A G *vtrique partium* A B *&* B G *commensurabilis est. Siquidem ponamus totam* A G *vni earum* A B *commensurabilem esse: Dico* A B B G *esse commensurabiles. Nam metiatur datas* A B A G *commensurabiles, aliqua* D *magnitudo. Quia igitur* D *metitur totam* A G *& ablatam* A B, *Ipsa* D *metietur & reliquum* B G, *per secundam cõmunem sententiam septimi: eadem igitur* D *metiens binas* A B B G, *efficit eas commensurabiles. Si itaque binæ magnitudines, &c.*

Corollarium.

Hinc assequimur, Si tota vni earum fuerit commensurabilis, & reliquæ commensurabilis erit. *Eadem etenim* D *omnes metitur, per secundam communem sententiam septimi.*

Propositio duodecima.

Si binæ magnitudines incommensurabiles compositæ fuerint, tota vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota alteri ipsarum incommensurabilis fuerit, quæ in principio magnitudines incommensurabiles erunt.



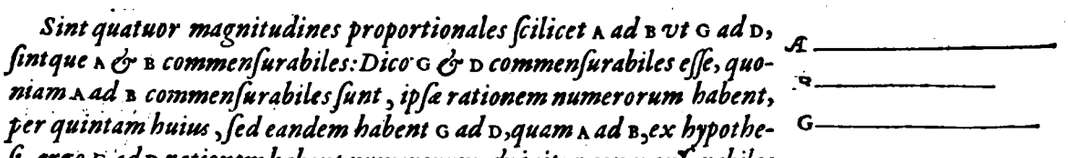
Sint binæ A B B G *incommẽsurabiles: Dico totam* A G *incommensurabilem esse vtrisque* A B *&* B G, *Quod si ipsis cõmsnsurabilis credatur, metiatur has* A G *&* B G *aliqua* D. *Quoniam enim* D *metitur totam* A G *& ablatam* B G *metietur & reliquam* A B, *per 2. cõmunem sententiam septimi. Metietur itaque* A B *&* B G (*quas incommensurabiles posuimus*) *quod fieri non potest. Tota igitur* A G *vtrique* A B *&* B G *incommensurabilis erit. Secundò, ponamus tota n* A G *alteri earum* A B *incommensurabilem esse: Dico* A B B G *incõmensurabiles esse: si enim commensurabiles credantur, metiatur eas* A B B G *aliqua* D: *quæ cùm metiatur singulas* A B *&* B G (*totius* A G *partes*) *metietur & totam* A G. *Commensurabilis erit igitur tota* A G *vtrique earum, sed & alteri* A B *incommensurabilis fuit posita, quod fieri nequit. Incommẽsurabiles itaque erunt* A B B G, *quæ in principio magnitudines. Si itaque binæ, &c.*

Corollarium.

Et proinde, Si tota vni earum sit incommensurabilis, & reliquæ incommensurabilis erit. *Nam si alteri commensurabilis esset, & reliquæ commensuraretur (per corollarium præcedentis) contra positum, &c.*

Propositio decimatertia.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima autem secundæ fuerit commensurabilis, & tertia quartæ commensurabilis erit. Si verò prima secundæ fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit.

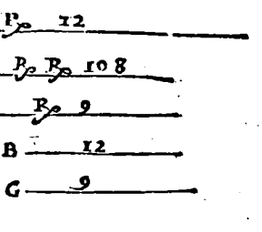


Sint quatuor magnitudines proportionales scilicet A *ad* B *vt* G *ad* D, *sintque* A *&* B *commensurabiles: Dico* G *&* D *commensurabiles esse, quoniam* A *ad* B *commensurabiles sunt, ipsæ rationem numerorum habent, per quintam huius, sed eandem habent* G *ad* D, *quam* A *ad* B, *ex hypothesi, ergo* G *ad* D *rationem habent numerorum, & igitur commensurabiles erunt, per sextam huuius. Ad secundum autem, Esto* A *prima* B *secundæ incommensurabilis: Dico &* G *tertiam quartæ* D *incommensurabilem esse, quoniam* A *&* B *sunt incommensurabiles, ipsæ non habent numerorum rationem, per septimam huius. sed eandem quam* A *ad* B *habent* G *ad* D, *ex hypothesi, igitur* G *ad* D *non habent rationem numerorum: incommensurabiles itaque sunt* G *ad* D, *per octauam huius. Si igitur quatuor, &c.*

Propositio

Propoſitio decimaquarta. Problema 3.

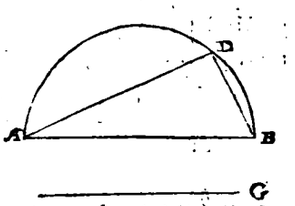
Propoſitæ rectę lineę binas rectas incommẽſurabiles inuenire. Alteram quidem longitudine tantùm, alteram autem & potentia.



Eſto propoſita recta (hoc eſt cuius quantitas ſit certa ſeu determinata, per quintam diffinitionem huius) linea A, *cui inueſtigandæ ſint duæ incommenſurabiles, altera quidem longitudine tantùm, altera autem longitudine ac potentia. Ponantur duo numeri diſſimiles plani, per lemma nonæ huius, qui (per corollarium eiuſdem) rationem quam quadrati numeri nõ habent, ſintque* B *&* G. *Fiat autem (per corollarium ſextæ huius) ſicut* B *ad* G, *ſic quod ex* A, *ad id quod ex* D. *Rectis autem* A *&* D *inueniatur media proportionalis (per decimamtertiam ſexti) quæ ſit* E: *quoniam poſitum eſt quod ex* A *ad id quod ex* D *ſicut* B *ad* G, *rationem quadratorum numerorũ nõ habentes, quadrata rectarum* A *&* D, *habebunt latera* A *&* D *longitudine incommẽſurabilia, per vltimam partem nonæ huius, potentias verò commenſurabiles per 6 huius. Data eſt igitur rectæ* A *propoſitæ recta* D *longitudine tãtùm incommenſurabilis. Cùm autem* A E D *ſint continuè proportionales, erit ſicut* A *ad* D, *ſic quod ex* A *ad id quod fit ex* E *ſecunda, per corollarium 20 ſexti, ſed* A *rectæ* D *incommenſurabilis oſtenſa eſt. Quod ex* A *igitur ei quod ex* E *incommenſurabile erit, per ſecũdam partem 13 huius. Recta itaque* E *eidem* A *propoſitæ, potentia datur incommenſurabilis: igitur & longitudine, per illationem nonæ huius. Propoſitæ itaque rectæ binas rectas incommenſurabiles, &c.*

Propoſitio decimaquinta. Problema 4.

Duabus datis rectis inæqualibus lineis, inuenire quo maius poteſt maior minore.



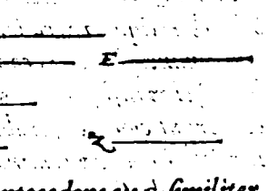
Sint binæ rectæ inæquales A B *&* G, *ſuper maiori verò* A B *conſtituatur ſemicirculus* A D B. *Eidem porrò ſemicirculo, per primã quarti, coaptetur rectæ* G *minori æqualis* A D, *coniuncta* D B. *Quoniam (per 47 primi) potentia rectæ* A B, *quæ ſubtendit angulum rectum* A D B, *æquatur potentiis rectarum* A D, D B, *ſed potentiæ* A D *æqualis eſt potentia rectæ* G *minoris, cùm ſint per conſtructionem æquales* A D *&* G. *Sequetur itaque maiorem* A B *plus poſſe minore* G (*hoc eſt recta* A D) *quadrato lineæ* D B. *Duabus igitur* A B *&* G *datis, inuenimus quo maius poteſt maior minore.*

Corollarium.

Haud diſſimili via, potentem duas datas rectas dabimus. *Si quidem rectæ datæ ad angulum rectum componantur, hunc ſubtendens angulum, per 47 primi, binas datas poterit recta linea.*

Propoſitio decimaſexta.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, poteritque prima ſecunda maius eò quòd fit ab eidem longitudine commenſurabili, & tertia quarta maius poterit eò quòd fit ab eidem longitudine commenſurabili. Et ſi prima ſecunda maius potuerit, eò quòd fit ab eidem incommenſurabili longitudine, & tertia quarta maius poterit, eò quòd fit ab eidem longitudine incommenſurabili.



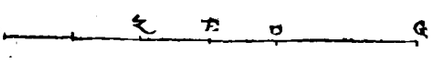
Sint quatuor rectæ proportionales A *ad* B *vt* G *ad* D, *poſſit ǵ* A *maius* B, *eò quòd ex* E, *&* G *maius* D *alio quod ex* Z. *Dico ſi* A *&* E *ſint commenſurabiles, eſſe & rectas* G *&* Z, *ſiquidem non, non. Quoniã quatuor* A B G D *ſunt proportionales earum quadrata proportionalia erunt, per 22 ſexti. Quia verò quadratum* A *excedit cõſequens, quod ex* B, *eò quòd ex* E. *Aliud verò antecedens ex* G, *ſimiliter excedit ſuum conſequens quod ex* D *quadrato* Z. *Erit conuerſione rationis quod ex* A *ad quod ex* E, *ſic quod ex* G *ad quod ex* Z, *per corol. decimæ nonæ quinti. Si itaque primum quod ex* A *ſecũdo ex* E *commenſurabile fuerit, & tertium ex* G *quarto ex* Z *commenſurabitur, ſiquidem non, non: per 13 huius. Si itaque quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c.*

MONITVM.

Proximarum propoſitionum ſeptem præcedentium ordinem variare cogimur. Cùm enim ſitus earum varia ſcribentium ſententia ad nos fuerit delatus, non poſſumus eam Euclidis fuiſſe mentem coniicere, qui tot in varios ſtudiorum anfractus incidiſſet: quare diſciplinæ authoritatem docẽtium authoritati præferentes, theoremata hoc loco ita tranſponimus, vt quæ cepit quinta huius de commenſuratione loqui, ad duodecimam vſque perducamus. Poſtmodum decimatertia proportionem commenſurationi copulantes, poſtremas 14, 15, *&* 16 *potentiarum leges quánam arte longitudines ſequantur docere incipientes, conſequamur. Id equidem ſeruato theorematum numero eodem, quod ſi Campanus, Theon, ac duplex illud græcum exemplar, in eo diſſideant, quo ſcilicet quædam theoremata Euclidis, corollaria fuiſſe dixere vel lemmata. Nos hac arte ſingula demonſtrandis futuris neceſſariò collegimus, vt quæ immediatè ab aliquo dependent theoremate, eiuſdem corollaria dixerimus, vel lemmata antiquum Theonis ſequentes morem, quamuis quandoque ſatis impropriè lemmata, quæ corollaria dici debent & è conuerſo dicamus. Sed cùm id huic diſciplinæ nihil aut parum conferat dum tamen adſit demonſtratio, ac vera methodi ſequacitas, harum quæſtionum præteribimus moram. Quia verò Theon poſt* 16 *huius, ponit lemma admodum à propoſito diſtans, ac eiuſdem ſententiæ cum corollario à nobis poſt vigeſimamoctauam ſexti poſito. Nos itaque illud tanquam præhabitum, hac obliti ſumus data opera.*

Propoſitio decimaſeptima.

Si fuerint binæ rectæ lineę inęquales, quartę autem parti eius quod à minore æquum parallelogrammum ad maiorem applicatum fuerit, deficiens ſpecie quadrata, & per commenſurabilia ipſam diuiſerit longitudine, maior plus poterit minore eò quod ex ſibi longitudine cõmenſurabili, Etſi maior plus poterit minore eo quod à ſibi longitudine commenſurabili. Quartę vero parti eius quod à minore ęquale ad maiorem applicatum fuerit deficiens ſpecie quadrata, Per commenſurabilia longitudine ipſam diſtribuet.



Sint binæ rectæ lineæ inæquales, ſcilicet A *minor, et* B G *maior, applicetur autem rectæ* B G *parallelogrãmũ æquale quartæ parti eius, quod ſit à minore* A (*hoc eſt, quàdrato dimidiæ lineæ* A) *quod quidem applicatum deficiat ſpecie quadrata, per* 28 *ſexti, illúdque ſua applicatione ſecet rectam* B G *in* D, *ſint q.* B D *&* D G *longitudine commenſurabiles: Dico maiorem* B G *plus poſſe minore* A, *eò quòd ſit ex ſibi longitudine commenſurabili. Secetur bifariam* B G *in* E, *ipſi verò* E D *æqualis ponatur* E Z: *reliquæ igitur* D G *&* Z B *æquales erunt, quoniam applicatum ſecat* B G *in* D. *Illud continetur ſub ſegmentis* B D D G, *per corollarium* 28 *ſexti. Quia verò recta* B G *ſecta eſt per æqualia in* E, *& inæqualia in* D, *rectãgulum ſub* B D D G *cum quadrato ex* E D (*quæ inter ſectiones*) *eſt æquale ei quod ex* B E (*vel* E G) *media, per quintam ſecundi, ſequetur itaque id quod ex* E G (*vel* B E) *excedere id quod ſub* B D D G, *ſeu quod ex dimidia ipſius* A, *quadrato* E D, *ſed cùm quater ex* E G *ſit totum quod ex* B G, *quater autem ex dimidia ipſius* A *quadratum ſit totum ex* A *quadratum, Sequetur totam* B G *plus poſſe tota* A *quadrato* E D *quater ſumpto, quod quidem erit quadratũ rectæ* D Z: *Nam rectæ* E D *æqualis poſita eſt* E Z. *Cæterùm cùm* B D *ſit (ex hypotheſi) longitudine commenſurabilis rectæ* D G, *erit & rectæ* B Z *eadem* B D *commenſurabilis: quia verò* B D *tota vni earum* B Z *eſt commenſurabilis, & reliquæ* Z D *eadem* B D *commenſurabilis erit, per vndecimam huius: quia autem duæ* B D *&* D G *commenſurabiles componuntur, tota* B G *vtriſque* B D, D G *commẽſurabilis erit (per vndecimam huius) cùm inſuper duæ* B G *&* Z D *eidem* B D *commenſurabiles oſtenſæ ſint, & ipſæ* B G *&* Z D *adinuicem erunt commenſurabiles, per decimam huius, ſed* B G *plus poteſt recta* A, *eò quòd ſit ex* Z D. *Plus itur poteſt maior* B G *minore* A, *eò quod ex* Z D *ſibi longitudine commenſurabili.*

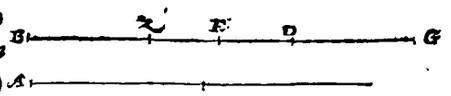
Secundo, ſupponamus B G *maiorem plus poſſe rectæ* A *minore, ex ſibi commenſurabili longitudine, & inſuper* B G *maiori applicatum, quod ſub* B D *&* D G *æquum quartæ parti eius quod à minore* A *deficiens ſpecie quadrata: Dico hanc applicationem ſecare ipſam* B G *in* D *per commenſurabilia: eadem figuræ diſpoſitione vti poſſumus. Cùm enim excedat ſpecie quadrata, inæquales erũt* B D *&* d G *ſectiones, alias ſi ſectio applicati caderet in* E, *propoſitæ* A *&* B G *eſſent æquales, contra hypotheſim. Quare*

per

per æqualia in E *& inæqualia in* D *ſecta* B G *plus poterit minore* A *quadrato* Z D, *vt patuit. Commenſurabilis autem fuit tota* B G *(ex hypotheſi) ipſi* Z D *exceſſui longitudine: ſed cùm tota* B G *vni earum* Z D *ſit commenſurabilis, quæ in principio* Z D *& binæ* B Z D G *cõmenſurabiles erunt, per vndecimam huius: quia rurſus* B Z *binis* B Z D G *commenſurabilis eſt, nam dimidia, & eiſdem* B Z D G *commenſurabilis eſt* Z D, *duæ igitur* B Z Z D *commenſurabiles erunt, per eandem: ſed binæ* B Z Z D *commenſurabiles componuntur. Tota igitur* B D *vtriſque* B Z Z D *commenſurabilis erit, atqui ipſi* B Z *fuit æqualis* D G: *ipſa igitur* B D *reliquæ ſectioni* D G *commenſuratur, ſecta eſt ideo tota maior* B G *per commenſurabilia longitudine in* D. *Si itaque fuerint, &c.*

Propoſitio decimaoctaua.

Si fuerint binæ rectæ lineę inęquales, quartæ autem parti eius quod ex minore ęquum ad maiorem applicetur, deficiens ſpecie quadrata, & ipſam per incommenſurabilia diuiſerit longitudine, maior plus poterit minore eò quod ex ſibi lõgitudine incõmẽſurabili: Etſi maior plus poterit minore eò quòd ex ſibi longitudine incommenſurabili, quartę autẽ parti eius quod à minore ęquum, ad maiorem applicetur, deficiens ſpecie quadrata, per incommenſurabilia ipſam longitudine diſpeſcet.



Sint binæ rectæ lineæ inæquales A *&* B G, *ſecetur* B G *maior bifariam in* E. *Applicetur autem ipſi* B G *æquum quartæ parti eius, quod ex* A (*hoc eſt quadrato dimidiæ* A) *deficiens ſpecie quadrata, rectámque* B G *hac applicatione per incommenſurabiles longitudine ſecãs in* D: *Dico* B G *maiorem plus poſſe minore* A, *eò quòd* A *ſibi longitudine incommẽſurabili, iam (vt præfata oſtendimus) applicatum ad ipſam* B G, *ſub* B D D G *comprehenditur, æquum quidem ei quòd ex dimidia rectæ* A, *quòd (per quintam ſecundi) minus fuit eò quòd ex* E G *dimidia rectæ* B G, *quadrato* E D. *Quare tota* B G *plus potuit minore* A *quadrato* Z D, *quæ eſt dupla rectæ* E D. *Quoniam binæ* B D D G *ponuntur incommenſurabiles, & tota* B G *vtrique earum (per duodecimam huius) incommenſurabilis erit. Quia verò binæ* B Z D G *æquales commenſurabiles ſunt ipſi* D G, *ſed eidem* D G, *incommenſurabilis eſt, tota* B G. *Igitur binæ* B Z D G *ipſi* B G *incommenſurabiles erunt, per corol. primum decimæ huius. Sed quia tota* B G *vni earum (ſcilicet compoſitæ ex binis* B Z D G) *eſt incommenſurabilis, & reliquæ* Z D *eadem* B G *incommenſurabilis erit, per corollarium duodecimæ huius. Tota igitur* B G *maior, quæ plus potuit minore* A *quadrato ex* Z D, *plus minore poteſt, eò quòd ex ſibi longitudine incommenſurabili.*

Ad ſecundum autem, ſupponamus rectam B G *plus poſſe minore* A *quadrato* Z D, *toti* B G *longitudine incommenſurabili: Dico* B G *diuiſam eſſe in* D, *per incommenſurabilia longitudine. Cùm tota* B G *ipſi* Z D *ſit incommenſurabilis & reliquæ ſcilicet binis* B Z D G *incommenſurabilis erit, per corol.* 12 *huius: quia verò binarum alia ſcilicet* B G *binis* B Z D G *incommenſurabilis eſt. Alia verò* D G *eiſdem binis* B Z D G *eſt commenſurabilis. Duæ igitur* B G *&* D G *ſunt incommenſurabiles, ex coroll.* 12 *huius. Et ſi tota* B G *vni earum* D G *fuerit incommenſurabilis, quæ in principio* B D *&* D G *ſunt longitudine incommenſurabiles, per duodecimam huius. Secta eſt igitur* B G *in* D *per incommenſurabiles longitudine. Si itaque fuerint binæ rectæ lineæ, inæquales quartæ autem, &c.*

Lemma.

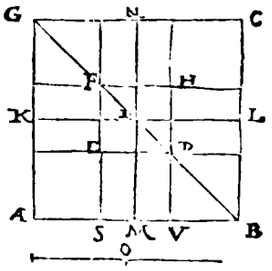
Oſtenſum eſt in commenſuratione potentiam neceſſario ſequi longitudinem, non autem longitudinem ſequi ſemper potentiam. In incommenſurabilibus autem, longitudinem ſemper ſequi potentiam, potentiam vero ſæpius longitudinem non ſequi. *Quare dicemus propoſitam certam quam ῥητὴν dixit Euclides, lineam eſſe ſuppoſitam ex libera potius hypotheſi, quàm neceſsitate aliqua depromptam, ad quam reliquas comparantes, eiuſdem reſpectu ſiue relatione certas aut incertas dicemus, quas improprio nomine rationales aut irrationales dixerunt plures. Hac equidem methodo, vt quæ expoſitæ certæ longitudine commenſurabiles erunt, ſimpliciter certæ dicantur, eò quòd longitudinem neceſſariò ſequatur potentia. Quæ verò eidem propoſitæ certæ aliquæ potentia fuerint commenſurabiles, non ideo ſimplicem certarum denominationem illæ ſibi ſumunt, cùm*

potentia illa non ſemper includat longitudinem, ſed reſpectiuè dicentur potentia commenſurabiles, cui denominationi addemus particulam (tantùm) cùm longitudine illas incommenſurabiles eſſe patebit. Quod ſi eidem propoſitæ certæ conferantur aliquæ incommenſurabiles, vt ideo incertarum concipiant denominationem. Si quidem potentia fuerint incommenſurabiles, illæ incertarum ſimplicem ſuſcipiunt denominationem. Nam apud incommenſurabiles potentia præſefert longitudinem, Si autem longitudine incommenſurentur, cùm hæc potentiæ commenſurationem ſæpius admittat, has certæ collatas, non idcirco incertas ſimpliciter dicemus, ſed præferenda eſt denominationi, commenſurationis potentiæ intelligentia. Nam ſi nec potentia commenſurabilis exiſtat, ſimpliciter incerta dicetur, ſiquidem commenſurabilis, reſpectiuè vt iam diximus, certa potentia tantùm commenſurabilis nuncupabitur. Harum autem naturam per numerorum rationem explicat nona huius Euclides.

MONITVM.

Hanc certæ denominationem, quam rationalem aliena voce interpretati ſunt plures, non vni ac eidem tantùm linearum naturæ congruere opinandum eſt ea ſeueritate qua nulla lineæ quantitas certa dici poſſit, ſi aliena fuerit ab eius naturæ quantitate quam ſemel certam diximus. Id enim longè à vero ſenſu nos alienos efficeret. Nã certitudinem hanc ſeu ab aliis (vt ita loquar) rationalitatẽ hypothetică intellexit Euclides. Cũ enim ſupponit certã cui aliæ conferendæ ſunt, pro huius exẽpli tempore huius ſuppoſitæ certæ naturam, ſectabimur, & tantùm (iuxta præfatas leges ac ſequuturas) certas, aut reliquas ipſi certæ incommenſurabiles, incertas dicemus. Quod ſi varietur exemplum non inconuenit eam quæ prius penitus incerta fuit, pro alterius exempli tempore, certam ſupponi. Qualibet etenim cuiuſuiſque naturæ linea propoſita vt certa, per ſibi collatas commenſurabiles, aut incommenſurabiles, potentia vel longitudine, omnem incertarum poſi hac exponendarum originem generari poſſe concipiemus. Cùm omnes incertarum exponendas ſpecies, ſemper ab vnius certæ propoſitæ hypotheſi, per conferentiam, ſingularum manare ſit notum. Quod autem ſæpius dicit Campanus rationalis potentia, rationalis longitudine, improprium eſt. Nam potentia vel longitudo non verſatur circa rationalitatem, vt ſic loquar, ſed tantùm circa commenſurationem. Illud namque idem eſſet, ac ſi media longitudine, media potentia, binomium longitudine, vel binomium potentia, diceremus. Longitudo igitur aut potentia commenſurationi referuntur. Sed rationalis, mediæ, aut binomij, &c. denominationes, ad linearum diuerſas naturas tantùm denotandas ſpectant.

Cæterùm vt diuerſitatem naturæ linearum à numeris ortam percipiamus, binarum præcedentium, ac vigeſimæoctauæ ſexti ſententias vnica demonſtratione numeris ſurdis, ſeu algebricis illuſtrata diſcutiemus. Eſto numerus maior recta A B *minórque recta* O. *Rectè* A B *quadratum ſit* A B C G, *dimetiens autem* G B *& centrum* I. *Circa dimetientem & centrum conſtituatur quadratum æquale exceſſui quo quadratum ex* A B *excedit quadratum ex* O, *ſitq; illud* E F H D: *ſecentur poſtmodum vtraque quadrata* A C *&* E H *in centro* I *quadrifariam, ductis* M N K L *rectis. Patet igitur quatuor rectangula* A D B H, C F G E (*inter ſe æqualia*) *ſimul ſumpta, æquari quadrato, rectæ ſeu numeri* O *minoris, Ac proinde aream* A D *æquam eſſe quartæ parti eius quod fit à minore* O. *Sequitur igitur numero* A B *applicatum eſſe numerum* A D, *æquum quartæ parti eius quod fit à minore* O *numero propoſito, deficientem autem ſpecie quadrata,* D B, *quæ ſcilicet circa dimetientem, & hac applicatione ſectam eſſe rectam, ſeu numerum* A B *in* V. *Quare ſi iuxta decimamſeptimam huius* A B *ſecetur in* V *per numeros* A V, V B, *ſiue per commenſurabilia longitudine, Manifeſtum erit rectã* E D *ipſi* A B *longitudine commenſurabilem eſſe, vt iam antea oſtenſum eſt. Nam* A S *æquatur rectæ* V B, *tota itaque* A V *vni earum* A S (*vel* V B) *commenſurabilis, & reliquæ* S V (*vel* E D) *commenſurabilis erit, per corollariũ vndecimæ huius. Tunc itaque exceſſus potentiæ* A B *ſuper potentiam rectæ* O (*qui quidem fuit* E H) *eſt longitudine commenſurabilis propoſitæ rectæ ſeu numero* A B. *Ac è conuerſo ſi rectæ* A B *&* E D *ſint numeri ſeu longitudine commenſurabiles, ſequetur à toto ablatum* E D (*vel* S V) *numerum, relinquere quod ſuperest, ſcilicet compoſitum ex* A S V B) *eſſe numerum, & ideo rectam* A B *ſecari in* V *per numeros ſeu longitudine commenſurabiles*



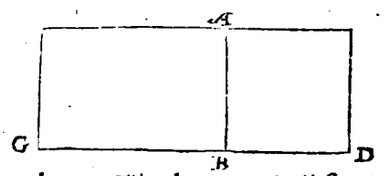
Cùm recta A B *ſecatur in* V *per commenſurabilia longitudine, eſto* A B *rad.* 64, O *rad.* 48 A D 12, D B 4, A N 6, N B 2, E H 16.

Cùm verò ſecatur in N *per incommenſurabilia longitudine, eſto* A B *rad.* 64. O *rad.* 52, A D 13, A N 4+ *rad.* 3, V B 4 − *rad.* 3 E H 12.

biles. Quod si iuxta decimamoctauam huius A B *secta sit in* V *per non numeros, siue per incommensurabilia longitudine, Perspicuum erit totam* A V (*parti* V B *vel* A S *incommensurabilem*) *reliquæ* S V *siue* E D *incommensurabilem esse, ex corollario duodecimæ huius. Quare* A C *potentia maioris* A B *excedit potentiam* (*vt fusius* 18 *discussimus*) *minoris* O *quadrato rectæ* E D, *quæ ipsi* A B *est lõgitudine incommensurabilis, & è contra. Si rectæ* A B E D *sint non numeri seu longitudiue incommensurabiles, à numero* A B *propositæ ablatus non numerus* S V (*vel* E D) *relinquit* V B *&* A S (*æquales*) *non numeros, & proinde rectam* A B *sectam in* V *per non numeros, seu incommensurabilia longitudine, ex duodecima huius. Si igitur secetur* A B *in* V *per numeros commensurabilia erunt* A D D B *rectangula, per primam sexti. Si quidem per non numeros incommensurabilia erunt, ex eadem, & ideo reliquo* E H *commensurabilia vel incommensurabilia.*

Propositio decimanona.

Sub certis longitudine commensurabilibus rectis lineis (iuxta quemuis modum præfatorum) comprehensum rectangulum, certum est.



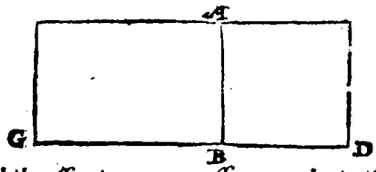
Comprehendatur rectangulum A G *sub* A B *&* B G *certis rectis longitudine commensurabilibus: Dico ipsum* A G *certum esse, fiat ex* A B *quadratum* A D, *per* 46 *primi. Quoniam æquales sunt,* A B B D, *erit* G B *ad* B A, *vt* G B *ad* B D, *per septimam quinti. Quia verò* G B B A *sunt commensurabiles, &* G B B D *cõmensurabiles erũt, per* 13 *huius: sed vt* G B *ad* B D *rectæ, sic* G A *ad* A D *rectãgula, per primã sexti. commensurabiles autem sunt rectæ* G B B D. *Commensurabilia igitur erunt & rectangula* G A A D, *per decimamtertiam huius: atqui certum est* A D *rectangulum, per octauam diffinitionem. Certum igitur erit, &* G A, *per nonam huius diffinitionem. Sub certis itaque longitudine commensurabilibus rectis, &c.*

MONITVM.

Dixit Euclides (iuxta aliquem præfatorum modum) cuius intelligentiam non scripserũt Theon aut Campanus. Quod igitur sentiebat Euclides nostra sententia exponamus, rectarum longitudine cõmensurabiliũ vnicus est modus. Is nãque quo ipsarũ longitudines rationem numerorum obtinẽt. quare illud (iuxta aliquem præfatorum modorum) ad longitudinis commensurationem referri non putemus: sed ad certarum hypotheticarum sumptionem, quas quidem diuersis modis longitudine cõmensurabiles proposuit Euclides. Primò quidem cùm propositæ certæ binas longitudine ac potentia commensurabiles confert. Nam quadratum vnius, ipsius propositæ quadrato commensuratur, ac eidem vnius quadrato rectangulum sub duabus (per primam sexti) commensurabitur, & ideo quadrato propositæ, per decimam huius. Secundò cum proposito comparantur binæ certæ potentia tantùm commensurabiles, inter se tamen longitudine commensurabiles, vt radices numerorum similium planorum non tamen quadratorum. Nam hi cùm suas quadratas radices numeris exprimere nequeant, illæ radices rectæ propositæ certæ per numerum expressæ, longitudine erunt incommensurabiles: quia verò sunt in numerorum ratione cum quadrato propositæ, potentia sunt commensurabiles, per sextam huius ipsi certæ: Et quia sunt similes plani, ipsi rationem inter se quam quadrati numeri habent, per vigesimamsextam octaui, & ideo latera longitudine commensurabilia, per nonam huius inter se: quia igitur (sicut in prioris demonstratione) vnius earum quadratum propositæ quadrato fuit ex hypothesi commensurabile, & eidem rectangulum sub duabus comprehensum, commensurabile (per primam sexti, erit) quare rectangulum & propositæ quadratum, eidem quadrato prioris commensurabilia, adinuicem erunt commensurabilia, per decimam huius. Et proinde vtraque via, rectangulum illud (per nonam huius diffinitionem) certum erit. Certas igitur longitudine commensurabiles per quadratos, vel similes planos numeros tantùm, potentiam earum exprimere concludemus: potentiam verò longitudine incommensurabilium certarum, quibusuis numeris non similibus planis denotare. Quare certarum areas necessariò numeris exprimi fatebimur, longitudines verò quandoque tantùm.

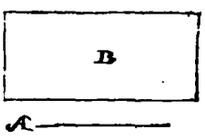
Propositio vigesima.

Si certum ad certam applicatum fuerit, latitudinem efficit certam, commensurabilémque ei ad quam applicatur longitudine.



Proponatur certa linea A B *ad quam applicetur rectangulum* A G *certum, efficiens latitudinem rectam* G B: *Dico ipsam* G B *esse certam, & commensurabilem longitudine, lineæ* A B *propositæ. Describatur ex* A B *quadratum* A D, *per quadragesimam sextam primi, quod (per octauam diffinitionem) est certum, & certo* A G *commensurabile. Nam si eidem incommensurabile esset, incertum esset, per decimã diffinitionem huius. Sed sicut* A D *ad* A G *rectangula, ita* B D *ad* B G *rectæ, per primam sexti, commẽsurabilia fuerunt* A D *&* A G *rectangula: commensurabiles igitur erunt* B D *&* B G *rectæ, per decimamtertiam huius. Atqui ipsi* B D *æqualis est* A B *recta, ex quadrati diffinit. ipsa itaque* G B *latitudo, propositæ* A B *commensurabilis erit longitudine. Si itaque certum ad certam applicatum fuerit latitudinem, &c.*

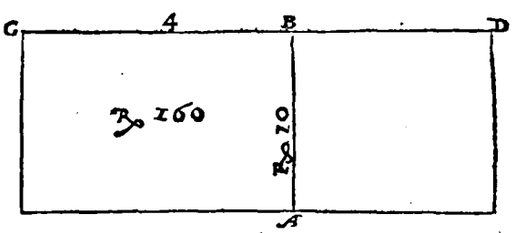
Lemma.



Potens incertam aream, incerta est recta. *Possit recta* A *aream* B *incertam: Dico rectam* A *incertam esse. Nam si certa esset, ea posset certum, sed non potest, imò incertum* B *ex hypothesi: igitur recta* A *incerta est. Potẽs itaque incertam, &c. Hæc vndecimæ diffinitionis primam partem ferè repetiuit.*

Propositio vigesimaprima.

Sub certis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis comprehensum rectangulum, incertũ est, illúdque potens incerta est, vocetúrque Media.



Comprehendatur rectangulum A G *sub rectis* A B B G, *quæ quidem sint certæ potentia tantùm adinuicem commensurabiles: Dico rectangulum* A G, *incertum esse, ac insuper idem rectangulum* A G *potentem, lineam incertã esse, eam autem quæ vocatur media, describatur ex* A B *quadratum* A D *quod (per octauam diffinitionem) certum erit. Et cùm* G B *sit incommensurabilis, ipsi* B A, *& ipsi* B D *(sibi æquali) eadem* G B *incommensurabilis erit. Sicut autem* B D *ad* B G *rectæ, sic* A D *ad* A G *rectangula, per primam sexti, incommensurabilis est* G B *lineæ* B D. *Incommensurabile igitur erit* G A *ipsi* A D, *per 13 huius, sed* A D *certum fuit. Reliquum igitur* A G *incertum erit, per decimam diffinitionem huius: quia verò incertum est* G A *rectangulum, seu area, illam potens incerta est, per lemma præcedentis, eáque vocatur media. Eò quidem quòd nullam à certis quantitatibus denominationem recipere possit, tamen eam quam suæ genituræ exprimit effectus, concipiet nomenclaturam, nempe qua media proportionalis inter binas certas potentia tantùm commensurabiles existit. Cùm enim sub extremis* A B B G, *æquum sit ei quod à media potente illud* A G, *per decimam septimam sexti. Ipsa potens meritò media inter eas dici poterit, per vigesimam secundam sexti. Sub certis igitur, potentia tantùm, &c.*

Corollarium.

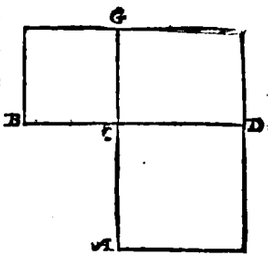
Sub certa & incerta comprehensum, incertum est. *Nam si* A B *sit certa,* G B *verò incerta,* B D *recta (ipsi* A B *æqualis) erit ad* B G *vt* A D *ad* A G. *Incommensurabile igitur erit* A G *ipsi* A D *certo, & igitur* A G *sub certa & incerta* A B B G *incertum erit, per decimam diffinitionem huius.*

Lemma.

Duabus datis rectis erit sicut prima ad secundam, sic quod à prima ad id quod sub binis continetur. Et insuper prima ad secundam, sicut quod sub binis ad quod ex vltima quadratum.

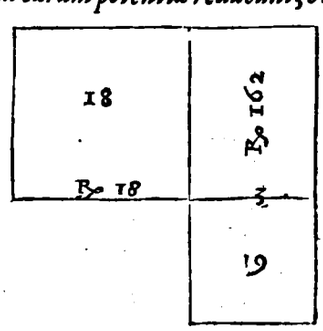
Datæ

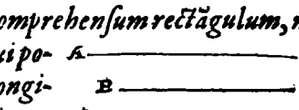
Datæ etenim rectæ A C C G *in rectum ponantur, & ex eis fiant quadrata* A D G B *cõpleto rectangulo* G D. *Patet (ex prima sexti) quadratum à prima* A C *esse ad rectangulum* G D *(sub duabus) sicut prima* A C *ad secundam* C G, *& insuper esse sicut* D C *ad* C B *(æquales ipsis* A C C G*) sic* G D *(quod sub binis) ad* G B, *quod ex vltima* E G *quadratum, per eandem primam sexti.*



MONITVM.

Patet hoc theoremate mutari naturam quantitatis quadratorum eiusdem naturæ, cùm ex eorum lateribus longitudine tantum incommensurabilibus cõtinetur rectangulum: cùm enim comparatur latitudo longitudini cuiusdam rectanguli incommensurabilis, tunc mutatur natura arearum quas quidem possunt rectanguli latera. Nam potentia harum rectarum hoc theoremate propositarum certa fuit, cõparatione adinuicẽ facta. Sed quia longitudines earum cõmensuratione caruerunt, naturã ab eis comprehẽsæ areæ alterauerunt, à priori quidem certa, mediam efficientes. Hac eadem de causa vtdebimus (25 & 27 huius) binas medias, quæ quidem quadrata eiusdem naturæ possunt, tamẽ quia longitudine commensurabiles non sunt, ab eis comprehensum alienam areæ nanciſci naturam, nempe certam, aut equidem mediam, alterius naturæ ac omni potẽtia incommensurabilem. Illud enim ea de re nostro arbitrio fit, quod ipsius rectanguli alteram dimensionem (hoc est longitudinem) certa liñea determinet, cui incidens indeterminata latitudo, binas quas exoptat quælibet area, dimensiones ita perturbat, vt sibi ad aream producendam seu exprimendam comparatæ, confusam & omni determinatione ac certitudine priuatam depromant magnitudinis quantitatem, secus si binæ illæ rectæ (certum potentes) licet propositæ certæ longitudine essent incommensurabiles. Inter se tamen longitudine commensurentur, hæc commensuratio longitudinis rectangulum concludens, sub binis dimensionibus, sibi commensuratis, naturam potentiæ linearum conseruat. Quã etenim altera earum proponit longitudinem, reliqua (sibi commensurabilis) eadem longitudinis natura dilatat, & inde potentiam comprehensi, binis illis dimensionibus compatibilibus, ad naturam earum potentiæ reducunt, vt vidimus monito decimænonæ huius. Vt autem per numeros surdos medium exprimamus, binas certas lineas potentia tantùm commensurabiles sumamus, scilicet 3 et rad. 18, radices quippe numerorum rationẽ quam quadrati non habentium scilicet 9 & 18, horum medius erit (ex vigesima septimi) res huius 162, & proinde medius radicum eorundem, scilicet harum 3, & rei 18, erit rad. rad. 162, per vigesimæ secundæ sexti secũdam partem. Sed 3 & rad. 18 (latera quadratorum 9 & 18) sunt certæ rectæ, potentia tantùm cõmensurabiles, sub eis itaque comprehensum (res scilicet 162 numeri) mediũ erit, illud igitur potẽs recta erit, res rei scilicet 362 numeri ex ductu ipsorum 9 & 18 facti. Quod si quidam argumentũ inferrent, quo dicerent, ex certis potentiam tantùm commensurabilibus comprehensum rectãgulum, medium non esse, sed potius certum, hac specie. Esto proposita certa A, *cui potentia tantùm commensurabiles existant* B *&* C. *Sint autem* B *&* C *longitudine inuicem commensurabiles: quoniam* A *est certa proposita* B, *erit certa potentia tantùm commensurabilis, similiter &* C: *quare* B *&* C *dicentur rectæ potentia commensurabiles ipsi propositæ certæ, & nihilominus certum comprehẽdunt, vt patuit decimanona huius, cùm sint certæ longitudine inter se commensurabiles. Ad hæc dicemus potentiæ vel longitudinis commensurationem non esse linearum* B *&* C *denominationem, qua earum significatur natura, sed esse eius ad quam referũtur affinitatis expreßionem, qua exprimitur habitudo ipsarum* B *&* C. *Diximus etenim antea, quãlibet earum pro varietate exempli propositam certam effici posse, super qua omnes aliæ incertæ generari possent. Non itaque potentiæ vel longitudinis commensuratio eas denominat, sed tantùm naturæ earum habitudinem. Quare cùm proponuntur binæ certæ longitudine commensurabiles, intelligamus commensurationem hanc inter eas non autem ad aliã referri. Similiter dicentes binas* B *&* C *potentia tantùm commensurabiles, intelligemus adinuicem non autem ad aliam propositam, niſi exprimatur: quare ipsæ* B *&* C *non dicuntur absolutè potentia tantùm commensurabiles, sed & longitudine. Nam huic negocio nihil confert* A *proposita certa: commẽsuratio etenim (vt diximus) naturam linearum non denominat, sed naturæ habitudinem. Nulla igitur dici potest sola potentia vel lõgitudine commensurabilis: cùm hæc commensuratio ad aliquam aliam referatur. Hac de causa notandum est non posse dari tres certas potentia tantùm commensurabiles, & proportionales, licet possint dari tres eidem propositæ potentia tantùm commensurabiles, & proportionales. Sed*

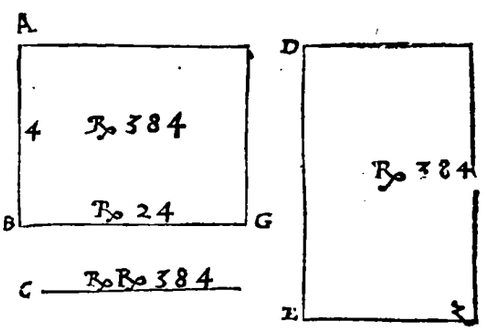




cùm hæc commenſuratio naturam linearum non exprimat, ſed habitudinem, ea refertur ad linearum habitudinem: Quæ ideo inter ſe potentia tantùm commenſurabiles non erunt, quia earum extremarum quadrata rationem haberent quam quadrati numeri. Nam ſuſcipiunt medium proportionalem, & igitur ſimiles plani ſunt (per vigeſimam noni) qui rationem habent quam quadrati, per vigeſimamſextam eiuſdem, & igitur latera habent longitudine commenſurabilia, per nonam huius. Non igitur potentia tantùm eſſent commenſurabiles, ſed & longitudine.

Propoſitio vigeſimaſecunda.

Quod à Media, ad certam applicatum, latitudinem efficit certam, ei verò ad quam applicatur longitudine incommenſurabilem.



Sit propoſita certa A B *recta, media verò eſto* C *quæ poſſit rectangulum* D E Z, *ſub certis potentia tantùm commenſurabilibus* D E E Z (*per vigeſimamprimam huius*) *comprehenſum. Ad datam verò rectam* A B *dato rectilineo* D Z *æquale rectangulum conſtituatur* A G (*per 45 primi*) *latitudinem efficiens* B G: *Dico rectam* B G *certam eſſe, longitudine quidem ipſi* A B *certæ incommenſurabilem. Quoniam æqualia & æquiangula conſtructa ſunt* A G *&* D Z. *Erit* (*per decimamquartam ſexti*) *ſicut* A B *ad* D E *ſic* E Z *ad* B G *reciprocè. Quare* (*per vigeſimamſecundam eiuſdem*) *erit quod ex* A B *ad quadratum ex* D E, *ſicut quod ex* E Z *ad quadratum ex* B G. *Commenſurabile eſt quod ex* A B *quadrato ex* D E, *cùm* A B *&* D E *ſint poſitæ certæ, commenſurabile itaque erit quod ex* E Z *ei quod ex* B G. *Certum igitur erit quod ex* B G, *per nonam diffinitionem cùm certa poſita ſit* E Z, *quare & certa erit* B G, *per ſextam diffinitionem. Cæterùm quia medium eſt* A G, *nempe æquale poſitum ipſi* D Z *quod poteſt* C *media, quod ex* A B *verò eſt certum, per octauam diffinitionem huius. Sed per lemma præfatum, eſt ſicut* A B *prima ad* B G *ſecundam, ſic quod ex* A B *certum ad quod ſub duabus* A B B G *medium, incommenſurabilis erit* B G *ipſi* A B *longitudine: nam medium* A G *incertum certo ex* A B *incommenſurabile eſt. Recta igitur* B G (*potens certum*) *certa dicetur, & longitudine ipſi* A B *certæ incommenſurabilis oſtenſa. Quod itaque à media ad certam applicatum latitudinem, &c.*

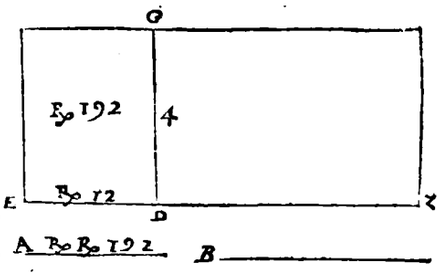
MONITVM.

Hæc præcedentis fuit ferè conuerſa: nam prior ſub longitudine & latitudine certarũ potentia tantùm commenſurabilium, mediam ſuperficiem concluſit, hæc autem ait, mediam ſuperficiem vnum latus rectanguli certa vallatum linea habentem, neceſſariò reliquam ſcilicet latitudinem certam efficere, & (vt priori vigeſimaprima dixit) potentia tantùm ipſi certæ (vnum latus continenti) commenſurabilem. Patet itaque mediam ſuperficiem contineri ſub lateribus binis quadratorum non habentium rationem quam quadrati numeri, ſed tantùm numerorum rationem, quorum aliquando vnus eſt quadratus, quandoque verò neuter, vt in numeris, cùm ſub radice numeri quadrati & radice ſurda non quadrati continetur rectangulum, vel cùm ſub duabus ſurdis quarum quadrati rationem quadratorum non habent, tunc verò quæ eam ſuperficiem poteſt, radix ſurda radicis ſurdæ dicetur, vt patuit præcedenti monito.

Propoſitio vigeſimatertia.

Quæ Mediæ commenſurabilis, Media eſt.

Eſto



Esto A *recta media, ipsi verò commensurabilis existat,* B *recta: Dico rectam* B *mediam esse, Exponatur certa* D G *cui applicetur æquum ei quod ex* A *(per 45 primi) & æquum ei quod ex* B *sint q̃.* G E *&* G Z. *Quoniam enim certa est* G D *cui applicatur quod à media scilicet* G E, *latitudo* D E *(per vigesimamsecundam huius) certa erit, potentia tantùm ipsi* G D *commensurabilis. Cùm autem* A *&* B *sint commensurabiles (ex hypothesi) longitudine vel potentia, rectangula* G E *&* G Z *(quæ ex ipsis* A *&* B*) commensurabilia erunt, per illationem nonæ huius. Sed sicut* G E *ad* G Z *sic est (per primam sexti)* D E *ad* D Z. *Commensurabilis igitur erit* D E *ipsi* D Z *(per decimamtertiam huius) & ideo* D Z *certa (per sextam diffinitionem huius.) Binarum autem* D E *&* D Z *altera* D E *alicui* G D *longitudine fuit incommensurabilis, & reliqua* D Z *eidem* G D *longitudine incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius. Certæ enim fuerunt ipsæ* G D *&* D Z *longitudine incommensurabiles. Ipsæ itaque* D Z *&* G D *potentia tantùm commensurabiles erunt, cum sint certæ, per conuersam sexti diffinit. Sub ipsis igitur* G D *&* D Z *comprehensum* G Z *medium erit, per* 21 *huius, & illud potens* B *media. Quæ itaque mediæ commensurabilis media est siue longitudine, siue potentia commensurentur.*

Corollarium.

Mediæ areæ commensurabilis area, media est. *Si etenim ponatur medium esse* G E, *aliud verò quoddam ipsi commensurabile fuerit, coaptetur illud ad rectam* G D, *sit q̃.* G Z, *quia sanè* G E G Z *sunt commensurabilia & (ex prima sexti) rectæ* D E *&* D Z *eandem rationem habentes commensurabiles erunt, ex decimatertia huius, & igitur certæ. Quarum quidem altera* D E *alicui* D G *longitudine incommensurabilis fuit, & reliqua* D Z *eidem* G D *longitudine incommensurabilis erit. Potentia itaque tantùm erunt, ipsæ* G D D Z *commensurabiles, & certæ. Medium itaque erit* G Z *(per prius ostensa) medio* G E *commensurabile positum. Sequitur insuper id quod in genere protulit Euclides de lineis (coroll. 9 huius) sequi in mediis, scilicet quæ mediæ longitudine commensurabilis est, & potentia eidem commensurabilis erit, quæ verò potentia non ideo longitudine. Quæ autem potentia incommensurabilis, semper ideo & longitudine, quæ autem longitudine, non ideo & potentia semper.*

MONITVM.

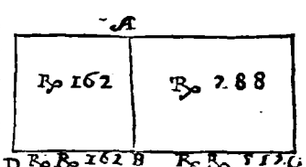
Quia diximus certas, certis commensurabiles esse, ac conuersim certis commensurabiles, certas esse. Non sequemur hanc legem in mediis, scilicet quia diximus mediis rectis commensurabiles, medias esse, non inde colligemus quaslibet medias, mediis aliis commensurabiles esse, & ne quidem longituditudine tantùm differre, sed & potentia. Quod autem longitudiue differant mediæ, testantur vigesimaquinta, vigesimaseptima, vigesimaoctaua, & aliæ quamplures huius, cũ scilicet instar certarum ipsæ potentia tantùm commensurabiles, alienam à suis potentiis continent potentiam. Quod autem mediæ potentia differant, siue incommensurabiles existant, docet trigesimaquinta huius, producens duas areas medias incommensurabiles, quare & rectæ potẽtes eas areas, quæ quidem mediæ sunt (per vigesimam primam huius) potentia incommensurabiles existunt, & à fortiori argumento longitudine, per corollarium nonæ huius. Concludemus igitur plura media licet à binis certis comprehensa, inuicem incommensurabilia esse, quemadmodum & plures areas à binis mediis cõprehensas (potentia tantùm commensurabilibus) incommensurabiles adinuicem esse, scilicet alias certas, alias alterius generis mediarum, vt dicent vigesimaseptima & vigesimaoctaua. Huius autẽ differentiæ causa fuit quòd certas sub vnica specie commensurabilium arearum coegerit Euclides, medias verò denominans plura mediarum subintelligit contineri genera sibi incommensurabilia, vt patebit 115 *huius: hac itaque de causa lineæ quæ mediæ sunt, non ideo erunt semper mediæ lineæ commensurabiles. Mediarum itaque intelligentiam hac arte à numeris sumemus, vt medias areas per radices non quadratorum numerorum exprimamus, mediarum verò potentiarum longitudines, per radices radicum non quadratorum. Mediæ autem commensurabiles exprimentur per radices radicum numerorum similium planorum, non tamen quadratorum, sed habentium rationem quam quadrati quadratorum. Nam horum numerorum radices, ac radices radicum, rationem seruant vt numeri, nempe si quadrata proportionalia fuerint latera proportionalia erunt, ex vigesima*

ſecunda ſexti: incommenſurabiles verò potentia, ſunt radices radicum non habentium rationem quam quadrati numeri. Nam eorum radices ſunt potentiæ mediarum, quæ ſunt incommenſurabiles, per nonam decimi. Mediæ verò potentia tantùm commenſurabiles, ſunt radices radicum numerorũ habentium rationem, quam ſimplices quadrati, non autem quadrati quadratorum. Nã radices (quæ ſunt potentiæ mediarum) ſunt commenſurabiles: ſed radices radicum incommenſurabiles exiſtunt, quæ mediarum denotant longitudinem. Quare infinitæ mediæ potentia incommẽſurabiles reperientur, per conferentiam infinitorum numerorum diſſimilium planorum ad ſeinuicem factam, nam diſſimiles plani rationem quadratorum non habentes (ex corollario nonæ decimi) efficiunt eorum radices mediarum areas deſignantes incommenſurabiles, ex nona decimi. Et idcirco medias longitudine ſimul incommenſurabiles totidem, nam quæ potentia incommenſurabiles fuerunt, longitudine incommenſurabiles erunt, ex illatione nonæ decimi.

Propoſitio vigeſimaquarta.

Sub mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis cõprehenſum rectangulum, medium eſt.

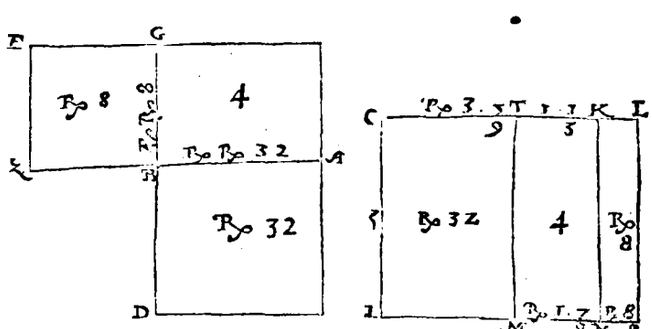
Sub mediis A B *&* B G *longitudine commenſurabilibus rectis cõtineatur rectãgulum* A G: *Dico* A G *mediũ eſſe, fiat ex* A B *quadratũ* A D, *per* 46 *primi, quod medium eſt, nempe ex media* A B: *Quia verò* D B, *æqualis ipſi* A B, *eſt lõgitudine commenſurabilis ipſi* B G. *Eſt autem* D A *ad* A G, *vt* D B *ad* B G, *ex prima ſexti, cõmenſurabile erit* A G (*per decimamtertiam huius*) *ipſi* D A *medio: quare igitur &* A G *medium erit, per corollarium præfatum. Sub mediis itaque longitudine, &c.*



Propoſitio vigeſimaquinta.

Sub mediis potentia tantùm commenſurabilibus rectis lineis comprehenſum rectangulum, aut certum, aut medium eſt.

Contineatur rectangulum A G *ſub mediis* A B B G *potentia tantùm commenſurabilibus: Dico* A G *rectãgulum aut certum, aut medium eſſe, fiat (per* 46 *primi) ex* A B *quadratum* A D, *&* *ex* B G *ipſum* B G E Z, *quæ à mediis deſcripta media erũt. Proponatur certa* C I, *ad quam dato* A D *æquale, cõſtituatur* C I T M, *ad rectam verò* T M *ipſi* A G *æquum* T M K N, *ad rectam verò* K N *ipſi* E B *æquum* N L, *per* 45 *primi, quoniam æquales ſunt* D B B G *ipſis* A B B Z, *erit* D B *ad* B G *vt* A B *ad* B Z, *&* *proinde (ex prima ſexti)* A D *ad* A G *vt* A G *ad* G Z. *Quare & ſicut* I T *ad* M K, *ſic erit* M K *ad* N L, *ſunt enim æqualia ipſis* A D, A G, *&* G Z, *ſed media ſunt* A D *&* G Z: *media igitur erunt* I T *&* N L, *quæ ad certam* C I *applicata latitudines* C T *&* K L *certas efficiunt, per vigeſimam ſecundam huius, longitudine quidem incõmenſurabiles ipſi* C I. *Certæ igitur ſunt* C T *&* K L, *potentia tantùm commenſurabiles ipſi* C I *propoſitæ, cùm autem ſit (per primam ſexti)* C T *ad* K L *vt* I T *ad* N L, *ipſa verò* I T *&* N L *æqualia ipſis* A D *&* G Z *ſint commenſurabilia poſita. Commenſurabiles erunt rectæ* C T *&* L K *longitudine, per decimamtertiam huius. Quod igitur ſub binis* C T K L *certum erit, per decimamnonam huius: Cæterùm quia proportionalia oſtenſa ſunt,* I T, M K, N L, *proportionales erunt, ex prima ſexti,* C T, T K, K L. *Quot itaque ſub extremis* C T *&* K L *æquum erit ei quod à media* T K, *per decimamſeptimam ſexti, quod autem ſub* C T K L *certum fuit, quod itaque ab ipſa* T K, *certum erit. Certa igitur erit (per octauam huius diffinitionem) recta* T K, *quæ ipſi* C I *propoſitæ (hoc eſt ipſi* T M) *lõgitudine, aut potẽtia tantùm commenſurabilis eſt: ſiquidem longitudine, certum erit* M K *ſub ipſis* M T T K *comprehenſum: per* 19 *huius. Si autem potentia tantùm medium erit ipſum* M K, *per* 21 *huius. Medium itaque aut certum erit* M K: *quare* A G *ipſi* M K *æquale poſitum aut certum, aut medium erit. Sub mediis igitur potentia tantùm, &c.*



Coroll.

Corollarium.

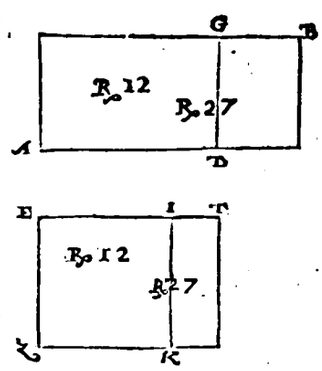
Hinc assequimur, quod sub duabus rectis, medium esse inter earum quadrata. *Vt patuit ex prima sexti, quod sub* A B B G *medium fuisse inter* A D *&* G Z.

MONITVM.

Adnotat Campanus quæ dixit Euclidis theorema vigesimumquartum, Ac insuper, si binæ Mediæ propositæ A B B G *potentia incommensurabiles existerent, sub ipsis comprehensum, nec certum, nec equidem medium esset: nam contineretur sub certa & media, hac methodo. Nam* I T N L *incommensurabilia efficerent rectas* C T K L *longitudine incommensurabiles (per primam sexti) certas tamen cum Media sint,* I T N L, *per* 22 *huius: quare sub* C T *&* K L *comprehensum medium esset, per vigesimamprimam huius, ac ideo quod ex* T K *medium (per decimam septimam sexti) æquum comprehenso sub* C T K L. *Media igitur esset* T K *& proinde* M K *contineretur sub Media* T K *& certa* C I, *vel* T M. *Quod quidem* M K *æquum est ei quod sub binis* A B B G, *nõ igitur medium esset, nec quidem certum, sed alia quantitatis species.*

Propositio vigesimasexta.

Medium non excedit Medium Certo.



Esto medium A B, *quod excedat ablatum medium* A G *rectangulo* D B: *Dico* D B *non esse certum. Quòd si opponatur sit (si fieri possit) certum* D B. *Exponatur autem certa* E Z *cui applicentur æqualia ipsis* A G A B, *quæ sunt* Z I Z T, *per* 45 *primi. Ipsa igitur* Z I Z T *media erunt. Cùm autem ab æqualibus* A B *&* Z T *æqualia auferantur* A G *&* Z I, *reliqua* D B *&* K T *erunt æqualia. Sed certum supponitur* D B *certum igitur erit &* K T. *Quia verò media sunt* Z I Z T, *ipsis* A G *&* A B *æqualia, certæ potentia tantùm commensurabiles (ipsi* E Z *propositæ) erunt* E I *&* E T *(per* 22 *huius) rectæ. Et quia certum ponitur* K T, *Illud ad certam* E Z *(vel* I K*) applicatum, latitudinem* I T *rectam certam efficit, longitudine quidem ipsi* E Z *propositæ commensurabilem, per vigesimam huius. Et cùm duarum* E I I T *alia sit ipsi* E Z *commensurabilis scilicet* I T, *alia verò non, ipsæ* E I I T *incommensurabiles erunt longitudine, per corollarium primum decimæ huius. Sed sicut* E I *ad* I T *sic est quòd ex* E I *ad quod sub* E I I T, *per lemma* 21 *huius, incommensurabile igitur erit quod ex* E I *ipsi quod sub* E I I T, *& ipsi quod bis sub* E I I T, *per corollarium secundum decimæ huius. Et similiter quòd bis sub* E I I T *ipsis quæ ex* E I *& ex* I T, *quæ sunt potentiæ commensurabiles certæ, incommensurabile erit, per idem corollarium. Cùm autem quæ ex* E I *&* I T *cum eo quòd bis sub* E I I T *componant (per quartam secundi) quadratum totius* E T, *incommensurabilia autem sint adinuicem componentia, totum igitur vtrique incommensurabile (ex duodecima huius) erit, scilicet eis quæ ex* E I I T *certis, incertum itaque (per nonam diffinitionem huius) erit totum ex* E T. *Quare & recta* E T *incerta per vndecimam diffinitionem huius erit. Sed & certa potentia namque ipsi propositæ* E Z *commensurabilis ostensa est, quod fieri non potest. Non igitur certum esse potest* D B *quo* A B *medium excedit* A G *medium. Medium itaque non excedit medium certo.*

Propositio vigesimaseptima. *Problema* 4.

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles Certum comprehendentes.

Proponantur binæ rectæ certæ potentia tantùm commensurabiles A & B. *Quibus (per decimamtertiam sexti) media proportionalis inueniatur* G, *fiátque (per duodecimam sexti) vt* A *ad* B *sic* G *ad* D. *Quoniam certæ potentia tantùm commensurabiles sunt* A & B, *media erit* G, *per demonstrata* 21 *huius. Quia verò* A & B *sunt potentia tantùm commensurabiles, ipsæ* G & D *(eandem rationem habentes) potentia tantùm commensurabiles erunt, per decimamtertiam huius. Media itaque erit* D, *per* 23 *huius. Et cùm sit* A *ad* B *vt* G *ad* D, *erit vicissim* A *ad* G *vt* B *ad* D. *Sed sicut* A *ad* G *sic fuit* G *ad* B, *sicut igitur* G *ad* B *sic* B *ad* D, *per vndecimam quinti. Quod itaque sub* G & D *æquum est ei quod ex* B *fit, per decimamseptimam sexti. Atqui certum est quod ex* B *certa fit. Certum igitur erit quod sub* G & D, *quæ quidem mediæ potentia tantùm commensurabiles ostensæ sunt. Medias igitur inuenimus potentia tantùm commensurabiles certum comprehendentes.*

A — Po 9
G — Po Po 54
B — Po 6
D — Po Po 24

Propositio vigesimaoctaua. *Problema* 5.

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles Medium comprehendentes.

Exponantur tres rectæ certæ potentia tantùm commensurabiles A B G. *Inter* A & B *verò Media constituatur* D *proportionalis, per* 13 *sexti, sit autem vt* B *ad* G *sic (per* 12 *sexti)* D *ad* E. *Quoniam trium* A D B *proportionalium quod sub* A B *extremis æquum est ei quod à media* D, *per decimamseptimam sexti. Medium autem est sub ipsis* A & B *certis potentia tantum commensurabilibus, per* 21 *huius, medium igitur erit quod ex* D, & *(per eandem)* D *Media erit. Et quia sicut* B *ad* G *sic fuit* D *ad* E. *Atqui* B & G *certæ, sunt potentia tantum commensurabiles, & igitur* D & E *potentia commensurabiles erunt, Media autem fuit* D, *Media itaque erit &* E, *per* 23 *huius. Cùm enim sit* B *ad* G *vt* D *ad* E. *Erit vicissim* B *ad* D *vt* G *ad* E. *Sed vt* B *ad* D, *sic est* D *ad* A, *per corollarium quartæ quinti. Sicut itaque* D *ad* A *sic* G *ad* E. *Quod itaque sub extremis* D & E *æquum est ei quod sub mediis* A & G, *per decimamsextam sexti. Quod autem sub* A & G *certis potentiæ tantùm commensurabilibus, Medium est, per* 21 *huius. Quod itaque sub* D E *mediis potentia tantùm commensurabilibus ostensis, medium erit. Medias itaque inuenimus, &c.*

A — Po 16
D — Po Po 128
B — Po 8
G — Po 6
E — Po Po 72

Lemma.

Comperire duos quadratos numeros qui coniuncti quadratum numerum efficiant.

Sint bini numeri similes plani, simul pares aut simul impares A B & B G. *Quoniam si à toto* A B *pari auferatur* B G *par, reliquus par erit* A G, *per* 25 *noni: similiter imparibus propositis si ab impari impar tollatur, reliquus par erit, per* 27 *noni. Secetur itaque bifariam reliquus ille* A G *in* D, *erit qui sub toto* A B & B G *adiuncto vnà cum quadrato* D G, *æqualis quadrato* D B, *per sextam secundi. Sed cùm* A B & B G *sint similes plani, qui sub eis quadratus erit, per primam noni, qui verò ex* D G *quadratus est. Inuenti itaque sunt duo numeri quadrati, scilicet æqualis ei qui sub* A B & B G *cũ eo qui ex* D G, *quadratum qui ex* D B *componentes coniuncti.*

A — 5 — 4 — 9 — B
D — G

Corollarium.

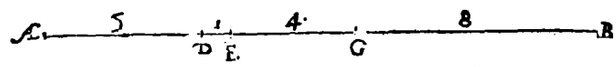
Inuenire duos quadratos numeros se quadrato excedentes. *Nam positis* A B & B G *similibus planis, inuenimus duos quadratos numeros scilicet qui ex* B D & *eum qui ex* D G, *quorum excessus (is scilicet qui sub* A B B G) *quadratus est. Quòd si similes plani non fuerint ipsi* A B & B G, *excessus duorum quadratorum ex* B D & D G, *scilicet qui sub* A B B G *quadratus non erit. Nam si quadratus esset ipsi* A B & B G *similes essent plani, per secundam noni, contra hypothesim.*

Lemma secundum.

Comperire duos numeros quadratos, compositum non quadratum efficientes.

Disp

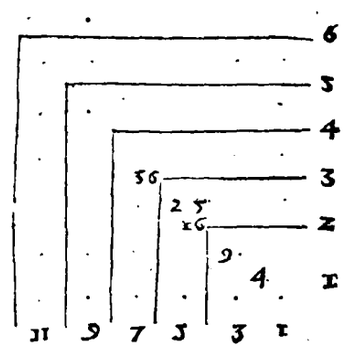
Disponamus vt prius numeros A B *&* B G *secto bifariam* A G *in* D. *Auferatur insuper ab ipso* D G *vnitas* D E: *Dico duos quadratos, scilicet eum qui sub* A B B G



similibus planis, & eum qui ex G E *non componere quadratum numerum, quoniam qui sub* A B B G *cum quadrato* D G *æquus est quadrato* D B, *vt ostendimus. Sequetur eundem qui sub* A B B G *cũ quadrato* G E, *minorem esse quadrato* D B, *gnomone quidem numerorum lateralium quo quadratus* G D *excedit quadratum* G E. *Cùm autem quadratus* B D *excedat quadratum* B E *alio & maiori gnomone, scilicet numerorum lateralium maioris quadrati* B D *quo excedit quadratum* B E. *Sequetur quadratum* B D *plus excedere quadratum* B E, *quàm eum qui sub* A B B G *cum quadrato* G E. *Maior itaque erit qui sub* A B B G *cum quadrato* G E, *quadrato* B E. *Minor autem quadrato* B D, *inter quos* B D *&* B E *non cadit latus quadrati, cùm sola vnitate distent. Qui igitur sub* A B B G *similibus planis quadratus, cùm quadrato alio* G E, *æquantur non quadrato numero qui inter quadratos* B D *&* B E *vnitate distantes reperitur, non igitur componunt quadratum numerum ipsi qui sub* A B B G *& qui ex* B E, *quadrati.*

MONITVM.

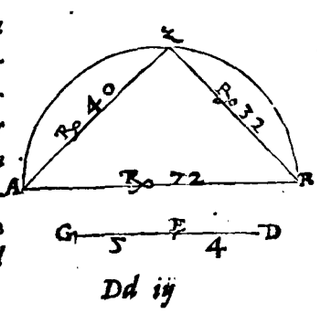
Animaduertendum curauimus quadratorum numerorum seriiẽ, ex imparium serie ortam esse. Soli nempe impares ab vnitate cõiuncti, quadratos efficiunt, ac quotlibet couiuncti: doceamus exemplo, Sumatur vnitas quadratum referens (ea etenim quibuslibet subiectis adaptatur vt prima septimi diffinitione diximus) cui proximus addatur impar, qui quidem bina eius latera cum anguli complemento restituat, is erit ternarius, qui vnitati additus 4 producit, binarij scilicet quadratum. Illi item consequens impar quinarius addatur is proferet nouem, scilicet ternarij quadratum, cui additus quartus impar 7 facit 16 quaternarij quippe quadratum, eidem porrò iungatur 9 fiet 25 quinarij quadratum. Rursus ipsi copuletur sequens impar 11 *fiet 36 senarij quadratum: sicque infinitè ad quotuis procedemus quadratos, cùm scilicet cuilibet quadrato additur gnomon, æquipollens duplicatæ radici, ac insuper vnitati quæ angulum gnomonis compleat, qui quidem gnomones singuli impares numeri sunt, eò quòd sese excedant tantùm binario, vel quia bina quadrati æqualia latera augẽt vnitate. Quare si eorum quadratorum vnitate tantùm augeantur latera, perspicuum est, ea serie omnes contineri quadratos, cùm nullus sit quadratus numerus nisi is cuius latus vnitatibus integris referri potest, in se multiplicatis ipsum producentibus. Nullius itaque quadrati latus inter duas vnitates cadet, & proinde inter eos cadentium, nullus quadratus erit ab ipsis alius, quorum infiniti rationem non habentes quam quadrati, variis modis educi possunt, scilicet sumpto quadrato ad non quadratum, per corollarium vigesimæquintæ octaui, aliis in ratione superparticulari, ac superbipartiente, per corollarium octauæ octaui. Et demum omnibus dissimilibus planis, per corollarium nonæ huius: qui quidem infiniti sunt numero scilicet primi, per corollarium vigesimæsextæ octaui, qui sunt infiniti, per vigesimam primam noni, nempe plures omni multitudine, ac alij dissimiles plani innumerabiles. Quod apponit autem græcum lemma huic, corollarium fuit sextæ huius.*



Propositio vigesimanona. Problema 6.

Comperire binas Certas potẽtia tantum commensurabiles, quarum maior plus possit minore, eo quod ex commensurabili sibi longitudine.

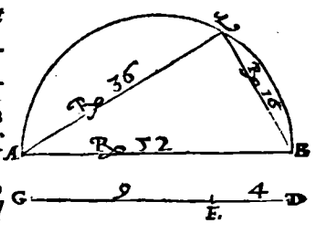
Sumatur ex secunda parte corollarij primi lemmatis vigesimæ octauæ huius, quadratus numerus G D, *excedens quadratum* D E *non quadrato* E G, *fiátque (per corollarium sextæ huius) sicut* G D *ad* G E *numeri, sic quod ex* A B *proposita ad id quod ex* A Z, *descripto namque super* A B *semicirculo, cui (per primam quarti) ipsi* A Z *æqualis coaptetur, conuncta* Z B: *Dico* A B *&* A Z *certas esse potentia tantùm commensurabiles, quarum maior* A B *plus potest minore* A Z, *eò quòd ex* Z B *ipsi* A B *longitudine incommẽsurabili; Quoniam quadratum* A B *excedit quod*



ex A Z, *eò quòd ex* Z B, *per* 47 *primi, numerus verò* G D *excedit numerum* G E *ipso* E D, *per hypothesim. Est autem quod ex* A B *ad quod ex* A Z *sicut* G D *ad* G E. *Erit igitur rationis conuersione (per corollarium decimænonæ quinti, quod ex* A B *ad quadratum* Z B *excessum, sicut* G D *ad excessum* E D, *quia verò quadrata rectarum* A B A Z *rationem non habent quam quadrati, scilicet ipsorum* G D G E, *ipsæ* A B A Z *longitudine sunt incommensurabiles: & ideo potentia tantum commensurabiles, cùm* A B *sit proposita per nonam huius. Cùm autem quadratum* A B *ad quod ex* Z B *rationem habeat quam quadrati numeri* G D E D, *Ipsæ* A B *&* Z B *longitudine commensurabiles existunt, per eandem. Comperimus itaque binas rectas certas* A B A Z *potentia tantùm commensurabiles, quarum maior* A B *plus potest minore* A Z, *eò quod ex* Z B *sibi longitudine commensurabili.*

Propositio trigesima. *Problema* 7.

Comperire binas Certas potẽtia tantum commẽsurabiles, quarum maior plus potest minore eo quod fit ex sibi longitudini incommensurabili.



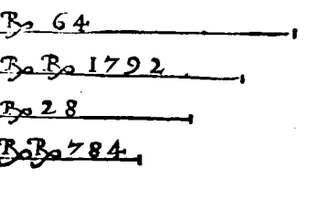
Exponatur certa A B, *ac (per secundum lemma* 28 *huius) comperiantur duo quadrati numeri* G E E D *non quadratum* G D *componẽtes, fiat autem sicut* G D *ad* G E, *sic quod ex* A B *ad quod ex* A Z, *per corollarium sextæ huius. Descripto rursus super* A B *semicirculo, ipsi* A Z *æqualis, coaptetur, coniuncta* Z B. *Cùm enim sit* G D *ad* G E, *vt quod ex* A B *ad quod ex* A Z, *erit (vt in præfata ostendimus) quod ex* A B *ad excessum ex* Z B *vt* G D *ad excessum* E D, *per collarium decimænonæ quinti, sed* G D *ad vtrosque* G E *&* E D, *rationem habet quam non quadratus ad quadratum, per hypothesim. Igitur quod ex* A B *ad quod ex* A Z, *seu ex* Z B, *rationem habet quam non quadratus ad quadratum. Ipsæ igitur* A Z Z B *ipsi* A B *potentia tantùm sunt commensurabiles, per nonam huius, & certæ, cùm proposita fuerit* A B *certa. Comperimus itaque binas certas* A B A Z *potentia tantum commensurabiles, quarum maior* A B *plus potest minore* A Z, *eò quòd ex* Z B *ipsi* A B *longitudine incommensurabili.*

MONITVM.

Hæc eadem fuit prioris demonstratio, transposita tantum numerorum ratione, quæ eandem producat quadratorum ex lineis rationem, insuper lemma A *Græco exemplari hic appositum, sat supérque lemmate vigesimæprimæ huius, aperuimus, scilicet sicut linea ad lineam, sic quod sub illis ad quadratum vltimæ.*

Propositio trigesimaprima. *Problema* 8.

Comperire binas Medias potentia tantum commensurabiles, Certum comprehendentes, quarum maior plus possit minore, eo quod fit à sibi longitudine commensurabili.



Sumantur (per 29 *huius) binæ certæ potentia tantùm commensurabiles* A B *quarum maior* A *plus possit minore* B *eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili. Ponatur autem (per decimamtertiam sexti) media proportionalis ipsis* A *&* B *quæ sit* G, *fiátque sicut* A *ad* B *sic* G *ad* D, *per duodecimam sexti: Dico* G *&* D *esse medias potentia tantùm commensurabiles, certum comprehẽdentes, ipsamq; plus posse minore* D, *eò quòd fit à sibi commensurabili longitudine. Quoniam* G *recta est media ipsarum* A *&* B *certarum potentia tantùm commensurabilium. Quadratum rectæ* G *æquum est (per decimamseptimam sexti) ei quòd sub extremis* A *&* B, *quod sub* A *&* B *verò medium est, atque* G *recta illud potens media est, per* 21 *huius. Quia insuper est* A *ad* B *vt* G *ad* D. *Sed* A *ipsi* B *potentia est commensurabilis tantùm, &* G *ipsi* D *potentia tantùm, per* 13 *huius, commensurabilis erit. Media autem est* G, *media igitur erit &* D, *per vigesimamtertiam huius. Cùm præterea* A *plus possit ipsa* B *eò quòd à sibi longitudine commensura-*

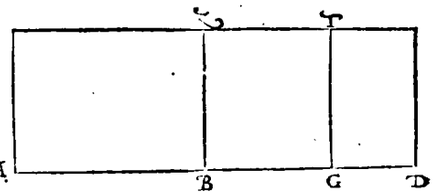
mensurabili,& G plus potest ipsa D, eò quòd à sibi longitudine commensurabili, per 16 huius. Cæterùm positum est A esse ad B vt G ad D erit itaque vicissim A ad G vt B ad D, per 16 quinti. Sed vt A ad G sic G ad B fuit, vt igitur G ad B sic erit B ad D. Quare trium G B D proportionalium quod à media B, æquum est ei quod sub extremis G & D rectangulo, per 17 sexti. Sed quòd à media B certum est, per octauam diffinitionem huius, cum B sit certa. Quod igitur sub G & D certum erit, Comperimus itaque binas medias G & D potentia tantum commensurabiles, certum comprehendentes, quarum maior G plus potest minore D eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili.

Corollarium.

Eodem argumento patebit dari binas medias potentia tantùm commensurabiles, certum continentes, & quarum maior plus poterit minore eo quod fit à sibi longitudine incommensurabili. *Si ponamus (per trigesimam huius) certam A plus posse certa B quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Nam id idem sequentur G & D mediæ, vt ostendimus.*

Lemma.

Si tres rectæ in quauis ratione fuerint, erit sicut prima ad tertiam, sic quod sub prima & secunda, ad id quod sub secunda & tertia continetur.



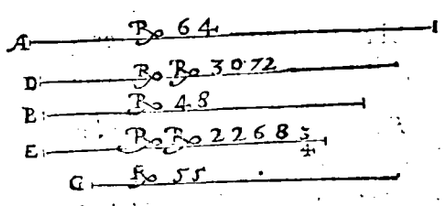
Sint tres rectæ in quauis ratione A B B G & G D. Et ex B G media fiat (per 46 primi) quadratum B Z T G, perficiantúrque rectangula A Z & D T. Quoniam (per primam sexti) rectangula A Z B T & T D sunt in rationibus rectarum A B B G & G D, erit æqua ratione A Z ad T D vt A B ad G D, per 22 quinti. Sed A Z continetur sub prima A B & secunda B G, cum sit illi B G æqualis Z B, quinetiam T D continetur sub B G secunda & G D tertia, cum T G ipsi B G sit æqualis. Sicut igitur A B prima ad G D tertiam, sic erit A Z sub prima & secunda, ad T D quod sub secunda & tertia.

MONITVM.

Hoc lemma ab altero Græcorum exemplarium tulimus, quod licet demonstrandis subsequentibus necessarium non sit, tamen demonstrationum compendio admodum vtile comperietur.

Propositio trigesimasecunda. Problema 9.

Inuenire duas medias potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes, quarum maior plus possit minore, eò quòd fit ex sibi cõmensurabili longitudine.



Sint tres certæ potentia tantùm cõmensurabiles A B G, & possit A plus ipsa G quadrato sibi commensurabilis longitudine, per vigesimamnonam huius. Ipsis autem A & B media proportionalis (per decimãtertiam sexti) exhibeatur D. Ad rectam autem D æquum rectangulum ei quod sub B & G constituatur latitudinem efficiens E, per quadrageſimamquintam primi: Dico rectas D E medias esse, quales inquirimus. Cùm autem sit (per lẽma præcedens) sicut A ad G, sic quod sub A B ad id quod sub B & G: sed ei quod sub A B æquum est, quod ex D media, ei verò quod sub B G æquum est (ex hypothesi) quod sub D E, erit igitur sicut A ad G, sic quod ex D ad id quod sub D E, sed sicut quod ex D ad id quod sub D E, sic (per lemma vigesimæ primæ huius) fuit D ad E: sicut igitur A ad G, sic D ad E. Cùm autẽ D possit medium quod sub A & B, per vigesimam primam huius, ipsa D media erit, quia verò est A ad G vt D ad E, sed A ipsi G potentia tantùm cõmensuratur, & D ipsi E potentia tantùm commensurabitur, per 13 huius, media itaque erit E per vigesimamtertiam huius. Potest autem A plus ipsa G eò quòd à sibi longitudine commensurabili, & D plus ipsa E poterit, eò quòd à sibi longitudine commensurabili, per decimamsextam huius. Præterea quod sub B G medium est, per vigesimamprimam huius, quod ita-

que ſub D E *æquum illi poſitum, medium erit. Inuenimus igitur duas medias* D *&* E *potentia tantùm commenſurabiles medium comprehendentes, quarum maior* D *plus poteſt minore* E *eò quòd ſit ex ſibi longitudine commenſurabili.*

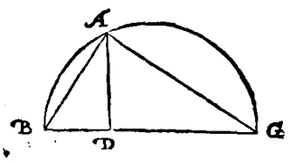
Corollarium.

Haud ſecus harum mediarum maiorem plus poſſe minore eo quod ſit à ſibi incommenſurabili longitudine oſtendemus. *Ponẽtes ſcilicet* A *plus poſſe ipſa* G, *eò quòd ſit* A *ſibi longitudine incommenſurabili, ex trigeſima huius.*

Lemma.

In triangulis rectangulis ab angulo recto in baſim perpendiculari demiſſa quatuor rectãgulorum eliciuntur æqualitates.

Eſto triangulum rectangulum A B G, *à recto autem eius angulo* G A B, *in baſim* B G *perpendicularis agatur* A D: *Dico ab hac triãguli deſcriptione quatuor ortiri rectangulorum æqualitates.*



Prima.

Quod ſub G E B D *æquum eſt ei quod ex* B A. *Cùm enim per corollarium octauæ ſexti latus* B A, *quod ad ſegmentum* B D *ſit media inter totam* G B *& ſegmẽtum* B D. *Quod igitur ſub extremis* G B B D *æquum erit, per decimamſeptimam eiuſdem, ei quod à media* A B.

Secunda.

Quod ſub B G G D *æquum eſt, ei quod ex* A G *quadrato, eodem quo prius argumento,* A G *media inter* B G G D *proportionalis erit, quare (per decimãſeptimam ſexti) ſub* B G G D *æquum erit ei quod ex* A G *fit.*

Tertia.

Quod ſub B D D G *æquum eſt ei quod ex* A D. *Nam per* 13 *ſexti media eſt* A D *perpẽdicularis inter* B D *&* D G *baſis ſegmenta, & proinde ſub extremis* B D D G *æquum erit ei quod à media* A D *fiet quadrato.*

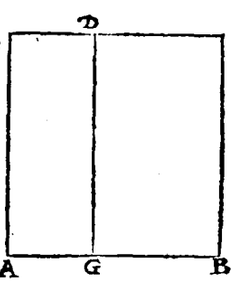
Quarta.

Quod ſub B G A D *æquum eſt ei quod ſub* G A A B, *cùm ſint (per quartam ſexti) proportionales* B G *ad* G A, *vt* A B *ad* A D. *Erit (per decimamſextam ſexti, quod ſub extremis* B G A D *æquum ei quod ſub mediis* G A A B *rectangulo: ſimiliter ſub* A B G D *æquum erit ei quod ſub* A D A G.

Lemma.

Si recta ſecetur inæqualiter, quod ſub tota & maiori ſectione, ad id quod ſub tota & minore, erit ſicut maior ad minorem.

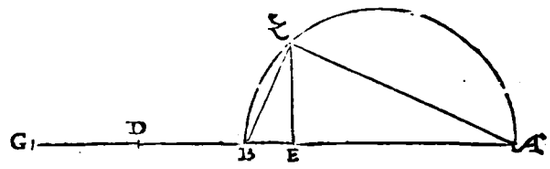
Excitetur ipſi A B *æqualis ad rectos* D G, *& perficiantur rectangula,* A D D B, *patet rectangulum* A D *quod ſub tota* A B (*hoc eſt* D G) *& maiori* A G, *ad rectangulum* D B *ſub eadem tota* D G *& minori* G B *eſſe, vt* A G *maior ad* G B *minorem, per primam ſexti. Hoc lemma ab altero tantum Græcorum exemplari datum eſt.*



Propoſitio trigeſimatertia. *Problema* 10.

Inuenire binas rectas potentia incõmenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarum certum, quod verò ſub ipſis Medium.

Sint



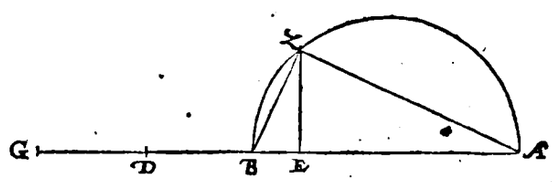
Sint binæ certæ potentia tantùm commẽsurabiles A B B G, *per decimamquartam huius, quarum maior* A B *plus poſsit minore* B G *eò quòd à ſibi longitudine incommenſurabili, per 30 huius: ſuper* A B *autem fiat ſemicirculus, ſectáque* G B *bifariam in* D *ei quod ex* D B *æquũ ad ipſam* A B *applicetur, deficiens ſpecie quadrata, per 28 ſexti, ſitq; quod ſub* A B E B, *Excitetúrque per* E *ipſi* A B *perpendicularis* Z E, *coniunctis* Z B Z A, *quoniam* A B *&* B G *ſunt inæquales, & maior* A B *plus poteſt minore* B G *eò quòd à ſibi longitudine incommenſurabili. Quartæ autem parti eius quod ex minore* B G *(hoc eſt quadrato* D B*) æquum, ad maiorem* A B *applicatum eſt (quod ſcilicet ſub* A E E B *per hypotheſim) deficiens ſpecie quadrata: incommenſurabilis igitur eſt* A E *ipſi* E B, *per ſecundam partem decimæ octauæ huius. Eſt autem (per proximum lemma)* A E *ad* E B, *ſicut quod ſub* A B A B *ad id quod ſub* E B A B *tota, quod autem ſub* A E A B *æquum eſt (per primum lemma præcedentis) ei quod ex* A Z. *quod verò ſub* A B E B *æquum eſt (per idem lemma) ei quod ex* B Z. *Sicut igitur* A E *ad* E B *ſic eſt quod ex* A Z *ad id quod ex* B Z, *incommenſurabils autem eſt* A E *ipſi* E B. *Incommenſurabile igitur eſt quod ex* A Z *quadrato* B Z, *per decimamtertiam huius. Binæ igitur rectæ* A Z B Z *ſunt potentia incommenſurabiles, & efficiunt compoſitum ex earum quadratis certum, cùm ſit æquum ei quod ex* A B *certa, per 47 primi. Cùm autem (per conſtructionem) quod ex* D B *æquũ ſit ei quod ſub* A B E B, *cui eidem æquum eſt (per primum lemma præcedentis) quod ex* E Z, *æquales erũt* D B *&* E Z, *Quod itaque ſub* A B B D *æquum eſt ei quod ſub* A B E Z. *Præterea cùm id quod ſub* A B B G *ſit Medium, per vigeſimamprimam huius, ſequetur eius dimidium, ſcilicet quod ſub eadem altitudine* A B *& dimidia baſi* D B *(per corollarium primæ ſexti) eſſe Medium, per coroll. 23 huius, cui quidem ſub* A B B D *Medio æquum oſtenſum eſt quod ſub* A B E Z, *ei verò quod ſub* A B E Z *æquum eſt quod ſub* A Z B Z *per primum præcedentis lemma. Medium itaque erit quod ſub* A Z B Z. *Inuenimus itaque binas rectas* A Z B Z *potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex earum quadratis certum, quod verò ſub ipſis Medium.*

MONITVM.

Ponitur hic lemma ab altero Græcorum exemplarium, quod ſub corollario primæ ſexti comprehendimus quare ſubticendum illud eſſe rati ſumus.

Propoſitio trigeſimaquarta. Problema II.

Binas rectas lineas potentia incommenſurabiles, efficientes compoſitum ex earum quadratis Medium, quod verò ſub ipſis Certum comperire.

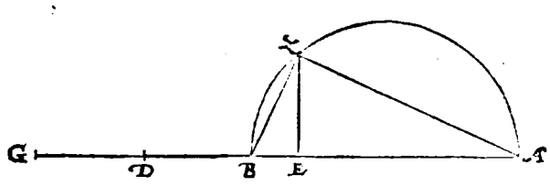


Exponantur binæ mediæ potentia tantùm commenſurabiles certum comprehẽdentes A B B G, *per 27 huius, quarũ maior plus poſsit minore, eò quòd ſibi à longitudine incommenſurabili, per coroll. trigeſimæprimæ huius, & reliqua diſponantur vt in figura præcedentis, quoniam* A B *&* B G *ſunt inæquales, & maior* A B *plus poteſt minore* B G *eò quòd à ſibi longitudine incommenſurabili. Quartæ autem parti eius quod à minore* B G *(hoc eſt quadrato dimidiæ* D B*) æquum, ad maiorem* A B *applicatum eſt, deficiens ſpecie quadrata, ſcilicet quod ſub* A E E B. *Incommenſurabilis igitur eſt* A E *ipſi* E B, *per ſecundam partem 18 huius. Et cùm ſit* A E *ad* E B *ſicut quod ex* A Z *ad id quod ex* Z B, *vt proxima demonſtratione oſtendimus, incommenſurabile erit quod ex* A Z *quadrato* Z B, *& itaque potentia incommenſurabiles erunt, rectæ* A Z Z B, *per decimamtertiam huius, efficiúntque compoſitum ex ipſarum quadratis medium, nam æquum ei quod ex* A B *(per 47 primi) quæ eſt media ex hypotheſi: cùm enim quod ex* D B *ſit æquum ei quod ſub* A E E B, *cui æquum eſt quod ex* E Z, *per 1 lemma 32 huius, rectæ* D B *&* E Z *ideo æquales erunt. Quod igitur ſub* A B D B *ei quod ſub* A B E Z *æquum erit: ipſi autem ſub* A B E Z *æquum eſt quod ſub* A Z Z B, *per primum lemma trigeſimæſecundæ huius. Quod itaque ſub* A Z Z B *æquum erit ei quod ſub* A B E D B. *Quod autem ſub*

AB DB dimidium est eius quod sub AB BG, per coroll. primæ sexti, quod est certum, ex hypothesi, & igitur eius dimidium scilicet quod sub AE DB certum erit, & proinde ipsi æquale (quod sub AZ ZB) certum erit. Binas itaque rectas AZ ZB potentia incommensurabiles efficientes, &c. comperimus.

Propositio trigesimaquinta. *Problema* 12.

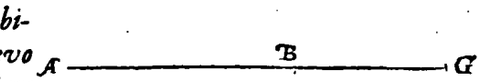
Comperire binas rectas lineas potentia incommensurabiles, efficientes compositum, ex earum quadratis Medium, & quod sub ipsis Medium, incommensurabile composito ex earum quadratis.



Sint (per coroll. 32 huius) binæ mediæ AB maior & BG minor, potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes, quarum maior plus possit minore, eò quòd à sibi longitudine incommensurabili: reliqua verò ad figuræ descriptionem fiant iuxta duarum præcedentium tradita. Cùm autem ad maiorem AB applicatũ sit, quod sub AE EB, æquum quartæ parti eius quod à minore GD, hoc est quadrato DB, deficiẽs specie quadrata, & maior plus possit minore eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, per constructionem, incommensurabilis erit AE ipsi EB, per secundam partem 18 huius. Quia autem ostendimus esse AE ad EB vt quod ex AZ ad quadratum ZB, incommensurabile erit quod ex AZ quadrato ZB, quare ipsæ AZ ZB potentia incommensurabiles erunt, ac efficient compositum ex earum quadratis (æquum quidem quadrato ipsius AB Mediæ per 47 primi) Medium. Cùm autem in præfatis ostensum sit sub AZ ZB æquum esse ei quod sub AB BD: quod autem sub AB BD Medium est, cũ sit dimidium eius quod sub AB BG, per coroll. primæ sexti, quod fuit Medium, ex hypothesi. Quod igitur sub AZ ZB (ipsi quod sub AB BD æquum) Medium erit. Præterea incommensurabile erit cõposito ex ipsarum AZ ZB quadratis. Nam cùm DB sit ipsius GB dimidia, incommensurabilis autem sit AB ipsi GB, sequetur (per coroll. secundum decimæ huius) & DB eidem AB incommensurabilem esse: sed sicut AB ad DB sic quod ex AB ad id quod sub AB DB, per lemma 21 huius. Incommensurabile igitur erit quod ex AB ei quod sub AB DB: ei autẽ quod sub AB DB æquale ostensum est id quod sub AZ ZB, ei verò quod ex AB æquum fuit compositum ex earum AZ ZB quadratis, per 47 primi. Quod igitur sub AZ ZB incommẽsurabile erit composito ex earum AZ ZB quadratis. Comperimus itaque binas rectas AZ ZB potentia incommensurabiles efficientes, &c.

Propositio trigesimasexta.

Si binæ Certę potentia tantùm commensurabiles compositæ fuerint, tota incerta est, vocetúrque Ex binis nominibus.

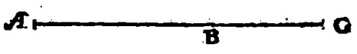


Sint binæ certæ potentia tantùm commensurabiles AB BG: Dico totam AG incertam esse, eámque vocari binomium, seu ex binis nominibus. Quoniam (per lemma vigesimæ primæ huius) est AB ad BG vt quod sub AB & BG ad quadratum BG, incommẽsurabilis autem est recta AB rectæ BG. Quòd igitur sub AB BG ei quod ex BG, incommensurabile erit, per 13 huius. Cùm autem commensurabilia sint quæ ex BG & ex AB, per hypothesim, Compositum ex ipsis, vtrique ipsarum commẽsurabile erit, per 11 huius. Et quia binarum, scilicet compositi & eius quod ex BG commensurabilium, altera (ex BG) alicui (quod scilicet sub AB BG) incommensurabilis fuit. Et reliqua (scilicet compositum ex earum quadratis) eidem quod sub ipsis contentum est, incommensurabilis erit, per corollarium secũdum decimæ huius, & (per idem coroll.) quod bis sub ipsis AB BG eidem composito ex earum quadratis, incommensurabile erit. Sed quod bis sub ipsis vnà cum composito ex earundem AB BG quadratis, totum quod ex AG (per quartam secũdi) componunt, Totum igitur ex AG vtrisque scilicet composito ex AB & BG quadratis, & ei quod sub ipsis, incommensurabile erit, per duodecimam huius. Atqui compositum ex quadratis AB BG certarum, certum est, per 8 & 9 diffinit. huius, Totum igitur ex AG ipsi composito incommensurabile incertum erit, per decimam diffinitionem huius. Quare recta

A G *ipſum incertum potẽs, incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius, vocatur autem ex binis nominibus eò quòd ex binis certis longitudine tamen incommẽſurabilibus componatur. Si itaque binæ certæ, &c.*

Propoſitio trigeſimaſeptima.

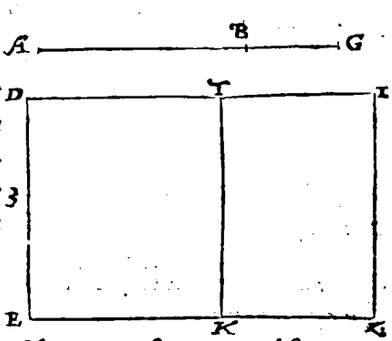
Si binæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles Certum comprehendentes componantur, tota incerta eſt, vocatur autem Ex binis mediis prima.



Sumantur binæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles A B B G *certum comprehendentes: Dico totam* A G *compoſitam incertam eſſe. Eodem ferè quo præcedentis argumento. Quoniam incommenſurabiles ſunt* A B B G, *ſequetur (vt proxima oſtendimus) quadrata ex* A B *&* B G *incommenſurabilia eſſe, rectangulo bis ſub ipſis* A B B G *comprehenſo, per lemma vigeſimæ, & primum coroll. decimæ huius. Quia verò ea quadrata & rectangula compoſita totum quod ex* A G *faciunt, per quartam ſecundi, ſequetur (ex* 12 *huius) totum ex* A G *vtrique (compoſito ſcilicet ex quadratis* A B B G *& rectangulo ſub eis bis ſumpto) eſſe incommenſurabile. Sed bis ſub* A B B G *ſumptum certum eſt, ex hypotheſi, nempe* A B B G *certum comprehẽdunt. Totum igitur ex* A G *(ipſi bis ſumpto ſub* A B B G *certo incommenſurabile) incertum erit, ex decima diffinitione huius, & proinde tota* A G *illud potens incerta erit, per* 11 *diffinit. huius. Quæ quidem Ex binis mediis prima dicitur ea de cauſa, quod binarum ex binis mediis genitarum, hæc ex mediis certum continentibus, prior feratur ſecunda, quæ ex mediis medium continentibus componetur. Quare hæc ſecunda illa verò prima dicta fuit, cùm ſit certum incerto præſtantius. Si itaque binæ Mediæ potentia tantùm, &c.*

Propoſitio trigeſimaoctaua.

Si binæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles Medium comprehendentes componantur, Tota incerta eſt, vocatur autem Ex binis mediis ſecunda.

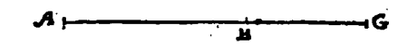


Copulentur binæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles Medium comprehendentes A B B G: *Dico totam* A G *incertam eſſe: quoniam longitudine incommenſurabiles exiſtunt* D A B B G, *ex hypotheſi. Patet (vt proximis prioribus) quadrata ipſarum* A B B G *rectangulo bis ſub ipſis contento incommenſurabilia eſſe. Et quia quadrata illa cum rectangulis, totum ex* 3 A G *componunt, per quartam ſecundi, patebit (ex duodecima huius) totum ex* A G *vtriſque eſſe incommenſurabile, ſcilicet quadratis* A B B G *& binis ſub* A B B G *rectangulis. Proponatur itaque certa* D E, *cui applicetur (per* 45 *primi) æquum quadratis* A B B G, *ſit q illud* D E K T, *& æquum aliud rectangulo bis ſub* A B B G *ſumpto quod ſit* T K Z I. *Cùm autem* E T *rectangulum, æquum ſit poſitum quadratis ex* A B B G *mediis potentia commenſurabilibus, Illud Medium erit, per coroll.* 23 *huius. Quia verò* K I *æquum eſt rectangulo bis ſub ipſis cõprehenſo, Medio quidẽ ex hypotheſi, & illud* K I *medium erit, ex eodem. Sed quadrata & rectãgula* A B B G, *totum ex* A G *faciunt, vt oſtenſum eſt. Rectangulũ igitur* E I *quadrato ex* A G *æquum erit. Cùm autem totum ex* A G *vtriſque (quadratis ſcilicet* A B B G *& rectangulo bis ſub ipſis contento) incommenſurabile oſtenſum ſit, totum* E I *vtriſque* E T K I *incommenſurabile erit. Quare* E T *&* I *inuicem incommenſurabilia erunt. Et ideo (per primam ſexti) rectæ* D T T I D I *longitudine incommenſurabiles erunt. Sed media ſunt* E T K I, *ad certam* D E *applicata, vt oſtendimus, latitudines igitur* D T T I *certas (per* 22 *huius) efficiunt, longitudine tamen incommenſurabiles. Potentia igitur tantùm commenſurabiles. Tota itaque* D I *incerta erit, per trigeſimamſextam huius. Et proinde rectangulum* E I *ſub certa* D E *& incerta* D I *(per coroll.* 21 *huius) incertum erit. Quod quidem æquum oſtenſum eſt quadrato ex tota* A G. *Quadratum itaque ex* A G *incertum erit. Illud-*

que potens A G *incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius. Quæ quidem ex binis mediis secunda ideo dicitur, quod ex mediis medium continentibus fiat. Postponenda verò ei primæ quæ ex mediis certum continentibus orta est, vt proxima diximus. Si itaque binæ Mediæ componantur, &c.*

Propositio trigesimanona.

Si binę rectę lineę potentia incommensurabiles compositę fuerint, efficientes compositum ex quadratis quæ ab ipsis Certum, quod autem sub ipsis Medium, Tota recta linea incerta est, vocatur autem Maior.

Sumantur binæ rectæ potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium, per trigesimamtertiam huius, sint 

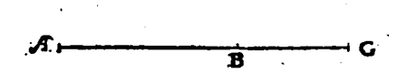
A B B G: *Dico totam* A G *incertam esse, quæ quidem dicitur Maior. Quoniam incommensurabiles sunt* A B B G *longitudine, per vltimam partem corollarij nonæ huius, patebit (per demonstrata tribus proximis) id quod bis sub* A B B G *composito ex quadratis* A B B G *incommensurabile esse, ac (per quartam secundi) vtraque simul sumpta quadrato totius* A G *esse æqualia. Et ideo (per* 12 *huius) idem quadratum ex* A G *composito, ex quadratis* A B B G *esse incommensurabile. At compositum ex quadratis certum est, ex hypothesi. Incertum igitur erit ex* A G *quadratum, per decimam diffinitionem huius, & proinde illud potens recta* A G *incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius. Vocatur autem Maior, eò quòd maior pars suæ potentiæ, ex quadratis* A B B G *certis componatur, quæ semper maiora sunt rectangulo bis sub* A B B G *sumpto: nam maiorem partem dimidia quadrati* A G *totius sibi sumunt, per coroll. septimæ secundi. Si itaque binæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c.*

MONITVM.

Reliquimus demonstrationem, qua Theon ostendere conatur, quadrata ex A B. B G *maiora esse rectangulo bis sub* A B B G *contento, prolixè admodum. Nos enim illud satis supérque demonstrauimus corollario septimæ secundi, & ipsius* A G *quadrati (vtraque potentis) plus dimidio sumere quadrata ex* A B B G.

Propositio quadragesima.

Si binę rectæ lineę potentia incommensurabiles compositæ fuerint, efficientes conflatum ex earum quadratis Medium, quod verò sub ipsis Certum, Tota recta linea incerta est, vocatur autem Certum mediúmque potens.

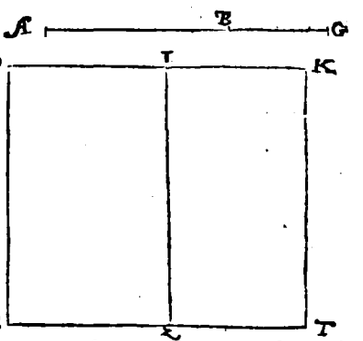
Sumantur binæ rectæ potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum, per 34 *huius, quæ sint* A B 

B G: *Dico totam* A G *incertam esse, eámque dici Certũ mediúmque potẽtem. Quoniã cõflatum ex quadratis* A B B G *medium est, quod verò sub ipsis certum, ex hypothesi, incõmensurabile erit idem conflatum, rectangulo sub ipsis bis sumpto. Et igitur totum, scilicet quòd ex* A G *per quartam secundi, rectangulo sub* A B B G *sumpto, certo quidem, incommensurabile erit, per duodecimam huius. Quare idem totum incertum erit, ex decima diffinitione huius. Rectáque* A G *illud potens incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius, vocatur autem ipsa* A G *Certum mediúmque potens, eò quòd eius potentia ex Certa & media componatur area. Si itaque binæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c.*

Propos

Propoſitio quadrageſimaprima.

Si binæ rectæ lineę potentia incommenſurabiles compoſitę fuerint, efficiẽtes compoſitum ex earum quadratis Medium quod verò ſub ipſis Medium, & inſuper incommenſurabile compoſito ex earum quadratis, tota recta linea incerta eſt, vocatur autem Bina media potens.



Sumantur per 35 huius, binæ rectæ potentia incommenſurabiles &c. quales hypotheſis optat, quæ ſint A B B G: *Dico totam* A G D *incertam eſſe, quæ quidem dicitur Bina media potẽs. Proponatur Certa recta* D E, *cui (per 45 primi) conſtituatur æquum rectangulum cõpoſito ex quadratis* A B B G *quod ſit* E I, *æquum verò rectangulo bis ſub* A B B G, *quod ſit* Z K. *Totum igitur* E K *æquum erit quadrato* A G, *per quartam ſecundi: quia verò incommenſurabile eſt compoſitum ex quadratis* A B B G *ei quod bis ſub ipſis, ex hypotheſi, Incommenſurabile erit,* E I *ipſi* Z K, *cùm ſint incommẽſurabilibus æqualia: & ideò, per primam ſexti,* D I *ipſi* I K *longitudine incommenſurabilis erit. Quia verò media ſunt quadrata & rectangula ex* A B B G, *media erũt* E I Z K, *ipſis æqualia, quæ ad Certam* D E *proiecta, latitudines* D I *&* I K *Certas faciũt, pervigeſimam ſecundam huius) potentia itaque commenſurabiles, longitudine autem incommenſurabiles oſtenſæ. Tota itaque* D K *incerta eſt, per 36 huius) rectãgulum igitur* E K *ſub Certa & incerta* D E *&* D K *comprehenſum (per corollarium 21 huius, incertum erit, & proinde* A G *illud potens (nempe quadratum* A G *ipſi* E K *æquale) incerta erit. Quæ ideo vocatur Bina media potens, quod eius potẽtia (hoc eſt quadratum* A G*) ex binis areis mediis componatur, ſcilicet ex quadratis* A G G B, *& rectangulo bis ſub* A G G B *ſumpto, inuicem incommenſurabilibus. Si itaque binæ rectæ lineæ potentia, &c.*

MONITVM.

Cùm harum ſex incertarum (his proximis theorematis expoſitarum) denominationes vnde ortæ ſint nõ ſatis lucide Theonem explicaſſe quidã arbitrati ſint, aliquas earum præter eas quas diximus differentias adferre non importunũ erit. Quia igitur Euclides certarum prius traditionem cæpit, vt earum adminiculo ad incertas properet, ab incertis autem ad incertiores, hoc eſt, à certarum natura remotiores eo ordine ſeruato vergat, harum itaque ſex incertarum quatuor Certum mediúmque potẽtes cõponit, ſcilicet eam quæ Ex binis nominibus, Ex binis mediis primã, Maiorem, Certum mediúmque potentem. Quæ licet potentias earum ex certa & media area ſingulæ componant, tamen in eo differunt, quod prior huiuſmodi potentiam à lineis certis, potentia commenſurabilibus educat. Secunda verò à lineis mediis potentia commenſurabilibus, quæ iam à certis recedunt. Tertia à lineis longitudine & potentia omnino incommenſurabilibus ſuam educit potentiam: quæ tamen maiorem portionem certam habet, ea de cauſa Maior dicitur. Quarta autẽ ab eiſdem lineis longitudine & potentia incommenſurabilibus, quæ tamen maiorem potẽtiæ partem, ipſi Certum mediúmque potenti incertam tribuũt, nempe Mediam. Duas verò reliquas ſcilicet Ex binis mediis ſecundam, & Bina media potẽtem, ſeruato eodẽ ordine cõponit. Nam licet binas incertas areas, hoc eſt Medias incõmenſurabiles, vtraque earum poſſit, tamen prior ſcilicet Ex binis mediis ſecunda (quæ ex lineis potentia ſaltem commenſurabilibus conſtat) reliquis anteponenda fuit (quæ ex lineis penitus incommenſurabilibus componuntur) his nempe Maior, & Certũ mediúmque potens, plus à certarum natura remotis. Harum autem duarum poſtremam omnium ſex nouiſſimam, ac à certa remotiorem meritò poſuit Euclides, eam ſcilicet quæ potentiam ex incertis ac incommenſurabilibus ſibi inuicem aſſumit, longitudinem verò à lineis & longitudine & potentia penitus incommenſurabilibus exigit, quam ideo tanquam ab incerta natura remotiſſimam, nouiſſimam ordine locauit Euclides.

Ex binis igitur nominibus priorem enũciat, quæ bina illa ſua nomina Certas efficit lineas, eius verò potentiæ potiſſimam partem ex certa area ſumit.

Ex binis autem mediis primam ſecundò ponit, eam quæ ſua nomina incertas quidem, ſed potentia ſaltem commenſurabiles efficit lineas, eius verò potentiam ab incerta potiſſima parte ſuſceptam: reliquam à certa area ſubfuratam componens.

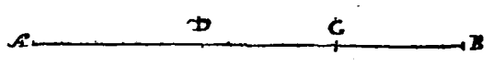
Ex binis verò mediis ſecundam tertiò collocat, quæ licet aream incertam ex incertis areis ſumat

in potentia, tamen longitudinem à lineis potentia ſaltem commenſurabilibus ſuſcipit.

Tres autem ſequentes eodem ordine quo has priores inſerit, ſed potentiam quam priores à lineis potentia ſaltem commenſurabilibus depromunt. Subſequentes ſimilem potentiam à lineis penitus & longitudine & potentia incommenſurabilibus (& proinde à certarum natura remotiores) aſſequuntur.

Lemma.

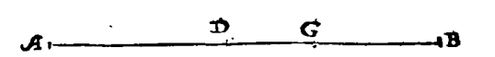
Quod autem præfatæ incertæ ad vnum ſignum tantùm ſecari poſſint, in eas linearum denominationes ex quibus compoſitæ præfatas ſpecies generant, hoc præaſſumpto lemmate demonſtrabimus.



Secetur recta A B *inæqualiter in* D, *ac eadem* A B *rurſus inæqualibus in* G: *Dico ex* A G G B *inæqualioribus quadrata, maiora eſſe quadratis reliquarũ* A D D B *æqualiorum, ſecetur* A B *bifariam in* E: *quoniam inæqualiores ſunt* A G G B *ipſis* A D D B, *maior erit* A G *ipſa* D B, *à quibus æquales tollantur ex* A G *ſcilicet* A E *& ab ipſa* D B *hæc* E B, *igitur reliqua* E G *maior erit ipſa* E D. *Quia verò recta* A B *ſecta eſt æqualiter in* E *& inæqualiter in* G, *quadrata ex* A G G B *dupla ſunt eorum quæ à dimidia* E B *& ab ea quæ inter ſectiones eſt* E G, *per nonam ſecundi. Similiter (per eandem) dupla erunt quadrata* B D D A *eorum quæ ab ipſis* B E E D: *atqui maiora ſunt quæ ex* B E E G, *his quæ ex* B E E D, *cùm maior ſit oſtenſa* E G *quàm* E D. *Quæ igitur ex* A G G B *inæqualioribus (dupla maiorum) his quæ ex* A D D B *(duplis minorum) maiora erunt.*

Propoſitio quadrageſimaſecunda.

Quæ Ex binis nominibus ad vnum duntaxat ſignum diuiditur in nomina.



Eſto A B *recta ex binis nominibus, quæ ſecta in* G *binas efficiat* A G G B *Certas potentia tantùm commenſurabiles, quæ quidem ſua ſunt nomina: Dico rectam* A B *nullo alio ſigno poſſe ſecari, quo alias efficiat Certas potẽtia tantùm commenſurabiles, quam in* G. *Quod ſi in alio ſecari poſſit, ſecetur in* D. *Sequetur ſingulas* A D D B *ſingulis* A G G B *æquales non eſſe, nã ſi æquales eſſent, eadẽ fieret ſectio (contra hypotheſim) nec bifariam ſecta eſt in* D *ipſa* A B, *nam longitudine commẽſurabiles eſſent* A D D B, *contra eandem hypotheſim, inæquales igitur ſunt* A D D B, *inæquales item* A G G B. *Cùm autem (per quartam ſecundi) quadrata* A G G B *cum rectangulis bis ſub* A G G B, *æqualia ſint quadratis* A D D B *cum rectangulis bis ſub* A D D B, *nempe vtraque quadrato* A B. *Sequetur quadrata tãto excedere quadrata, quanto reciprocè rectangula excedunt rectangula, quod enim tollitur à quadratis additur rectangulis, & è conuerſo. Cùm enim quadrata ex Certis producta certa ſint, & proinde inuicem commenſurabilia, ipſa exceſſum ipſis commenſurabilem (ſcilicet quem numeri) parient, per ſecundam communem ſententiam ſeptimi, & ideo certum, per nonam diffinitionem huius. Rectangula igitur (ſub Certis potentia tantùm commenſurabilibns comprehẽſa) media eodem exceſſu ſeſe excedentia, ſeſe certo excedent, contra 26 huius, quod fieri non poteſt. Non igitur ſecari poterit* A B *in alia ſua nomina, quàm per ſignum* G *diſtributa, ipſa ſcilicet* A G G B. *Quæ itaque Ex binis nominibus ad vnum ſignum, &c.*

Corollarium.

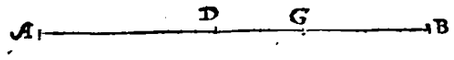
Binæ certæ potentia tantùm commenſurabiles compoſitæ, binis aliis certis potentia tantùm commenſurabilibus coniunctis, æquales eſſe non poſſunt. *Nam vtraque binomium componerent, & proinde binomium in pluribus ſignis ſecaretur in nomina, quod fieri non poſſe hac oſtenſum eſt. Similiter ſequetur in quinque proximis de binis ſingularum nominibus.*

Propoſitio quadrageſimatertia.

Ex binis mediis prima, ad vnum duntaxat ſignum diuiditur in nomina.

Sit

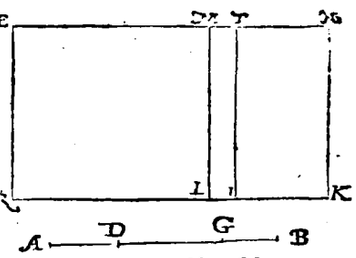
Sit AB *ex binis mediis prima, quæ secetur in* G *in sua nomina, scilicet* AG GB *medias potentia tantùm commensurabiles certum comprehendentes: Dico rectam* AB *vnico signo* G *in eius denominationis lineas secari, si enim aliò secari possit, esto in* D. *Constat autem (vt in præfata)* AD DB *inæquales esse ipsis* AG GB, *& adinuicem, ex hypothesi. Et insuper quadrata* AG GB *cum rectangulo bis sub ipsis contento, idem componunt quod quadrata* AD DB *cum rectangulo bis sub ipsis contento, per quartam secundi, nempe quadratum ex* AB. *Quanto igitur (vt in præcedenti diximus) quadrata excedunt quadrata, eodē (viceversa) rectāgula excedent rectangula, sed rectangula sunt certa, cùm nomina illa certum (ex hypothesi) comprehendant: & igitur certo sese excedunt. Sequetur ideo & quadrata, quæ quidem ex mediis media sunt sese certo excedere, contra 26 huius, quod esset absurdum. Non igitur secatur* AB *aliter quàm in* G *in nomina. Ex binis itaque mediis prima, ad vnum duntaxat signum, &c.*



Propositio quadragesimaquarta.

Ex binis mediis secunda, ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.

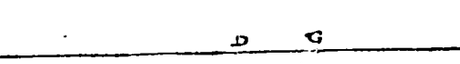
Esto AB *ex binis mediis secunda, secta in sua nomina* AG GB. *Medias quidem potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes in signo* G: *Dico ipsam in alias eius nominis lineas, alio signo secari non posse. Quod si fieri posse credatur, sit in* D. *Exponatur certa* EZ *cui (per 45 primi) ei quod ex* AB *æquum constituatur* ZN, *à quo auferatur eis quæ ex* AG GB *æquum* EI. *Reliquum igitur* IN *æquum erit eis quæ bis sub* AG GB, *per quartam secundi & tertiam communem sententiam. Similiter ab eodem* ZN *auferatur æquum quadratis* AD DB *quod sit* EL. *Reliquum* LN *ei quod bis sub* AD DB *æquum erit. Cùm enim* EI *(æquum quadratis mediarum* AG GB *sit medium, Et insuper* IN *æquum eis quæ sub ipsis medium continentibus) sit medium. Ea Media* EI IN *ad certam* EZ *constituta, latitudines* ET TN *certas efficiunt, potentia tantùm propositæ* EZ *commensurabiles, per 22 huius. Cùm autem sit (per lemma vigesimæprimæ huius) sicut* AG *ad* GB, *sic quod ex* AG *ad quod sub* AG GB, *incommensurabilis autem est* AG *ipsi* GB *longitudine, quod ex* AG *ei quod sub* AG GB *incommensurabile erit. Et proinde quod ex* GB *(eidem ex* AG *commensurabile) rectangulo sub* AG GB *contento incommensurabile erit, per coroll. secundum decimæ huius. Et proinde quæ ex* AG *&* GB *eis quæ bis sub* AG GB *incommensurabilia erunt, per tertium coroll.* 10. *huius. Quod autem ex quadratis* AG GB *est rectangulum ei, quod autem bis sub* AG GB *est* IN, *incommensurabile itaque est* EI *ipsi* IN. *Recta igitur* ET *rectæ* TN *(ex prima sexti) incommensurabilis erit. Sed certæ fuerunt* ET TN. *Potentia tantùm itaque commensurabiles eruni ipsæ* ET TN. *Tota ideo* EN *ex binis nominibus erit, per 36 huius. Haud dissimili argumento patebit* EM MN *rectas, certas esse potentia tantùm commensurabiles, cùm rectangula* EL LN *æqualia sint quadratis* AD DB, *&* EI *quod bis sub ipsis posito, eò quòd rectæ* AD DB *eiusdem ponantur nominis, ac ipsæ* AG GB, *eisdem tamen inæquales. Quare sequeretur* EN *rectam ex binis nominibus secari posse, in duobus signis, scilicet* T *&* M, *per diuersas, certas potentia tantùm commensurabiles, ipsius quidem* EN *nomina, contra 42 huius, quod esset absurdum. Non igitur potest recta* AB *alio signo quàm* G, *secari in alia sua nomina. Ex binis itaque mediis, &c.*



Propositio quadragesimaquinta.

Maior ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.

Supponatur AB *recta maior, quæ (per 39 huius) constet binis* AG GB *potentia incommensurabilibus, efficiens quod ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium: Dico rectam* AB *in alias eius nominis rectas non posse diuidi, ad aliud signum quàm* G. *Siquidem fieri aliàs posse credatur, secetur* AB *per* D *in ea nomina* AD DB. *Cùm enim ostensum sit (quadragesima secunda huius) quadrata ex* AG GB, *tanto excessu*

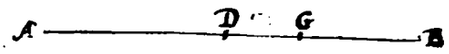


distare à quadratis A D D B, *quanto rectangula quæ bis sub* A G G B *distant, à rectangulis bis sub* A D D B, *eò quòd ablatum à quadratis confertur rectangulis, sic diuidatur, per 4 secundi, quadratum totius* A B. *Quadrata ideo ex* A G *&* G B *distant à quadratis ex* A D *&* D B *certo, cùm sint ex hypothesi certa. Rectangula igitur sub* A G G B *à rectangulis sub* A D D B (*bis sumpta*) *distabunt certo. Sed rectangula illa sunt* (*ex hypothesi*) *media. Medium igitur excedet medium certo, contra 26 huius, quod esset absurdum. Non igitur in alia nomina secari potest* A B *maior, quàm per signum* G *in* A G G B. *Maior itaque ad vnum signum duntaxat, &c.*

Propositio quadragesimasexta.

Certum mediúmque potens, ad vnum duntaxat signum diſcinditur in nomina.

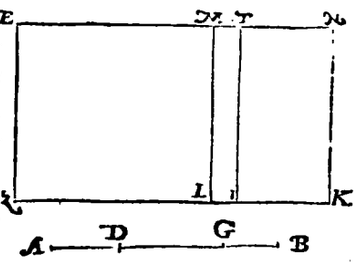
Esto recta A B *certum mediúm, quæ potẽs quæ secetur in* G *per sua nomina, quæ sint* (*per 40 huius*) *binæ rectæ* A G G B *potentia incommensurabiles, efficientes compositum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum: Dico* A B *in alia quàm* A G G B *sua nomina, secari non posse. Si verò aliæ eius naturæ lineæ produci posse putentur, sint* A D D B, *secta* A B *in* D. *Sumpto etenim proximæ argumento. Cùm quadrata ex* A G G B *eodem excedant quadrata* A D D B, *quo rectangula bis sub* A D D B *excedunt rectangula bis sub* A G G B. *Sed rectangula seſe excedunt certo, cùm sint ex hypothesi Certa. Quadrata itaque seſe excedẽt certo, quæ quidem* (*ex eadem hypothesi*) *sunt Media, quod obstat 26 huius, & proinde absurdum. Non igitur per aliud signum quàm* G *potest recta* A B *secari in sua nomina, nec ideo alia quàm* A G G B *suſcipere nomina. Certum itaque mediúmque potens ad vnum duntaxat signum, &c.*



Propositio quadragesimaseptima.

Bina media potens, ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.

Supponatur bina media potens recta A B, *quæ* (*per 41 huius*) *secetur in* G *signo efficiens* A G G B *rectas potentia incommensurabiles, quarum compositum ex earum quadratis sit medium, quod verò sub ipsis medium ac incommensurabile composito ex earum quadratis: Dico totam* A B *aliter quàm per* G *non secari in ea nomina. Quod si fieri posſit aliter, secetur in* D, *&, sumpto 44 huius argumento, applicetur ad certam* E Z *æquum quadrato* A B, *per 45 primi, quod sit* E K, *à quo subtrahatur æquum composito ex quadratis* A G G B, *sitque* E I, *reliquum* T K *erit quod bis sub ipsis* A G G B, *cùm quadrata & rectangula componant totum ex* A B, *per 4 secundi, æquũ ipsi* E K *positum. Similiter subtrahatur ab eodem* E K *æquum quadratis* A D D B *quod sit* E L, *reliquum* M K *æquum erit ei quod bis sub* A D D B: *quoniam* (*per constructionem*) E I *æquũ est quadratis* A G G B, *&* T K *rectangulo sub ipsis æquum est, similiter* E L *æquum est quadratis* A D D B, *&* M K *rectangulo bis sub ipsis* A D D B *æquum. Cùm autem quadrata rectangulis* (*ex hypothesi*) *sint incommensurabilia, incommensurabile erit* E I *ipsi* T K, *ac similiter* E L *ipsi* M K, *& proinde recta* E M *ipsi* M N, *ac* E T *ipsi* T N (*per primam sexti*) *incommensurabiles erunt. Quia verò media sunt* E I, T K, E L, M K, *ad certam* E Z *applicata latitudines* E T, T N, E M, M N, *certas efficiunt, per 22 huius. Potentia igitur tantùm commensurabiles erũt* E T *ad* T N (*cùm sint longitudine ostensæ incommensurabiles*) *haud secus* E M *ad* M N, *potentia tantùm sunt commensurabiles adinuicem. Tota igitur* E N *ex binis nominibus dicetur, per 36 huius, quæ quidem in duobus signis* M *&* T *secatur in binas certas, potentia tantùm commensurabiles, sua scilicet nomina, contra 42 huius, quod esset absurdum. Non igitur aliter potest secari* A B *in sua nomina, quàm per signum* G. *Bina itaque potens media, ad vnum duntaxat signum, &c.*



Rectarum quæ ex binis nominibus diffinitiones,

Supponendum tribus prioribus.

Proposita Certa & ea quæ Ex binis nominibus diuisa in nomina, cuius ma-

ius

ius nomen plus posit minore, eò quòd fit ex sibi longitudine commensurabili.

Diffinitio prima, hoc supposito.

Si maius nomen propositæ Certæ fuerit longitudine commensurabile, tota vocatur Ex binis nominibus prima.

Diffinitio secunda.

Si minus nomen propositæ Certæ fuerit longitudine cõmensurabile, tota vocatur Ex binis nominibus secunda.

Diffinitio tertia.

Si neutrum nominum propositæ Certę fuerit longitudine commensurabile, ea vocatur Ex binis nominibus tertia.

Quoniam diuersæ sunt binomiorum species, sex eorum diffinitiones ponit Euclides, Supponẽs pro tribus prioribus, maius nomen excedere minus, eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili. Pro sequentibus verò tribus postremis oppositum supponit, maius scilicet nomen excedere minus, eò quòd fit ex sibi longitudine incommensurabili, quæ sola est priorum trium à tribus posterioribus discrepantia, singularum à singulis.

Supponendum tribus postremis.

Si autem maius nomen plus posit minore, eò quòd fit à sibi longitudine incommensurabili.

Diffinitio quarta, hoc supposito.

Si maius nomen propositæ Certæ fuerit longitudine commensurabile, tota vocatur Ex binis nominibus quarta.

Diffinitio quinta.

Si minus nomen propositę Certę fuerit longitudine commensurabile, ea vocetur Ex binis nominibus quinta.

Diffinitio sexta.

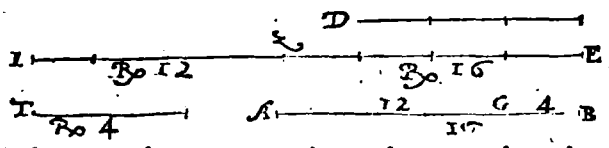
Si neutrum nomen expositæ Certę longitudine fuerit commensurabile, ea vocetur Ex binis nominibus sexta.

Hoc ordine binomiorum differentias à maioris, vel minoris, aut equidem neutri nominis commensuratione, vel incommensuratione, ad expositam cõstituit Euclides, cùm duo nomina eidem longitudine commensurabilia esse posse non fateatur. Nam si eidem commensurarentur, & adinuicem commensurarentur, per decimam huius, quod obstaret 36 huius, quæ eas incommensurabiles longitudine esse præcipit. Addit insuper alterum Græcorum exemplar, Euclidem ideo tres priores sub commensurabili positas, tribus postremis sub incõmensurabili descriptas, præfeciſſe, quòd præstantius sit commensurabile incommensurabili. Trium verò singulorum ordinum priores, sequentibus hac de causa præmisisse, quòd præstãtius sit maius nomẽ minore, indignius verò vtroque neutrũ. Nos autem arbitrati sumus alia causa, hoc ordine binomia digessisse Euclidem, vt scilicet cœptũ iam antea ordinem sequatur, quo quidem sub Certa & singulis hoc ordine binomiis, areas sex præfatarũ incertarum suo ordine seruato comprehenderet, vt patebit 54 & 5 eam sequentibus sequi ordinem 36 & 5 eam sequentium. Ac insuper, vt eidem ordini futuras apothomarum generationes, ac alia-

rum incertarum ſubiiceret, & eodem ordine apothomes diffiniret. Quare potius vt methodi conſeruaret ſeriem hoc ordine binomia diſpoſuiſſe Euclidem cenſendum erit, quam vt tantùm præſtantius indigniori præficeret: is nanque geometriam, non autem politicam edocet.

Propoſitio quadrageſimaoctaua. *Problema* 13.

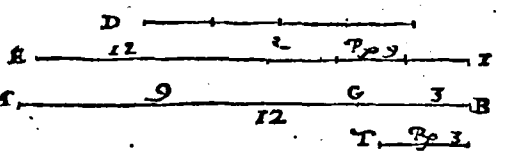
Inuenire Ex binis nominibus primam.



Sumatur (ex corollario primi lemmatis 28 huius) numerus quadratus A B, *excedens quadratum* G B *non quadrato* A G. *Sit item propoſita Certa* D, *cui longitudine commenſurabilis eſto* E Z, *fiat autem (per corollarium ſextæ huius) ſicut* A B *ad* A G *numeri, ſic quod ex* E Z *ad quod ex* Z I. *Cùm autem* A B *ſit quadratus,* A G *verò non, quod ex* E Z *ad quadratum ex* Z I *rationem ipſorum* A B *ad* A G *habentes, non habent rationem quam quadrati numeri, per corollarium vigeſimæquintæ octaui. Incõmenſurabiles itaque longitudine erunt, ipſæ* E Z Z I, *per nonam huius, potentia verò commenſurabiles, per ſextam huius. Certa autem eſt* E Z, *ipſi nanque propoſitæ* D *ex hypotheſi commenſurabilis. Certa igitur erit &* Z I, *binæ igitur* E Z Z I *Certæ ſint potentia tantùm inter ſe commenſurabiles. Tota itaque* E I *Ex binis eſt nominibus, per 36 huius. Rurſus quia maior eſt* E Z *ipſa* Z I *per* 14 *quinti, cùm earum potentiæ habeant rationem totius* A B *ad ablatum* A G, *inueniatur per* 15 *huius, quo plus poteſt maior minore, ſit ẽ quod ex* T. *Cùm autem quod ex* E Z *excedat quadratum* Z I *quadrato ipſius* T. *Eſt autem* A B *ad* A G *vt quod ex* E Z *ad quadratum* Z I: *erit conuerſione rationis ſicut* A B *ad* B G *exceſſum, ſic quod ex* E Z *ad quod ex* T *exceſſum quo antecedens ex* E Z *excedit ſuum conſequens ex* Z I, *per corollarium decimænonæ quinti, ſed* A B *ad* B G *(ex hypotheſi) rationem habet quadratorum numerorum. Igitur* E Z *ad* T *exceſſum rationem habebit quadratorum numerorum, & ideo ipſæ* E Z *ad* T *erũt longitudine commenſurabiles, per nonam huius. Atqui quadratum* E Z *excedit quod ex* Z I *minore, eò quòd ex* T. *Maius igitur nomen* E Z, *plus poteſt minore* Z I, *eò quòd ex* T *ſibi longitudine commenſurabili: éſtque maius nomen* E Z *propoſitæ* D *longitudine commenſurabile. Inuenimus igitur Ex binis nominibus primam, per primam diffinitionem binomiorum.*

Propoſitio quadrageſimanona. *Problema* 14.

Inuenire Ex binis nominibus ſecundam.

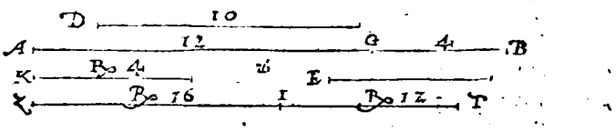


Eadem cum præcedentis hypotheſis ſumpta, ſcilicet ſit (per corollarium primi lemmat. 28 huius) A B *numerus quadratus, excedens quadratum* G B *non quadrato* A G *aut equidem* A B G B *non quadrati ſimiles plani, ſeſe excedentes quadrato* A G *(vtraque enim hypotheſis idem profert) proponatur item Certa* D, *cui commenſurabilis exiſtat longitudine* Z I, *quæ certa igitur erit. Sicut autem numerus* A G *ad* A B, *ſic (per corollarium ſextæ huius) fiat quod ex* Z I, *ad quod ex* Z E, *Certa igitur erit* Z E *& longitudine ipſi* Z I *incommenſurabilis, per vltimam partem nonæ huius, cùm habeant* Z I *&* Z E *rationem non quam quadrati, per corollarium* 25 *octaui. Nam vnus ipſorum* A B *vel* A G *quadratus eſt, reliquus verò non, ex hypotheſi, potentia tantùm itaque commenſurabiles ſunt inter ſe* Z I *&* Z E *rectæ. Tota igitur* E I *Ex binis eſt nominibus, per 36 huius: Dico quod & ſecunda, cùm ſit vt* A G *ad* A B, *ſic* I Z *ad* Z E. *Excedit autem* A B *ipſum* A G *numero* G B, *igitur* E Z *excedet potentia rectam* Z I *aliquo, quod ſit (per* 15 *huius) id quòd ex* T. *Erit igitur conuerſione rationis (per corollarium* 19 *quinti) ſicut* A B *antecedens ad exceſſum* G B *quo* A B *excedit* A G *conſequens, ſic (potentia)* E Z *antecedens ad exceſſum* T, *quo* E Z *excedit (potentia) ipſum* Z I *cõſequens, ſed* A B *ad* G B *rationem habent quam quadrati, per* 26 *octaui, cùm ſint (ex hypotheſi) ſimiles plani. Quod igitur ex* E Z *ad id quod ex* T, *rationem habent quã quadrati: & proinde (per nonam huius) latera ſcilicet rectas* E Z *&* T *habent longitudine commenſurabiles. Maius itaque nomen* E Z *plus poteſt minore* Z I *ipſo quod ex* T *ſibi longitudine commenſurabili. Eſt autem minus nomen* Z I *longitudine propoſitæ* D *commenſurabile, ex hypotheſi. Inuenimus itaque* E I *Ex binis nominibus ſecundam, per ſecundam diffinitionem binomiorum.*

Propoſ.

Propoſitio quinquageſima. Problema 15.

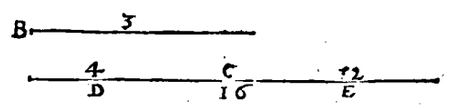
Inuenire Ex binis nominibus tertiam.



Sumpta præcedentiũ hypotheſi, ſumatur (per coroll. primi lẽmatis 28 huius) numerus A B *quadratus, excedens* B G *quadratum non quadrato* A G. *Sumatur item alius non quadratus, vnitate vel binario ab ipſo* A G *diſtans, qui ſit* D. *Exponatur item Certa* E, *cuius quadratum ſit ad quadratum* Z I *ſicut* D *numerus ad* A B, *per coroll. ſextæ huius, & ſicut* A B *ad* A G *ſic fiat (per idem coroll.) quod ex* Z I *ad quod ex* I T, *quoniam quadratum* E *certæ ad quadratum* Z I *habet numerorum* D *ad* A B *rationem, certa erit* Z I, *quia verò quadratum* Z I *ad quadratum* I T *eſt vt* A B *ad* A G *numeri, certa item erit* I T. *Cũ autem* A B *ſit quadratus,* A G *verò non, ipſæ* Z I I T *longitudine incommenſurabiles erunt, per 9 huius. Certæ itaque* Z I I T *potentia tantùm commenſurabiles erunt, & proinde tota* Z T *Ex binis erit nominibus, per 36 huius: Dico quod & tertia, cùm ſit quod ex* Z I *ad quadratum* I T, *vt* A B *ad* A G, *maior erit* Z I *ipſa* I T, *cùm maior ſit* A B *ipſo* A G *numero, quod igitur ex* Z I *plus poſſit eò quòd ex* I T, *quadrato rectæ* K, *per decimamquintam huius. Erit igitur ſicut antecedens* A B *ad exceſſum* G B *quo excedit ſuum conſequens* A G, *ſic per coroll. 19 quinti) conuerſione rationis, quadratum* Z I *ad quadratum ipſius* K, *quo quod ex* Z I *excedit ſuum conſequens quod ex* I T, *ſed* A B *ad* B G *rationem habent quam quadrati, ex hypotheſi: quod igitur ex* Z I *ad id quod ex* K (*eandem rationem habens*) *efficit latera* Z I *&* K *longitudine commenſurabilia, per nonam huius. Maius itaque nomen* Z I *plus poteſt minore* I T *eò quòd ſit ex* K *ſibi longitudine commenſurabili. Præterea cùm ſit vt* D *ad* A B *ſic quadratũ* E *ad quod ex* Z I, *vtque* A B *ad* A G, *ſic* Z I *ad* I T *quadrata, erit æqua ratione, vt* D *ad* A G *ſic quod ex* E *ad quod ex* I T, *per 22 quinti. Cùm inſuper* D *numerus ſit (ex hypotheſi) non quadratus, is ad ipſum* A B *quadratum non habet rationem quam quadrati, per coroll. 25 octaui. Quia verò idem* D *vnitate aut binario diſtat à numero* A G, *ipſi rationem ſuperparticularem, aut ſuperbipartientem habent, & proinde nec rationẽ quam quadrati habent, per coroll. 26 octaui. Sed* E *propoſita certa poſita fuit potentia ad ipſas* Z I *&* I T *in ratione numeri* D *ad numeros* A B A G, *Ipſius itaque* E *potentia ad potẽtias ipſarum* Z I I T *ſingularum, rationẽ non habet quã quadrati numeri. Ipſarum igitur* Z I *&* I T *neutra eſt propoſitæ* E *certæ longitudine commenſurabilis, per nonam huius, fuerunt autem* Z I I T *certæ potentia tantùm commenſurabiles, quarum maior* Z I *plus potuit minore* I T, *eò quòd ex ſibi longitudine commẽſurabili. Inuenimus igitur Ex binis nominibus tertiam, per tertiam diffinitionem binomiorum.*

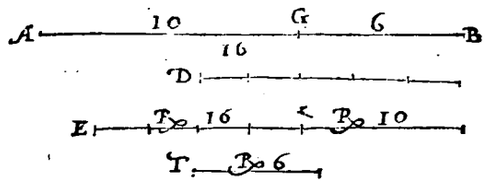
MONITVM.

Quoniam huius hypotheſim voluit fulcire Campanus per primum numerum, quem proponit, vt is ad alium quemuis rationem quam quadrati non habeat, concludere volens quòd ſi is primus ad aliquem rationem haberet, quam quadrati numeri, inter eos medius caderet, per 18 octaui, eò quòd ſimiles eſſent plani, ex coroll. 27 octaui, quod exiſtimat abſurdum, cũ primus numerus planus nõ ſit. Proponit itaque numerum primum B *& quadratum* C *diuiſibilem in quadratum* D *& non quadratum* E *& infert, cùm* B *ſit primus, non habet ad numerum* E *rationẽ, quam quadrati, quod ex hac figura falſum patet. Cùm itaque eius demonſtrationis hypotheſis fuerit inſufficiens: Theonis verò hypotheſis non probata, aliam cogimur afferre hypotheſim, qua idem conſequamur demonſtratum. Si verò primus numerus planus ſit, huius ſolutionem (poſt ſeptimi principia monito ad finem circa) deduximus.*



Propoſitio quinquageſima prima. Problema 16.

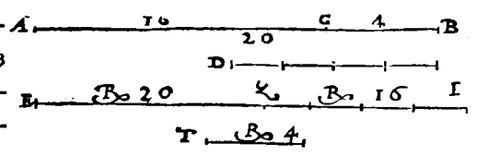
Inuenire Ex binis nominibus quartam.



Sumatur numerus quadratus A B, *qui ſecetur in duos non quadratos* A G G B. *Exponatur autem certa* D, *cui longitudine commẽſurabilis exiſtat* E Z, *fiat verò (per coroll. ſextæ huius) vt* A B *ad* A G *ſic quod ex* E Z *ad quadratum* Z I. *Commenſurabiles igitur potentia erunt* E Z Z I *rectæ, per ſextam huius, & potentia tantum, habent enim rationem nõ quam quadrati* A B A G, *per coroll. 25 octaui, latera itaque* E Z Z I *longitudine incommenſurabilia erunt, per nonam huius, ipſa quidem* E Z (*propoſitæ* D *certæ commenſurabilis*) *certa erit, & proinde* Z I *ipſi* E Z *commenſurabilis certa erit, per ſextam diffinitionem huius. Certæ igitur potentia tantùm commenſurabiles erunt* E Z Z I, *& exinde tota* E I *ex binis nominibus erit: Dico quòd & quarta, cùm maior ſit* A B *ipſo* A G, *eſt autem vt* A B *ad* A G, *ſic quod ex* E Z *ad quod ex* Z I, *maior erit* E Z *ipſa* Z I, *per 14 quinti. Plus itaque poſſit* E Z *ipſa* Z I *quadrato, quod ex* T, *per 15 huius, erit ſicut antecedens* A B *ad conſequens* A G, *ſic antecedens ex* E Z *ad conſequens ex* Z I. *Conuerſione igitur rationis erit* A B *antecedens ad* G B *exceſſum, quo excedit conſequens* A G, *ſicut potentia* E Z *ad* T *exceſſum, quo excedit ſuum conſequens* Z I, *per coroll. 19 quinti. Sed* A B *ad* G B *non habent rationem quadratorum, cùm alter tantùm ſit quadratus, per coroll. 25 octaui. Nec proinde* E Z *ad* T *rationem potentia quam quadrati habebunt, longitudine igitur ſunt incommenſurabiles ipſæ* E Z *&* T, *per nonam huius. Plus igitur poteſt maior* E Z *minore* Z I, *eò quòd ex* T *ſibi longitudine incommenſurabili. Atqui maius nomen* E Z *fuit propoſitæ certæ* D *longitudine incommenſurabile. Inuenimus igitur ex binis nominibus quartam, per quartam diffinitionem binomiorum.*

Propoſitio quinquageſimaſecunda. *Problema* 17.

Inuenire Ex binis nominibus quintam.

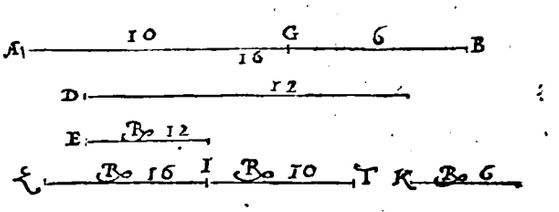


Sumpta eadem prioris hypotheſi numerorum, ſcilicet vt totus A B *numerus ad neutrum ipſorum* A G G B *rationem habeat quam quadrati, Sint duo quadrati* A G *&* G B *non quadratum* A B *componentes, per ſecundum lemma vigeſimæ octauæ huius, hæc tribus poſtremis ſufficit hypotheſis, veluti eadem alia tribus prioribus conueniebat. Sit ideo propoſita certa* D, *cui longitudine commenſurabilis, fiat* Z I. *Sicut verò* A G *ad* A B *ſic ſit (per coroll. ſextæ huius) quadratum* Z I *ad quod ex* E Z. *Potentia igitur tantùm commenſurabiles erunt* E Z Z I, *rationem quidem habentes quam numerus quadratus* A G *ad non quadratum* A B, *per coroll. vigeſimæquintæ octaui. Et certæ, cùm* Z I *ſit longitudine ipſi* D *propoſitæ commenſurabilis, per ſextam diffinitionem huius, &* E Z *potentia ipſi* Z I. *Tota igitur* E I *ex binis eſt nominibus, per 36 huius: Dico quod & quinta. Cùm enim ſit* A G, *ad* A B, *vt quadratum* Z I *ad quod ex* E Z, *erit conuertendo (per coroll. quartæ quinti)* A B *ad* A G, *vt quod ex* E Z *ad quod ex* Z I, *Maior autem eſt* A B *ipſa* A G. *Maius itaque erit quod ex* E Z *eò quòd ex* Z I, *per 14 quinti. Eſto maius quod ex* E Z *eò quòd ex* Z I *quadrato ex* T, *per 15 huius. Cùm ſit* A B *antecedens ad* B G *conſequens, vt quod ex* E Z *ad quod ex* Z I. *Erit conuerſione rationis (per coroll. 19. quinti)* A B *ad* G B *exceſſum, quo* A B *excedit ſuum conſequens* A G, *ſicut quod ex* E Z *antecedens ad quod ex* T *exceſſum, quo quadratum* E Z *excedit ſuum conſequens quod ex* Z I. *Sed* A B *non quadratus ad* G B *quadratum habet non quam quadrati rationem, per coroll. 25 octaui. Quod itaque ex* E Z *ad quod ex* T, *non habet rationem quam quadrati. Ipſæ igitur* E Z *&* T *ſunt (per nonam huius) longitudine incommenſurabiles. Maius ideo nomen* E Z *plus poteſt minore* Z I *eò quòd ſit ex* T *ſibi longitudine incommenſurabili. Atqui minus* Z I *eſt propoſitæ* D (*ex hypotheſi*) *longitudine commenſurabile. Inuenimus igitur Ex binis nominibus quintam, per quintam diffinitionem binomiorum.*

Propoſitio quinquageſimatertia. *Problema* 18.

Inuenire Ex binis nominibus ſextam.

Sit



Sit iuxta duarum proximarum hypotheſim, numerus A B *quadratus, qui diuidatur in duos* A G G B *non quadratos. Sit præterea numerus* D *non quadratus, vnitate vel binario diſtans ab ipſo* A G, *non quadrato. Proponatur inſuper* E *certa, cuius quadratum ſit ad quadratum ex* Z I, *ſicut* D *ad* A B, *per coroll. ſextæ huius. Eſto præterea ſicut* A B *maior ad* A G *minorem, ſic quòd ex* Z I *ad quadratum* I T. *Maius igitur erit quod ex* Z I *ipſo ex* I T, *per 14 quinti. Sit ideo maius, eò quòd ex* K, *per decimam quintam huius. Quoniam (ex hypotheſi)* Z I *habet ad certam* E *potentia rationem numerorum, commenſurabiles erunt (per 6 huius) ipſæ* Z I *&* E, *& ideo (per ſextam diffinitionem huius) certa erit* Z I, *ipſi* E *potentia commenſurabilis. Similiter certa erit* I T, *ipſi* Z I *potentia commenſurabilis. Cùm autem rectæ* Z I I T *ſint in ratione quadrati* A B *ad non quadratum* A G *potentia. Potentia igitur tantùm commenſurabiles certæ erunt, per nonam huius. Tota ideo* Z T *ex binis erit nominibus, per 36 huius: Dico quod & ſexta. Quoniam fuit vt* A B *maior ad* A G *minorem, ſic quod ex* Z I *ad quod ex* I T. *Erit conuerſione rationis (ex coroll. 19 quinti) ſicut antecedens* A B *ad exceſſum* G B, *quo excedit ſuum conſequens* A G, *ſic quod ex* Z I *ad quadratum ipſius* K, *quo excedit ſuum conſequens quod ex* I T. *Sed* A B *ad* G B *non habet rationem quam quadrati, per coroll. vigeſimæquintæ octaui. Nec igitur quadratum* Z I *ad quadratum* K *rationem habebit quam quadrati. Rectæ igitur* Z I *&* K *longitudine incommenſurabiles erunt, per nonam huius. Maius itaque nomen* Z I *plus poteſt minore* I T *eò quòd ex* K *ſibi longitudine incommenſurabili. Et neutrum ipſorum* Z I I T *longitudine eſt ipſi* E *propoſitæ commenſurabile. Nam ſicut fuit* D *non quadratus ad* A B *quadratum, ſic quod ex* E *certa ad quod ex* Z I. *Sicut inſuper* A B *quadratus ad* A G *non quadratum, ſic quod ex* Z I *ad quod ex* I T. *AEqua igitur ratione erit (per vigeſimam ſecundam quinti) ſicut* D *ad* A G, *ſic quod ex* E *ad quod ex* I T. *Sed* D *ad* A B *non habet rationem quam quadrati numeri, per coroll. vigeſimæquintæ octaui, nec igitur quadrata ex* E *&* Z I *rationem habent quadratorum. Præterea* D *ad* A G *(ſibi vnitate vel binario proximum) non habet rationem quadratorum, per coroll. 26 octaui, cùm ſint in ſuperparticulari vel ſuperbipartiente ratione. Igitur nec quadratum* E *ad quadratum* I T *rationem habebit quam quadrati numeri. Ipſorum itaque* Z I *&* I T *nominum neutrum eſt propoſitæ* E *certæ longitudine commenſurabile, per nonam huius. Inuenimus igitur ex binis nominibus ſextam, per ſextam diffinitionem binomiorum.*

Corollarium.

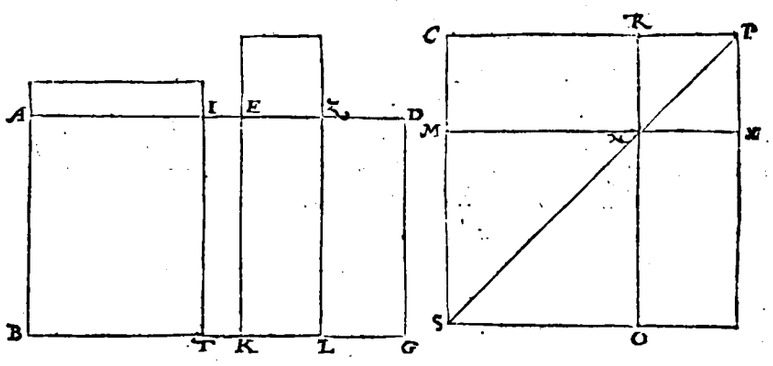
• Hinc fit, datam rectam in nomina cuiuſlibet ſex prædictarum ex binis nominibus rectarum ſecare. *Nam ſi proponatur datã rectam ſecari in binomij primi nomina, inueniemus (ex quadrageſimaoctaua huius) ex binis nominibus primam, cui (ſic ſectæ) datam rectam (per decimam ſexti) ſimiliter ſecabimus, haud ſecus in reliquis quinque ſequentibus.*

MONITVM.

Appoſuit Theon lemma huic theoremati, quod à vigeſimaquinta huius facilè produci potuit corollarij denominatione: nos itaque illud breuiſſimum ex vigeſimaquinta huius aſſumptum, huic ſubticere cogemur.

Propoſitio quinquageſimaquarta.

Si areola comprehendatur ſub Certa ac Ex binis nominibus prima, quæ areolam poteſt incerta eſt, Ex binis nominibus vocata.

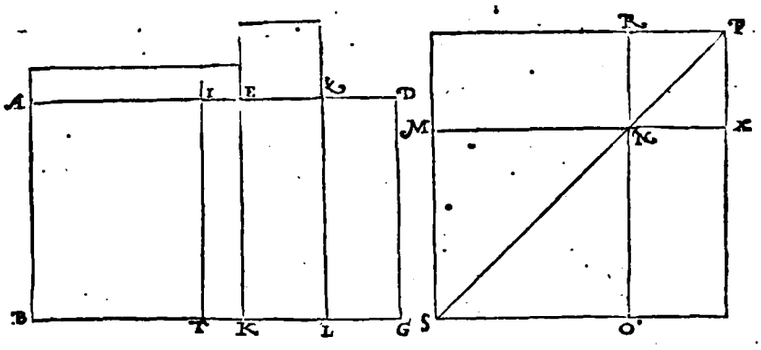


Comprehendatur areola AB GD *ſub certa* AB *& ea quæ ex binis nominibus prima* AD: *Dico eam rectã quæ aream* AG *poteſt, eſſe ex binis nominibus. Cũ* AD *quæ ex binis nominibus, ad vnum tantùm ſignum ſecetur in nomina, ſit illud ſignum* E, *per* 42 *huius: ſecetur item minus nomen* ED *bifariã in* Z. *Quadrato autem ex* EZ *æquum applicetur ad maius nomen* AE, *deficiẽs ſpecie quadrata, per vigeſimamoctauam ſexti. Sitq; quod ſub* AI IE, *per coroll. eiuſdem. Cùm autem* AD *ſit ex binis nominibus prima, maior* AE *plus poteſt minore* ED *eò quòd ſit à ſibi longitudine commenſurabili, & maius nomen* AE *eſt propoſitæ certæ* AB *longitudine commenſurabile, per primam diffinitionem binomiorum: quia verò maior* AE *plus poteſt minore* ED *eò quòd à ſibi longitudine commenſurabili. Quartæ autẽ parti eius quod ex minore* ED *æquum (hoc eſt quadrato ex* EZ) *ad maiorem* AE *applicatur, deficiens ſpecie quadrata, quod ſcilicet ſub* AI IE, *recta igitur* AE *ſecatur in commenſurabiles longitudine in ſigno* I, *per ſecundam partem* 17 *huius, ſcilicet in rectas* AI *&* IE. *Ducantur per ſigna* IE Z *ipſis* AB *&* DG *parallelæ* IT EK ZL, *ipſi autem* AT *æquum quadratum fiat* MNOS, *per* 14 *ſecundi, ipſi verò* IK *æquum (per eandem) ſit* RN XP *circa eandem dimetientem* SN P *poſitum, per* 18 *ſexti. Cõpleatúrque parallelogrammum* SP, *quod quidem* SP *quadratum erit, per* 24 *ſexti. Cùm autem quod ſub* AI IE *æquum ſit (per conſtructionem) ei quod ex* EZ, *tres rectæ* AI EZ IE *proportionales erunt, per* 17 *ſexti. Tria igitur* AT EL IK *rectangula (per primam ſexti) proportionalia erunt: quia verò medium proportionale eſt* EL *inter* AT *&* IK, *mediũ erit idem* EL *inter* MO *&* RX, *ipſis* AT IK *æqualia poſita, per ſecundam partem ſeptimæ quinti, atqui inter* MO *&* RX *mediũ eſt ſimiliter quod ſub* ON NX, *ſcilicet* OX, *per coroll.* 25 *huius: Quadratum igitur* MO *ad* EL *eandem habet quam ad* OX *rationem, nempe dimidiam quam ad tertium* RX, *per decimam diffinitionem quinti, ipſa igitur* EL *&* OX *ſunt æqualia, per nonam quinti. Cùm inſuper dupla ſit* ED *ipſius* EZ, *duplum erit* EG *ipſius* EL *per primam ſexti. Quia verò ſupplementa* OX MR *ſunt æqualia, per* 43 *primi, duplum igitur erit conflatum ex binis* OX MR *ipſius* OX, *& proinde æqualium* OX EL *dupla, ſcilicet bina* MR OX, *ipſi* EG *æqualia erunt. Totum igitur* SP *toti* AG *æquum erit, cùm* AK *quadratis* MO RX *æquum fuerit. Cæterùm quoniam* AE *longitudine fuit certæ* AB *commenſurabilis, certum erit* AK, *per* 19 *huius, & igitur certum erit conflatum ex quadratis* MO RX *ipſi certo æqualibus: quia vero commenſurabiles fuerunt longitudine* AI IE *rectæ, commenſurabilia erunt adinuicem* AT IK, *per primam ſexti, & toti* AK, *per vndecimam huius. Commenſurabilia igitur erunt* MO RX *quadrata, toti ex eis conflato, & adinuicem, & igitur certa, cùm conflatum certum fuerit, per nouam diffinitionem huius. Certæ igitur ſunt* ON NR *rectæ, ipſa certa quadrata potentes, per octauam diffinitionem huius, quoniam autem incommenſurabiles ſunt lõgitudine* AE ED *rectæ, nomina quidem binomÿ, incommenſurabilia erunt* AK EG *rectangula, per primam ſexti, quia verò bina* EG EL *ſunt cõmenſurabilia, nempe vt duplum dimidÿ. Alterum autem eorum* EG *alicui* AK *eſt incommenſurabile, & reliquum* EL *eidem* AK *incommenſurabile erit, per coroll. ſecundum decimæ huius. Similiter quia binorum* AT AK *commenſurabilium, alterum* AK *alicui* EL *eſt incommenſurabile, & reliquum* AT *eidem* EL *incommenſurabile erit, per idem coroll. & proinde* MO *&* MR (*vel* OX) *ipſis* AT EL *æqualia, incommenſurabilia erunt. Et ideo (per primam ſexti) rectæ* ON NR *longitudine incommenſurabiles erunt: quæ certæ potentia commenſurabiles oſtenſæ ſunt. Tota igitur* OR *vel* MX *ex binis nominibus erit, per* 36 *huius, quæ quidem poteſt rectangulum* AG *ſub certa & binomio comprehenſum, cùm poſſit quadratum* SP *eidem* AG *æquale oſtenſum. Si igitur areola comprehendatur ſub certa ac Ex binis nominibus prima, &c.*

Propoſitio quinquageſimaquinta.

Si areola comprehendatur ſub Certa, & Ex binis nominibus ſecũda quę areolam poteſt incerta eſt, vocatúrque Ex binis mediis prima.

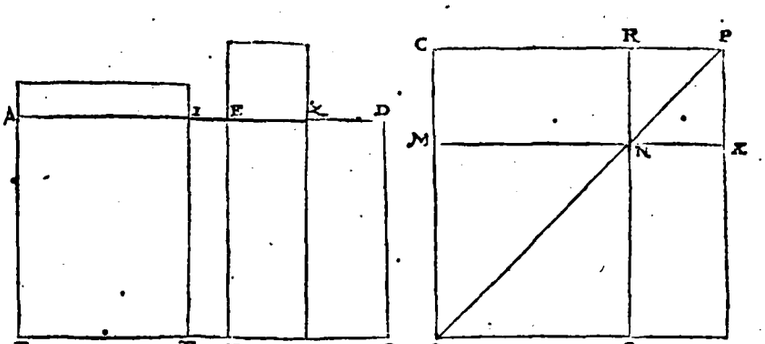
Comp



Comprehendatur area ſub certa AB *& ex binis nominibus ſecunda* AD, *quæ ſit* AB GD: *Dico rectam potentem aream* AB GD. *eſſe ex binis mediis primam, quoniam præcedẽti demõſtratione ſatis prolixè docuimus: harum figurarum conſtructionem ne tedioſa vterèmur hac & ſequentibus repetitione, vna tantùm differentia ſuppoſita, ſcilicet rectam* AD *binomium ſecundum, quod antea primum fuit, efficiemus, ſequenti verò tertium, & ſic deinceps manente eadem figuræ conſtructione: quoniam* AD *ex binis nominibus eſt ſecunda ſecta in* E, *minus nomen* ED, *longitudine eſt certæ* AB *commenſurabile,* AB *verò eidem* AB *longitudine incommenſurabile, per ſecundum corollarium decimæ huius. Certum igitur erit* EG, *per* 19 *huius. Et proinde* EL *eius dimidium certum, per nonam diffinitionem huius: medium verò erit* AK, *per* 21 *huius ſub* AE AB. *Præterea cùm* AE *plus poſſit minore* ED, *eò quòd fit à ſibi longitudine commenſurabili, per ſecundam diffinitionem binomiorum, ſequetur (ex ſecunda parte* 17 *huius)* AE *ſecari in* I *per commenſurabilia* AI IE *longitudine, & ideo (per primam ſexti) commenſurabilia erunt* AT IK *rectangula media, & proinde* AT *incommenſurabile erit ipſi* EL *certo, quoniam commenſurabilia ſunt & media* AT IK, *media erunt* MO RX *quadrata eis æqualia & commenſurabilia. Mediæ igitur erunt* MN NX *illa potentes, & potẽtia commenſurabiles: quia item certum eſt* EL, *certum erit* OX, *ſibi æquum, & igitur incommenſurabile ipſi* MO *medio. Quare (per primam ſexti)* MN NX *(eandem rationem ipſis* MO OX *habentes) incommenſurabiles erunt longitudine, ſed ſunt potentia cõmenſurabiles. Binæ igitur* MN NX *mediæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, & certum comprehendentes, comprehendunt enim* OX *certum, cùm ipſi* MN *æquale ſit* NO *aliud quadrati latus. Tota igitur* MX *ex binis mediis prima erit, per* 37 *huius, quæquidem poteſt rectangulum* AG *ſub certa* AB *& ex binis nominibus ſecunda* AD *comprehenſum, cùm poſſit quadratum* SP *ſibi æquum: aream igitur* AB GD *potens, eſt ex binis mediis prima. Si itaque areola comprehendatur ſub certa, & ex binis nominibus ſecunda, &c.*

Propoſitio quinquageſimaſexta.

Si areola comprehedatur ſub Certa, & Ex binis nominibus tertia, quæ areolam poteſt incerta eſt, appellatur Ex binis mediis ſecunda.

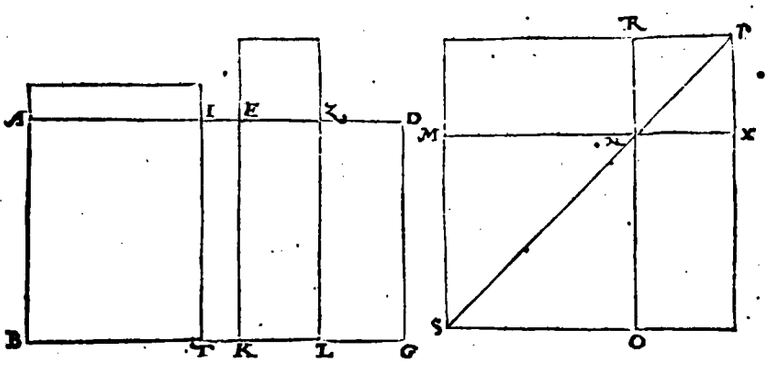


Comprehendatur area ABGD *ſub certa* AB *& ex binis nominibus tertia* AD: *Dico aream* ABGD *potentẽ, vocari ex binis mediis ſecundam, ſuppoſita præcedentiũ conſtructione, quoniã* AD *ex binis medis tertia eſt, neutrum eius nomen* AE ED *erit longitudine ipſi propoſitæ* AB *commenſurabile, per tertiã diffinitionem binomiorum, & tamen ſunt certæ* AE ED, *nomina. Quæ igitur ſub ipſis rectãgula* AK EG *media ſunt (per* 21 *huius) & incommenſurabilia, per primam ſexti, cùm* AE ED *ſint longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia tertium binomium eſt* AD *maius nomẽ* AE *plus poteſt minore, eò quòd fit à ſibi longitudine commenſurabili. Secabitur itaque (per ſecundam partem* 17 *huius)* AE *per* I *in* AI IE *longitudine commenſurabiles. Quare* AT *ipſi* IK *(per primam ſexti) commenſurabile erit: & proinde* MO *ipſi* RX *commenſurabile, & vtrumque medium, per corollarium* 23 *huius, cùm ſint commenſurabilia toti conflato ex quaratis* MO RX *ipſi* AK *æqualibus, per vndecimam huius. Mediæ ita-*

que potentia commenſurabiles erunt, MN NX. *Cùm autem bina* EL EG *ſint commenſurabilia, dimidium nempe toti, alterum autem ipſorum* EG *alicui* AK *ſit incommenſurabile, & reliquum* EL *eidem* AK *incommenſurabile erit, per coroll. ſecundum decimæ huius. Similiter duorum* AK AT *reliquum* AT *ipſi* EL *eſſe incommenſurabile, & proinde* MO OX *ipſis* AT EL *æqualia, incommenſurabilia patebunt: rectæ itaque* MN NX *(per primum ſexti) longitudine incommenſurabiles exiſtent. Mediæ igitur potentia tantùm commenſurabiles erunt* MN NX: *quæ quidem medium comprehendunt, quod ſub* ON NX *æquũ ipſi* EL *medio, cùm* MN *ſit æqualis ipſi* ON *reliquo lateri quadrati. Tota igitur* MX *ex binis mediis ſecunda erit, per 38 huius. Quæ cùm poſſit quadratum* SP, *æquum ipſi rectangulo* ABGD, *ipſa* MX *(ex binis mediis ſecunda) poterit ipſum rectangulum* ABGD *ſub certa* AB *& ea quæ ex binis nominibus tertia* AD *comprehenſum. Si itaque areola ſub certa, & ex binis nominibus tertia comprehendatur, quæ areolam, &c.*

Propoſitio quinquageſimaſeptima.

Si areola comprehendatur ſub Certa, ac Ex binis nominibus quarta, quę areolam poteſt, incerta eſt, vocatúrque Maior.

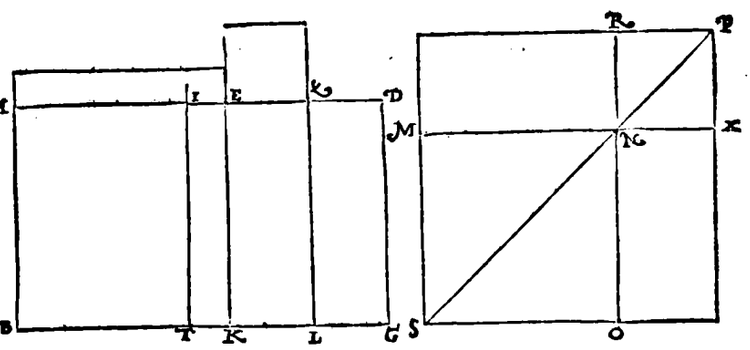


Comprehendatur areola ABGD *ſub certa* AB *& ea quæ ex binis nominibus quarta* AD: *Dico aream* ABGD *potentem, eſſe eam quæ dicitur Maior. Poſita nanque priorum figurarum conſtructione, quoniam ex binis nominibus quarta eſt* AD *ſecta in* E, *maius eius nomen* AE *plus poteſt minore* ED, *cò quòd à ſibi longitudine incommenſurabili, per 4 binomiorum diffinitionem, & ideo quartæ parti eius quod à minore* ED *æquum ipſi* AE *comparatum, ſecat ipſam* AE *in* I *per incommenſurabilia longitudine, per ſecundã partem 18 huius. Incommenſurabilia igitur erunt* AT *&* IK *(per primam ſexti) adinuicem, & toti* AK, *per 12 huius. Rurſus quia* AD *eſt ex binis nominibus quarta, maius nomen* AE *ipſi propoſitæ certæ* AB *longitudine commenſurabile erit, per eandem 4 diffinitionem, ſub* AB *&* AE: *igitur comprehenſum* AK *certum eſt, per 19 huius. Diuiſum quidem in* AT IK *incommenſurabilia, igitur quadrata* MO RX *(ipſis* AT IK *æqualia) incommenſurabilia erunt. Rectæ itaque* MN NX *potentia incommenſurabiles erunt, efficientes conflatum ex quadratis earum* MO RX *certum, cùm ſit æquũ ipſi* AK *certo. Cæterùm quia binarum longitudine commenſurabilium* AE AB, *altera* AE *alicui* ED *eſt longitudine incommenſurabilis, ſunt enim nomina binomij, & reliqua* AB *eidem* ED *longitudine incommenſurabilis erit, per corollarium ſecundum decimæ huius: quæ quidem cùm certæ ſint, potentia igitur tantùm ſunt. commenſurabiles, ſub ipſis igitur comprehenſum* EG *medium eſt, per 21 huius, &* EL *(ipſi* EG *commenſurabile) medium, per coroll. 23 huius, nempe totius* EG *dimidium: & ideo medium erit* OX, *æquale ipſi* EL *poſitum, & ſub ipſis* MN NX *(hoc eſt* NO NX*) comprehenſum: ſed ipſi* OX *æquum eſt* MR, *per 43 primi, totum igitur conflatum ex* MR OX *(bis ſcilicet ſub ipſis* MN NX*) medium eſt, per idem coroll. 23 huius. Tota itaque* MX *ex binis* MN NX *potentia incommenſurabilibus compoſita, efficientibus conflatum ex earum quadratis* MO RX *certum, quod autem bis ſub ipſis* OX MR *medium, dicetur maior, per 39 huius, quæ quidem cùm poſſit quadratum* SP, *æquum rectangulo* ABGD, *ex hypotheſi, ea poterit idem rectangulum* ABGD, *ſub certa* AB *& ex binis nominibus quarta* AD, *comprehenſum. Si itaque areola comprehendatur ſub certa, &c.*

Propoſitio quinquageſimaoctaua.

Si areola comprehendatur ſub Certa ac Ex binis nominibus quinta, quę areolam poteſt, incerta eſt, vocata Certum mediúmque potens.

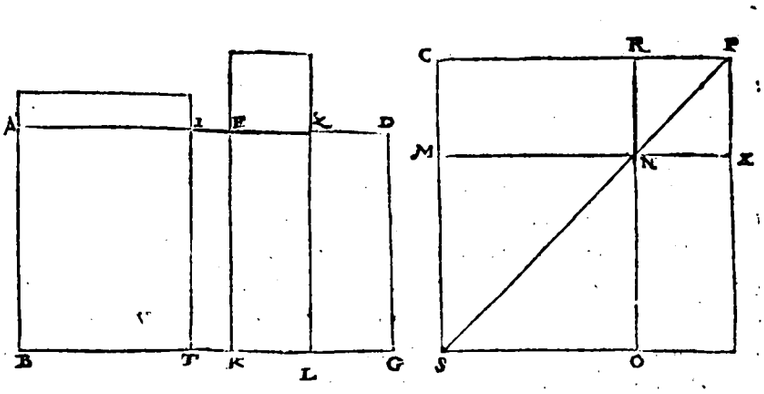
Eſto



Esto areola AB GD *comprehensa sub certa* AB *ac ex binis nominibus quinta* AD: *Dico rectam quæ aream* AB GD *potest incertã esse, quæ dicitur certum mediúmque potens. Repetamus priorum cõstructionem, quoniam ex binis nominibus quinta est* AD *secta in* E, *minus eius nomen* ED *propositæ certæ* AB *est longitudine commensurabile, per quintam binomiorum diffinitionem, sub certa* AB *& eadem* ED *igitur comprehensum,* EG *certum est, ex* 19 *huius, quare eius dimidium* EL *certum erit, & proinde certa erunt* OX MR, *ipsis* EL ZG *æqualia. Cùm autem binarum* AB ED *commensurabilium, altera* ED *sit alicui* AE *longitudine incommensurabilis, & reliqua* AB *eidem* AE *longitudine erit incommensurabilis, per secũdum coroll. decimæ huius. Quod igitur sub ipsis* AK *medium est, cùm sint ideo certæ potentia tantùm commensurabiles, per* 21 *huius: cùm autem* AD *sit quinta, maius nomen* AE *plus potest minore, eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, per quintam diffi. binomiorum, quartæ igitur parti eius quod à minore* ED *æquum, ad ipsam* AE *proiectum eam secabit in* I *per incommensurabiles* AI IE *longitudine, per secundam partem* 18 *huius: & ideo* AT IK *incommensurabilia erunt, per primam sexti, totum* AK *medium componentia. Et proinde* MO RX *quadrata (ipsis* AT IK *æqualia) incommensurabilia erunt, conflatum ex ipsis medium efficientia. Rectæ igitur* MN *&* NX *(ea incommensurabilia potentes) potentia incommensurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis* MO RX *medium: quod autem bis sub ipsis (hoc est* OX MR) *ostensum est certum. tota itaque* MX *incerta est, vocata certum mediúmque potens, per* 40 *huius, quæ quidem potest quadratum* SP *rectangulo* AG *ex hypothesi, æquũ: ea igitur* MX *quæ aream* AB GD *(sub certa* AB *& ex binis nominibus quinta* AD *comprehensam) potest, vocatur certum medium & potens. Si itaque areola comprehendatur sub certa, & ex binis nominibus quinta, &c.*

Propositio quinquagesimanona.

Si areola comprehendatur, sub Certa & Ex binis nominibus sexta, quæ areolam potest, incerta est, quæ dicitur Bina media potens.



Sub certa proposita AB *& ea quæ ex binis nominibus sexta* AD, *comprehẽdatur areola* AB GD: *Dico rectam potentem areã* AB GD *incertam esse, quæ dicitur bina media potens, sumpta nanque priorũ constructione, quoniam* AD *ex binis nominibus est sexta, neutra binarum certarum* AE ED *ipsi propositæ* AB *est commensurabilis, per sextam diffinitionem binomiorum, quare vtrunque* AK EG *medium erit, per* 21 *huius: quia verò incommensurabiles sunt longitudine* AE ED, *binomij nomina, incommensurabilia erũt media illa* AK EG *adinuicem, per primam sexti, & proinde ipsis* AK EG *æqualia (scilicet* MO RX *quadrata, &* OX MR *rectangula) media erunt, & conflatum ex quadratis, rectangulis simul sumptis incommensurabile erit, per* 13 *huius. Rursus cùm* AD *sit sexta, maius eius nomen* AE *plus potest minore* ED, *eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, per eãdem sextam diffi. binomiorum. Quartæ igitur parti eius quod à minore* ED *æquum (hoc est ipsi ex* EZ) *ad maiorem* AE *comparatum, deficiens specie quadra-*

ta, ipſam A E *ſecabit per incommenſurabiles longitudine* A I I E, *per ſecũdam partem* 18 *huius, quare incommenſurabilia erunt (per primam ſexti)* A T I K, *æqualia quidem quadratis* M O R X: *& idcirco ipſa* M O R X *quadrata incommenſurabilia erunt. Rectæ itaque* M N N X (*eorum latera*) *potentia incommenſurabiles erunt, efficientes quidem conflatum ex earum quadratis* M O R X *medium, quod autem bis ſub ipſis rectangulum* O X *&* M R *medium, & incommenſurabile inſuper ipſi compoſito ex quadratis, vt oſtenſum eſt. Tota ideo* M X *recta bina media potens dicitur, per* 41 *huius, quæ cùm poſſit quadratum* S P *æquum rectangulo* A G *ea* M X *poterit idem rectangulum,* A B G D *ſub certa* A B *& ea quæ ex binis nominibus ſexta* A D, *comprehenſum. Si igitur areola comprehẽdatur ſub certa, & ex binis nominibus ſexta, &c.*

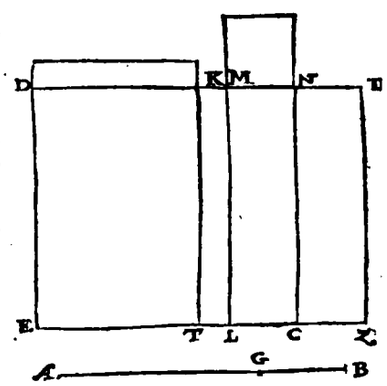
MONITVM.

Reaſſumit hîc Theon lemma non ſuo loco, ſcilicet quadrata inæqualium ſectionum alicuius rectæ maiora eſſe rectangulo bis ſub eis comprehenſo. Nam eodem vſus eſt demonſtrans 39 *huius, quo loco ſatis ſupérque monuimus huius demonſtrationem lemmatis, fruſtra igitur illud idem repeteremus, quod corollario ſeptimo ſecundi diximus.*

Propoſitio ſexageſima.

Quod ex ea quę Ex binis nominibus ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus primam.

Eſto recta ex binis nominibus A G B, *cuius maius nomen ſit* A G, *minus verò* G B. *Exponatur autem certa* D E, *cui (per* 45 *primi) applicetur æquum quadrato ex* A B, *ſit ḡ* D E Z I *latitudinem efficiens* D I: *Dico* D I *eſſe ex binis nominibus primam. Conſtituatur rurſus ad rectam* D E *æquum quadrato* A G, *ſit ḡ* D E T K. *AEquũ verò quadrato* G B *quod ſit* K T L M, *per eandem* 45 *primi. Reliquum igitur* M Z *ei quod bis ſub* A G G B *æquum erit, per quartam ſecundi. Cùm totum ex* A B *æquetur toti* D Z, *& minus ipſo* D L *erit* M Z, *cùm quadrata ex* A G G B *inæqualibus ſint maiora rectangulo bis ſub ipſis comprehenſo, per coroll. ſeptimæ ſecundi. Cùm autem* A G G B *nomina ſint certæ potentia commenſurabiles, earum quadrata erunt certa, & commenſurabilia. Quare* D T K L *rectangula (eis æqualia) certa erũt, & inuicem cõmenſurabilia, & igitur (per primam ſexti) rectæ* D K K M *longitudine commenſurabiles. Cùm autem certum ſit totum* D L, *ex certis* D T K L *compoſitum, & ad certam* D E *comparatum latitudinem* D M *certam longitudine ipſi* D E *certæ commẽſurabilem (per* 20 *huius) efficiet. Quia verò ſub* A G G B *medium eſt, per* 21 *huius, id quod bis ſub ipſis medium erit, per coroll.* 23 *huius, & proinde* M Z *(ipſis æquum) medium erit, & ad certam* D E *comparatum, latitudinem* M I *certam potentia tantùm ipſi* D E *commenſurabilem efficiet, per* 22 *huius. Quia verò binarium* D E D M *commenſurabilium, altera* D E *alicui* M I *longitudine incommenſurabilis eſt, vt modò patuit. Et reliqua igitur* D M *eidem* M I *incommenſurabilis erit longitudine, per ſecundum coroll. decimæ huius. Sed cùm certæ ſint* D M M I, *potentia tantùm commenſurabiles erunt. Tota itaque* D I *ex binis nominibus erit, per* 36 *huius. Secetur igitur* M I *bifariam, ducta* N C *parallela, ipſis* D E I Z, *duplum erit* M Z *ipſius* M C, *per primam ſexti. Ipſi verò* M Z *æquum eſt duplum eius quod ſub* A G G B. *AEquum igitur erit* M C *ei quod ſub* A G G B. *Sed quod ſub* A G G B *medium proportionale eſt, inter quæ ex* A G *&* G B *quadrata, per coroll.* 25 *huius. Igitur* M C *medium proportionale erit inter* D T K L *ipſis quadratis æqualia. Quare &* M N *media inter* D K *&* K M *proportionalis erit, per primam ſexti. Quod itaque ſub extremis* D K K M, *æquum eſt ei quod à media* M N, *per* 17 *ſexti. Sunt igitur binæ rectæ* D M M I *inæquales. Quartæ autem parti eius quod à minore* M I *æquum (ſcilicet ei quod ex* M N) *ad maiorem* D M *comparatum, quod ſcilicet ſub* D K K M, *defficiens ſpecie quadrata, per coroll.* 28 *ſexti, & ipſam* M N *maiorem per commenſurabilia longitudine* D K K M *diſtribuit. Maior igitur* D M *plus poteſt minore* M I, *eò quòd à ſibi longitudine commenſurabili, per* 17 *huius, fuit autem maius nomen* D M *propoſita certæ* D E *longitudine commenſurabile.*

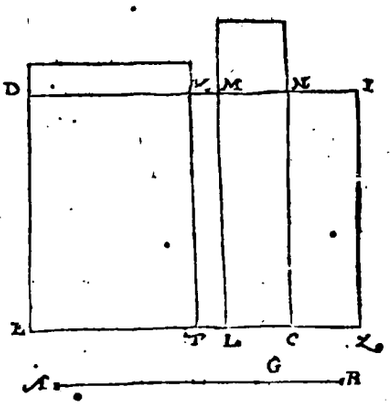


rabile. Tota igitur D M I *est ex binis nominibus prima, per* 1 *binomiorum diffinitionem. Quod itaque ex ea quæ ex binis nominibus ad certam comparatum, &c.*

Propositio sexagesimaprima.

Quod ex ea quæ Ex binis mediis prima, ad Certam comparatum latitudinem efficit Ex binis nominibus secundam.

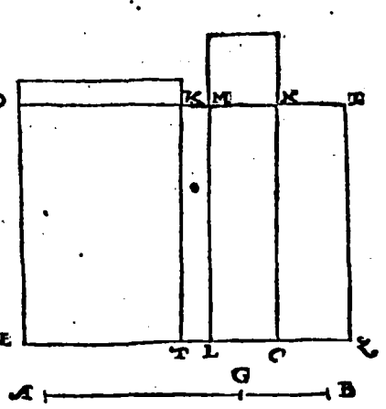
Esto A B *ex binis mediis prima, diuisa in* G, *cuius maius nomen sit* A G. *Exponatur verò certa* D E, *cui (per* 45 *primi) applicetur æquum ei quod ex* A B, *quod sit* D E Z L: *Dico* D L *latitudinem effectam, esse ex binis nominibus secũdam. Sit (vt præcedenti diximus) ipsis quadratis ex* A G *&* G B *æquum* D T *&* K L, *his verò quæ bis sub ipsis, sint æqualia* M C *&* N Z, *secta* M I *bifariam in* N, *sit q. quod ex* M N *æquum ei quod sub* D K K M, *quod ad* D M *proiectum defficiat, specie quadrata, &c. Manifestum est (vt in præcedeti)* D L *(æquu quadratis ex* A G G B*) maius esse ipso* M Z, *æquali eisque bis sub ipsis, per coroll. septimæ secundi, & ideo* D M *ipsa* M I *maiorem esse, per primam sexti. Cùm autem* A B *sit ex binis mediis prima, quod sub* A G G B *certũ est, per* 37 *huius, certum igitur erit* M Z *eius duplum. Quod quidem ad certam* D E *proiectum, latitudinem* M I *certam longitudine ipsi* D E *commensurabilem efficit, per* 20 *huius. Quia verò duarum* A G G B *mediarum quadrata, sunt commensurabilia, &* D T K L *(ipsis æqualia) erunt commensurabilia, & media. Et proinde totum* D L *vtrique commensurabile, per vndecimam huius, medium erit, per coroll.* 23 *huius. Et ideo (per primam sexti) rectæ* D K K M *longitudine commensurabiles erũt, & cùm* D L *sit medium, ad certam* D E *applicatum, latitudinem* D M *efficit certã, sed longitudine incõmensurabilem ipsi* D E: *quia verò* D E *&* M I *sunt cõmẽsurabiles, &* D E *ipsi* D M *incõmensurabilis est. Et reliqua* M I *eidem* D M *incommensurabilis erit, per secundum coroll.* 10 *huius. Binæ itaque* D M M I *certæ, potentia tantùm commensurabiles, totam* D I *ex binis nominibus, per* 36 *huius, efficiunt: Dico quod & secundam, cùm maior ostensa sit* D M *ipsa* M I. *Ipsa verò* M I *(minus nomen) ostensa sit. propositæ certæ* D E *longitudine commensurabilis, insuper binarum rectarum inæqualium* D M M I, *æquum quartæ parti eius quod à minore* M I *(scilicet quadrato ex* M N*) ad maiorem applicatum sit, quod sub* D K K M, *deficiens specie quadrata & per commensurabilia longitudine ipsam* D M *(per* D K K M*) diuiserit. Maior* D M *plus poterit minore* M I, *eò quòd ex sibi longitudine commensurabili, per* 17 *huius. Tota itaque* D I *ex binis nominibus erit secunda, per secundam diffinitionem binomiorum. Quod igitur ex ea quæ ex binis mediis prima ad certam comparatum, &c.*



Propositio sexagesimasecunda.

Quod ex ea quæ Ex binis mediis secunda ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus tertiam.

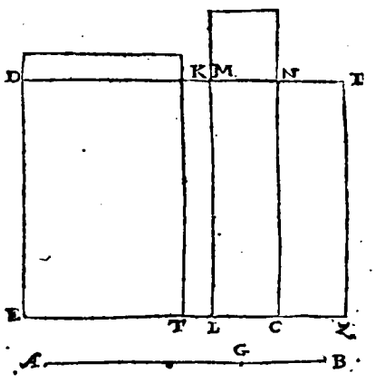
Sit ex binis mediis secunda A B *secta in* A G *maius &* G B *minus, nomina. Sit insuper certa proposita* D E, *cui (per* 45 *primi) comparetur æquum quadrato quod ex* A B *rectangulum* D E Z I, *latitudinem efficiens* D I: *Dico* D I *rectam esse, ex binis nominibus tertiam, constituantur (vt binis præcedentibus diximus)* D T *&* K L *æqualia quadratis ex* A G G B. *Insuper* M C N Z *æquũ rectangulis quæ bis sub* A G G B, *secta bifariam in* M N. *Proiecto insuper ad ipsam* D M *rectangulo æquali, quadrato ex* M N, *quod sit sub* D K K M, *deficiente specie quadrata, & reliqua ex prius ostensis: quoniam* A B *est ex binis mediis secunda, ea fit ex binis* A G. G B *mediis, & medium comprehẽdentibus, per* 38 *huius. Quare* D L *æquum quadratis mediis commensurabilibus (ex* A G G B*) medium erit ac* M Z *æquũ ei medio quod bis sub ipsis* A G G B, *mediũ erit: quæ quidẽ media ad cer-*



tam D E *proiecta, latitudines certas quidem* D M M I *efficiunt, sed longitudine ipsi* D E *incommensurabiles, per* 22 *huius. Cùm autem sit vt* A G *ad* G B, *sic quod ex* A G *ad quod sub* A G G B, *per lemma* 21 *huius: quadratum igitur ex* A G *rectangulo sub* A G G B *incommensurabile erit, nam* A G G B *longitudine sunt incommẽsurabiles mediæ, per* 38 *huius: & proinde* D T *ipsi* M C *incommensurabile erit cùm sint incommensurabilibus æqualia: & igitur (per primum corollarium decimæ huius) totum* D L *ipsi* M C, *necnõ totum* M Z *ipsi* D L *incommensurabile erit. Quare (per primam sexti)* D M M I *certæ rectæ longitudine incommensurabiles erunt, potentia igitur tantùm erunt ipsi* D M M I *commensurabiles, cùm sint certæ. Tota igitur* D I *ex binis est nominibus, cuius quidem neutrum nomen* D M *vel* M I *propositæ* D E *commensurabile fuit. Cùm autem* D T K L *sint æqualia quadratis* A G G B *commensurabilibus, ipsa* D T K L *commensurabilia erunt, & proinde (per primam sexti) rectæ* D K K M *longitudine cõmensurabiles erunt. Ad ipsam igitur* D M *maiorem quod sub* D K K M *proiectum æquale quartæ parti eius quod à minore (hoc est quadrato ex* M N) *ipsam* D M *in longitudine commẽsurabiles distribuit, deficiens specie quadrata, maior igitur* D M *plus potest minore* M I, *eò quòd à sibi lõgitudine commensurabili. Tota itaque* D I *ex binis nominibus erit tertia, per tertiam diffinitionẽ binomiorum. Quod igitur ex ea quæ ex binis mediis secunda, &c.*

Propositio sexagesimatertia.

Quod ex Maiore ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus quartam.



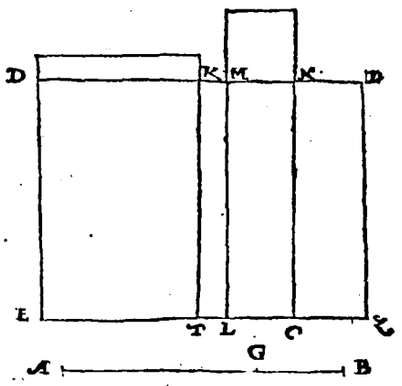
Esto maior A B, *cuius maius nomen sit* A G, *sit certa* D E, *quod ex* A B *verò ad* D E *certam applicatum, per* 45 *primi, latitudinẽ efficiat* D I, *& reliqua, vt proximis docuimus, cõstruantur: Dico rectam* D I *esse ex binis nominibus quartam. Cùm enim* A B *sit maior, conflatum ex quadratis* A B B G *certum erit, quod verò sub ipsis medium, per* 39 *huius, certũ igitur erit* D L, *æquum quadratis, medium verò* M Z, *duplum eius, quod sub ipsis, per corollarium* 23 *huius: & idcirco certæ erunt,* D M *&* M I *rectæ, quarum* D M *propositæ* D E *longitudine commmensurabilis est, per vigesimam huius:* M I *verò longitudine eidem* D E *incommensurabilis, per* 22 *huius. Quoniam autem* D M *&* D E *sunt cõmensurabiles, altera quæ earum* D E *alicui* M I *est incommensurabilis, reliqua* D M *eidem* M I *(per secundum corollarium decimæ huius) incommensurabilis erit longitudine. Potentia tantùm igitur commensurabiles sunt, certæ* D M M I, *& proinde tota* D I *ex binis nominibus: Dico & quarta, nam ostensum est nomen maius esse* D M, *cùm* D L *æquale sit quadratis ex* A G G B, *maioribus per corollarinm septimæ secundi, propositæ* D E *certæ longitudine commensurabile. Præterea cùm binæ* A G G B *sint potentia incommensurabiles, per eandem* 39 *huius, quæ ex ipsis quadrata (seu* D T K L *ipsis æqualia) incommensurabilia erunt, & proinde rectæ* D K K M *(per primam sexti) longitudine incommensurabiles erunt: diuisæ autem per applicationem eius quod sub* D K K M, *quod æquatur quartæ parti eius quod à minore* M I, *iuxta* 18 *huius, itaque maior* D M *plus potest minore* M I, *eò quòd à sibi longitudinæ incommensurabili: ipsa igitur* D I *ex binis nominibus est quarta, per quartam diffinitionem binomiorum. Quod ergo ex maiore ad certam comparatum, &c.*

Propositio sexagesimaquarta.

Quod ex Certum mediúmque potente, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus quintam.

Esto

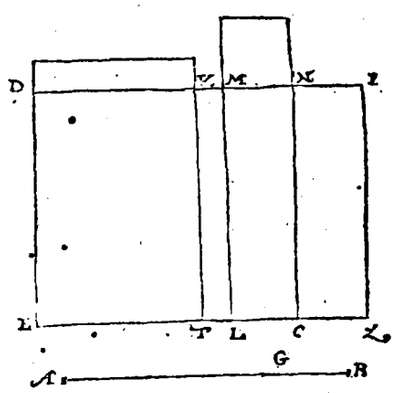
Esto certum mediúmque potens A B *recta, cuius maius nomen sit* A G. *Quod autem ex* A B *applicetur (per 45 primi) ad expositam certam, quæ sit* D E, *latitudinem efficiens* D I. *Reliqua item vt prioribus construximus: Dico rectam* D I *esse ex binis nominibus quintam. Cùm* A B *sit certum mediúmque potens compositum ex quadratis* A G G B *medium erit, & proinde* D L *medium. Quod verò sub ipsis* A B B G *certum erit (per 40 huius) & proinde* M Z *duplum, eius quod sub ipsis certum erit. Quare latitudo* M I *recta certa longitudine ipsi propositæ* D E *commẽsurabitur, per 20 huius. Recta verò* D M *certa longitudine eidem* D E *propositæ certæ incõmensurabilis erit, per 22 huius. Sed duarum* D E M I *commensurabilium, altera* D E *alicui* D M *incommensurabilis est, & reliqua* M I *eidem* D M *(per secundum coroll. 10 huius) longitudine incommensurabilis erit. Potentia itaque tantùm commensurabiles certæ erunt* D M M I, *Tota igitur* D I *ex binis erit nominibus: Dico quod & quinta. Nam minus nomen* M I *ostensum est propositæ* D E *longitudine commensurabile. Cùm autem* A G G B *sint potentia incommensurabiles, per 40 huius,* D T K L *(ipsis potentiis æqualia) incommensurabilia erunt. Et proinde (per primam sexti)* D K K M *incommensurabiles erunt longitudine. Quare comparatum sub* D K K M, *æquum quartæ parti eius quod à minore* M I, *deficiens specie quadrata, ac per incommensurabiles ipsam* D M *secans in* K, *efficit (ex 18 huius) maiorem* D M *plus posse minore* M I *eò quòd à sibi longitudine incommensurabile. Recta igitur* D I *erit ex binis nominibus quinta, per quintam diffinitionem binomiorum. Quod itaque ex certum mediúmque potente, ad certam, &c.*



Propositio sexagesimaquinta.

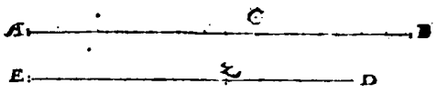
Quod ex Bina media potente ad Certam comparatum latitudinem efficit Ex binis nominibus sextam.

Sit recta A B *bina media potens, cuius maius nomen esto* A G. *Exponatur certa* D E, *cui (per 45 primi) constituatur æquum quadrato ex* A B, *sitq; latitudinem efficiens* D I, *& reliqua priorum more construantur: Dico rectam* D I *esse ex binis nominibus sextam. Cùm autem recta* A B *sit bina media potens, quadrata sectionum* A G G B *componunt medium, scilicet* D L. *Quod insuper sub ipsis medium, per 41 huius, & proinde* M Z *(duplum ei) medium. Quæ quidem media ad certam* D E *apposita, vtraſque latitudines* D M M I *certas longitudine propositæ* D E *incommensurabiles efficiunt, per 22 huius. Præterea (ex eadem 41 huius) quod sub ipsis medium, scilicet* M Z, *est incommensurabile medio composito ex quadratis, ipsi scilicet* D L. *Et ideò (per primam sexti) certæ* D M M I *longitudine incommensurabiles erunt. Potentia igitur tantùm commensurabiles. Tota proinde* D I *ex binis est nominibus, per 36 huius: Dico quod & sexta. Cùm (ex præfata 41 huius) quadrata rectarum* A G G B *sint incommensurabilia, & proinde ipsis æqualia* D T K L *rectangula. Sequetur (ex prima sexti) rectas* D K K M *longitudine incommensurabiles esse. Quare ad maiorem* D M *rectam comparatur quod sub* D K K M, *æquum quartæ parti eius quod à minore* M I *quadrato scilicet* M N, *deficiens specie quadrata, ac ipsam* D M *(per incommensurabilia) longitudine distribuit in* K. *Maius igitur nomen* D M, *plus potest minore* M I, *per 18 huius, eò quòd fit à sibi longitudine incommensurabili. Sed neutrum ipsorum nominum* D M *vel* M I, *ipsi propositæ* D E *longitudine fuit commensurabile. Tota itaque* D I *ex binis nominibus recta dicetur sexta, per sextam diffinitionem binomiorum. Quod igitur ex bina media potente ad certam comparatum, &c.*



Propositio sexagesimasexta.

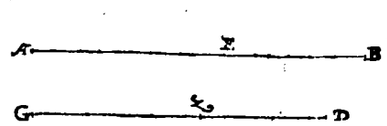
Ei quæ Ex binis nominibus longitudine commensurabilis, ipsa quoque Ex binis nominibus est, ac in ordine eadem.



Sit ex binis nominibus cuiusuis ordinis A B, *maiúsque eius nomen sit* A G. *Eidem porrò* A B *commensurabilis esto* E D: *Dico* E D *ex binis nominibus esse, & insuper eiusdem ordinis cum ipsa* A B. *Secetur* E D (*per decimam sexti*) *in* Z *similiter ipsi* A B. *Erit igitur* A G *ad* G B *vt* E Z *ad* Z D, *& componendo sicut* A B *ad* G B *sic* E D *ad* Z D, *per* 18 *quinti, vicissim itaque* (*per* 16 *quinti*) *erit* A B *ad* E D *sicut* G B *ad* Z D, *& ideo* (*per* 19 *quinti*) *reliquum* A G *ad reliquum* E Z, *sicut* A B *ad* E D. *Cõmensurabiles autem sunt* A B E D, *ex hypothesi, commensurabiles igitur erunt* G B *ipsi* Z D, *& A G ipsi* E Z, *per* 13 *huius. Certæ item sunt* A G G B, *per* 36 *huius, certæ igitur erunt* E Z Z D, *per sextam diffinitionem huius. Quia verò* A G *ipsi* G B *longitudine est incommensurabilis, &* E Z *ipsi* Z D *longitudine incommensurabilis erit, per secundam partem* 13 *huius. Potentia igitur tantùm erunt commensurabiles certæ* E Z Z D. *Tota igitur* E D *ex binis est nominibus. Ostendamus quod eiusdem sit ordinis* E D *cum ipsa* A B. *Si enim* A G *plus possit minore* G B *à sibi longitudine commensurabili, &* E Z *ipsa* Z D *simile maius poterit, per* 16 *huius. Si quidem maius nomen* A G *propositæ fuerit commensurabile longitudine, &* E Z *ipsi propositæ commensurabile longitudine erit, per decimam huius. Nam proposita &* E Z *eidem* A G *sunt commensurabiles, & sic erit vtraque prima. Si minus* G B, *& minus* Z D, *per eandem, sicq; vtraque secunda. Si verò neutrum propositæ commensuretur ipsorum* A G G B *nominum, & neutrum ipsorum* E Z Z D *eidem propositæ commensurabitur, per coroll. secundum decimæ huius. Nam binæ* A G E Z *sunt commensurabiles ostensæ, similiter &* G B Z D *inter se, & sic vtraque erit tertia. Si quidem maior* A G *plus possit minore* G B *à sibi longitudine incommẽsurabili, &* G Z *ipsa* Z D *eodem plus poterit, per secundam partem* 10 *huius. Hoc quidem transposito, si maius propositæ commensuretur, & maius ipsius* E D *eidem propositæ commensurabitur* (*vt patuit*) *& sic quarta. Si minus, & minus, & sic quinta. Si verò neutrum, & neutrum, sicq; sexta. Ei itaque quæ ex binis nominibus longitudine commensurabilis, &c.*

Propositio sexagesimaseptima.

Ei quæ Ex binis mediis longitudine commensurabilis, & ipsa Ex binis mediis est, & in ordine eadem.



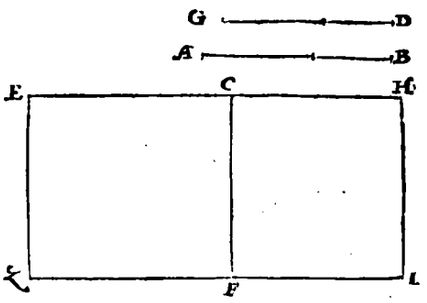
Sit ex binis mediis recta A B, *cuius maius nomen esto* A E, *ipsi autem* A B *commensurabilis esto longitudine* G D: *Dico* G D *rectam ex binis mediis esse, & in ordine eandem ipsi* A B. *Secetur* (*per decimam sexti*) G D *in* Z *similiter ipsi* A B. *Erit* A E *ad* E B *sicut* G Z *ad* Z D, *& componendo* (*per decimamoctauam quinti*) A B *ad* B E *sicut* G D *ad* D Z. *Et vicissim* A B *ad* G D *vt* B E *ad* D Z, *per* 16 *eiusdem. Et* (*per* 19 *eiusdem*) *reliquum* A E *ad* G Z *sicut* A B *ad* G D. *Commensurabilis autem est* A B *ipsi* G D, *per hypothesim, commensurabilis igitur erit* D Z *ipsi* B E, *ac* G Z *ipsi* A E, *per* 13 *huius. Quia verò* A E *ipsi* E B *longitudine incommensurabilis est, &* (*per eandem*) G Z *ipsi* Z D *longitudine incommensurabilis erit. Cùm autem potentiæ mediarum* A E E B *sint commensurabiles, per* 37 *&* 38 *huius, & ipsarum* G Z Z D *potentiæ commensurabiles erunt, per* 13 *huius. Cùm linearum proportionalium quadrata sint proportionalia, per* 22 *sexti. Mediæ autem sunt* A E E B, *mediæ igitur erunt* G Z Z D, *per* 23 *huius. Ex binis itaque mediis erit* G D. *Quod autem eiusdẽ ordinis sit ipsi* A B *dicamus. Quoniã est* A E *ad* E B *sicut* G Z *ad* Z D, *erit* (*per lemma vigesimæprimæ huius*) *quadratũ ex* A E *ad quod sub* A E E B, *sicut quadratũ ex* G Z *ad quod sub* G Z Z D. *Et vicissim* (*per* 16 *quinti*) *sicut quadratũ ex* A E *ad quadratũ ex* G Z, *sic quod sub* A E E B *ad quod sub* G Z Z D, *Cõmensurabile autem est quadratũ* A E *ei quod ex* G Z, *per illationem nonæ huius, commẽsurabile igitur erit quod sub* A E E B *ei quod sub* G Z Z D, *per* 13 *huius. Si igitur certum sit quod sub* A E E B *certum erit quod sub* G Z Z D. *Et sic vtraque* A B *&* G D *erit prima ex binis mediis, per* 37 *huius. Si verò quod sub* A E E B *medium fuerit, medium erit quod sub* G Z Z D, *per coroll.* 23 *huius.*

Sicq;

Sicque vtraque A B *&* G D *erit ſecunda, ex binis mediis, per* 38 *huius. Ei itaque quæ ex binis mediis longitudine commenſurabilis. &c.*

Corollarium

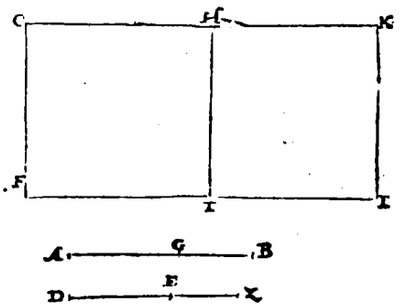
Ei quæ Ex binis mediis potentia tantùm commenſurabilis, ea Ex binis mediis eſt, & in ordine eadem. *Sit* A B *ex binis mediis prima, aut ſecunda, cui commenſurabilis eſto* G D. *Sit item certa* E Z, *cui (per* 45 *primi) applicetur æquum quadrato ex* A B, *ſitq;* E Z F C, *æquũ verò quadrato* G D *eſto* C F I H, *quoniam* E F *rectangulum eſt, quod ex binis mediis ſit prima, illud ad certã proiectum, latitudinem* E C *efficit binomium ſecundum, per* 61 *huius. Quia verò (ex hypotheſi) commenſurabilia ſunt quadrata* A B G D, *commenſurabilia erũt (eis æqualia)* E F C I *rectangula, & ideo (ex* I. *ſexti) cõmenſurabiles longitudine rectæ* E C C H, *atqui* E C



fuit ex binis nominibus ſecũda, et igitur C H *ex binis nominibus ſecũda erit, per* 66 *huius, quod autẽ* C I, *ſub certa* E Z *vel* C F *& ex binis nominibus ſecunda* C H *comprehenditur, illud potens, eſt ex binis mediis prima, per* 55 *huius, quæ quidẽ illud potens fuit* G D *quæ ideo eſt eiuſdem ordinis ipſi* A B. *haud ſecus oſtendetur ſi* A B *fuerit ex binis mediis ſecunda, ea etenim efficiet latitudinem* E C *Binomium tertium, cui longitudine commenſurabilis erit* C H, *& ideo* C H *erit tertium, ſub quo & certa comprehenſa areola, ſit potentia eius quæ ex binis mediis ſecunda, quæ quidem fuit ipſa* G D. *Ei igitur quæ ex binis mediis longitudine aut potentia tantùm commenſurabilis, ea ex binis mediis erit eiuſdẽmque ordinis.*

MONITVM.

Secus ſentiendum eſt in binomiis, eorum etenim potentiæ tantùm commenſurabiles, eundem binomij ordinem produci non cogunt, ſed tantùm vtraſque in tribus prioribus aut certæ tribus poſterioribus ſimul inueniri, vt exemplo aperiamus. Sit ex binis nominibus prima A B, *cuius maius nomen eſto* A G, *ipſi verò* A B *potentia tantùm commenſurabilis ſit* D Z: *Dico* D Z *non eſſe eiuſdem ordinis ipſi* A B. *Nam ſi fieri poſſet, ſit* D Z *eiuſdẽ ordinis ipſi* A B. *Ipſa igitur* D Z *ſimiliter ſecabitur in* E, *vt ipſa* A B *in* G, *per demonſtratum ſexageſimam ſexta huius. Non igitur aliter ſecabitur, per* 42 *huius: cùm ideo ſit* A B *ad* D Z, *vt* A G *ad* D E, *ſed* A G *&* D E (*maiora nomina*) *commenſurabilia ſunt adinuicem longitudine, per decimam huius, cùm ſint eidem propoſitæ certæ commẽſurabiles, per primam binomiorũ diffinitionem. Ipſæ igitur* A B *&* D Z, *longitudine commenſurabiles*

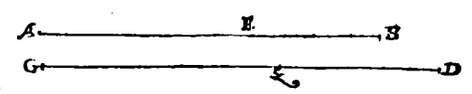


erunt, per 13 *huius, ſed & potentia tantùm, ex hypotheſi, quod fieri non poteſt. Eodem argumento patebit, ſi poſuerimus* A B *ex binis nominibus ſecundam: nam minora nomina* G B *&* E Z *eidem propoſitæ, & igitur adinuicem commenſurarentur, & proinde ipſæ* A B D Z *eandem habentes rationem commenſurarentur, contra ſuppoſitum. Præterea ſi comparentur ipſarum* A B *&* D Z *quadrata, ad certam* C F, *ſcilicet* C I H L, *ipſa efficient latitudines* C H H K *ex binis nominibus primas, per ſexageſimam huius, cuiuſcunque ordinis fuerint* C I *&* H L *applicata. Quare ſub certa & binomio prima, patet omnes binomiorum contineri potentias (ex* 54 *huius) confuſè. Non igitur neceſſariò potentiarum ſola commenſuratio, eundem binomiorum pariet ordinem. Idem patebit, ſi ſupponantur* A B *&* D Z *binomium, quartum aut quintum, quorum potentiæ tantùm commenſurabiles, ſimiliter vt priorum diuerſum pariunt ordinem. Quoniam autem potentiæ* A G G B *&* D E E Z *commenſurabiles ſunt & proportionales, facilè patet, ſi* A G *ipſa* G B *maius poſſit à ſibi longitudine commenſurabili, &* D E *maius ipſa* E Z *eodem poſſe, per* 16 *huius, vt ſint binæ* A B D Z, *ſimul ex tribus prioribus binomiis. Si verò ab incommenſurabili, & reliqua ab incommenſurabili maius poterit, per eãdem, vt ſint ſimul trium poſteriorum. Cur autem de tertio & ſexto binomiis, nihil in exemplo meminerimus id cauſæ eſt. Nam tertiæ & ſextæ neutrum nomen longitudine commenſurabile eſt ipſi* C F *propoſitæ: quare longitudinis incommenſuratio, ipſarum* A B *&* D Z *inter ſe non repellit mutuam commenſurationem binorum ad certam nominum. Nec obſtat ipſis* A G G B *eidem* C F *incommenſurabilibus exiſtentibus ſimul & reliquas* D E E Z *eidem* C E *incommenſurabiles exiſtere, latior etenim multo eſt incommenſuratio com-*

menſuratione. Licet autem decima huius eidem commenſurabiles adinuicem commenſurari cogat. Attamen eidem incommenſurabiles, inter ſe incommenſurabiles eſſe cogi non poterunt, nec quidem commenſurabiles eſſe, ob immenſam incommenſurabilium libertatem. Hac igitur de cauſa Euclides ſex binomia ſub vna tantùm incertarum denominatione compeſcebat, cùm non ideo inter ſe vt cæteræ, diſtent: quæquidem cæteræ, nec longitudine néve potentia vlla communicãt, vt proximo Supero fauente, dicemus. Oſtendimus enim ex binis mediis primã & ſecundam eouſque inter ſe diſcrepare, vt ne potẽtia tantùm commenſurari poſſint, præcedenti corollario, cui ſimile ſequentes habere patebit; vt earum ſex ſingulas propriam ſibi quantitatis vendicare naturam concipiamus.

Propoſitio ſexageſimaoctaua.

Maiori commenſurabilis, ea quoque Maior eſt.



Eſto maior A B, *cuius maius nomen ſit* A E, *ipſi verò* A B *quauis arte (ſaltem potentia) commenſurabilis exiſtat* G D: *Dico* G D *vocari maiorem, ſecetur* G D *ſimiliter ipſi* A B *in* Z, *per decimam ſexti: erit itaque* A E *ad* E B *vt* G Z *ad* Z D, *& componendo (per* 18 *quinti)* A B *ad* B E *vt* G D *ad* D Z, *& viciſſim (per* 16 *quinti)* A B *ad* G D *vt* B E *ad* D Z. *Reliquum igitur* A E *ad reliquum* G Z *erit, vt* A B *ad* G D, *per* 19 *quinti, & proinde earum quadrata proportionalia erũt, ex* 22 *ſexti, ſcilicet quod ex* A E *ad quod ex* E B, *ſicut quod ex* G Z *ad quod ex* Z D, *incommenſurabilia autem ſunt quæ ex* A E *& ex* E B, *incommenſurabiles enim ſunt potentia* A E E B, *per* 39 *huius, incommenſurabilia itaque erunt quæ ex* G Z *& ex* Z D, *per* 13 *huius, ipſæ igitur* G Z Z D *rectæ potentia ſunt incommenſurabiles, quia verò fuit quod ex* A E *ad quod ex* E B, *ſic vt quod ex* G Z *ad quod ex* Z D, *erit componendo quæ ex* A E *& ex* E B, *ad quod ex* E B, *ſicut quæ ex* G Z *& ex* Z D, *ad quod ex* Z D, *per* 18 *huius, & viciſſim quæ ex* A E *& ex* E B *ad quæ ex* G Z *& ex* Z D, *ſicut quod ex* E B *ad quod ex* Z D, *quia rurſus fuit* A B *ad* G D *vt* E B *ad* Z D, *erit (per eandem* 22 *ſexti) quod ex* A B *ad quod ex* G D, *ſic quod ex* E B *ad quod ex* Z D. *Commenſurabile autem eſt quod ex* A B *ei quod ex* G D, *ex hypotheſi, commenſurabile quod ex* E B *ei quod ex* Z D, *per decimamtertiam huius, ſed ſicut quod ex* E B *ad quod ex* Z D, *ſic fuerunt compoſita ex* A E E B *quadratis, ad compoſita ex* G Z Z D *quadratis. Compoſitum igitur ex* A E E B *quadratis, commenſurabile erit compoſito ex* G Z Z D *quadratis, per eandem* 13 *huius, certum autem eſt compoſitum ex* A E E B *quadratis, per* 39 *huius, cùm ſit* A B *maior, certum igitur erit compoſitum ex* G Z Z D *quadratis, per ſextam diffinit. huius. Binæ itaque* G Z Z D *rectæ potentia incommenſurabiles ſunt, efficientes compoſitum ex earum quadratis certum. Cæterum cùm fuerit* A E *ad* G Z *vt* A B *ad* G D, *erit (per* 22 *ſexti) quod ex* A E *ad quod ex* G Z, *ſicut quod ex* A B *ad quod ex* G D: *cõmenſurabile autem eſt quod ex* A B *ei quod ex* G D, *ex hypotheſi. Commenſurabile igitur erit quod ex* A E *ei quod ex* G Z, *quia verò eſt vt* A E *ad* E B *ſic* G Z *ad* Z D, *erit (per lemma* 21 *huius) quod ex* A E *ad quod ſub* A E E B, *ſicut quod ex* G Z *ad quod ſub* G Z Z D, *& viciſſim quod ex* A E *ad quod ex* G Z *ſicut quod ſub* A E E B *ad quod ſub* G Z Z D, *per* 16 *quinti, quod autem ex* A E *ei quod ex* G Z *commenſurabile fuit. Quod igitur ſub* A E E B *ei quod ſub* G Z Z D *commenſurabile erit, per decimamtertiam huius: medium autem eſt quod ſub* A E E B, *per* 39 *huius, medium itaque erit quod ſub* G Z Z D, *per vigeſimamtertiã huius, ipſæ itaque* G Z Z D *binæ rectæ potentia incommenſurabiles, efficiunt conflatum ex earum quadratis certum, quod autẽ ſub ipſis medium. Tota igitur* G D *(per trigeſimamnonam huius) incerta erit, quæ vocatur maior. Maiori itaque commenſurabilis (quauis arte) maior erit.*

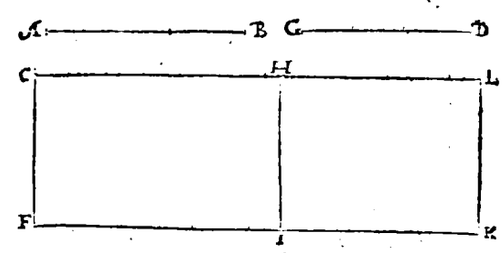
MONITVM.

Duas proximè ſequentes eodem huius argumento demonſtrare poſſumus, ſcilicet certũ mediumq́ potentem, & bina media potentem. Poſita enim (ex hypotheſi) potentiarum commenſuratione, ex cõſtructione autem ſimili ſectione, per eadem theoremata, optatum conſequemur. Quare has alia via demonſtrabimus, vt luculentior euadat diſciplina.

Propoſitio ſexageſimanona.

Certum mediúmque potẽti commenſurabilis, & ipſa certum mediúmque potens eſt.

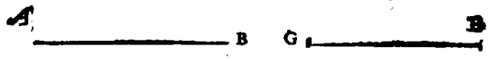
Prop



Proponatur recta certum mediúmque potens A B, *cui commensurabilis esto* G D: *Dico* G D *esse rectã, quæ dicitur certum mediúmque potens, exponatur certa* C F, *cui (per quadrageſimam quintam primi) comparetur æquum quadrato ex* A B, *rectangulũ* C F I H. *Item æquum quadrato* G D *quod ſit* H I K L, *latitudines efficientia* C H H L, *quoniam* G D *ipſi* A B *commẽſurabilis eſt, ſaltem potentia tantùm, commensurabilia erunt* C I *&* H K, *eorum quadratis æqualia, & proinde (per primam ſexti) commensurabiles erunt rectæ* C H H L *longitudine, quia verò* C I *(æquum ei quod ex* A B *certum mediúmque potente) ad certam* C F *comparatur, latitudinem efficiens* C H, *ipſa* C H *eſt ex binis nominibus quinta, per 64 huius, cui quidem* C H *fuit commensurabilis longitudine* H L, *ipſa itaque* H L *eſt ex binis nominibus quinta, per 66 huius. Cùm autem areola* H K *comprehendatur ſub certa* C F *(hoc eſt* H I*) & ea quæ ex binis nominibus quinta* H L, *quæ areolam* H K *poteſt, ſcilicet* G D *ex hypotheſi, appellatur certum mediúmque potens, per 58 huius. Certum igitur mediúmque potenti commensurabilis, &c.*

Propoſitio ſeptuageſima.

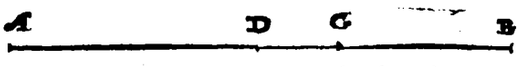
Bina media potenti commenſurabilis, & ipſa Bina media potens eſt.



Eſto recta A B *bina media potens, cui cõmensurabilis ſit* G D: *Dico* G D *eſſe Bina media potentem. Repetatur prioris deſcriptio, quoniam* C I *æquum eſt ei quod ex* A B: *ad certam proiectum latitudinem* C H *efficit ex binis nominibus ſextam, per ſexageſimamquintam huius, quia verò* C I *&* H K *(æqualia quadratis* A B *&* G D *commensurabilibus) commensurabilia ſunt, rectæ* C H *&* H L *longitudine commensurabiles erunt, per primam ſexti, fuit autem* C H *binomium ſextum, igitur* H L *erit binomium ſextum, per 66 huius, quia porro* H K *continetur ſub certa* C F *&* *binomio ſexto,* H L, *quæ aream* H K *poteſt, ſcilicet recta* G D, *bina media potens eſt, per 59 huius. Bina itaque media potenti, &c.*

Scholium.

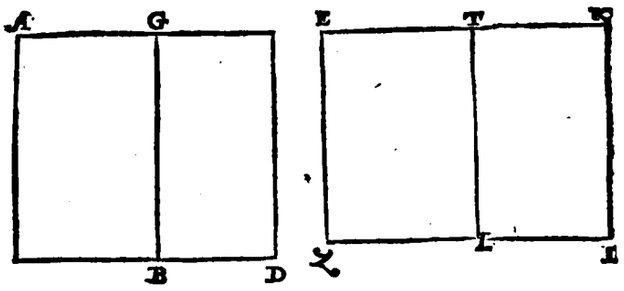
Huc vſque ſeptem egimus theorematum ſenaria, his ſex præfatis incertis intelligendis neceſſaria. Priore ſenario inuentionem linearum (ſex illas incertas generantium) ſeptem propoſitionibus à vigeſimanona huius inchoantes expoſuimus, quarum priores binæ, vnica tantùm facilè tradi potuerunt, vt ſex inuentionibus tantũ ſex incertæ generari dicantur. Secundo ſenario ex inuentarum cõpoſitione, ſex incertas produci docuimus. Tertio ſenario cuiuſlibet earum ſex incertarum, vnam tãtùm fieri poſſe diuiſionem, in lineas eam incertam generantes. Quarto ſenario (prioris earum ſextupla diffinitione præpoſita, eam in ſex ſpecies diſtribuente) prioris ſpecierum ſingularum inuentionem protulimus. Quinto ſenario certam cum ſingulis ſex prioris ſpeciebus, ſingulas (eodem ordine) ſex incertarum potentias comprehendere diſcuſsimus. Sexto quidem ſenario, conuerſim, ſex incertarum ſingulas potentias certæ rectæ comparatas, ſuis latitudinibus præfatas, ſex prioris ſpecies ſingulas exprimere concluſimus. Septimo tandem ſenario quamlibet rectam vni earum incertarum quauis arte commensurabilem, ipſius illico denominationem conſequi monſtrauimus, cuiusquidem ſenarij quinque tantum fuerunt theoremata, eò quòd huius ſenarij ſecundum & tertium, vnico expediantur theoremate, quæ quidem theoremata ſeptuageſima complentur propoſitione, ſubſequuntur demum bina theoremata quibus patet ex certa & mediis areis præfatarum ſex incertarum potentias componi. A 73 verò ad centeſimumſeptimum vſque theorema, alias ſex produci docebimus incertas, per earundem linearum abſtractionem, per quarum copulationem præfatæ incertæ compoſitæ ſunt, earúmque ſimiles prioribus actiones & paſsiones, totidem ſex ſenariis eundem ordinem ſeruãtibus, priorum incertarum ordini per 107 completo. Succedent tandem ſimiliter tria theoremata, quibus elucidabimus ex certa & mediis areis per abſtractionem, harum ſex generari incertarũ potentias, ſicut per earum adiunctionem, priorum potentias genitas fuiſſe diximus. Sex tandem theorematibus hunc decimum concludẽtes, inſuper ineſt his incertis aliud, quo ſcilicet inter alicuius harum incertarum nomina, media proportionalis arithmetica ratione cadens, eiuſdem ſuſcipit deno-

minationem. Sit exemplo AB *aliqua incertarum,* 

eius verò maius nomen AG, *totius verò dimidia sit* AD *vel* DB, *quia arithmetica progreſsione patet, quanto maius nomen* AG *excedit dimidiam* AD (*hoc eſt ipſo* DG) *eodem* DG *dimidia* DB *excedit minus nomen* GB. *Totius igitur dimidia* AD, *ipſorum nominum* AG GB *media eſt proportionalis, arithmetica ratione, & toti commenſurabilis longitudine. Ipſa igitur dimidia* AD *eiuſdem erit denominationis, cum tota* AB, *per hanc & quartam præcedentes. Huiuſce ſcholij aliqua meminit alterum Græcorum exemplar tãtùm, quæ ampliori aut ſaltem faciliori expoſitione digeſsimus, vt generalem intelligentiam facilitemus.*

Propoſitio ſeptuageſimaprima.

Certum mediúmque compoſita, quatuor incertarum arearum vnam efficiunt, ſcilicet eam quę Ex binis mediis nominibus, quæ Ex binis mediis primam, Maiorem, aut Certum mediúmque potentem.

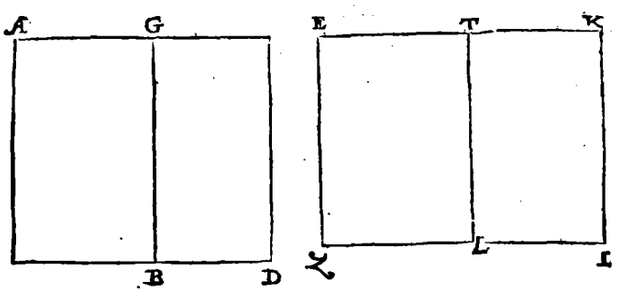


Componant vnam aream AD *certum* AB *& medium* GD: *Dico ipſam* AD *aream eſſe potentiam vnius quatuor incertarum, ſcilicet eius quæ Ex binis nominibus, Ex binis mediis primæ, Maioris, aut equidem Certum mediúmque potentis. Exponatur Certa* EZ, *cui comparetur (per 45 primi) æquum ipſi* AB, *illud* EZ LT, *æquum verò ipſi* GD, *rectanlum* TL IK. *Quia porrò certum eſt* AB *certum erit* EL, *quia item medium eſt,* GD *medium erit* TI. *Quæ* EL *&* TI *ad certam* EZ *applicata, latitudines efficiunt, ſcilicet* ET *Certam longitudine ipſi* EZ *commenſurabilem, per vigeſimam huius, ac* TK *Certam longitudine incommenſurabilem eidem* EZ, *per 22 huius. Et quia incommenſurabile eſt* EL *certum medio* TI, *incommenſurabiles erũt (per primam ſexti) longitudine ipſæ* ET TK *Certæ, & igitur potentia tantùm commenſurabiles, totáque* EK *Ex binis nominibus, per 36 huius. Cuius* ET *nomen aut maius eſt, aut minus. Siquidem maius, aut plus poteſt minore,* TK *à commenſurabili aut incommenſurabili. Si à commenſurabili, tota* EK *erit Ex binis nominibus prima. Si ab incommenſurabili, eadem* EK *erit quarta. Si verò* ET *ſit minus & commenſurabile ipſi* EZ *Certæ exiſtat, aut* TK *maius, plus eo poterit à commenſurabili, & ſic erit ſecunda Ex binis nominibus. Si verò ab incommenſurabili, ipſa* EK *erit quinta, per binomiorum diffinitiones. Quauis igitur ſumptione ſemper* EK *erit binomium, aut primum, aut ſecundum, aut quartum, aut quintum. Si itaque area* EI *comprehendatur ſub certa* EL *& binomio primo* EK *aream potens erit binomium, per 54 huius. Si ſub certa* EZ *& binomio ſecundo* EK, *aream* EI *potens erit ex binis mediis prima, per quinquageſimamquintam huius. Siquidem ſub certa* EZ *& binomio quarto* EK, *aream* EI *potẽs dicetur maior, per 57 huius. Si verò ſub certa & binomio quinto, aream* EI *potens vocabitur certum mediúmque potens, per 58 huius. Sed potens aream* EI *poteſt ſibi æqualem (ex hypoteſi) aream* AD. *Ipſa igitur* AD *eſt potentia eius quæ ex binis nominibus, eius quæ ex binis mediis prima, maioris, aut certum mediúmque potentis. Certum itaque & medium compoſita quatuor, &c.*

Propoſitio ſeptuageſimaſecunda.

Bina Media adinuicem commenſurabilia compoſita, reliquarum duarum incertarum alteram efficiunt aream, eam ſcilicet quæ Ex binis mediis ſecundam, aut Bina media potentem.

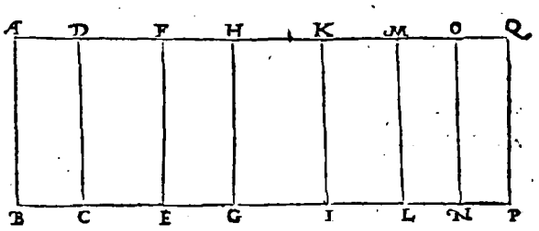
Comp



Componatur area AD *ex binis mediis* AB *&* GD *adinuicem incommenſurabilibus: Dico aream* AD *aut ex binis mediis ſecundam, aut bina media potentem eſſe. Exponatur certa* EZ, *cui (per 45 primi) comparetur æquum ipſi* AB, *ſitq́;* EZ LT, *æquum verò ipſi* GD *illud* TI, *latitudines efficientes* ET TK. *Quoniam media incommenſurabilia ſunt* AB *&* GD, *media erunt* EL *&* TI, *ac incommenſurabilia, quæ quidem latitudines* ET *ac* TK *certas efficiunt, longitudine tamen propoſitæ certæ* EZ *incommenſurabiles, per vigeſimamſecundam huius. Inſuper eaſdem* ET TK *inter ſe longitudine incommenſurabiles, per primam ſexti. Potentia itaque tantùm ſunt ipſæ certæ* ET TK *commenſurabiles. Tota igitur* EK *ex binis eſt nominibus, per 36 huius, diuiſa in ſua nomina,* ET TK. *Sed cùm neutrum nomen* ET *vel* TK *ſit expoſitæ* EZ *commenſurabile. Neceſſe eſt eam* EK *eſſe binomium quidem, ſed tertium aut ſextum, per tertiam & ſextam binomiorum diffinitionem. Tertium enim ſi maius nomen plus poſſit minore, à ſibi longitudine commenſurabili. Sextum verò ſi ab incommenſurabili, per eaſdem diffinitiones. Si igitur* EK *ſit tertium binomium, ſub ipſo &* EZ *certa comprehenſum* EI, *poterit aliqua incerta quæ dicitur ex binis mediis ſecunda, per 56 huius. Si autem* EK *fuerit ſextum binomium, ſub eo & certa* EZ *comprehenſum* EI, *poterit bina media potens. Itaque aream* EI *poteſt, aut ex binis mediis ſecunda, aut bina media potens. Et proinde aream* AD *(ipſi* EI *æqualem) poterit eadem, quæ igitur erit ex binis mediis ſecunda, aut bina media potens. Bina igitur media, &c.*

Corollarium ex præcedentibus.

Hinc ſequitur ſeptem præhabitas incertas non eſſe eaſdem, ſed ſingulas ſibi inuicem à ſingulis differre. *Nam mediæ quadratum Certæ applicatum, latitudinem certam producit, per vigeſimamſecundam huius. Eius verò quæ ex binis nominibus quadratum, eidem certæ applicatum, latitudinem ex binis nominibus primam efficit, per ſexageſimam huius. Eius quidem quæ ex binis mediis prima, latitudinem efficit binomium ſecũdum, per 61 huius. Eius verò quæ ex binis mediis ſecunda, latitudinem efficit binomium tertiũ, per 62 huius. Quod enim ex maiori, latitudinem efficit Binomium quartum, per 63 huius. Quod autem ex certum mediúmque potente, latitudinem producit binomium quintum, per 64 huius, quod ex bina media potente eidem certæ applicatum, latitudinem producet binomium ſextum, per 65 huius. Cùm igitur præfatæ latitudines à prima certa, & inter ſe differant, cùm ſint diuerſorum ordinum: manifeſtum eſt ſub ipſis comprehenſas areas inter ſe differre. Inſuper & manifeſtius erit, quod per 66 & quatuor eam ſequentes, patuit, ipſas ſcilicet eouſque inter ſe diſtare, vt ne longitudine, ne quidem potentia tantùm ſibi commenſurari valeãt, nam ſi commenſurarentur eædem eſſent, vt celeberrimè fuit oſtenſum. Sed forſan, vt quibuſdam placeat exemplum demonſtrãs ſubiiciamus. Eſto certa* AB



cui omnes incertæ comparentur potentiarum ſpecies, ſitq́; AC *medium,* DE *verò ei quod ex binis nominibus æquum,* FG *ei quod ex binis mediis prima,* HI *ei quod ex binis mediis ſecunda,* KL *maiori,* MN *certum mediúmque potenti,* OP *tandem bina media potenti ſit æquum. Manifeſtum eſt (ex 22 huius)* AD *certã eſſe reliquas autẽ* DF FH HK KM MO OQ. *patet ex ſexageſima & quinque eam ſequentibus ſex eſſe binomia, quæ quidem longitudine inter ſe differunt, nam ſi aliqua alteri longitudine commenſurabilis eſſet, ea eſſet eadẽ cum reliqua, per 66 huius, & ideo quandoque eidem certæ longitudine commenſurabilis, & incommenſurabilis eſſet, vel quandoque plus poſſet à commenſurabili, & ab incommenſurabili, quæ eſſent veræ chimeræ, vt patuit ex diffinitionibms binomiorum, ſingulæ itaque ipſarum ſeptem ſibiinuicem longitudine erunt incommenſurbiles. Quare (per primam ſexti) & potentiæ* AC DE FG HI KL MN & OP *incommenſurabiles erunt, & proinde ſeptem rectæ incertæ eas potentes, dicentur potentia ſingulæ adinuicem incommenſurabiles. Siquidẽ potentia fuerint, & longitudine erũt, per vltimã partem illationis nonæ huius. Licet itaque hæc incerta eiuſdẽ ſint generis quoad quãtitatẽ, & ideo rationem habere dicantur, nam multiplicata ſeſe excedere poſſint, tamen quia non cadit interea numerorum*

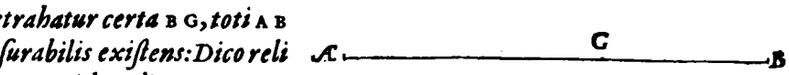
comparatio, quæ vnica est quantitatum discretio ipsa rationem non discretam, siue cognitam: sed equidem surdam & inexplicabilem vlla discretione quantitatis habere dicentur. Non enim ratione priuantur, sed tantùm commensuratione.

INCIPIVNT SENARIA INCERTARVM per ablationem genitarum.

Propositio septuagesimatertia.

Si à Certa Certa auferatur potẽtia tantùm commensurabilis existens toti, Reliqua incerta est, vocatur autem Apotome.

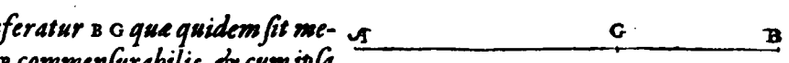
Esto certa A B *à qua detrahatur certa* B G, *toti* A B *potentia tantùm commensurabilis existens: Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ quidem dicetur Apotome seu residuum: quoniã quod ex* A B *cum quadrato* B G, *æquum est ei quod bis sub* A B B G *cum quadrato* A G, *per septimam secundi. Certum autem est compositum ex quadratis* A B B G, *cum vtraque certa ex hypothesi supponatur. Medium verò est quod sub* A B B G, *per 21 huius, & proinde eius duplum quod bis sub* A B B G *medium erit, per corollarium 23 huius, & igitur incertum: quare erit incommensurabile composito certo ex quadratis* A B B G. *Sed si totum scilicet compositum ex quadratis* A B B G *vni eorum (scilicet ei quod bis sub* A B B G) *fuerit incommẽsurabile, & reliquo (scilicet quadrato* A G) *incommensurabile erit, per corollarium 12 huius, certum autem fuit compositum. Huic igitur incommensurabile (quadratum ex* A G) *incertum erit, ex diffinitione decima huius: quare illud potens* A G *incerta erit, per lemma vigesimæ huius. Si itaque à Certa Certa auferatur potentia tantùm, &c.*



Propositio septuagesimaquarta.

Si à Media auferatur Media, potẽtia tantùm commensurabilis toti, cum tota verò certum comprehendens, reliqua incerta est, vocatur autem Mediæ apotome prima.

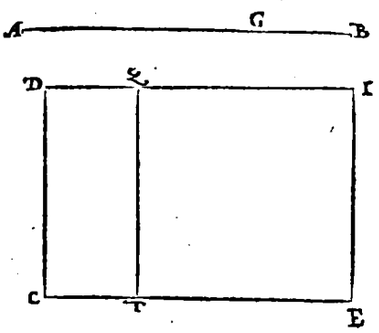
Sit media A B, *à qua auferatur* B G *quæ quidem sit media potẽtia tantùm ipsi* A B *commensurabilis, & cum ipsa* A B *certum comprehendens, per 27 huius: Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ dicitur Mediæ apotome prima. Cùm quadrata ex* A B B G *mediis sint commensurabilia, compositum ex ipsis est medium, quod quidem æquatur, per septimam secũdi, ei quod bis sub* A B B G, *& quadrato* A G. *Sed quod bis sub* A B B G (*ex hypothesi*) *certum est, cùm sit duplum eius quod sub* A B B G. *Quod igitur sub ipsis* A B B G *certum, incommensurabile est composito ex* A B B G *quadratis medio, igitur per secundam partem duodecimæ huius, incommensurabile erit quod ex* A G *ei quod bis sub* A B B G. *Ea etenim totum efficiunt compositum ex quadratis* A B B G. *Quod igitur ex* A G (*ipsi quod bis sub* A B B G *certo incommensurabile*) *incertũ erit, per decimam diffinitionem huius: & proinde recta* A G *illud potens incerta erit, per lẽma vigesimæ huius, quæ dicitur Mediæ apotome prima. Si igitur à media auferatur media, potentia, &c.*



Propositio septuagesimaquinta.

Si à Media auferatur Media potentia tantum commensurabilis existens toti, cum tota verò medium comprehendens, reliqua incerta est, vocatur verò Mediæ apotome secunda.

Ame-



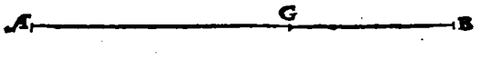
A media AB *auferatur media* GB, *potentia tantùm commensurabilis existens toti* AB, *cum ipsa verò medium comprehendens quod sub* AB BG: *Dico reliquam* AG *incertam esse, quæ dicitur Mediæ apotome secunda. Exponatur nanque certa* DC, *cui comparetur (per 45 primi) æquum cõposito ex* AB BG *quadratis, quod sit* DCEI. *Rursus verò æquum ei quod bis sub ipsis* AB BG, *quod sit* ZTEI, *reliquum igitur* DT *æquum erit quadrato ex* AG, *per septimam secũdi, ea enim composito ex* AB BG *quadratis æquãtur. Quoniam enim media sunt quadrata ex* AB BG *mediis, medium erit* DE *ipsis æquum: quia verò medium est quod sub* AB BG, *ex hypothesi, medium erit* ZE, *ipsius duplum, sed medium* DE *non excedit medium* ZE *certo, per 26 huius, incertum itaque erit* DT (*excessus*) *cui quidem æquum fuit quod ex* AG *quadratum: incertum igitur erit quod ex* AG, *& proinde illud potens recta* AG, *incerta erit, per coroll. vigesimæ huius, dicta mediæ apotome secunda. Si itaque à media auferatur media potentia tantùm, &c.*

MONITVM.

Prolixiori argumento discussit hanc Theon, per comparationem linearum, DI DZ *&* ZI *ipsi* DC *propositæ, concludens incertam esse* DZ, *quare sub certa* DC *&* *incerta* DZ *comprehẽsum* DT, *incertum esse, probare conatur, per lemma vigesimæ huius, quod aliud agit negotium. Nos itaque breuiorem (ne tædio distrahantur ingenia) elegimus methodum, quo fere vsus est Campanus.*

Propositio septuagesimasexta.

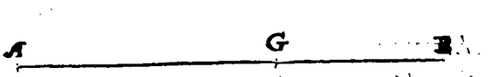
Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existens, cum tota verò efficiens quod ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium. Reliqua incerta est, appellatúrque Minor.



A recta AB *auferatur recta* BG *potentia ipsi* AB *incõmensurabilis, efficiens verò compositum ex quadratis* AB *&* BG *certum, quod verò sub ipsis medium: Dico reliquam* AG *incertam esse, quæ appellatur minor, quoniam compositum ex quadratis* AB BG *certum est, quod verò sub ipsis medium, ex hypothesi, incommensurabile erit compositum ex* AB BG *quadratis ei quod bis sub* AB BG *medio, cùm autem ex* AB BG *quadrata ei quod bis sub* AB BG, *cùm quadrato* AG *æqualia sint, ex septima secundi. Totum autem compositum ex* AB BG, *vni eorum (quod bis sub* AB BG) *incommensurabile est, & reliquo (per coroll. duodecimæ huius) incommensurabile erit, quadrato ex* AG, *quod itaque ex* AG *incertum erit, per decimam diffinitionẽ huius, illud igitur potens recta* AG *reliqua (per lemma vigesimæ huius) incerta erit, appellata minor. Si itaque à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existens, &c.*

Propositio septuagesimaseptima.

Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existẽs, & cum tota efficiens conflatum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod verò sub ipsis Certum. Reliqua incerta est, vocata Cum certo mediũ totum efficiens.

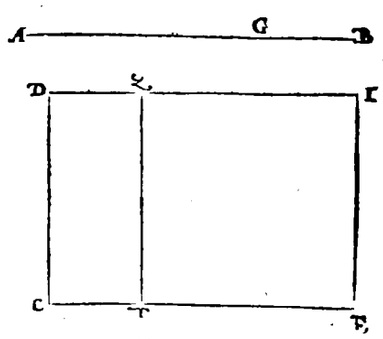


Auferatur à recta AB *recta* BG, *potẽtia toti* AB *incommensurabilis, cùm tota verò* AB *efficiens conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum: Dico reliquam* AG *incertam esse, quæ vocatur cum certo medium totum efficiens, cùm autem medium sit quod ex* AB BG *quadratis compositum, quod verò sub ipsis certum, per hypothesim, compositum verò ex quadratis* AB BG *æquum sit ei quod bis sub ipsis cum quadrato* AG, *per septimam secundi, totum autem compositum certum vni eorum (quod bis sub* AB BG *medio) incommensurabile sit: quæ in principio igitur (scilicet quod bis sub* AB BG, *& quadratum* AG (*per secundam partem duodecimæ huius*) *incommensura-*

bilia erunt, atqui certum eſt quod bis ſub A B B G, *ex hypotheſi, quod igitur ex* A G *quadratum huic incommenſurabile, incertum erit, per decimam diffinitionem huius, illud itaque potens recta* A G *incerta erit, per lemma vigeſimæ huius, quæ quidem dicetur cum certo medium totum efficiens. Si igitur à recta linea recta auferatur potentia toti incommenſurabilis, &c.*

Propoſitio ſeptuageſimaoctaua.

Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommenſurabilis exiſtens, & cum tota efficiens conflatum ex ipſarum quadratis medium, quod verò ſub ipſis medium. Inſuper incommenſurabile, conflato ex ipſarum quadratis. Reliqua incerta eſt, appellatur autem Cum medio medium totum efficiens.



A recta A B *auferatur recta* B G *potentia toti* A B *incommenſurabilis, &c. qualis optatur, ex hypotheſi & 35 huius: Dico reliquam* A G *incertam eſſe, quæ dicitur cum medio medium totum efficiens. Exponatur certa* D C, *cui (per quadrageſimamquintam primi) comparetur æquum conflato ex quadratis* A B B G *ſitq́* D E *latitudinem efficiens* D I. *AEquum verò ei quod bis ſub ipſis* A B B G *ſit* Z E. *Reliquum igitur* D T *æquum erit quadrato ex* A G, *per ſeptimam ſecundi. Nam quod bis ſub ipſis cum quadrato* A G *æquum eſt conflato ex earum* A B B G *quadratis. Cùm autem medium ſit conflatum ex quadratis* A B B G, *medium erit* D E *ſibi æquum, quia verò medium eſt, quòd bis ſub ipſis* A B B G, *cùm ſit duplum medij quod ſub ipſis, medium erit* Z E *ſibi æquum, ſed medium* D E *non excedit medium* Z E *certo, per 26 huius. Exceſſus itaque* D T *incertum producet, æquum quidem ei quod ex* A G, *per conſtructionem. Igitur* A G *recta (illud potens) incerta erit, per lemma vigeſimæ huius, quæ quidem dicitur cum medio medium totum efficiens. Si igitur à recta linea recta, &c.*

MONITVM.

Eadem breuitate vſi ſumus huic ſeptuageſimæoctauæ, qua ſeptuageſimæquintæ. Nam harum (ſcilicet mediæ apothome ſecundæ, & cum medio medium totum efficientis) genituræ, in hoc tantùm differunt, quod hæc à binis rectis potentia incommenſurabilibus naſcatur, illa verò à binis mediis potentia commenſurabilibus. Quarum vtraque, quæ ex ipſis & ſub ipſis, medium incommenſurabile medio componunt, quare in eo tantùm ſibi diſtant quod diximus. His autem 77 & 78 reliquimus hanc particulam (bis) vt ſequamur trigeſimamquartam & trigeſimamquintam, earum originem.

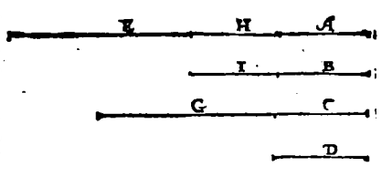
Scholium.

Harum ſex incertarum ortum à priorum origine duci inuariato earum ordine deſcripſit Euclides, vt omnium genituram prius à certa recta, poſtmodum verò à certa & media (quam mediam iam ante genuit certa) ortam, ſeruato priorum ordine, in earum actionibus ac paſſionibus explicandis, eandem eſſe propalaret. Nam harum ſingulæ, reliquarum ſingularum ſunt tantùm exceſſus, quibus maiora nomina excedunt minora. Prior etenim hac de cauſa apothomes nomen ſibi ſumpſit abſolutum, quod alij reſiduum dicunt, eò quòd à præſtantiori linea certa quidem (à qua certa tollitur) ſit nata, ab eadem oritur ea quæ ex binis nominibus, ſed hæc per copulationem, illa verò per detractionem. Cùm enim à maiori binomij nomine detrahitur minus, reliqua erit hæc vocata apothome, abſoluta denominatione. Cùm autem à maiori nomine eius quæ ex binis mediis prima auferturminus, reliqua ſimiliter dicitur apothome prima, ſed mediæ rectæ inquam. Ab ea verò quæ ex binis mediis ſecunda, producitur apothome ſecunda, (Mediæ) A maiore autem producta, Minor dicetur, vt præſtantiorem iudicemus priorem ordinem ſecundo, veluti maiorem minori præcellimus. A certum mediúmque potente, eiuſdem ferè denominationis, ſit quinta harum, quæ cum certo medium totum efficiens dicitur. A bina media potente autem ſexta & vltima, cùm medio medium totum efficiens naſcetur, ſingulæ itaque genitæ ſingularum gignentium denominationem proximè imitantur

imitantur. Omnes autem à ſex linearum inuentionibus (29 huius cum ex eã ſequentibus deſcriptis) ortæ, hæ quidem per detractionem, illæ verò per cõpoſitionem. Cæterùm cùm harum ſex ac priorum ordo illud præ ſe ferat, vt trium priorũ cuiſlibet ſenarij nomina eadem quæ ex ipſis quadrata, & ſub ipſis rectangula (certa vel media) deſcribant, quæ & nomina trium poſteriorum eiuſdem ſenarij deſcribunt, apud quoſdam eãdem viderentur ſectari quantitatis naturam. Ad hæc dicemus tres priores à tribus poſtremis vtriuſque ſenarij (coniunctarum ſcilicet & ablatarum) in hoc potiſſimum diſcrepare, quod tres priores à potentiis commenſurabilibus, poſtremæ verò ab incommenſurabilibus naſcantur: ac inſuper earum potentiæ ad ceram rectam applicatæ, latitudines efficiunt eandem ſequentes naturam, ſcilicet trium priorum latitudinum maius nomen plus minore poteſt à ſibi longitudine commenſurabili: trium verò poſteriorum ab incommenſurabili. Qua de cauſa tandẽ ſingulæ ſingulis penitus incommenſurabiles patebunt.

Lemma.

Si quatuor magnitudines arithmetica ratione proportionales fuerint, & viciſsim proportionales erunt.



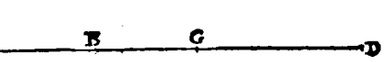
Hoc eſt, Si quatuor magnitudinũ prima tanto excedat ſecundam vel deficiat, quanto eodem tertia excedit quartam, vel deficit, & viciſsim prima tantò excedet tertiam, vel deficiet, quãto eodẽ ſecũda excedet quartã vel deficiet: Sint quatuor magnitudines A B C D, *quarum prima* A *eodem excedat* B *ſecundam, vel eodem deficiat, quanto* G *tertia excedit quartam* D, *vel ab ea deficit: Dico viciſsim primam* A *eodem excedere tertiam* C *vel deficere, quo ſecũda* B *excedet quartam* D, *vel deficiet ab ea. Tollantur exceſſus æquales quibus* A *&* C *differunt ab ipſis* B *&* D, *ſintque* E *&* G. *Æquales igitur* A *&* B *ab æqualibus* C *&* D *æquis differũt exceſsibus, qui ſint* H *&* I; *æquales igitur ſupererunt* A *&* B (*per tertiam communem ſententiam*) *ipſis* C *&* D: *ſed & adinuicem* A *&* B *fuerunt æquales, quatuor igitur* A B C D *inuicem ſunt æquales relictæ. Si igitur æqualibus* A *&* C *æquales addantur* E *&* G, *totæ* A E *&* C G *æquales erunt* (*per quartam communem ſententiam*) *ſed &* B *&* D *ſunt æquales. Addatur itaque æqualibus* A E *&* C G *exceſſus* H, *æqualibus verò* B *&* D *exceſſus* I: *ſed* H *&* I *ſunt æquales oſtenſi exceſſus. Quo igitur prima* A *excedit tertiam* C, *vel ab ea deficit, ſcilicet ipſo* H, *tantò ſecunda* B *excedit quartam* D *vel ab ea deficit, ſcilicet ipſo* I. *Si igitur quatuor magnitudines arithmetica ratione proportionales, &c.*

MONITVM.

Campanus ſolus hoc lemma poſt ſeptuageſimamtertiam ſui ſcripti poſuit, eouſque tamen confuſè vt diſcentibus ſit difficile, an exceſſum proportionis geometricæ aut arithmeticæ intellexerit diiudicare. Nam eiſdem terminis differentias comparat, quibus differentiæ ſiue rationes geometricæ comparari ſolent: & inſuper ab eo deſcripta figura, rationem geometricam, nõ autem arithmeticam inſequitur, principiúmque citat, quo extremorum differentias, à mediorum differentiis componi dicit, quod in rationibus geometricis alias diſcuſsimus receceptum eſſe, quandoquidem exceſſus proportionales exiſtunt, ſed quando hi ſunt æquales nondum extremos ſequi medios Euclidẽ dixiſſe memoramur. Nam mediorum exceſſus compoſiti, non ſemper extremorum producunt exceſſum, veluti rationes, maximè ſi inter eos reperiantur maioris ſimul & minoris inæqualitatis rationes. Tamen cernẽtes futuris demonſtrandis commodiorem nobis affuturam arithmeticam rationem geometrica huius arithmeticæ rationis exceſſus æquales eſſe, demonſtratione geometrica quam lucidè licuit protulimus.

Propoſitio ſeptuageſimanona.

Apotome vna tantum congruit recta linea, Certa potentia tantum toti commenſurabilis exiſtens.



Eſto apotome A B *cui congruat recta* B G *certa potentia tantũ toti* A G *commenſurabili exiſtens: Dico nullam ei aliam certam potentia tantùm toti commenſurabilem poſſe congruere. Quod ſi fieri poſſe credatur, congruat ipſi* A B *recta* B D, *potentia tantum toti* A D *commenſurabilis exiſtens. Cùm quadrata*

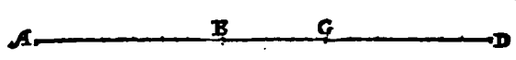
ex A G G B *æquè excedant rectangulum bis sub* A G G B *comprehensum, veluti quadrata ex* A D D B, *excedãt rectangulũ bis sub* A D D B *comprehensum, nempe quadrato reliqui segmenti* A B, *per septimam secundi. Sequetur vicissim, arithmetica progressione, quadrata eodem excedere quadrata, quo rectangula excedunt rectangula, per lemma præfatum, sed quadrata sese excedũt certo, cùm sint certa, ex certis potentia tantùm commensurabilibus ex hypothesi. Rectãgula igitur quæ sunt media (per 21 huius) sese excederent certo, contra 26 huius, quod esset absurdũ. Vnica igitur solùm* B G *(potentia tantùm commensurabilis toti* A G*) certa, ipsi* A B *congruet. Apotome itaque vna tantùm congruit, &c.*

MONITVM.

Hanc demonstrans Theon, conatur æquos excessus quadratorum & rectangulorum vicissim posse concludi, per 16 quinti, quæ quatuor magnitudines proportione geometrica coniunctas, non autem arithmetica supponit, quæ quo sibi intersint, cuique discernendum relinquimus. In illud autem erroris incidit, penuria omissi proximi lemmatis, quod huic ac sequentium maximè conferet negotio.

Propositio octuagesima.

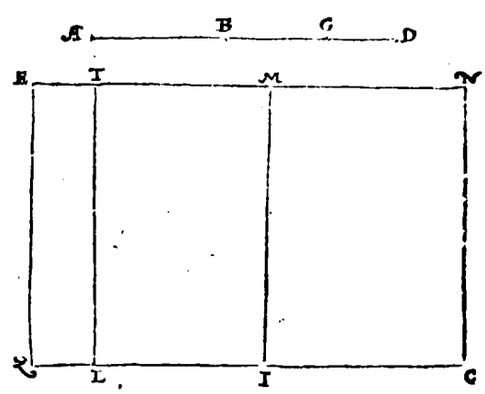
Mediæ apotome primæ vna tantum congruit recta linea Media, potẽtia tantum commensurabilis existens toti, & cum tota certum comprehẽdens.



Esto A B *apotome prima mediæ cui congruat* B G *media, potentia tãtum toti* A G *cõmensurabilis existens, Cùm tota verò* A G *certum comprehendens, quod sub* A G G B: *Dico nullam ipsi* A B *aliam à recta* B G *eius naturæ cõgruere posse. Quod si posse dicatur, cõgruat ipsi* A B *recta* B D, *eiusdem naturæ ipsius* B G. *Quoniam (vt præcedenti ostendimus) quadrata ex* A G G B *eò excedunt rectangula bis sub* A G G B, *quo quadrata ex* A D D B *excedunt rectangula bis sub* A D D B, *scilicet quadrato* A B, *per septimam secundi. Sequetur igitur vicissim (per lemma 78 huius) quadrata eodem excedere quadrata, quo rectangula rectangula: sed rectangula sese excedunt certo, cùm sint, ex hypothesi certa, sub mediis certum comprehendentibus. Quadrata igitur quæ sunt media (cùm sint potentiæ mediæ, & commensurabiles) sese excedent, certo quod opponitur 26 huius, & proinde absurdum: quare ipsi* A B *media potentia tantùm toti commensurabilis, & cùm ipsa tota certum comprehendens, nulla congruet alia ab ipsa* B G. *Mediæ igitur apotome primæ vna, &c.*

Propositio octuagesimaprima.

Mediæ apotome secundæ, vna tantùm congruit recta linea Media, potentia tantũ toti commensurabilis existens, & cum tota medium comprehendens.

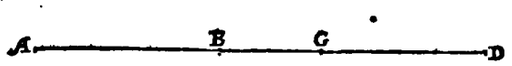


Fiat A B *mediæ secunda apotome, cui congruat* B G, *vt sint* A G G B *mediæ potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes: Dico ipsi* A B *nullam aliam congruere eiusdem naturæ ipsi* B G, *cuius oppositum si fieri possit, congruat ipsi* A B *alia* D B. *Ipsæ igitur* A D D B *mediæ erunt potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendẽtes. Exponatur certa* E Z *cui (per 45 primi) constituatur æquũ quadratis* A D D B, *sit q́* E Z C N, *æquum verò quadratis* A G G B, *illud* E Z I M, *æquum autem quadrato* A B *sit* E Z L T, *latitudines efficientes* E N E M E T, *quoniam* E I *fit æquum eis quæ ex* A G G B, *sed* E L *est æquum ei quod ex* A B, *Reliquum itaque* T I *æquum erit ei quod bis sub* A G G B. *Nam bis sub* A G G B *cum quadrato* A B *æquum est quadratis ex* A G G B, *per septimam secundi, haud secus ostendemus cùm* E C *sit æquum quadratis* A D D B, *æquum verò sit* E L *quadrato* A B, *reliquum* T C *æquum esse ei quod bis sub* A D D B, *per eandem, cùm autem quadrata ex* A D D B *sint (ex hypothesi) media, & commensurabilia, compositum ex ipsis scilicet* E C *medium erit, per coroll. 23 huius: & simili argumento* E I *quadratis* A G G B *æquum*

æquum, medium erit, quæ quidem media, ad certam EZ *comparata, latitudines* EN EM *certas potẽtia tantùm ipſi* EZ *propoſitæ commenſurabiles efficiunt, per* 22 *huius, ſimiliter quia rectangula ſub* AD DB *& ſub* AG GB *ſunt media, eadem bis ſumpta media erunt, per coroll.* 23 *huius, & idcirco* TC *ipſi quod bis ſub* AD DB *æquum, &* TI *ei quod bis ſub* AG GB *æquum, media erunt. Rectæ igitur* TM TN *(latitudines) certæ potentia tantùm ipſi* EZ *commenſurabiles erunt: cùm enim* AG GB *ſint (ex hypotheſi) longitudine incommenſurabiles, ſit autem vt* AG *ad* GB, *ſic quod ex* AG *ad quod ſub* AG GB, *per lemma* 21 *huius, incommenſurabile erit quod ſub* AG GB *quadrato* AG, *quod autẽ ex* AG *ei quod ex* GB *eſt (per hypotheſim) commenſurabile, quod autem ſub* AG GB, *ei quod bis ſub* AG GB *eſt item commenſurabile, dimidium duplo. Duobus igitur (ſcilicet ei quod ex* AG *& ei quod ſub* AG GB *incommenſurabilibus cõmenſurabilia, quæ ex* AG GB *& quæ bis ſub* AG GB, *per tertium coroll. decimæ huius, incommenſurabilia erunt, & proinde* EI *&* TI *(ipſis æqualia) incommenſurabilia erunt, & ideo (ex prima ſexti)* EM *&* TM *rectæ incommenſurabiles erunt longitudine, potentia itaque tantùm commenſurabiles erunt,* EM TM *cùm ſint certæ oſtenſæ. Reliqua igitur* ET *eſt apotome, per* 73 *huius, haud diſſimili via patebit* EN TN *certas eſſe potentia tantùm commenſurabiles, & proinde reliquam* ET *eſſe apotome, ipſi itaque* ET *apotome plures congruunt* TM TN *certæ, potentia tantùm toti commenſurabiles exiſtentes, quod fieri non poteſt, per* 79 *huius: non itaque alia quàm* GB *ipſi* AB *mediæ apotome ſecundæ cõgruet. Mediæ igitur apotome ſecundæ vna tantũ, &c.*

Propoſitio octuageſima ſecunda.

Minori vna tantũ congruit recta linea, potentia toti incommenſurabilis exiſtens, & efficiens cum tota compoſitum ex earum quadratis Certum, quod verò ſub ipſis Medium.

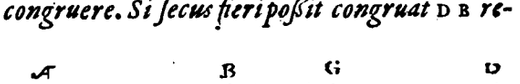


Sit recta AB *minor, ipſi verò congruat* GB *qualis ſupponitur hoc theoremate: Dico ipſi* AB *nullam (qualem optat theorema) aliam ab ipſa* GB *cougruere, ſi enim fieri poſſit, congruat ipſi* AB *recta* DB, *erunt igitur* AD *&* DB *rectæ potentia incommenſurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis certum, quod verò ſub ipſis medium, cùm (ex hypotheſi) quadrata* AG GB *certum componant, quæ verò ſub ipſis medium, ſimiliter & quæ ex* AD DB *certum, quæ verò ſub ipſis medium ſuſcipiunt, quare (vt proximis prioribus* 79 *&* 80 *huius patuit, quadrata ex* AG GB *& ex* AD DB *eodem ſeſe excedunt, quo rectangula ſub* AG GB *bis ſumpta, & ea quæ bis ſub* AD DB, *per ſeptimam ſecundi & lemma* 78 *huius, atqui quadrata cùm ſint certa (ex hypotheſi) ſeſe certo excedunt. Rectangula igitur (ex eadem hypotheſi) media, ſeſe certo excederent, contra* 26 *huius, quod fieri non poteſt, non igitur alia ab ipſa* GB *ipſi* AB *congruet. Minori itaque vna tantùm congruit recta, &c.*

Propoſitio octuageſima tertia.

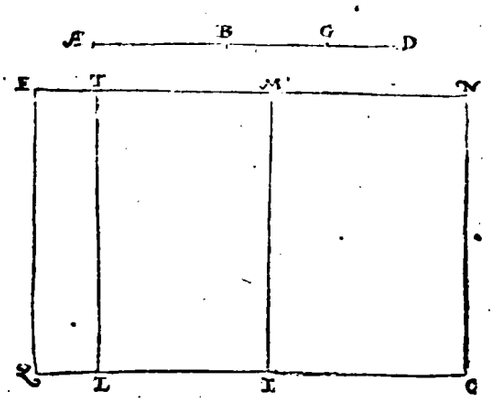
Cum certo medium totum efficienti vna tantum congruit recta linea, potentia toti incommenſurabilis ſubſiſtens, & cum tota efficiens conflatum, ex ipſarum quadratis medium, quod verò ſub ipſis certum.

Eſto cum certo medium totum efficiens AB, *cui congruat* GB, *qualis hic ſupponitur: Dico ipſi* AB *nullam aliam eius denominationis ab ipſa* GB *poſſe congruere. Si ſecus fieri poſſit congruat* DB *recta. Erunt itaque* AD DB *rectæ potentia incommenſurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò ſub ipſis certum. Quare ne diutius ingenia torqueamus ſimili præhabitorum argumento patebit. Quadrata ex* AD DB *media (ex hypotheſi) eodem excedere quadrata ex* AG GB *media, quo rectangula ſub* AD DB *bis ſumpta certa, rectangula bis ſub* AG GB *ſumpta, certa excedunt, ſcilicet certo, cùm ſint certum comprehendentia, per hypotheſim. Quod fieri non poteſt, contra* 26 *huius. Non igitur ipſi* AB *alia quàm recta* BG *congruet eius nominis. Efficienti itaque cum certo medium totum, vna, &c.*



Propoſitio octuageſimaquarta.

Cum medio medium totum efficienti vna tantum congruit recta linea, potentia toti incommenſurabilis exiſtens, & cum tota efficiens conflatum ex earum quadratis medium, quod verò ſub ipſis medium, & incommenſurabile conflato ex earum quadratis.



Eſto cum medio medium totum efficiens AB, *ſibi verò congruat* GB, *quæ eius ſit naturæ, vt exoptat theorema: Dico nullam aliam eiuſdem naturæ ipſi* GB, *rectæ* AB *congruere, quod ſi fieri poſſe credamus, congruat ipſi* AB *recta* DB. *Itaque* AD DB *rectæ, potentia incommenſurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò ſub ipſis medium, & inſuper incommenſurabile conflato ex earum quadratis. Huius & octuageſimæprimæ eadem erit demõnſtratio. Exponatur certa* EZ, *cui applicetur (per 45 primi) æquum quadratis ex* AD DB *quod ſit* EC, *æquum verò quadratis* AG GB, *ſit ý* EI, *æquum autem quadrato* AB *ſit* EL. *Quoniam patuit (ex ſeptima ſecundi) ſi à quadratis ex* AD DB *tollamus quadratum* AB, *ſupererit quod bis ſub* AD DB. *Quare ab ipſo* EC *ablato* EL, *reliquum* TC *ei quod bis ſub* AD DB *æquum erit, ſimiliter &* TI *ei quod bis ſub* AG GB. *Cùm enim media ſint quadrata ex* AD DB, *& ex* AG GB, *nec non ſub ipſis rectangula, ex hypotheſi, media erunt* EC EI TC TI *ipſis æqualia, quæ ad certam* EZ *comparata, latitudines* EN EM TN TM *certas efficiunt, per vigeſimamſecundam huius. Quia rectangula biſſumpta incommenſurabilia ſunt (ex hypotheſi) quadratis, incommenſurabilia erunt eis æqualia, ſcilicet* EC *ipſi* TC *ac præter hæc* EI *ipſi* TI. *Et idcirco (per primam ſexti) incommenſurabiles longitudine erunt* EN *ipſi* TN *&* EM *ipſi* TM. *Quæ quidem certæ fuerunt. Ipſæ itaque* EN NT *certæ potentia tantùm ſunt commenſurabiles, & proinde reliqua* ET *apotome, per ſeptuageſimãtertiam huius. Nec ſecus ipſæ* EM MT *certæ potentia tantùm ſunt commenſurabiles. Et proinde reliqua* ET *erit apotome, cui quidem congruerent binæ* TN TM *certæ, potentia toti tantùm commenſurabiles, contra ſeptuageſimamnonam huius, quod eſt abſurdum. Non itaque alia quædam ipſi* AB *congruet quam* BG *eius nominis. Efficienti igitur cum medio medium totum, vna tantùm congruit, &c.*

APOTOMARVM DIFFINITIONES.

Trium priorum ſuppoſitio.

Suppoſita certa & Apotome, ſi quidem tota congruente maius poſsit eò quòd ſit ex ſibi longitudine commenſurabili.

Diffinitio prima hoc poſito.

Si tota ſuppoſitę certę longitudine fuerit commenſurabilis, appellatur Apotome prima.

Diffinitio ſecunda.

Si congruens ſuppoſitę certę longitudine fuerit commenſurabilis, vocatur Apotome ſecunda.

Diffinitio tertia.

Si neutra propoſitæ certæ longitudine commenſurabilis fuerit, tertia appellatur

appellatur Apotome.

Trium posteriorum suppositio.

Supposita Certa & Apotome, si tota congruente maius possit eò quòd sit ex sibi longitudine incommensurabili.

Diffinitio quarta.

Si tota expositæ Certæ longitudine fuerit commensurabilis, appellatur Apotome quarta.

Diffinitio quinta.

Si congruens expositæ Certæ fuerit longitudine commensurabilis, dicetur Apotome quinta.

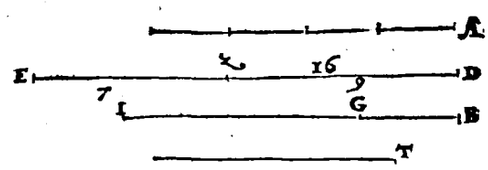
Diffinitio sexta.

Si autem neutra expositæ Certæ longitudine fuerit commensurabilis, vocatur Apotome sexta.

Priorum incertarum ordinem sequuntur hæ ab ipsis genitæ, quo scilicet prima harum incertarũ (quæ apotome dicta est) senaria acceptione diffinita fuit, veluti binomium, quæ priorum incertarum sex prima, sextupla diffinitione expositæ fuit, vtroque tamen ordini, tribus prioribus, maius nomen plus posse minore, eò quòd sit à sibi longitudine commensurabili, ascriptum est. Tribus posterioribus verò ab incommensurabili, quæ sola est trium priorum à tribus postremis discrepantia apud vtrasque, vt iam antea diximus.

Propositio octuagesimaquinta. *Problema* 19.

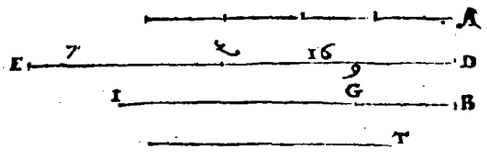
Inuenire primam Apotomen.



Exponatur certa A *sint verò duo numeri, quadrati* D E D Z *sese excedentes non quadrato (per coroll. primi lemmatis* 28 *huius)* Z E, *ipsi* A *longitudine fiat commensurabilis* B I, *fiat autem sicut* D E *ad* E Z, *sic quod ex* B I *ad id quod ex* I G, *per coroll. sextæ huius, excedat autem quadratũ* B I *id quod ex* I G, *quadrato quod ex* T. *Cùm autem* D E *quadratus, ad* E Z *nõ quadratum rationem non habeant quam quadrati numeri, per coroll.* 25 *octaui, quadrata* B I *&* I G (*eam rationem habentia, ex hypothesi*) *potentia tantùm sunt commensurabilia, per quartam partem nonæ huius, sed* B I (*certæ à longitudine cõmensurabilis*) *certa est, & igitur certa erit* I G, *per sextã diffini. huius. Certæ itaque potentia tantùm commensurabiles* B I I G, *efficiunt reliquam* B G *apotomen, per* 73 *huius: Dico quòd & primam, cùm enim sit quod ex* B I *antecedens ad quod ex* I G *consequens, sicut* D E *antecedens ad* E Z *consequens, erit quod ex* B I *ad quod ex* T, *quo excedit suum consequens* I G, *sicut* D E *ad excessum* D Z, *per coroll.* 19 *quinti, sed* D E *ad* D Z *quadrati, rationem habent quadratorum, igitur* B I *ad* T *rationem habent quam quadrati numeri, & proinde latera longitudine habent commensurabilia, per nonam huius. Quod itaque ex* B I *tota, maius potest congruente* I G, *eò quòd ex* T *sibi longitudine commensurabili, tota verò* B I *expositæ à longitudine fuit commensurabilis. Reliqua itaque* B G *erit apotome prima, per primam diffinitionem apotomarum. Inuenimus igitur primam apotomen.*

Propositio octuagesimasexta. *Problema* 20.

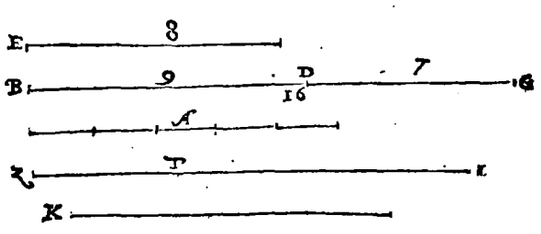
Inuenire secundam Apotomen.



Exponatur certa A, *ſit præterea (vt in præfata) numerus* D E *quadratus, excedens quadratum* E Z *non quadrato* D Z, *per coroll. primi lemmatis* 28 *huius, ponatur item linea recta* G I, *longitudine propoſitæ certæ* A *commenſurabilis, quæ igitur certa erit (per ſextã diffinitionem huius) fiat autem (per coroll. ſextæ huius) ſicut* D Z *ad* D E, *ſic quod ex* G I *ad quod ex* I B, *quorum maius* B I *plus poſſit minore* G I *eò quòd ex* T, *quoniam (per coroll.* 25 *octaui)* D Z *ad* D E *non habent rationem quã quadrati, quadrata ex* G I *&* I B *(eandem rationem habentia) erunt potentia tantùm commenſurabilia, per nonam huius. Certæ autem ſunt binæ* B I I G, *per ſextam diffinitionem huius. fuit enim* I G *certa, reliqua igitur* B G *apotome erit, per* 73 *huius: Dico quod ſecunda, quoniam enim fuit vt* D Z *ad* D E, *ſic quod ex* G I *ad quod ex* I B, *erit conuertendo (per coroll. quartæ quinti)* D E *ad* D Z, *ſicut quod ex* I B *ad quod ex* I G. *Igitur conuerſione rationis erit (per coroll.* 19 *quinti)* D E *ad* E Z *exceſſum, quo excedit conſequens* D Z, *ſicut quod ex* I B *ad quod ex* T *exceſſum, quo excedit ſuum conſequens quod ex* G I, *ſed* D E *ad* E Z *habet rationem quadratorum, cùm ſint ex hypotheſi quadrati, quod igitur ex* I B *ad quod ex* T *rationem habet quadratorum numerorum, latera itaque* B I *&* T *longitudine commenſurabilia erunt, per nonam huius, tota itaque* B I *maius poteſt congruente* I G *eò quòd ex* T *ſibi longitudine commenſurabili, congruens verò* G I *propoſitæ* A *longitudine fuit commenſurabilis. Reliqua igitur* B G *erit apotome ſecunda, per ſecundam diffinitionem apotemarum. Inuenimus itaque ſecundam Apotomen.*

Propoſitio octuageſimaſeptima. Problema 21.

Inuenire tertiam Apotomen.

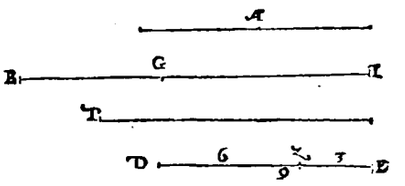


Eſto certa propoſita A, *ſint etiam bini numeri quadrati* B G B D *ſeſe non quadrato* D G *excedentes. Sit item non quadratus numerus ipſi* D G *vnitate vel binario proximus* E, *fiat autem ſicut* E *ad* B G *ſic quod ex* A *ad quod ex* Z I. *Sicut verò* B G *ad* G D, *ſic quod ex* Z I *ad quod ex* I T. *Poſſit autem* Z I *maius, recta* I T *quadrato* K. *Quoniam* A *certa ponitur ad* Z I *(potentia) ſicut numerus* E *non quadratus, ad* B G *quadratum, rationem quadratorum non habentes, per coroll.* 25 *octaui. Ipſæ* A *&* Z I *longitudine incommenſurabiles erunt, per nonam huius. Quia verò fuit ſicut* E *ad* B G, *ſic quod ex* A *ad quod ex* Z I, *ſicut verò* B G *ad* G D *ſic quod ex* Z I *ad quod ex* I T. *Erit æqua ratione ſicut* E *ad* D G, *ſic quod ex* A *ad quod ex* I T, *per* 22 *quinti. Sed* E *ad* D G *non habẽt rationẽ quam quadrati, cum ſint in ratione ſuperparticulari aut ſuperbipartiẽte, per coroll. vigeſimæ ſextæ octaui. Quadrata igitur ex* A *&* I T *non habent rationẽ quadratorum. Ipſæ itaque* A *&* I T *rectæ, longitudine incommenſurabiles exiſtunt, per nonam huius. Neutra igitur ipſarum* Z I I T *propoſitæ* A *longitudine commenſurabilis erit. Potentia tamen commenſurabiles ipſi* A *erunt, cum habeant ad ipſam* A *rationem numerorum. Quare certæ erunt* Z I I T, *& inter ſe longitudine incommenſurabiles, cum earum quadrata ſint ſicut quadratus* B G, *ad non quadratum* D G *numerum, per nonam huius. Binæ itaque* Z I I T *certæ, potentia tantùm commenſurabiles, efficiunt reliquam* Z T *apotomen, per* 73 *huius: Dico & tertiam. Quoniam poſitum eſt eſſe ſicut* B G *ad* G D, *ſic quod ex* Z I *ad quod ex* I T. *Erit (ex coroll.* 19. *quinti) ſicut* B G *ad exceſſum* B D, *quo excedit ſuum conſequens* G D, *ſic quod ex* Z I *ad quod ex* K *exceſſum, quo excedit ſuum conſequens quod ex* I T. *Sed* B G *&* B D *habent quadratorũ rationem, cum ſint quadrati. Igitur quod ex* Z I *&* *quod ex* K *rationem habebunt quadratorum. Longitudine igitur commenſurabiles erunt rectæ* Z I *&* K. *Binarum igitur certarum* Z I *&* I T *potentia tantùm commenſurabilium oſtenſarum, maior ſeu tota* Z I, *maius poteſt minore* I T, *eò quòd ex* K *ſibi longitudine commenſurabili. Neutra verò ipſarum* Z I *&* I T *longitudine ipſi* A *propoſitæ commenſurabilis, fuit. Reliqua itaque* Z T *erit apotome tertia, per tertiam diffinit. apotomarum, inuenimus igitur* Z T *apotomen tertiam.*

Propoſitio octuageſimaoctaua. Problema 22.

Inuenire Apotomen quartam.

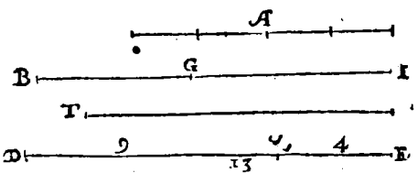
Expo



Exponatur certa A *cui commensurabilis existat* B I, *quæ ideo certa erit. Sit autem numerus non quadratus compositus ex duobus quadratis, per secundum lemma vigesimæoctauæ huius, vel quadratus sectus in duos non quadratos, quod idem proferet, sit q*ꝫ D E *sectus in* Z. *Sit autem (per coroll. sextæ huius) sicut* D E *ad* E Z, *sic quod ex* B I *ad quod ex* I G. *Plus tamen possit* B I *ipso* I G *quadrato rectæ* T. *Commensurabile erit quod ex* B I *ei quod ex* I G, *per sextã huius. Certa igitur erit* I G, *per sextam diffinitionem huius. Quia verò* B I *ad* I G *quadrata, rationem habẽt quam quadratus* D E, *ad non quadratum* E Z, *eorum latera, rectæ scilicet* B I *&* I G, *longitudine incommensurabilia erunt. Binæ itaque* B I I G *certæ, potentia tantùm commensurabiles erunt. Reliqua igitur* B G *apotome dicetur, per septuagesimãtertiã huius: Dico quod & quarta. Cùm enim fuerit iã* D E *ad* E Z *vt quod ex* B I *ad quod ex* I G. *Erit conuersione rationis* D E *ad excessum* D Z, *vt quod ex* B I *ad quod ex* T *excessum, quo excedit suum consequens quod ex* I G, *per coroll.* 19 *quinti. Sed* D E *quadratus ad* E Z *non quadratum, non habet rationem quam quadrati numeri, per coroll.* 25. *octaui. Quod igitur ex* B I *ad quod ex* T *non habet rationem quam quadrati numeri. Nec ideo (per nonam huius) latera* B I *&* T *longitudine commensurabilia erunt. Binarum igitur certarum* B I I G *potentia tantùm commensurabilium. Tota* B I *plus pòtest ablata* I G, *eò quòd ex* T *sibi longitudine incommensurabili. Tota verò* B I *propositæ certæ* A *longitudine fuit (ex hypothesi) commensurabilis. Reliqua igitur* B G *apotome erit quarta, per quartam diffinitionem apotomarum. Inuenimus itaque quartam apotomen.*

Propositio octuagesimanona Problema 23.

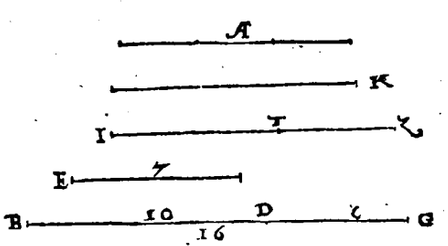
Inuenire apotomen quintam.



Proposita certa esto A, *cui commensurabilis existat* G I *longitudine, quæ ideo certa erit. Sit insuper vt proxima priore diximus, numerus non quadratus constans duobus quadratis* D Z Z È, *hic* D E, *per secundum lemma vigesimæoctauæ huius. Sit autem quadratum* B I *ad id quod ex* I G *sicut* D E *ad* E Z, *per coroll. sextæ huius. Ipsæ itaque* B I *&* I G *certæ potentia commensurabiles erunt, per sextam huius, rationem numerorum habentes, sed potentia tantùm, cum numerorum non quadrati ad quadratum rationem habeant, & latera igitur longitudine incommensurabilia, per nonam huius. Reliqua proinde* B G *apotome erit, per septuagesimamtertiam huius: Dico quod & quinta, posit recta* B I *maius ipsa* I G *eò quòd ex* T, *cum sit quadratum* B I *ad quod ex* I G, *sicut* D E *ad* E Z. *Erit igitur (per coroll.* 19 *quinti) quadratum* B I *ad quod ex* T *excessum, sicut* D E *ad* D Z *excessum, qui quidem* D E *&* D Z *rationem non habent quadratorum. Nec igitur* B I *ad* T *potentia, rationem habebit quadratorum, nec ideo ipsa* B I *&* T *latera, longitudine commensurabilia erunt, per nonam huius. Tota igitur* B I *plus potest congruente* I G *eò quòd ex* T *sibi longitudine incommensurabili. Congruens autem (ex hypothesi) propositæ* A *longitudine fuit commensurabilis. Reliqua itaque* B G *apotome, dicetur quinta, per quintam diffinitionem apotomarum. Inuenimus itaque apotomen quintam.*

Propositio nonagesima. Problema 24.

Inuenire Apotomen sextam.

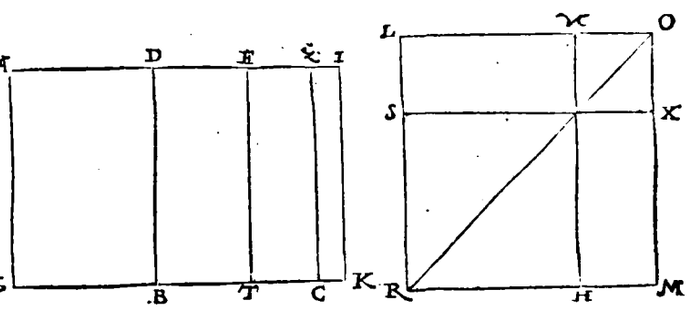


Esto proposita certa A, *sit verò (vt proximis prioribus) quadratus numerus* B G, *diuisus in* B D *&* D G *non quadratos. Sit item alius non quadratus vnitate vel binario distans ab ipso* D G, *qui sit* E. *Sit autem sicut* E *ad* B G, *sic quadratũ certæ* A *ad quod ex* Z I, *certa ideo erit* Z I. *Sicut verò* B G *ad* G D, *sic quod ex* Z I *ad quod ex* I T, *per corol. sextæ huius, certa erit* I T, *per sextam diffinitionem huius, quoniam enim maior est* B G *ipsa* G D, *maius erit quod ex* Z I *eò quòd ex* I T, *sit eò quòd ex* K: *quoniã numerus* E *non quadratus ad quadratũ* B G *est in ratione quadrati* A *ad quod ex* Z I, *ipsarum* A *&* Z I *potentiæ rationem quadratorum non habent, & proinde*

ipſæ A *&* Z I *longitudine incommenſurabiles erunt: quia ſimiliter* E *ad* G B, *&* B G *ad* G D *fuerint vt quadrata* A *ad* Z I, *&* Z I *ad* I T. *Erit æqua ratione (per* 22 *quinti)* E *ad* D G, *ſicut quadrata* A *ad* I T, *ſed* E *ad* D G *rationem non habet quadratorum, per corollarium* 26 *octaui. Quadrata igitur* A *&* I T *rationem quadratorum numerorum non habebunt, & proinde (ex nona huius) incommenſurabiles erunt lõgitudine ipſæ* A *&* I T. *Certæ tamen potentia tantùm cõmenſurabiles ideo erunt ipſæ* Z I I T, *cùm habeant ad ſe rationẽ numerorum* B G *&* G D, *qui quadratorũ rationem non habẽt. Reliqua igitur* Z T *apotome erit, p* 73 *huius: Dico quod & ſexta: nã cùm ſit* B G *ad* G D *ſicut quadrata* Z I *ad* I T, *Erit* B G *ad exceſſum* B D, *ſicut quadratum* Z I *ad exceſſum, quod ex* K, *quo excedit ſuum conſequens ex* I T *conuerſione rationis, per corollarium* 19 *quinti: ſed* B G *ad* B D *non quadratum, ratione quadratorum caret, per corollarium* 25 *octaui. Quadrata igitur* Z I *&* K *rationem quaratorum numerorum non habẽt, nec proinde latera* Z I *&* K *longitudine commẽſurabilia, per nonam huius. Tota ita q̃* Z I *maius poteſt congruente* I T, *eò quòd ex* K *ſibi longitudine incommenſurabili: ſed neutra ipſarum* Z I *&* I T *longitudine propoſitæ certæ* A *fuit commenſurabilis, vt oſtendimus, reliqua igitur* Z T *apotome erit ſexta, per ſextam apotomarum diffinitionem. Inuenimus itaque apotomen ſextam.*

Propoſitio nonageſima prima.

Si areola comprehendatur ſub Certa & Apotome prima, quæ areolã poteſt, Apotome eſt.



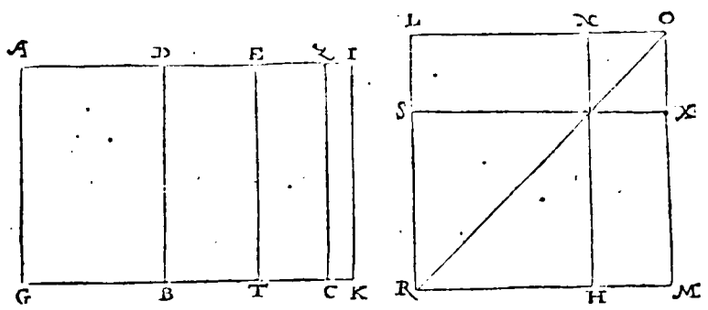
Cõtineatur areola A B *ſub certa* A G *& apotome primæ* A D: *Dico rectam quæ aream* A B *poteſt eſſe apotome, cùm* A D *ſit apotome, ipſi vna tantùm congruet recta, per* 79 *huius, quæ quidem ſit* D I *ſecta bifariam in* E. *Ei verò quod à dimidia ipſius* D I (*hoc eſt* D E, *vel* E I) *æquum ad totam* A I *comparetur, deficiens ſpecie quadrata, per* 28 *ſexti, ſitque quod ſub* A Z Z I, *Per ſigna verò* D E Z I *ipſi* A G *parallelæ ducãtur* B D T E C Z K I *& producta* G B *in* K, *perficiatur rectãgulum* A K, *ipſi porro* A C *æquum fiat (per* 14 *ſecundi) quadratum* L M, *à quo ablatũ quadratum æquum ipſi* Z K, *cõmunem habẽs angulũ* L O M *toti quod ſit* N X: *illud quippe (per* 26 *ſexti) circum eandem dimetientem eſt toti* L M, *ſit itaque dimetiẽs* R O, *perficiatúrque* S O H *gnomon, productis* N H *&* X S. *Cùm autem æquum ſit* A C *quadrato* L M, *&* Z K *æquũ ipſi* N X, *totum* A K *binis* L M N X *quadratis æquum erit: quia verò (per conſtructionem) æquum eſt quod ſub* A Z Z I *quadrato* E I, *vel* D E. *Ipſa* D E *inter rectas* A Z Z I *media proportionalis erit, per ſecundam partem* 17 *ſexti: & igitur (per primam ſexti) medium proportionale erit* D T, *inter* A C *&* Z K. *ſed quoniam ipſis* A C *&* Z K *æqualia ſunt quæ ex* L O *&* N O, *quadrata ſcilicet* L M N X, *inter quæ medium eſt proportionale, quod ſub ipſis ſcilicet* L X, *per corollarium* 25 *huius. Æquum igitur erit* L X *ipſi* D T, *ſunt enim æqualium extremorum media proportionalia: quia verò ipſius* D T *duplum eſt* D K, *per primam ſexti. Eſt enim* D E *dimidia ipſius* D I, *at ipſius* L X *duplus eſt gnomon* S O H *cum quadrato* N X, *cùm ſint æqualia* N S *et* X H *ſuppleme̅ta per* 43 *primi. Totum igitur* D K *æquũ erit gnomoni* S O H *cum quadrato* N X, *ſed totum* A K *æquum fuit toti* L M, *& quadrato* N X: *reliquum igitur* S H *quadratum reliquo* A B *æquum erit. Cùm inſuper* A D *ſit prima apotome, certæ potentia tantum commenſurabiles erunt* A I I D, *totáque* A I *ipſi* A G *expoſitæ longitudine commenſurabilis, ac tota* A I, *congruente* D I *maius poteſt, eò quòd ſit ex ſibi longitudine commenſurabili, per primam apotomarum diffinitionem, & igitur (per ſecundam partem* 17 *huius) quod ſub* A Z Z I *æquum quartæ parti eius quod à minore* D I, *ſecat maiorem* A I *in* Z *per commenſurabilia longitudine. Vtraque igitur* A Z *&* Z I *toti* A I *longitudine commenſurabiles erunt, per vndecimam huius. Ipſi verò* A G *commenſurabilis fuit tota* A I *longitudine, & eidem itaque* A G *vtraque* A Z *&* Z I *commenſurabilis erit (per ſecundum corollarium decimæ huius) longitudine. Quæ igitur ſub ipſis ſcilcet* A C A K Z K *certa erunt, per* 19 *huius: quare quadrata* L M N K *ipſis certis æqualia certa erunt, & ideò rectæ* L O *&* N O (*quadrata certa potentes*) *certæ erunt. Cæterùm quia* A I *&* D I *ſunt potentia tantùm commenſurabiles, ipſæ longitudine incommenſurabiles erunt: & proinde (ex prima ſexti) incommenſurabilia erunt* A K *&* D K, *Quia verò* Z K *ipſi* A K *commenſurabile fuit, incommenſurabile erit idem* Z K *ipſi* D K, *per ſecundum*

corollar

corollarium 10 *huius, & ipsius* D K *dimidio* E K, *incõmensurabile proinde erit idem* Z K, *per præfatũ corollariũ. Incommensurabilia igitur adinuicem erunt* L X *&* N X *ipsis* E K *&* Z K *æqualia: & ideo rectæ* L O O N *longitudine (per primam sexti) incommensurabiles erunt: sed illæ certæ ostensæ sunt. Potentia tantùm itaque commensurabiles erunt, certæ* L O O N. *reliqua igitur* L N *apotome erit: per* 73 *huius, quæ quidem potest quadratum* S H *ipsi* A B *æquum ostensum. Si itaque areola* A B *sub certa* A G, *& apotome prima* A D *comprehendatur, quæ areolã potest, scilicet* L N *apotome erit. Huius fusiorem discussimus demonstrationem, vt eius constructio quinque sequentibus subsidietur.*

Propositio nonagesimasecunda.

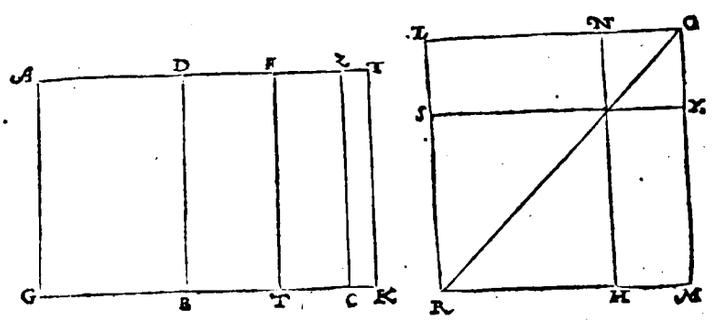
Si areola comprehendatur sub Certa & Apotome secunda, quę areolam potest, Mediæ est apotome prima.



Comprehendatur nanque areola A B *sub certa* A G *& apotome secunda* A D: *Dico rectã quæ areolam* A B *potest, esse apotomẽ primam mediæ. Cùm enim* A D *sit apotome, ipsi vna tantùm cõgruet, quæ sit (per* 79 *huius)* D I, *reliqua item more præcedentis constituantur. Cõgruens igitur* D I, *ipsi propositæ* A G *longitudine commensurabilis erit, totáque* A I *maius congruente* D I *poterit à sibi longitudine commensurabili, per secundam diffinitionem apotomarum. Igitur* D K, *sub* A G *&* D I *comprehensum, certum erit, per* 19 *huius, & proinde eius dimidium* E K *certum erit. Cùm autem* A G *&* D I *sint longitudine commensurabiles, alteráque earum* D I *cuidam* A I *incommensurabilis existat, nomina sunt enim apotomes: & reliqua* A G *eidem* A I *incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius: quare (per* 21 *huius) medium erit* A K. *Quia verò* A I *maius potest ipsa* D I *à commensurabili lõgitudine, recta* A I *secatur in* Z, *per commensurabilia longitudine, vt proxima diximus, per* 17 *huius: quare tota* A I *vtrisque ipsarum* A Z Z I *longitudine commensurabilis erit, per vndecimam huius: & proinde totum* A K *medium, vtrique* A C *&* Z K *(per primam sexti) commensurabile erit. Et ideo media erunt (per corollarium* 23 *huius* A C *&* Z K: *quare media erunt quadrata,* L M *&* N X, *per constructionem eis æqualia. Mediæ itaque erunt* L O *&* N O *ipsa media potentes, per vigesimam primam huius. Cùm autem* L X *sit æquale ipsi* E K *certo, ipsum* L X *certum erit, medium verò fuit* N X. *Ipsa igitur* L X *&* N X *incommensurabilia erunt, & idcirco (per primam sexti) rectæ* L O O N *longitudine incommensurabiles erunt. Mediæ autem fuerunt* L O *&* O N *potẽtia commẽsurabiles, certum* L X *comprehendentes, cùm sint* N O O X *rectæ æquales. Reliqua igitur* L N *erit: per* 74 *huius, mediæ apotome prima, quæ quidem potest quadratum* S H, *æquum ipsi* A B, *sub certa* A G *& apotome secunda* A D *cõprehenso, ipsa itaque* L N *ipsum* A B *potest. Si igitur areola comprehendatur, &c.*

Propositio nonagesimatertia.

Si areola comprehendatur sub certa & apotome tertia, quę areolam potest, Mediæ est apotome secunda.

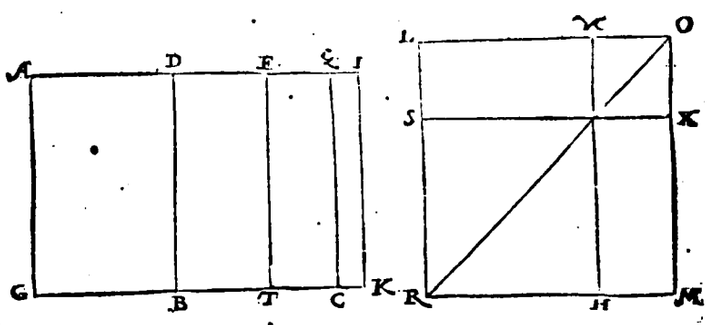


Areola nanque A B *sub certa* A G *& apotome tertia* A D *cõprehendatur: Dico rectam quæ ream* A B *potest, esse mediæ apotomen secundam. Constituantur etenim quæ prioribus proximis, vt ipsius* A D *apotomes congruẽs sit* D I, *certæ itaque potẽtia tantùm commensurabiles erunt* A I D I, *quia verò tertia est apotome*

AD *tota* AI *maius poterit congruente* DI, *eò quòd sit à sibi commensurabili longitudine, & insuper ipsarũ* AI DI *neutra propositæ* AG *longitudine cõmensurabilis erit, per tertiam diffinitionem apotomarum. Media igitur erunt* AK *&* DK, *per* 21 *huius, sibique inuicem incommensurabilia, per primam sexti, cùm* AI *&* DI *longitudine sint incommensurabiles, per constructionem, cùm autem (vt proximis ostendimus) tota* AI *secta sit in* Z *per commensurabiles longitudine,* AZ ZI, *per applicationem æqualis ei quod à dimidia* DE *minoris* DI, *scilicet quod sub* AZ ZI, *commensurabilia erunt (per primam sexti)* AC ZK *adinuicem, & toti* AK *per vndecimam huius, cùm autem* AK *&* DK *fuerint incommensurabilia, ipsi autem* AK *cõmensurabile fuit* ZK, *ipsi verò* DK *commensurabile fuit* EK, *eius dimidium, ipsa itaque* ZK *&* EK *incommensurabilia erunt, per coroll. tertium decimæ huius, cæterùm cùm media sint* AC ZK, *media erunt quadrata* LMNX *(eis æqualia constructa) & cõmensurabilia sicuti, & illa* AC ZK. *Binæ igitur* LO ON *(illa potentes) mediæ erunt (per* 21 *huius) & potentia commensurabiles, & tantùm, nam rectangula* LXNX *æqualia sunt (per constructionem) ipsis* EK ZK *incommensurabilibus ostensis, & ideo (per primam sexti) rectæ* LO ON *in ipsorum* LXNX *ratione, erunt longitudine incommensurabiles. Binæ igitur mediæ* LO ON *potentia tantùm cõmensurabiles, comprehendunt* LX *medium, cùm sit æquum ipsi* EK, *medij* DK *dimidio, reliqua igitur* LN *erit apotome secunda, mediæ, per* 75 *huius, quæ quidem* LN *potest quadratum* SH *æquum constructum ipsi* AB. *Eadem itaque* LN *mediæ apotome secunda, poterit ipsum* AB *sub certa* AG *& apotome tertia* AD *comprehensum. Si igitur areola comprehendatur, &c.*

Propositio nonagesimaquarta.

Si areola comprehendatur sub Certa & Apotome quarta, quæ areolam potest, Minor est.

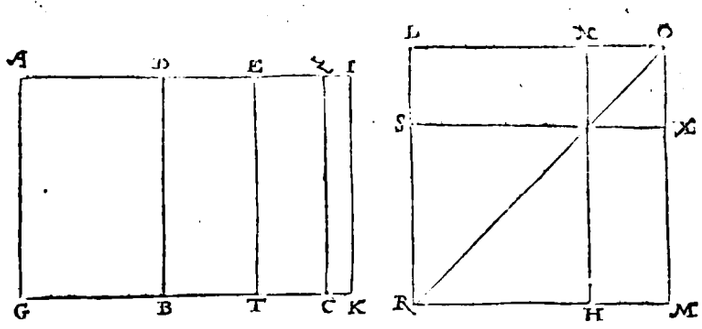


Supponatur areolam AB *sub certa* AG *et apotome quarta* AD *contineri: Dico rectam hanc areolam potentem, minorem dici, congruat ipsi* AD *apotome vnica* DI, *per* 79 *huius, quia apotome est* AD *binæ* AI DI *sunt certæ potentia, tantùm commẽsurabiles, per* 73 *huius, quia verò est quarta, tota* AI *maius potest congruẽte* DI *eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, & tota* AI *propositæ certæ* AG *longitudine commensurabitur, per quartam diffinitionem apotomarum, & proinde (constructis priorum tipis) certum erit* AK *sub certis* AI AG *contentum, per* 19 *huius, medium verò* DK, *cùm certa* DI *sit potentia tantùm commensurabilis ipsi* AG, *ex* 73 *huius, sub* DI *&* AG *comprehensum, quia verò maior* AI *maius potest minore* DI *eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, quartæ parti eius quod à minore æquum quod sub* AZ ZI *maiori* AI *applicatum, secat ipsam* AI *per incommensurabiles longitudine rectas,* AZ ZI *per secundam partem* 18 *huius, quare (per primam sexti) incommensurabilia erunt* AC ZK, *& (per* 12 *huius) igitur* AK *&* ZK *incommensurabilia erunt, rursus cùm* AC ZK *sint incõmensurabilia, incommensurabilia erunt & quadrata* LMNX *ipsis æqualia, & proinde rectæ* LO ON *ipsa quadrata potẽtes potentia incommensurabiles erunt: quia verò* AC ZK *componunt certum* AK, *ipsa quadrata* LM NX *quæ ex ipsis* LO ON *certum componunt, quia insuper* DK *fuit mediũ, & proinde* EK *(eius dimidium) medium erit, & ideo* LX *ipsi* EK *æquale constructum medium erit, quod quidem sub ipsis* LO ON *(vel* OX*) compreheditur. Binæ igitur rectæ* LO ON, *potentia incommensurabiles, efficiunt compositum ex earum quadratis* LMNX *certum, quod verò sub ipsis* LX *mediũ. Reliqua itaque* LN *erit minor, per* 76 *huius, quæ quidem potest quadratũ* SH, *æquum ipsi* AB *cõstructum, ipsa igitur* LN *(quæ minor dicitur) poterit areolam* AB, *sub certa* AG *& apotome quarta,* AD *comprehensam. Si ergo areola comprehendatur sub certa & apotome quarta, quæ areolam potest, Minor est.*

Propositio nonagesimaquinta.

Si areola comprehendatur sub Certa, & Apotome quinta, quæ areolam potest, est quæ Cum certo medium totum efficit.

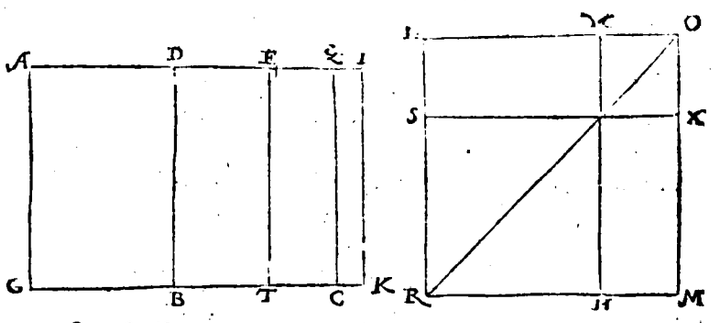
Comp



Comprehendatur area A B *ſub certa* A G *& apotome quinta* A D: *Dico rectam quæ aream* A B *poteſt, dici cum certo medium totum efficientem. Quoniam apotome quinta eſt* A D, *congruat illi* D I, *& reliqua vt prioribus conſtruantur. Rectæ itaque* A I *&* D I *certæ potentia tantùm erunt cæ menſurabiles, per 73 huius. Et quia congruens* D I *certæ propoſitæ* A G *eſt longitudine commenſurabilis, per quintam diffinitionem apotomarum. Reliqua* A I *eidem* A G (*per coroll. ſecundum decimæ huius*) *longitudine incommenſurabilis erit. Quare medium erit* A K, *per 21 huius. Certum item erit* D K, *per 19 huius, & eius dimidium* E K *certum, per coroll. 23 huius. Quia verò ad maiorem* A I *applicatur quod ſub* A Z Z I, *deficiens ſpecie quadrata, æquum ei quod à dimidia minoris* D I, *& maior* A I *maius poteſt minore* D I *à ſibi longitudine incommenſurabili, cùm ſit apotome quarta* A D, *per quintam diffinitionem apotomarum. Ipſa igitur* A I *ſecta eſt in* A Z Z I *longitudine incommenſurabiles, per ſecundam partem 18 huius. Et ideo (per primam ſexti)* A C Z K *incommenſurabilia erunt. Cùm autem quod ex* L O *quadratum* L M *æquum ſit ipſi* A C, *quod verò ex* N X *ipſi* Z K. *Incommenſurabilia erunt* L M *&* N X *quadrata. Et proinde rectæ* L O O N (*ipſa potentes*) *incommenſurabiles erunt potentia, per quartam diffinitionem huius. Quia verò compoſitum ex earum quadratis* L M N X (*ſcilicet totum* A K *ipſis æquum*) *medium eſt. Quod verò ſub ipſis* L O O N *contentum* L X (*cum* O N *&* O X *ſint æquales*) *fuit æquum ipſi* E K *certo. Illud ideo* L X *certum erit: Duæ itaque rectæ,* L O O N *potentia ſunt incommenſurabiles, efficientes compoſitum ex earum quadratis* L M N X *medium. Quod verò ſub ipſis* L O O N (*vel* O X) *rectangulum* L X *certum. Reliqua igitur* L N *vocatur cum certo medium totum efficiens, per 77 huius. Quæ quidem* L N *poteſt quadratum* S H, *ipſi* A B (*ex conſtructione*) *æquum, & exinde idem poteſt* A B *ſub certa* A G *& apotome quinta* A D *comprehenſum, ipſa* L N *cum certo medium totum efficiens vocata. Si igitur areola comprehendatur, &c.*

Propoſitio nonageſimaſexta.

Si areola comprehendatur ſub Certa & Apotome ſexta, quæ areolam poteſt, eſt quæ Cum medio medium totum efficit.

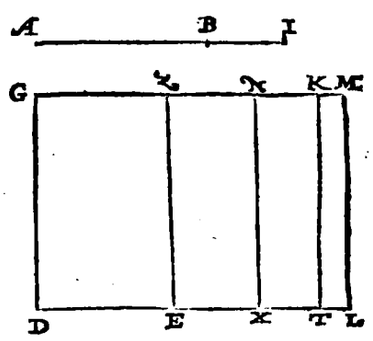


Eſto area A B *comprehenſa ſub certa* A G *& apotome ſexta* A D: *Dico rectam quæ aream* A B *poteſt, vocari cum medio medium totum efficientem. Diſponantur eadémque prioribus, tantùm* A D *ſit apotome ſexta rectæ* A I. *Quoniam* A D *eſt apotome, rectæ* A I D I *certæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, inter ſe. Quia verò eſt ſexta, ipſæ* A I D I *propoſitæ* A G *ſunt ſimiliter potentia tantùm commenſurabiles, cum neutra longitudine ipſi* A G *propoſitæ commenſuretur. Et inſuper maior* A I *maius poteſt minore* D I *eò quòd à ſibi longitudine incommenſurabili, per ſextam apotomarum diffinitionem, incommenſurabilia igitur erunt* A K *&* D K, *per primam ſexti, & media (per vigeſimamprimam huius) ſub* A I A G *& ſub* A G D I *contenta. Medium igitur erit* E K *ipſius* D K *dimidium, per coroll. 23 huius, & incommenſurabile ipſi* A K, *per ſecundum coroll.* 10 *huius. Quia item* A I *tota plus poteſt ipſa* D I *ab incommenſurabili, applicatum ſub* A Z Z I *ipſam ſecat per incommenſurabiles* A Z Z I *longitudine, per ſecundam partem decimæoctauæ huius. Et ideo (per primam ſexti) incommenſurabilia ſunt* A C Z K. *Quæ cum æqualia ſint quadratis* L M N X *ipſarum* L O O N, *Rectæ* L O O N *potentia incommenſurabiles erunt. Efficiunt autem compoſitum ex earum quadratis* L M N X, *æquum ipſi* A K *medio, per conſtructionem. Illud itaque compoſitum medium erit. Quod verò ſub ipſis* L O O N (*vel* O X) *ſcilicet* L X, *æquum ipſi* E K, *medio oſtenſo, erit medium. Incommenſurabile eſt autem illud* L K *compo-*

ſito ex quadratis L M N X: *nam* A K *&* E K (*ipſis compoſito &* L K *æqualia*) *ſint incommenſurabilia oſtenſa. Binæ itaque rectæ* L O O N *potentia ſunt incommenſurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis* L M N X *medium, quod verò ſub ipſis* L X *medium, inſuper incommenſurabile conflato ex earum quadratis. Reliqua igitur* L N *eſt cum medio medium totum efficiens, per ſeptuageſimamoctauam huius. Quæ quia poteſt quadratum* S H *æquum ipſi* A B, *ex conſtructione, poterit idem* A B, *ſub certa* A G *& apotome ſexta* A D *comprehenſum. Si itaque areola ſub certa & apotome ſexta comprehendatur, &c.*

Propoſitio nonageſimaſeptima.

Quod ex Apotome ad Certam comparatum, latitudinem efficit primam Apotomen.

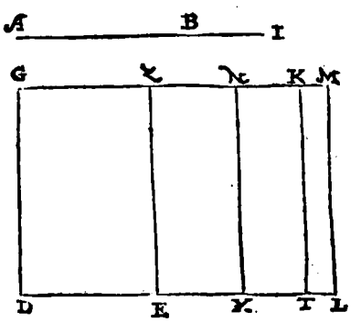


Eſto apotome A B, *certa verò expoſita* G D, *ei autem quod ex* A B *æquum ipſi* G D *comparetur (per* 45 *primi)* G E, *latitudinem efficiens* G Z: *Dico* G Z *eſſe primam apotomen, quoniam* A B *eſt apotome, congruat ei* B I, *per* 79 *huius, ei verò quod ex* A I *æquum ipſi* G D *comparetur, per* 45 *primi* G T, *latitudinem efficiens* G K, *ipſi verò quod ex* I B *æquum ſit* K L, *latitudinem efficiens* K M *ſecetur autem* Z M *bifariam in ſigno* N, *ducta* N X *parallela ipſis* Z E M L, *quoniam* G T *&* K L (*hoc eſt totum* G L) *æquum eſt quadratis ex* A I I B, *reliquum verò* G E *æquum eſt quadrato ex* A B, *erit (per ſeptimam ſecundi)* Z L *æquum ei quod bis ſub* A I I B, *cuius* Z L *dimidium erit* N L, *per primam ſexti, cùm ſecta ſit* Z M *bifariam in* N, *& proinde æquum ei quod ſub* A I I B *erit ipſum* N L (*vel* Z X) *cùm autem apotome ſit* A B, *certæ potentia tantùm commenſurabiles erunt* A I I B, *per* 73 *huius, & proinde* G T K L *æqualia earum quadratis, certa erunt, & commenſurabilia adinuicem, & ideo (per vndecimam huius) toti* G L *commenſurabilia erunt certa* G T K L, *& inde certum erit totum* G L, *quare (per primam ſexti)* G K K M *rectæ longitudine adinuicem, & toti* G M *commenſurabiles erunt, quia verò certum eſt* G L, *ad* G D *certam proiectum, latitudinem* G M *longitudine commenſurabilem ipſi* G D *certam efficit, per vigeſimam huius. Cæterùm quia medium eſt ſub* A I I B *comprehenſum, per* 21 *huius, cùm* A I I B *fuerint certæ potentia tantùm commenſurabiles oſtenſæ, medium erit* N L (*aut* Z X) *ſibi æquum, & proinde (per coroll.* 23 *huius) totum* Z L *duplũ, medium erit, quod ad certam* G D *comparatum, latitudinem* Z M *certam longitudine incommenſurabilem ipſi* G D *propoſitæ certæ efficit, per* 22 *huius, & proinde binarum* G D G M *commenſurabilium. Altera* G D *alicui* Z M *incommenſurabilis eſt, & reliqua* G M *eidem* Z M *incommenſurabilis erit longitudine, per coroll. ſecundum decimæ huius, potentia igitur tantùm commenſurabiles erunt rectæ* G M Z M, *cùm ſint certæ oſtenſæ: reliqua igitur* G Z *erit apotome, per* 73 *huius. Dico quod & prima, cũ enim inter quadrata ex* A I I B *ſit medium proportionale, quod ſub ipſis* A I I B, *per coroll.* 25 *huius, ſequetur inter* G T K L (*ipſis quadratis æqualia*) *medium eſſe* N L *vel* Z X, *ei quod ſub* A I I B *æquale oſtenſum, & igitur (per primam ſexti) media erit* Z N (*vel* N M) *inter rectas* G K K M, *& proinde quod ſub* G K K M *æquum erit ei quod ex* Z N (*vel* N M) *fiet, per decimamſeptimam ſexti. Quod igitur ſub* G K K M *æquum quartæ parti eius quod fit à minore* Z M, *ſcilicet quadrato* Z N, *ad maiorem* G M *applicatur, deficiens ſpecie quadrata, ipſámque* G M (*per commenſurabilia longitudine ſecat in* K, *vt oſtendimus, maior igitur (tota* G M) *maius poteſt minore,* Z N *congruente, eò quòd ſit à ſibi longitudine cõmenſurabili, per decimamſeptimam huius, ſed tota propoſitæ* G D *longitudine fuit commenſurabilis. Reliqua igitur* G Z *erit apotome prima, per primam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex apotome ad certam comparatum, &c.*

Propoſitio nonageſimaoctaua.

Quod ex Mediæ Apotome prima ad Certam comparatum, latitudinem efficit ſecundam Apotomen.

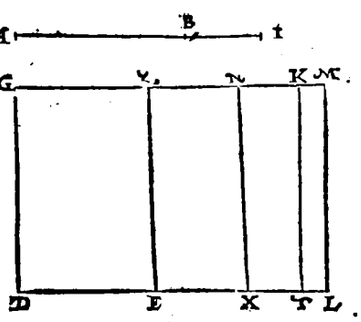
Sit



Sit A B *mediæ prima apotome, certa verò proposita ésto* G D, *cui comparetur æquum ei quod ex* A B (*per* 45 *primi*) *latitudinem efficiens* G Z *sit* q G E: *Dico* G Z *secundam esse apotomen, ipsi* A B *mediæ apotome primæ congruat vnica* B I, *per* 80 *huius, &* (*per proximæ constructionem*) *quadrato* A I *sit æquum* G T, *quadrato verò* B I *æquetur* K L, *ei igitur quod bis sub* A I I B *æquum erit* Z L, *per septimam secundi, sectum bifariam per* N X, *vt ei quod sub* A I I B *æquetur quisque horum* Z X, *aut* N L, *igitur ipsæ* A I I B *sunt mediæ potentia tantùm commensurabiles, per* 74 *huius, quodque sub ipsis* A I I B *certum est, quare quadrata ex* A I I B *medio, commensurabilia erunt, & proinde* G T K L (*ipsis æqualia*) *media commensurabilia erunt, & ideo* (*per primam sexti*) G K K M *rectæ longitudine commensurabiles erunt, quia verò quod sub* A I I B *certum fuit, certum erit* N L *ipsi æquale, & certum* Z L *ipsius* N L *duplum, quod ad certam* G D *proiectum, latitudinem* Z M *certam longitudine ipsi* G D *propositæ commensurabilem efficit, per vigesimam huius, quia insuper media commensurabilia fuerunt* G T K L *adinuicem, & toti* G B *commensurabilia erunt, per vndecimam huius. Medium igitur* (*per coroll. 23 huius*) *erit* G L, *quod quidem ad certam* G D *proiectum, latitudinem* G M *certam longitudine ipsi* G D *incommensurabilem efficiet, per 22 huius, quia verò certarum cõmensurabilium* G D Z M *altera* G D *ipsi* G M *incommensurabilis est, & reliqua* Z M *eidem* G M *incommensurabilis erit longitudine, per secundum coroll. decimæ huius, sed potentia sunt commensurabiles, cùm sint certæ. Reliqua igitur* G Z *erit apotome, per 73 huius: Dico quod & secũda, nam tota* G M *secta fuit in* K *per commensurabilia longitudine, per id quod sub* G K K M *ei applicatum, æquale ei quod fit à dimidia minoris* Z M *deficiens specie quadrata: maior ideo* G M *plus poterit minore* Z M, *eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili, per 17 huius, sed congruens* Z M *propositæ certæ* G D *longitudine fuit commensurabilis. Reliqua igitur* G Z *dicetur apotome secunda, per secundam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex mediæ apotome prima ad certam comparatum, &c.*

Propositio nonagesima nona.

Quod ex Mediæ apotome secũda, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

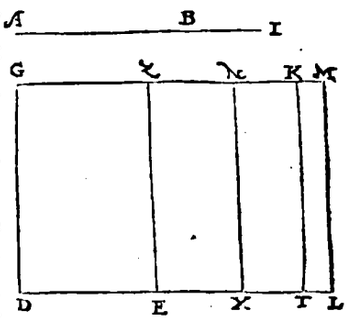


Supponatur recta A B *mediæ apotome secunda, certa verò proponatur* G D, *cui æquũ ei quod ex* A B *comparetur, per 45 primi,* G E, *latitudinẽ efficiens* G Z: *Dico* G Z *tertiam esse apotomen. Congruat ipsi* A B *recta* B I, *per octuagesimã primam huius. Reliqua vt prioribus construantur, quibus scilicet* G T *sit æquum quadrato* A I, *&* K L *quadrato* I B, *ac* G E *quadrato* A B, *&* Z L *ei quod bis sub* A I I B, *sectum bifariã per* N X. *Cùm* A B *sit mediæ apotome secunda, binæ* A I I B *mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles medium comprehendentes, per 75 huius: & hac de causa earum quadrata media erunt, & commensurabilia: & proinde media commensurabilia erunt* G T K L, *ipsis æqualia, quæ cùm sint toti* G L *commensurabilia, per vndecimam huius, ipsum* G L *medium efficient, per corollarium 23 huius, quare* (*per primam sexti*) *commensurabiles erunt* G K K M *adinuicem, & toti* G M, *quæ quidem sunt certæ, cùm sint latitudines mediorum* G T K L G L *ad certam* G D *applicatorum, per 22 huius, & longitudine incommensurabiles ipsi* G D *propositæ: quia verò quòd sub* A I I B *cõprehensum medium diximus, medium erit* N L *ipsi æquum, & proinde* Z L (*ipsius* N L *duplũ*) *medium erit, per corol. 23 huius, quod ad certam* G D *proiectum, latitudinem* Z M *certam longitudine ipsi* G D *incommẽsurabilem efficiet, per 22 huius. Cùm autem incommensurabiles longitudine fuerint* A I I B *rectæ: sit autem vt* A I *ad* I B, *sic quod ex* A I *ad quod sub* A I I B, *per lemma 21 huius, quadratum* A I *rectangulo sub* A I I B *incommensurabile erit: & ideo* G T N L *ipsis aqualia incommensurabilia erunt. quia verò ipsis* G T N L *incommensurabilibus, commensurabilia fuerunt* G L *ipsi* G T, *&* Z L *ipsi* N L, *ea quoque* G L *&* Z L *incommensurabilia erunt, ex tertio corollario decimæ huius: & igitur* (*per primam sexti*) *ipsæ* G M Z M *certæ, longitudine incommensurabiles erunt. Potentia ideo tantùm commensurabiles, reliqua autem* G Z *erit a-*

potome, per 73 huius: Dico quod & tertia. Cùm ad maiorem G M *cõparetur quod sub* G K K M, *æquum quartæ parti eius quod à minore* Z M, *ipsámque (deficiens specie quadrata) per commensurabilia longitudine* G K K M *secuerit, per cõstructionem, maior* G M *maius poterit minore* Z M, *eò quòd sit à sibi lõgitudine commensurabili, per 17 huius, sed neutra harum scilicet* G M Z M, *fuit longitudine propositæ certæ* G D *cõmensurabilis, vt ostensum fuit. Reliqua igitur* G Z *erit apotome tertia, per tertiã diffinitionem apotomarum. Quod ideo ex mediæ apotome secunda ad certam comparatum, &c.*

Propositio centesima.

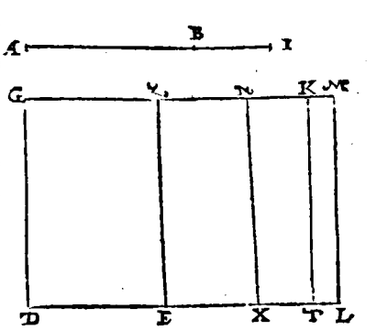
Quod ex Minore ad Certam comparatum, latitudinem efficit quartam Apotomen.



Esto minor A B *cui congruat vnica* I B, *per 82 huius, certa item proposita sit* G D, *cui comparetur (per 45 primi) æquum ei quod ex* A B *minore, sitque* G E *latitudinem efficiens* G Z: *Dico* G Z *esse quartam apotomen: construatur (more priorum) figura qua ipsarum* A I I B *quadratis & rectangulis suis æqualia* G T K L *&* Z X N L. *Cùm autẽ* A I I B *sint potẽtia incommeusurabiles, per 76 huius, erunt earum quadrata incommẽsurabilia. Et proinde* G T K T *(ipsis æqualia) incõmẽsurabilia erunt. Et ideo rectæ* G K K M *incommensurabiles erunt longitudine, per primam sexti: quia verò conflatum ex quadratis* A I I B *certum est, per eandem 76 huius, certum erit* G L *ipsis æquum. Certa igitur erit* G M *longitudine propositæ* G D *commẽsurabilis, cùm sit latitudo certi* G L *ad certam* G D *proiecti, per vigesimã huius, quia insuper quod sub ipsis* A I B I *medium est, per eandem 76 huius. Medium erit* Z L *ipsis æquum, quod ad certam* G D *applicatum, latitudinem* Z M *certam longitudine incommensurabilem ipsi* G D *propositæ certæ efficiet, per 22 huius. Cum autem certum* G L *incommensurabile sit medio* Z L, *recta* G M *certa, certæ* Z M *(per primam sexti) longitudine incommensurabilis erit, potentia igitur tãtum commensurabiles erunt certæ* G M Z M, *reliqua itaque* G Z *apotome erit, ex 73 huius: Dico quod & quarta. cùm ad totam* G M *comparetur quod sub* G K K M, *æquum quartæ parti eius quod à minore* Z M, *deficiens specie quadrata, ipsámque* G M *secet in* G K K M *longitudine incommensurabilia, vt patuit, maior (*G M *tota) maius poterit minore (*Z M *congruente) eò quòd sit à sibi lõgitudine incõmensurabili, per 18 huius. Sed tota* G M *propositæ certæ* G D *longitudine fuit commensurabilis. Reliqua itaque* G Z *apotome erit quarta, per quartam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex minore ad certam comparatum, &c.*

Propositio centesimaprima.

Quod ex ea quæ Cum certo medium totum efficit, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Apotomen quintam.

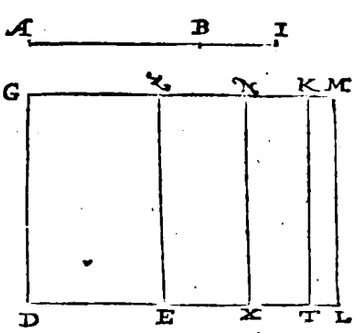


Sit A B *cum certo mediũ totum efficiens, cui vnica congruat* I B, *per octuagesimamtertiam huius. Proposita autem certa esto* G D, *cui (per quadragesimamquintam primi) comparatum æquum ei quod ex* A B *sit* G D, *latitudinem efficiens* G Z. *Cætera verò construantur ex præassumptis figurarum comparationibus: Dico* G Z *esse quintam apotomen. Quoniam* A B *est, cum certo medium totum efficiens, binæ rectæ* A I I B *potentia sunt incommensurabiles, per septuagesimamseptimam huius. Earum igitur quadrata & proinde (ipsis) æqualia* G T K L, *incommensurabilia erunt. Et ideo (per primam sexti) rectæ* G K K M *longitudine incommensurabiles existunt. Quia insuper (ex eadem septuagesimaseptima) compositum ex quadratis* A I I B *medium est. Medium erit* G L *ipsis æquum. Quod ad certam* G D *proiectum latitudinem* G M *certam longitudine ipsi* G D *incommensurabilem efficiet, per vigesimamsecundam huius: quia item quod sub ipsis* A I I B *certum est, ex eadem septuagesima septima,* Z L *ipsius duplum (ex constructione) certum erit, & hac de re ad certam applicatum, latitudinem*

dinem Z M *certam, ac certæ propoſitæ* G D *longitudine commenſurabilem efficiet, ex vigeſima huius: quia autem medium fuit* G L, *certum verò* Z L. *Ipſa incommenſurabilia erunt, & (per primam ſexti) igitur rectæ* G M Z M *longitudine incõmenſurabiles fient. Potentia itaque tantũ commẽſurabiles erunt, cum ſint certæ. Reliqua igitur* G Z *apotome erit. Et quinta: nam ad maiorem* G M *comparatur quod ſub* G K K M, *æquum quartæ parti eius quod à minore* Z M (*ſcilicet quadrato* Z N) *deficiens ſpecie quadrata, per conſtructionem, ſecánſque ipſam* G M *per incommenſurabilia longitudine* G K K M. *Quare (per decimamoctauam huius) maior* G M *maius poteſt minore* Z M *eò quòd ſit à ſibi longitudine incommenſurabili. Sed congruens* Z M *propoſitæ* G D *longitudine fuit commenſurabilis. Reliqua ideo* G Z *apotome quinta dicetur, per quintam diffinitionem apotomarum. Quod igitur ex ea quæ cum certo medium totum efficit ad certam comparatum, &c.*

Propoſitio centeſimaſecunda.

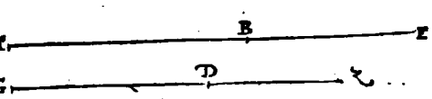
Quod ex ea quæ Cum medio medium totum efficit ad Certam comparatum, latitudinem efficit ſextam Apotomen.



Sit cum medio medium totũ efficiens A B, *cui ſola congruat* I B, *per octuageſimamquartam huius. Sitq́ propoſita certa* G D, *cui comparatum* G B *æquum ei quod ex* A B *latitudinem efficiat* G Z: *Dico* G Z *eſſe apotomen ſextam. Repetantur proximis conſtructa prioribus vt vitetur otioſa prolixitas. Quoniam* A B *eſt cum medio medium totum efficiens, binæ* A I I B *potentia ſunt incommenſurabiles, per ſeptuageſimamoctauam huius. Et proinde* G T K L *ipſarum potentiis æqualiæ, incommenſurabilia erunt, ac ideo rectæ* G K K M (*ex prima ſexti*) *longitudine incommenſurabiles. Cùm autem* A I I B *efficiant conflatum ex earum quadratis medium, per eandem 78. Medium erit* G L *ipſi conflato æquum. Quod quidem ad certam* G D *proiectum latitudinem* G M *certam longitudine ipſi* G D, *incommenſurabilem efficiet, per 22 huius. Quia rurſus medium eſt quod ſub ipſis* A I I B, *per eandem 78, medium erit* Z L *eius duplum, ex conſtructione, per coroll. 23 huius: quod ad certam* G D *proiectum, latitudinem* Z M *certam, ipſi* G D *longitudine incommenſurabilem efficiet, per eandem 22 huius: quia item, ex eadem 78, medium quod ſub ipſis* A I I B *incommenſurabile eſt medio conflæto ex quadratis ipſarum, incommenſurabilia erunt* N L *&* G L *ipſis æqualia, & proinde incommenſurabiles erunt (ex prima ſexti)* N M G M: *quia verò* Z M *dupla ipſius* N M *eſt ipſi* N M *commẽſurabilis,* N M *verò ipſi* G M *incommenſurabilis, & ipſa* Z M *ipſi* G M *incommenſurabilis erit longitudine, per ſecundum coroll. decimæ huius. Potentia itaque tantùm ſunt commenſurabiles ipſæ* G M Z M, *cùm ſint certæ, reliqua ideo* G Z *erit apotome, & ſexta. Nam ad maiorem ſiue totam* G M (*ex conſtructione*) *applicatur quod ſub* G K K M. *Æquum quidem quartæ parti eius quod à minore* Z M (*hoc eſt quadrato* N M) *deficiens ſpecie quadrata. Ipſamq́* G M, *per incommenſurabilia longitudine* G K G M *ſecans. Maior itaque ſeu tota* G M, *maius poterit minore ſeu congruente* Z M, *eò quòd ſit à ſibi longitudine incommenſurubili, per 18 huius. Sed neutra harum* G M Z M *propoſitæ certæ* G D *longitudine fuit commenſurabilis: vt oſtenſum fuit, reliqua itaque* G Z *dicetur (ex ſexta apotomarum diffinitione) apotome ſexta. Quod igitur ex ea quæ cum medio medium totum efficit, ad certam comparatum, &c.*

Propoſitio centeſimatertia.

Quæ ipſi Apotome, longitudine commenſurabilis eſt, Apotome eſt, & in ordine eadem.



Eſto apotome A B, *cui commenſurabilis longitudine exiſtat* G D: *Dico* G D *eſſe apotomen, eiuſdémque ordinis ipſi* A B. *Quoniam* A B *eſt apotome, congruat ei vnica* B E, *per 79 huius. Sit autem ſicut* A B *ad* B E *ſic (per 12 ſexti)* G D *ad* D Z. *Erit itaque (per decimamoctauam quinti)* A E *ad* E B *ſicut* G Z *ad* Z D. *Et vicißim (per decimamſextam quinti)* A E *ad* G Z *ſicut* B E

ad Z D, *& ideo reliquum* A B *ad reliquum* G D, *ſicut totum* A E *ad totum* G Z, *per decimamnonam quinti. Commenſurabiles autem ſunt* A B *&* G D, *commenſurabiles igitur erunt* A E *&* G Z, *per decimamtertiam huius, ſimiliter* B E *&* D Z, *eandem rationem habentes. Cùm autem* A B *ſit apotome, rectæ* A E E B *certæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, per 73 huius. Certæ igitur eruni & ipſæ* G Z Z D, *per ſextam diffinitionem huius, & potentia tantùm commenſurabiles, per decimamtertiam huius. Reliqua igitur* G D *apotome erit, per eandem 73, & eiuſdem ordinis ipſi* A B: *nam eſt* A E *ad* E B *ſicut* G Z *ad* Z D. *Si itaque* A E *plus ipſa* E B *poſſit, eò quòd à ſibi longitudine commenſurabili, &* G Z *ipſa* Z D *maius idem poterit, per decimamſextam huius. Si verò ab incommenſurabili, &* G Z *ipſa* Z D *eodem maius poterit, quare vel ſimul erunt ex tribus prioribus, aut equidem ſimul ex tribus poſtremis, vt patet ex diffinitionibus apotomarum: quia verò tota* A E *toti* G Z, *& congruens* E B *congruenti* Z D *commenſurabiles ſunt. Si* A E *expoſitæ certæ commenſuretur, &* G Z *eidem commenſurabitur, per decimam huius, vtraque igitur ſimul prima, vel ſimul quarta erit. Si verò congruens* E B *expoſitæ certæ commenſurabilis fuerit, & eidem* Z D *congruens commenſurabilis erit, per eandem decimam, ſicq; vtraque ſecunda ſimul, aut ſimul quinta erit apotome. Siquidem neutra expoſitæ certæ commenſurabilis fuerit ipſarum* A E E B, *& neutra ipſarum* G Z Z D *eidem certæ commenſurabitur, per corollarium ſecundum decimæ huius, hácque lege vtraque tertia, aut ſexta ſimul erit apotome. Eiuſdem igitur erunt ordinis ipſæ* A B G D, *per diffinit. apotomarum. Quæ itaque ipſi apotome longitudine commenſurabilis eſt, &c.*

MONITVM.

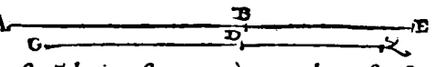
Idem ſentiemus de apotomarum natura, quod de binomiis diximus. Cùm enim hæc diffinita, licet quantitates proferant incertas, non tamen ea intercapedine à ſeipſis diuulſas eſſe exiſtimabimus, vt nulla commenſurandi ſpecie communicare poſſint, verum quia longitudo in commenſurabilibus præ ſe fert & potentiam, iam oſtendimus eas quæ longitudine communicant (hoc eſt & potentia ſimul) duorum ordinum eſſe non poſſe, eò quòd omni menſurationis ſpecie coniunctæ ſint: ſed ſi tantùm potentiæ communicent, longitudine verò neqnaquam, non ideo ſequetur eas eundem obtinere diffinitionis ordinem: nam potentiarum commenſuratio non obeſt incommenſurationi longitudinum. Poſſunt enim binæ potentiæ eidem potentiæ certæ commenſurari, quarum longitudines ſimul eidem certæ non commenſurabuntur, ſed altera tantùm. Si itaque vnius apotomes A B *potentia, certæ commenſuretur, alterius verò* G D *eidem certæ longitudo ſimul & potentia commenſurentur, patebit hanc eſſe primam vel quartam, illam verò nec primam, nec quartam eſſe ex diffinitionibus, nam altera congruentem certæ longitudine communicabit, reliquæ verò totam, quandoque & neutram. Vnum tamen ſupereſt quod ſi potentia tantùm communicent binæ* A B G D, *neceſſe erit vtramque eſſe ſimul ex tribus prioribus, aut equidem ſimul ex tribus poſtremis, per 16 huius. Nam ſi vna maius nomẽ plus poſſe minore à commenſurabili proferat, & reliqua idem proferet, ſi verò ab incommenſurabili, & reliqua ab incommenſurabili. Hoc notandum repetere non dedignamur, vt percipiamus has apotomes vnius tantùm incertarum locum obtinere, cùm non adeò inter ſe diſtent, veluti reliquæ incertæ, quas minima commenſuratio in eas incidens, ita copulat vt eiuſdem illico oſtendantur eſſe denominationis, & à reliquarum natura penitus alienæ. Idem ferè monuimus de binomiis, ad 67 huius, veruntamen binomium ac apotemen ſuorum ſenariorum duces poſuit Euclides, ob earum præſtantiam, qua cum certa per ſuorum ordinum diffinitiones areas comprehendunt. Reliquarum incertarum potentias generantes, vt oſtenſum fuit quinquageſimaquarta & quinque eam ſequentibus, & nonageſimaprima & quinque eam ſequentibus, quas ſex conuerſæ vtraſque ſequuntur, harum progeniem corroborantes. Non ſequetur huic ſimile in apotome mediæ prima & ſecunda eò quòd illæ diuerſam incertarum naturam nactæ ſint, veluti diximus in prima ac ſecunda ex binis mediis: nam ſingulæ harum propria vtuntur denominatione, nulli ſuas quantitates communicãtes. Si igitur hoc theoremate de apotome tantùm in genere diſſerendum fuiſſet, diciſſemus rectam quauis arte ipſi apotome commenſurabilem apotomen eſſe, ſcilicet in genere. Quia verò per ſex eius ſpecies commenſurabilis propoſitæ naturam traducere voluimus: illam longitudine commenſurabilem poſuimus, quæ eundem illas cogit ſuſcipere ordinem, potentia tantum verò, naturam.*

Propoſitio centeſimaquarta.

Mediæ apotome commenſurabilis, Mediæ apotome eſt, & in ordine eadem.

Sit

Sit mediæ apotome A B, *cui commensurabilis potentia tantum existat* G D: *Dico* G D *mediæ esse apotomen, & ipsi* A B *in ordine eandem. Congruat ipsi* A B *vnica* E B, *per octuagesimã huius, sicut verò* A B *ad* B E, *sic fiat (per duodecimam sexti)* G D *ad* D Z: *erit, per* 18 *quinti* A E *ad* E B, *sicut* G Z *ad* Z D: *& vicissim (per* 16 *quinti)* A E *ad* G Z, *sicut* E B *ad* Z D: *& ideo reliquum* A B *ad* G D, *erit (per* 19 *quinti) sicut totum* A E *ad* G Z. *Et proinde (ex* 22 *sexti) sicut quod ex* A E *ad quod ex* E B, *sic quod ex* G Z, *ad quod ex* Z D, *& vt quod ex* A E *ad quod ex* G Z, *sic quod ex* E B *ad quod ex* Z D, *ac insuper quod ex* A B *ad quod ex* G D. *Cõmensurabile autem fuit (ex hypothesi) quod ex* A B, *ei quod ex* G D: *commensurabile itaque erit quod ex* A E *ei quod ex* G Z, *& quod ex* E B *ei quod ex* Z D, *per* 13 *huius: sed media sint quæ ex* A E E B, *per* 74 *&* 75 *huius, cùm sint mediæ* A E E B. *Media igitur erunt quæ ex* G Z Z D, *per corollarium* 23 *huius, & potentia tantum commensurabiles sunt* A E E B, *per* 74 *&* 75 *huius. Potentia igitur tantum commensurabiles erunt* G Z Z D, *per* 13 *huius. Ipsa itaque* G D *apotome mediæ erit, per* 74 *&* 75 *huius: Dico quod & eiusdem ordinis ipsi* A B, *cùm sit* A E *ad* E B *vt* G Z *ad* Z D, *erit quadratũ* A E *ad quod sub* A E E B, *sicut quadratum* G Z *ad quod sub* G Z Z D, *per corollarium* 21 *huius, & vicissim (per* 16 *quinti) sicut quod ex* A E *ad quod ex* G Z, *sic quod sub* A E E B *ad quod sub* G Z Z D. *Commensurabile autem fuit quod ex* A E *ei quod ex* G Z, *commensurabile igitur erit quod sub* A E E B *ei quod sub* G Z Z D, *per* 13 *huius. Si igitur certum sit quod sub* A E E B, *certum erit quod sub* G Z Z D, *per sextam & nonam diffinitionem, & sic vtraque* A B *&* G D *erit mediæ prima apotome, per* 74 *huius. Si verò medium sit quod sub* A E E B, *medium erit quod sub* G Z Z B, *per corollarium* 23 *huius, sicque vtraque ipsarum* A B G D *mediæ apotome secunda, per* 75 *huius. Mediæ itaque apotome cõmensurabilis &c.*



A fortiori si lõgitudine commensurabiles supponantur A B G D *lucidius ostendetur, nam quæ longitudine commensurabiles sunt, & potentia omnino commensurabiles erunt, per illationem nonæ decimi.*

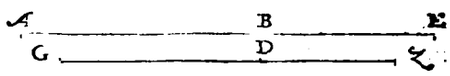
Propositio centesimaquinta.

Minori commensurabilis, minor est.

Esto A B *minor, cui commẽsurabilis potentia tantùm sit* G D: *Dico ipsam* G D *minorem dici: quoniam* A B *est minor, congruat ei vnica* B E, *per* 82 *huius, fiátque (per* 12 *sexti) sicut* A B *ad* B E, *sic* G D *ad* D Z. *Erit itaque (per* 18 *quinti) sicut* A B *ad* E B, *sic* G Z *ad* Z D, *& vicissim (per decimamsextam quinti)* A E *ad* G Z, *sicut* E B *ad* Z D. *Et ideo reliquũ* A B *ad reliquum* G D, *sicut totum* A B *ad totum* G Z, *per* 19 *quinti. & proinde (ex* 22 *sexti) earum rectarum quadrata proportionalia similiter erunt. Commensurabile autem fuit quod ex* A B *ei quod ex* G D, *ex hypothesi, commensurabilia igitur erunt, scilicet quod ex* A E *ei quod ex* G Z, *& quod ex* B E *ei quod ex* D Z, *per* 13 *huius. Incommensurabile autem (ex hypothesi) fuit quod ex* A E *ei quod ex* E B, *cum* A B *sit minor, ex* 82 *huius. Quod igitur ex* G Z *ei quod ex* Z D, *incommensurabile erit, per* 13 *huius, binæ igitur* G Z Z D *rectæ, potentia incommensurabiles erunt: quia verò fuit quod ex* A E *ad quod ex* E B *sicut quod ex* G Z, *ad quod ex* Z D, *per* 22 *sexti, erit componendo, per* 18 *quinti, quæ ex* A E E B *ad quod ex* A E, *sic quæ ex* G Z Z D, *ad quod ex* G Z. *Vicissim itaque erunt quæ ex* A E E B, *ad quæ ex* G Z Z D *quadrata, sicut quod ex* A E *ad quod ex* G Z, *commensurabile fuit enim quod ex* A E *ei quod ex* G Z. *Commensurabile igitur erit conflatum ex* A E E B *quadratis, conflato ex* G Z Z D *quadratis, per* 13 *huius, atqui certum est ex* A E E B *quadratis conflatum, per* 76 *huius. Certum igitur erit ex* G Z Z D *quadratis cõflatum, quia verò fuit* A E *ad* E B, *sicut* G Z *ad* Z D, *erit per (corollarium* 21 *huius) quadratum* A E *ad quod sub* A E E B, *sicut quadratum* G Z, *ad quod sub* G Z, Z D. *Et vicissim erit quod ex* A E *ad quod ex* G Z, *sicut quod sub* A E E B, *ad quod sub* G Z Z D, *per* 16 *quinti: commensurabile autem fuit quod ex* A E *ei quod ex* G Z. *Commensurabile itaque erit (per* 13 *huius) quod sub* A E E B *ei quod sub* G Z Z D: *sed quod sub* A E E B *medium est, per eandem* 76, *medium igitur erit quod sub* G Z Z D, *per corollarium* 23 *huius. Binæ itaque rectæ* G Z Z D *potentia sunt incommensurabiles, efficientes conflatum ex earũ* G Z Z D *quadratis certum, quod verò sub ipsis medium, reliqua igitur* G D *vocatur minor, per eãdem* 76, *minori itaque commensurabilis, minor est. Hanc in potentia tantùm commensurabilibus ostẽdimus, vt fortiori argumento in longitudine commensuratis eluceſcat.*

Propoſitio centeſimaſexta.

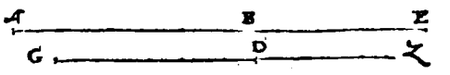
Cum certo medium totum efficienti commenſurabilis, & eadem Cum certo Medium totum efficiens eſt.



Eſto cum certo medium totum efficiens A B, *cui commenſurabilis potentia tantùm exiſtat* G D: *Dico ipſam* G D *cum certo medium totum efficientem eſſe, ſit ipſi* A B *congruens* B E, *per octuageſimam tertiam huius, & ſicut* A B *ad* E B *ſic fiat* G D *ad* Z D: *ipſæ igitur* A E E B *potentia incommenſurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò ſub ipſis certum, per 77 huius. Reſumantur autem (ex quinto & ſexto) inter has rectas & earum quadrata, proportiones prioribus ſumptæ proximis, quoniam ipſarum* A E E B *potentiæ ſunt incommenſurabiles, erunt & ipſarum* G Z Z D *potentiæ incommenſurabiles, per 13 huius, quia verò quadrata* A E E B *quadratis* G Z Z D *commenſurabilia exiſtunt, veluti (ex hypotheſi) quadrata* A B *&* G D, *quæ verò ex* A E E B *medium conflant, per 77 huius, quæ igitur ex* G Z Z D *medium conflabũt, per coroll. 23 huius, quia rurſus ex præfatis collegimus rectangulum ſub* A E E B *commenſurabile eſſe rectangulo ſub* G Z Z D *comprehẽſo, veluti quod ex* A B *ei quod ex* G D *quadrato, quod autem ſub* A E B B *certum eſt, ex eadem ſeptuageſimaſeptima, quod itaque ſub* G Z Z D *certum erit, quare à recta* G Z *recta* Z D *tollitur potentia, toti* G Z *incommenſurabilis exiſtens, efficit autem cum tota compoſitũ ex earum quadratis medium, quod quidem ſub ipſis certum. Reliqua itaque* G D *vocatur cum certo medium totum efficiens, per 77 huius. Cum certo itaque medium totum efficiente commenſurabilis, & eadem, &c.*

Propoſitio centeſimaſeptima.

Cum medio medium totum efficienti commenſurabilis, ipſa quoque Cum medio, medium totum efficiens eſt.

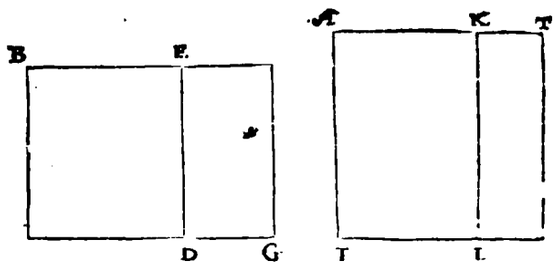


Sit cum medio medium totum efficiens A B, *ipſi autẽ (ſaltem potentia) commenſurabilis extet,* G D: *Dico* G D *eſſe cum medio medium totum efficientem, congruat ipſi* A B *recta* B E, *per 84 huius, fiat q̃ (per 12 ſexti) ſicut* A B *ad* B E *ſic* G D *ad* D Z, *& quæ ſuperſunt proportiones ex proximis præfatis referantur, quoniam* A B *eſt cum medio medium totum efficiens, binæ* A E E B *ſunt potentia incommenſurabiles, per 78 huius, quare binæ* G Z Z D (*ipſis* A E E B *proportionales*) *potentia incommenſurabiles erunt, per 13 huius. Cùm autem conflatum ex* A E E B *quadratis ſit medium, per eandem 78 huius, conflatum ex* G Z Z D *quadratis (ipſi commenſurabile) medium erit, per coroll. 23 huius, quia verò quod ſub ipſis* A E E B *eſt rurſus medium, per eandem 78, quod ſub reliquis* G Z Z D *medium erit, per idem coroll. 23 huius, cùm ſit commenſurabile ei quod ſub* A E E B *veluti quadratũ* G D *quadrato* A B, *per coroll. 21 huius, quia demũ quod ſub* A E E B *incommenſurabile eſt compoſito ex* A E E B *quadratis, ex eadem 78 huius: ſequetur quod ſub* G Z Z D (*commenſurabile ei quod ſub* A E E B) *incommenſurabile eſſe compoſito ex* G Z Z D *quadratis, commenſurabili quidem compoſito ex* A E E B *quadratis, per tertium coroll. decimæ huius. Binæ itaque rectæ* G Z Z D *ſunt potentia incommenſurabiles, efficientes conflatum ex earum* G Z Z D *quadratis medium, quod verò ſub ipſis* G Z Z D *medium, ac inſuper incommenſurabile compoſito ex earum quadratis. reliqua igitur* G D *cum medio medium totum efficiens erit, per 78 huius. Cum medio itaque mediũ totum efficienti commenſurabilis, &c.*

Propoſitio centeſimaoctaua.

A certo Medio ablato, reliquam areolam potens, vna duarum incertarum eſt, vel Apotome, vel Minor.

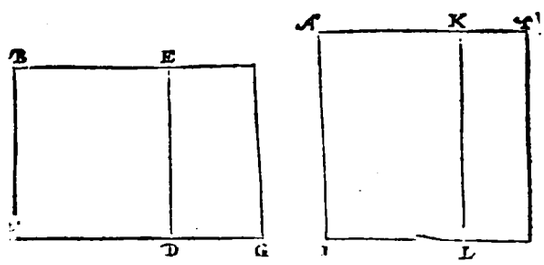
A certo



A certo nanque B G *auferatur medium* E G: *Dico reliquam aream* B D *potentem rectam, esse apotomen vel minorem. Esto proposita certa* A I, *(cui per 45 primi) constituatur ipsi* B G *æquū* I T, *à quo auferatur ipsi* E G *æquum* L T, *reliquum igitur* I K *reliquo* B D *æquum erit, per communem sentent. cùm certum sit* B G *certum erit* I T, *sibi æquum, cùm verò medium sit* E G *medium erit* L T, *ipsi æquum, quæ* I T *&* L T *ad certam* A I *applicata, latitudines* A T *&* K T *certas quidē efficiunt, sed* A T *longitudine propositæ certæ* A I *commensurabilem, per vigesimam huius,* K T *verò incommensurabilem eidem* A I, *per 22 huius: quare cùm binarum* A I A T *cōmensurabilium, altera* A I *cuidam* K T *fuit incommensurabilis, & reliqua* A T *eidem* K T *incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius. Binæ itaque* A T T K *certæ, potentia tantùm commensurabiles sunt: reliqua igitur* A K *est apotome, per 73 huius, congruens autem* T K, *quia verò (à tota disiunctiua) tota* A T *maius potest minore (seu congruente* T K) *eò quòd à commensurabili, vel incommensurabili, siquidem commensurabili, ipsa* A K *est apotome prima. Nam maius nomen* A T *longitudine est propositæ* A I *commensurabile, si autem ab incommensurabili,* A K *erit apotome quarta, per primam & quartam diffinitionem apotomarum. Ipsa igitur* A K *aut prima aut quarta est apotome, si prima, quod sub certa* A I *& ipsa prima apotome* A K *comprehēsum* I K, *potest apotome per 91 huius, si verò quarta fuerit* A K *quod sub ipsa & certa* A I *cōprehensum* I K, *poterit minor, per 94 huius. Potens igitur aream* I K *aut apotome, aut minor est: & proinde potens aream* B D (*ipsi* I K *ex hypothesi æqualem*) *aut apotome, aut minor erit. A certo itaque medio ablato reliquam aream potens, &c.*

Propositio centesimanona.

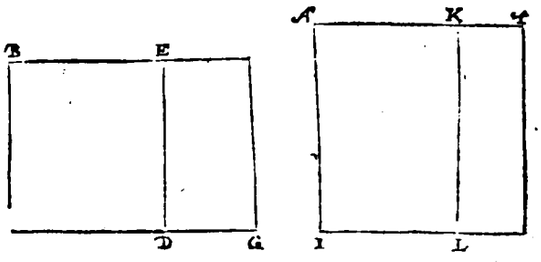
A medio Certo ablato, aliæ duæ fiunt incertæ, vel Mediæ apotome prima, vel Cum certo medium totum efficiens.



A medio B G *auferatur certum* E G: *Dico rectam quæ reliquam aream* B D *potest, esse vel mediæ apotome primam, aut cum certo medium totum efficientē. Sumatur (vt proxima diximus) certa* A I, *cui comparetur æquum ipsi* B G, *sit q̄* I T, *æquum verò ipsi* E G *tollatur* L T, *quoniam mediū est* B G, *medium erit* I T *sibi æquum, quod ad certam* A I *proiectum, latitudinem* A T *certam efficiet longitudine ipsi* A I *propositæ incommensurabilem, per vigesimam secundam huius, cùm autem certum sit* E G *certum erit* L T *sibi æquum, latitudinémque* T K *certam efficiet, propositæ verò* A I *longitudine commensurabilem, per vigesimam huius. Duarum verò* A I T K *commensurabilium, altera* A I *alicui* A T *incommensurabilis fuit, & reliqua* T K *eidem* A T *longitudine incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius. Potentia igitur tantùm commensurabiles sunt certæ* A T T K, *reliqua igitur* A K *est apotome: Dico quòd secunda vel quinta. Nam si tota* A T *maius possit congruente* T K *eò quòd à commensurabili est secunda: fuit enim congruens* T K *expositæ* A I *longitudine commensurabilis, si verò maius possit ab incōmensurabili, ipsa* A K *erit quinta, nam congruens semper est propositæ commensurabilis, per secundam & quintam diffinitionem apotomarum: recta igitur* A K, *est secunda vel quinta apotome, quare sub certa* A I *& apotome secunda* A K *comprehensa areola* I K, *est mediæ apotome prima, sub certa verò eadem* A I *& apotome quinta* A K *comprehensa area* I K, *erit cum certo medium totum efficiens, per 92 & 95 huius. Potens igitur aream* I K *vel* B D *sibi æqualem, erit vel mediæ apotome prima, vel cum certo medium totum efficiens. A medio itaque certo ablato, aliæ duæ fiunt incertæ, &c.*

Propositio centesimadecima.

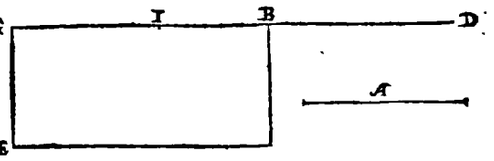
A medio, Medio ablato incommensurabili toti, Reliquę duæ incertę fiunt, Medię apotome secunda, vel Cum medio, medium totum efficiens.



A medio etenim B G *medium* E G *auferatur, incommenſurabile ipſi* B G *toti: Dico rectam reliquam aream* B D *potentem, aut apotomen mediæ ſecundam, aut cum medio medium totum efficientem eſſe. Comparetur (per quadrageſimamquintam primi) vt prioribus ad certam* A I *æquum ipſi* B G, *ſitq́* I T, *æquum verò ipſi* E G *ſit* L T. *Quoniam media ſunt* B G *&* E G, *media erunt* I T *&* L T. *Quæ ad certam* A I *comparata, latitudines* A T T K *certas, longitudine incommenſurabiles ipſi* A I *propoſitæ (per vigeſimamſecundam huius) efficiunt, & adinuicem incommenſurabiles, per primam ſexti, cum* I T *medium medio* L T *ſit (ex hypotheſi) incommenſurabile.* Binæ *itaque* A T T K *certæ potentia tantùm commenſurabiles erunt, & igitur reliqua* A K *erit apotome, per ſeptuageſimamtertiam huius. Sed tertia vel ſexta, ſi tota enim* A T *congruente* T K *maius poßit à commenſurabili longitudine, erit tertia apotome* A K. *Nam neutra ipſarum* A T T K *fuit longitudine commenſurabilis propoſitæ, ſi verò tota* A T *maius poßit congruente* T K *ab incommenſurabili longitudine, ipſa* A K *erit ſexta apotome. Nam quauis arte neutra propoſitæ certæ fuit commenſurabilis, per tertiam, & ſextam apotomarum diffinitiones. Ipſam igitur* A K *neceſſe eſt eſſe tertiam vel ſextam apotomen. Quod ſi tertia fuerit, quod ſub ipſa & certa* A I *comprehenditur* I K, *eſt potentia mediæ apotome ſecundæ, per 93 huius. Siquidem ſexta fuerit* A K, *ipſa cum certa* A I *continebit* I K, *potentiam cum medio medium totum efficientis, per 96 huius. Quæ igitur aream* I K (*vel* B D *ſibi æqualem*) *poteſt, vel apotome mediæ ſecunda, vel cum medio medium totum efficiens erit. A medio itaque medio ablato, incommenſurabili toti, &c.*

Propoſitio centeſima vndecima.

Apotome non eſt eadem ei quæ Ex binis nominibus.



Eſto apotome recta A: *Dico ipſam* A *non poſſe fieri ex binis nominibus. Quod ſi fieri poßit, ſupponatur vtramque eſſe, ſcilicet apotomen & binomium. Exponatur certa* G E *cui (per quadrageſimamquintam primi) conſtituatur æquum* E I *quod ex* A, *quod ſit* B E, *latitudinem efficiens* B G. *Manifeſtum erit ipſam* B G *apotomen primam eſſe, ex 97 huius, cum* B E *ſit quod ex apotome* A. *Rurſus quia* B E *eſt ex ea quæ ex binis nominibus* A, *ad certam* G E *comparatum, efficiet latitudinem* G B *binomium primum, per ſexageſimam huius. Ipſa itaque* G B *erit & apotome prima, & binomium primum. Congruat ipſi* G B *recta* B D, *per 79 huius. Diuidatur inſuper* G B *in nomina in* I, *per quadrageſimamſecundam huius, maiúſque nomen ſit* G I. *Cum autem* B G *ſit apotome,* G D D B *rectæ, certæ potentia tantùm commenſurabiles erunt. Quia verò prima eſt apotome, tota* G D *expoſitæ certæ* G E *longitudine commenſurabilis erit. Cùm rurſus* B G *ſit ex binis nominibus prima, binæ* G I I B *ſunt certæ potentia tantùm commenſurabiles, per trigeſimamſextam huius, & maius nomen* G I *ipſi propoſitæ certæ* G E *longitudine erit commenſurabile, per primam diffinitionem binomiorum. Igitur* D G G I *certæ, eidem* G E *commenſurabiles, adinuicem erunt commenſurabiles, per decimam huius, longitudine. Et igitur* D G *tota vni earum* G I *commenſurabilis, & reliquæ* D I (*per coroll. vndecimæ huius*) *commenſurabilis erit. Sed ipſi* D G *toti, longitudine fuit incommenſurabilis congruens* D B *certa. Igitur* D B *ipſi* D I *longitudine incommenſurabilis erit, per ſecundum coroll. decimæ huius. Certæ itaque potentia tantùm commenſurabiles erunt* D I D B. *Reliqua igitur* B I *dicetur apotome, per ſeptuageſimamtertiam huius. Igitur & incerta. Sed & certa eadem* B I *erit, cum ſit vnum nomen ipſius* G B *quæ ex binis nominibus ſuppoſita, quod fieri non poteſt. Apotome igitur non eſt eadem ei quæ ex binis nominibus.*

Corollarium.

Hinc fit ſex binomia ſemper differre à ſex apotomis ſiue reſiduis, & inſuper quinque binomij comites ſimiliter differre ab apotome & ſuis quinque comitibus, cæteris incertis. *Binomij etenim & quinque eam ſequentium potentiæ ad certam comparatæ, ſex binomij ſpecies ſua producunt*

cunt latitudine, per ſexageſimam & quinque eam ſequentes, apotomes verò & quinque eam ſequentium potentiæ ad certam eandem applicatæ, latitudines efficiunt ſex apotomarum ſpecies, per 97 & quinque eam ſequentes. Quas ſingulas à ſeipſis diſcrepare docuimus hoc theoremate. Nam latitudines quæ ſemel fiunt apotome, nuſquam binomium vltra ſimul cum apotome eſſe poſſunt. Præterea nec harum vllam cum media, eandem poſſe fieri exiſtimabimus. Nam quod ex media ad eandem præfatam certam comparatum, latitudinem certam producit, per vigeſimam ſecundam huius, cætera verò incertam.

MONITVM.

Hactenus expoſuit Euclides quatuordecim linearum genera, diuerſa à ſeipſis quoad commenſurationem, ſub eodē tamen quantitatis genere, lōgitudine ſcilicet cōprehenſa: quarū licet ſingulæ (ex hypotheſis varietate) ſingularum aliarum denominationē concipere poſſint. Nō tamen (ſub eadem recepta hypotheſi) alteram alterius denominatione vti patiemur. Cùm enim omnia menſurarum genera hypotheticæ facultati ſubdita ſint, eáque (numerorū diſcretione quauis) ſenſibus percipienda exhiberi poſſit, nō indignum feremus harum 14 præfatarū, & ſingularum quālibet quauis optata ſectione ſecari, ſiue eidem quamuis optatā partem alteri exhibitæ ſimilē (ex nona & quatuor eam ſequentibus ſexti) conferri. Nec minus eam per cuiuſlibet numeri vnitates propoſitas diſtribui, quæ omnia ſub hypotheſium incidūt varietates. Atqui vnica propoſita ſectionis, collationis, ſeu diſcretionis hypotheſi, qua aliquam harū denominemus lineam, eadem hypotheſi ſtāte, huic ſtatutæ lineæ nullam reliquarum comparādam (numerorū diſcretione) vt eadem menſura cōmunicent ad ſeinuicem, ex præoſtenſis concludemus. Quare harum incertarum denominationes ſingulis aſcriptas non ex propria & veluti ſingulari cuiuſque earum virtute vel natura pendere opinemur. Sed ex eo tantùm reſpectu ſiue ex ea habitudine, qua altera alteri, ſub eiuſdem hypotheſis ſtatuto, commēſuranda aut incommenſuranda confertur. Ea autem cui ſtatutam adaptamus hypotheſim certam vocamus, vt ab ea tanquam ab hypotheſis duce, reliquarum intelligentiam pariamus, perſpecta ipſius certæ ad reliquas ſiue per lōgitudinem aut equidem potentiam commenſurādi facultate. Nos hac de cauſa eò magis admiramur improprias illas denominationes, à Theone vel potius Zamberto & Cāpano proditas, quibus certam rationalem, reliquas verò incertas, irrationales dixerunt, cùm rationalis rationis habitum irrationalis verò rationis eiuſdem priuationem præ ſe ferant, quibus nec certa præ cæteris abundat, nec quidem incertæ plus certa priuantur. Cùm omnibus & ſingulis inter ſe omnimodè rationum conueniant habitudines ſiue reſpectus, vnius verò ad alteram licet omnimodè ſeu numeris expreſſæ non conueniant rationes: tamen ea inter eas cadit ratio, per quam & eandem rationem habere & illis tertiam mediam, ſiue quartam concedere proportionalem patitur, quod ſine ratione fieri non poteſt. Earum itaque ducem ſiue præcipuam, ideo vocat Euclides ῥητὴν, ſeu certam, eò quòd ab ea hypotheſim ſumamus, in qua quidē hypotheſi totius operis habetur intellectus. Reliquas verò per priuationē certitudinis ideo incertas dicemus, quod huius hypotheſis diſcretione (quæ quantitatis intelligentiam parit) omnino priuentur, ac earum incertarum quantitates ab hypotheticis illis diſcretis vnitatum quantitatibus, ſint penitus alienæ. Earum igitur denominationes iuxta progenierum ordinem hac apponimus.

Certæ.

Media.

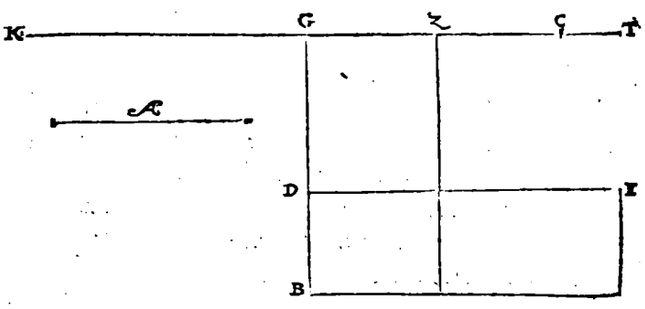
Ex binis nominibus	Apotome
Ex binis mediis prima	Mediæ apotome prima
Ex binis mediis ſecunda	Medię apotome ſecunda
Maior	Minor
Certum mediúmque potens	Cum certo medium totum efficiens
Bina media potens	Cum medio medium totū efficiens.

Conueniunt autem binomium & apotome in eo quod exceſſus maioris nominis binomij, ſupra minus fit apotome. Haud ſecus toti, apotomes congruens addita, binomium producit eiuſdem ordinis, vt conſtat ex eorum diffinitionibus. Nam maiorum nominum potentiæ, excedent ſimul minorum

potentias, commensurabili vel incommensurabili: maioráque simul aut minora simul nomina, certæ propositæ commensurabilia fient, aut neutra simul.

Propositio centesima duodecima.

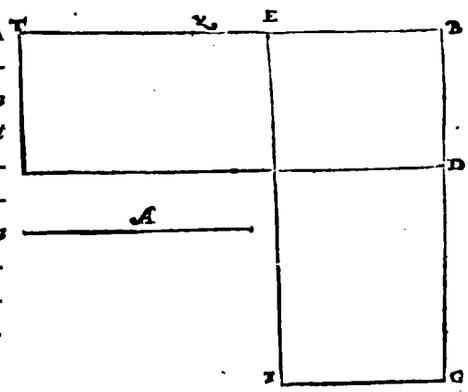
Quod ex Certa ad eam quę Ex binis nominibus comparatum, latitudinem efficit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius quæ Ex binis nominibus, & in eadem ratione. Et insuper quæ gignitur Apotome, eundem habebit ordinem ei quæ Ex binis nominibus.



Exponatur certa A, *ex binis verò nominibus sit* G B, *cuius maius nomen esto* G D, *ipsi autem* G B *constituatur (per* 45 *primi) æquũ ei quod fit ex* A, *illud* B Z *latitudinem efficiens* G Z, *ipsi verò* D B *(per eandem) æquum apponatur eidem quod ex* A, *sit q̃* B I *latitudinem efficiens* D I, *cui* D I *æqualis extendatur* G Z T: *Dico* G Z *esse apotomẽ, qualem exoptat theorema, cùm sint æqualia* B Z *&* B I, *erit reciprocè (per* 14 *sexti)* G B *ad* B D, *sicut* D I *(vel* G T *sibi æqualis) ad* G Z, *& diuisim sicut* G D *ad* D B, *sic erit* T Z *ad* Z G, *per decimamseptimam quinti. Maior est igitur* T Z *ipsa* Z G, *cùm maius sit nomen* G D, *ipsi porro* Z G *æqualis ponatur* Z C, *fiat autem sicut* T C *ad* T Z, *sic (per vndecimam sexti)* Z G *ad* Z K, *erit conuersim (per corollarium quartæ quinti)* T Z *ad* T C, *vt* Z K *ad* Z G. *Et rationis igitur conuersione, erit sicut* T Z *ad* Z C *(hoc est* Z G *sibi æqualem) ita* Z K *ad* K G, *per corollariũ decimænonæ quinti: sed fuit* T Z *ad* Z G, *vt* G D *ad* D B, *quare (per vndecimã quinti, erit* Z K *ad* K G *sicut* G D *ad* D B, *commensurabiles autem potẽtia tantùm sunt* G D D B, *nomina. Potentia igitur tantùm commensurabiles erunt* Z K K G, *per decimamtertiam huius, insuper cùm sit* T Z *ad* Z G, *vt* Z K *ad* K G, *erunt (per duodecimam quinti) omnes antecedentes* T K *ad omnes consequentes* K Z, *sicut* Z K *ad* K G. *Ipsa itaque* Z K *media proportionalis est ipsarũ* T K K G, *& ideo (per corollarium vigesimæ sexti) sicut* T K *prima, ad* K G *tertiam, sic quod ex* T K, *ad quod ex* K Z *secunda, cùm autem* B I *(æquum ei quod ex* A *certa positum) ad certam* D B *comparetur, latitudinem* D I *certam longitudine ipsi* D B *commensurabilem efficiet, per vigesimam huius, & proinde* G T *(ipsi* D I *æqualẽ) longitudine eidẽ* D B *cõmensurabilem efficiet: quia verò fuit vt* G D *ad* D B *sic* Z K *ad* K G, *vt verò* Z K *ad* K G, *sic* T K *ad* K Z, *erit (ex* 11 *quinti)* G D *ad* D B *vt* T K *ad* K Z, *& proinde quod ex* G D *ad quod ex* D B, *sic quod ex* T K *ad quod ex* K Z, *per vigesimamsecundam sexti. Commensurabile enim est quod ex* G D *ei quod ex* D B, *nominibus, quod igitur ex* T K *ei quod ex* K Z *commensurabile erit, per decimamtertiam huius, sed sicut quod ex* T K *ad quod ex* K Z, *sic fuit* T K *recta ad* K G, *commensurabilis ideo erit* T K *ipsi* K G *longitudine, & proinde ipsi* T G, *per corollarium vndecimæ huius, quæ* T G *fuit certa æqualis ipsi* D I. *Certæ igitur erunt* T K K G *longitudine inuicem commensurabiles, cùm autem* Z K *certæ* K G *sit potentia tantùm commensurabilis ostensa, ipsæ* Z K *&* K G *certæ potentia tantùm commensurabiles erunt, apotome igitur erit* G Z, *quia verò* T G *certa vtrique* D B *&* K G *longitudine fuit commensurabilis, & ipsæ* D B *&* K G *longitudine commensurabiles erunt, per decimam huius. Est autem* Z K *ad* K G *vt* G D *ad* D B, *vicissim igitur erit (per decimamsextam quinti)* Z K *ad* G D *vt* K G *ad* D B, *commensurabiles autem longitudine sunt* K G *&* D B, *& igitur* Z K *ipsi* G D *longitudine commensurabitur, per decimamtertiam huius. Commensurabilia itaque longitudine sunt* Z K K G *(nomina rectæ* G Z *apotomes) ipsis* G D D B *nominibus rectæ* G B *quæ ex binis nominibus, & in eadem ratione* Z K *ad* K G, *sicut* G D *ad* D B, *quare si* Z K *maius possit congruente* K G *à commensurabili, &* G D *ipsa* D B *maius eodem poterit, per decimamsextam huius, & si ab incommensurabili, similiter per eandem, si verò maius vel minus vnius nomen, sit propositæ longitudine commensurabile, & similiter idem alterius nomen commensurabile erit eidem propositæ, per decimam huius, si verò neutrum, & neutrũ, per corollarium secundum decimæ huius: ipsa igitur* G Z *eundem obtinebit apotomarum ordinem quem obtinuit* G B *binomium, per apotomarum & binomiorum diffinitiones. Quod itaque ex certa ad eam quæ ex binis nominibus comparatum, &c.*

Propoſitio centeſimadecimatertia.

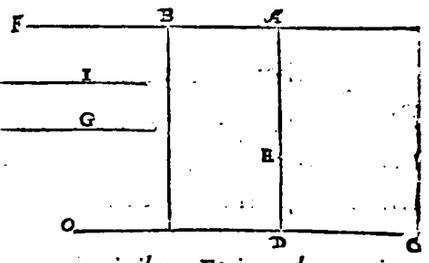
Quod ex Certa ad Apotomen comparatum, latitudinem efficit eam quę Ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt ipſius Apotomes nominibus, & in eadem ratione, & inſuper quæ gignitur Ex binis nominibus, ipſi Apotome eundem obtinet ordinem.



Eſto certa A, *apotome autem ſit* B D, *ei verò quod ex* A *æquum, ipſi* B D *comparetur* D T (*per quadrageſimamquintam primi*) *latitudinem efficiens* B T: *Dico ipſam* B T *eſſe ex binis nominibus, & inſuper qualem poſtulat propoſitum. Quia* B D *eſt apotome congruat ei* G D. *Igitur* B G G D *certæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles. Ad certam autem* B G *eidem quod ex* A *æquum comparetur, ſit ꝗ* B I *latitudinem efficiens* B E, *per quadrageſimamquintam primi. Ipſa igitur* B E *certa, longitudine ipſi* B G *commenſurabilis erit, per vigeſimam huius. Cùm autem æqualia ſint* B I *&* T D, *eidem quod ex* A *æqualia, erit reciprocè ſicut* B T *ad* B E *ſic* B G *ad* B D, *per decimamquartam ſexti. Et rationis conuerſione ſicut* B T *ad* T E *ſic* B G *ad* G D, *per coroll.* 19 *quinti vt autem* B G *eſt ad* G D, *fiat* (*per coroll. decimæ ſexti*) T Z *ad* Z E. *Erit itaque* (*ex vndecima quinti*) B T *ad* T E *vt* T Z *ad* Z E: *nam vtraque eſt ſicut* B G *ad* G D. *Erit igitur reliqua* B Z *ad reliquam* Z T *ſicut tota* B T *ad totam* T E, *per* 19 *quinti, & ideo* (*per vndecimam quinti*) B Z *ad* Z T *ſicut* T Z *ad* Z E. *Ipſa itaque* T Z *media eſt proportionalis inter ipſas* B Z *&* Z E. *Quod igitur ex prima* B Z *ad quod ex ſecunda* T Z *erit vt prima* B Z *ad tertiam* Z E, *per coroll. vigeſimæ ſexti. Cùm autem ſit ſicut* B G *ad* G D *ſic* T Z *ad* Z E. *Sicut verò* T Z *ad* Z E, *ſic fuit* B Z *ad* Z T. *Erit ſicut* B G *ad* G D *ſic* B Z *ad* Z T, *per vndecimam quinti. Commenſurabiles itaque potentia tantùm ſunt ipſæ* B Z *&* Z T, *veluti ipſæ* B G G D (*apotomes nomina*) *per decimamtertiam huius. Commenſurabiles igitur longitudine erunt rectæ* B Z Z E, *in ratione potentiarum* B Z Z T *oſtenſæ. Ac ideo* (*per corollarium vndecimæ huius*) *reliqua* B E (*certa*) *eidem* B Z *longitudine commenſurabilis erit. Et proinde* B G (*ipſi* B E *commenſurabilis*) *eidem* B Z *longitudine commenſurabilis erit, per decimam huius. cui quidem* B Z *oſtenſa fuit potentia tantùm commenſurabilis* Z T, *certæ itaque potentia tantùm commenſurabiles erunt* B Z *&* Z T *rectæ. Tota igitur* B T *ex binis erit nominibus, per* 36 *huius. Cùm autem ſit vt* B G *ad* G D *ſic* B Z *ad* Z T. *Erit viciſſim* (*per* 16 *quinti*) B G *ad* B Z *ſicut* G D *ad* Z T. *Commenſurabilis verò eſt* B G *ipſi* B Z *longitudine. Et igitur* (*per* 13 *huius*) G D *ipſi* Z T *longitudine commenſurabilis erit. Nomina itaque* B G *&* G D *apotomes* B D, *commenſurabilia ſunt longitudine nominibus* B Z *&* Z T *ipſius* B T *quæ ex binis nominibus, & in eadem ratione* B Z *ad* Z T *ſicut* B G *ad* G D, *vt latius patuit. Quòd autem ſint eiuſdem ordinis. Si maius aut minus nomen ipſius apotomes, ſcilicet recta* B G *aut* G D, *expoſitæ alicui fuerit commenſurabile longitudine, & maius idem vel minus ſcilicet* B Z *aut* Z T, *eidem* (*per decimam huius*) *expoſitæ commenſurabitur. Siquidem neutrum apotomes, & neutrum eius quæ ex binis nominibus, per ſecundum coroll. decimæ huius. Si verò maius* B G *plus poſſit minore à commenſurabili, & maius* B Z *plus poterit minore à commenſurabili, ſiquidem ab incommenſurabili, & ab incommenſurabili, per decimamſextam huius. Quod igitur ex certa ad apotomen comparatum, latitudinem efficit eam quæ ex binis nominibus, &c.*

Propoſitio centeſimadecimaquarta.

Si areola comprehendatur ſub Apotome & ea quæ Ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt ipſius Apotomes nominibus, & in eadem ratione, Quæ areolam poteſt, Certa eſt.



Areola namque D B *comprehendatur, ſub apotome* A B, *& ea quæ ex binis nominibus* A D. *Cuius nomina* A E E D *ſint longitudine commenſurabilia, nominibus ipſius* A B *apotomes, quæ ſint* A F F B. *Sintque in eadem ratione* A E *ad* E D *vt* A F *ad* F B. *Poſsit autem areolam* D B *recta* 1: *Dico* 1 *certam eſſe. Exponatur certa* G, *ei verò quod ex* G *æquum ipſi* A D *conſtituatur (ex quadrageſimaquinta primi) latitudinem efficiens* D C. *Erit* C D *(per* 112 *huius) apotome, cuius nomina ſcilicet* C O O D *erunt commenſurabilia ipſis* A E E D *nominibus. Et in eadem ratione* C O *ad* O D *vt* A E *ad* E D. *Sed ſicut* A E *ad* E D, *ſic eſt (ex hypotheſi)* A F *ad* F B. *Sicut igitur* C O *ad* O D *ſic eſt* A F *ad* F B. *Commenſurabiles igitur ſunt* C O O D *ipſis* A F F B, *per decimam huius. Reliqua igitur* C D *ad reliquam* A B *erit (per decimamnonam quinti) ſicut* C O *ad* A F. *Commenſurabilis autem fuit* C O *ipſi* A F, *commenſurabilis igitur erit* C D *ipſi* A B. *Quare (per primam ſexti)* C A *ipſi* D B *commenſurabile erit. Certum autem fuit* C A *(ex certa* G *per conſtructionẽ) certum igitur erit* B D, *per 9 diffinit. Ipſa itaque* 1 *illud* B D *potens (ex hypotheſi) certa erit, per ſextam diffinitionem. Si igitur areola comprehendatur ſub apotome, & ea quæ ex binis nominibus, &c.*

MONITVM.

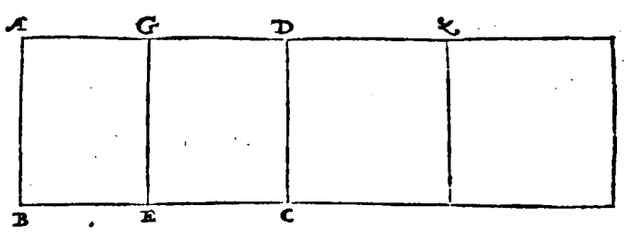
Cogimur his tribus proximis prioribus demonſtrandis, alia vti figurarum pictura. Cùm enim Campanus has non meminerit, Zambertus verò eoúſque deprauatas tradidit (Theonis figuras aſſumens) quod potius tranſcripſiſſe quam eas intellixiſſe videatur. Quare figuras rectangulis ornatas, iuxta propoſiti naturam, intellectu faciliores lineis rectangula ſupponentes, nouas ferè demonſtrandi rationes præ ſe ferentes contulimus.

Corollarium.

Ab hac & 25 27 31 34, ac earum ſingulis colligemus, certam aream ſub incertis poſſe comprehendi lineis.

Propoſitio centeſima decimaquinta.

A Media infinitę numero fiunt incertę, neque vlla vlli earum, quæ prius eſt eadem.



Eſto media A G: *Dico ab ipſa* A G *infinitas numero oriri incertas lineas, quarum nulla prioribus decimatertia ex poſitis eſt eandem. Sit certa* A B, *ſub* A B A G *verò contineatur* B G. *Illud itaque* B G *incertum erit, per corollarium* 21 *huius: poſsit autem ipſum* B G *recta* G D, *per* 14 *ſecundi: quoniam quod ex* G D *ad certam* A B *proiectum, latitudinem efficit* A G *mediam: illud quod ex* G D *(incertũ) nulli præfatorum* 13 *eſt idem. Nam ſingulæ ad certam comparatæ potentiæ, aut certam, aut ex binis nominibus, aut equidem apotomen, efficiunt latitudinem, non autem mediam, per vigeſimamſecundam, ſexageſimam, & quinque eam ſequentes, nonageſimamſeptimã, & quinque eam ſequentes, huius: quia igitur* B G *efficit latitudinem mediam, illud nulli eorum quæ prius idem erit. Singulis igitur incommenſurabile erit, quod ex* G D, *quare recta* G D *illud potens, ſingulis reliquis* 1 Z 1 M *potentia incommenſurabilis erit. Rurſus ſub eadem* A B *&* G D *cõtineatur* G C, *illúdque* G C *poſsit recta* D Z: *quoniam quod ex* D Z *ad certam proiectum latitudinem efficit* G D, *ſingulis præfatis incommẽſurabilem, & ab ipſis igitur alienam. Illud idem quod ex* D Z *(hæc eſt* G C) *reliquis incommenſurabile erit potentia, per primam ſexti, eſt enim ſicut* A G *latitudo ad* G D *latitudinem, ſic* B G *potentia ad* G C *potentiam, ſub eodẽm vertice. Si igitur incommenſurabiles fuerint potentiæ, & illas potentes incommenſurabiles erunt (fortiori argumento) longitudine, per illationem nonæ huius. Quæ igitur hac ſerie infinitæ*

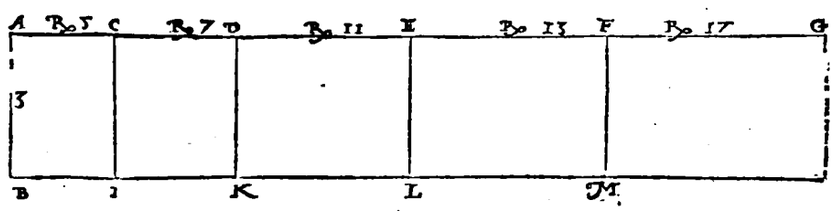
produc

producentur vt C Z & reliqua quotcunque ſimili argumẽto ſingulis præfatis, ac ſibiipſis erunt diuerſa. A media itaque infinitæ numero, fiunt incertæ, &c.

MONITVM.

Vnde autem orta ſit harum incertarum (quæ ſaltem ſenſibus deprehendi poteſt) intelligentia, monito vigeſimæprimæ huius, aliqua ceperamus exponere, quæ cùm huius theorematis plus adhæreant negocio: Dicemus incertarum magnitudinum agnitionem, à numeris deductam, eo quidẽ argumento quo contrariorum eadem ſit diſciplina. Cùm enim numeri ſint hi, quibus ſolis quãtitatum capacitas ſenſibus humanis eorum diſcretione adaperitur. Inter harum autem diſcretionum (quæ vnitates numerorum dicuntur) interualla, plures incidunt ipſius quantitatis ſectiones, numerorum illorum vnitatibus exprimi non valentes, cùm extra illarum vnitatum quæcunque interualla incidant. Quas tamen enunciare volentes arithmetici (ne quidquam eis intactum foret) per numerorum radices hypotheticas ſeu ſuppoſitas illas exprimere conati ſunt: ſuppoſitas quidem ideo diximus, quod hi numeri nullas earum radicum ſibi patiantur aſcribi, præterquam ex hypotheſi, qua hypotheſi eiuſdem nominis radices, quibuſuis dederunt numeris, cuius numeri verè eas radices habentes, ſuas denominarunt, quarum aliæ cenſicæ ſeu quadratæ, aliæ cubicæ, ſurdæ, ſolidæ, &c. quæ licet tantùm propriis quibuſdam adhæreant numeris, non autem quibuſlibet. Tamen arithmetici, quibuſuis & ſingulis eas aſcribentes, omnes ea radicalium numerorum (quos ſurdos nuncuparunt) denominatione, ſectiones illas quantitatum (quæ vnitatibus numerorum ipſis quantitatibus applicatorum exprimi non valebant) denunciauerunt.

Ab hac autem denominatione ortæ ſunt linearum ac arearum quantitates, quæ mediæ 21 huius dictæ ſunt, quas hac figura ſibiipſis incommenſurabiles, necnon infinitas à ſeipſis diuerſas conſtitui facillimum oſtendemus. Eſto recta A B, *cuius quãtitas radice quadrati numeri exprimatur, ſcilicet radice 9 quæ ſit 3. Reliquæ verò rectæ* A C C D D E E F *& F G ex-*

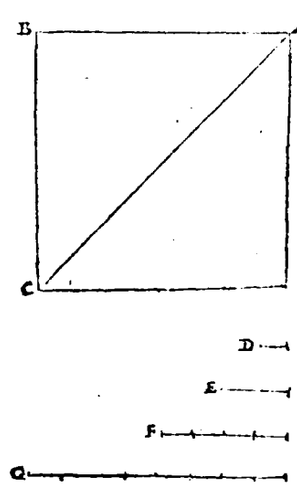


primantur radicibus non quadratorum numerorum, nec ſimilium inter ſe planorum: quorum infiniti ſumentur (ex corollario 26 octaui) & ex quadratorum ſerie monito 29 huius deſcripta: ſintque H I *Res numeri 5. Res 7. Res. 11. Res 13. & Res 17. & quotuis alij. Cùm enim qui ex* A B *quadratus ſit, reliqui verò qui ex* A C C D D E E F F G *non quadrati, ipſi ad eum qui ex* A B *rationem quadratorum non habebunt, per corollarium 25 octaui, ſingulæ igitur ipſarum, rectæ* A B *potentia tantùm commenſurabiles erunt, per nonam huius, & certæ, per ſextam diffinitionem huius, media igitur fient (per vigeſimamprimam huius)* B C I D K E L F M G: *& reliqua quotcunque, quæ ad ſe ſunt vt rectæ* A C C D D E *&c. ſed cùm qui ex* A C C D D E *&c. quadrati numeri, ſint diſſimiles plani ex hypotheſi, earum latera* A C C D D E *&c. ſunt longitudine incommenſurabiles rectæ, & ideo* B C I D K E L F M G *&c. (ipſis rectis eandem rationem per primam ſexti habentia) incommenſurabilia erunt, per 13 huius, & proinde, rectæ illa rectangula potentes (à fortiori) longitudine incommenſurabiles erunt, cùm ſint potentia per illationem nonæ huius, infinita igitur oſtendimus media ſibi inuicem incommenſurabilia, ac à ſeipſis diuerſa, quod autem attinet ad binomia, quæ ex binis certis potentia tantùm commenſurabilibus coniunctis fiunt, Dicemus harum incertarũ originem à linearum natura ſic compoſita primũ naſci, quæ quidem lineæ quadrata deſcribunt earum ſequentia naturam, ſecus in medio, cuius intelligentia primũ à rectangulo binis certis comprehenſo inchoata fuit, quæ quadratum producens latus, lineam ſui naturam ſequentem generat, quare hæc ſimplex: reliquæ verò quæ ab additione linearum procedunt, compoſitæ vocantur incertæ, vt exemplo, ſi copulentur latera quadratorum rationem 9 ad 7 habẽtium, ea copulata rectam ex binis nominibus procreant, cùm ſint rectæ potentia tantùm commenſurabiles, quam arithmetici denũciare cupientes, vnico numero denominare nequeunt, ſed periphraſi quadam, rem 9 plus rem 7 nuncupant, hoc eſt radicem 9 radici 7 coniunctam, vtuntur tamen ſigno augmẽti huius figuræ (Rad. 9 + Rad. 7) quemadmodum apotomen quæ eiſdem conſtat nominibus, ſed per detractionem ſigno decrementi enunciant, veluti Rad. 9 − Rad. 7. hoc eſt res 9 à qua tollẽda ſit res ipſius 7, vt tandem ſuperſit reſiduum, quod apotome dicetur, in eo tantùm itaque hæ duæ incertæ differunt denominationes (ſcilicet*

plus & minus) vt Rad.9 plus Rad.7 & Rad.9 minus Rad.7. Quarum (vt diximus in mediarũ genitura) totidem infinitæ producentur ſpecies, ſibi inuicem incommenſurabiles, quot eas generantes producentur diſſimilium planorum varietates, quæ autem binomij 36 huius & quinque eam ſequẽtibus exponuntur comites, per ſurdorum additionem (binomij inſtar) componuntur. Quæ verò apotomes fiunt comites, 73 & 5 eam ſequentibus, per earum linearum detractionem generantur, quæ prius compoſitæ priores ſex genuerũt, eodem ſeruato ordine, nullam præter additionis & detractionis ferentes diſcrepantiam. Quas quidem 13 numero, arithmetici prolixiori longè opera, his numeris ſurdis (quos algebricos, ſeu coſſicos nuncupant) exprimere ſingulas conantur. Re igitur noſtra contenti id curæ relinquemus illis exequendum. Hinc tantùm colligentes, harum incertarum quantitates, nihil aliud eſſe quàm ſectiones certarum quantitatum, quæ inter vnitatum certarum diſcretionem incidunt, eo quidem termino qui nullis ipſarum certarum, infinito etiam decremento multiplicatis vnitatibus referri poteſt, ſed eiſdem certarum vnitatibus, ſectiones illæ ac vnitates eas metientes, perpetuò incommenſurabiles exiſtunt, quas ea de cauſa denominatione qualibet quantitatis priuatas fuiſſe iam antea diximus, quod intemeratam illam vnitatis integritatẽ ſectione violare conatæ ſint. Vnde meritò ſurdæ dictæ ſunt, tanquam ab expreſsis ſiue determinatis quantitatibus alienæ, ac expoſæ haberi debeant.

Propoſitio centeſimadecimaſexta.

Propoſitum ſit nobis oſtendere in quadratis, dimetientem lateri longitudine incommenſurabilem eſſe.



Eſto quadratum ex A B, *cuius dimetiens ſit* A C: *Dico* A B *latus dimetienti* A C *longitudine incommenſurabile eſſe, quoniam* A B *&* B C *ſunt æquales, duplum eſt quod ex* A C *eius quod ex* A B, *per 47 primi. Dentur (ex ſecunda octaui) quotcunque numeri ab vnitate proportionales, in præfata quadratorum* A B *ad* A C *ratione, ſint q.* D E F G, *quoniam primus ab vnitate ſcilicet* E *non eſt quadratus, cùm ſit primus, nec (per decimam noni) alius vllus (exceptis tertio ab vnitate & vno relicto omnes) quadratus erit. Ea itaque ratio* D *ad* E, *vel* E *ad* F *aut* F *ad* G, *cadet inter quadratum & non quadratũ numeros, quare per coroll.25 octaui, ea nõ erit ratio quadrati numeri ad quadratum numerum, nec igitur quadrata ex* A B *&* A C (*eam rationem habentia*) *rationem habebunt quadratorum numerorum, nec proinde latera (*A B *latus &* A C *dimetiens) erunt longitudine commenſurabilia, per 9 huius. Oſtendimus itaque dimetientem lateri in quadratis longitudine incommenſurabilem eſſe.*

MONITVM.

Huius locum ſelegit Campanus poſt ſeptimam huius (ſanius quidem) loquens de lineis, quæ licet ſint longitudine incommenſurabiles, tamen earum potentiæ ſiue quadrata inter ſe commenſurabilia exiſtunt, & ideo inter certas enumerandæ ſunt. Inſuper bina data opera omiſimus ante hanc propoſitionem theoremata, ab altero tantum Græcorum exemplarium tradita, vel potius repetita, id quidem fruſtra, cùm ſint eadem eis quæ 105 & 106 iam demonſtrata ſunt, inſuper huius propoſitionis demonſtrationem corollario octauæ octaui breuiſſimè concluſimus, ſed nõ ideo dedignati ſumus huic loco, Euclidem ſequuti, apponere, licet eam pluribus aliis argumentis demonſtrare potuiſſemus. Sed quia libris ſequentibus de incertis rectis figuras planas ingredientibus quandoque loquetur, huius longitudinem incertam hac vltima exponere cœpit.

LIBRI DECIMI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO-num reſtitutarum Liber vndecimus.

Diffinitio prima.

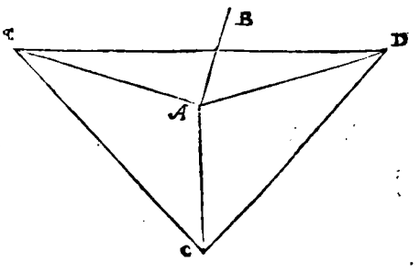
SOlidum eſt quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet, ſolidi verò termini ſunt ſuperficies.

Tertium quantitatis genus diffinit Euclides. Primum quidem fuiſſe lineam, quæ longitudinem tantùm habet. Secundùm verò ſuperficiem, quæ binas dimenſiones ſeſe ad rectos dirimentes habet, ſcilicet longitudinem ac latitudinem. Tertium igitur erit, Solidum tribus menſuris dimenſum ſeſe inuicem ad rectos angulos ſecantibus, longitudine, latitudine, ac ſublimitate, quam alij craßitudinem, profunditatem, ſeu denſitudinem nuncupant, quorum intercapedinem nihili faciemus, Cùm illæ tres dimenſiones tres ſint tantùm longitudines, ſeſe ad angulos rectos dirimentes in eodem ſubiecto, quod ideo ob tres illas dimenſiones quibus menſum eſt, ſolidum dicitur, præter illud alia quantitas plures dimenſiones habere regulares non poteſt. Nam ad idem ſignum plures tribus lineis ad rectos ſeſe ſecantes concurrere non poſſunt. Conuerti itaque poterit hæc diffinitio, vt quæcunque fuerit ſubiecti natura tribus illis dimenſionibus ornata, ſolidum dici poßit. Quod quidem ſolidum ſimiliter dicemus terminari ſuperficiebus (ac ſuperficiem lineis, lineam verò ſignis terminari antea diximus) ſub quæ ipſarum clauſura contineri, illud præter reliqua quantitatis genera ſibi aſſumens. Nam ſuperficies tantùm finita non concluſa eſt lineis, linea verò terminata non autem menſa, nec quidem concluſa ſignis. Solidum autem ſuperficiebus terminatum, concluditur eiſdem.

Diffinitio ſecunda.

Recta linea ad planum recta eſt, quando ad omnes ipſam tangentes rectas in ſubiecto plano exiſtentes, angulos rectos efficit.

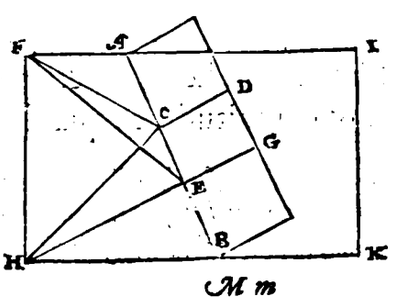
Veluti ſi ad planum C D E *erigatur recta* A B *eo ſitu quo quælibet rectæ in ipſo plano ductæ ipſam* A B *tangentes cum illa angulos rectos efficiunt, vt lineæ* A C A E A D, *tunc recta* A B *dicetur recta ad illud planum* C D E, *eò quòd à contactu plani quælibet in plano rectæ, ad ipſam rectos concludant angulos, hæc methodum concipit à decima primi diffinitione, cùm idem agat in ſuperficiem hæc, quod prior in lineam, ſcilicet vtraque vtrobique rectos angulos.*



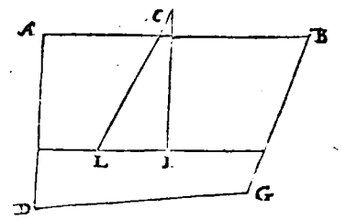
Diffinitio tertia.

Planum ad planum rectum eſt, quando ſuper communi ſegmento eorum planorum perpendiculares in vno eorum planorum exiſtentes, reliquo plano ad angulos rectos fuerint. Rectæ verò lineæ ad planum inclinatio eſt angulus acutus contentus ſub ipſa recta linea, & alia recta in plano ducta ab inclinante per ſignum in quod cadit perpendicularis, à ſublimi termino inclinantis demiſſa.

Binas hac vnica complectitur diffinitiones. Priore enim bina ſupponit plana vt A D G B *&* F I K H, *quorum planorum commune ſegmentum eſt recta* A B, *quæ quidem* A B *in vtroque eorum planorum extenditur: ſi igitur in altero eorum planorum ad ipſam* A B *demittantur perpendiculares* D C G E. *Illæ* D C G E *reliquo plano* F I K H *ad angulos rectos (ſiue rectæ) fuerint. Tunc planum* A D G B *ad planum* F I K H *rectum eſſe dicetur, hoc eſt,*



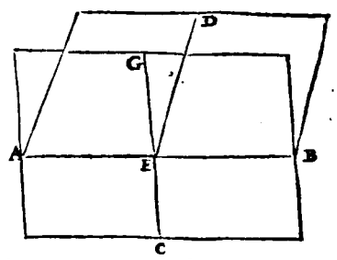
planum ſuper planum conſiſtens, vtrobique angulos efficiet æquales, vt diximus decima diffinitione primi de lineis. Quod ideo per lineas exponimus quia lineæ angulos efficiunt, non autem ſuperficies, ſed tantùm lineæ in ipſis deſcriptæ. Inclinationem verò rectæ lineæ C L *ad planum* A B G D *eſſe dicemus, angulum acutum,* C L I *qui quidem fit à recta* C L *& alia* L I *in plano* A B G D *ducta. A recta* C L *inclinante per ſignum* I *in quod cadit perpendicularis ipſi plano, à ſublimi termino* C *rectæ inclinantis* C L *demiſſa, qui angulus* C L I *neceſſariò fit acutus. Nam rectus exiſtens* C I L *(ex conſtructione) æquus erit binis* C L I L C I *angulis, cum tres trianguli anguli binis æquipolleant rectis, per trigeſimam ſecundam primi, ipſe igitur* C L I *minor recto* C I L, *acutus erit (ex diffinit.) qui dicetur inclinatio lineæ* C L *ad planum* A B G D.



Diffinitio quarta.

Plani ad planum inclinatio eſt, angulus obliquus comprehenſus ſub his quę ad angulos rectos communi ſegmento ad idem ſignum ducuntur, in vtroque ipſorum planorum.

Angulum obliquum ideo dicimus, cũ quandoque acutus quandoque verò obtuſus exiſtat, ea lege qua linearum inclinatio angulum planum efficere dicta fuit, octaua diffinitione primi, vera etenim inclinatio ea eſt quæ lineas à recta recedere cogit. Ideo etenim obliquum dicimus angulum, vt à recto ſemper differat planum rectum conſtituente, vt ſi planum A D B *ad planum* A G B C *inclinari dicamus, cùm perpendiculares ductæ* D E G E C E *ad commune ſegmentum planorum (quod ſit* A B*) atque ad idem ſignum* E, *ſiquidem rebus ſic diſpoſitus angulus* D E G *ſit acutus,* D E C *verò obtuſus erit, planum* A D B *ad planum* A G B C *inclinari dicetur, & è conuerſo* A G B C *ad planum* A D B: *ſi verò anguli* D E G *&* D E C *recti fuerint, planum ad planum rectum erit. Nam lineæ* E D E G E C *in ipſis planis ad rectos cum communi* A B *ſegmento conſtitutæ (planorum motu) inclinationem aut planorum rectitudinem exprimunt: quare ea anguli* D E G *vel* D E C *quantitas, planorum dicetur inclinatio.*



Diffinitio quinta.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando prædicti inclinationum anguli ſibi inuicem ęquales fuerint.

Propoſitio ſexta.

Parallela plana ſunt, quę vndique producta contactum non admittunt.

Hæc nulla eget expoſitione, ſed additione hac (quæ vndique producta) egebat, nam ſi parallela dixiſſemus tantùm, quæ contactum non admittunt, falſam ederemus hanc diffinitionem. Si itaque vndique producta contactum non admittant verè parallela erunt.

Diffinitio ſeptima.

Similes ſolidæ figuræ ſunt, quę ſub ſimilibus planis, & multitudine ęqualibus continentur.

Diffinitio octaua.

Similes ſolidæ figurę & ęquales ſunt, quę ſub ſimilibus planis, multitudine & magnitudine ęqualibus, continentur.

Hanc ſolidorum ſimilitudinẽ à ſimilitudine planorũ ac eorũ æqua multitudine ſumit, non à laterum proportione veluti figuras planas, prima ſexti diffinit. ſumpſit. Nam in figuris binæ rectæ tantũ angulum planum efficiunt, in ſolidis verò plures duabus neceſſe eſt concurrere, vt angulum ſolidum

comp

componant, vt proximo videbimus. Quare licet eadem diffinitione, qua figuras planas has ſolidas ſimiles dixiſſe potuiſſet, ſcilicet eas quarũm quæ circum æquales angulos latera ſunt proportionalia, attamen ob rationum multitudinem multitudine laterum generatam, & ideo confuſam quodammodo, earum ſimilitudinem breuius ſub planorum ſimilitudine, & æqua multitudine concluſit, æqualitatem verò addita planorum æqualitate poſtremo diffiniuit.

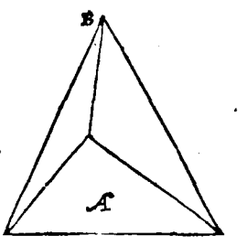
Diffinitio nona.

Angulus ſolidus eſt, qui ſub pluribus duobus planis angulis ad idem ſignum conſtitutis in eodem plano non exiſtentibus comprehenditur.

Cũ omnis angulus planus ſit linearũ cõcurſus, ſolidus verò ſit planorũ angulorum concurſus, qui quidem præ ſe lineas ferentes, linearum concurſum ſimiliter efficiunt, quare alteram tantũ Theonis ſumemus diffinitionem, qua per planorum concurſum expoſuit, reliquam minus dignam omittẽtes, qua ſcilicet per lineas plures duabus concurrentes diffiniuit ſolidum angulum. Planos item angulos in eodem plano conſtitui vetat, non eſſet enim angulus, ſed ſuperficies.

Diffinitio Decima.

Pyramis eſt figura ſolida comprehenſa planis ab vno plano ad vnum ſignum conſtitutis.

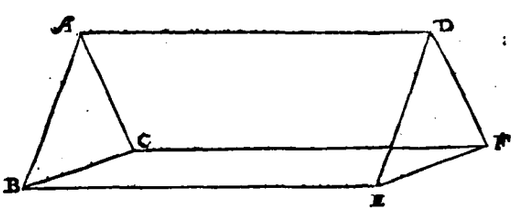


Pyramis.

Quoniam ab vno plano ad vnum ſignum præcipit tendere reliqua plana Pyramidem concludentia, manifeſtum erit omnia conſtituta plana neceſſariò triangula eſſe, dempto ſuppoſito à quo tendũt in ſignum reliqua, illud verò demptum cuiuſuis erit figuræ, iuxta Pyramidis hypotheſim, quæ ab eo plano denominationem concipit, vt à pentagono pentagona, ab exagono exagona, à quadrangulo quadrangula, à trigono trigona, vt A B.

Diffinitio vndecima.

Priſma eſt figura ſolida quinque planis comprehenſa, quorum duo ſunt triangula, ſimilia æqualia, & parallela, Reliqua verò parallelogramma.



Super hac diffinitione diſſentiũt Theon & Cãpanus, ſed præualet Campani intellectus. Nam Theon ſub Priſmatis nomine cuncta comprehẽdit parallelepipeda. & plures lateratas colũnas, quod maximè obeſt futuris demonſtrandis, quare particularem Priſmatis diffinitionem ſumẽtes, Priſma eſſe dicemus figuram ſolidam, quinque planis tantùm comprehenſam, quorum duo ſunt triangula, æqua, ſimilia, & parallela, reliqua verò parallelogramma, vt exemplo A B C *&* D E F *ſint triangula* A F A E *&* C E, *ſint parallelogramma. patet ex diffinitione parallelogrammi, triangula* A B C *&* D E F *eſſe neceſſariò æqualia, ſcilicet æquis leneis contenta, & parallela cùm fiant ex oppoſitis parallelogrãmorum lateribus, & igitur ſimilia, quæ omnia neceſſariò pendent à poſitione trium parallelogrammorum, huic fauet* 40 *huius.*

Diffinitio duodecima.

Sphæra eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno ſigno intus exiſtẽte, omnes rectæ lineę ductæ ſunt æquales. Sphęrę autẽ deſcriptio eſt, circunductio ſemicirculi manente eius demetiente, quoad vnde cœpit redeat.

Quoniam omnium ſolidorum perfectiſſimum eſt Sphæra, ipſi duplicem non dedignamur conferre expoſitionem: priori etenim veram eius ſubſtantiæ diffinitionem expreſſimus, cùm diffinito admodum conuertibilem. Poſteriori verò eius deſcriptionem diffiniuimus, qua lege deſcribenda ſit planè

demonſtrantem: quia Theon ac Campanus Sphæræ ſolam deſcriptionem, non autem propriam ſubſtantiæ naturam depinxerunt, deſcriptioni eam quam ex potiſſima geometriæ ſententia ſuſcepimus diffinitionem præfecimus, quæ quidem naturæ huius ſolidi perfectionem, ea linearũ ab vnico ſigno prodeuntiũ æqualitate, ac inſuper vnicæ illius admirabilis faciei æqua vndique flexione, tanta ſolertia ſolidum concluſit, vt perfectionis eius regularitas, nulla angulorum ſiue laterum fractura maculanda ſit, ſed ineffabilis illius æternæ eſſentiæ initio exitúque carentis, aliquam præ ſe ferat imaginem.

Diffinitio decimatertia.

Centrum Spheræ eſt ſignum in Sphera conſtitutum, à quo omnes rectæ ad ſuperficiem ductę ſunt ęquales, & illud quod & ſemicirculi deſcribentis.

Diffinitio decima quarta.

Dimetiens Spheræ eſt recta linea per centrum acta, ex vtraque partæ ſuperficie Spherę terminata.

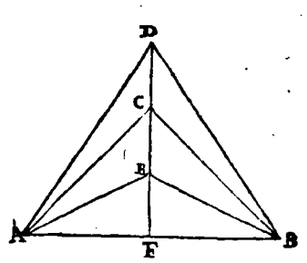
Diffinitio decimaquinta.

Axis Spherę eſt dimetiens illa quieſcens, circum quam Sphera mouetur.

Vt diffinitiones quaſi partium Sphæræ iuxta naturæ earum ordinem diſponamus, harum trium ſeriem à Theone traditam variare cogimur, vt quod prius natura fuit, prius incedat ordine: Nam centrum prius fuit dimetiente, cum enim per centrum agatur dimetiens, id eius & locum, & naturam indicat. Axem verò præcedet dimetiens, cum dimetientium quæ in Sphera deſcribi poſſunt, vnica ſit axis dimetiens, ea ſcilicet quæ quieſcit, generalius igitur eſt dimetientis nomen, axis nomine quod quidem ſolius motus videtur eſſe relatiuum, Dimetiens verò Sphæræ quantitatem indicat cuius eſt præcipuum geometriæ negotium.

Diffinitio decimaſexta.

Conus eſt figura ſolida tranſitu rectanguli trianguli deſcripta, manante vno eorum quę circa rectum angulum latere, donec in idem vnde ſumpſerat exordium voluatur, & ſi manens recta linea ęqua fuerit reliquę circa rectum angulum circũductę, rectangulus erit Conus, Si verò minor, Ambligonius, Si autem maior Oxigonius.



Campanus hanc figuram Pyramidem dixit rotundam, attamen cum huius à Pyramide longè diſtet deſcriptio, necnõ & natura ob eius regularem eſſentiam, videtur eam Theon rectæ ſeorſum diffiniſſe. Hæc enim vnico rectanguli trianguli motu, Pyramis verò planorum applicatione diſcribitur. Quoniam autem Conorum tres diffinit ſpecies, rectangulum ſcilicet, vt A C B *Ambligonium verò vt* A E B, *Oxigonium autem vt* A D B, *Cùm enim trianguli rectanguli* A C F *latera, ſcilicet* C F *manens, &* A F *circunductum, ſint æqualia, æquales erunt* A C F C A F *anguli, per quintam primi, & dimidium efficiunt anguli* A F C *recti, per 32. primi, ſimiliter & trianguli* B F C, *ipſi* A F C *æquales, Totus igitur* A C B *(qui ad Coni verticem) rectus eſt, eò quidem quòd recta* C F *manens, circunducta* A F *(in* F B*) ſit æqualis. Si verò manens vt* E F *ſit minor circunducta* A F, *angulus* A E B *maior erit recto* A C B, *per vigeſimamprimam primi. Quare* A E B F *Conus Ambligonius dicetur. Siquidem manens* D F *ſit maior circunducta* A F, *angulus* A D B *(per eandem) minor erit recto* A C B, *& proinde Oxigonius dicetur* A D B F *Conus.*

Diffinitio decimaſeptima.

Axis Coni eſt manens recta circa quam triangulũ vertitur, Baſis autẽ eſt circulus

circulus à reliquo latere angulum rectum continente circunducto deſcriptus.

Diffinitio decimaoctaua.

Cylindrus eſt figura ſolida tranſitu rectanguli parallelogrammi deſcripta, quieſcente vno eius latere donec in idem vnde ſumpſerat, exordium reuoluatur.

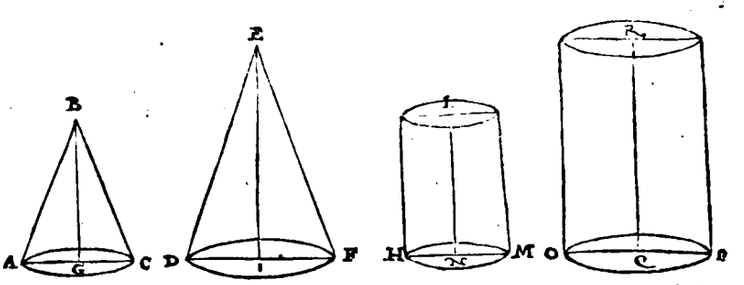
Diffinitio decimanona.

Axis Cylindri eſt manens recta circa quam parallelogrammum voluitur, Baſes autem ſunt circuli à rectis (angulum rectum cum ſtante continentibus) circunductis, deſcripti.

Ex his binis Cylindri diffinitionibus conſtat, Cylindrum duobus circulis æqualibus ac parallelis vnaque facie curua contineri, cum æquales & in quauis motus parte parallelæ ſint rectæ eos circulos deſcribentes. Ac inſuper axis Cylindri ad vtráſque baſes recta erit linea. Nam ad omnes rectas eam tangentes in baſi deſcriptas rectos efficient angulos. Similiter & Coni axis ad ipſius baſim eadem de cauſa recta erit linea.

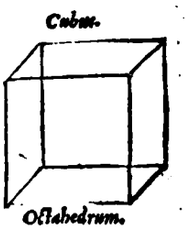
Diffinitio vigeſima.

Similes Coni & Cylindri ſunt, quorum axes & baſium dimetientes ſunt proportionales.



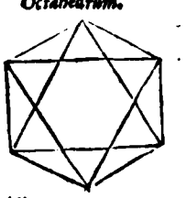
Similitudinem Conorum ac Cylindrorũ ponit in proportione rectarum, ex quibus oriuntur. Nam ex dimetientibus baſium oriuntur eorum ſolidorum binæ dimenſiones, ſcilicet quæ longitudinis & latitudinis vice funguntur. Ex axibus autem reliqua naſcitur, ſcilicet quæ ſublimitatis locum obtinet. Cùm igitur fuerit ſublimitas B G *Coni ad ſublimitatem* E I *alterius Coni, vt* A C *dimetiens (hoc eſt, longitudo & latitudo) ad* D F *dimetientem, Coni* A B C G *&* D E F *erunt ſimiles. Haud ſecus in Cylindris, ſi fuerit* L N *ad* R Q, *vt* H M *ad* O P, *Cylindri* H L M N *&* O R P Q *erunt ſimiles, vt latius poſthac dicturi ſumus.*

Diffinitio vigeſimaprima.



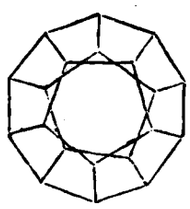
Cubus eſt figura ſolida, ſub ſex quadratis contenta baſibus.

Diffinitio vigeſimaſecunda.



Octahedrum eſt figura ſolida, ſub octo æquilateris triangulis ſibi inuicem æqualibus comprehenſa.

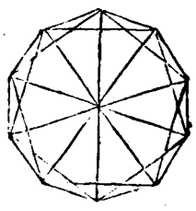
Dodecahedrum.



Diffinitio vigesimatertia.

Dodecahedrum est figura solida, sub duodecim quinquangulis equiangulis, & equilateris sibi inuicem equalibus comprehensa.

Icosahedrum.



Diffinitio vigesimaquarta.

Icosahedrum est figura solida, sub viginti equilateris triangulis sibi inuicem æqualibus comprehensa.

Diffinitio vigesimaquinta.

Solidum parallelepipedum est figura solida sub quadrangulis planis, quorum que ex opposito sunt parallela comprehensa.

Huic fauebunt ferè omnes de parallelepipedi natura loquentes.

Diffinitio vigesimasexta.

Figura solida in figura solida inscribi dicitur, quando inscriptę figurę anguli simul angulos, aut simul superficies, vel simul latera circunscriptæ tangunt.

Diffinitio vigesimaseptima.

Figura solida figuræ solidæ circunscribi dicitur, quando circunscriptæ figuræ anguli simul, latera simul, aut superficies simul, angulos inscriptæ tangunt.

Figuras planas figuris planis inscribi ac circunscribi diffinitionibus quarti docuimus, Cum autẽ agendum sit de solidis longè a planis figuris distantibus natura, eorum inscriptiones paulo à planorum inscriptionibus discrepantes diffiniemus, inscriptiones etenim (æque planorum, & solidorum) ad regularium figurarum tantum intelligentiam conferuntur, Irregularium etenim infinita multitudo, inscribendi normam sua confusione respuit. Cum autem regularium solidorum latera, bases & anguli, sub diuersis contineantur numeris, perspicuum est angulos inscriptæ figuræ angulis circumscriptæ lateribus aut basibus coniungi non posse quandoque, sed & quandoque posse, Eo autem ordine, quo simul interiores anguli latera exterioris tangant, vel simul angulos, vel equidẽ simul bases, non tamẽ omnes, cũ sæpius inscriptæ tanta multitudine angulorũ careant qua circunscriptæ ornatur laterũ, basium aut angulorum multitudine, vel è contra. Attamen ea inscriptione interiores exterioribus simili penitus cõtactu adhærebunt, similiaque vacua excessuum circunscriptis relinquent, vt fauente Supero decimo quinto ostensuri sumus, alias inscriptiones similes & æquales excessus non relinquentes, irregulares essent, ob eorum excessuum discrepantiam, veluti cum Cubi latera secant bases circunscripti Octahedri, ac plures alie regulatam inscribendi normam refragrantes. Solas igitur regulares eas dicemus, quæ similes & æquales figuræ circunscriptæ relinquũt excessus vndique.

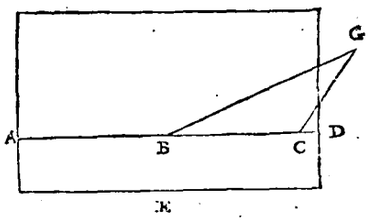
MONITVM.

Quoniam diffinitionibus huius vndecimi; aliqua transposita, quædam verò paulum obscura siue confusa, (vitio temporis vt arbitramur) tradita sunt, quam proximè Theonis voces imitantes, iuxta veriorem sequentium theorematum intelligentiam, ac solidorum considerantes proprium, diffinitiones

finitiones has digeſsimus, vt omni prorſus ambiguitate, ſolute eorum quæ ſubſequuntur demonſtrationi faueant, vt diffinitione quarta, plani ad planum inclinationem ſub angulo obliquo non autem tantum ſub acuto diffiniuimus, vt quondam ſolidorum regulariũ planis conſtruendis quilibet obliquus non tantum acutus deſeruiret, horum etenim planorum inclinationes, quandoque acutum rurſus verò obtuſum optant inclinationis angulum. Cæterùm Priſmatis diffinitionem, à Theone ſcriptam, theorematis demonſtrandis obſiſtere prænoſcentes regulata methodo vallauimus. Poteramus quidem inſtar Campani illud diffinire, ſed ſolidorum demonſtrandorum compendio conſulentes, æqua ſimilia & pãrallæla oppoſita eorum triangula citra demonſtrationis tedium comperiſſe lætamur. Sphæræ inſuper diffinitionem, à deſcriptione ſegregauimus, veram Sphæræ ſubſtantiam congrua diffinitione illuſtrantes, Tranſpoſitas item aliquas diffinitiones, iuxta optatum à natura ordinem diſpoſuimus, figurarum demum ſolidarum inſcriptiones à planarum inſcriptione diſcrepantes, iuxta neceſſariam ſolidis inſcribendis methodum diffiniuimus. Quia verò ſolido parallelepipedo ſepius vtemur, non antea ab Euclide diffinito, propriam diffinitionem contulimus, ne circa veram eius cognitionem fluctuantes, intelligendis theorematis hæſitemus, inſuper decimo quinto Euclidis futuro, reperiemus Ipſiclem quinque tantum theoremata, Campanum verò duodecim de regularium corporum inſcriptione ac circunſcriptione tradidiſſe, qui quidem Campanus (duodecimam demonſtrans) ad has explendas ſolidorum inſcriptiones, viginti optari profert theoremata, quæ ibidem nec poſſe demonſtrari debilibus admodum concludere conatur argumentis. Et proinde optata ſupereſſe (viginti complendis) theoremata octo. Quæ diuinæ clementiæ fausto munere conſequi fidentes, eam quæ totidem viginti inſcribendis aut circunſcribendis congrueret methodum, binis poſtremis exponimus diffinitionibus.

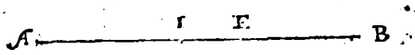
Propoſitio prima

Lineæ rectę partem in ſubiecto plano partem verò in ſublimi eſſe eſt impoſsibile.



Eſto (ſi fieri poſsit) linea A B G *cuius pars* A B *ſit in plano* A E D, *eiuſdem verò reliqua pars* B G *ſit in ſublimi, hoc eſt extra planum* A E D, *Dico* A B G *non eſſe rectam, quoniam planũ eſt* A E D *producatur ex æquali per planum* A E D *recta* A B *verſus* D, *quæ recta erit, per quartam diffinitionem primi, Ab aliquo ſigno rectæ* A B D *quod ſit* C *ad ſignum* G *ducatur* C G. *Triãguli igitur* B C G *exterior angulus* A B G, *binis quidem interioribus oppoſitis eſt æqualis, per 32 primi, & igitur minor duobus rectis, per. 17. eiuſdem, angulum itaque efficiens linea* A B G, *non eſt recta. Lineæ itaque rectæ partem in ſubiecto plano, partem verò in ſublimi eſſe eſt impoſsibile.*

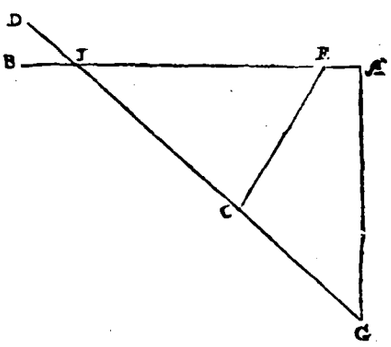
MONITVM.



Demonſtrare conatur hanc Theon ab inconuenienti, quod ſcilicet duæ lineæ concurrerent in pluribus ſignis vno, quod non adhuc patuit inconuenire: Nam binæ rectæ A E B I *in pluribus poſſunt concurrere ſignis* I E *non autem ſecari. Si autem eas dicamus vnicam lineam, tollemus innumerabiles demonſtrandi facultates, ſuper eadem recta plures conſtituentes, quod non recipit geometria ob demonſtrationum facilitatem, ſed quandoque totam vnicam quandoque diuerſas eſſe eius partes, iuxta hypoteſium varietatem ſuſcipit, & hac de cauſa noluit Euclides illud excludere, lineas ſcilicet in pluribus ſignis contactum non admittere, nec inter principia huiuſmodi collocare perniciem. Campanus verò tam modicum paruipendens demonſtrandum, concludit binas* B D B G *eidem* A B *in directum eſſe non poſſe ex decimatertia primi, quod licet aliquo labore, (non à theoremate ſed à demonſtratione) tandem illud exigi poſsit. Tamen ex decima quarta facilius exegiſſet, Quia igitur neuter eorum ſatis nobis fecit, nouam cogimur apponere demonſtrationem. Præterea in vno plano lineam vel ſuperficiem eſſe intelligamus, cùm hæc linea vel ſuperficies in eo plano infinitè vndique producta erit aut concipi poterit in ſublimi verò, cum aliunde extra idem infinitæ productum planum ſteterit.*

Propoſitio ſecunda.

Si duæ rectę lineę ſe ad inuicem ſecuerint, in vno ſunt plano, & omne triangulum in vno eſt plano.



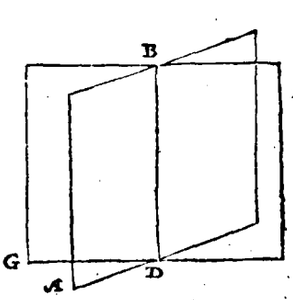
Sint duæ rectæ lineæ A B D G *ſeſe ſecantes in* I, *& cõiunctæ* A G *fiat triãgulum* A I G, *Dico binas* A B D G *in eodem eſſe plano, ac triangulum* A I G *in eodem eſſe plano, Si quidem triangulum ſit in eodem plano, lineæ triangulum continẽtes in ipſo erunt eodem plano, Veluti partes eſſentiæ ipſius trianguli rectilinei, Si verò non credatur triangulum* A I G *in eodem eſſe plano. Sed eius partem aliquam eſſe in ſublimi, ſiue extra planum. Eſto itaque trianguli* A I G *pars* A E C G *extra planum, reliqui* I E C, *ſequetur inde lineæ* I A *partem* I E *eſſe in ſubiecto plano, partem verò* E A *in ſublimi, quod fieri nõ potuit, per primam huius, nec ſimiliter lineæ* I G *partem* I C *in plano, partem verò* C G *in ſublimi eſſe. Nõ igitur trianguli* A I G *pars aliqua extra ſubiectum erit planum, ſed in vno eodem plano erit, & proinde ipſum triangulum concludentes* A B D G A G *rectæ in vno erũt plano. Idem patebit, ſi obiiciatur* D I B *in ſublimi eſſe. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe adinuicem ſecuerint, &c.*

MONITVM.

Commendandum eſt cùm dicemus duas lineas ſeſe ſecantes in eodem eſſe plano, illud potentia non ſimpliciter actu intelligi debere. Nam duæ ſe ſecãtes lineæ, in diuerſis planis eſſe poſſunt. Sed licet in diuerſis eſſe poſſint, hoc theoremate nihilominus per vtraſque eandẽ planam ſuperficiem duci poſſe concludemus, quæ vnica & ſola eas ſimul concipiet: quare dicens Euclides in eodem eſſe plano præ ſe fert in eodẽ concipi poſſe plano neceſſarium fore, licet per ſingulas earum infinita duci poſſint diuerſa plana: illud tamen non obeſt quin binæ eodem foueatur plano.

Propoſitio tertia.

Si bina plana ſe inuicem ſecuerint, communis eorum ſectio recta eſt linea.

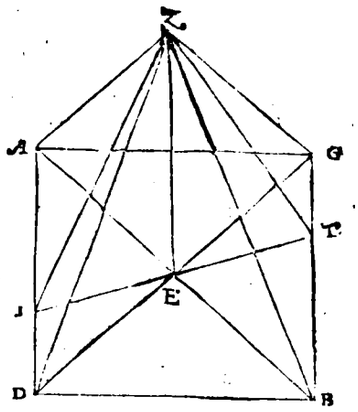


Bina plana A B G B *ſe ſecent in linea* B D: *Dico* B D *eſſe rectam: quod ſi non credatur, cùm ſigna* B *&* D *in vtroque ſint* A B *&* G B *plano, ex hypotheſi, per ea ſigna duci binæ rectæ in vtroque plano poterunt, per ſeptimã diffinitionẽ primi: quæ (à tota diſiunctiua) aut vnicam aut binas efficiẽt rectas, ſiquidem vnicam rectam, ea communis ſectio planorum recta eſt, vt petimus. Si verò binas rectas, ſequeretur binas rectas ſuperficiem cõcludere, cùm ab eodem* B *oriantur ſigno, & in idem* D *coeant, contra* 12 *communem ſententiam, quod fieri non poteſt: recta igitur erit* B D, *communis planorum ſectio. Si itaque bina plana ſe inuicem &c.*

Propoſitio quarta.

Si recta linea duabus rectis ſe inuicem diſpeſcentibus, in communi ſectione ad angulos rectos ſteterit, & ad earundem planum ad angulos rectos erit.

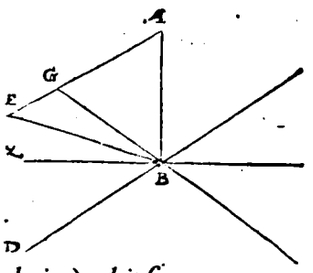
Recta



Recta linea Z E *duabus rectis* A B G D *se inuicem secantibus in* E *ad angulos rectos in communi sectione* E *stet: Dico rectam* E Z *ad planum (vtrasque* A B G D *concipiens) rectam esse, ponantur inuicem æquales* A E B E D E G E, *coniunctis* A G G B B D D A *rectis, quoniam dicimus rectam* Z E *ad omnes in plano* A G B D *eam tangentes rectam esse, si aliqua ad quam* E Z *recta non credatur inueniri posit, esto* I E T *in plano* A B G D, *connectantur à* Z *vertice hypotenusse vel subtendentes* Z A Z I Z D Z B Z T *&* Z G: *æquales igitur erunt* A Z D Z B Z *&* G Z, *per quartam primi, subtendunt enim æquales angulos qui ad* E, *æquis lateribus comprehensos, similiter* A D *&* B G *æquales erunt, per eandē 4 primi, subtendunt enim æquos ad* E *verticem angulos, per 15 primi, æquis lateribus (ex hypothesi) cōprehensos. Trian gula igitur* A Z D *&* B Z G *(æquis lateribus contenta) æqualia ac æquiangula erunt, per octauam primi, angulus igitur* A D Z *angulo* B G Z *æquus erit, cùm insuper (ex eadem octaua primi) anguli* E G B *&* E D A *(triangulorum æquis lineis compositorum) sint æquales, sequetur triangula* G E T *&* D E I *duos angulos duobus angulis scilicet* G E T *ipsi* D E I *(ad verticem) &* E G T *ipsi* E D I *(vt proximè patuit) æquales habentia, & vnum latus* E G *vni* E D *(ex hypothesi) æquale. Reliqua latera* E T T G *reliquis* E I I D *æqualia habere, per vigesimam sextam primi. Cùm insuper angulus* B G Z *(hoc est* T G Z*) angulo* A D Z *(hoc est ipsi* I D Z*) æquus fuerit, & æquis lateribus* T G G Z *ipsis* I D D Z *contineantur, bases* Z T *&* Z I *æquales erunt, per quartam primi, quia demum* E T T Z *ipsis* E I I Z *rectis æquales, & basis* E Z *communis ostensæ sunt, anguli* Z E T *&* Z E I *(per octauam primi) æquales erunt, qui ideo (per 13 primi) recti erunt, recta enim* E Z *super rectam* I T *constituitur: recta igitur est* E Z *ad ipsam* I E T, *& proinde ad quascunque in plano* A G B D *ipsam* E Z *tangentes, similiter recta ostendetur. Si itaque recta linea duabus rectis se inuicem dispescentibus, &c.*

Propositio quinta.

Si recta linea tribus rectis se inuicem tangentibus ad angulos rectos in communi contactu steterit, ipsæ tres rectę lineę in vno sunt plano.



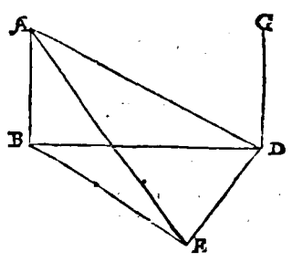
Esto recta linea A B *rectos efficiens angulos cum tribus* B G B Z D B *super earum contactum,* B *erecta: Dico rectas* B G B Z B D *in eodē esse plano, quod si aliqua earū in sublimi esse credatur, sit* B G *quæ erit in eodem plano cum recta* A B, *per secūdam huius: nam sese tangunt in* B, *quia verò planum rectarum* A B B G *cōcurrit cum plano ipsarum* Z B B D *in* B, *ea plana extensa sese secabunt, producatur recta* A G *in* E, *sit q planorum communis sectio* B E, *quæ (per tertiam huius) recta erit, atque in plano rectarum* Z B B D *existens* B E, *efficiet cum recta* A B *rectos angulos (per secundam diffinitionem huius) eò quòd (per quartam huius) ad ipsarum* Z B B D *planum recta sit, & ideo ad omnes eam in ipso plano tangentes recta erit, quoniam insuper* A B B G *&* B E *sunt (ex hypothesi) in eodē plano, sed* A B E *angulus rectus ostensus est, angulus similiter* A B G *rectus (ex hypotesi) fuit, sunt autem in eodem plano. Rectus itaque* A B G *recto* A B E *angulo minor esset, quod esset absurdum, ex decima communi sententia primi: non igitur erit* G B *recta in sublimi, nec proinde reliquarum vlla, tres itaque rectæ* B G B Z B D *in eodem erunt plano. Si ergo recta linea tribus rectis lineis, &c.*

MONITVM.

Cogimur finem demonstrationis à Theonis demonstrato variare: concludit enim Theon impossibile esse duos angulos æquos esse, siue rectos, cùm sint in eodem plano, licet 14 primi aliud concludat, scilicet non impossibile esse, sed ex illo sequetur tutius, eosdem angulos inæquales esse, & rectos, quod impossibile ostenditur, vt diximus, non autem binas rectas ad aliam angulos rectos in eodem plano efficere.

Propoſitio ſexta.

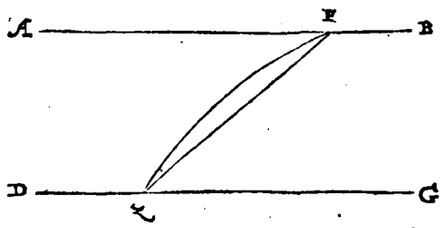
Si binę rectę lineę eidem plano ad angulos rectos ſteterint, parallelę erunt ipſę rectæ lineę.



Binæ rectæ A B G D *alicui plano* D B E *ad angulos rectos exiſtãt: Dico rectas* A B G D *parallelas eſſe. Coniungatur recta* B D, *in plano verò* D B E *ad angulos rectos ipſi* B D *excitetur* D E, *per vndecimam primi, quæ æqualis ſecetur ipſi* A B *rectæ, coniunctis* A D A E B E, *cùm enim* B D D E *ſint in eodem plano. Reliqua* B E *in ipſo erit plano, per ſecundam huius. AEqualibus verò* A B D E *communis ponatur* B D: *AEquales erunt* A B B D *ipſis* E D D B. *Sed angulos æquos comprehendunt, nempe rectos, ex hypotheſi. Baſes itaque* A D B E (*per quartam primi*) *æquales erunt. Quia verò* A D *ipſi* B E *&* A B *ipſi* D E *æquales fuerunt, communis occurrat* A E. *Triangula itaque* A E B *&* A E D *angulos* A B E *&* E D A *ſub æquis lateribus & eadem baſi comprehenſos, æquos (per octauam primi) efficient. Rectus quidem eſt* A B E, *cum* A B *ſit recta ad planum* D B E, *ex hypotheſi, rectus igitur erit* E D A. *Et proinde recta* E D *ad rectas* B D A D G D *rectos efficiens angulos, vt patuit, docet ipſas* B D *ad* G D *in eodem eſſe plano, per quintam huius. Nam* B D *&* D E, *ex hypotheſi,* A D *verò ad* D E, *ex demonſtrato,* G D *autem ad* D E, *cùm ſit ad* D B E *planum (ex hypotheſi) recta, angulos rectos effecerunt. Siquidem* B D A D G D *in eodem ſint plano, in ipſo erit* A B *reliqua trianguli* A D B, *per ſecundam huius. Quare in eodem plano erunt* A B *&* G D *& angulos interiores ad eaſdem partes* A B D G D B *duobus rectis æquos efficiunt, ex hypotheſi. Ipſæ itaque* A B *&* G D (*per 28 primi*) *parallelæ erunt. Si igitur binæ rectæ lineæ ad angulos, &c.*

Propoſitio ſeptima.

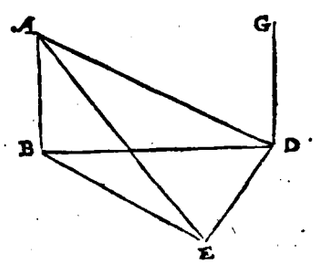
Si fuerint binę rectę lineę parallelę, aſſumantúrque in ipſarum vtraque contingentia ſigna, per ea ſigna ducta recta linea, in eodem eſt plano cum ipſis parallelis.



Sumantur in binis A B G D *parallelis contingentia ſigna* E *&* Z: *Dico rectam, per* E Z *ductam, in plano* A B G D *parallelarum eſſe. Quod ſi ſecus fieri poſſit, eſto recta* E Z *per aliud planum. Quoniam* E *&* Z *ſigna ſunt in parallelarum* A B G D *plano, per idem planum per eaque ſigna recta ducetur, à qua ſi differat, iam per* E Z *ducta, binæ rectæ ſuperficiem concludent in ſignis* E *&* Z, *quod fieri non poteſt, per* 12 *communem ſententiam. Quare non erit* E Z *recta in alio à parallelis plano. Si itaq; fuerint binæ rectæ lineæ parallelæ, &c.*

Propoſitio octaua.

Si fuerint binæ rectæ lineę parallelę, altera autem ipſarum alicui plano ad angulos rectos fuerit, Et reliqua eidem plano ad angulos rectos erit.



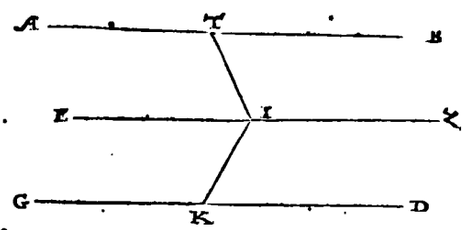
Binarum parallelarum rectarum A B *&* G D *altera* A B *alicui plano* D B E *ſit ad rectos: Dico reliquam* G D *eidem* D B E *plano rectam eſſe, per* B *&* D *ſigna ducatur* B D, *cui in plano* D B E *ortogonalis eſto* D E, *per vndecimam primi, quæ æqualis ponatur ipſi* A B, *communis verò* B D. *Sequetur binas* A B B D *binis* E D D B *æquales eſſe. Quæ quidem cum angulos æquos (nempe ex conſtructione rectos) ſuſcipiant, baſes* A D *&* B E (*per quartam primi*) *efficiunt æquales. Quare* A B B E *ipſis* E D D A *æquales ſunt. Communis verò* A E *ipſis erit baſis. Angulus igitur* A B E *angulo* E D A (*per octauam primi*) *æquus erit. Rectus autem eſt* A B E, *cùm* A B *ſit ex hypotheſi, ad planum* D B E *recta, in quo* B E *ipſam* A B *tangit, per ſecundam diffinit. huius.*

Rectus

Rectus itaque erit ED A, *ſibi æqualis. Recta igitur* ED *duabus* AD BD *in communi contactu* D *ad rectos erigitur. Ad earum igitur planum & omnes eam in ipſarum* AD BD *plano tangentes, ipſa* ED *recta erit, per quartam huius. Sed in plano ipſarum* AD DB *reperitur* GD: *Nam à contingentibus ſignis* A *&* D *parallelarum* AB GD *ducta* AD, *in eodem eſt plano cum ipſis parallelis* AB GD, *per præfatam. Ad ipſam itaque* D G *recta* ED *angulum* EDG *rectum efficit. Sed &* GDB *rectus eſt, per* 29 *primi, cùm* ABD *ſit (ex hypotheſi) rectus. Recta ideo* GD *(ad binas* BD ED *recta in communi ſectione* D *exiſtens) ad earum planum* DBE *recta erit, per quartam huius. Si itaque fuerint binæ rectæ lineæ parallelæ, altera autem, &c.*

Propoſitio nona.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, nec eidem in eodem exiſtentes plano, & adinuicem ſunt parallelæ.



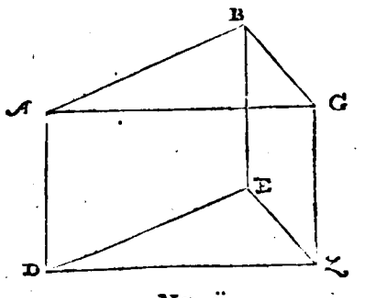
Sint rectæ AB *&* GD *eidem rectæ* EZ *parallelæ, non autem cum ipſa eidem plano inſiſtentes: Dico ipſas* AB *&* GD *adinuicem parallelas eſſe. A dato contingente ſigno* I *in recta* E, *ipſi* EZ *ortogonales excitentur,* IT IK, *ſcilicet* IT *per planum parallelarum* AB EZ, *&* IK *per planum parallelarum* GD EZ. *Recta igitur* EZ *ad planum ipſarum* IT IK *recta erit, per quartam huius. Ad idem itaque planum* TIK *rectæ erunt,* AB GD, *per octauam huius, cùm ſint ipſi* EZ *parallelæ, quæ quidem plano* TIK *recta fuit. Si igitur duæ* AB GD *eidem plano* TIK *rectæ fuerint, parallelæ erunt (per ſextam huius) ipſæ* AB GD. *Quæ ideo eidem rectæ parallelæ (non in eòdem exiſtentes plano) &c.*

MONITVM.

Data opera excluſit Euclides ab hoc theoremate idem planum. Nam ſi liberam parallelarum hypotheſim eidem plano reliquiſſet, ambigua fuiſſet huius concluſio. Dicenti nanque, eidem parallelas inter ſe parallelas eſſe, obſtitiſſet id quod trigeſima primi monuimus, eò quòd quandoque poſſint in rectam cadere, nec ideo ſint parallelæ, hac de cauſa trigeſima primi diſiunctiuam contulimus (aut in rectum poſitæ) vt ſibi conſtaret demonſtratio, ea quæ idem poſcebat planum. Quare trigeſimum theorema propriæ demonſtrationi ſubiicere volentes, appoſuimus hypotheſi idem planum optari. Cùm autem ad ſolida ventum eſt, à quibus idem planum abſtulimus, hæc diuerſorum planorum hypotheſis, concluſionem parallelarum ſibi inuicem ſimplicem ac nulli diſiunctiuæ obnoxiam liberæ profert. Si autem obiiceretur huic quod trigeſimæ primi obiecimus, rectas in rectam conſtitui, tum refragaremur hypotheſi, quæ diuerſa optat plana, lineæ nanque in rectam conſtitutæ alteri parallelæ ſemper idem poſſident planum, non ergo diuerſa ineſſent plana, contra hypotheſim, diuerſa optantem. In planis itaque, trigeſimæ primi diſiunctiuam contulimus, aut in rectam conſtitutæ: In ſolidis verò diſiunctiuam detraximus, propoſita planorum diuerſitate ſimplicem concluſionem generante.

Propoſitio decima.

Si binæ rectæ lineæ ſeſe inuicem tangentes, ad binas rectas ſeſe ad eaſdem partes tangentes parallelæ fuerint, æquales angulos comprehendent.

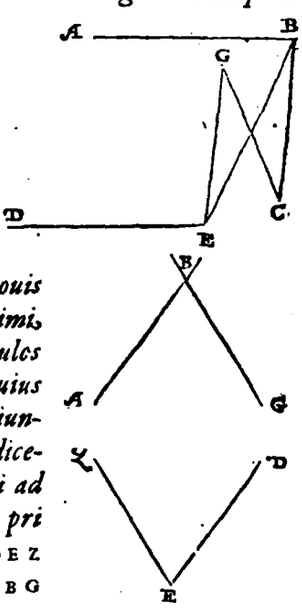


Proponantur binæ AB BG *ſeſe tangentes in* B, *quibus binæ* DE EZ *ſeſe tangentes in* E *ad eaſdem partes* B *&* E *ſint parallelæ: Dico ipſos* DE EZ *æqualem angulum ipſis* AB BG *continere. Secentur* AB *&* DE *æquales, ſimiliter* BG *&* EZ *æquales. Subtenſis* AG DZ, *connexiſque* AD BE GZ. *Quoniam æquas & parallelas* AB DE *ad eaſdem partes coniungunt* AD BE, *Ipſæ æquales & parallelæ ſunt, per trigeſimamtertiam primi. Haud ſecùs* BE GZ *parallelæ erunt, & proinde* AD GZ *eidem* BE *parallelæ, non in eodem exiſtentes plano, adinuicem erunt*

parallelæ (per nonam huius) & æquales per primam communem ſententiam. Eodem digreſſu AD *&* GZ *æquas & parallelas, coniungentes* AG DZ *rectæ, parallelæ & æquales erunt, per eandem trigeſimamtertiam. Atqui* AB BG *ipſis* DE EZ *æquales, baſes* AG DZ *habent æquales. Ipſæ itaque angulum* ABG *angulo* DEZ *æquis lineis contento, æqualem habebunt, per octauam primi. Ipſæ igitur* AB BG *&* DE EZ *æquales continent angulos. Si itaque binæ rectæ linæ ſeſe tangentes, ad binas, &c.*

MONITVM.

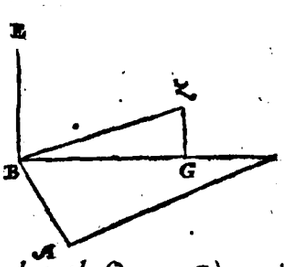
Hoc theorema vim illatam quodammodo perpeſſum ſentimus. Cùm enim parallelas ſe tangentes angulos concludere æquales extra idem duntaxat planum ſinat, cogere videtur theorematis liberas facultates, ad ea tantùm quæ ſolidis congruunt, licet æquè ad idem planum & ad diuerſa eius ſeruari poſſit decretum, ſecus decimæquintæ huius, cui neceſſariò hæc conuenit hypotheſis. Quare abſtulimus à Zamberto has voces (in eodem nõ fuerint plano) vt reſtituta libertate planis & ſolidis figuris hoc inſeruiat theorema. Cæterùm quale reliquit Euclides vix ad nos delatum ambigimus: AEqualitas nanque angulorum non neceſſariò ſequitur hanc hypotheſim à maioribus traditam. Quinimò binas proponemus (iuxta Theonis conſtructionem à Zamberto verſam) rectas AB BC *ſeſe tangentes, parallelas & æquales binis* DE EG *ſeſe tangentibus, nec in eodem (ſi libeat) plano, attamen angulos* ABG *&* DEG *inæquales conſtituent, eſt nanque* B *acutus,* E *verò obtuſus, ſit igitur manca hypoth. Rurſus aliud conſurgit obiiciendum, quo ſeruata hypotheſi ac concluſione æqualium angulorum, nihilominus abeſt demonſtratio parallelarum parallelas æquales iungentium, ex 33 primi, hoc typo in quouis parallelogrammo, bifariam ſecto, cuius altera pars in plano vel ſublimi, parallelas* AB BG *binis* DE EZ *conſtituat, patet eas æquales & angulos æquos concludere, nihilominus ſi parallelas iuxta demonſtrationem huius* AB DE *parallelis iungamus, eiſdem iungentibus reliquas* GB EZ *iungentes, parallelas non eſſe conſtat, ſicq; ruit demonſtratio. Ad hoc dicemus producendas eſſe rectas* AB *&* GB *in directum circa* B, *tum qui ad verticẽ* B *angulus angulo* ABG *oppoſitus, eidẽ* ABG *æqualis erit, ex 15 primi, iſque idem, per huius theorematis demonſtrationem angulo* DEZ *æqualis probabitur. Bini itaque* ABG *&* DEZ, *eidem oppoſito ipſi* ABG *æquales, adinuicem erunt æquales. Ad illud autem, Huius defectum quo rectas* AB BE *ſe tangentes, ad binas* DE EG *ſe tangentes parallelas & æquales proponimus, non tamen æquos angulos comprehendentes, ab eo oriri, quod parallelas cõiungentes ad eaſdem partes (iuxta 33 primi votũ) nõ copulent, quorum obliti qui demonſtrandam hanc aggreſſi ſunt, in hũc cecidere caſum. Nos itaque huic obuij contulimus particulã (ad eaſdẽ partes) vt propoſitarũ parallelarum contactus, ad eaſdem earum partes conſtitutus, iungentes neceſſariò ex 33 primi, parallelas & æquales ſtatuat, videmus nimirum his obiectis propoſitas parallelas, mutuos non emittere contactus circa eaſdem partes, hac demum arte conſtabit concluſio demonſtratione ſuffulta.*



Propoſitio vndecima. *Problema* 1.

A dato ſigno in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem lineam ducere.

Eſto ABG *ſubiectum planum. In ſublimi verò ſignum ſit* Z. *Oportet iam* AB *ipſo* Z *ad* ABG *planum perpendicularem duci. A ſigno* Z *ad rectam* AB (*extenſam in ſubiecto plano* ABG) *perpendicularis agatur* ZB, *per* 12 *primi. Quæ ſi ad* ABG *planum recta fuerit, conſequimur optatum. Sin minus ipſi* AB *ad ſignum* B *in plano* ABG *ad rectos excitetur* BG, *per* 11 *primi. A ſigno autem* Z *in rectam* BG *perpendicularis cadat* ZG. *In planò verò* BGZ *à ſigno* B *parallela ipſi* ZG *fiat* EB, *per* 31 *primi. Angulus* EBG *rectus erit, ex* 29 *primi, eò quòd rectus ſit (ex hypotheſi)* ZGB. *Cùm enim*

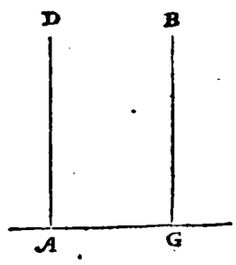


A B *rectos (ex hypotheſi) efficiat ad ipſas* B G B Z. *Ipſa* A B *ad ipſarum* B G B Z *planum (per quartam huius) & ad omnes in ipſo plano eam tangentes (per ſecundam diffinit. huius) rectos faciet. Sed* E B *in plano* B G B Z *conſtructa fuit. Ad ipſam* E B *igitur recta erit* A B. *Sed* E B *ad* B G *recta fuit conſtructa. Ipſa igitur* E B *ad planum* A B G *recta erit, per quartam huius. Et proinde ipſi* E B *parallela* Z G, *eidem plano* A B G *recta erit, per octauam huius. A dato itaque ſigno* Z *in ſublimi ad ſubiectum planum* A B G *perpendicularem lineam* Z G *duximus.*

Propoſitio duodecima. Problema 12.

Ad datum planum à dato in eo ſigno, lineam rectam ad angulos rectos excitare.

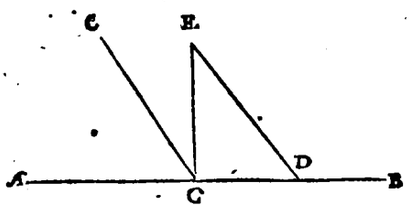
Eſto planum A G, *datum verò in eo ſignum* A, *oportet iam ipſi plano ad ſignum* A *perpendicularem conſtituere. Suſcipiatur contingens ſignum extra planum ſit q̃* B, *à quo (per præfatam) in* A G *planum perpendicularis agatur* B G. *Ipſi autem* B G *(per 31 primi) per ſignum* A *parallela fiat* A D. *Cùm autem* B G *ſit recta ad planum* A G, *ex conſtructione, ad idem planum recta erit* D A, *eidem* B G *parallela, per octauam huius. Ad datum itaque planum* A G *à dato in eo ſigno* A, *lineam rectam* D A *ad angulos rectos conſtituimus.*



Propoſitio decimatertia

Ad idem planum ab eodem ſigno in plano aut ſublimi ſumpto, binæ rectæ lineæ ad angulos rectos non conſtituentur ad eaſdem partes.

Sit planum A G B, *ſignum verò contingens in eo ſit* G, *in ſublimi autem eſto ſignum* E: *Dico ad planum* A G B *à ſigno* G *binas rectas non poſſe excitari, nec inſuper à ſigno* E *ſublimi ad idem planum binas rectas poſſe dimitti. Quod ſi opponatur, Sint primum à ſigno* G *binæ* G C G E *rectæ ad idem planum* A B. *Ipſæ igitur parallelæ erunt, ex ſexta huius. Sed & concurrent in* G, *quod eſt abſurdum, ſcilicet contra parallelarum diffinitionẽ. Haud ſecus ſi à ſublimi ſigno* E, *binæ demitti credantur* E G E D *ad planum* A G B *rectæ. Nam (per eandem ſextam huius) parallelæ eſſent, & nihilominus concurrerent in* E, *quod fieri non poteſt. Non igitur binæ ab eodẽ ſigno aut ſublimi, aut plano exiſtenti, ad idem planum rectæ conſtituentur. Ad idem igitur planum ab eodem ſigno, &c.*

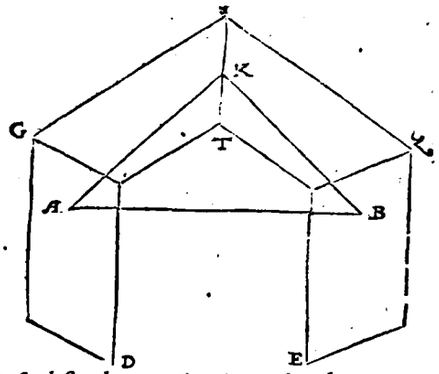


MONITVM.

Theoremati voces aliquas contulimus vt vtramque demonſtrari dicamus ſententiam, ſcilicet à ſublimi ſigno ad planum, & à plani ſigno ad ſublime, binas ſimul plano eidem ortogonales non conſtitui, quorum alterum tantùm dixerunt Campanus & Theon, quiquidem inſuper concludit hanc veluti & quintam huius contra decimamquartam primi, ſcilicet, impoßibile eſſe binos rectos angulos ad idem ſignum in eodem plano conſtitui.

Propoſitio decimaquarta.

Ad quę plana eadem recta linea recta eſt, parallela ſunt ipſa plana.



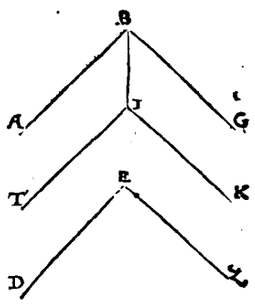
Ad bina plana GD *&* ZE *ſit recta linea* AB : *Dico parallela ipſa* GD ZE *plana eſſe, quod ſi non ſint parallela, vndique producta alicubi concurrent. Concurrant igitur in* IT, *quæ erit linea recta, per tertiam huius, in ipſa* IT *ſumatur contingens ſignum* K, *per planum autem* DG *ducatur recta* AK, *per planũ verò* ZE *fiat recta* BK, *quoniam* AB (*ex hypotheſi*) *eſt recta ad plana* GD *&* ZE, *ipſa* AB *recta erit ad omnes rectas in ipſis planis ipſam tangentes, per ſecundam diffinitionem huius. Anguli igitur* ABK *&* BAK *recti erunt, & ideo parallelæ erunt* AK BK *rectæ, per vigeſimamoctauam primi, cùm ſint in eodem plano per ſecundam huius, & concurrent in* K, *quod eſt abſurdum. Nõ igitur alicubi concurrunt* GD *&* ZE *plana, quare parallela erunt, per ſextam diffinitionem huius. Ad quæ itaque plana eadem recta linea recta eſt, &c.*

Corollarium.

Si recta linea vni parallelorum planorum recta fuerit, & reliquo recta erit. *Nam ſi cum reliquo recta non eſſet, ipſa ad aliquam eius plani lineam angulum recto minorem efficeret, quæ quidem linea (per vndecimam communem ſententiam) tandem concurreret cum aliqua alterius plani linea, quare ipſa plana ſequeretur non eſſe parallela, contra hypotheſim, cum parallela ſupponãtur. Si itaque recta linea vni parallelorum planorum, &c.*

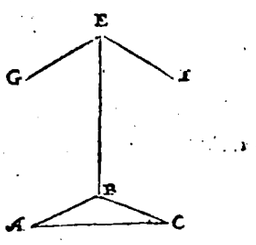
Propoſitio decimaquinta.

Si binę rectæ lineæ ſe inuicem tangentes ad binas ſe inuicem tangentes fuerint parallelæ, non tamen in eodem plano exiſtentes: Parallela ſunt quæ per ipſas plana.



Bina inquam rectæ AB BG *ſeſe tangentes in* B, *ad binas* DE EZ *ſeſe tãgentes in* E *ſint parallelæ, ſed nõ ſint in eodem plano: Dico plana quæ per* AB BG, *& per* DE EZ *parallela eſſe: à contactu* B *in planum rectarum* DE EZ *perpendicularis agatur* BI, *per vndecimam huius, per ſignum verò* I *ipſis* ED EZ *in plano* DEZ *parallelæ ducantur* IT IK, *per trigeſimamprimam primi, quoniam parallelæ ſunt* ABIT *eidem* ED, *& adinuicem ipſæ* ABIT *parallelæ erunt, per nonam huius. In eas igitur cadens recta* BI *angulos* ABI TIB *rectos efficit, per vigeſimamnonam primi, cùm recta ſit ex hypotheſi* BI *ad planum* TIK, *ſiue* DEZ. *Similiter oſtẽdemus angulos* GBI KIB *rectos eſſe, recta itaque* IB *ad binas* AB BG *recta erit, & ideo ad earum planum* ABG *recta erit, per quartam huius. Sed eadem* IB *ad planum* TIK *ſiue* DEZ (*ex hypotheſi*) *recta fuit. Ad quæ igitur plana* ABG *&* DEZ *eadem* IB *recta eſt, parallela ſunt ipſa plana* ABG *&* DEZ, *per decimãmquartam huius. Si igitur binæ rectæ lineæ, &c.*

Corollarium.



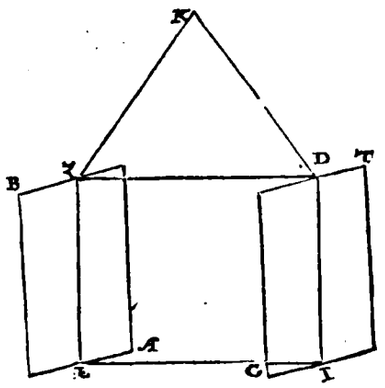
Dato plano per datum extra illud ſignum, parallelum planum ducere. *Eſto planum* ABC, *ſignum verò* E. *Per ſignum verò* E *ipſis* AB BC *parallelæ fiant* GE EI, *per trigeſimamprimam primi. Ipſæ igitur* GE EI *ſunt in plano* GEI *parallelo ipſi* ABC *plano (per hanc) cum ſint tangentes.*

Propoſitio decimaſexta.

Si bina plana parallela à plano aliquo diſſecta fuerint, communes ipſorum ſectiones parallelę ſunt.

Binæ

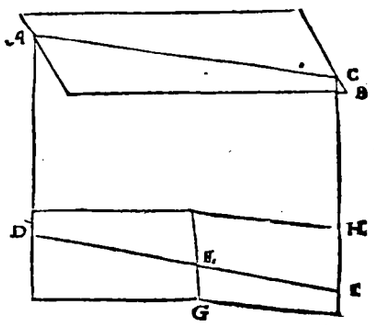
Bina plana A B *&* G T *ſint parallela, ipſa autem plana ſecet planum* Z D I E, *in ſectionibus* Z E *&* D I, *quæ erunt rectæ lineæ, per tertiam huius: Dico ipſas* Z E *&* D I *rectas parallelas eſſe, quod ſi non eſſe putentur, concurrant alicubi in* K, *cùm enim recta ſupponatur linea* E Z K, *pars verò eius* Z E *ſit in plano* B A, *& reliqua* Z K *in eodē* B A *plano producto erit, per primam huius, eadem cauſa &* I D K *recta in* G T *plano erit, concurrent igitur* A B *&* G T *plana, in ſigno* K, *contra ſuppoſitum, cùm ſint parallela, quod fieri non poteſt. Non igitur concurrent* Z E *&* D I *ſectiones, in plano* Z D I E *exiſtentes, quare parallelæ erunt. Si itaque bina plana parallela à plano aliquo diſſecta, &c.*



Corollarium.

Si bina plana eidem plano parallela fuerint, & ad inuicem parallela erunt, aut idem planum efficient.

Nam ſi plana D G C H *eidem* A B *parallela, non ſint inter ſe parallela, ipſa producta concurrent, per conuerſ. ſextæ diffinitionis vndecimi, concurrant in* G E *rectam: Dico* G D G H *in eodem eſſe plano: eſto in plano* A B *aliqua recta* A C, *per quā & ſignū* E *extendatur planum ſecās bina* D G G H *plana, per rectas* E D E I. *Parallelæ igitur erūt* A C D E *&* A C E I, *per hanc, inter ſe tamē parallelæ nō ſunt* D E E I, *cū concurrant in* E. *Ipſæ itaque* D E E I *in rectū ſunt poſitæ, per 30 primi, et ideo plana* D G G H *in eodē ſunt plano, quod ſi nō eſſent, rectæ* D I *pars* D E *eſſet in plano* D G: *pars verò* E I *in ſublimi alterius plani* G H, *quod fieri non poteſt, per primā huius. In eodē igitur ſunt plano* D G *&* G H *plana, ſi verò nuſquam concurrant, parallela erunt* D G *&* G H *plana, per ſextam diffinitionem vndecimi.*



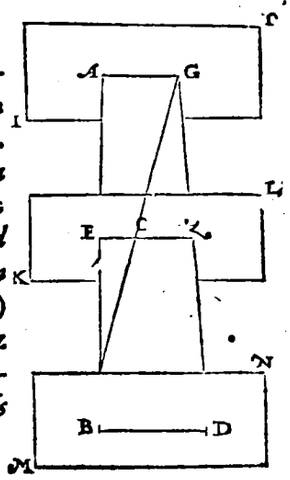
MONITVM.

Præcedens corollarium huic theoremati contulimus, futuris demonſtrandis admodum vtile, quod enim trigeſima primi diſcuſſimus in lineis, idem in planis hoc corollario docemus, vt in ſolidis exponendis eorum baſes in eodem eſſe plano huius adminiculo ſæpius oſtendamus. Quare eadem neceſſitate qua trigeſima primi compulſi, diſiūctiuam conferre voluimus, vt ſcilicet parallela, aut equidem in eodem plano degentia ſint parallela plana veluti rectas eidem rectæ parallelas inter ſe aut parallelas, aut rectam eandem conſtituentes trigeſima primi diximus.

Propoſitio decimaſeptima.

Si binę rectę lineę à planis quotlibet parallelis ſecentur, in eaſdem rationes inter ea plana ſecabuntur.

Sint binæ rectæ lineæ A B G D *in quibuſuis planis poſitæ, illas tamen ſecent quotcunque plana ſibi inuicem parallela* I T K L M N *in ſignis* A E B G Z D: *Dico rectas* A B *&* G D *ſecari inter plana, vt* A E *ad* E B, *ſic* G Z *ad* Z D. *Coniungantur* A G B D B G E C *&* C Z *rectæ, quoniam trianguli* A B G *planum, ſecat plana* K L *&* I T *per rectas* E C *&* A G, *parallelæ ſunt* E C *&* A G *rectæ, per præmiſſam, quare* E C *ſecat rectas* A B G B *proportionales* A E *ad* E B, *vt* G C *ad* C B, *per 2 ſexti, haud ſecus in triangulo* G B D *dicemus. Nam illud ſecat plana* K L *&* M N, *per rectas* C Z *&* B D, *quæ ideo (per proximā) parallelæ fuerunt. Erit itaque (per ſecundam ſexti) ſicut* G C *ad* C B *ſic* G Z *ad* Z D, *ſed ſicut* G C *ad* C B, *ſic fuit* A E *ad* E B. *Sicut igitur* A E *ad* E B, *ſic erit (per vndecimam quinti)* G Z *ad* Z D. *Si igitur binæ rectæ lineæ à planis quotlibet, &c.*

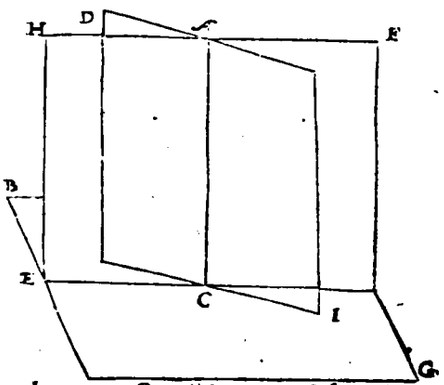


MONITVM.

Hanc protulit Campanus in lineis seſe tangentibus aut parallelis intelligi, Theon verò vberiorem proferens Geometriæ fructum, in quibuſuis indefinitè lineis intelligit. Veruntamen illud vnum omiſit, quod ſectiones illæ proportionales, intelligi debeãt inter plana comprehenſæ. Nam ſi lineæ ipſa plana prætergrederentur, non ſequeretur ipſas proportionaliter ſecari, ob contingentes earum extra plana quantitates: quare huic theoremati contulimus has voces interea plana.

Propoſitio decimaoctaua.

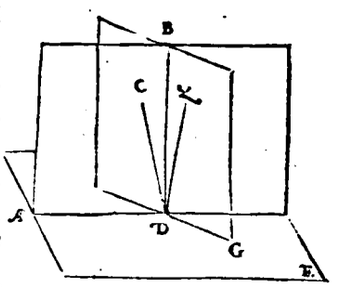
Si recta linea plano alicui ad angulos rectos fuerit, & omnia quę per ipſam plana eidem plano ad angulos rectos erunt.



Sit recta linea A C *ad planum* B G *recta: Dico omnia plana quæ per ipſam* A C *fiunt eidem* B G, *plano recta eſſe. Sint per rectam* A C *quotlibet plana* E F *&* D I, *ſecet autem planum* E F *reliquum* B G *per rectam* E C, *ipſi porro* E C *in plano* E F *ad rectos excitetur* H E *anguli itaq;* H E C A C E *interiores recti erunt. Parallæ igitur erunt* A C H E *rectæ, per* 28 *primi, &* H E, *recta erit ad planum* B G, *per octauam huius. Binæ igitur* A C H E *in plano* E F *ductæ, communi ſegmento* E C *ad angulos exiſtentes, reliquo plano* B G *ſunt rectæ, planum igitur* E F *ad planum* B G *rectum erit, per* 3 *diffinitionem huius. Eodem argumento oſtendemus planum* D I *eidem plano* B G *rectum eſſe ducta per* I *parallela ipſi* A C *in plano* D I. *Quæ igitur (per* 8 *huius) recta erit plano* B G, *& rectos faciet cum* C I *communi ſegmento: quare planum* D I *plano* B G *rectum erit. Sicque reliqua per* A C *ducta plana ipſi* B G *plano recta erunt. Si itaq; recta linea plano alicui ad angulos rectos fuerit, &c.*

Propoſitio decimanona.

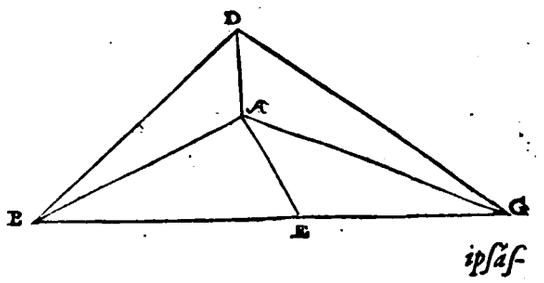
Si bina plana ſeinuicem ſecantia plano alicui ad angulos rectos fuerint, & ipſorum communis ſectio ad idem planum ad angulos rectos erit.



Bina inquam plana A B *&* G B *ſeinuicem ſecantia in* B D *ſint alicui plano* A E *recta: Dico* B D *communem eorum ſectionẽ eidem plano* A E *rectam eſſe: quod ſi non credatur, excitetur rectæ* A D *communi planorum* A B *&* A E *ſectioni, ortogonalis* D C *in plano* A B, *per* 11 *primi, ipſi verò* D G *communi planorum* B G *&* A E *ſectioni ſimiliter in plano* B G *ad rectos erigatur* D Z: *quoniam planum* A B *eſt rectum ad planum* A E, *ex hypotheſi, & communi ipſorum ſegmẽto (*D A*) angulos rectos efficit* C D, *poſita in altero ipſorum planorum. Recta igitur* C D *ad reliquum* A E *planum recta erit, per conuerſam* 3 *diffinitionis huius. Simili argumento recta patebit* Z D *ad idem* A E *planum eſſe, cùm recta ſit ad* D G *communem ſectionem. Ad idem igitur planum* A E *atque idem in eo ſignum* D, *binæ rectæ lineæ* C D Z D *angulos rectos efficiunt, contra* 13 *huius, quod fieri nequit: ſola itaque* B D *ad ſignum* D *plano* A E *recta erit, nec alia vlla. Si igitur bina, &c.*

Propoſitio vigeſima.

Si ſolidus angulus ſub tribus angulis planis comprehendatur, planorum duo quilibet, reliquo ſunt maiores quomodocunque ſuſcepti.



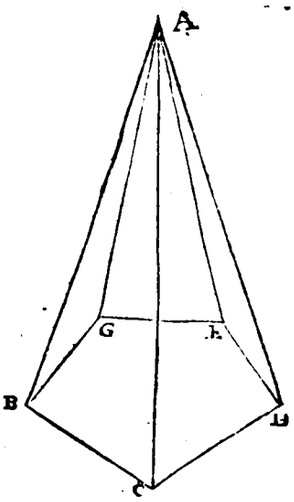
Comprehendatur angulus ſolidus qui ad A, *ſub tribus angulis planis* B A G G A D D A B: *Dico duos quoſlibet planorũ reliquo maiores eſſe. Sit inquam eorũ maximus* B A G. *Ad ſignum autem* A *rectam q;* B A *angulo* D A B *æqualis ponatur* B A E, *per* 23 *primi. Secetur itẽ ipſi* A D *æqualis* A E: *per ſignũ* E *verò ducatur recta vtrinque vſque ad* D B D G *rectas,*

ipſaſ-

ipſaſq; ſecãs in ſignis B *&* G, *cõiunctis* B D D G *rectis. Cũ autẽ anguli* B A D B A E *æquales (ex hypotheſi) ſub æqualibus* D A D E, *& communi* A B *concludantur rectis, baſes* B D B E *erunt (per 4 primi) æquales. Quia verò triãguli* B D G *maiora ſunt bina* B D D G *reliquo* B G *latera, per vigeſimam primi, ſed* B D *&* B E *ſunt æqualia: reliquum igitur* D G *reliquo* E G *maius erit. Triangulorũ igitur* D A G E A G *bina* D A A G *binis* E A A G *ſunt æqua latera, baſis verò* D G *baſi* E G *maior. Angulus itaque* D A G *angulo* E A G *(per 25 primi) maior erit: angulus autẽ* D A B *reliquo* B A E *æqualis fuit. Bini itaque* D A B D A G *anguli, reliquo* B A G *(toto & maiori ſumpto) maiores ſunt: multo igitur maiores erunt reliquo quolibet, qui non ſit eorum maximus. Si igitur ſolidus angulus ſub tribus, &c.*

Propoſitio vigeſimaprima.

Omnis angulus ſolidus ſub planis angulis minoribus quatuor rectis cõprehenditur.



Quoniam oſtendimus cuiuſlibet poligoni latera numero binario excedere numerum triãgulorum, in angulis ipſius poligoni deſcriptorum, corollar. 32 primi: hincque ſequi duplum numerum laterum, ſeu angulorum præfati poligoni, excedere quaternario numerum angulorum rectorum, angulis poligoni æqualium, qui quidem æquus eſt duplo triangulorum cùm ſingula triangula binos adhibeant rectos, vt eodem corollario latius expoſuimus.

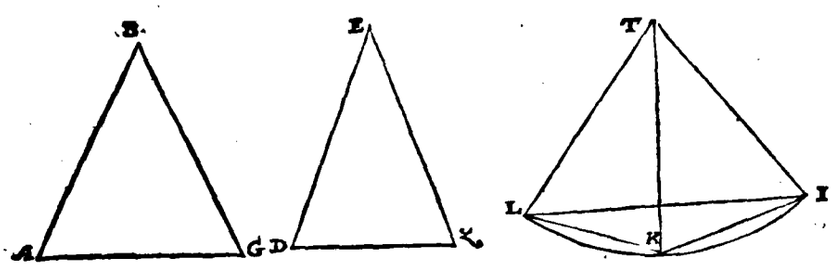
Sit itaque angulus ſolidus qui ad A, *quotuis angulis planis* B A C C A D D A E E A G G A B *comprehenſus, quem ſubtẽdat baſis* B C D E G. *Pyramis igitur erit* A B C D E G, *per decimam diffinitionem huius. Quot itaque ſunt baſis latera, totidem ſunt angulum ad verticem* A *continentia triangula. Sed quot ſunt triangula, dupli numero ſunt anguli recti à triangulis contenti: cuiuſlibet anguli etenim binis æquipollent rectis, per 32 primi. Quot igitur ſunt anguli recti à triangulis angulum* A *continentibus, totus eſt laterum aut angulorum baſis* B C D E G *duplus numerus, ſed duplus laterum aut angulorum baſis numerus, excedit eiuſdem baſis rectorum angulorum numerum quaternario. Numerus igitur angulorum rectorum à triangulis angulum* A *continentibus comprehenſorum, quaternario excedit numerum angulorum rectorum ab eadem baſi* B C D E G *comprehenſorum. Omnes itaque anguli triangulorum angulum* A *ſolidum componentium, quatuor rectis excedunt angulos, baſis* B C D E G *angulũ ſolidũ* A *ſubtendentis. Cùm autẽ ſingulos ipſius baſis angulos cõponant tres anguli plani ſolidos angulos conſtituentes, vt* A B G A B C G B C *angulũ ſolidum* B *componentes, ſicque reliquos* C D E G: *quorum bini qui ſupra baſim ſcilicet* A B G A B C *reliquo* G B C *(angulo baſis) ſunt maiores, per vigeſimam huius: ſequetur omnes qui ad baſim angulos triãgulorum angulum* A *conſtituẽtium ſimul ſumptos, angulis baſis ſimul ſumptis maiores eſſe. Cùm igitur omnes triangulorum anguli angulos baſis quatuor tantum rectis exceſſerint: qui verò ſupra baſim eoſdem baſis angulos excedant, manifeſtum eſt reliquos qui ad* A *ſolidum angulum quatuor rectis minores ſupereſſe, cùm omnes triangulorum anguli ſimul ſumpti, angulos baſis quatuor tantùm rectis exceſſerint. Omnis itaque angulus ſolidus ſub planis angulis minoribus quatuor rectis continebitur.*

MONITVM.

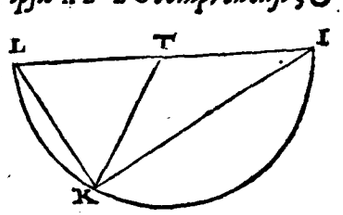
Huius demonſtrationem quadam prolixitate præter Theonem ampliare cogimur, is enim in trilatera Pyramide tantum demonſtrans quæ ad reliquorum ſolidorum libertatem exquirebantur, omiſit: Campanus verò ſatius, ſed obſcurè paululum (corollar. 32 primi) tradidit poligonorum in triangula diſtributionem, quam memorans indemonſtratam reliquit: vt quod triangula quolibet poligono concipi debent, non oſtenderit neceſſarium fuiſſe, à quo penitus huius theorematis pendet generalis demonſtratio.

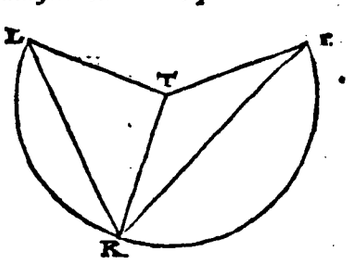
Propoſitio vigeſimaſecunda.

Si fuerint tres anguli plani quorum bini reliquo ſint maiores quomodocunque ſuſcepti, comprehendant autem ipſos æquales rectæ lineæ, Ex connectentibus rectas lineas æquales, triangulum conſtitui eſt poſſibile.



Sint tres anguli plani BET *æqualibus lineis* AB BG, DE EZ LT TK *comprehenſi, quilibet duo eorũ reliquo ſint maiores. Connectant autem lineas æquales rectæ,* AG DZ LK: *Dico ex ipſis* AG DZ LK *connectentibus triangulum fieri poſſe, ſumantur bini minores qui ſint* E *&* T, *ad rectam* TK *ſignúmque eius* T *angulo* DEZ *æqualis ponatur* KTI, *per vigeſimamtertiam primi, ipſi autem* EZ *æqualis ſit* TI, *reliqua* KI *æqualis erit ipſi* DZ, *per quartam primi, quia verò æquales ſunt* TL TK TI *rectæ, ab eodem ſigno* T *ipſæ in circunferentiam cadent, per diffinitionem circuli, ſubtendatur itaque recta* LI. *Trianguli* LKI *bina latera* LK KI *reliquo* LI *ſubtendente ſunt maiora, per vigeſimam primi, quia verò maiores ſunt (ex hypotheſi) bini* DEZ LTK *anguli (hoc eſt totus* LTI) *reliquo* ABG, *& æquis lateribus* LT TI *ipſis* AB BG *comprehenſi, & baſis* LI *baſi* AG *maior erit, per vigeſimamquartam primi. Multò igitur maiores erunt binæ* LK KI (*hoc eſt* LKDZ) *reliquæ* AG, *binæ igitur minores, reliquæ ſunt maiores, quare ſumptæ non minores facilius reliquæ erunt maiores. Ex tribus autem rectis* AG DZ *&* LK, *quarum duæ quælibet reliquæ ſunt maiores, triangulum conſtituemus, per vigeſimamſecũdam primi. Si igitur fuerint tres anguli plani quorum bini, &c. Quod ſi bini* DEZ LTK (*hoc eſt totus* LTI) *binis rectis ſint æquales, quæ eorum ſubtendet circunferentiam, circuli dimetiens erit, vt* LI, *quæ maior eſt quauis alium angulum ſubtendente, quare maior erit* LI *ipſa* AG, *quemuis angulum in circulo ſubtendente. At verò binis* LTK KTI *duos rectos excedentibus, vt hoc exemplo vltimo, perſpicuum eſt binas* LK KI *multò maiores eſſe quauis reliqua angulum ſubtendente* AG, *cùm ipſæ* LK KI *ſint maiores dimetiente, quæ maxima eſt omnium ſubtendens, per decimamquintam tertij. Quauis itaque angulorum propoſita quantitate patuit expoſitum.*



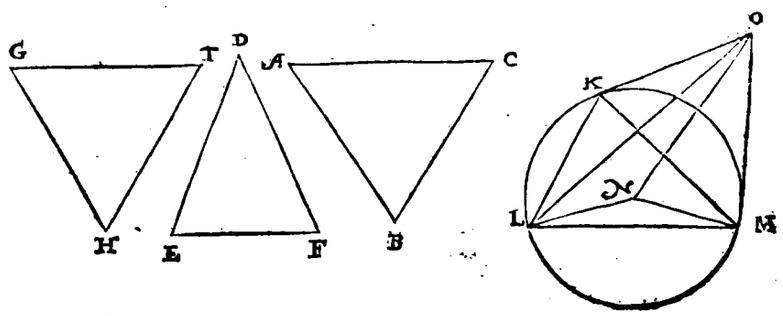


MONITVM.

Theon huius tantùm primam partem demonſtrat, cùm ſcilicet bini anguli duobus rectis minores exiſtunt, illud quidem duplici demonſtratione, mancam relinquens huius theorematis intelligentiam, quo ad poſtremas triangulorum magnitudines. Non igitur genus huius docuit, ſed tantũ ſpeciem, quod minimè ſufficit.

Propoſitio vigeſimatertia. *Problema* 3.

Ex tribus angulis planis (quatuor rectis minoribus) & quorum duo quomodocunque ſumpti, reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conficere.



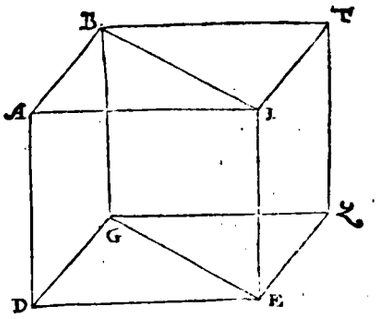
Proponantur tres anguli plani BDH *minores quatuor rectis. Sint item duo eorum quilibet reliquo maiores, oportet iam ex ipſis* BDH *angulis ſolidum angulum conficere. Contineantur ipſi* BDH *anguli æquis lateribus* AB BC ED DF GH HI, *cõiũctis baſibus* AC EF GI. *ex tribus autem connectentibus* AC EF GI *triangulum (per præfatam) conſtituamus* KLM. *Eſto autem rectæ* AC *æqualis* LM, *ipſi verò* EF *ſit æqualis* LK, *&* KM *rectæ* GI, *circa* LMK *triangulũ (per quintam quarti) deſcribatur circulus, cuius centrum ſit* N, *conuexis* NL NM NK: *à ſigno verò* N *plano* LMK *recta excitetur* NO, *per duodecimam huius, quoniam anguli* BDH *quatuor rectis ſunt minores, rectæ* AB BC *ipſis* LN NM *neceſſariò maiores erunt. Nam ſi æquales eſſent, æqualem angulum ipſi* LNM *continerent, per quartam primi: ſimiliter* GHI *ipſi* MNK *&* EDF *ipſi* KNL, *cùm vtræque inter ſe æquales ſint, ex hypotheſi, ſcilicet continentes angulos, & quæ ex centro. Tres itaq; angulos* BDH *quatuor rectis (qui ad* N *centrũ) æquales conſtituerent, contra hypotheſim: non igitur ſunt ipſæ,* AB BC *ipſis* LN NM *æquales. Sed neque minores ipſis* LN NM, *nã intra triangulũ* LNM *caderent, ac angulis qui ad* N *maiores angulos efficerent, per vigeſimamprimam primi, & id propterea quatuor rectis maiores: nam (per corollarium* 15 *primi) qui ad centrum omnes anguli quatuor rectis ſunt æquales, quod rurſus obſtaret hypotheſi. Maiores itaque erunt* AB BC *ipſis* LN NM, *quæ ex centro. A recto itaque* AB *quadrato, tollatur quadratum rectæ* LN, *reliqui (per coroll. 34. ſexti) latus reperiatur, cui æqualis ponatur recta* NO *connexis* OL OM OK *rectis. Cùm autem recta* AB *poſſit quadrata ex* LN NO, *angulus verò* ONL *(ex conſtructione) rectus ſit, ſequetur rectam* LO *eadem quadrata (per quadrageſimamſeptimam primi) potentem, ipſi* AB *æqualem eſſe, ſed ipſi* LO *æquales ſunt ſingulæ* OK OM, *ipſi verò* AB *ſingulæ* BC ED DF GH HI. *Singulæ igitur ipſarum* LO OK OM *ſingulis* AB BC ED DF GH HI *æquales erunt: atqui rectis* ML LK KM *æquales fuerunt reliquæ* AC EF GI. *Triãgula itaque* OML *&* ACB, *æquales efficient angulos* LOM *&* ABC *æquis lateribus contentos, per octauam primi, ac eodem argumento* LOK *ipſi* EDF *&* KOM *ipſi* GHI *æquales fieri oſtenduntur. Tres igitur anguli* LOM LOT *&* KOM *plani, propoſitis tribus æquales, ad vnum ſignum* O *conſtituuntur, non in eodem exiſtentes plano, cùm* O *in ſublimi (per cõſtructionem) fuerit, angulúmque ſolidum conſtituunt, per nonam diffinitionem huius. Ex tribus itaque angulis planis quatuor, &c.*

MONITVM.

Prolixam admodum extenuat huius demonſtrationem Theon, circa diuerſitatem ſitus trianguli KLM *(ſcilicet aut centro intus, aut in latere, aut equidem extra conſtituto) valde laborans, quod ex ſe ſat patet, cum ex hypotheſi omnes comprehendentes angulos fuerint æquales poſitæ, neceſſum erit alteri earum à circunferentia ad perpendicularis verticem collocatæ, reliquas ab eadem circunferentia ad eundem verticem ductas æquales fieri, quauis arte fiat trianguli diſpoſitio, dum tamen in circulo deſcriptum fuerit, iuxta hypotheſim. Omnes etenim rectæ illæ rectos angulos æquis lateribus, ſcilicet ea quæ ex centro & perpendiculari contentos ſubtendunt. Quare neceſſariò æquales, per quartam primi erunt. Et proinde quauis trianguli diſpoſitione, ſemper pyramidis vertex, ſiue ſolidus angulus centro circuli baſim continentis perpendicularis erit, ob hypotheſim æquorum laterum angulos datos continentium, vt igitur tantos euitemus anfractus, breuiorem conati ſumus afferre demonſtrationem.*

Propoſitio vigeſimaquarta.

Si ſolidum parallelis & quadrangulis planis comprehendatur, quæ ex oppoſito ipſius plana ſimilia æqualia ſunt, & parallelogramma.



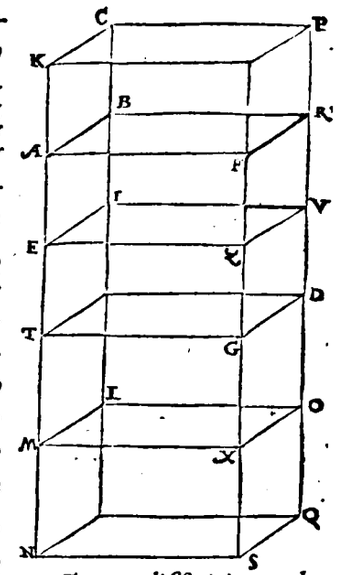
Esto ABZE *solidum planis* AE AG ZB ZI AT *&* DZ *parallelis & quadrangulis comprehensum: Dico quælibet eius* ABZE *plana opposita, esse similia æqualia & parallelogramma. Quoniam bina plana* AT DZ *parallela secant planum* AG, *communes eorum sectiones* AB *&* DG *sunt parallelæ, per decimamsextam huius. Similiter quia eadem plana* AT *&* DZ *secant planum* AE, *parallelæ erunt* AI DE, *sicq; omnes oppositæ quadrilaterorum rectæ parallelæ patebunt. Id propterea singula plana quadrilatera & parallelis oppositis rectis comprehensa, parallelogramma erunt, per trigesimamsextam diffinitionem primi. Cùm insuper binæ* AB AI *sese tangentes, binis* DG DE *sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, sed in oppositis, anguli* BAI *&* GDE *sunt (per decimam huius) æquales. Sed ipsos angulos continentes rectæ* BA AI *sunt oppositis rectis* GD DE *æquales, per trigesimamquartam primi. Bases igitur* BI *&* GE *(ex quarta primi) æquales erunt, ac triangula* BAI *&* GDE *æquiangula & æqualia. Trianguli autem* BAI *duplum est* AT *parallelogrammum, per trigesimamquartam primi. Similiter & ipsius* GDE *duplum est* DZ *oppositum, æquum est igitur* AT *ipsi* DZ *opposito. Haud dissimili argumento ostendemus reliqua parallelogramma opposita æqualia esse. Sed & similia, cum* BA AI *latera ipsis* GD DE *lateribus sint æqualia, erit* BA *ad* AI *sicut* GD *ad* DE, *quæ circum æquales angulos parallelogrammorum* AT *&* DZ *oppositorum, quæ ideo sunt similia, per primam diffinitionem sexti. Ipsius itaque solidi* ABZE *plana opposita, similia, æqualia, & parallelogramma esse ostendimus. Si itaque solidum parallelis & quadrangulis planis, &c.*

MONITVM.

Hanc demonstraturus Campanus idem præfert demonstrationi, quod solent incertarum professionum interpretes distrahentis propositi sententiis seipsas non tollerantibus, ab illarum etenim natura hoc theorema depromptum esse arbitramur. Nam cùm id quod fieri non potest ab exemplari sibi propositum viderit, scilicet solidum sub parallelis planis comprehensum, producere parallela eius opposita plana, necessariò parallelogramma, percipit huiusmodi falsam intelligentiam ad veriorem esse reducendam, quapropter ab hac orditur voce, quicquid dicant alij, quæ patulæ testatur eum non eius fuisse sententiæ, quæ ab Euclide ad nos (non incorrupta) delata est, attamen solidum parallelogrammum impropriè denominans verum parallelepipedum esse hac demonstratione concludere conatur. Theon verò (vt sæpius) particulari vtitur demonstrandi forma, vt tantùm parallelogramma ostendisse arbitretur, si ex parallelis oppositis planis, contentum fuerit solidum, vnde illud absurdum sequetur exagonas, octogonas, & quaslibet parium numero laterum poligonas species, parallelogramma dici posse. Et idcirco solidum istud (quod tandem parallelepipedum dici reperietur) plana opposita, exagona, octogona, & alia plura minimè parallelogramma recipere, quæ sequentibus theorematis immensa producerent dissidia. Quare veritatem geometricam tantùm aspectantes, arbitramur hoc nusquam vsum fuisse Euclidem, vt per ea quæ subsequentur, perspicuè noscemus. Quæ prænoscentes primi diffinitionibus parallelogrammi diffinitionem non antea diffinitam coniunximus, à qua parallelepipedi in solidis orta est forma, cuius rursus diffinitionem (iuxta veriorem Euclidis sententiam) huius vndecimi diffinitionibus copulauimus. Quod quidem hoc theoremate componendum sub hypothesi parallelorum quadrangulorum, solidum aliquod claudentium proposuimus, vt inde necessariò oriantur opposita eius latera parallelogramma æqualia, cui insuper contulimus similia esse ipsa parallelogramma, vt amplior euadat geometriæ facultas, futuris demonstrandis. Si verò Theonis & Campani hypothesim recepissemus Octahedrum Icosahedrum, & Dodecahedrum (quàm absurda) facilè huius conclusioni ac quamplura alia adaptare licuisset, quod vitandmm monemus.

Propositio vigesimaquinta.

Si solidum parallelepipedum plano secetur, parallelo existente eis quæ ex opposito planis, erunt basis sectiones inter se, vt solidi sectiones inter se.



Proponatur ſolidum inquam parallelepipedum AT DR *quod ſecetur plano* EV *parallelo exiſtente ipſis* AR TD *oppoſitis planis: Dico eſſe ſicut* AI *ad* IT *baſis ſectiones ſic* AV *ad* VT *ſolidi ſectiones, ponantur rectæ ipſi* AE *æquales quotlibet in rectum* EA AK, *aliæq; quotuis ipſi* ET *æquales in rectum fiant* ET TM MN. *Perficiantur item parallelogramma* AC TL LN. *Et exinde productis æqualibus parallelis perficiantur ſolida* AP TO MQ, *totum* CS *ſolidum componentia. Quoniam parallelepipedum eſt (ex hypotheſi)* AT DR, *quadrangula erunt & parallela* BT RG *oppoſita plana, per* 25 *diffinit. huius. Et inſuper (ex præfata) æqualia ſimilia & parallelogramma erunt. Cùm autem* AR EV *&* TD *parallela plana, plano* BT *ſecentur, parallelæ erunt* AB EI, *per decimamſextam huius. Et ideo parallelogrammum erit* AI, *ſimiliter parallelogramma erunt,* IT VG *&* VF. *Quia verò æquales ſunt rectæ* EA AK *&* AB KC, *& æquos angulos continent, cùm ſint parallelæ, per vigeſimamoctauam primi, æqualia (per primam ſexti) erunt parallelogramma* AI AC, *& ſimilia, eadem lege æqualia oſtendentur eſſe* BP BV *&* KF FE, *ſicq; reliqua. Et proinde ſolidum* AP *ſolido* AV *æquum erit, & ſimile (per octauam diffinitionem huius.) Haud ſecus ſimilia & æqualia oſtendentur* ED TO MQ *ſolida eſſe. Totum igitur* EK PV *ſolidum æquè multiplex eſt ſolidi* EA RV, *quotuplex eſt* EC *planum ipſius* AI *plani, ſcilicet quotuplex eſt* EK *recta ipſius* EA. *Eodem patet argumento totum* NV *æquè multiplex eſſe ipſius* TV, *quotuplex eſt* NI *ipſius* TI. *Scilicet quotuplex* NE *rectæ* TE. *Si igitur* EC *planum excedit, æquatur, vel deficit,* NI *plano, ſolidum* EP *(quauis facta multiplicatione) excedit, æquatur, vel deficit, ſolido* EQ. *Quatuor itaque ſunt magnitudines* AI IT *plana &* AV VT *ſolida, quarum primæ & tertiæ æquè multiplicia,* EC *planum &* EP *ſolidum, vnà excedunt, vnà æquantur, vel ſimul deficiunt, ab æquè multiplicibus ſecundæ & quartæ,* IT *plani &* VT *ſolidi, quæ fuerũt* IN *planum & ſolidum* EQ. *Iuxta quamuis multiplicationem ductis, ſimplices igitur earum* AI *ad* IT *plana, eandem habebunt rationem quam* AV *ad* VT *ſolida, per quintam diffinitionem quinti. Si itaque ſolidum parallelepipedum plano, &c.*

Corollarium primum.

Si Priſma plano ſecetur parallelo eis quæ ex oppoſito planis, erunt ad ſe Priſmatis ſectiones, vt baſis ſectiones ad ſe. *Nam baſium quæ parallelogrãmæ ſunt (per vndecimam diffinitionem huius) ſectiones, parallelogrammæ ſimiliter erunt, per decimamſextam huius, cùm planum ſecans oppoſitis ſit parallelum, & inſuper æquiangulæ. Quare ſi ipſis baſibus (productis rectis) ſimiles & æquales addantur baſes, vt diximus in parallelepipedo, fient ab ipſis ſectionibus ſimilia quotuis Priſmata, vt quamlibet Priſmatis ſectionem, quauis multiplicatione ductam, per multiplicium baſium & ſectionum communem exceſſum, æqualitatem, vel defectum, ad quamlibet aliam ſectionem eam ſeruare quam baſis ſectiones inter ſe ſeruant rationem, eadem arte doceatur, ex quinta diffinitione quinti.*

Corollarium ſecundum.

Solida quorum bina plana quæ ex oppoſito ſunt polipogona, ſimilia, æqualia, & parellela, reliqua quæ neceſſario erunt parallelogramma. Plano parallelo ipſis ex oppoſito planis ſecta, habebunt baſis ſectiones ad ſe, vt ſolidi ſectiones ad ſe. *Illud enim manifeſtum oſtenditur. Nam huiuſmodi ſolida in Priſmata ſecantur, quæ commune vnum habent latus, axem ſcilicet rectam lineam quæ per baſium oppoſitarum centra ducitur. Quare quot baſibus parallelogrammis concludentur oppoſita poligona, totidem Priſmatis componetur totum illud ſolidum. Nam ea poligona in totidem ſimilia diuiduntur triangula, per vigeſimam ſexti, quæ Priſmata deſcribunt. Quæ quidem Priſmata (per præcedens corollarium) ſectiones baſium ſectionibus proportionales efficiunt. Quare (per duodecimam quinti) ſicut vnius ſectiones ad ſe, ſic erunt totius ſectiones ad ſe. Horum ſolidorum infinitæ ſunt ſpecies, iuxta varietatem poligonorum oppoſitorum, & parallelorum, quæ poligona angulos circunſtantium parallelogrammorum proſitus diuerſitate mutant. Sed hæc propoſito nulla arte obeſſe poſſunt, quin idem ſemper ſequatur, quod oſtendimus. Cùm ſemper parallelogram-*

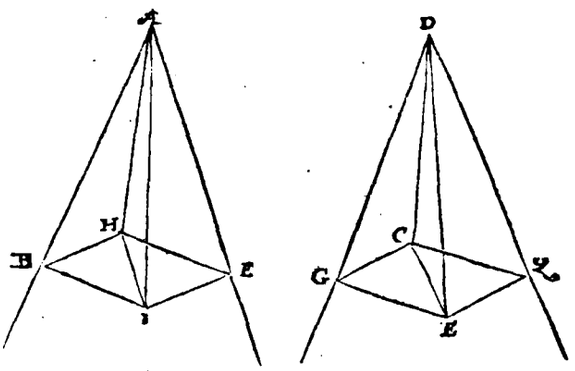
ma ſint quæ circunſtant plana.

Corollarium tertium.

Præfata ſolida ex Priſmatis compoſita, plano parallelo oppoſitis planis ſecta, ad ſe ſunt vt ſecti vertices. *Nã ad ſe fuerũt vt baſes, quæ ad ſe ſunt vt rectæ ſuper quibus degunt, per primam ſexti, cùm ſint parallelogramma, quæ rectæ ſunt Priſmatum vertices.*

Propoſitio vigeſimaſexta. *Problema 4.*

Ad datam rectam lineã, ádque in ea ſignum, dato ſolido angulo, æquum ſolidum angulum conſtituere.



Recta linea data ſit A B, *ad datum in ea ſignum* A, *conſtituendus eſt ſolidus angulus dato ſolido qui ad* D *æqualis, qui comprehẽditur ſub* G D Z G D E E D Z, *planis quotuis angulis. quoniam ipſi* G D Z G D E E D Z *non ſint in eodem plano, per nonam diffinitionem huius. A recta* D E *& contingenti eius ſigno* E *in planũ rectarũ* G D D Z *perpendicularis agatur (per vndecimam huius)* E C. *In ipſis porro* D G D Z *ſumantur contingentia ſigna* G *&* Z, *cõiungantúrque* C D C G C Z G E E Z. *Ad rectam autem* A B *ſignúmque eius* A, *dato angulo* G D Z, *æqualis conſtituatur* B A F, *per 23 primi, ſecentúrque ipſis* D G D Z *æquales* A B A F. *Ruſus ad eandem* A B *ſignúmque eius* A *dato* G D C *angulo æqualis ponatur* B A H, *in plano* B A F: *ſecetur verò ipſi* D C *æqualis* A H. *A ſigno verò* H *ipſi plano* B A F G *perpendicularis excitetur* H I, *per* 12 *huius, quæ æqualis ponatur ipſi* C E, *coniunctis* I A I B I F H B H F: *Dico angulum ſolidum qui ad* A *æquum eſſe ei qui ad* D: *quoniam æqualis eſt angulus* B A H *ipſi* G D C, *& totus* B A F *toti* G D Z, *ex hypotheſi, reliquus* H A F *reliquo* C D Z *æquus erit, per* 19 *quinti: quia verò æquales ſunt* A B A H A F, *rectis* D G D C D Z *per conſtructionem. Baſes igitur* B H H F *baſibus* G C C Z *æquales erunt, per* 4 *primi. Quoniam item rectæ* H I E C *ſunt rectæ ad plana* B A F G D Z, *anguli* I H A I H B I H F, *necnon* E C D E C G E C Z, *ſunt recti, per ſecundam diffinitionem huius, & ideo æquales: ſed & æquis lateribus contenti ſcilicet* I H B *ipſi* E C G *&* I H A *ipſi* E C D *ac* I H F *ipſi* E C Z. *Baſes itaque (per eandem quartam primi)* I B I A I F, *baſibus* E G E D E Z *æquales erunt: ſed triãgulorum* A B I *&* D G E *duo latera* A B A I *duobus* D G D E, *& baſis* B I *baſi* G E *ſunt æqualia. Anguli igitur* B A I *&* G D E *(per 8 primi) ſunt æquales, & ſimiliter triãgulorum* I A F E D Z *binalatera & baſes ſunt æquales, & (per eadem) anguli* I A F *&* E D Z *æquales erũt. Atqui æquales fuerunt (ex hypotheſi) reliqui* B A F G D Z: *anguli igitur plani* B A F B A I I A F, *planis* G D Z G D E E D Z *æquales angulis multitudine & magnitudine, ſolidos qui ad* A *&* D *efficiunt: anguli igitur ſolidi qui ad* A *&* D *ſunt æquales, per octauam diffinitionem huius. Ad datam itaque rectam lineam ádque in ea, &c.*

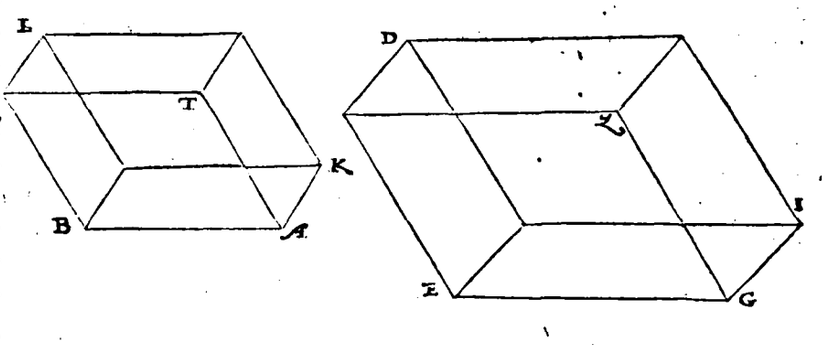
Hæc de trigonis angulis ſolidis demonſtrata ſolùm fuêre, vt quotcunque poligonis angulis deſeruiant. Nam omne poligonum in triangula reſolui diximus ſimilia, vigeſima ſexti: quare ſuper quauis trigoni anguli ſolidi facie alius trigonus angulus conſtitui poteſt, per hanc, & ſic quotcunque angulos poligonos ſolidos componentes, plani ſuperaddi poterunt, donec referatur optatus angulus ſolidus.

Propoſitio vigeſimaſeptima. *Problema 5.*

Ex data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

Propon

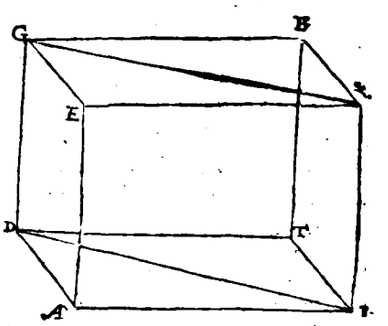
Proponatur ex data recta A B, *dato* G D *ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum deſcribendum eſſe. Ad rectam* A B *& ſignum eius* A *angulo ſolido* G *æqualis angulus ſolidus conſtituatur* B A T K, *per præfatam, erunt igitur æquales anguli plani* B A T *ipſi* E G Z, *&* T A K *ipſi* Z G I, *ac* B A K *ipſi* E G I. *Fiat autem (per* 12 *ſexti) ſicut* E G *ad* G I, *ſic* B A *ad* A K, *ſicut* G I *ad* G Z, *ſic (per eandem)* A K *ad* A T. *Erit idcirco æqua ratione ſicut* E G *ad* G Z, *ſic* B A *ad* A T, *per* 22 *quinti, ſub ipſis* A B A K *parallelogrãmum fiat* B K, *ſub* A B A T *verò* B T, *ſub* A T A K *autem* T K. *Similia igitur erũt* B K B T T K *parallelogramma, ipſis* E I E Z Z I *parallelogrammis, per primam diffinitionem ſexti: ipſis porro* B K B T T K *oppoſita quadrangula parallela deſcribantur, ductis parallelis, quæ ſint* L T L K L B, *per corollarium* 15 *huius: ipſa oppoſita erunt parallelogramma ſimilia & æqualia, ſolidum* A L *conſtruentia, per* 24 *huius. Parallelepipedum itaque erit* A L, *per* 25 *diffinitionem huius, & ipſi* G D *parallelepipedo ſimile cum conſtet ſimilibus & totidem planis, per ſeptimam diffinitionem huius, ſimilitérque eſt poſitum, per ea quæ diximus ſuper prima diffinitione ſexti, cùm ad eaſdem partes æquales producat angulos. Ex data igitur recta linea* A B, *dato ſolido parallelepipedo* G D, *ſimile ſimilitérque poſitum parallelepipedum* A L *deſcripſimus.*



Propoſitio vigeſimaoctaua.

Si ſolidum parallelepipedũ plano ſecetur per diagonios eorum quæ ex oppoſito planorum, ſolidum ſecabitur ab eo plano bifariam.

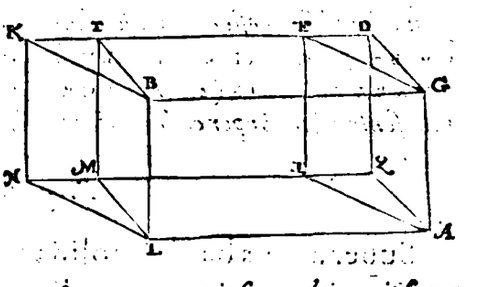
Secetur ſolidum parallelepipedum A B *per planum* G D I Z, *conſtitutum in dimetientibus* G Z *&* D I *planorum* B E *&* T A *oppoſitorum: Dico ſolidum* A B *per planum* G D I Z *bifariam ſecari. Cùm enim parallelogramma ſint* B E T A *quæ ex oppoſito (per* 24 *huius) ſimilia & æqualia. Dimetientes* G Z *&* D I *bifariam ipſa ſecant, per* 34 *primi: & proinde totum* A B *ſolidum in bina ſecatur Priſmata, ſcilicet* G B Z I T D *&* G E Z I A D, *per undecimã diffinitionem huius. Quæ Priſmata ſimilibus parallelogrammis & æqualibus conſtant, per* 24 *huius, cùm bina ſint binis oppoſita, reliquum verò commune ſecans, triangulíſque ſimilibus & æquis, nempe dimidiis ſimilium & æquarum baſium oppoſitarum, per* 20 *ſexti. Ipſa itaque bina Priſmata ſunt (per* 8 *diffinitionẽ huius) ſimilia & æqualia. Et proinde totum* A B *ſolidum per planum* G D I Z *(bina illa diſcernens Priſmata) bifariam ſectum eſt. Si itaque ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios, &c.*



Propoſitio vigeſimanona.

Super eadem baſi, & ſub eadem altitudine ſolida parallelepipeda conſiſtentia, quorum ſtantes ſunt in eiſdem rectis lineis, inuicem ſunt æqualia.

Sint inquam bina ſolida parallelepipeda A Z T B *&* A I K B, *ſuper eadem baſi* A B *conſtituta, & ſub eadem altitudine (ſcilicet parallelarum)* B Ω *&* T D, *quorum ſolidorum ſtantes (hoc eſt quatuor ſolidi latera in baſim cadentia, vt* A Z G D B T L M *ſolidi* A T, *&* A I G E B K L N *ſolidi* A K) *ſint in eiſdem rectis lineis, ſiue parallelis* N Z *et* K D: *Dico ea ſolida* A T *&* A K *eſſe æqualia, Quoniã (ex diffinitione parallelepipedi & vigeſimaquarta huius) patet, plana oppoſita eſſe ſimilia æqualia & parallela, æqualia erunt* A M *ipſi* G T *&* A N *ipſi* G K



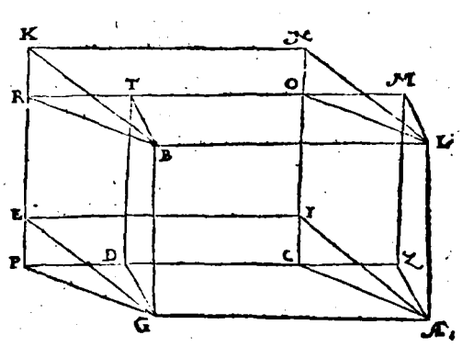
ſed AM *ipſi* AN *ſuper eiſdem baſi & vertice (per trigeſimamquintam primi) æquum eſt, communi ablato trapezio* ALMI *reliqua triangula* NML IZA *ſunt æqualia. Similiter & reliqua* KTB *&* EDG *erunt inter ſe æqualia, & præfatis, nam baſes baſibus fuerunt æquales, quarum oppoſitæ æqualibus angulis & lateribus clauduntur, per parallelepipedorũ conſtructionem. Bina itaque Priſmata* KTB LMN *&* EDG AZI *(ſimilibus triangulis & parallelogrammis multitudine & magnitudine æqualibus, compoſita) æqualia erunt, per octauam diffinitionem huius. Commune autem eis addatur ſolidum inter baſes,* ABIT *comprehenſum, ſequetur totum* ABIK *parallelepipedum toti* ABZT *æquum eſſe, hoc eſt* AT, *ipſi* AK *ſolido. Super eadem igitur baſi & ſub eadem altitudine, &c,*

MONITVM.

Stantes dicemus eſſe quatuor rectas cuiuſlibet parallelepipedi, angulos ſupremæ & infimæ baſium coniungentes, quæ quidem iuxta ſolidorum diuerſitatem angulorum, aut perpendiculares in baſim, aut equidem ad obliquos cadunt angulos, cùm autem hoc & ſequenti theoremate ſolidorum collatorum eadem ſupponatur baſis, ſtantes manifeſtum eſt in eiſdem parallelis ad baſim degere, nempe ad duo baſis quæque latera: quia verò duo ponuntur ſolida ſuper eadem baſi, ac eadem altitudine, binæ ſolidorum ſupremæ baſes, diuerſo ſitu collocari poſſunt. Nam cùm ſint æquales & ſimiles (ex vigeſimaquarta huius) aut inter eaſdem parallelas collocari poſſunt, tum quidem ſtantes in eiſdem parallelis ſiue rectis lineis eſſe dicentur in vtroque ſolido, cùm ſcilicet bina ſupremarum baſium latera eiſdem foueantur parallelis, ſi conuerſo bina eadem latera ſupremarum baſium eiſdem rectis ſiue parallelis non contineantur, nec ſtantes ipſis lateribus coniunctæ, in eiſdem rectis aut parallelis eſſe credentur. Hac de cauſa ſtantes eaſdem rectas lineas poſſidere intelligemus, cùm ſupremarum baſium latera (bina ſaltem) rectis lineis eiſdem continebuntur, quod ſupponit hac vigeſimanona. In eiſdem verò non eſſe rectis cùm nulla bina ſupremarum baſium latera eiſdem rectis claudentur, & illud ſupponet proxima.

Propoſitio trigeſima.

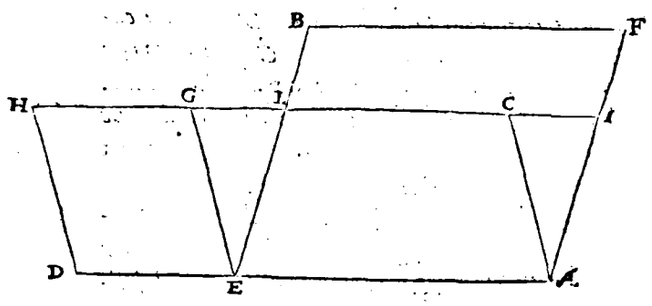
Super eadem baſi & ſub eadem altitudine exiſtentia ſolida parallelepipeda, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis, inuicem ſunt æqualia.



Conſtituantur ſolida parallelepipeda ABZT ABIK *ſuper eadem baſi* AB, *& eadem altitudine (parallelarum* AG ZP) *quorum ſtantes* AZ GD BT LM *ſolidi* AT *&* AI GE BK LN *ſolidi* ABIK *non ſint in eiſdem rectis lineis: Dico ipſa* ABZT *&* ABIK *ſolida eſſe æqualia, cùm ſupremæ propoſitorum ſolidorum baſes* ZT *&* IK *ſint in eodem plano ex hypotheſi altitudinis: producatur recta* NI *vſque ad rectam* ZD *in* C, *&* MT *vſque ad rectam* KE *in* R, *At* ZD *&* KE *concurrant in* P, *coniunctis* CA PG RB *&* OL *rectis: quoniam enim æqualis eſt recta* OR *ipſi* NK, *&* OC *ipſi* MZ, *cùm ſint parallelæ, & parallelis coniunctæ, per conſtructionem parallelepipedorũ, æqualia erunt* OP *&* NE *plana, & ipſis æquum erit* MD *eadem cauſa, ſed & æquiangula, per vigeſimãnonã primi, cùm ſint ex hypotheſi, in eodem plano. Solidũ igitur* ABZT *& id quod inter* AB *&* CR *plana comprehenditur, habent ſtantes* AZ GD BT LM, *&* AC GP BR *&* LO *in eiſdem rectis* AG PZ *&* BL RM. *Ipſa igitur* ABZT *&* ABCR *ſolida (per præcedentem) ſunt æqualia, haud ſecus oſtendemus ſolidum idem* ABCR *ſolido* ABIK *æquum eſſe, cùm eorum ſtantes* AC GP BR LO *cum* AI GE BK LN *ſint in eiſdem rectis* AL NC, *&* GB KP, *per eandem, ſolida itaque* ABZT *&* ABIK *(eidem* ABCR *ſolido æqualia oſtenſa) adinuicem erunt æqualia, per communem ſententiam. Super eadem igitur baſi, & ſub eadem, &c.*

Propoſitio trigeſimaprima.

Super æquis baſibus ſolida parellelepipeda exiſtentia & ſub eadem altitudine, inuicem ſunt æqualia.



Proponantur æquales baſes (tamen ad tutiorẽ intelligẽtiam omnino diſſimiles) AEBF ADHC, *quarum vnum cuiuſque latus in eandem rectam cõcurrant* AED, *ac baſes* AB AH, *in idem planum (ex vigeſimaſeptima huius) ſuper quibus ſolida parallelepipeda eiuſdem altitudinis conſtructa eſſe ſupponantur: Dico quod ſuper* AB *ſolidum, ei quod ſuper* AH *ſolido æquum eſſe. Per ſignum* E *ipſi* AC *parallela fiat* EG, *quæ ſi extra baſim* AB *cadat, producatur recta* HC *in* I. *Quoniam parallelogramma ſunt* AB AH, *per vigeſimamquartam huius, æquilatera adinuicem erunt triangula* ACI EGL. *Et (per quartam primi) æquiangula & æqualia, ac (per primam diffinit. ſexti & 4 eiuſdem) ſimilia. Super ipſis igitur triangulis erecta Priſmata eiuſdem altitudinis cum ſolidis ex* AB AH, *æqualia & ſimilia erũt, per octauam diffinitionem huius. Nam concluduntur ſub ſimilibus planis multitudine & magnitudine æqualibus. Commune ipſis addatur quod ſuper* ACLB *ſolidum, ſequetur quod ſuper* AEGC *ſolidum, æquum eſſe ei quod ſuper* ABLI *ſolido. Cùm autem* AEBF *&* ADHC *plana (ex hypotheſi) ſint æqualia, & ablatum* AG *ablato* AL *æquum fuerit. Reliquum* BI *reliquo* GD *æquum erit. Erit igitur ſicut* AG *ad* GD *ſic* AL *ad* BI *(nempe æquales ad æquales) Sed ſicut* AG *ad* GD *ſic ſolidum quod ſuper* AG *ad ſolidum quod ſuper* GD, *per vigeſimamquintam huius, ſecatur enim plano ſuper* GB *parallelo oppoſitis. Sicut ẽ ſimiliter* AL *ad* BI, *ſic quod ſuper* AL *ad quod ſuper* BI: *Erit itaque (per vndecimam quinti) ſicut quod ex* AG *(vel* AL *ſibi æquum) ſolidum, ad quod ex* GD, *ſic idem quod ex* AG *vel* AL, *ad quod ex* IB *ſolidum. Æqualia igitur erunt (per ſecundam partem nonæ quinti) quæ ſuper* GD *&* BI *ſolida. Quibus æqualia addita ſcilicet quod ſuper* AG *ipſi* GD, *quod verò ſuper* AL *ipſi* BI. *Tota itaque quæ ſuper* AH *& ſuper* AB *ſolida erunt æqualia, per communem ſententiam. Super æquis igitur baſibus, &c.*

Corollarium.

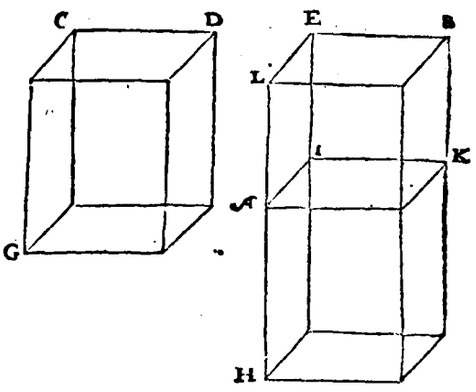
Super æquis baſibus ſolida parallelepipeda exiſtentia, ad ſe ſunt vt vertices. *Nam ſi ea ſecetur plano parallelo baſibus, erunt ad ſe ſectiones vt baſium ſectarum ſectiones, per vigeſimamquintam huius. Quæ ſectiones baſium ad ſe ſunt vt latera ſeu ſolidorum vertices, per primam ſexti. Solida igitur ad ſe erunt vt vertices. Si verò baſes ſint diſſimiles, idem continget, ex corollario vigeſimæquintæ huius, quod in ſimilibus ex vigeſimaquinta oſtenſum eſt.*

MONITVM.

Quia Campanus hanc ſat parcè, Theon verò prolixè admodum demonſtrarunt, demonſtratione alia hoc idem oſtendimus, qua ſolidorum tantùm baſes pro figura obtulimus, eò quòd iam ſuper eadem baſi quoquò ſe vertant ſtantes, parallelepipeda æqualia eſſe diximus, ſub eodem faſtigio, proximè præfatis. Quare per baſium comparationes idem oſtendiſſe facilius apparuit eadem ſuppoſita altitudine.

Propoſitio trigeſimaſecunda.

Sub eadem altitudine exiſtentia ſolida parallelepipeda, ad ſeinuicem ſunt vt baſes.



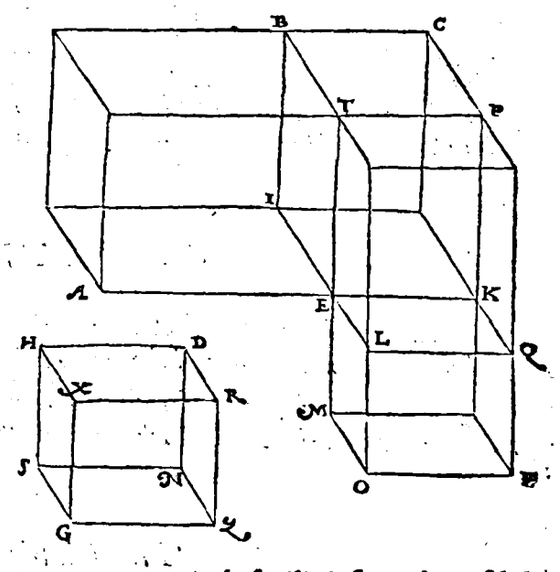
Sint bina ſolida parallelepipeda AB *&* GD *ſub eadem altitudine exiſtentia, ſcilicet* CD *&* EB: *Dico eſſe vt baſis* GC *ad baſim* AE, *ſic ſolidum* GD *ad ſolidum* AB. *Producantur rectæ* LA EI *in rectum, ad rectámque* AI *æquale parallelogrammum ipſi* GC *in angulo* HAI *(per quadrageſimamquintam primi) conſtituamus,* HI: *Productis verò* BK *& reliquis parallelis ductis fiant parallelogramma oppoſita, & exinde ſolidum* HK *ſuper baſi* HI *& altitudine* IK, *æquiangula igitur erunt ſolida* AB HK, *per decimam huius, cùm omnes lineæ & plana ex oppoſito ſint parallela. Sed æquum erit* HK *ſolidum ipſi* GD *ſolido, per præfatam, ſub æquis baſibus* HI GC *& æqua altitudine* IK CD, *ex hypotheſi. Eſt autem ſicut* HI *baſis ad* AE *baſim, ſic* HK *ſolidum ad* AB *ſolidum, per vigeſimamquintam huius. Secatur enim totum* HB *plano* AK *parallelo oppoſitis. Sed ſicut* HK *ad* AB *ſic* GD *ad idem* AB, *per ſeptimam quinti. Sicut igitur* HI *(vel* GC *ſibi æqualis) ad* AE *baſes, ſic* GD *ad* AB *ſolida. Sub eadem igitur altitudine exiſtentia, &c.*

Corollarium.

AEqualia parallelepipeda eiuſdem altitudinis æquales habent baſes. *Nam ſi inæquales haberent inæqualia eſſent, per hanc. Et æqualia æquas baſes habentia eandem habebunt altitudinem, Nam ſi maiorem haberent, excederent æqualia, quæ eandem habent: Si verò minorem, deficerent tanto ab eiſdem æqualibus.*

Propoſitio trigeſimatertia.

Similia ſolida parallelepipeda, adinuicem in tripla ſunt ratione laterum ſimilis rationis.



Proponantur bina ſolida parallelepipeda AB *&* GD *ſimilia, vt ſcilicet* AE ET EI *ſint ſimilis rationis ipſis* GZ ZR ZN: *Dico ipſius* AB *ſolidi ad* GD *ſolidum, triplam eſſe rationem rationis* AE *lateris ad* GZ *latus, extendatur in rectũ* AE *in* K, *ſit q.* EK *æqualis ipſi* GZ, *vel* HD, *ac* IE *in* L *ſit q.* EL *ipſi* HX *æqualis,* TE *verò in* M; *ſit q.* EM *ipſi* HS *æqualis, ſub ipſis autem* EK EL EM *perficiantur parallelogrãma, & exinde parallelepipedum, ductis parallelis, ſit q.* EF OK *ſolidum, quoniam ſolidorum* AB *&* EF *anguli plani qui ad verticem* E *ſunt æquales, ſcilicet* AEI *ipſi* KEL, *&* AET *ipſi* KEM, *ac* IET *ipſi* LEM, *æquiangula erunt* AB *&* EF *ſolida, quia verò circum æquales angulos qui ad* E *latera ſunt proportionalia, ex hypotheſi, cùm ſint æqualia lateribus ſolidi* GD, *quod ſimile fuit poſitum ſolido* AB: *ſimilibus parallelogrammis deſcripta erunt, ac proinde ſimilia ipſa* AB *&* EF *ſolida, per ſeptimam diffinitionem huius, ſimilia verò & æqualia erunt* EF *&* GD *ſolida. Nam æquilatera adinuicem (ex conſtructione) ac eidem* AB *æquiangula, æqualia habent plana, totidémque numero, per octauam diffinitionem huius. Sub rectis item* EL EK ET *perficiantur parallelogramma, & ductis parallelis, concludatur ſolidum* LP: *ſub rectis verò* EI ET EK *fiat non ſecus ſolidum parallelepipedum* EC: *cùm autem (ex hypotheſi) proportionales ſint* AE EI ET *rectis* HD HX HS, *ipſæ proportionales erunt (per ſeptimam quinti) rectis* EK ET EM, *ipſis (ex hypotheſi) æqualibus poſitis. Erit igitur* AE *ad* EK *ſicut* IE *ad* EL *ſicútque* TE *ad* EM, *ſed ſicut* AE *ad* EK *ſic parallelogramma* AI *ad*

IK,

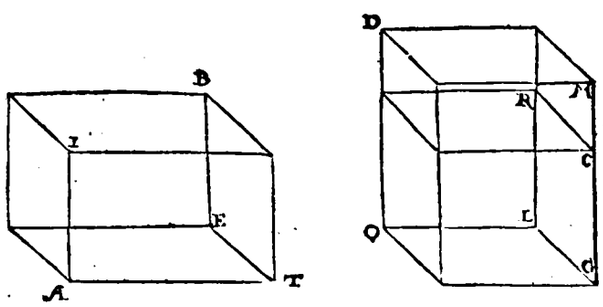
IK, *per primam ſexti, ſicut verò* IE *ad* EL, *ſic* IK *ad* KL, *ſicútque* TE *ad* EM *ſic* TK *ad* KM: *erunt igitur (per vndecimam quinti)* AI *ad* IK *vt* IK *ad* KL, *vtque* TK *ad* KM *plana: ſed ſicut* AI *ad* IK *baſes, ſic* AB *ad* EC *ſolida (per proximam) fuerunt, ſicut verò ſimiliter* IK *ad* KL, *ſic idem* EC *ad* LP, *ſicútque* TK *ad* KM, *ſic idem* LP *ad* EF: *continua igitur ratione proportionalia erunt* AB EC LP *&* EF *ſolida, per ſeptimam diffinitionem quinti. Primum itaque* AB *ad quartum* EF *triplam habet rationem quam idem primum* AB *ad ſecundum* EC, *per decimam diffinitionem quinti, ſicut autẽ fuit primum* AB *ad ſecundum* EC, *ſic fuit primi latus* AE *ad quarti latus* EK. *Solidum igitur* AB *ad ſolidum* EF *triplam habet rationem quam latus* AE *ad latus* EK *ſimilis rationis: & igitur eandem habet* AB *ad* GD *triplam, quam* AE *latus ad* GZ *latus, cùm fuerint (ex hypotheſi) æqualia & ſimilia* EF *&* GD. *Similia itaque ſolida parallelepipeda, &c.*

Corollarium.

Si quatuor rectæ continuæ proportionales fuerint, erit prima ad quartam ſicut quod à prima parallelepipedum ad id quod à ſecunda, ſimile ſimilitérque deſcriptum. *Nã prima ad quartam triplam habet quam ad ſecundam, & quod à prima ſimiliter ad id quod à ſecunda, oſtenſum eſt habere triplam quam latera rationem. Si quatuor igitur rectæ, &c.*

Propoſitio trigeſimaquarta.

Æqualium ſolidorum parallelepipedorum reciprocæ ſunt baſes altitudinibus. Et ſolida parallelepipeda quorũ baſes altitudinibus ſunt reciprocæ, ſunt æqualia.



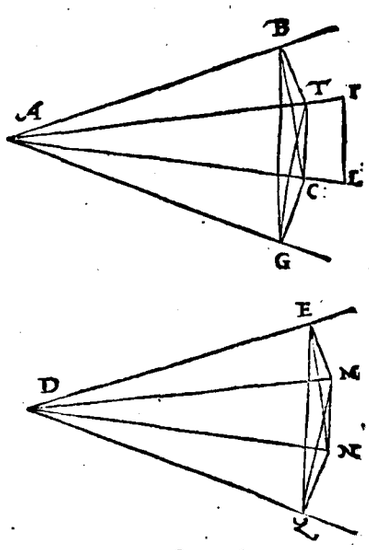
Supponantur ad primæ partis diſcuſſionem bina parallelepipeda, AB *&* GD *eſſe æqualia: Dico eorum baſes* AE *ad* GO *ſic ſe habere reciprocè, vt earum altitudines* GM *ad* AI, *ſint prius ipſæ* GM AI *ad baſes rectæ, quoniam æqualia ſunt (ex hypotheſi) ſolida, ſi baſes æquales ſint, æquales erunt vertices, & è contra, per corollarium trigeſimæ ſecundæ huius, ſicq; reciprocè, nam eandem habent rationem, cùm ſint æquales. Si verò inæquales ſint baſes, inæquales erunt vertices, & è contrà, per idem corollarium, ſint igitur inæquales baſes ac vertices, iuxta poſitum, quoniam inæquales ſunt baſes & altitudines, eſto baſis maior* AE *ipſa* GO, *ſequetur altitudinem ipſius* GD (*quæ ſit* GM) *eſſe maiorem ipſa* AI, *nam minor eſſe non poteſt, cùm nec etiã æqualis eſſe poſſit, eò quòd maius eſſet* AB (*ſuper maiori baſi*) *ipſo* GD, *per trigeſimam ſecundam huius. Multo igitur maius eſſet idem* AB *ipſo* GD. *ſi* GM *minorem ipſa* AI *haberet altitudinẽ. Quare maior erit* GM *altitudo altitudine* AI, *ipſi itaque* AI *æqualis ponatur* GC, *per ſignum verò* C *ſecetur ſolidum* GD, *ducto parallelo ipſi* GO *plano, per corollarium* 15 *huius, quoniam ſub eodem vertice ſunt* AB *&* OC *parallelepipeda, ad ſe erunt vt baſes, per trigeſimam ſecũdam huius. Sicut igitur* AE *ad* GO *ſic eſt ſolidum* AB *ad* OC, *ſed ſicut* AB *ad* OC *ſic (per ſeptimam quinti)* MO *ad idem* OC, *cùm ſint* AB *&* MO, *hoc eſt* DG *æqualia, ſicut itaque* AE *ad* GO *baſes, ſic* MO *ad* CO *ſolida. Eſt autem ſicut* MO *ad* CO *ſolida, ſic* ML *ad* CL *baſes, per trigeſimam ſecundam huius: ſicut verò* ML *ad* CL *ſic* MG *ad* CG *rectæ, per primam ſexti. Sicut itaque (per vndecimã quinti)* ML *ad* CL, *aut* MO *ad* CO, *aut* AE *ad* GO *baſes, ſic reciprocè* MG *ad* CG (*vel* AI) *altitudines. Ad ſecundam verò partem ſupponantur* AE *ad* GO *baſes, vt* MG *ad* AI *vertices, & vt prius fiat* CG *æqualis ipſi* AI, *erit ideo* AE *ad* GO *ſicut* GM *ad* GC, *ſed vt* AE *ad* GO *ſic (per trigeſimam ſecundam huius)* AB *ad* CO, *ſub eodem vertice. Sicut itaque* GM *ad* GC *ſic* AB *ad* CO *ſolida, ſed ſicut* GM *ad* GC, *ſic (per primã ſexti)* ML *ad* CL *parallelogramma, ſicque (per trigeſimam ſecundam huius)* MO *ad* GO *ſolida, ſicut itaq;* AB *ad* CO *ſolida, ſic* MO *ad idem* CO, *quare æqualia erunt* MO (*hoc eſt* GD) *&* AB *ſolida, per nonam quinti, quorum quidem baſes* AE *ad* GO *reciprocè fuerunt altitudinibus* MG *ad* AI *proportionales. Æqualium igitur ſolidorum parallelepipedorum, &c.*

MONITVM.

Hæc demoſtrata ſunt vbi ſtantes ſunt baſibus perpendiculares, tum idem neceſſe accidit, licet in vtramuis partem inclinentur, per 29 & 30 huius: nam ea ſolida ſolidis rectangulis eiuſdem verticis ſemper ſunt æqualia. Si itaque ſuper propoſitorũ oxigoniorum vel ambligoniorum ſolidorum baſi, rectangulum ſub eadem altitudine conſtruatur ſolidum, quæ ſuper rectãgulo demonſtrata ſunt, reliquis ipſis æqualibus conuenire manifeſtum erit, cùm maximæ eædem maneant baſes ac iidem vertices, quorum tantum agimus negotium.

Propoſitio trigeſimaquinta.

Si fuerint bini anguli plani rectilinei æquales, à quorum verticibus ad ſublime rectę lineę ductæ ſint, æquales angulos alterum alteri comprehendentes cum lineis angulos planos continentibus, in ſublimibus autem rectis ſumpta contingentia ſigna, à quibus perpendiculares in plana eorum, qui in principio angulorũ actæ fuerint, à perpẽdicularibus ad angulos coniunctæ rectæ, cùm ſublimibus angulos æquales comprehendent.



Sint bini plani anguli rectilinei æquales BAG *&* EDZ, *ducantur autem ab ipſorum verticibus* A *&* D *extra eorum planum in ſublime, binæ rectæ* AI DM, *æquales angulos cum ipſis* ABAG *&* DEDZ, *ſcilicet* BAI *angulo* EDM: *angulum verò* IAG *ipſi* MDZ *comprehendentes. In ſublimibus autem* AI *&* DM, *in plana ipſorum angulorum* BAG *&* EDZ, *à contingentibus earum ſignis perpendiculares mittantur* IL *&* MN, *coniunctis* LAND *in planis ipſarũ* ABG, *et* DEZ: *Dico angulos* IAL *&* MDN *eſſe æquales. A maiori rectarum* AI DM (*quæ ſit* AI) *minori* DM *æqualis abſcidatur* AT, *Per ſignum verò* T *ipſi* IL *parallela fiat* TC, *ipſa igitur* TC *recta erit ad planum* BAG, *per octauam huius. Nam eidem plano recta fuit* IL: *à ſigno* C *ad rectas* AB AG *perpendiculares agãtur* CB CG: *à ſigno verò* N *ad rectas* DE DZ *rectæ* NE NZ, *cõiunctis* BG EZ TB TG ME MZ, *& quoniam recta eſt* TC *ad planum* ABG, *quod ex* AT *æquum eſt eis quæ ex* TC CA, *per* 47 *primi, quod verò ex* CA *æquum eis quæ ex* CG GA, *quod igitur ex* AT *æquum eſt eis quæ ex* TC CG GA: *eis autem quæ ex* TC CG *æquum eſt quod ex* TG, *per eandẽ, quod itaque ex* AT *æquum eſt eis quæ ex* TG GA. *Rectus itaque erit* AGT *angulus, per* 48 *primi. Similiter cùm quod ex* AT *eis quæ ex* TC CA *æquum ſit, quod ex* CA *autem eis quæ ex* CB BA, *ſequetur quod ex* AT *æquũ eſſe eis quæ ex* TC CB BA. *Eis autem quæ ex* TC CB *æquum erit quod ex* TB, *per* 47 *primi. Quod igitur ex* AT *æquũ erit eis quæ ex* TB BA, *& ideo rectus erit,* ABT *angulus haud ſecus recti oſtendẽtur anguli* DZM *&* DEM *eſſe, nẽpe recta fuit* MN *ad planũ* DEZ, *quia verò binorum triangulorum* ATG DMZ, *duo anguli duobus ſunt æquales, ſcilicet* TAG MDZ, *ex hypotheſi, &* AGTD ZM *recti, vnúmque latus* DM *vni* AT (*ex hypotheſi*) *æquale. Reliquus angulus angulo, & latera lateribus æqualia erunt, per* 26 *primi: eodẽ argumento æqualia erunt, & ſimilia pariter triangula* ATB DME. *Rurſus quoniam æquales oſtenſæ ſunt* AB AG *ipſis* DE DZ *& anguli* BAG EDZ (*ex hypotheſi*) *æquales, baſes* BG EZ (*ex quarta primi*) *æquales erunt, ac reliqui* ABG *ipſi* DEZ, *&* AGB *ipſi* DZE *anguli æquales, reliquus igitur* BGC *reliquo* EZN *æquus erit. Nam bini* DZN *&* AGC *toti recti fuerunt. Eadem cauſa reliquus* GBC *reliquo* ZEN *æquus erit, cùm recti fuerint* ABC DEN *toti, cùm autem æquales ſint* BG *&* EZ, *triangula* BCG *&* ENZ (*per* 26 *primi*) *æqualia erunt ac æquiangula, rectæ itaque* BC CG *binis* EN NZ *æquales erunt. Quare triangula* ACB DNE *duo latera* AB BC *duobus* DE EN *æqualia habentia, & angulos* ABC *&* DEN *æquales, efficient baſes* AC *&* DN *æquales, per quartam primi. Quia verò* AT *binas poteſt* AC CT, *ſimiliter* DM *binas* DN NM, *cùm ſint* (*ex hypotheſi*) *recti* ACT DNM *anguli. Ab æqualibus* AT *&* DM *potẽtiis, æquales tollamus ipſarum* AC *&* DN *potentias, reliquæ* TC MN *potentia baſiũ erunt æquales.*

Et

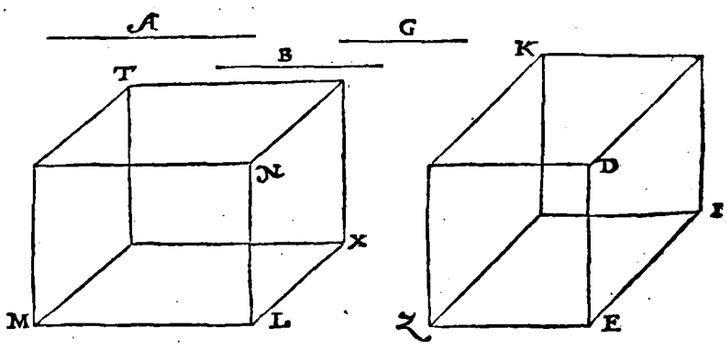
Et proinde TC MN *rectæ æquales erunt, potentiarum quidem latera: quare (per octauam primi) triangula* TAC MDN *æquales angulos* TAC *&* MDN *habebunt, sed ipsi* TAC *idem est* IAL *angulus, æquales igitur sunt anguli* IAL *&* MDN. *Si itaq; fuerint bini anguli plani rectilinei æquales, à quorum verticibus ad sublime, &c.*

Corollarium.

Si ad binos angulos rectilineos planos & æquales, à sublimi ducantur binæ rectæ æquales, æquosque angulos cum lineis angulos planos continentibus, alterũ alteri cõprehendẽtes, à sublimioribus earum signis in plana angulorum (qui in principio) demissæ perpendiculares æquales erunt. *Demonstratum fuit quod sub hac hypothesi rectarum* AT DM *æqualium, rectæ* TC MN *æquales ostensæ fuerint. Non itaque ampliori eget expositione.*

Propositio trigesimasexta.

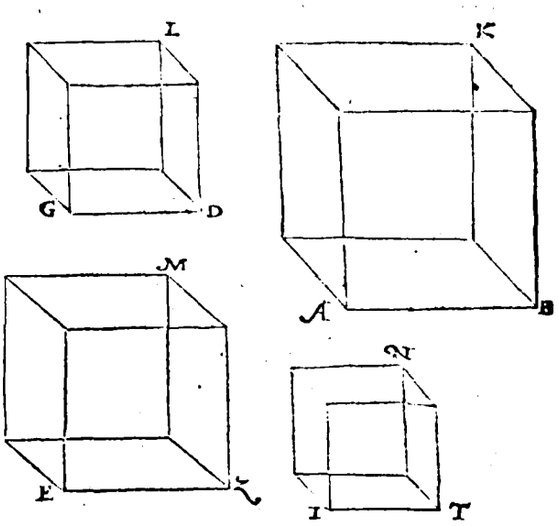
Si tres rectæ lineę proportionales fuerint, ex ipsis tribus solidum parallelepipedum, æquum est ei quod à media fit solido parallelepipedo, æquilatero quidem, æquiangulo autem prędicto.



Sint tres rectæ lineæ proportionales ABG, *ex quibus descriptum sit parallelepipedum* TL, *ex media verò* B *describatur aliud* KB *ipsi* TL *æquiangulum: Dico solidum* TL *æquum esse solido* KE, *quoniã* TL *fit ex tribus* ABG. *Esto ipsi* A *æqualis* ML, *ipsi verò* B *æquetur* NL, *ipsi autem* G *illa ex* L, *mediæ rursus* B *æquentur latera singula solidi* KE. *Sint item bina* TL KE *solida ita æquiangula, vt bini eorum quique anguli solidi, ex similibus angulis planis altero alteri componantur, vt* MLN NLX MLX *ipsis* ZED DEI ZEI *æquẽtur: quoniam (ex hypothesi) inter binas* ML LK *media est proportionalis* ZE *(vel* EI*) erit sicut* ML *ad* ZE, *sic* ZE *(vel* EI *reciprocè) ad* LX *circũ æquales angulos* MLX *&* ZEI, *æqualia itaque sunt plana* MX *&* ZI, *per* 14 *sexti: quia verò ad binos angulos planos & æquales* MLX *&* ZEI, *à sublimi ducuntur binæ rectæ æquales* NL DE, *æquósque habentes angulos* NLM NLX, *ipsis* DEZ DEI, *cum lineis* ML LX *&* ZE EI *angulos planos continentibus. Sequetur (ex corrollario præfato) à sublimioribus earum signis* N *&* D, *in plana* MX *&* ZI *demissas perpendiculares æquales esse. Atqui eorum solidorum altitudo perpendiculares illæ sunt, per quartam diffinitionem sexti. Æquales itaque altitudines* NL DE *super æquis basibus* MX ZI *habentia parallelepipeda* TL *&* KE, *inter se sunt æqualia, per* 31 *huius. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ex ipsis tribus solidum, &c.*

Propositio trigesimaseptima.

Si quatuor rectę lineę proportionales fuerint, & quę ex ipsis solida parallelepipeda similia similitérque descripta proportionalia erunt, & si quæ ex ipsis solida parallelepipeda similia similitérque descripta proportionalia fuerint, & ipsæ quoque rectę lineæ proportionales erunt.



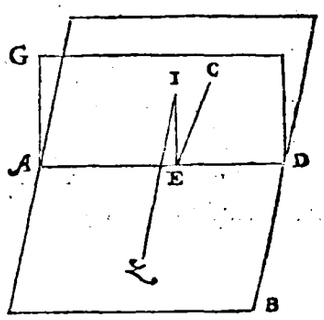
Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B *ad* G D *vt* E Z *ad* I T: *ex quibus similia similitérque posita describãtur parallelepipeda* A K G L E M *&* I N: *Dico ea quatuor solida esse proportionalia* A K *ad* G L *vt* E M *ad* I N, *quoniam similia sunt hæc bina solida, scilicet* A K *ipsi* G L *&* E M *ipsi* I N. *Ipsa triplam habent laterum rationem, per 33 huius, sed latera* A B *ad* G D, *eandem habent quam* E Z *ad* I T (*per hypothesim*) *æqualium igitur tripla æqualia adinuicem erunt, per 15 quinti. Solida itaque erunt* A K *ad* G L, *vt* E M *ad* I N: *sed iam ponantur ea similia solida proportionalia esse, quæ similiter ex lineis* A B G D E Z I T *descripta sunt: Dico lineas proportionales esse* A B *ad* G D, *vt* E Z *ad* I T, *Quoniam eandem habent rationem* A K *ad* G L *solida quam* E M *ad* I N *solida. quæ quidem ratio tripla est rationis* A B *ad* G D *seu* E Z *ad* I T, *rationes igitur æquales* A B *ad* G D, *seu* E Z *ad* I T *ab æqualibus solidorum rationibus, æquè multiplicatæ, æquales erunt, cùm eandem habeant earũ quantitates rationem, per 15 quinti. Si itaque quatuor rectæ lineæ, &c.*

MONITVM.

Poteramus demonstratione Campani prolixius vti additis binis A B *&* G D *duabus continuè proportionalibus, similiter & ipsis* E Z I T *aliis, tum erit sicut* A B *ad quartum, sic solidum ex* A B *ad quod ex secunda* G D, *per corollariũ 33 huius, similiter* E Z *ad quartam erit vt quod ex* E Z *prima, ad quod ex* I T *secunda, primæ autem ad quartas, æqua ratione proportionales sunt, per 22 quinti. Præterea animaduertendum est ea quatuor solida non sibiipsis aut eidem necessario similia optari. Sed ea tantùm quæ eadem ratione copulantur, aut simul bina antecedentia sunt, aut equidem bina cõsequentia inter se similia esse sufficiunt. Nã si eadẽ copulata ratione similia tantùm fuerint, & alia rursus similia, ea in antecedentia & consequentia facilè rationum vicissitudine (ex 16 quinti) sumpta commutabuntur, quod putauimus apponendum, vt huius theorematis fœcundemus vires.*

Propositio trigesimaoctaua.

Si planum ad planum rectum fuerit, à signo autem in aliquo planorum existente in alterum planum perpendicularis agatur, ea in communem planorum sectionem cadit.



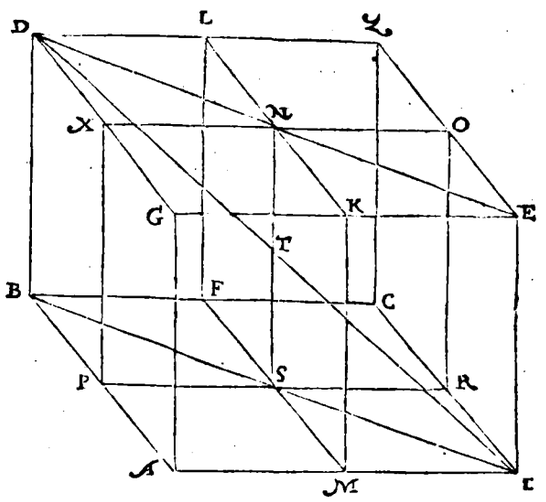
Esto planum D G *ad planum* A B *rectum, quæ sese secent in* D A, *A signo autem* I *in plano* D G *existente, aliqua perpendicularis in planum* A B *demittatur: Dico demissam in rectam* D A *cadere. Non enim, sed si fieri possit, cadat alibi, sitq́;* I Z, *à signo verò* I *ad rectam* D A *perpendicularis agatur* I E, *per duodecimam primi. A signo autem* E *per planum* A B *eidem* D A *perpendicularis excitetur* E C, *per vndecimam primi. Recta igitur* I E *ad binas* E D E C *recta, ad earum planum* A B *recta est, per quartam huius. Sed ad idem planum* A B *recta fuit* I Z, *ex hypothesi. Ab eodem itaque signo* I *ad idem planum* A B *binæ* I Ẽ I Z *ad rectos constituerentur, quod fieri non potest, per decimamtertiam huius. Non igitur cadit alibi quàm in* A D *recta ab* I *signo perpendicularis. Si itaque planum ad planum rectum, &c.*

MONITVM.

Alia vsi sumus demonstratione ob Theonis breuem ac confusam & penè indemonstratam traditionem. Et insuper nec eam meminit Campanus, eò quòd modici feratur momenti, ad compendia tantùm futurarum demonstrationum vtilis existens.

Propoſitio trigeſimanona.

Si ſolidi parallelepipedi eorum quę ex oppoſito planorum latera oppoſita bifariam ſecta fuerint, extenſáque per ſectiones plana, communis planorum ſectio & ſolidi dimetiens ſeſe bifariam diſpeſcent.



Eſto ſolidum parallelepipedum AC GZ, *cuius aliquorum quæ ex oppoſito planorum* BI DE *oppoſita latera bifariam ſecentur, in ſignis* LK XO FM *&* PR: *Supponantur autem per eas ſectiones extendi plana* LK MF *&* XO RP, *quæ ſe ſecent per rectam* NS. *Dimetiens verò ſolidi eſto* DI *baſium autem* AC GZ *dimetientes ſint* BI DE: *Dico communem planorum ſectionem* NS *& dimetientem* DI *bifariam ſeſe ſecare. Quoniam parallelæ ſunt, & æquales* DB EI, *per vigeſimamquartam huius, Cùm ſint latera parallelogrammorum oppoſitorum & parallelorum, Ipſæ in eodem ſunt plano, per 35 primi diffinit. Quia verò à ſignis earum coniunguntur rectæ* DE BI, *Ipſæ in eodem ſunt plano cum reliquis* DB EI, *per ſeptimam huius, & æquales parallelæ, per 33 primi. Rurſus cum recta* LK *ſecet parallelogrammum* GZ *bifariam, per primam ſexti, eò quòd ſecet bifariam eius baſim* DZ. *Ipſa ſecabit eiuſdem dimetientem* DE *bifariam, per coroll. 34 primi. Non alia de cauſa recta* XO *eandem* DE *ſecabit bifariam. Concurrent igitur binæ* LK XO *in* N *medio ipſius* DE *ſigno, ſimiliter & ipſis oppoſitæ concurrent in* S. *Et idcirco recta* NS, *bifariam ſecat binas* DE BI *parallelas. A quarum ſignis* DN IS *ductæ rectæ* DI NS *in eodem ſunt cum ipſis plano, per ſeptimam huius, quare ſeſe ſecabunt ſit igitur in* T. *Triangulorum itaque* DNT *&* IST *duo anguli duobus ſunt æquales, per vigeſimamnonam primi, & vnum latus* DN *vni* IS *æquum oſtenſum, nempe dimidium æqualium* DE BI. *Latera igitur* TN TS *&* TD TI *ſunt inter ſe æqualia, per 26 primi. Tota itaque* NS *communis planorum ſectio, & dimetiens ſolidi, tota* DI, *bifariam ſeſe in* T *ſecant. Si igitur ſolidi parallelepipedi eorum quæ ex oppoſitò planorum, &c.*

Corollarium.

Omne planum per centrum parellelepipedi extenſum, ſecat illud ſolidum bifariam, non autem aliud per centrum non extenſum. *Quoniam omne planum per centrum extenſum, ſecat dimetientem parallelepipedi in centro bifariam. Oſtenſum eſt enim plana ſolidum bifariam ſecantia, dimetientem ſecare bifariam in centro. Quare omnes lineæ per centrum in eo plano ductæ angulos cum dimetiente efficient. Quia verò dimetiens cadit in parallelas ſolidi rectas, oppoſita latera deſcribentes, ſiue in parallela ſolidi plana, quæ ſcilicet angulos ad extrema diametri efficiunt. Triangula à dimetiente & recta in eo plano per centrum extenſa, & ea quæ per plana oppoſita ſolidi præfatas coniungit rectas, ſemper æqualia & æquiangula erunt, per 26 primi. Nam quæ per plana ſolidi oppoſitæ rectæ, æquales angulos ad dimetientem efficiunt, cùm ſint parallelæ, per decimamſextam huius. Sed & anguli qui ad centrum æquales ſunt, nempe ad verticem, per decimamquintam primi, vnúmque latus vni lateri, ſcilicet media dimetiens. Triangula igitur à quauis recta (in plano quod per centrum parallelepipedi per idem centrum extenſa) & eius dimetiente, ad ſolidi extrema terminata, æqualia & æquilatera, ac æquiangula erunt, per vigeſimamſextam primi, vnde ſequitur planum illud ſecans, æquales (ad partes oppoſitas) baſium ſolidi partes efficere, ac æquiagulas, & proinde ſimiles & numero æquales ac magnitudine. Quare ſolidi illius binæ ſectiones ſolidæ, æquales erũt, & ſimiles, per octauam diffinitionem huius. Quod autem aliud planum ab eo quod per centrum extenditur bifariam ſolidum non ſecet. Patet, ſi plano per centrum non extenſo parallelum per centrum extendatur, per corollariũ decimæquintæ huius. Cùm enim id quod per centrum deſcribitur bifariam ſecet, manifeſtum eſt in altera æqualium ſolidi partium, reliquum deſcribi planum parallelum*

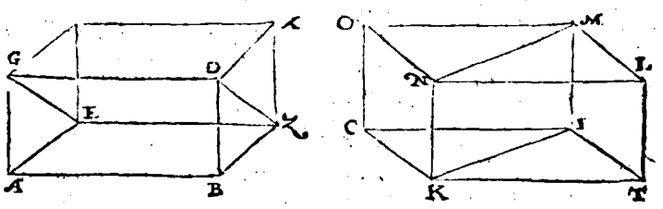
bifariam ſecanti. Cùm igitur totum ſua parte maius exiſtat, neceſſe eſt alteram harum ſectionum dimidio ſolidi eſſe minorem, & ideo reliquam maiorem. Omne itaque planum per centrum parallelepipedi extenſum, &c.

MONITVM.

Diſiunctiuam huic theoremati contulit Theon, vt illud in cubo cenſeat intelligi, ſimiliter & Cãpanus in Cubo tantùm illud explicat, licet ſub parallelepipedo Cubum concipiamus: nos itaque diſciplinæ genus ſectantes, dicemus parallelepipedum in ſolidis eadem frui dignitate, qua parallelogrammum in planis: nam vt hoc quadrata, rectangula, rhombos, & rhomboides continet, ſic illud Cubos, ſolida altero longiora rectangula, aliáque non rectangula, quorum ſtantes in eiſdem ſunt rectis, & reliqua quorum ſtantes in eiſdem rectis non conſiſtunt, quorum ſingulorum oppoſitæ baſes & latera emper æqualia, ſimilia & parallela exiſtent, vnde illud ſolidum inter regulares enumerabimus figuras, tamen non inter perfectas, obque eius regularem conſtructionem corollarium præfatum (ſequuturis vtile) eidem coniunximus.

Propoſitio quadrageſima.

Si fuerint bina Priſmata ſub æquis altitudinibus, & alterum quidem baſim parallelogrammum habuerit, alterum autem triangulum, duplum verò fuerit parallelogrammum ipſius trianguli, bina Priſmata æqualia erunt.



Sint bina Priſmata ſcilicet ſuper baſi parallelogramma AEZBGD *&* TIKLMN, *ſuper baſi triangula, ſub æquis verò altitudinibus* AG *&* TL, *ſit autem trianguli* TIK *dupla parallelogramma baſis* AEZB: *Dico ipſa* AEZ BGD *&* TIKLMN *Priſmata æqualia eſſe adinuicem, compleãtur ſolida* AX *&* TO *parallelepipeda, ductis inquam parallelis rectis & planis oppoſitis, per* 31 *primi, & corollarium* 15 *huius, vt ſæpius docuimus, ſcilicet baſi* AZ *ſimilis & æqualis ponatur* GX, *ipſi verò* AD *ſimilis ſit* EX. *Planum igitur erit* BDZX *baſis, cùm parallelæ ponantur* BZ *&* DX, *& igitur eas coniungentes, per ſeptimam huius* BD ZX DZ *in eodem erunt plano. Duplum igitur erit* BX *triangulo* BDZ, *& proinde ſolidum* AX *parallelepipedum (ex binis ſimilibus & æquis Priſmatis compoſitum) duplum erit ipſius* AEZ BGD *Priſmatis. Similiter eodémque argumento parallelepipedum erit* TO *ex binis æquis & ſimilibus Priſmatis* TIKLMN *&* ICKMON *compoſitum, & proinde eorum duplum erit: quoniam enim dupla eſt baſis* AZ *trianguli* KIT, *ex hypotheſi, cuius duplum eſt parallelogrammum* CT, *per trigeſimamquartam primi, ipſa itaque* AZ *&* CT *parallelepipedorum* AX *&* TO *baſes, ſunt æquales, per ſextam communem ſententiam: Sed (ex hypotheſi) altitudines ſunt æquales. Parallelepipeda igitur* AX *&* TO *erunt adinuicem æqualia, per trigeſimamprimam huius, quare Priſmata* AEZBGD *&* TIKLMN *(ipſorum* AX *&* TO *dimidia) æqualia inter ſe erunt, per ſeptimam communem ſentẽtiam. Si itaque fuerint bina Priſmata ſub æquis altitudinibus & alterum, &c.*

Corollarium.

Ex prælibatis fit manifeſtum Priſmata ac ſolida ſub binis poligonis æquis ſimilibus & parallelis, Reliquis vero parallelogrammis comprehenſa, ad ſeinuicem poſſe eiſdem conferri legibus, ac parallelepipeda. *Cùm enim (ex hac & coroll. ſecundo vigeſimæquintæ huius) conſtet, omne parallelepipedum in bina ſimilia & æqualia reſolui Priſmata, eiuſdẽ cum ipſo verticis, Super eadem verò aut dimidia eiuſdem baſi, eiſdémque ipſius ſolidi lateribus terminata, & ſimilis rationis: Dicemus Priſmata ſuorum parallelepipedorũ ſequi diſciplinam, quoniam ſi Priſma inſtar ſui ſolidi ſecandum (ex vigeſimaquinta huius) fuerit, docuimus corollario eiuſdem, idem ſequi quod in parallelepipedo proponitur, æquè in Priſmate, vt in ſolido propoſito, à poligonis præfatis comprehenſo. Si autem ex vigeſimaſeptima deſcribendum offeramus, Priſma ex data recta dato ſimile optatum:*

ſequi-

ſequi cernimus, deſcripto ex dato Priſmate duplo ſolido, illíque ex vigeſimaſeptima ſimile ſolidum aliud ex data recta dato, cuius dimidium Priſma erit optatum propoſito ſimile, ex data recta cõſtructum. Ad vigeſimamoctauam autem cum Priſmatis oppoſita plana diagonios non ſuſcipiant, hanc Priſmata ſectionem non patiuntur, ſed (per eandem vigeſimamoctauam) æqualia inter ſe corroborantur illa eſſe Priſmata, ac ſimilia quæ eiuſdem parallelepipedi ſunt dimidia. Quod autem ait vigeſimanona & tribus ſequentibus, ſub eadem altitudine ſupérque æquis aut eiſdem baſibus, eſſe æqualia parallelepipeda, aut in ratione baſium, vt per has Priſmata ſibi inuicem conferamus, illud tantùm poſtulabimus, Priſmata ſcilicet ſuper parallelogrammis ſimul, aut triangulis ſimul baſibus ad ſe comparari. Nam eadem manente ſublimitate, eadem eſt æqualium comparatio: dimidiarum verò baſium eadem eſt inter ſe quæ totarum affinitas. Priſmata igitur dimidia ſolida, eandem rationem quam tota habentia, ſub eodem vertice, baſes baſium dimidias, in eadem ratione eſſe totarum cõcludent. Si igitur tota ſolida ſint in ratione baſium totarum, dimidia eorum (Priſmata) erunt in ratione aut totarum ſi parallelogrammæ fuerint baſes, aut dimidiarum ſi triangulæ exiſtant, quæ ſemper eſt eadem (per 15 quinti) ex trigeſima tertia autem inferemus, quia parallelepipeda (Priſmatũ dupla) triplam habent ſimilium laterum rationem, ſequetur Priſmata dimidia (eandem quam tota rationem habentia per 15 quinti) ac eadem latera ſolidorum habentia ſuorum ſimilium laterum triplam habere rationem. Ex trigeſimaquarta verò concludemus, cùm Priſmata in ſuorum parallelepipedorum ratione exiſtant, baſes verò PRIſmatum *(ſimul trigonæ aut ſimul quadrangulæ) in baſium poligonorum ratione, altitudines autem ſemper æquales efficiant,* PRIſmatum *baſes & duplicium ſolidorum eiuſdem rationis baſes quoque ac vertices, eandem habere inter ſe quam ſolidorum duplicium baſes affinitatem. Nam ſi ſolidorum æqualium baſes reciprocæ fuerint verticibus, & eorum ſolidorum dimidia* PRIſmata *ſuas baſes verticibus reciprocas habebunt. Ex trigeſimaſexta autem dicemus, Si tres rectæ proportionales fuerint, ex ipſis tribus factus* PRIſmatis *angulus duplo ipſi parallelepipedo communis, efficit* PRIſma *æquum ei quod à media ſimilem ſuſcipit angulum, æquis lateribus compoſitum: nam commune* PRIſmati *& parallelepipedo illud vnum ſupponemus, tres ſcilicet linearum proportionalium dimenſiones ſimilem angulum conſtituere, ei qui ſit ex media terſumpta. Tum ſi* PRIſmatis *ſolidus angulus, ex tribus illis rectis conſtitutus fuerit, dupli eius parellelepipedi ex eiſdem ſimilis conſtituetur angulus. Sequetur itaque* PRIſmata *ſemper ipſis parallelepipedis dimidia inter ſe æquiangula veluti & eorũ duplicia neceſſariò eſſe, licet non æqui latera, & ea proinde æqualium ſolidorum dimidia, inter ſe æqualia eſſe, ei quod ſcilicet à media proportionali angulum fecit, æquum ei quod à tribus proportionalibus poſitum ſuſcepit. Ex trigeſimaſeptima idem inferemus quod de parallelepipedis ad* PRIſmata, *cùm enim ex datis lineis ſimiliter deſcripta* PRIſmata *ſint, ſimilium parallelepipedorum ſimilitérque deſcriptorum dimidia, ſequetur ea* PRIſmata *duplicium ſolidorum inter ſe ſeruare rationem: & ideo ſi lineæ ea deſcribentes proportionales fuerint, ea proportionalia eſſe, ac è conuerſo, iuxta huius 37 legem, cùm autem 39 oppoſita ſolidi plana parallelogramma ſupponat, ipſíq; ſolido dimetientem, quam non ſuſcipit* PRIſma, *à* PRIſmatum *hanc diſciplina recedere cenſebimus. Cæterùm vt ſolidorũ binis poligonis ſimilibus, æqualibus, ac parallelis reliquis verò parallelogrammis comprehenſorum naturam, à* PRIſmatum *ex quibus componuntur (vt corollor. ſecundo vigeſimæquintæ huius) oriri doceamus natura: Dicemus (ex vigeſimaſeptima huius) deſcripto parallelepipedo, eius dimidium* PRIſma *deſcriptum eſſe, deſcriptione verò* PRIſmatum *componetur ſimile ſolidum dato ex* PRIſmatis *compoſito, quæ verò 29, 30, 31 & 32 poſtulant theoremata in huiuſmodi ſolidis, ſuper baſibus poligonis intelligenda ſunt. Similiter & in 34, quod autẽ optat 33, in quibuſuis ſimilis rationis lateribus exigit, veluti & 37 quæ ſimilis rationis latera proportionalia eſſe poſtulat. Hæc nempe ſolida quæ Campanus lateratas dicit columnas, ex* PRIſmatis *compoſita ſimilia ac ſimiliter deſcripta, ſuorum ſimilium* PRIſmatum *ſequuntur doctrinam, & proinde parallelepipedorã* PRIſmatum *duplicium. Reliqua verò ex* PRIſmatum *conferentia, ex quibus hæc componi poſcimus ſolida, facilè conſequetur quiſque ex præfatorum intelligentia pauco ſudore.*

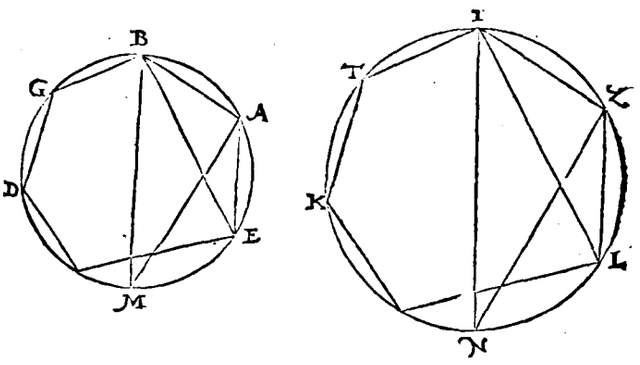
VNDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO-num reſtitutarum Liber duodecimus.

Propoſitio prima.

QVæ in circulis multangulæ ſimiles figuræ, adinuicem ſe habent ſicut quæ ex dimetientibus quadrata.

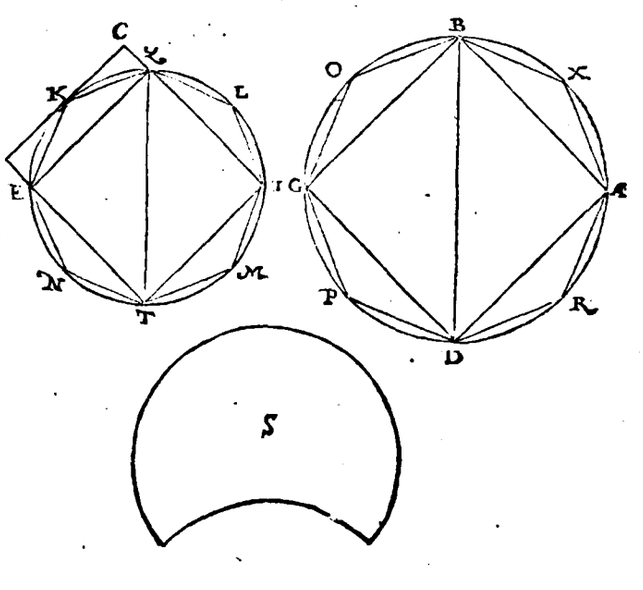
In circulis ABD *&* ZIK *deſcriptæ ſint multangulæ figuræ* ABGDE *&* ZITKL, *ſimiles ſimilitérque poſitæ, circulorũ verò dimetientes ſint* BM IN: *Dico eſſe poligonum* ABGDE *ad* ZITKL *ſicut quadratum ex* BM *ad quod ex* IN. *Coniungãtur* AM BE ZN IL *rectæ, quoniam hæc poligona ſunt ſimilia, circũæquales angulos triãgulorũ* BAE IZL *latera* IZ ZL *lateribus* BA AE *ſunt proportionalia: quare (per ſextam ſexti) æquiangula erunt triangula, & ideo anguli* AEB ZLI *erunt æquales: ſed ipſis* AEB ZLI *æquales ſunt* AMB ZNI, *per* 21 *tertij in eodem ſegmẽto, Ipſi itaque* AMB ZNI *anguli adinuicẽ æquales erũt, ſed &* BAM IZN *æquales ſunt, nempe recti, per trigeſimamprimam tertij. Reliquus itaque* ABM *reliquo* ZIN *æquus erit, cùm tres vtriuſque trianguli binis rectis æquẽtur, per corollarium primum* 32 *primi. Aequiangulorum igitur triangulorũ* AMB ZNI, *proportionalia ſunt* AB *ad* ZI, *vt* BM *ad* IN *latera, per quartã ſexti: ſed poligonorũ* ABGDE *ad* ZITKL *ratio, dupla eſt rationis* AB *ad* ZI, *per vigeſimam ſexti. Ipſa itaque poligonorũ ratio, erit dupla rationis* BM *ad* IN, *rationi* AB *ad* ZI *æqualis. Atqui quadratorum ex* BM *&* IN *ratio, dupla eſt rationis earundem* BM *ad* IN *ſuorum laterum, per eandem* 20 *ſexti, Poligonorum itaque & quadratorum inter ſe rationes (eiuſdem rationis dimetiẽtium* BM *ad* IN *duplæ) eædem adinuicem erũt. Poligonum igitur* ABGDE *ad* ZITKL *erit ſicut quadratum ex* BM *ad quod ex* IN. *Quæ itaque in circulis, &c.*



Propoſitio ſecunda.

Circuli ſeſe adinuicem habent, ſicut quæ ex dimetientibus quadrata.

Sint bini circuli ABGD *&* EZIT, *eorum autem dimetientes ſint* BD *&* ZT: *Dico eſſe* ABGD *ad* EZIT *circulos, ſicut quod ex* BD *ad quod ex* ZT *dimetientibus quadrata. Quod ſi* ABGD *ad alium* EZIT *eã nõ habeat quam quadrata rationem, idem* ABGD *eam quadratorum rationem ad aliam magnitudinem ipſo quouis alio* EZIT *maiorẽ, vel minorem habebit, habeat itaque prius ad minorẽ, (ſi fieri poſſit) quæ ſit area* S, *quoniam poſitus eſt* EZIT *circulus (ex hypotheſi) mà ior ea area* S. *Auferatur ab ipſo* EZIT *circulo maius quàm dimidiũ, & rurſus maius quàm dimidiũ, per primã decimi, donec relinquatur minus reſiduum exceſſu quo* EZIT *ipſam* S *excedit, applicato, ſcilicet ipſi* EZIT *circulo, quadrato*



TEZI

T E Z I, *quod quidem maius dimidio circuli tollit, cùm sit dimidiũ circũscripti quadrati, rursúsque sũper quadrati lateribus isoscelia describantur, sectis bifariam arcubus,* V T E K Z, *manifestum est triangulum* E K Z *maius quàm dimidium sectionis* E Z K *circuli tollere. Nam rectanguli* B C *dimidium tollit (per* 41 *primi) triangulum* E K Z, *quod quidem rectangulum sectionem continet. Relinquatur itaque tãdem magnitudo minor præfato excessu, quæ sit sectiones illæ circuli, quibus circulus excedit poligonum* E K Z L I M T N. *Si igitur circulus* E Z I T *minori excessu excedat poligonum* E K Z L *sibi inscriptum, eò quòd excedit areã* S, *maius erit poligonum* E K Z L *area* S: *ipsi itaq; poligono* E K Z L *simile circulo* A B G D *inscribatur (per* 18 *sexti circa* B D *dimetientem circuli* A B G D, *quoniã (ex hypothesi) fuit circulus* A B G D *ad aream* S, *sicut quadratum ex* B D *ad id quod ex* T Z: *sed sicut quod ex* B D *ad quod ex* T Z, *sic est poligonum* A X B O *ad simile* E K Z L, *per præfatã. Sicut igitur, per vndecimam quinti, poligonum* A X B O *ad simile* E K Z L, *sic* A B G D *circulus ad aream* S *& vicißim, ideo sicut poligonũ* A X B O *ad* A B G D *circulum, sic poligonum* E K Z L *ad aream* S, *per* 16 *quinti. Minus autem est poligonum* A X B O, *circulo* A B G D *continẽte: minus igitur erit poligonum* E K Z L *area* S, *per* 14 *quinti. Sed & maius ostensum est quod fieri non potest. Nõ igitur habet circulus* A B G D *rationem quadratorum quæ ex* B D T Z, *ad magnitudinem aliquam minorem circulo* E Z I T: *Dico rursus neque ad maiorẽ, quod si fieri posse credatur, esto* S *maior circulo* E Z I T, *sitq; circulus* A B G D *ad* S, *vt quod ex* B D *ad quod ex* T Z. *Erit igitur conuersim area* S *ad* A B G D *circulum, vt quod ex* T Z *ad quod ex* B D *per corollar. quartæ quinti: quia verò posita est* S *area circulo* E Z I T *maior, fiat sicut area* S *ad* A B G D *circulum, sic* E Z I T *circulus ad quãdam aream, hæc area (per* 14 *quinti) minor erit circulo* A B G D, *circulus igitur* E Z I T *erit ad aream minorem reliquo circulo* A B G D, *sicut* S *ad* A B G D, *hoc est, sicut quod ex* T Z *ad quod ex* B D *quadrata. Atqui iam ostendimus prima parte circulum quemuis non habere rationem quadratorum ex dimetientibus, ad magnitudinem reliquo quouis circulo minorem, nunc autem eam habere, quod fieri non potest. Non hac de causa subsistet hypotheses, circulum scilicet ad aliam magnitudinem alio circulo maiorem vel minorem rationem habere quàm dimetientiũ quadrata. Eam itaque quam dimetientium quadrata rationem habebit circulus, ad magnitudinem reliquo circulo æqualem, & proinde ad ipsum circulum, per septimam quinti. Circuli igitur sese adinuicem habent, &c.*

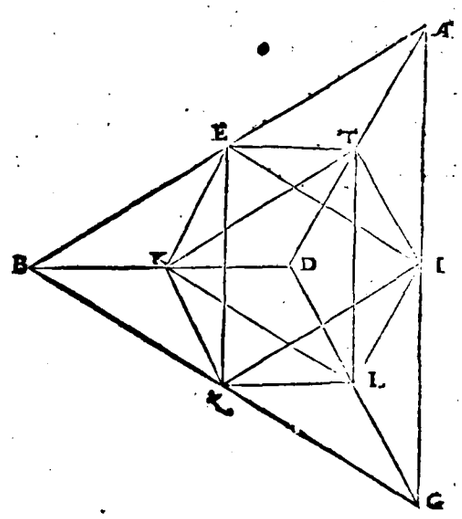
Corollarium.

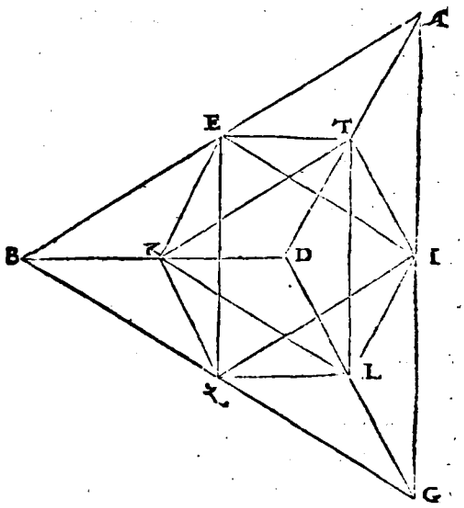
Circuli eandem habent rationem quam in eis similia similitérque descripta poligona. *Nam poligona eam habere ostendimus quam ex dimetientibus quadrata habent, quam similiter habent & circuli.*

Propositio tertia.

Omnis Pyramis triangularem basim habens, diuiditur in binas pyramides æquales, similes verò toti & adinuicem. Et in bina Prismata æqualia, & ipsa bina prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

Sit aliqua pyramis A B G D, *cuius basis sit* A B G *triangularis, vertex autem* D: *Dico* A B G D *pyramidem posse secari in binas pyramides æquas & similes toti, & adinuicem, ac in bina æqualia prismata, totius pyramidis dimidio maiora. Secentur bifariam sex pyramidis latera in* E Z I T K L, *coniunctis* E Z Z I I B T K K L L T *& insuper* I T T B E K K Z Z L L I. *Quoniam omnia pyramidis latera bifariam secta sunt, ac ideo proportionaliter. Sequetur rectas trianguli* T K L *parallelas esse basibus* A B B G G A, *per* 2 *sexti. Similia itaque erunt scilicet* T D K *toti* A D B, *&* K D L *toti* B D G, *ac* L D T *toti* G D A, *per corollarium secundæ sexti. Quia verò parallelæ fuerunt rectæ trianguli* T K L *rectis trianguli* A B G. *Illæ æquales angulos comprehendent, per decimam vndecimi. Pyramis itaque* T K L D

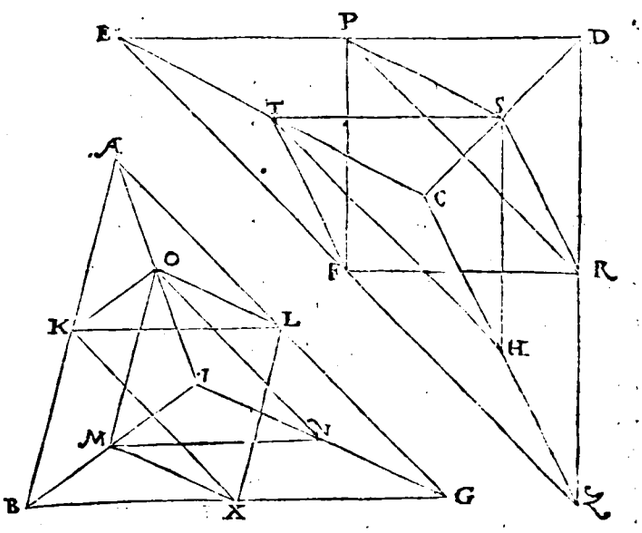




ſub ſimilibus triangulis, & multitudine æqualibus toti PYRAMIDI ABGD *continetur, ſcilicet* ABG ABD DGA DGB, *ipſis* TKL TKD DLT DLK. *Similes itaque ſunt* ABGD *&* TKLD *pyramides, per ſeptimam diffini. vndecimi. Similiter oſtendemus toti* ABGD *reliquam* AE IT *ſimilem eſſe. Nam triangulo* AGD *ſimile eſt* AIT. *Triangulo verò* ABD *ſimile eſt* AET, *& ipſi* ABG, *Illud* ABI, *& reliquum* ETI *reliquo* BDG. *Nam latera ſunt lateribus dimidia & parallela. Et proinde vt oſtendimus in reliqua* TKLD, *totidem erunt & ſimilia. Ipſius verò* TKLD *pyramidis baſibus æqualia erunt huius* AE IT *triangula. Nam vtraque ſub dimidiis totius continentur lateribus. Toti igitur* ABGD *ſimiles, & adinuicem æquales & ſimiles ſunt* TKLD *&* AEIT *pyramides, per octauam diffinitionem vndecimi. Quia verò parallelæ ſunt & æquales* BE KT *&* ZI *oſtenſæ, nempe ipſius* AB *dimidiæ, eas coniungentes rectæ* BK KZ ZB *rectis* ET TI IB *æquales erunt & parallelæ, per trigeſimamtertiam primi. Parallelogramma itaque erunt* BETK BEIZ *&* KTIZ, *per trigeſimamſextam diffinit. Quia verò eorum oppoſita latera ſunt æqualia, per trigeſimamquartam primi, triangula* ETI *&* BKZ *æquiangula erunt, per octauam eiuſdem. Et proinde (per quartam eiuſdem) æqualia. Ac inſuper parallela plana, per decimamquintam vndecimi. Priſma igitur erit ſolidum* BKZETI, *per vndecimam diffinitionẽ vndecimi. Similiter cùm triangulorum* TKL *&* IZG *latera, lateribus ſint æqualia & parallela, nempe dimidia laterum trianguli* ABG, *manifeſtum erit parallelogramma eſſe,* GZKL, ZKTI *&* GLTI, *per trigeſimamtertiam primi, & trigeſimamſextam diffinit. eiuſdem. Priſma igitur erit totum* KLTZGI *ſolidum, per vndecimã diffinit. vndecimi, ſub ipſis parallelogrammis & triangulis* TKL IZG *comprehenſum. Tota itaque pyramis* ABGD *in binas pyramides* TKLD *&* AEIT, *ac bina* PRIſMATA BKZETI *&* KLTZGI *ſecta fuit. Cùm autem* PRIſMATIS BKZETI *pars ſit pyramis* BEZK. PRIſMATIS *verò* KLTZGI *ſit pars alia* ZIGL *pyramis, quæ quidem reliquis quæ in principio binis* PYRAMIDIBUS TKLD AEIT *æquales, & ſimiles exiſtunt, cùm componantur ex æquis ipſarum lateribus, ac proinde ſimilibus triangulis, nempe dimidiis totius* ABGD *pyramidis lateribus. Sequetur bina* PRIſMATA *(ipſis* PYRAMIDIBUS *maiora) plus totius* ABGD PYRAMIDIS *dimidio continere. Omnis itaque* PYRAMIS TRIANGULARIS, *&c.*

Propoſitio quarta.

Si fuerint binæ Pyramides triangulares baſes habentes ſub eadem altitudine: diuiſa verò fuerit vtraque ipſarum in binas Pyramides, adinuicem æquales, & ſimiles toti, & in bina Priſmata æqualia, & in vtraque factarum Pyramidum, is modus ſemper ſeruetur. Erit ſicut vnius Pyramidis baſis ad alterius Pyramidis baſim, ſic quæ in vna Pyramide Priſmata, ad ea quæ in altera Pyramide Priſmata omnia, ſimili ſectione producta.



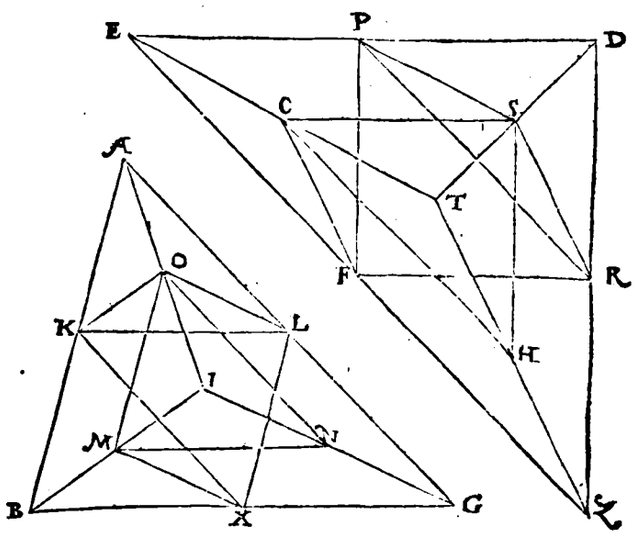
Proponantur binæ PYRAMIDES *eiusdē altitudinis* ABGI *&* DEZC, *quarum vtraque iuxta præcedentis methodum diuisa sit in binas* PYRAMIDES *æquales, similes verò toti & adinuicē, ac in bina* PRISMATA *æqualia. Insuper rursus factæ* PYRAMIDES *similiter subdiuidantur quotieslibet: Dico esse sicut* ABG *basim ad* DEZ *basim, sic omnia* PRISMATA *à* PYRAMIDE ABGI *sumpta, ad omnia à* PYRAMIDE DEZC *sumpta, simili secta modo, sicque singula ad singula. Quoniam in hac* PYRAMIDUM *sectione diuiduntur omnia* PYRAMIDŪ *latera bifariam, ex præfata, erit tota* BG *ad dimidiam* GX *vt tota* EZ *ad dimidiam* ZF, *per* 15 *quinti, & ab eis itaq; rectilineæ similia (per* 22 *sexti) proportionalia erunt,* ABG *ad* LXG *sicut* DEZ *ad* RFZ, *sunt enim similia, vt proxima patuit,* ABG *&* LXG, *sicut &* DEZ *ipsi* RFZ, *vicissim igitur (per decimam sextam quinti) erit* ABG *ad* DEZ *sicut* LXG *ad* RFZ *triangula, sicut autem bases* LXG *ad* RFZ, *sic quæ super ipsis* PRISMATA OMNLXG *ad* STHRFZ, *per corollarium quadragesimæ vndecimi. Nam sunt ipsa* PRISMATA *sub eadem altitudine dimidiarum* PYRAMIDUM, *per præfatam, quæ* PYRAMIDES *sunt (ex hypothesi) eiusdem altitudinis: sicut itaque basis* ABG *ad basim* DEZ, *sic est* PRISMA OMNLXG *ad* PRISMA STHRFZ, *per vndecimam quinti, Sicque reliqua* PRISMATA KOLBMX *ad* PSRETF. *Nam bina* OMNLXG *&* KOLBMX *sunt æqualia, veluti* STHRFZ *ipsi* PSRETF, *ex præcedente, quare erunt ad se singula* PRISMATA *sicut* PYRAMIDUM *bases, per vndecimam quinti, sicútque omnia ad omnia simul sumpta* PRISMATA, *per duodecimam quinti. Cùm autem iam fuerit basis* ABG *ad basim* DEZ, *sicut* LXG *ad* RFZ, *sic erit* OMN *ad* STH, *sunt enim æqualia & similia* PRISMATUM *opposita triāgula ipsis* LXG *&* RFZ. *Sicque erit* AKL *ad* DPR, *similia ipsis* LXG RFZ, *vt latius patuit præfata, sed sicut bases ad bases, sic ostendimus esse* PYRAMIDUM PRISMATA *ad seinuicem. Sicut itaque bases* OMN *vel* AKL *ad* STH *vel* DPR, *sic erunt ad se* PRISMATA *ex* PYRAMIDIBUS OMNI *vel* AKLO, *ad* PRISMATA *ex* PYRAMIDIBUS STHC *vel* DPRS *simili methodo sumpta: sunt enim sub eodem vertice, per constructionem, nempe dimidia totarum* PYRAMIDUM *altitudine, sicut igitur totarum bases* ABG *ad* DEZ *sic omnia vel singula ad se erunt* PRISMATA. *Si itaque fuerint binæ* PYRAMIDES *triangulares bases, &c.*

MONITVM.

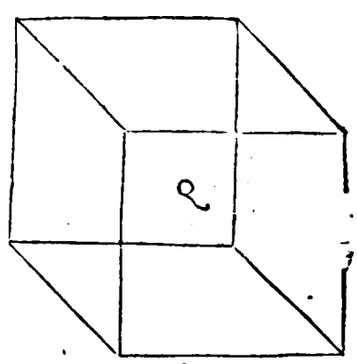
Abstulimus circa huius theorematis finem has voces (æquemultiplicia) à Theone extra sensum relatas, nam à Græco (æquemulta) diceremus: nos autem vtrique satisfacere cupientes, diximus (simili sectione producta) eò quòd similis secandi forma æquam præ se ferat multitudinem partium, & insuper similes sectionum esse cogat figuras, ne æquemulta non similia postulari credamus, sed æquæmulta, & sibi inuicem similia, singula singulis, siue (ex duodecima quinti) omnia omnibus proportionalia basibus esse fateamur.

Propositio quinta.

Sub eodem fastigio Pyramydes, triangularéſque bases habentes, adinuicem sese habent sicut bases.



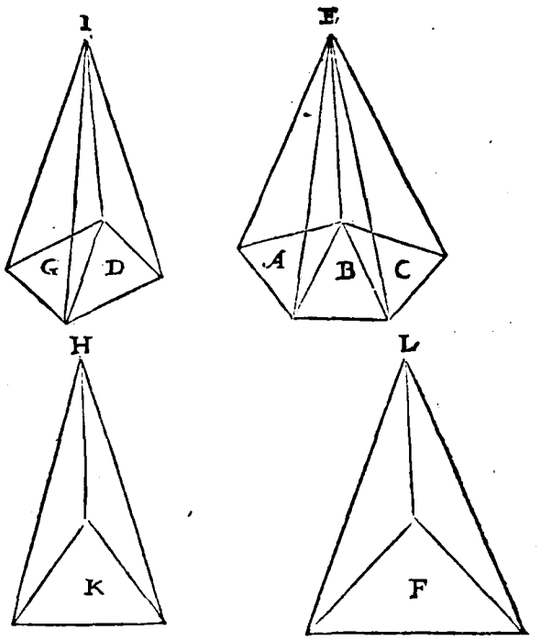
Supponantur binæ pyramides ABGI *&* DEZT *triangulares baſes* ABG *&* DEZ *habentes, ſub eadem altitudine: Dico eſſe* ABGI *ad* DEZT *pyramides, ſicut* ABG *ad* DEZ *baſes, ſimili ſecundæ huius argumento, ſi pyramides* ABGI *&* DEZT *non habeãt rationem baſium* ABG *ad* DEZ, *habeat aliqua earum ſcilicet* ABGI *rationem baſium* ABG *ad* DEZ, *ad aliquod ſolidum* Q, *erit igitur ſolidum* Q *maius vel minus reliqua pyramide* DEZT, *eſto prius minus pyramide* DEZT *ſolidum* Q. *A pyramide autem* DEZT *auferatur pluſquã dimidium, & reliqui pluſquam dimidium (per tertiam huius) ſcilicet ſecta pyramide in binas pyramides, & bina priſmata dimidio pyramidis maiora, & rurſus binis pyramidibus hac ſecandi lege diuiſis. Relinquetur tandem (per primam decimi) magnitudo minor exceſſu, quo pyramis* DEZT *excedit ſolidum* Q. *Reliquum itaque ipſius* pyramidis DEZT *ſcilicet ea* priſmata *ab eadem frequentius detracta ſimul ſumpta, maiora erunt ſolido* Q. *Quæ* priſmata *ſint (ex hypotheſi) ea quæ inter triãgula* ECFPSR *&* FRZCSH *continentur: ſecetúrque ſimiliter* pyramis ABGI *in* priſmata BMXKOL *ac* XLGMON, *per eandem tertiam huius, quoniã enim eſt ſicut baſis* ABG *ad baſim* DEZ, *ſic (per hypotheſim)* pyramis ABGI *ad ſolidum* Q, *ſicque (per quartam huius) omnia* priſmata pyramidis ABGI, *ad omnia ſimili ſectione producta ex* pyramide DEZT: *erit igitur (per vndecimam quinti) ſicut* priſmata pyramidis ABGI *ad* priſmata pyramidis DEZT, *ſic* pyramis ABGI *ad ſolidum* Q. *Viciſſim itaque erit (ex decimaſexta quinti) ſicut* priſmata pyramidis ABGI *ad* pyramidem ABGI, *ſic* priſmata pyramidis DEZT *ad ſolidum* Q, *ſed* priſmata pyramidis ABGI *ipſa* pyramide *continẽte minora ſunt. Priſmata igitur* pyramidis DEZT *ſolido* Q *(per decimamquartã quinti) minora erunt, ſed & maiora oſtenſa ſunt, quod fieri non poteſt. Non habet igitur aliqua* pyramidum ABGI *vel* DEZT *rationẽ, quam habent baſes ad magnitudinem minorem reliqua* pyramide: *Dico inſuper quod neque ad maiorem, ſi enim ſupponeretur* Q *ſolidum maius aliqua pyramide ſcilicet ipſa* DEZT, *haberétque reliqua pyramis* ABGI *ad ipſum* Q *rationem quam* ABG *baſis ad* DEZ *baſim: eſſet conuertendo (per corollariũ quartæ quinti) ſolidum* Q *ad pyramidem* ABGI, *ſicut baſis* DEZ *ad* ABG, *quia verò maius eſt* Q *ſolidum, pyramide* DEZT, *ex hypotheſi, erit ſicut* Q *ſolidum ad* ABGI *pyramidem, ſic* DEZT *pyramis ad magnitudinem minorem pyramide* ABGI, *per decimamquartam quinti, ſed ſicut* Q *ad* ABGI *pyramidem, ſic fuit baſis* DEZ *ad* ABG *baſim. Sicut igitur pyramis* DEZT *ad magnitudinem reliquæ pyramide* ABGI *minorem, ſic erit baſis* DEZ *ad* ABG *baſim, per vndecimam quinti. Aliqua igitur pyramidum* ABGI *vel* DEZT *rationem habuit quam baſes, ad magnitudinem reliqua pyramide minorem, ſed & non habere oſtenſum eſt, quod eſſet abſurdum: non igitur habet aliqua pyramis rationem baſium ad magnitudinem reliqua pyramide maiorem vel minorem, eam igitur habet ad æqualem reliquæ pyramidi, & proinde ad pyramidem ipſam, per ſeptimam quinti. Sub eodem itaque faſtigio pyramides triangulares ſũt baſes habentes.*



Propoſitio ſexta.

Sub eadem altitudine Pyramides exiſtentes, multangulâſque baſes habentes, adinuicem ſeſe habent ſicuti baſes.

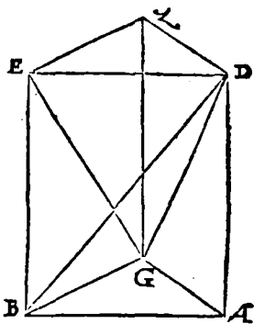
Sint



Sint ſub eadem altitudine pyramides ABCE *&* GDI *habentes baſes poligonas* ABC *&* GD: *Dico eſſe pyramidem* ABCE *ad pyramidem* GDI, *ſicut baſis* ABC *eſt ad baſim* GD. *Deſcribantur (per vigeſimamquintam ſexti) triangula* F *&* K, *ipſis* ABC *&* GD *baſibus æqualia, ſuper ipſis porrò* F *&* K *pyramides ſupponantur ſub eodem vertice ipſarum* ABCE *&* GDI, *demiſſa in baſes æqua perpendiculari, per vndecimam vndecimi. Quoniam ſicut ſingula triangula* AB *&* C *ſunt ad triangulum* F, *ſic ſunt ſingulæ pyramides* AE BE *&* CE *ad pyramidem* FL, *per quintam huius. Sed ſingula ſimul ſumpta triangula* ABC *totum* F *componunt, ex conſtructione. Singulæ igitur pyramides* AE BE CE *ſimul ſumptæ pyramidem* F *componunt. Similiter ſigulæ* GI *&* DI *pyramides totam* KH *pyramidem component. Cùm autem ſit vt* F *ad* K *baſes, ſic* FL *ad* KH *pyramides, per præfatam erit vt* ABC *ad* GD *baſes, ipſis* F *&* K *æquales, ſic* ABCE *ad* GDI *pyramides, ipſis* FL *&* KH *æquales. Sub eadem igitur altitudine pyramides exiſtentes multangulas, &c.*

Propoſitio ſeptima.

Omne Priſma diuiditur in tres Pyramides ſibi inuicem æquas, triangulares baſes habentes.



Proponatur priſma cuius baſes oppoſitæ ſint triangula ABG DZE: *Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides inuicem æquales, triangulares baſes habentes. Ducantur rectæ* BD GD GE. *Quoniam parallelogrammum eſt* AB ED, *per vndecimam diffinitionem vndecimi, æqualia ſunt* ABD *&* BDE *triangula, per 34 primi. Quare (per quintam huius) æquales erunt pyramides* ABDG EBDG, *ſuper æquis baſibus* ABD BDE *&* *eodem vertice* G *comprehenſæ. Rurſus quia parallelogrammum eſt* BGZE, *æquales erunt baſes* BEG *&* EGZ. *Quare pyramis ſuper baſi* EGZ *vertice verò* D, *æqua erit pyramidi ſuper baſi* BEG *&* *eodem vertice* D *conſtitutæ, per quintam huius. Atqui pyramis cuius baſis eſt* BEG, *eadem eſt ei quæ fuit ſuper baſi* BDE *vertice verò* G *contenta, nempe ſub quatuor triangulis* BDE DEG DBG *&* EBG. *Cui quidem pyramidi binæ reliquæ oſtenſæ ſunt æquales, & triangulares baſes habentes totum complent priſma, tres igitur pyramides* ABDG BBDG EGZD *æquales, triangularéſque baſes habentes totum efficiunt* ABGDZE *priſma. Omne itaque priſma diuiditur in tres pyramides, &c.*

Corollarium primum.

Priſma quotlibet triplum eſt Pyramidis eandem triangularem baſim habentis, & æquale faſtigium. *Vt patuit hoc theoremate cùm diuidatur in tres æquas, quarum binæ ſunt in eadem baſi & altitudine. Si verò Priſma ſuper parallelogramma baſi conſtituatur, Pyramis verò in dimidia eius baſi & æqua altitudine. Rurſus tertia pars erit ipſius Priſmatis. Nam patuit (quadrageſima vndecimi) Priſma cuius parallelogramma baſis, dupla eſt triangulæ alterius Priſmatis, & æqua ſublimitas, eſſe reliquo priſmati æquale, vnde ſequetur illatio proxima.*

Corollarium ſecundum.

Si plura Priſmata eiuſdem verticis trigonas baſes ſuper eodem plano in vnum poligonum

componant Pyramidem ſuper ea baſi & altitudine tertiam eſſe eius ſolidi partem, ſub cunctis ſimul ſumptis Priſmatis comprehenſi. *Nam ſingula priſmata ſingularum ſuper ſua baſi & altitudine pyramidum tripla, concludunt omnia omnium tripla, per* 12 *quinti, eſſe: quare parallelepipeda tripla ſunt pyramidum eiuſdem baſis & verticis, eò quòd bina continent priſmata.*

Corollarium tertium.

Si bina Priſmata ſub eadem altitudine baſes habeant ſimul trigonas, aut ſimul tetragonas, ipſa Priſmata ad ſeinuicem ſunt vt baſes. *Cùm enim ea priſmata ſint æquemultiplicia pyramidum ſuper eiſdem baſibus, & altitudine, quæquidem ſunt vt baſes, & ipſa ſequetur eſſe vt baſes. Sũt enim tripla pyramidum ſuper baſi trigona, per præcedens corollarium.*

Corollarium quartum.

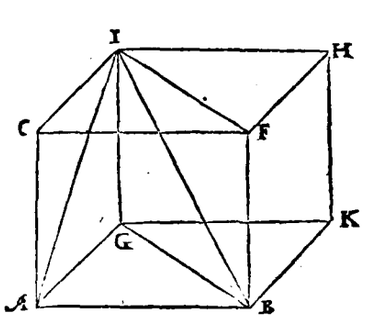
Pyramidum ſuper eadem baſi tetragona, & eodem vertice Priſmata ſunt ſeſquialtera. *Nam pyramis illa binas pyramides ſuper baſi trigona eiuſdem priſmatis conſtitutas continet, cùm dixerimus iam illud priſma triplum eſſe pyramidis ſuper dimidia eius tetragona baſi conſtitutæ, cuius eſt dupla reliqua ſuper tota baſi poſita, per ſextam huius.*

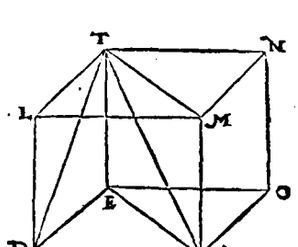
Corollarium quintum.

Quare ſimiliter concludemus ſolida præcedenti corollario memorata (quæ lateratas vocat Campanus columnas) ad ſe eſſe vt baſes poligonæ, cùm ſub eodem continentur vertice. *Nam ſunt in ratione pyramidum ſiue priſmatũ, quæ ſuper eiſdem baſibus & vertice, hoc eſt, in ratione baſium. Quare ad ea, ſimiliter priſmata eiuſdẽ verticis erunt vt baſes, eò quòd ea laterata in priſmata eiuſdem verticis reducantur, cùm ſecantur baſes oppoſitæ in triangula, per vigeſimam ſexti. Super quibus triangulis priſmata, ad ſe ſunt vt baſes.*

Propoſitio octaua.

Similes Pyramides triangulares baſes habentes, in tripla ſunt ratione laterum eiuſdem rationis.





Proponantur ſimiles Pyramides triangulares baſes habentes ABGI *&* DZET, *quarum ſimilis rationis latera ſint* AB *&* DZ: *Dico pyramides* ABGI *&* DZET *triplam habere laterum* AB *ad* DZ *rationem, ſuper baſi* ABG *pyramidis* ABGI, *& vertice* I *cõſtituatur priſma, ductis ipſi* IG *parallelis* ACBF, *quod ſit* AGBCIF, *cui addatur aliud priſma perfecto parallelepipedo* AFGH *ex binis priſmatis compoſito, per corollarium quadrageſimæ vndecimi. Similiter pyramidi* DZET *ſuper baſi* DZE *fiat priſma* DEZ LTM, *& parallelepipedum* DMEN: *quoniam ſimilia ſunt parallelepipeda* AFGH *&* DMEN, *cùm ſint ex ſimilibus (ex hypotheſi) pyramidibus ſimiliter conſtructa, ipſa erunt in tripla ratione laterum* AB AD DZ *ſimilis rationis, per* 33 *vndecimi: ſed ipſa ſunt priſmatum* AGBC IF *&* DEZLTM *æquemultiplicia, nempe dupla, per coroll.* 40 *vndecimi, ipſa itaque priſmata parallelepipedorum habent rationem, per* 15 *quinti. Atqui eadem priſmata pyramidum* AB GI *&* DZET *ſunt rurſus æquemultiplicia, nempe tripla, per præcedentis corollariũ. Ipſæ itaque pyramides priſmatum habẽt rationem, per eandem* 15 *quinti, & ideo (per* 11 *quinti) pyramides rationẽ parallelepipedorum* AFGH *&* DMEN *habebunt, quæ fuit tripla laterum* AB *ad* DZ. *Pyramides itaque* ABGI *ad* DZET *ſunt in tripla ratione laterum* AB *ad* DZ. *Similes igitur pyramides triangulares baſes habentes, &c.*

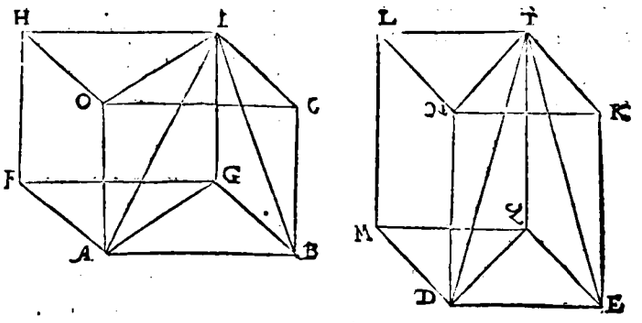
Corollarium.

Pyramides ſimiles, poligonas baſes habentes, triplam habent rationem ſimilis rationis laterum.

terum. *Sectis enim similibus poligonis, similiter & in similia triangula & æqualia numerò, per vigesimam sexti, erunt singulæ sectæ singulis similes & in tripla ratione sumptorũ laterum, per hoc theorema. Quare poligonæ (trigonarum æquemultiplices, nempe vt baſes baſiũ per ſextam huius) eandẽ habebunt ipſis rationem, per* 15 *quinti, & ideo triplam laterum ſimilis rationis: ſimiliter priſmata ac lateratæ columnæ, ſuper baſibus & earum pyramidũ faſtigio (cùm ſint ipſarum pyramidum æquemultiplicia nempe tripla per corollarium* 7 *huius) eãdem ipſis pyramidibus habebunt (ex* 15 *quinti) rationem, & igitur triplam ſimilium laterum.*

Propoſitio nona.

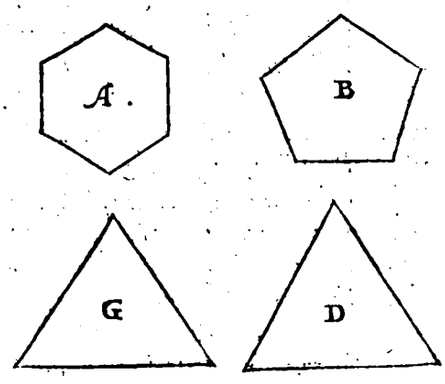
AEqualium Pyramidum triangulares baſes habentium, reciprocæ ſunt baſes altitudinibus, Et Pyramides triangulares baſes habentes, quarũ reciprocæ ſunt baſes verticibus, ſunt æquales.



Exponantur binæ æquales pyramides triãgulares baſes habentes, ABGI *&* DEZT, *quarum baſes ſint* AGB DZE, *vertices verò rectæ* GI *&* ZT: *Dico eſſe baſes* AGB *ad* DZE *reciprocæ, ſicut* ZT *ad* GI *vertices. Perficiantur ex pyramidibus priſmata* AGB OIC *&* DZENTK, *ex ipſis verò parallelepipeda* BOGH *&* ENZL, *vt proxima diximus. Ipſa igitur* BOGH *&* ENZL *ſunt pyramidum ſeſcupla, nempe priſmatum triplorum dupla. AEqualium itaque pyramidum ſeſcupla æqualia erunt, per commun. ſententiam. Sed & baſes habent in ratione baſium pyramidum, cùm ſint earum duplæ, ſcilicet* FB *ipſius* AGB *baſis, &* ME *ipſius* DZE, *per* 34 *primi. Altitudines verò* GI *&* ZT *communes habent ſolida cum pyramidibus. Sed & verticibus reciprocas habent baſes ſolida, per* 34 *vndecimi. pyramides igitur ſolidis eandem rationem baſium habentes, & communes altitudines, baſes habebunt verticibus reciprocas. Erit igitur baſis* AGB *ad* DZE (*pyramidum* ABGI *&* DEZT) *ſicut* ZT, *vertex ad* GI *verticem reciprocè, per ſecundam diffinitionem ſexti. Ad ſecundam verò partem ponamus eſſe reciprocè* AGB *ad* DZE *baſes, vt* ZT *ad* GI *vertices: Dico pyramides* ABGI *&* DEZT *eſſe æquales. Cùm enim (per conſtructionem) duplæ ſint baſes* FB ME *parallelepipedorum, baſibus* AGB DZE *pyramidum, Erunt in ratione ſolidorum & pyramidum baſes. Quia verò ſolidorum & pyramidum æqua ſunt faſtigia, ſingula ſingulorum eandem habebunt rationem. Sed (ex hypotheſi) pyramidum reciprocæ ſiunt baſes verticibus. Et igitur ſolidorum ſimilis rationis baſes & faſtigia, reciprocè forent verticibus. Quæ itaque ſolida ſunt (per* 34 *vndecimi) æqualia. Sed & pyramidum* ABGI *&* DEZT *æquemultiplicia ſunt ea* BH *&* EL *ſolida, nempe vt oſtendimus ſeſcupla. Pyramides æqualium æquemultiplicium partes ſunt igitur adinuicem æquales, per decimamquintam quinti. AEqualium itaque pyramidum triangulares baſes, &c.*

Corollarium.

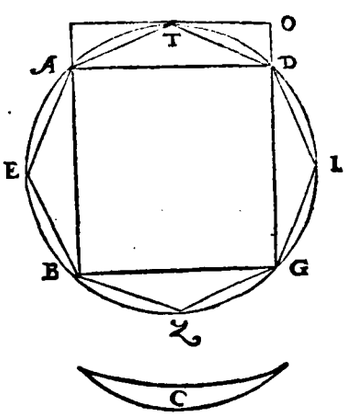
Hinc aſſequimur Pyramides poligonas æquales, reciprocas habere verticibus baſes. *Sint Pyramides poligonæ æquales ſuper* A *&* B: *Dico earum baſes* A *&* B *reciprocas eſſe verticibus. Deſcribantur ipſis baſibus* A *&* B (*per vigeſimamquintam ſexti*) *æqualia triangula* G *&* D *ſuper quibus pyramides æquè altæ ipſis* A *&* B *conſtruantur. Pyramides igitur* G *&* D *ſuper æquis baſibus & verticibus ipſis* A *&* B *erunt æquales, per ſextam huius. Ipſæ igitur reciprocas habent baſes* G *ad* D, *verticibus* D *ad* G, *per hoc theorema. Sed ſicut* G *ad* D *baſes, ſic* A *ad* B *baſes erit, cùm ſint æquales. Et ſicut ipſarum* D *ad* G *vertices, ſic ipſarum* B *ad* A *vertices; qui ſimili-*



ter ſunt æquales. Sicut igitur A *ad* B *baſes, ſic erunt reciprocè ipſarum* B *ad* A *pyramidum vertices, per vndecimam quinti. Idem ſequitur in priſmate & laterata columna, vt iam latius corollario quadrageſimæ vndecimi diximus. Sequuntur etenim illa (ſuper oppoſitis baſibus poligonis exiſtentia) pyramidum ſiue parallelepipedorum rationem, maximè cùm ſint æquemultiplicium partes, aut partium æquemultiplicia.*

Propoſitio decima.

Omnis Conus Cylindri tertia pars eſt, eandem eidem baſim habentis, & æquale faſtigium.



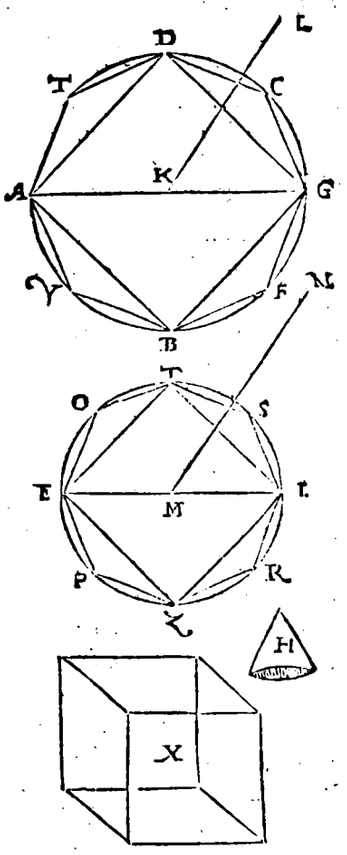
Proponatur conus habens ad baſim circulum A B G D. *Atque cylindrus eandem baſim habens & altitudinem: Dico conum cylindri eſſe tertiam partem, ſiue cylindrum coni triplum eſſe. Ab impoſsibili enim, Si cylindrus non ſit triplus coni, aut maior, aut triplo minor erit. Eſto prius triplo coni maior cylindrus, hac magnitudine* C, *fiat autem in circulo* A B G D *quadratum* A B G D, *ſectis bifariam reſiduis ſectionibus circuli in* E Z I T *ſignis, & coniunctis* A E E B B Z Z G G I I D D T T A, *rurſúſque ſectis reſiduis ſectionibus bifariam, ductis ſubtenſis quotieſlibet. Cùm autem quadratum* A B G D *ſit dimidium ſibi circunſcripti quadrati, per quadrageſimamſeptimam primi. Circunſcriptum verò maius ſit circulo* A B G D, *ſequetur quadratum* A B G D *plus dimidio circuli* A B G D *continere. Similiter quia triangulum* A T D *eſt dimidium parallelogrammi* A O, *per quadrageſimamprimam primi, ſequetur idem* A T D *maius eſſe dimidio ſectionis* A T D *ipſo parallelogrammo* A O *minoris. Idem oſtendemus, infinitè triangula Iſoſcelia ſuper poligoni baſibus, quotcunque in ſectione deſcripta, dimidio ſectionis eſſe maiora. Quia verò oſtendimus (corollario ſecundo ſeptimæ huius) priſmata ac laterata ſolida (eiuſdem verticis) ad ſe eſſe vt baſes, concludemus parallelepipedum ſuper quadrato* A B G D, *maius dimidio auferre à cylindro qui ſuper circulo* A B G D *ſit ſub eodem vertice, eò quòd auferat dimidium parallelepipedi ſuper quadrato circulum continente deſcripti, vt patuit. Similiter reliquæ ſectionis cylindri (quæ ſuper ſectione* A T D) *maius dimidio dicemus auferre priſma, quod ſuper triangulo* A T D *conſtituitur, ſub cylindri altitudine, eò quòd præcisè dimidium auferat parallelepipedi ſuper parallelogrammo* A O *ſub eodem cylindri vertice deſcripti. Sicque infinitè plus dimidio reliquarum quotuis ſectionum cylindri tollere poterimus. Auferatur itaque à cylindro circuli* A B G D *ea arte plus dimidio & reliqui item plus dimidio. Relinquatúrque tandem (ex prima decimi) magnitudo minor ipſo exceſſu* C, *quo cylindrus triplum coni exceſſit, ex hypotheſi, eáque ſit ſectiones cylindri conſtitutæ ſuper ſectionibus circuli, ſcilicet* A E E B B Z Z G G I I D D T T A. *Cùm autem hæ relictæ ſint exceſſu* C *minores, ſequetur illud quod ſupereſt lateratum ſolidum, quod ſuper poligono* A T D I G, *maius eſſe triplo coni conſtituti ſuper circulo* A B G D, *cùm cylindrus excedat lateratum ſolidum minus ipſa* C, *qua cylindrus exceſſit triplum coni. Multo itaque maius erit idem lateratum ſolidum triplo pyramidis lateratæ, ſuper eodem poligono & coni altitudine deſcriptæ: nam ea pyramis cono includitur, quod fieri non poteſt. Nam eiuſdem pyramidis triplum oſtenſum eſt idem lateratum ſolidum, per corollarium vigeſimæ ſeptimæ huius. Non igitur erit cylindrus triplo ſui coni maior: Dico quod neque minor. Siquidem fieri poſſe credatur ſuper eodem typo. Eſto minor cylindrus triplo ſui coni aliqua magnitudine* C, *cùm enim oſtenſum ſit pyramides veluti priſmata aut laterata ſolida, ad ſe eſſe vt baſes ſub eadem altitudine, ex ſexta & corollario ſeptimæ huius. De cono (vt de cylindro diximus) tollatur pluſquam dimidium, & reliqui pluſquam dimidium, relinquatur verò (per primam decimi) ex triplo coni, minor magnitudo ipſa* C, *quæ ſit ſectiones coni ſuper baſibus quæ circa multangulas pyramides. Triplæ itaque illæ pyramides cylindro ſunt maiores, cùm plus deficiat cylindrus à triplo coni, quàm hæ triplæ pyramides, nempe ipſa* C. *Sed triplæ pyramides ſolido ſuper ipſarum poligono & vertice ſunt æquales, per corollarium ſeptimæ huius. Solidum itaque lateratum quod ſuper pyramidum poligono & ſub cylindri altitudine eſt conſtitutum, cylindro ipſum continente maius erit, contra 9 commun. ſentent. quod eſt abſurdiſsimum. Nam ſolidum illud ipſi cylindro incluſum eſt. Non itaque*

minor

minor erit cylindrus triplo ſui coni, neque maior, vt patuit. Erit itaque ipſi triplo æqualis. Omnis igitur conus cylindri tertia pars eſt eandem eidem, &c.

Propoſitio vndecima.

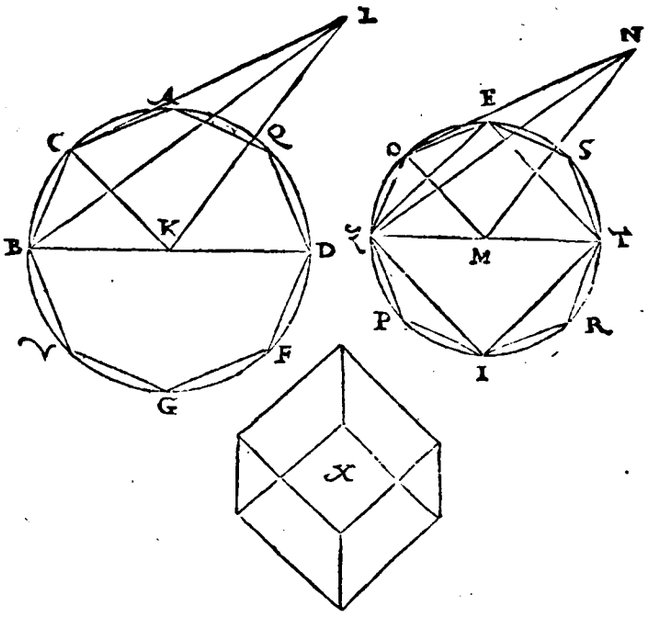
Sub eodem faſtigio exiſtentes Coni & Cylindri, adinuicem ſeſe habent ſicut baſes.



Proponantur ſub eodem faſtigio coni vel cylindri, ſcilicet ſuper baſibus A B G D *&* E Z I T *æquali verò faſtigio* K L *ipſi* M N : *Dico conum & cylindrum ſuper baſi* A B G D *ſic eſſe ad conum & cylindrum ſuper* E Z I T, *ſingula ſingulis, vt baſis* A B G D *ad baſim* E Z I T, *quòd ſi conorum aliquis ſcilicet* A B G D L, *non habeat rationem quam baſes ad reliquum* E Z I T N, *habeat eam baſium rationem ad aliam magnitudinem* X, *quæ aut maior aut minor cono* E Z I T N *erit. Sit itaque prius* X *minor cono* E Z I T N *magnitudine* H, *à cono autem* E Z I N *tollatur ſæpius maius quàm dimidium, vt proxima iam demonſtrauimus, relinquatúrque tandem (per primam decimi) magnitudo minor ipſa* H *magnitudine. Quæ quidem ſit ſectiones coni ſuper baſibus ſectionũ* E P P Z Z R R I I S S T T O O E *& vertice* M N *contentæ. Pyramis itaq; ſub poligona baſi & vertice* M N, *maior erit ipſa* X : *nã conus* E Z I T N *plus excedit ipſam* X *quàm pyramidem* T E Z R I N, *circulo itaque* A B G D *ſimile poligonum ipſi* E P Z R I S T O *fiat ad datam* A G, *per decimamoctauam ſexti, ſit q;* A V B F G C D T; *cùm autem ſit (ex hypotheſi) conus* A B G D L *ad* X, *ſicut baſis* A B G D *ad baſim* E Z I T, *ſicut verò baſes fuerunt, ſic pyramis* D A B F G L *ad pyramidem* T E Z R I N, *per ſextam huius. Sicut igitur, per vndecimam quinti, conus* A B G D L *ad* X, *ſic erit pyramis* D A B F G L *ad pyramidem* T E Z R I N, *& ideo viciſſim conus* A B G D L *ad pyramidem* D A B F G L *ſic erit, vt* X *ad* T E Z R I N *pyramidẽ, per decimamſextam quinti, atqui minor eſt pyramis* D A B F G L *cono* A B G D L *circunſcripto. Minor itaq; erit (per 14 quinti) pyramis* T E Z R I N *ipſa* X *magnitudine, ſed & maior oſtenſa fuit, quod fieri nõ poteſt. Conus igitur aliquis rationem nõ habet ad magnitudinem reliquo cono minorẽ, quam habent baſes: Dico inſuper quod neque ad reliquo cono maiorem: quod ſi fieri poſſe credamus, habeat conus* A K L *ad magnitudinem* X *reliquo cono* E M N *maiorem, eam quam habent baſes* A B G D *ad* E Z I T *rationem, erit conuertendo (per coroll. quartæ quinti)* X *ad* A K L *conum, vt* E Z I T *baſis ad* A B G D *baſim, cùm autem* E M N *conus ſit minor ipſa* X, *per hypotheſim, erit ſicut* X *ad* A K L *conum, ſic* E M N *conus ad magnitudinem aliquam quæ minor erit cono* A K L, *per decimamquartam quinti. Sicut autem* X *ad conum* A K L *ſic (per hypotheſim) baſes* E Z I T *ad* A B G D *fuerunt, ſicut igitur baſes* E Z I T *ad* A B G D, *ſic erit conus* E M N *ad magnitudinem reliquo* A K L *minorem, quod fieri non poſſe patuit prima huius parte. Non itaque habet aliquis conus ad magnitudinem reliquo maiorem, aut minorem, rationem quam baſes habent: eam igitur rationem habebit quilibet conus, ad reliquo cono æqualem, & proinde ad ipſum conum, per ſeptimam quinti. Cùm autem conorum ſint æquemultiplices (ſcilicet triplices) cylindri ſuper eadem baſi & altitudine, per decimam huius, qui quidem (ex decimaquinta quinti) eandem igitur ipſis conis habent rationem, ſequetur cylindros ſimiliter ſub eadem baſi & vertice, rationem baſium ſequi & conos. Sub eodem itaque faſtigio exiſtentes coni & cylindri, &c.*

Propoſitio duodecima.

Similes Coni & Cylindri, ad ſeinuicem in tripla ſunt ratione dimetientium quæ in baſibus.



Proponantur ſimiles coni vel cylindri, is cuius baſis ABGD *vertex verò* KL, *& is cuius baſis eſt,* EZIT, *vertex verò* MN, *ſintq; baſium dimetientes* BD *&* ZT, *centra verò* K *&* M: *Dico eos conos vel cylindros* ABGDKL *&* EZITMN, *triplam rationem habere rationis dimetientium* BD *ad* ZT, *quod ſi aliud eſſe opinemur, habeat aliquis conorum* ABGDL *ad aliquam magnitudinẽ, triplam rationem quam habent* BD *ad* ZT *baſium dimetientes: ea quippe magnitudo aut maior reliquo cono* EZITN *aut equidẽ minor erit, eſto prius minor, ſitq; ea* X *ſolidum, quia maior eſt conus* EZITN *ſolido* X, *auferatur ab ipſo* EZITN *cono maius quàm dimidium, & reliqui maius quàm dimidium, deſcripto in eius baſi coni quadrato, & rurſus triangulis, ſuper quibus ſolida eiuſdẽ verticis, ſemper maius dimidio coni vel cylindri tollunt, vt ſecunda, decima, & vndecima huius docuimus. Relinquatur tandem magnitudo minor eo exceſſu, quo conus* EZITN *excedit ſolidum* X, *qui ſit ſectiones coni ſuper ſectionibus,* EO OZ ZP PI IR RT TS SE, *& vertice* N *circa pyramidem quam relinquunt deſcriptæ: Relicta igitur pyramis* EOZPN, *maior erit ſolido* X, *nam conus plus excedit ſolidum* X *quàm pyramidem. Deſcribatur itaque (per decimamoctauam ſexti) circulo* ABGD *ſimile poligonum ipſi* EOZPIRTS, *ſitq;* ACBVGFDQ, *coniunctis* CK LK LB LC *&* OM NM NZ NO *rectis, quoniam ſimiles ſunt figuræ, erit* BC *ad* OZ *vt* BD *ad* ZT, *per primam diffinitionem ſexti, &* BD *ad* ZT *vt* KL *ad* MN, *per vigeſimam diffinitionẽ vndecimi, cùm ſimiles ſint coni: ſicut itaque* KL *ad* MN *ſic* KB *ad* MZ (*quæ ex centro*) *& anguli* BKL ZMN *recti, per decimam ſextam diffinitionem vndecimi. Equiangula itaque ſunt* BKL *&* ZMN *triangula, per ſextam ſexti. Sicut igitur* KL *ad* MN *ſic (per quartam ſexti)* LB *ad* NZ, *fuit autem* BC *ad* OZ *vt* BD *ad* ZT, *&* BD *ad* ZT *vt* KL *ad* MN, *&* KL *ad* MN *vt* LB *ad* NZ. *Equa igitur ratione erit* BC *ad* BL, *ſic* ZO *ad* ZN, *per vigeſimam ſecundam quinti, ipſis autem* LB *&* NZ *æquales ſunt* LC *&* NO, *æqualium triangulorum ſimiles ſubtenſæ, per decimamſextam diffinitionem vndecimi, Sicut igitur* LB *ad* NZ *ſic* LC *ad* NO: *triangula itaque* LBC *&* NZO *ſunt ſimilia, per primam diffinitionem ſexti, cùm ſint æquiangula, per ſextam ſexti. Pyramides igitur ſuper ſimilibus baſium* ABGD *&* EZIT *poligonis ſimilibus & totidem triangulis deſcriptæ, ſimiles erunt, per ſeptimam diffinitionem vndecimi, pyramis itaque* ABKL *triplam habet rationem ad pyramidem* EZMN, *quam* BC *ad* ZO, *& proinde quam* BD *ad* ZT *baſium dimetientes, per corollarium octauæ huius, ſed eandem habet (ex hypotheſi) conus* ABGDL, *ad ſolidum* X, *per corollarium octauæ huius, erit igitur conus* ABGDL, *ad ſolidum* X, *ſicut pyramis* ABKL *ad pyramidem* EZMN, *per vndecimam quinti, & viciſſim erit conus* ABGDL *ad pyramidem* ABKL *ſicut ſolidum* X *ad pyramidem* EZMN, *atqui maior eſt conus* ABGDL *pyramide* ABKL, *totum ſcilicet ſua parte. Maius itaque erit ſolidum* X *pyramide* EZMN, *ſed & minus oſtenſum fuit, quod eſſet abſurdum. Simile fiet argumẽtum conuertendo, ſi conferatur conus* EZITN *magnitudini minori ipſo reliquo* ABGDL *cono. Nam nihil refert an maior conus minori, an minor maiori conferatur, ſed quouis cuilibet (hac hypotheſi ſumpta) collato, ſemper conſurgit abſurdum, vt monito proximo dicemus: nullus igitur conus habet ad magnitudinem alio quouis ſimili cono minorem, triplam rationem quam habent eorum baſes inter ſe: Dico præterea quòd neque ad maiorem alio cono, ſit igitur (hac hypotheſi) ſolidum* X *maius aliquo cono, ſcilicet hoc* ABGDL, *ſit autem conus* EZITN *ad ſolidum* X *in tripla ratione dimetientium,* ZT *ad* BD, *erit igitur ſicut* EZITN *conus ad ſolidum* X, *ſic* EZMN *pyramis ad* ABKL *pyramidem: nam ſimiles pyramides ſunt in tripla ratione propiorum dimetientium, per corollarium octauæ huius. Conuertendo itaque (ex corollario quartæ quinti) erit ſolidum* X *ad* EZITN *conum, ſicut* ABKL *pyramis ad* EZMN *pyramidem: ſed ſicut ſolidum* X *ad* EZITN *conum, ſic erit conus* ABGDL *ad aliquam magnitudinem, quæ minor erit cono* EZITN, *per decimamquartam quinti, cùm* ABGDL *ſit minus ipſo* X. *Quam igitur habet rationem pyramis* ABGDL *ad pyramidem* EZITN, *quæ fuit tripla dimetientium, eam habet aliquis conus*

A B G D L, *ad magnitudinem aliquam reliquo cono* E Z I T N *minorem. Patuit autem quod & nullus hanc rationem habeat, quod inconuenit, non ea de causa habet aliquis conorum ad aliquam magnitudinem reliquo simili quouis cono maiorem vel minorem, rationem triplam dimetientium quæ in conorum basibus existunt, eam itaque rationem habet quisuis conus ad magnitudinem reliquo simili quouis cono æqualem: ac proinde ad reliquum conum. Cùm autem cylindri quæ super basi & conorum vertice morantur, sint conorum æquemultiplices (nempe tripli ex decima huius) ipsi (ex decimaquinta quinti) eadem conorum ratione sibi adhærebunt, ac ideo triplam habebunt quam communium basium dimetientes* Z T *&* B D. *Similes igitur coni & cylindri ad se inuicem, in tripla sunt, &c.*

MONITVM.

Aliqui circa secundæ, quintæ, vndecimæ, duodecimæ, & decimæoctauæ huius, demonstrationes impegerunt, cùm in his antecedens aliquod particulare particulari consequenti conferri arbitrarentur, veluti hoc theoremate. Si conum A K L *cono* E M N *tanquam antecedens consequenti sociantes inferrẽt, quod scilicet antecedens* A K L *non habens ad magnitudinem* X *consequente* E M N *minorem, rationem triplam quam habent* B D *ad* Z T *dimetientes. Concludit consequens* E M N *non habere ad magnitudinem antecedente minorem, rationem cõuersam eorundem, scilicet* Z T *ad* B D, *quod ex necessitate non sequitur: sed tanti fit conum* A K L *cono* E M N *conferre quanti è conuerso conũ* E M N *eodem argumento cono* A K L *comparare, vt sequenti typo discutiemus.*

Licet antecedens A K L *non possit habere ad magnitudinem* X *minorem consequente* E M N, *triplam rationem dimetientiuum* B D *ad* Z T. *Nihilominus consequens* E M N *potest habere ad magnitudinem* F *antecedente* A K L *minorem triplam rationem conuersæ ipsarum scilicet* Z T *ad* B D.

Ad hæc animaduertendum est his aut similibus demonstrandis, antecedentia & consequentia non sumi particulatim vt circuli ad circulum, coni ad conum, &c. Sed in vniuersum veluti cuiusuis circuli ad quemuis circulum, cuiusuisque coni ad quemlibet conum similem aut eiusdem fastigij, prout exoptat hypothesis. Nec insuper rationum inspici quantitates, puta si fuerit dupla sesquialtera aut quadrupla, &c. sed terminorum qualitates nempe basium aut earum dimetiẽtium, quæ singula & omnia docent proportiones circa species potius quàm circa indiuidua versari: quæ proportiones cùm non per quãtitatem rationum expressam, sed per relationem basium vel laterum suorum proportionalium exprimantur. Ipsa proportionalia sua varietate sequentium, falsò argueremus à data antecedentis & consequentis quantitate rationis immobili, vt inde consurgat proportionalium generalium quantitas rationis. Omnes itaque circulos omnibus circulis conferentes, non propositorum inter se tãtum, sed quorumuis ad quosuis huiusmodi respectum inquirimus, & quorum respectum non à quibusuis, sed à propriis oriri dimetientibus iuxta propositæ hypothesis authoritatem, haud secus omnes conos omnibus conis collatos, nõ quorumuis sed priorum dimetientium tripla coniungi ratione, cuiusquidem rationis non aspectatur quãtitas, sed terminorum qualitas, à quibus sumenda proponitur, quales sunt dimetientes, à quorum ratione circulorum, conorum, cylindrorúmque necnon sphærarum nascitur intelligentia.

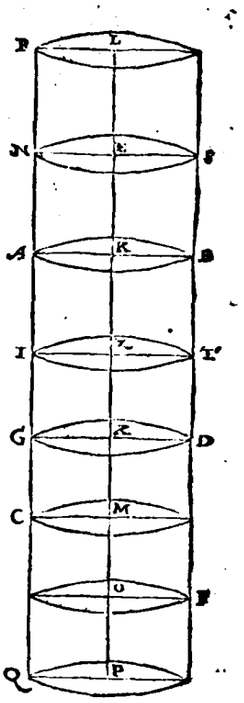
	A K L	E M N
	32	3
	F	X
	24	2
	B D	Z T
	4	4

Demonstrationes igitur hæ ab hoc absurdo educuntur, non quod antecedens aliqua sumpta hypothesi hanc haberet rationem ad consequens, alia verò postmodum sumpta non haberet: id namque absurdum non pareret, ob hypothesis discrepantiam eidem soli antecedenti adaptatam, quæ facilè opposita parit. Sed quosuis circulos ad quoslibet, siue quosuis conos ad quoslibet (hoc est æquè consequens ad antecedens vt antecedens ad consequens) rationem basium, aut dimetientiũ, iuxta hypothesis votum habere, & nõ habere, hæc cùm sint in eodem subiecto, hoc est in quibusuis circulis aut conis, opposita ad se inuicem (scilicet cuiusuis ad quemuis circulorũ vel conorum) facilè parient absurdum, ac perinde ab hoc per inconueniens demonstratum.

Propositio decimatertia.

Si Cylindrus plano secetur, parallelo existente eis quæ ex opposito planis, erit cylindrus ad cylindrum, sicut axis ad axem.

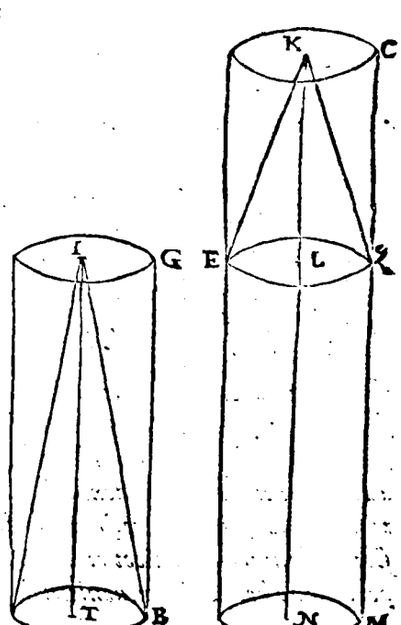
Esto Cylindrus A B G D, *cuius axis sit* K X, *baſes verò oppoſitæ ſint circuli* A K B *&* G X D, *ſecetur autem cylindrus* A B G D *plano* I Z T *parallelo oppoſitis* A K B *&* G X D *planis: Dico eſſe cylindrũ* A T *ad cylindrum* T G, *ſicut* K Z *ad* Z X *axem. Extendatur vtriuſque axis in* L *&* P, *axi autem* Z K *æquales ponantur* K E E L: *ipſi verò* Z X *æquales ponantur quotuis* X M M O O P. *Per ſigna verò* L E M O P *parallela plana ipſis* A K B *&* G X D *ducantur, per corollarium* 15 *vndecimi, ſuper quibus planis & centris* L E M O P, *circuli ipſis* A K B *vel* G X D *æquales deſcribantur, extenſa circa eos ſuperficie* A N R S *&* G C Q F. *Cylindri itaque erunt* A T A S S R *ſuper æquis parallelis baſibus* A K B N E S *&* R L, *ac æquis verticibus* Z K K E E L, *per* 18 *vndecimi, & conſtructionem, qui (per* 11 *huius) æquales erunt, quum æquales ſint eorum baſes, ſimilies verò, per vigeſimam diffinitionem vndecimi. Similiter* I D D C C F F Q *æquales erunt (ex eiſdẽ) & ſimiles. Quotuplus igitur erit cylindrus* R T *ipſius* A T, *tam multiplex erit axis* L Z *ipſius* K Z, *ſunt enim æquales numero axes & cylindri æquales. Haud ſecus tam multiplex erit* Q T *cylindrus, ipſius* G T, *quotuplex eſt* P Z *axis ipſius* X Z. *Si itaque axis* L Z *excedat axem* P Z, *deficiat, vel eidem æquetur, & cylindrus* R T *ſimiliter excedit cylindrum* Q T *deficiet, vel eidem æquabitur, augmenta etenim cylindrorum axium ſequũtur augmenta, ex hypotheſi. Quatuor igitur magnitudinum* K Z *&* Z X *axium, &* A T T G *cylindrorum, æquemultiplicia primæ* K Z *& tertiæ* A T, *ſcilicet* L Z *axis, &* R T *cylindrus. Alia quæuis multiplicia ſecundæ* Z X *& quartæ* T G (*hæc* P Z *axem &* Q T *cylindrum*) *ſimul excedunt, æquantur, vel deficiũt adinuicem ſumpta. Earum igitur ſimplices* K Z *ad* Z X *axes, erũt vt* A T *ad* T G *cylindri, per quintam diffinitionem quinti. Si itaque cylindrus plano ſecetur parallelo exiſtente eis quæ ex oppoſito planis, erit &c.*



Propoſitio decimaquarta.

In æqualibus baſibus exiſtentes Coni & Cylindri, adinuicem ſeſe habẽt ſicut faſtigia.

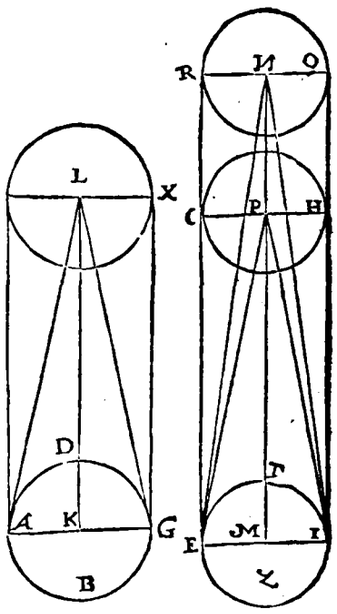
Sint ſuper æquis baſibus A B E Z *cylindri* A G E C *aut coni* A I B E K Z: *Dico eſſe* A G *ac* E C *cylindros, aut* A I B *ad* E K Z *conos, ſicut* T I *ad* L K *faſtigia. Producatur cylindrus* E C *in* N, *extenſa in rectum* K L *recta, centro autem* N *circulus ipſi* E L Z *parallelus & æqualis fiat* N M, *rectæ verò* I T *æqualis ſit* L N, *& perficiatur cylindrus* E M: *cylindri itaque* A G *&* E M *æquales erunt, per vndecimam huius, ſunt enim ſub æqua altitudine* I T *ipſi* L N, *& æquis baſibus, ex hypotheſi, quoniam autem totus* C E M *cylindrus ſecatur plano* E L Z *parallelo exiſtente ipſis* K C *&* M N *oppoſitis. Erit ſicut* N L *ad* L K *axes, ſic cylindrus* M E *ad* E C *cylindrum, per præfatam. Sed ſicut* N L *ad* L K, *ſic* I T *ad eandem* L K, *per ſeptimam quinti, & ſicut* M E *ad* E C *cylindri, ſic* A G *ad eundem* E C, *ex eadem. Sicut igitur (per vndecimam quinti)* I T *ad* L K *faſtigia, ſic erunt* A G *ad* E C *cylindri. Quia verò* A B I, *&* E K Z *coni eorum cylindrorum ſunt tertiæ partes, per decimam huius, ipſi (per* 15 *quinti) in earum cylindrorum ratione erunt, & proinde ſicut* I T *ad* K L *faſtigia. In æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni, &c.*



Propoſitio decimaquinta.

AEqualium conorum & cylindrorum, reciprocæ ſunt baſes verticibus, & coni ac cylindri quorum reciprocæ ſunt baſes verticibus, ſunt æquales.

Sint



Sint æquales coni AGL EIN *vel cylindri* AXEO, *ſuper baſibus* ABGD EZIT, *Ipſius autem* AGL *vel* ABGD *vertex ſit* KL, *Reliqui verò* EO *ſit* MN, *baſium verò dimetientes ſint* AG EI: *Dico eſſe reciprocè ſicut* ABGD *ad* EZIT *baſes, ſic* MN *ad* KL *vertices. Si coni vel cylindri baſes æquas habeant, vertices æquos habebunt, per præfatam, cùm ſint æquales. Et ideo reciprocè proportionales, nempe in ratione æqualitatis erunt baſes, & vertices. Si verò baſes aut vertices ſint inæquales, & è conuerſo reliquorum vertices aut baſes inæquales erunt. Nam ſi æquales eſſent baſes, æquales eſſent vertices, vt diximus, & è conuerſo, per vndecimam huius. Sint ergo inæquales vertices, maior autem ſit* MN, *minor verò* KL, *cui æqualis ponatur* MP *per ſignum* CP *ducto plano parallelo planis ipſius* EO, *per corollarium decimæquintæ vndecimi. Cylindrus igitur* EO *parallelo plano* CPH *ſecabitur. Quare (per decimamtertiam huius) erunt* MN *ad* MP *vertices, vt* EO *ad* EH *cylindri. Sed ſicut* EO *ad* EH *ſic* AX (*ipſi* EO *æqualis*) *ad eundem* EH, *ex ſeptima quinti, ſicut verò* AX *ad* EH *ſic* ABGD *ad* EZIT *baſes, per vndecimã huius. Sicut igitur* MN *ad* MP, *hoc eſt, ad* KL, *vertices, ſic (per vndecimam quinti)* ABGD *ad* EZIT *baſes reciprocæ, per ſecundam diffinitionem ſexti. Ad ſecundam autem, Supponantur baſes reciprocæ verticibus: Dico cylindros* AX *&* EO *eſſe æquales. Sint ideo vt* ABGD *ad* EZIT *baſes, ſic vertex* MN *ad* KL, *vel* MP. *Erit baſis* ABGD *ad baſim* EZIT, *ſicut cylindrus* AX *ad cylindrum* EH, *per vndecimam huius. Sed ſicut* ABGD *ad* EZIT *baſes, ſic (ex hypotheſi)* MN *ad* KL (*hoc eſt,* MP) *vertices. Et proinde (per decimamtertiam huius) ſic* EO *vel* AX *ad* EH *cylindri. Sicut igitur* ABGD *ad* EZIT *baſes, ſic* AX *ad* EH, *Sícque* EO *ad eundem* EH *cylindrum. Igitur* AX *&* EO (*ad eundem* EH *eandem rationem habentes*) *ſunt æquales, per nonam quinti, nec non ſub eiſdem baſi & vertice conſtituti coni. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocè ſunt, &c.*

Corollarium.

Quoniam expoſuimus tantùm conos & cylindros, quorum vertices baſibus perpendiculares incidunt. Exponendi ſunt reliqui quorum vertices angulos ad baſes efficiunt obliquos eiſdem vti actionibus ac paſſionibus quibus præfatos vti hactenus diſcuſſimus.

Ex *decima huius.*

Quoniam diximus decima huius conum cylindri tertiam eſſe partem, eandem ipſi baſim & æquale faſtigium habentis, Illúdque demonſtratum eſt propoſito cylindro cuius baſis ſecatur per quadratum inſcriptum, & ſuper quadrati lateribus deſcripta Iſoſcelia triangula poligonum componentia, rurſúſque ſub huius poligoni lateribus alia eadem arte infinitè deſcripta, plus dimidio baſis auferentia, vt frequentius patuit. Et ideo ſuper his baſibus ſolida quæ ſub cylindri inclinati altitudine eidem includuntur cylindro, manifeſtum eſt plus dimidio cylindri auferre, & reliqui plus dimidio, veluti in rectis cylindris oſtendimus. Nam hæc inclinata ſolida ſuper æquali altitudine, & æquis baſibus rectorum, rectis ſunt æqualia, per corollarium quadraſimæ vndecimi. Quare ſimiliter plus dimidio tollunt vt recta. Conferentes igitur inclinatum cylindrum, cono ſuper eadem baſi & vertice recto, ab impoßibili inſuper arguentes, per decimæ huius demonſtrationem, oſtendemus lateratum inclinanti cylindro incluſum, maius eſſe triplo, ſiue pyramidis & eidem æquum, quod fieri non poteſt. Illúdque erit primæ partis diſiunctiua, qua propoſuimus cylindrum aut triplo coni maiorem eſſe, aut minorem, ſi æqualis non ſuſcipiatur. Secunda verò parte concludemus ſolidum illud lateratum cylindro conceptum, ipſo cylindro maius eſſe quod rurſus abſurdius apparebit. Quare ſi nec triplo coni fuerit cylindrus maior, nec minor, neceſſe æqualis erit. Horum demonſtratio inclinatorum facilè rectorum ſequitur demonſtrationem, eò quòd iam oſtenſum eſt pyramides & laterata ſuper æquis baſibus & altitudine, ſiue recta, ſiue inclinata inuicem eſſe æqualia, nempe vt baſes, per ſextam huius. Cylindrus igitur inclinatus triplus erit cuiuſlibet coni (licet recti) ſuper eius baſi & altitudine conſtituti, ſed eius coni triplus fuit cylindrus rectus, per decimam huius. Cylindrus igitur inclinatus, re-

cto ſuper eadem baſi & vertice æquus erit. Idem fit in conis, qui tertiæ ſunt partes æqualium, & ideo inter ſe æquales erunt.

Ex vndecima huius.

Quare ſequetur iuxta vndecimam huius, ſub eodem faſtigio exiſtentes cylindros ac conos inclinantes aut rectos, ad ſe eſſe vt baſes. Cùm enim recti ad ſe ſint vt baſes, rectis verò æquales ſint inclinati, ipſi ad ſe erunt vt baſes.

Ex duodecima huius.

Et proinde ex duodecima huius, ſimiles coni & cylindri inclinati triplam habent rationem dimetientium quæ in baſibus. Cùm æquales ſint rectis eam rationem habentibus, per duodecimam huius, Ipſi eandem habebunt, cùm maximè æquales habeant baſes rectis.

Ex decimatertia huius.

Et ideo ſequetur ex decimatertia huius. Cylindrum inclinatum ſectum plano parallelo oppoſitis eius planis, in rationes axium ſectum eſſe. Supponantur autem ſuper eadem baſi rectus & inclinatus cylindri, ſubque eodem vertice, qui ſecentur plano oppoſitis parallelo, manifeſtum erit vnius ſectiones alterius ſectionibus æquales eſſe, ſunt enim ſuper æquis baſibus & vertice, nempe inter parallela plana. Sed & eorum axes proportionaliter ſecantur à planis, per decimamſeptimam huius. Inclinati igitur (rectis æquales) ſuorum axium rationem veluti recti habebunt. Nam vtraque eſt eadem axium ratio.

Ex decimaquarta huius.

In æqualibus itaque baſibus exiſtentes coni & cylindri inclinati, ad ſe erunt (ex decimaquarta huius) vt faſtigia. Cùm enim inclinati rectis eandem baſim & faſtigium habentibus, ſint æquales, Recti verò ſunt ad ſe vt faſtigia, Inclinati igitur ad ſe erunt vt eadem faſtigia vtriſque communia.

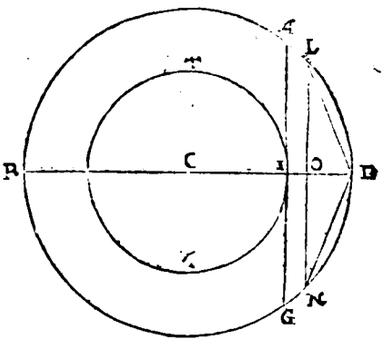
Ex decimaquinta huius.

Vnde reciprocè erunt æqualium conorum, vel cylindrorum inclinatorum aut rectorum, baſes verticibus, & è contrà. Cũ enim ſæpius dixerimus inclinatos & rectos æquales eſſe, qui eaſdem habẽt baſes & vertices. Cũ igitur recti æquales, ſuorum verticũ ac baſium reciprocã patiantur rationem, Sequetur inclinatos (rectis æquales) ſuarum baſium ac verticum (vtriſque communium) inſtar rectorum reciprocam rationem habere. Similiter ſi reciprocam habeant eorum vertices & baſes rationem, & ipſi æquales erunt, eò quòd æquales ſint rectis cylindris, ſuper eiſdem baſibus & vertice, qui quidem inter ſe ſunt æquales, per eandem decimamquintam huius. Suſcipiemus itaque ea quæ de conis & cylindris hoc duodecimo diſcuſſimus, quorum vertices baſibus perpendiculares inſiſtunt, ex conorum & cylindrorum diffinitionibus, æquè intelligi in conis & cylindris, quorum vertices ad baſium plana inclinantur, ſiue obliquos efficiunt angulos. Notabimus tamen huiuſmodi conos aut cylindros inclinantes, minimè teretes eſſe veluti rectos: nam ſi ſecentur plano ſuſcipiente verticem eorum ad rectos, hæc ſectio non circulum, ſed conoydalem figuram in eorum ſuperficie deſcribet, cuius maior dimetiens æqualis erit (in cylindris) dimetienti baſis, hoc eſt, eadem conſtabit. Necnon in conis eadem quæ in rectis contingent ſectis eadem methodo.

Propoſitio decimaſexta.

Binis orbibus circa idem centrum exiſtentibus, in maiori orbe multangulum æquilaterum & parilaterum inſcribere, non tangens orbem minorem.

Sint



Sint bini orbes A B G D *&* Z I T, *circa idem centrum* C *constituti. Sit autem maiori qui sit* A B G D *inscribendum poligonum æquilaterum, & paria numero latera habens, non tangens verò circulum* Z I T *minorem. Sit vtriusque diameter recta* B I D, *Per signum autem* I *ipsi* B D *ad rectos excitetur* A I G *recta, Semicirculus verò* B A D *bifariam secetur, per* 30 *tertij. Idq; sæpe fiat. Relinquetur magnitudo arcus minor ipso* D A, *per coroll. primæ decimi. Qui esto* D L, *per* L *verò eidem* B D *perpendicularis agatur* L O N, *coniunctis* L D D N *rectis. Quoniam anguli* D O N *&* D O L *sunt recti, ex constructione, recta* B D *secat bifariam rectam* L N M O, *per tertiam tertij. Quare (per 4 primi) reliqua latera triangulorum* D O N D O L, *scilicet* D L D N *erunt æqualia. Si igitur circulo* A B G D *æquales ipsis* D L D N *coaptentur, per primam quarti. Ipsæ conuenient in* B *in numero pariter pari (per 33 noni) æqualésque arcus subtendent, per 28 tertij. Nam secti sunt per numerum à binario duplum, scilicet dimidia sectione frequenter repetita, qua quidem multiplicatum fuit circuli decrementum. Quia verò* L N *est ipsi* A G *parallela, per 28 primi, cùm vtraque sit eidem* B D *perpendicularis, & in eodem circuli plano, per constructionem. Ipsa* L N *non tangit circulum* T I Z. *Minus igitur ipsum circulum* T Z I *tangent rectæ,* D L D N. *Nec proinde reliquæ ipsis æquales, per 14 tertij. Binis itaque orbibus* A B G D *&* Z I T *circa idem centrum* C *existentibus, in maiori orbe* A B G D *multangulum æquilaterum & parilaterum (quod sub* D L D N *& reliquis lateribus ipsis æqualibus, & numero pariter pari constitutis) non tangens orbem minorem* Z I T *inscripsimus*

Corollarium.

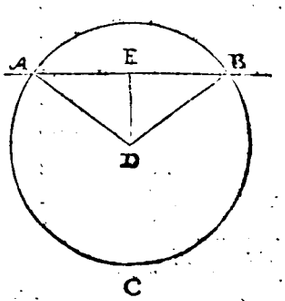
Hinc fit, perpendicularis diametro inter maiorem circulum & rectam tangentem minorem constituta, nullum circulorum tangit.

MONITVM.

Cogimur demonstrationem fusius prosequi Theone, qui primam decimi sat impropriè assumit. Ea nanque vltra dimidium excessus tollendos præcipit, quod huic minimè conuenire potest, quæ pares laterum numeros exoptat. Insuper licet in reliquis verum proferat, illud tamen improbatum ex prius demonstratis relinquit, vt breuitati consulat, confusè tamen.

Lemma.

Si Sphæra plana quadam superficie secetur, communis superficierum sectio circũferentia erit circuli.



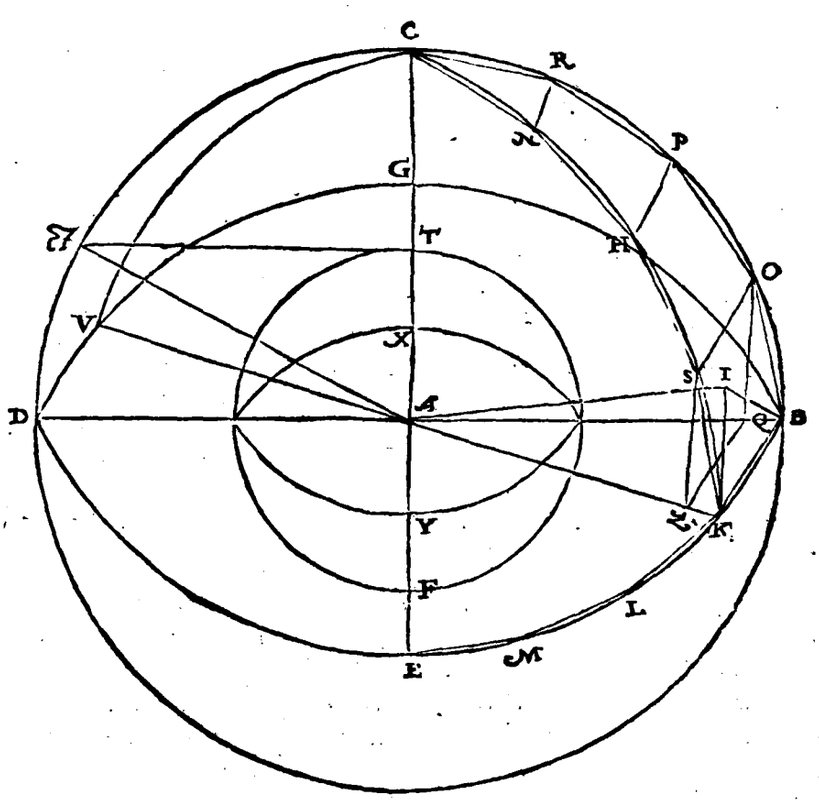
Sit sphæra A B C *secta plano* A E B, *Centrum verò sphæræ, sit* D, *à signo autem* D *in planum* A E B *perpendicularis agatur* D E, *per vndecimam vndecimi. A signo verò* E *in communem plani & superficiei sphæræ sectionem, per planum* A E B *ducantur quotcunque lineæ* E A E B *coniunctis* D A D B. *Quoniam æquales sunt* D E A D E B *anguli recti (nam* D E *recta est ad planum) Subtendentes eos verò rectæ* D A D B *sunt æquales, ex centro per* 12 *diffinit. vndecimi. Ipsæ* D A *&* D B *(per 47 primi) possunt rectas* D E E A *&* D E E B *à quibus communis* D E *ablata, reliquas* E B E A *æquales relinquit potentia, quare & longitudine, similiter omnes lineæ ductæ à signo* E *ad lineam vtrasque plani & sphæræ superficies secantem, æquales ostendentur. Illa igitur linea circunferentia erit circuli, per decimamquintam diffinit. primi. Si verò planum per centrum sphæram secuerit, rectæ à centro sphæræ in communem eorum sectionem ductæ, erunt æquales, per duodecimam diffinitionem vndecimi. Nam ea communis sectio est in superficie sphæræ. Quare quauis arte circulus erit plana superficies ea linea comprehensa, cuius centrum, sphæræ centrum erit.*

Corollarium.

Inferemus, Si à centro ſphæræ æquales perpendiculares agantur in circulos ſphæram ſecantes, ipſos circulos æquales eſſe, ac demiſſas perpendiculares in eorum centra cadere ſequetur. *Nam ea quæ ex centro ſphæræ, ſemper poteſt perpendicularem, & eam quæ ex contactu in circunferentiam protenditur. Communi igitur ablata perpendiculari, ſequetur reliquas quotcunque, inuicem æquas eſſe. Quare circulos æquales deſcribent per primam diffinit. tertij, & in eorum centra cadunt perpendiculares, per decimamſeptimam diffinit. vndecimi, ſunt enim conorum axes. In quos verò circulos maiores cadunt perpendiculares, minores erunt circuli. Nam ab eadem potentia quæ ex centro ſphæræ, maior perpendicularis ablata potentia, minorem relinquit eius quæ ex circuli centro potentiam, & ideo minorem efficit circulum. Si igitur æquales fuerint circuli illi, in eos demiſſæ perpendiculares æquales erunt. Nam ſi maiores vel minores eſſent, circuli inæquales eſſent, vt patuit, quod obſtaret hypotheſi. Et proinde perpendiculares in baſes, omnium dictarum à centro ſphæræ minimè exiſtunt. Nam ſingulæ aliæ eas poſſunt, & eam quæ à centro circuli ſecantis ſphæram eas iungit.*

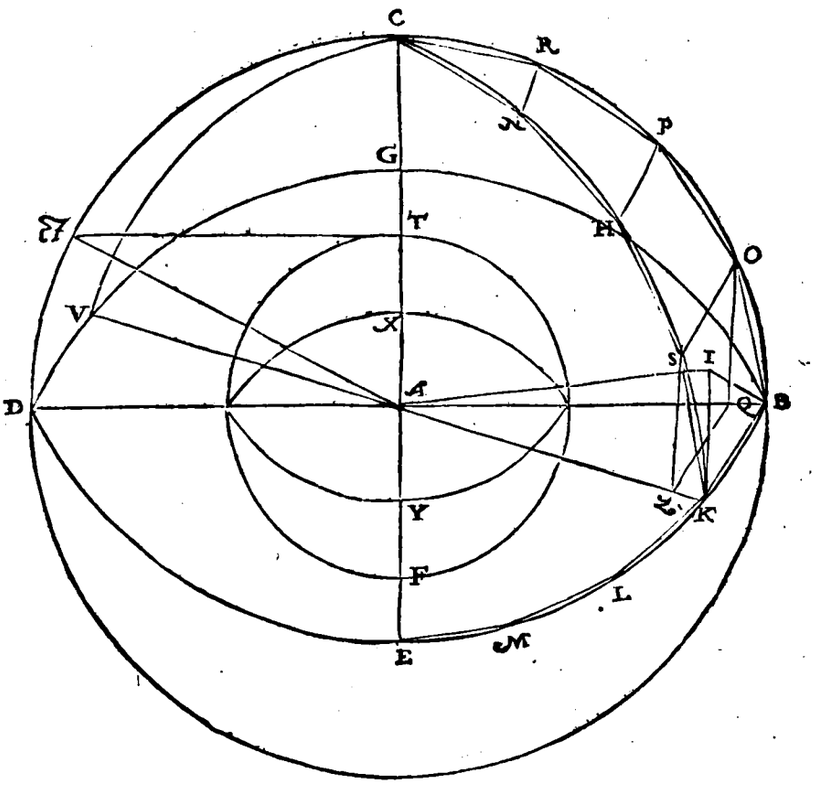
Propoſitio decimaſeptima. **Problema 2.**

Binis ſphæris circa idem centrum exiſtẽtibus, in maiori ſphæra ſolidum polyhedrum inſcribere, non tangens ſphęram minorem in ſuperficie.



Proponantur binæ ſphæræ ABD *&* ATF, *circa idem centrum* A *conſtitutæ, oportet autẽ maiori ſphæræ* ABD *inſcribere polyhedrũ, non tangens minorem ſphæram ſua ſuperficie, ſint binæ ſphęræ dimetiẽtes* DB *&* GE, *ad rectos ſeſe in* A *centro ſecantes. Per ſigna verò* ABD GE *extenſum planum, ſecet ſphæras, hæ ſphęrarũ ſectiones circuli erunt, per lemma præfatum, ſed & maiores (cùm per centrum ductæ ſint ſuper maxima dimetiẽte) qui ſint* BGDE *&* AXY. *Minoris autem ſphæræ circulum* TF *tangat recta* T&, *quæ ad circunferentiam vſque maioris ſphæræ ducatur, coniuncta inſuper* A&: *Diuidatur autem bifariam quadrans* EB, *idque ſæpe fiat, relinquetur (per coroll. primæ decimi) arcus minor eo quẽ ſubtenderet recta* T&, *qui ſit* BK. *Cùm autem circuli* BCD *&* BEG *ſint æquales, per* I *diffinitionẽ tertij, coaptentur circulo* BED *rectæ ipſi* KB *ſubtenſæ æquales, per primam quarti, fiet polygonum æquilaterum & parilaterũ, per* 16 *huius, non tangens circulum ſphæræ* ATF *minoris, ſint itaque eius polygoni latera* BK KL LM ME *in quadrante* ABE: *connectántúrque dimetientes* KAV LA MA *&c. ſuper plano* ADGBE *circuli. Ad ſignum* A *ipſi plano* ABGDB *perpendicularis excitetur ad ſuperficiem vſque ſphæræ maioris, quæ ſit recta* AC *per* 12 *vndecimi. Per rectam* AC *ducantur planæ ſphæram ſecantia in ſingulis polygoni* BKLMB *& reliquis ſectionibus, illæ quidem ſectiones, circuli erunt maiores, nam qui per centrum ſphæræ per*

præfatum

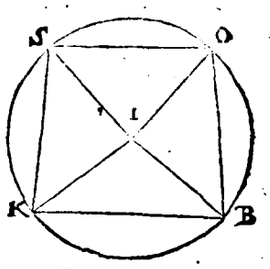


præfatum lemm. & igitur æquales, per primam diffinitionẽ tertij. Distribuantur igitur similiter ipsi quadranti ABE, *quadrantes* ACB ACK *horum circulorum, coaptatis (per primam quarti) rectis ipsi* BK *æqualibus, quæ quidem sint* BO OP PR RC *&* KS SH HN NC, *coniungantur insuper* SO HP NR *rectæ: quoniã circuli* ABCD *&* AKCV *ducuntur per rectam* AC, *ipsi ad planum* ABGDE *recti sunt, per decimamoctauam vndecimi, quoniam æqualibus circulis æquales coaptatæ sunt, æquales erunt* SK KB BO *rectæ, à signis autem* S *&* O *in planum* BGDE *perpendiculares demittantur* SZ OQ, *per vndecimam vndecimi, ipsæ in rectas* KV BD *cadent, per trigesimamoctauam vndecimi. Triangulorum igitur* SZK *&* OQB *bini anguli binis sunt æquales, scilicet* KZS *ipsi* BQO, *cùm sint recti, &* ZKS *ipsi* QBO, *per vigesimamseptimam tertij, æquales enim subtendunt circunferentias* SCV *&* OCD, *& vnum latus* SK *vni* OB *æquale ostensum, reliqua igitur latera & anguli æqualia erunt, per vigesimamsextam primi, scilicet* SZ *ipsi* OQ *&* ZK *ipsi* QB. *Reliquæ igitur* AZ AQ *rectæ æquales erunt, cùm totæ* AK AB *fuerint æquales, quæ scilicet ex centro. Sicut igitur* AZ *ad* ZK, *sic* AQ *ad* QB, *æquales ad æquales, igitur trianguli* ABK *ipsi* BK *parallela erit* QZ, *per secundam sexti. Cùm autem binæ* SZ OQ *sint eidem plano* BGDE *perpendiculares, ex hypothesi, parallelæ sunt ipsæ* SZ OQ, *per sextam vndecimi. Sed & æquales ostensæ sunt ipsæ* SZ OQ, *rectæ itaque* SO ZQ *ipsas coniungentes, æquales & parallelæ sunt, per trigesimamtertiam primi. Vni verò earum scilicet ipsi* ZQ *parallela est* BK, *& reliquæ igitur* SO *eadem* BK *parallela erit, per nonam vndecimi. Rectilineũ igitur* BKOS *in vno erit plano, per septimam vndecimi.*

Similiter ostendemus quadrangula SOPH HPRN *singula in vno esse plano, demissis perpendicularibus in planum* ABGDE, *vt iam diximus. Triangulũ verò* NRC *in vno est plano, per 2 vndecimi. Si itaque per signũ* C *& singula* LME *signa, quadrantes circulorum sphæram in centro* A *secantiũ ducantur, scilicet* ACL ACM ACE, *ac inter eos similiter constituantur plana: per reliquas verò septem sphæræ similes & æquales partes, similis descriptio fiat, componemus solidum polyhedrũ præfatis & descriptis planis concluſum, maiori sphæræ* ABGDE *inscriptum, quod quidem non tangere minorem sphæram sua superficie discutiamus.*

A signo A *in planum* KBOS *perpendicularis agatur* AI, *per vndecimam vndecimi, coniunctis* IK IB *rectis, in ipso plano, recti igitur erunt anguli ipsius* AI *ad rectas* IK IB, *& reliquas ipsam in eo plano tangentes, per secundam diffinitionem vndecimi: nam est* AI *recta ad planum* KBOS. *Quia verò æquales sunt* AK AB, *potest autem* AK *rectas* AI IK, *potest similiter* AB *rectas* AI IB, *sequetur binas* AI IK *potentias, binarum* AI IB *potentiis æquari, communi itaque ablata* AI *supererunt æquales* IK *&* IB *adinuicem potentia, & ideo longitudine, similiter ostendemus rectas* IO IS *super eodem plano ductas, & præfatis & adinuicem esse æquales, nanque ex cẽtro sphæræ subtendunt eas cum recta* AI: *veluti ostensum est in rectis* IK IB.

Vt igitur proposito typo demonstremus centro I, *interuallo autem* IB *vel* IK, *&c.*



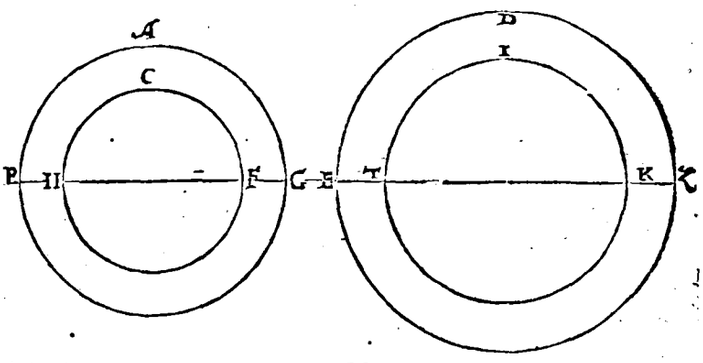
Circulus ducatur circa quadrangulum planum KBOS, *cùm autem tres rectæ* SK KB BO *ſint æquales (vt patuit)* SO *verò minor ipſis, eſt enim æqualis ipſi* ZQ *oppoſitæ, per trigeſimamquartam primi, quæ minor eſt ipſa* KB, *per ſecundam ſexti, ſequetur rectam* BK *maiorem angulum recto efficere* BIK, *eò quòd tres* SK KB BO *tres circuli excedant quadrantes, quare ſingulæ maiorem recto ſubtendent angulum: maior igitur erit* BK *reliqua* IB, *per decimãnonã primi, quæ ex centro. Cæterùm quia rectus eſt quilibet angulorum* AIB AIK AIS *&* AIO, *quos ſubtendunt quæ ex cẽtro maioris ſphæræ ſcilicet* AB *vel* AK, *&c. Subtendit item quæ ex eodẽ centro* A *& rectum* AT *& angulum ad tangentem, per decimamoctauam tertij, æquales erunt potentiæ rectarum* AI IB, *potentiis ipſarum* AT T*&, per quadrageſimamſeptimam primi. Maior autem eſt* T *& ipſa* IB, *cùm ſit ex hypotheſi, maior ipſa* KB, *quam nuper ipſa* IB *maiorem oſtendimus, reliqua itaque* AI *reliquam* AT *excedet potentia, ſiue igitur longitudine, ſed* AT *eſt ex centro minoris ſphæræ,* AI *verò (quæ in baſim polyhedri perpendicularis) minorem ſphæram tranſgreditur, non ideo tanget polyhedri baſis minorem ſphæram: minus igitur eandem minorem ſphæram tangent reliquæ polyhedri baſes, cùm ſint ipſa* KBOS *minores. Nam ſicut oſtenſum eſt rectam* SO *minorem eſſe recta* BK, *patebit* HP *minorem eſſe ipſa* SO *&* NR *ipſa* HP, *& reliquæ quotuis vſque ad* C, *quare minora efficiunt quadrangula minoribus igitur circulis comprehenſa, & proinde à centro ſphæræ remotioribus, per corollarium præfati lemmatis. Binis itaque ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyhedrum inſcripſimus, non tangens ſphæram minorem in ſuperficie.*

Corollarium.

Polyhedrum in Sphæra conſtitutum, ad ſimile ſimitérque alij Sphæræ inſcriptum, triplam habet rationem quam ſphærarum dimetientes. *Nam à centris ſphærarum ad ſimiles baſes ductæ rectæ, ſimiles concludunt pyramides ſingulas ſingulis, quæ cùm ſingulæ ſingulis ſimilibus alterius ſphæræ, triplam habeant rationem ſimilium laterum, quæ ſunt ſphærarum rectæ, quæ ex centris, per corollarium octauæ huius, Patulum erit (ex duodecima quinti) omnes pyramides vnius ſphæræ, ad omnes alterius pyramides ſimiles, eãdem (rectarum ſcilicet quæ ex centris ſphærarũ triplam) habere rationem: quia verò earum quæ ex centris rationem habent dimetientes ſphærarum, per* 15 *quinti, ſequetur polyhedra triplam dimetientium ſuarum ſphærarum conſequi rationem. Et ideo triplam laterum rationem ac veluti pyramides in eis ſimiles habuerunt.*

Propoſitio decimaoctaua.

Sphærę adinuicem in triplici ſunt ratione propriorum dimetientium.



Proponãtur binæ ſphæræ ABG *&* DEZ *quarum dimetiẽtes ſint* BG *&* EZ: *Dico ſphæram* ABG *ad ſphæram* DEZ *habere triplam rationem dimetientium* BG *ad* EZ. *Quod ſi non fateamur, habeat aliqua ſphærarum ſcilicet* ABG *triplam rationem dimetientium* BG *ad* EZ, *ad aliam ſphærã, quæ prius ſit minor reliqua* DEEZ, *ea ſcilicet* ITK, *quæ ipſi* DEZ *concentrica ſtatuatur, ipſi verò* DEZ *polyhedrum inſcribatur non tangens ſphæram* ITK *minorem, per præfatam: polyhedro verò ipſius* DEZ *ſimile ſimilitérque poſitum ſupponatur ſphæræ* ABG *inſcriptum, quoniam ſphæra* ABG *ad ſphæram* ITK *triplam habet (ex hypotheſi) rationem, rectarum* BG *ad* EZ, *ſed triplam quam* BG *ad* EZ *habet polyhedrũ ipſius* ABG *ad polyhedrum ipſius* DEZ *per corollarium præfatum. Sicut igitur ſphæra* ABG *ad ſphæram* ITK, *ſic erit (per vndecimam quinti) polyhedrum ſphæræ* ABG, *ad polyhedrum ſphæræ* DEZ. *Vicißim igitur ſicut ſphæra* ABG *ad polyhedrum ipſius* ABG, *ſic ſphæra* ITK *ad polyhedrum ſphæræ* DEZ, *ſed ſphæra* ABG *maior eſt polyhedro ſibi inſcripto. Sphæra igitur* ITK *(per* 14 *quinti) maior erit polyhedro ipſius* DEZ *eandem* ITK *ſphæram continente, quod fieri non poteſt. Non igitur habet aliqua earum ſphærarum triplam rationem dimetientium*

ad

ad minorem reliqua: Dico præterea neque ad maiorem. quod si fieri poßit, habeat A B G *ſphæræ ad mā iorem ſphæram* E D Z *alia* I T K, *triplam rationē dimetientium* B G *ad* T K: *quoniam ſphæra* I T K *eſt minor ipſa* D E Z. *Erit (ex* 14 *quinti) ſicut* D E Z *ad* A B G, *ſic* I T K *ad aliam ſphæram minorem ipſa* A B G, *quæ ideo fit* C H F *ipſi* A B G *concētrica. Erit igitur (per corollarium quartæ quinti)* A B G *ad* D E Z *ſicut* E H F *ad* I T K. *Inſcribatur itaque ipſi* A B G *polyhedrum, non tangēs ſphæram* C H F, *per præfatam cui ſimile ſupponatur ſphæræ* I T K *inſcriptum. Cùm* A B G *&* D E Z *ſphæræ triplam habeant rationem quam* B G *ad* T K, *ex hypotheſi, eādem autem habent polyhedra ipſis* A B G *&* I T K *ſimiliter inſcripta per corollarium præfatum, ſcilicet triplam ipſarum* B G *&* T K. *Sicut igitur ſunt ſphæræ* A B G *ad* D E Z, *ſic polyhedrum ſphæræ* A B G *ad polyhedrum ſphæræ* I T K, *ſed ſicut* A B G *ad* D E Z *ſphæræ ſic ſunt* C H F *ad* I T K *per conſtructionem. Sicut igitur (per vndecimam quinti)* C H F *ad* I T K *ſphæræ, ſic quæ in* A B G *& in* I T K *polyhedra erunt. Viciſſim igitur (per* 16 *quinti) ſicut* C H F *ſphæra ad polyhedrū ſphæræ* A B G *ſic* I T K *ſphæra ad polyhedrum in ipſa* I T K *inſcriptum. Minor autem eſt* C H F *ſphæra polyhedro in* A B G *eam continente: minor itaque erit* I T K *ſphæra polyhedro ipſi* I T K *inſcripto, per* 14 *quinti, quod fieri non poteſt. Nulla igitur ſphæra triplā dimetientium rationem habebit, ad aliquam reliqua data maiorem: ſed neque ad minorem, vt oſtendimus: eam igitur habebit ad æqualem, ſiue ad eandem reliquam, per ſeptimam quinti. Sphæræ ideo adinuicem, &c.*

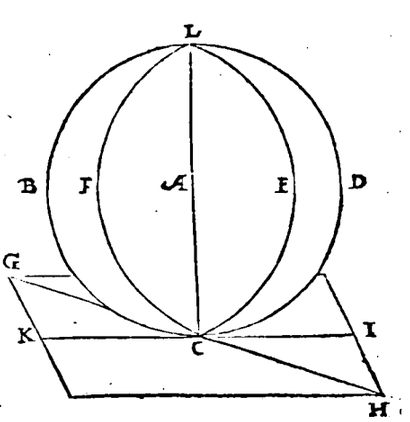
Corollarium.

Hinc fit ſphæras adinuicem eſſe ſicut polyhedra ſimilia ſimilitérque in ipſis deſcripta, ſcilicet in tripla dimétientium ratione vtraque.

Propoſitio decimanona.

Si Sphęra planum tangat, à centro in contactum demiſſa, perpēdicularis erit plano.

Proponatur ſphæra B C D L, *cuius centrum ſit* A, *tāgat autem ſphæram planum* G C I *in ſigno* C, *à cētro verò* A *in* C *demittatur* A C: *Dico* A C *perpendicularem eſſe plano* G I C, *ſecetur ſphæra planis per rectā* L A C *ductis, qui ſint* A B C D L, A F C E L, *quæ ſecent planum* G C I *per rectas* G C H *&* K C I, *circuli igitur erunt binæ ſphæræ ſectiones (per lemma* 16 *huius) ſub communi dimetiēte* L A C *conſtituti. Per planum igitur* G C I *ductæ* G C H K C I *rectæ ad ſignum* C, *extra circulos* B C D L F C D L *cadunt. Ipſæ igitur circulos in* C *tangunt, per ſecundam diffinitionem tertij: recta igitur* L A C *ad ipſas* G C H K C I *rectos efficit angulos, per* 18 *tertij, & igitur ad ipſarum planum* G C I *angulos rectos efficiet, per quartam vndecimi recta* A C. *Si itaque ſphæra planum tangat, à centro autem in contactum &c.*



MONITVM.

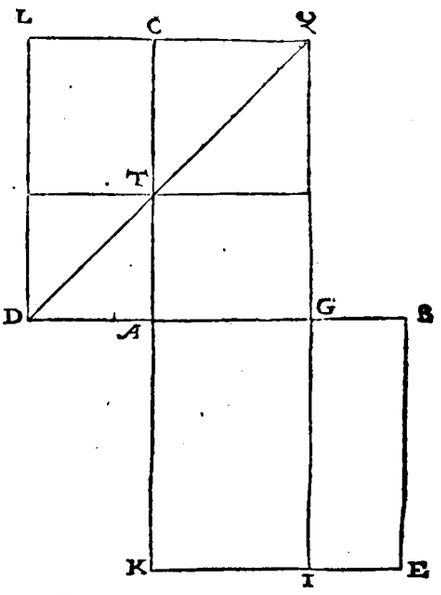
Hanc duodecimo ideo addidimus de ſphæris dicenti, ad futurarum demonſtrationum libri decimi quinti facilitatē, cuiuſquidē omnes inſcriptiones abſoluere freti, huius obſequio ac lemmatis 16 *huius, demiſſarum à centris regularē concludemus angulorum ac ſubtenſarum habitudinem.*

LIBRI DVODECIMI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO-num reſtitutarum Liber decimustertius.

Propoſitio prima.

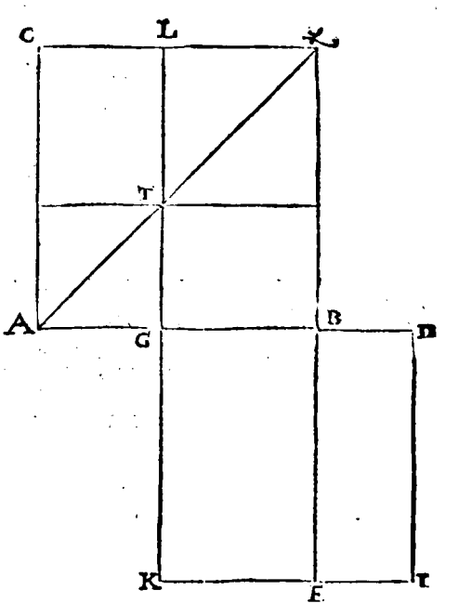
SI recta linea extrema & media ratione ſecetur, maius ſegmentum aſſumens totius dimidiam, quintuplum poteſt eius quod ex totius dimidia.



Recta nanque A B *ſit extrema & media ratione ſecta in* G, *maius autem eius ſegmentum* A G *aſſumat dimidiam totius* A B, *eáque eſto* D A: *Dico totam* G D (*ex maiori ſegmento & dimidia totius cõpoſitam*) *quintuplum poſſe quadrati* D A, *quæ eſt dimidia totius* A B. *Ex* A B *fiat quadratum* A K E B, *ex* G D *verò fiat* G D L Z, *productis* Z G *in* I *&* K A *in* C. *Sit autem dimetiens quadrati* G L *recta* D Z, *perficiatúrq; quadratum ex* D A *ducta per* T *parallela ipſi* D A G. *Quoniã quadrata ſunt* A E D T, *& dupla* A B *ipſius* D A (*ex hypotheſi*) *quadruplum erit* A E *ipſius* D T, *per vigeſimam ſexti: quia verò dupla eſt* A K (*rectæ* A B *æqualis*) *ipſius* A T, *quæ rectæ* A D *æquatur, duplum erit* (*per primam ſexti*) A I *ipſius* T G: *ſed* T G *æquũ eſt reliquo* L T *ſupplemento, per quadrageſimamtertiam primi. Binis itaque* L T T G *æquum erit* A I: *quia verò tota* A B *extrema & media ratione ſecatur, quod ſub tota* A B *&* O B (*hoc eſt rectangulum* G E) *æquum eſt, quadrato reliqui ſegmenti* A G *ſcilicet ipſi* T Z, *per decimamſeptimam ſexti, nam tres ſunt* A B A G G B *proportionales, per tertiam diffinitionem ſexti. Totum igitur* A E *æquum erit toti gnomoni* L T T Z T G, *quadruplum verò fuit quadrati* D T *ipſum* A E. *Gnomon itaque* L T T Z T G *quadrati* D T *quadruplus erit, & proinde totum* D Z *quadratum ex* D G, *quintuplũ erit quadrati* D T, *quod fit ex dimidia ipſius* A B *ſcilicet* D A. *Si igitur recta linea extrema & media ratione, &c.*

Propoſitio ſecunda.

Si recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum potuerit, duplæ prædicti ſegmenti extrema & media ratione diſſectæ maius ſegmentũ, reliqua eſt pars eius quę in principio rectæ lineæ.



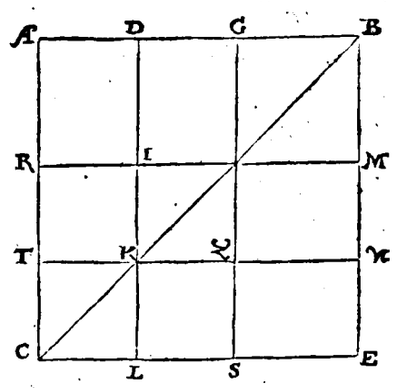
Poſsit recta A B *quintuplum ſuiipſius ſegmenti* A G, *dupla autem ipſius* A G *extrema & media ratione ſecetur: Dico maius ſegmentum eſſe* B G *duplæ ipſius* A G, *eſto dupla ipſius* A G *recta* G D. *Deſcribantur autem ex ipſa* A B *quadratum* A C Z B, *cuius dimetiens ſit* A Z, *ex* G D *verò quadratum* G D I K, *perficiatúrque quadratum ex* A G *ducta per* T *parallela ipſi* A B, *productiſque in rectum* K G L *&* Z B E *rectis, quoniam enim* A B *quintuplum poteſt ipſius* A G, *quadratum* C B *quintuplũ erit quadrati* A T, *ex hypotheſi. Reliquus itaque gnomon* C T T Z T B *quadruplus erit quadrati* A T, *ſed quadrati* A T *quadruplum eſt* G I, *per vigeſimam ſexti. Nam dupla ſupponitur* D G *ipſius* A G, *ipſi igitur* C T T Z T B *gnomoni, æquum eſt quadratum* G I, *quia verò* K G G T *æquales ſunt rectis* D G G A, *eorundem quadratorum lateribus,*

dupla

dupla erit K G *ipsius* G T, *& ideo (per primam sexti) duplum erit* G E *ipsius* T B, *ipsi verò* T B *æquum est* C T, *per quadragesimamtertiam primi. Binis itaque* C T T B *æquum erit* G E: *reliquum igitur* B I *reliquo* T Z *æquum erit, per tertiam communem sententiam. Atqui* T Z *quadratum est ipsius* G B, *circa dimetientem* A T Z, *per vigesimamquartam sexti, rectangulum verò* B I *est sub binis* G D D B, *quia* D I *&* G D *sunt æquales: quod igitur sub* G D D B, *reperitur æquum esse quadrato ipsius* G B. *Tres igitur* G D G B *&* D B *sunt proportionales, per secundam partem decimæseptimæ sexti, secta est igitur* G D *in* B *extrema & media ratione, per tertiam diffinitionem sexti, quia verò maior est tota* G D *prima, sua parte* G B *secunda, &* G B, *igitur reliqua* B D *maior erit, ipsius itaque* G D (*duplæ rectæ* A G) *maius erit segmentum* G B. *Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplum potuerit, duplæ autem, &c.*

Propositio tertia.

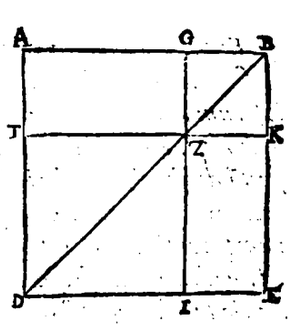
Si recta linea extrema & media ratione secetur, minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti. Quintuplum potest eius quod à media maioris segmenti fit quadrati.



Esto recta A B *extrema & media ratione secta in* G, *cuiusquidem maius segmentum* A G *bifariam in signo* D *sectum sit: Dico minus segmentum* G B *vnà cũ* D G *dimidia maioris, quintuplum posse eius quod ex* G D. *Describatur ex* A B *quadratum* A B E C, *secentúrque similiter ipsi* B A *rectæ* A C B E E C, *per decimã sexti, in signis* R T M N S L, *quoniã æqualia sunt totius* A B *latera, æqualia erunt earum segmenta. Iungantur ideo rectæ* G S D L R M T N *præfatis lateribus parallelæ, quoniam extrema & media ratione secta est* A B, *minus verò segmentum est* G B (*vel* B M) *maius verò* A G (*vel* E S) *rectangulum* A M *sub tota & minori, æquum erit quadrato maioris ipsi scilicet* R S, *per trigesimam sexti: cùm autem æquales sint (per constructionem)* A D D G, *æqualia erunt (per primã sexti)* A I I G: *sed &* (*per 43 primi*) I G *ipsi* M Z *supplemento, ipsa itaque* A I M Z *æqualia erunt. Æquus igitur erit* I G M Z *gnomon ipsi* A M, *sed ipsi* A M *æquũ fuit quadratum* R S: *Ipsa igitur* R S *&* I G M Z *gnomon, æqualia erunt, est autem* R S *quadruplum quadrati* I Z, *cùm bifariam secta sint latera ipsius* R S *similiter ipsi* A G, *ex hypothesi. Quadruplus igitur erit* I G M Z *gnomon quadrati* I Z, *cui additum idem* I Z, *totum ideo* B K *quadratum ex* B D *quintuplum erit quadrati* I Z, *hoc est ipsius* D G *mediæ maioris segmenti* A G. *Minus itaque segmentum* B G *vnà cum* D G *dimidia maioris* A G, *quintuplum potest eius quod ex* D G *maioris segmenti dimidia. Si igitur recta linea extrema, &c.*

Propositio quarta.

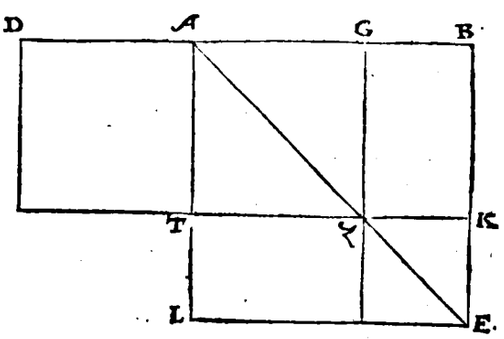
Si recta linea extrema & media ratione secetur, quæ ex tota & ex minori segmento bina quadrata, tripla sunt eius quod à maiori segmento fit quadrato.



Secetur extrema & media ratione recta A B, *cuius maius segmentum sit* A G: *Dico quadrata ex* A B *&* B G *simul sumpta, tripla esse quadrati quod fit ex* A G *maiori segmento, fiat ex* A B *quadratum* A B E D. *Ipsi verò* A B *similiter secetur* D A *in* T, *per decimam sexti, ducantur per signa* G *&* T *parallelæ lateribus quadrati* A E, *rectæ* G Z I T Z K, *coniuncta dimetiente* B Z D: *quoniam secta est* A B *extrema & media ratione, quod sub* A B B G *extremis rectangulum* A K, *æquũ est quadrato* T I *quod à media* A G *per* 17 *sexti, quia verò æqualia sunt suppleme̅ta* A Z Z E, *per* 43 *primi communi addito* G K, *æqualia erunt* A K G E *adinuicem, & igitur ipsi* T I *quadrato æqualia erunt singula* A K G E. *Totum igitur* A E (*quod ex* A B) *cum quadrato* G K (*quod ex* B G) *triplũ erit quadrati* T I, *quod ex* A G *maiori segmento, nam in conferendis rectangulis* A K E G *quadratum* G K *bis sumitur. Si itaque recta linea extrema & media ratione secta fuerit, &c.*

Propoſitio quinta.

Si recta linea extrema & media ratione ſecetur, apponatúrque eidem æqualis maiori ſegmẽto, tota recta linea extrema & media ratione ſecatur, & maius ſegmentum eſt ea quæ in principio recta linea.



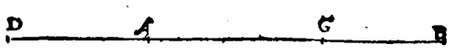
Recta A B *extrema & media ratione ſecetur, cuius maius ſegmentum eſto* A G. *Ipſi verò* A G *in rectum æqualis apponatur* A D: *Dico totam* B D *extrema & media ratione ſecari in* A, *maiúſque eius ſegmẽtum eſſe ipſam* A B *quæ in principio poſita eſt, fiat ex* A B *quadratum* A E, *ex* A D *verò quadratum* D T, *ipſi autem* A B *ſimiliter ſecetur* B E *in* K, *ſintq́ per ſigna* G *&* K *parallelæ,* G Z K Z T *quadrati lateribus, quoniam extrema & media ratione ſecatur* A B *in* G, *quod ſub* A B B G (*hoc eſt* G E) *æquum eſt ipſi* A Z *quadrato quod ex* A G, *per* 17 *ſexti, eidem autẽ* G E, *æquum eſt* T E. *Nam ſupplementa* G K Z L *ſunt æqualia, per* 43 *primi: ipſum igitur* T E *quadrato* A Z *æquum eſt, ſed* A Z *&* D T (*per primam ſexti*) *ſunt æqualia, ipſi igitur* D T *æquum eſt* T E, *commune addatur* A K, *æquum erit ideo rectãgulum* D K *quadrato* B L, *ſed rectangulum* D K *fit ſub tota* D B *&* D A, *hoc eſt,* B K *ſibi æquali, quadratum enim eſt* D T: *quadratum verò* B L *fit ex reliquo ſegmento* A B, *per conſtructionẽ. Tres itaque rectæ* B D B A A D *ſunt proportionales, per* 17 *ſexti. Sicut igitur tota* B D *ad maius* B A, *ſic idem* B A *maius ad* A D *minus ſegmentum: tota igitur* B D *extrema & media ratione ſecatur, per tertiam diffinitionem ſexti, & eius maius ſegmẽtum eſt* A B *quæ in principio recta linea. Si igitur recta linea, &c.*

MONITVM.

Proponit Theon poſt hanc quintam quaſdam diffinitiones, quibus quid ſit reſolutio priori, quid autem ſit compoſitio poſteriori enunciat, vt demum quinque præfatarum demonſtrationum ita peruertat ordinem, quo ſuppoſita propoſitionis concluſione argumentum quo concluſa fuit probet priori argumento quod reſolutionem vocat, ſubſequenti autem argumentum ſupponit, vt propoſitum concludat: quæ cùm nihil ad Euclidis elementa conferre percipiamus, eò quòd maximè nihil vltra propoſitum oſtendant, data opera ob componendum omiſimus, & modici aut nullius momẽti ea fuiſſe arbitrati ſumus.

Propoſitio ſexta.

Si recta linea certa extrema & media ratione ſecta fuerit, vtrumque ſegmentorum incerta eſt, eáque appellatur Apotome.



Exponatur certa recta A B *extrema & media ratione ſecta in* G, *Maius verò eius ſegmentum ſit* A G: *Dico ipſorum* A G *&* G B *vtrumque ſegmentorum, rectam incertam eſſe, eámque vocari apotomen. Addatur ipſi* A B *recta* D A *in rectum, æqualis dimidiæ ipſius* A B, *Certa erit* D A *dimidia totius* A B, *per ſextã diffinitionem decimi. Quia verò* (*ex prima huius*) G D *quintuplum poteſt rectæ* D A, *recta* G D *rectæ* D A *potentia commenſurabilis erit, per ſextam decimi, habent enim numerorum rationem earum potentiæ. Cùm autem habeant rationem quam quinque ad vnum* (*vel* 20 *ad* 4) *non quadrati ad quadratum, Ipſæ quadratorum rationem non habent, per coroll.* 25 *octaui. Quare recta* G D *potẽtia tantùm eſt ipſi* D A *commenſurabilis, per nonam decimi, eò quòd ſint longitudine incommenſurabiles. Quare à certa* G D *aufertur certa* D A *potentia tantùm toti* G D *commenſurabilis. Reliqua itaque* A G *eſt apotome, per ſeptuageſimamtertiam decimi. Quia inſuper recta* A B *extrema & media ratione ſecatur, quod ex* A G *æquum eſt ei quod ſub* A B B G, *per decimamſeptimã ſexti. Sequetur ita-*

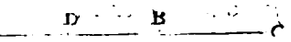
que

que quod ex apotome A G *ad certam propoſitam* A B *comparatum, latitudinem efficere* G B. *Quæ igitur* G B *(per nonageſimamſeptimam decimi) prima erit apotome. Rectæ ideo* A B *certæ vtraque ſectio, apotome erit, ſcilicet* A G *&* G B. *Si itaque recta linea extrema & media, &c.*

Corollarium.

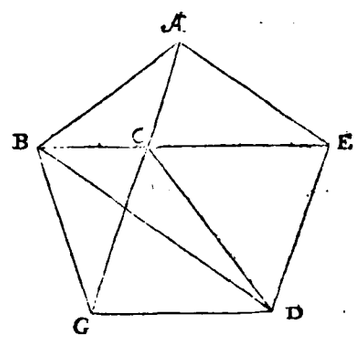
Hinc fit, Si maius ſegmentum fuerit certa linea, minus apotome eſſe.

Vt ſi rectæ A B C *maius ſegmentum* A B *bifariam ſecetur in* D, *Recta* D C *quintuplum poteſt rectæ* B D, *per tertiam huius. Quia verò* B D *(certæ propoſitæ* A B *dimidia) certa eſt, per ſextam diffinitionem decimi. Ipſi verò* B D *commenſurabilis (ſcilicet quintupla) potentia eſt* D C. *Ipſa igitur* D C *certa erit, per eandem diffinit. Cùm autem potentiæ* D C *&* D B *non habeant rationem quadratorum, ipſæ longitudine incommenſurabiles (ex nona decimi) erunt, & igitur potentia tantùm commenſurabiles. Reliqua igitur* B C *minus ſegmentum totius* A C, *eſt (per 73 decimi) apotome. Poterat breuius demonſtrari, ſed hac demonſtratione fuſius patebit linearum natura.*



Propoſitio ſeptima.

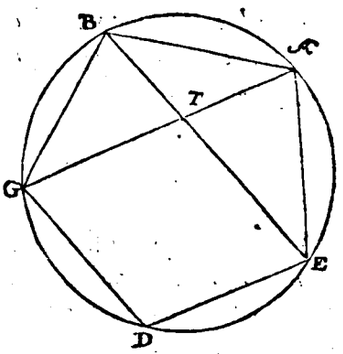
Si quinquanguli æquilateri tres anguli, ordinatim aut non ordinatim æquales fuerint, æquiangulum erit ipſum quinquangulum.



Quinquanguli A B G D E *ſint æqualia latera, & tres eius quilibet anguli. Sint prius ordinatim qui ad* A B G, *productis* A G B E B D *rectis: Dico æquiangulum fore ipſum* A B G D E *quinquangulum. Quoniam anguli qui ad* A B G *ſunt æquales, & circum eos æqualia latera, baſes quoque* B E B D A G *ſunt æquales, per quartam primi. Et proinde anguli* A E B *&* G D B *erunt (per octauam primi) æquales. Quia verò rectæ* B D B E *ſunt æquales oſtenſæ, anguli* B E D B D E *ſunt (per quintam primi) æquales. Totus igitur* A E D *toti* G D E *æquus erit, per 2 commu. ſenten. Cùm autem æquales ſint* B A G A B E *anguli (per 8 primi) trianguli* A B C *bina* A C C B *latera æqualia erunt, per ſextam primi. Reliquæ itaque* C E C G *æquales erunt, per tertiam commun. ſentent. Triangulorum igitur* C G D *&* D E C *bina latera* C G G D, *binis* C E E D *æqualia ſunt, & baſis communis* C D. *Anguli itaque* C G D *&* C E D *æquales erunt, per octauam primi, ſed æquales ſunt (per eandē)* A G B *&* B E A, *totus igitur* B G D *toti* A E D *æquus erit. Sed ipſi* A E D *æquus fuit* E D G. *Ipſi verò* B G D *reliqui* B A E A B G. *Omnes igitur quinquanguli* A B G D E *anguli ſunt æquales, Sed iam non ordinatim. Sint æquales anguli* A G D, *Quoniam anguli qui ad* A *&* G *ſunt æquales, & æquis lateribus (ex hypotheſi) comprehenſi, baſes* B E *&* B D *&* *anguli* B E A B G D *æquales erunt, per quartam primi. Sed Iſoſcelis* B E D *anguli* B E D B D E *ſunt (per quintam primi) æquales. Totus itaque* A E D *toti* G D E *æquus erit. Sed ipſi* G D E *æquus fuit* B A E, *per hypotheſim. Tres itaque quinquanguli* A B G D E *anguli qui ad* A E D *ordinatim ſunt æquales. Omnes igitur (ex prima parte) æquales erunt. Si igitur quinquanguli æquilateri tres anguli, &c.*

Propoſitio octaua.

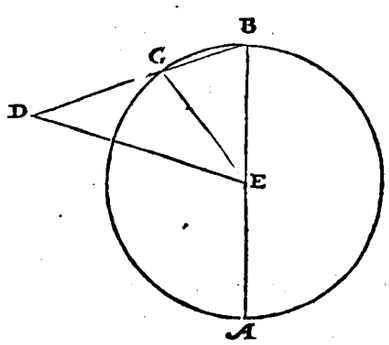
Si quinquanguli æquilateri & æquianguli binos ordinatim angulos rectæ lineæ ſubtendant, extrema & media ratione ſeſe inuicem diuidunt, & maiora earum ſegmenta ipſius quinquanguli lateri ſunt æqualia.



Sit pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B G D E, *subtendant autem binos eius proximos angulos (qui ad* A *&* B) *rectæ* A G B E, *seſe ſecantes in* T: *Dico rectas* A G *&* B E *ſe extrema & media ratione ſecare inuicem, & maiora earum ſegmenta lateribus quinquanguli æqualia eſſe, pentagono* A B G D E *circũſcribatur circulus, per decimamquartam quarti, quoniam anguli qui ad* A *&* B *ſunt æquales, & æquis lateribus comprehẽſi, baſes* A G *&* B E *æquales erunt, per quartam primi, ac reliqui anguli* B A G *ipſi* A E B *&* A B E *ipſi* B G A *æquales. Triangulorũ igitur* A B T *&* B E A *bini anguli binis ſunt æquales, ſcilicet* B A T *ipſi* B E A, *&* A B T *communis, reliqui itaque* B T A *&* B A E *erunt (per corollarium trigeſimæ ſecũdæ primi) æquales, nempe reſidui duorum rectorum. Proportionalia itaque ſunt eorum latera circum æquales angulos,* B E *ad* B A *ſicut* B A *ad* B T, *per quartam ſexti. Cùm autem iſoſceles ſit triãgulũ* A B T, *ſimilis nanque ipſi* B E A, *& exterior angulus* A T E *binis interioribus (quæ ad baſim ſcilicet* T B A *&* T A B) *ſit æqualis, per trigeſimamſecundam primi. Duplus verò ſit* G A E *angulus ipſius* B A G, *per trigeſimamtertiam ſexti, nam dupla eſt* G D E *circunferentia ipſius* B G, *duplus erit igitur* T A E *angulus ipſius* B A T *anguli, cuius* B A T *duplus fuit* A T E *exterior: nam bini interiores ad baſim* B A *ſunt ei æquales, per quintam primi. Recta igitur* T E *æqualis erit ipſi* A E *æquum angulum ſubtendenti, per ſextam primi, & proinde ipſi* B A *ac reliquis pentagoni lateribus æqualis erit ipſa* T E, *fuit autem* B E *ad* B A *ſicut* B A *ad* B T: *erit igitur ſicut tota* B E *ad* E T (*æqualem ipſi* B A) *ſic* E T *ad* B T, *per ſeptimam quinti. Maior autem eſt* B E *tota ipſa* E T, *maior itaque erit* E T *ipſa* T B, *ſecta igitur eſt* B E *in* T *extrema ac media ratione, per ſecundam diffinitionem ſexti, cùm autem æquales ſint* B E *&* A G, *à quibus æquales tolluntur* B T *&* T A. *Reliquæ igitur* T E *&* T G *æquales erunt. Binæ igitur* A G *&* B E (*binos angulos proximos ſubtendentes*) *ſeſe in* T *extrema & media ratione ſecant adinuicem, & ipſius pentagoni lateribus ſunt æquales. Si igitur quinquanguli, æquilateri, & æquianguli binos ordinatim, &c.*

Propoſitio nona.

Si exagoni, & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum componantur, tota recta extrema & media ratione ſecatur, & maius ſegmentum eſt ipſius exagoni latus.



Proponatur circulus A G B, *in eo verò deſcriptarum figurarum, latus quidem decagoni ſit* B G, *latus verò exagoni, ſit* G D, *ſint autem in rectam* B G G D: *Dico ipſam* B D *extrema & media ratione ſectam eſſe in* G, *maius verò eius ſegmentum eſſe* G D *exagoni latus. ſit centrum circuli* A B G *ſignum* E, *per primam tertij, dimetiens verò* A E B, *iungantur* ꝙ E G E D *rectæ, quoniam* B G *latus eſt decagoni, arcus* B G *quarta pars erit arcus* G A *& proinde angulus* G E A *quadruplus erit anguli* B E G, *per trigeſimãtertiam ſexti, ſed &* G E A *binis interioribus* E G B E B G (*per trigeſimamſecundam primi*) *eſt æqualis. Igitur bini quadruplum ipſius* B E G *efficiunt, cùm autem* E G B E B G *ſint (per quintam primi) æquales, nam binæ* E B E G *ſunt ex cẽtro, ſinguli eorum ſcilicet* E G B *vel* E B G *dupli erunt, ipſius* B E G: *quia verò* G D *eſt latus exagoni, ipſa æqualis erit ei quæ ex centro* G E, *per corollarium decimæquintæ quarti, quare anguli* G D E G E D (*per quintam primi*) *erunt æquales. Atqui ipſis æquus eſt exterior* B G E, *per trigeſimamſecundam primi. Angulus igitur* B G E *duplus eſt anguli* G D E: *ſed & idem* B G E *duplus fuit ipſius* G E B, *ipſi itaque* B D E *&* G E B *anguli ſunt æquales, communis verò eſt* G B E, *reliquus igitur* D E B *reliquo* B G E *æquus erit, per trigeſimamſecundam primi. Triangulorum igitur* B D E B E G *æquiangulorum proportionalia ſunt (per quartam ſexti) latera* D B *ad* B E *ſicut* B E *ad* B G, *æqualis autem eſt recta* B E *quæ ex centro ipſi* G D, *vt patuit. Sicut igitur tota* D B *ad* D G *æqualem ipſi* B E, *ſic eadem* D G *ad* G B, *maior autem eſt tota* D B *ipſa* D G. *maior igitur erit (per decimamquartam quinti)* D G *ipſa* G B: *totius igitur* D B *extrema & media ratione ſectæ in* G, *maius ſegmentum fuit* D G *exagoni latus, minus verò* G B *decagoni eidem circulo inſcriptorum. Si itaque exagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum, &c.*

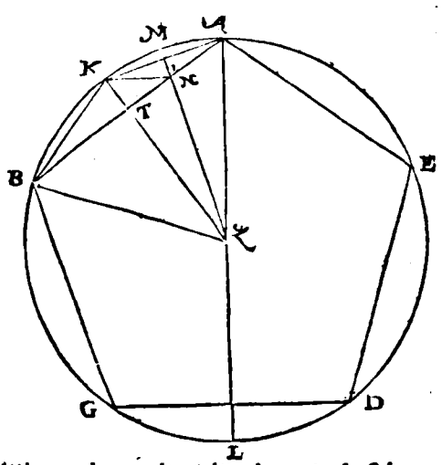
Coroll

Corollarium.

Hinc ſequitur lateris exagoni extrema & media ratione ſecti, maius ſegmentum eſſe latus decagoni, eidem circulo inſcriptorum. *Si enim à recta* D G *ſecetur æqualis ipſi* G B, *dicemus eſſe ſicut tota* D B *ad totam* D G, *ablatam* D G *ad ablatam* G B, *erit igitur (ex decimanona quinti) reliqua ad reliquam, ſicut tota ad totam. Quare ſimiliter ſecta erit* D G *ipſi* D B, *media & extrema ratione, per tertiam diffinitionem ſexti, &c.*

Propoſitio decima.

Si in circulo quinquangulum æquilaterum deſcriptum fuerit, ipſius quinquanguli latus poteſt & exagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum.



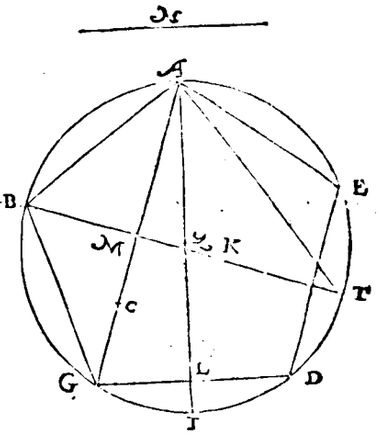
Deſcribatur in circulo A G D *quinquãgulum* A B G D E *æquilaterum, cuius vnum latus ſit* A B: *Dico* A B *poſſe latus exagoni & decagoni in eo circulo deſcriptorum. Sumatur (per* 1 *tertij) cẽtrum circuli* A G D *ſit* ẽ Z, *connexis autem* Z B *& diametro* A Z L *demittatur in rectã* B A *perpendicularis, quæ ſit* Z T K *ductis* B K K A *à rectis, rurſus fiat perpẽdicularis à ſigno* Z *in rectã* A K, *quæ ſit* Z I *ꝓducta in* M, *ſecet rectam* B A *in* N *coniuncta* K N: *quoniã recta* A L *ſecat bifariam circulum* A G D, *per* 17 *diffinitionem primi, & æquales rectæ* A B B G, *rectis* A B E D *æquales arcus auferunt, per* 28 *tertij, reliqui* G L L D *erunt æquales, cùm autem (per tertiã tertij) æquales ſint* B T T A, *communis verò* T Z, *& anguli ad* T *recti, reliqui* A Z K B Z K (*per* 4 *primi*) *æquales erunt, ideo (per* 26 *tertij) æquales eruut arcus* A K K B, *quare & æquales erunt arcus* A K *&* G L, *æqualiũ* D G *&* A B *dimidij, & proinde ſubtenſæ* A K K B, *erunt latera decagoni: quia verò perpendicularis eſt* Z I *ad* A K, *ſimiliter æquales erũt rectæ* A I I K, *& arcus* A M M K; *cùm autem æquales ſint arcus* G L K A, *duplus erit* G L *ipſius* K M, *necnõ* B G *ipſius* B K *arcus. Totus itaque* B G L *totius* M K B *duplus erit, angulus igitur* L Z B *anguli* B Z M *duplus erit, per* 33 *ſexti. Sed idem* L Z B *angulus anguli* Z A B *duplus eſt, per* 20 *tertij. Æquales itaq; ſunt* Z A B *&* N Z B, *eiuſdem dimidij. Triangulorum ideo* A B Z *&* B N Z *bini anguli* B A Z *&* B Z N *ſunt æquales, communis verò* N B Z. *Reliqui itaque* A Z B Z N B *erunt æquales (nempe duorum rectorum reſidui, per coroll.* 32 *primi) æquiangula igitur erũt* A Z B B Z N *triãgula, & proinde erit (per* 4 *ſexti)* A B *ad* B Z *ſicut* Z B *ad* B N. *Quod itaque ſub* A B B N, *æquum erit ei quod ex* B Z, *per* 17 *ſexti. Cæterùm quia* A I I K *rectæ ſunt æquales, angulos verò æquales ad communem* I N *efficiant, triangula* A I N *&* K I N *æqualia erũt, & æquiangula, per* 4 *primi, æqualis itaque erit* A N *ipſi* N K, *& idcirco (ex quinta primi) anguli* N A K N K A *æquales erunt, ſimiliter &* K A B *ipſi* K B A, *& (per primam communem ſententiam)* K B A *ipſi* N K A, *reliquus igitur* B K A *reliquo* K N A *æquus erit, æquiangula itaque erunt* A K B *&* A N K *triangula, erit igitur (per quartam ſexti)* B A *ad* K A, *ſicut* K A *ad* A N. *Quod igitur ſub* B A A N *æquũ erit quadrato* A K, *lateris quidẽ decagoni per* 17 *ſexti. Patuit autẽ quod ſub* B A B N *æquum eſſe ei quod ex* B Z, *quod per corol.* 15 *quarti, eſt latus exagoni. Sed quod ex* B A *latere pẽtagoni, æquũ eſt binis ſcilicet ei quod ſub* A B B N *&* ſub B A A H *per* 2 *ſecundi. Latus igitur pentagoni* A B *poteſt ipſas* B Z *&* A K (*ea quæ ſub* A B B N *&* ſub B A A N *potens*) *latera quidem exagoni & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. Si itaque in circulo quinquangulum æquilaterum deſcriptum, &c.*

Corollarium.

Perpendicularis in baſim pentagoni per centrum trãnſit. *Nam recta* A L *per cẽtrum* Z *ducta bifariam ſecat arcum* G D, *vt patuit. Anguli igitur* G Z L *&* D Z L *æquales erunt, per* 26 *tertij, & æquis lateribus comprehenſi, baſes ideo æquales erunt, per quartam primi. Secta eſt igitur* G D *bifariã. & ideo ad rectos (per tertiam tertij) à recta* A Z L *perpendicularis.*

Propoſitio vndecima.

Si in circulo certam habente diametrum quinquangulum æquilaterum inſcribatur, eius latus incerta eſt, eáque appellatur Minor.

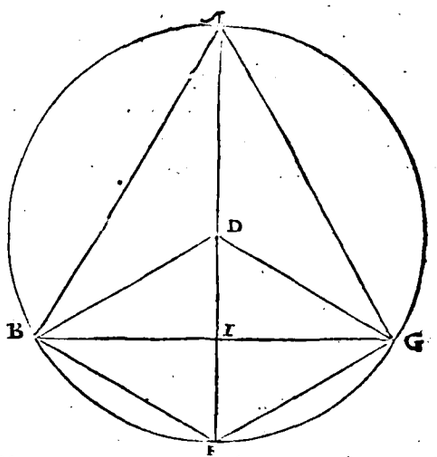


Esto circulus A G D *habens diametrum certam, illi circulo inscribatur quinquãgulum æquilaterum* A B G D E: *Dico eius quinquãgulæ latus esse lineã incertam, quæ dicitur minor. Sit ipsius circuli centrum* Z, *per primam tertij, dimetientes verò sunt* A Z I B Z T. *A semidiametro* Z T, *quarta pars auferatur* Z K, *per nonam sexti, similiter ab ipsa* G A *quarta* G C. *Ipsa igitur* Z K *simulac tota* B K *certæ erunt, per sextam diffinitionem decimi. A binis autem semicirculis* A B G I *&* A E I D *æquales arcus tollantur* A B G *&* A E D, *per 28 tertij, reliqui itaque* G I *&* I D *sunt æquales, si verò supponamus triangulum* A D G, *is bina latera* A G A D *æqualia habebit, per vigesimamnonam tertij, & angulos* G A I D A I *æquales, per vigesimamseptimam tertij, & latus* A L *commune. Bases igitur* G L L D (*per quartam primi*) *æquales erunt, & dupla ideo* G D *rectæ* G L. *Similiter cum* A B B M *binis* G B B M *sint æquales. Et anguli* A B T G B T *æquales, per 27 tertij, bases* A M M G (*per eandem quartam primi*) *æquales erunt. Et proinde* A G *dupla ipsius* M G *erit. Quoniam enim triangulorum* A Z M A G L *angulus* G A L *est communis, rectus autem fuit* A M Z, *Nam* B M *ad rectos cadit. Rectus item* A L G, *per tertiam tertij. Reliqui itaque* A Z M *&* A G L *æquales erunt, per coroll. 32 primi, nempe duorum rectorum residui. Ipsorum igitur* A Z M *&* A G L *proportionalia erunt, per quartam sexti, latera* L G *ad* G A *sicut* M Z *ad* Z A. *Et vicissim* (*per* 16 *quinti*) *sicut* L G *ad* M Z, *sic* G A *ad* Z A. *Sed sicut* G A *ad* Z A *sic* (*per decimamquintam quinti*) *erunt earum quartæ partes, scilicet* G C *ad* Z K. *Sicut igitur* (*per vndecimam quinti*) L G *ad* M Z *sic erit* G C *ad* Z K, *vicissim itaque* (*per* 16 *quinti*) *erit* L G *ad* G C *sic* M Z *ad* Z K. *Quare* (*per* 15 *quinti*) *erit sicut* M Z *ad* Z K, *sic* G D (*dupla ipsius* G L) *ad* G M, *duplam ipsius* G C. *Quia verò est* M Z *ad* Z K *sicut* G D *ad* G M, *erit componendo* (*per* 18 *quinti*) G D G M *simul ad* G M, *sicut tota* M K *ad* Z K. *Et ideo* (*per* 22 *sexti*) *quod ex* G D G M *simul sumptis, ad quod ex* G M *erit, vt quod ex* M K *ad quod ex* Z K. *Cùm autem rectæ* G A *extrema & media ratione sectæ, maius segmentum sit* G D *pentagoni latus, per* 8 *huius. Sequetur* (*ex prima huius*) G D *maius cum* G M (*dimidia totius*) *rectas simul sumptas, quintuplum posse eius quod fit ex* G M *dimidia totius. Quintuplum igitur erit quod ex* M K *eius quod ex* Z K. *Nam fuit ex* G D G M *ad quod ex* G M, *sicut quod ex* M K *ad quod ex* Z K. *Recta itaque* M K *certa erit, per sextam diffinitionem decimi, potest enim quintuplum certæ* Z K. *Quoniam autem posuimus* Z K *quartam esse, ipsius* B Z *vel* A Z *semidiametri, quintupla erit* B K *ipsius* Z K, *& ideo qualium* Z K *potest vnam aream earum poterit* B K *viginti quinque. Sed qualium* Z K *potuit vnam, earum* M K *potuit quinque. Qualium itaque* B K *potuit vigintiquinque, earum potuit* M K *quinque. Quintuplum igitur poterit* B K *ipsius* M K, *quæ quidem* B K *&* M K *cùm iam ostensæ sint certæ, nempe rationem numerorum potentia habentes. Ipsæ potentia commensurabiles erunt certæ propositæ* Z K. *Sed & inter se potentia tantùm, cùm habeant rationem quadrati* 25 *ad non quadratum quinque, quæ non est quadratorum ratio, per coroll.* 25 *octaui. Et proinde latera* B K *&* K M *longitudine incommensurabilia, per nonam decimi. Certæ ideo potentia tantùm commensurabiles sunt* B K *&* K M. *Reliqua igitur* B M *apotome erit, per* 73 *decimi, congruens verò sola* M K, *per* 79 *decimi. Possit autem tota* B K *maius congruente* M K, *eò quòd ex* N. *Quia verò qualium potentia* B K *fuit quinque, earum* M K *fuit vnius. Ipsa itaque* N *excessus, earum poterit* 4 *quarum* B K *potuit quinque,* M K *verò vnum. Excessus igitur* N *toti* B K *longitudine incommensurabilis erit, per nonam decimi, cùm habeant rationem quadrati* 4 *ad non quadratum* 5, *& ideo non quam quadrati habent, per coroll.* 25 *octaui. Tota igitur* B K *maius potest congruente* M K, *eò quòd fit à sibi longitudine incommẽsurabili. Sed tota* B K *expositæ certæ* (*scilicet diametro* B T) *longitudine fuit cõmensurabilis, per sextam decimi. Cùm ipsius* B T *quinque octauas sumpserit, per constructionem, & ideo rationem habeant numerorũ. Recta igitur* B M *apotome erit quarta, per quartam apotomarum diffinit. Si autem area comprehendatur sub certa* B T *& apotome quarta* B M, *hanc aream potens vocatur minor, per* 94 *decimi. Quia verò trianguli* A B T *rectãguli* (*per* 31 *tertij*) *in basim* B T *demissa perpendicularis* A M, *efficit* (*per coroll.* 8 *sexti*) *latus* A B *quod ad segmentum* B M *medium proportionale, inter totam* B T *& ipsam* B M. *Sequetur quadratum quod ex* A B (*latere pentagoni*) *æquum esse* (*per* 17 *sexti*) *ei quod sub extremis* B T *certa &* B M *apotome quarta. Illud igitur quadratum potens* A B *latus pentagoni, vocatur minor, per eandem* 94 *decimi. Si igitur in circulo certam habente diametrum quinquangulum æquilaterum, &c.*

Propo

Propositio duodecima.

Si in circulo triangulum æquilaterum descriptum fuerit, ipsius trianguli latus potentia triplum est eius quæ ex centro circuli.



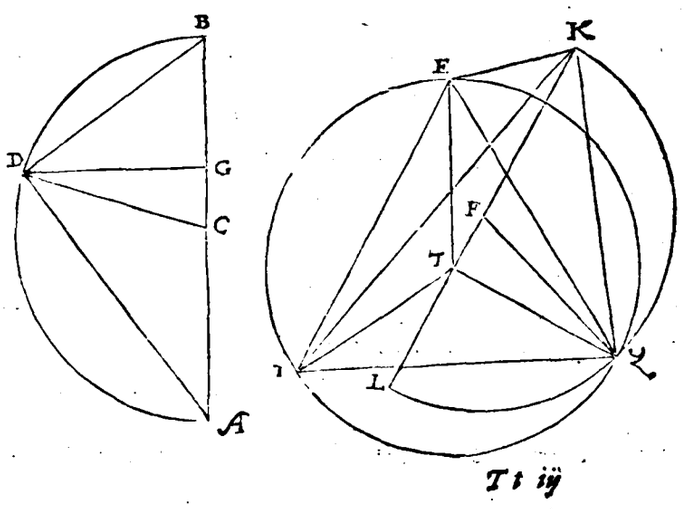
In circulo ABEG *triangulum æquilaterum descriptum sit* ABG: *Dico trianguli* ABG *latus, potentia triplum esse eius quæ ex centro circuli* ABGE. *Sit (per primam tertij) centrum* D *circuli* ABEG, *producta* AD *in* E, *coniunctáque recta* BE. *Quoniam dimetiens* AE *bifariam secat circulum, æquales erunt arcus* BE *&* EG. *Nam æqualium* AB AG *sunt residui. Recta igitur* BE *sextam subtendit circuli partem, & proinde ei quæ ex centro est æqualis, per coroll. decimæquintæ quarti. Sed* AE *dimetiens (ipsius ideo* BE *dupla) quadruplum eius potest, per vigesimam sexti. Hoc autem quadruplum possunt binæ* AB BE, *per 47 primi. Binæ igitur* AB BE *quadruplum possunt eius quod ex* BE. *Ablato itaque ipsius* BE *quadrato, reliquum* AB *trianguli latus, triplum potest rectæ* BE, *siue eius quæ ex centro sibi æqualis. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum, &c.*

Corollarium.

Hinc sequitur, latus trianguli secare bifariã eam quæ à cẽtro sibi perpendicularis ad circunferentiam ducitur. *Cũ enim triangula* BDG BEG *sint (ex octaua primi) æquiangula, anguli* DBI EBI *erunt æquales, & ideo (per quartam primi)* DI IE *bases, æquales erunt. Præterea trianguli æquilateri latus, potentia sesquitertium est eius quæ ab vno angulorum in latus oppositum perpendicularis cadit, nam qualium* AB *est potentia* 12 *earum* BI *(dimidia) erit trium. Reliqua igitur* AI *earundem partium erit 9, cùm binæ* AI BI *(per 47 primi) ipsam* AB *possint, quæ quidem potentia* 12 *est ipsius 9, sesquitertia, cæterũ trianguli latus media est proportionalis inter dimetiẽtem & perpendicularem, scilicet* AE *ad* AB *vt* AB *ad* AI, *ex coroll. 8 sexti. Et insuper quæ ab angulo perpendicularis, basim bifariam secat, & per centrum transit: nam si alia duceretur ab* A *in* I *recta, quam ea quæ per* D *ducitur, binæ rectæ superficiem concluderent, contra* 12 *comm. sentent. quod fieri non potest. Quare sequitur oppositum, quæ scilicet per centrum transit, perpendicularis est basi, per tertiam tertij.*

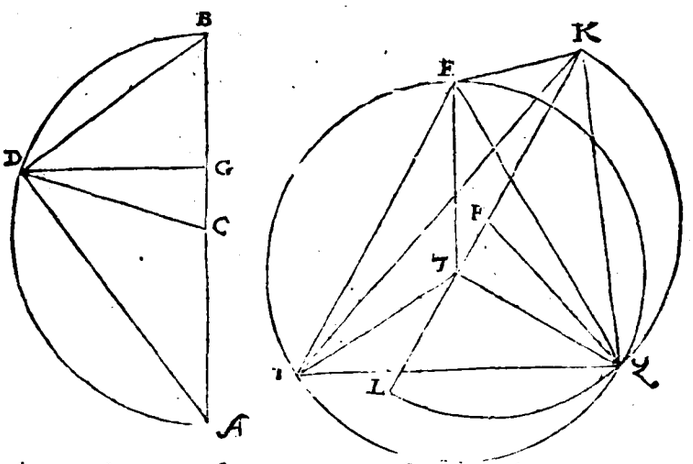
Propositio decimatertia. *Problema* 1.

Pyramidem trilateram & equilateram constituere, & data Sphæra comprehendere, & demonstrare, quod ipsius sphærę dimetiens potentia sesquialter est lateris ipsius Pyramidis.



Data sphæra sit ea quæ sub dimetiente AB, *ipsi verò* AB *centro* C *semicirculus describatur* ADB, *coniuncta* CD, *ab ipsa porrò* AB *tertia pars abscindatur (per nonam sexti) sit ea* GB, *ipsi item* AB *à signo* G *ad rectos excitetur recta* DG, *coniunctis* AD DB. *Ponatur autem rectæ* GD *æqualis* TE, *centro verò* T *interuallo* TE *circulus* EZI *fiat, cui circulo triangulum æquilaterum inscribatur (per secundam quarti)* EIZ, *productis* TE TZ TI. *Ad signũ*

insuper T *ad rectos excitetur plano* E Z I T, *recta* T K, *per duodecimã vndecimi, quæ æqualis abscindatur ipsi* G A *coniunctis* K I K E K Z, *producta verò* K T *in rectum, ipsi* G B *æqualis ponatur* T L, *cùm enim recta* T K *sit ad planum* E Z I T *recta, rectos efficiet ad ipsas* T E T I T Z *angulos, per secundam diffinitionem vndecimi, cùm autem triangulorum* K T Z *&* A G D *bina latera* K T T Z, *binis* A G G D *sint æqualia, & æquos (nempe rectos) contineant angulos, per constructionẽ, æqualia erunt ipsa* K T Z *&* A G D *triangula (per quartam primi) & æquiangula. Similiter triangula* K T E *&* K T I *eidem* A G D, *& proinde adinuicem erunt æqualia & æquiangula, baſes verò* K E K I K Z A D *(per quartam primi) æquales: erit igitur trilatera pyramis* E Z I K, *dico quod æquilatera, cùm ab angulo recto* A D B *in baſim* A B *perpendicularis agatur* D G, *ſimilia erunt (per octauam ſexti)* A B D A D G D B G *triangula. Erit igitur* A B *ad* D B *ſicut* D B *ad* G B, *ſicut itaque* A B *ad* G B, *ſic quod ex* A B *ad quod ex* D B, *per corollarium vigeſimæ ſexti, tripla autem eſt* A B *ipſius* B G, *triplum igitur erit quadratũ ex* A B *ad quod ex* D B: *quia rurſus ex ſimilitudine triangulorum eſt* A B *ad* B D *ſicut* A D *ad* D G, *erit (per vigeſimamſecundam ſexti) ſicut quod ex* A B *ad id quod ex* D B, *ſic quod ex* A D *ad id quod ex* D G: *triplum autem fuit quadratum* A B *quadrati* D B, *triplum igitur erit quadratum* A D *quadrati* D G, *quia verò æqualis eſt* K Z *ipſi* A D *&* T Z *ipſi* G D, *triplum erit quadratum ipſius* K Z *quadrati* T Z, *ſed eiuſdem* T Z *quadrati triplum poteſt* E Z, *per duodecimam huius, æqualis igitur erit* E Z *ipſi* K Z, *& proinde reliqua* K I K E E I Z I *pyramidis* E Z I K *latera, ipſis & adinuicem erunt æqualia, pyramidem itaque conſtruximus æquilateram* E Z I K. *Cæterũ ſi æqualibus poſitis* K T *&* A G *æquales poſitæ addãtur* T L *&* G B, *tota* K L *toti* A T *æqualis erit. Secetur bifariam* K L *in* F, *cùm æquales ſint* K F *&* A C, *per ſeptimam comm. ſentent. reliqua* F T *ipſi* C G *erit æqualis. Triangula igitur* F T Z *&* C G D *duo latera duobus circũ æquales angulos* D G C *&* Z T F *rectos æqualia habent, baſes igitur* F Z *&* C D *æquales habebunt, per quartam primi, eodem patebit argumento eandem* C D *æqualem eſſe eis quæ ſigna* E F *&* I F *coniungerẽt, illæ etenim æquos & æquis lateribus comprehenſos (ipſi* F T Z*) comprehendunt angulos, recta verò* C D *ipſi* A C *(quæ ex centro) æqualis eſt, quare recta* F Z *ipſi* F K *æqualis erit: ſimiliter & ipſis* F E F I F L, *centro igitur* F, *interuallo verò* F K *vel* F Z *ſemicirculus* K Z L *fiat, quo circunducto manente dimetiente* K L, *quoad vnde cœpit redeat, deſcribetur ſphæra circa* F *centrum, per duodecimam diffinitionem vndecimi, tangẽs ſingulos pyramidis qui ad* K E I Z *angulos, nam illi ipſius ſphæræ ſemidiametro* F K *à centro ſphæræ æquè diſtant, vt patuit. Pyramidem igitur trilateram ac æquilateram datæ ſphæræ cuius dimetiẽs eſt* K L, *vel* A B, *inſcripſimus hanc* E Z I K, *quod autem eius dimetiens* K L *ſit potentia ſeſquialter lateris* K Z *ipſius pyramidis patet, oſtenſum eſt quadratum* D B *tertiam eſſe partem quadrati* A B, *reliquæ verò duæ tertiæ eiuſdem ex* A B *ſunt in quadrato* A D, *per quadrageſimamſeptimam primi. Nam* A B *binas* A D D B *poteſt, ſeſquialterum itaque erit quadratum* A B *quadrati* A D, *& proinde* K L *ſphæræ dimetiens ipſi* A B *æqualis, ſimiliter ſeſquialterum poterit ipſius* K Z *lateris pyramidis ipſi* A D *æqualis. Pyramidem igitur trilateram & æquilateram conſtituimus, & data, &c.*



Corollarium primum.

Dimetiens Sphæræ quadruplum ſeſquialterum poteſt eius quæ ex centro circuli baſim Pyramidis continentis. *Cùm oſtenſum ſit dimetientem* K L *ſeſquialterum poſſe lateris* E Z *& oſtenſum ſit inſuper latus* E Z *triplum poſſe eius* T E *(quæ ex centro circuli) triangulũ* E Z I *ambientis, ex* 12 *huius, relinquetur oſtenſum (per quintam diffinitionẽ ſexti) rationem* K L *&* T E *extremarũ, ex quantitatibus rationum mediarũ ſcilicet* $1\frac{1}{2}$ *per* 3 *inter ſe multiplicatarum* $4\frac{1}{2}$ *componere, quæ eſt ipſius* A B *ad* T E *ratio quadrupla ſeſquialtera potentia.*

Corollarium ſecundum.

Et inſuper ab angulo Pyramidis per centrum Sphæræ in baſim oppoſitam demiſſa, ipſi baſi vnica

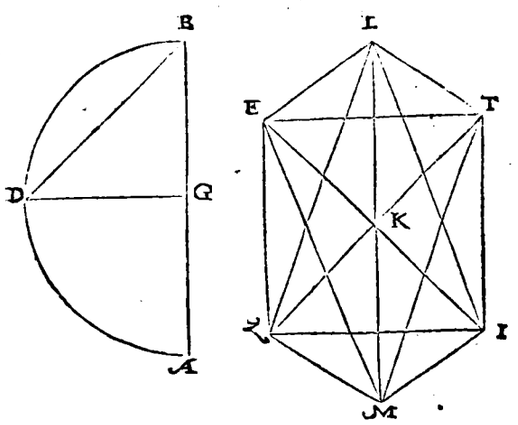
vnica perpendicularis erit,& in cẽtrum circuli baſim continentis cadet. *Nã ſi alia(ab ipſa* K F T *per centrum ſphæræ in centrum circuli ducta) angulos rectos ad baſis planum efficeret, ab eodem ſigno duæ rectæ eidem plano ad rectos conſtituerentur,contra decimãtertiã vndecimi,quod fieri non poteſt. Siverò alia à vertice* K *ad baſis centrum* T *non per centrum* F *ducipoſſe credatur , binæ rectæ ſuperficiem concludent,quod erit abſurdum,contra* 12 *communẽ ſententiam.Ea igitur quæ per centrum ſphæræ ducitur in centrum baſis,vnica perpendicularis erit.Quæ verò in centrum baſis ab angulo perpendicularis erit,per centrum ſphæræ tranſibit.*

Corollarium tertium.

Præterea perpendicularis à cẽtro Sphæræ in baſim Pyramidis, æqualis eſt ſextæ parti dimetientis Sphæræ. *Vt patuit* C G *ſextam partem ipſius* A B *æquam fuiſſe ipſi* F T,*centra ſphæræ , & baſis coniungenti.*

Propoſitio decimaquarta. Problema 2.

Octahedrum conſtituere,eadémque Sphæra, qua pyramidem comprehendere, & oſtendere quod ipſius Sphęræ dimetiens potentia lateris ipſius Octahedri duplus eſt.



Eſto propoſitæ ſphæræ præfatæ dimetiẽs A B,*centrum verò* G,*ſuper* A B *autem ſemicirculus fiat* A D B,*excitetúrque ipſi* A B *perpendicularis* D G,*coniũcta* D B,*cui æqualis ponatur* E T *ex* E T *verò quadratum fiat* E Z I T,*per* 46 *primi,cuius dimetiẽtes ſint* E I T Z,*ſeſe in* K *ſecantes , qui itaque bifariam ſeſe ſecabunt,per corollarium* 34 *primi. Plano autem* E Z I T *ad ſignum* K *recta excitetur* K L, *æqualis rectæ* D G,*per duodecimum vndecimi . Producta autẽ* L K *in* M,*æqualis fiat* K M *ipſi* K L, *vel* G D, *quæ ex centro ſphæræ. Cùm autem æquales ſint rectæ* K E K T K I K Z, *& earum baſes* E T T I I Z Z E *æquales, nempe quadrati latera, anguli rectarum* E I T Z (*quæ ad* K) *æquales erunt,per* 8 *primi, & recti,per decimam eiuſdẽ diffinitionẽ.Recta igitur* E T (*per* 47 *primi*) *poteſt ipſarum* E K *vel* K T *ſingularum duplum. Sed* D B (*æqualis ipſi* E T *poſita*) *duplum poteſt rectæ* D G *quæ ex centro, per eandem* 47 *primi,cùm rectus ſit angulus* D G B,*ex hypotheſi,ipſi igitur* D G *quæ ex centro æquales erunt* K E K T.*Et proinde* K I K Z,*ſed & æquales poſitæ ſunt eidem* D G *rectæ* L K K M,*rectos angulos ad ipſas* E I T Z *facientes ad ſignum* K,*per ſecundam diffinitionem vndecimi. Recti igitur erunt omnes anguli quos efficiunt ad* K *rectæ* E I T Z L M,*ſed æquis lateribus comprehenſi,ſcilicet* K E K I K T K Z K L K M,*vt patuit.Eos itaque angulos æquales baſes* L E L T L I L Z *ad aliáſque partes* M E M T M I M Z *ſubtendent,per quartam primi,ſimulac quadrati latera eoſdem angulos ſubtendentia(ſcilicet* E T T I I Z Z E) *reliquis æqualia erunt,ex eadem quarta primi. Æquilatera igitur & æqualia erunt(ex eadem) triangula* L E T L T I L I Z L Z E,K E T K T I K I Z K Z E *adinuicem,quare octahedrum erit* E Z I T L M,*per* 22 *diffinitionem vndecimi. Cùm autem* Z T *ſit æqualis dimetiẽti* A B *nempe dupla earum quæ ex centro* G D,*vel* G B,*ſuper ipſa* Z T *ſemicirculus per ſigna* T I Z *ductus,manente recta* Z T *circumductus,quoad vnde cæpit redeat,ſphæram deſcribet(per* 12 *diffinitionẽ vndecimi) angulos* E Z I T L M *octahedri ſua ſuperficie tangentem,eò quòd æquè diſtent à centro* K, *interuallo ipſius* D G *quæ ex centro,vt fuit oſtenſum.Sphæra igitur cuius dimetiens fuit* A B,*vel* Z T *ſibi æqualis,octahedrum* E Z I T L M *comprehendimus. Quod autem eius ſphæræ dimetiẽs* Z T *duplum poſſit lateris ipſius octahedri,indicat* 47 *primi. Nam rectæ* E Z *et rectũ quadrati* E Z I T *angulum* Z E T *comprehẽdentes,ſunt æquales,illas autem poteſt ſubtendens* Z T. *Ipſa igitur* Z T *ſingularum duplum poterit,& ideo reliquæ ipſi* Z T *æquales dimetientes,reliquorum laterum ipſi* E Z *æqualium du*

plum poterunt. Octahedrum itaque conſtruximus, eadémque ſphæra qua pyramidem comprehendimus, & oſtendimus, &c.

Corollarium primum.

Pyramidis latus potentia ſeſquitertium eſt lateris Octahedri eidem Sphæræ inſcripti. *Cùm enim dimetiens duplum poßit lateris octahedri, qualium dimetiens poteſt 6 earum poteſt latus octahedri 3, ſed qualium dimetiens fuit 6, earũ fuit latus pyramidis 4 potentia, per 13 huius. Qualium igitur pyramidis latus potuit 4, earum latus octahedri potuit 3.*

Corollarium ſecundum.

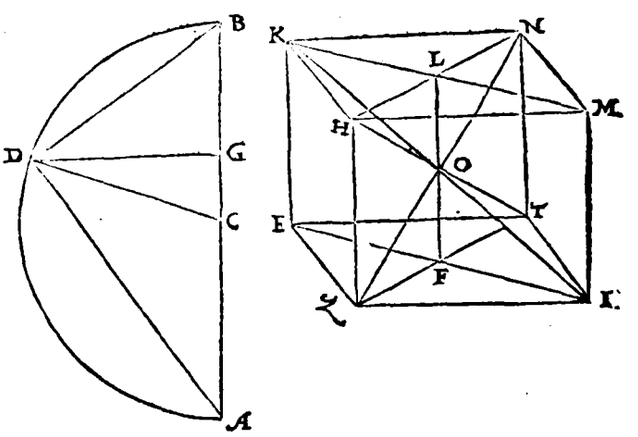
Octahedrum in binas Pyramides æquas & ſimiles diuiditur. *Harum communes baſes ſunt ſuper quolibet quadrato à lateribus octahedri comprehenſo, ad quod conueniunt octahedri octo triangula, quæ igitur pyramides (per octauam diffinitionem vndecimi) æquales erunt & ſimiles. Præfatum verò commune quadratum, dimidium eſt potentiæ dimetientis ſphæræ, cùm ſit quadratum lateris octahedri.*

Corollarium tertium.

Præterea inferemus tres Octahedri dimetientes ad rectos ſe bifariam in centro Sphæræ id continentis ſecare. *Vt patuit in ſigno* K *ac eiuſdem ſphæræ eſſe dimetientes.*

Propoſitio decimaquinta. Problema 3.

Cubum conſtruere, & data Sphæra qua priora comprehẽdere, oſtendéque quod ipſius Sphæræ dimetiens potentia triplus eſt lateris cubi.



Eſto datæ præcedentibus theorematis ſphæræ dimetiens AB, *centrum verò* C, *ſuper quo ſemicirculus fiat* ADB, *à dimetiente* AB *tertia pars ſecetur* BG, *per nonam ſexti. Ipſi item* AB *ad ſignum* G *perpendicularis excitetur* DG, *per vndecimam primi, coniunctis* DA DC DB. *Rectæ quidem* DB *æqualis ponatur* ZI. *Ex* ZI *quadratum deſcribatur* EZIT, *ſuper ſignis verò* EZIT *perpendiculares plano* EZIT *ipſi* ZI *æquales excitẽtur* EK ZH IM TN, *coniunctis* KH HM MN NK, *quæ ipſi* ZI *et reliquis æquales erunt (per trigeſimamtertiam primi) & parallelæ. Et inſuper angulos æquos ſuſcipient, per decimam vndecimi, qui ideo recti erunt, cùm quadratum ſit* EZIT, *& reliquæ igitur baſes quadrata erunt. Cubus igitur erit* EZITKHMN *ſolidũ ſub ſex quadratis æqualibus comprehenſum, per* 21 *diffinitionem vndecimi. Per oppoſita igitur cubi latera* KB *&* MI *planum extendatur* KEIM, *per alia rurſus* NT *&* HZ *aliud planum* HZTN. *Cùm horum planorum ſingula, ſolidum bifariam ſecent, ſcilicet in bina Priſmata æqua & ſimilia (per 8 diffinitionẽ vndecimi) ipſa igitur plana per centrum illud ſecabunt, per corollarium trigeſimæ nonæ vndecimi. Communis igitur eorum planorum ſectio in centrum cadet quæ ſit* LF. *Quoniam planorum* KEIM *&* HZTN *latera* HN *&* KM *bifariam ſeſe ſecant, per corollarium* 34 *primi, ſimiliter &* ZTEI. *Per has itaque ſectiones ducitur communis ſecans* LF, *bifariam diuidens plana* HEIM *&* HZTN *per primam ſexti, ſuper æquis baſibus & eodem vertice cubi, quare ipſa* LF *ſuorum planorum dimetientes bifariam ſecabit, per corollarium trigeſimumquartum primi, ſcilicet rectas* KI EN ZN HT *cubi dimetientes. Ad ſignum igitur idem conuenient ſeſe ſecantes, ſit itaque illud* O. *Æquales igitur*

erunt

erunt rectæ OK OB OI OM OH OΔ OT *&* ON, *per ſeptimam communem ſententiam, cùm ſint æqualium & ſimilium rectangulorum dimetientium dimidiæ. Centro igitur* O, *interuallo autem aliqua earum* OE *vel* OK *&c. extenſa ſphæræ ſuperficies, ſingulos cubi angulos, qui ſcilicet ad* E Z I T K H M N *ſuſcipiet, per duodecimam diffinitionem vndecimi, cùm omnes à ſigno* O *ad angulos cubi ductæ ſint æquales, Cæterùm recta* EI *binas poteſt* EZ *&* ZI *æquales, per quadrageſimamſeptimam primi. Duplum igitur poteſt* EI *ipſius* ZI: *quia verò* KI *angulum rectum ſubtendit* KEI, *eò quòd* KE *ſit recta ad planum rectarum* EZ ET, *per quartam vndecimi, cùm quadratæ ſint cubi baſes, recta* KI *poteſt ipſam* EI *ac inſuper* KE *æqualem ipſi* ZI, *quare recta* KI *triplum ipſius* ZI *poterit, ſed rectæ* ZI *æqualis eſt* DB *recta, cuius triplum potuit dimetiens* AB, *per decimætertiæ huius demonſtrata, ipſæ itaque* KI *&* DB *dimetientes, erunt æquales. Cubum igitur conſtruximus* KI, *& data ſphæra cuius dimetiens* AB *comprehendimus, eadem qua & priora ſolida. Oſtendimuſq; quod ipſius ſphæræ dimetiens* KI *vel* AB, *potentia tripla fuit lateris cubi, ſcilicet* DB *vel* ZI.

Corollarium primum.

Sequitur inde, ſphæræ dimetientem poſſe & pyramidis & cubi ſibi inſcriptorum latera. *Nam pyramidis potentia lateris, ipſius dimetientis duo tertia ſibi (per decimamtertiam huius) ſumit, Cubi verò lateris potentia (ex hac) vnum tertium dimetientis eiuſdem ſumit. Pyramidis itaque & cubi latera poteſt ſphæræ dimetiens.*

Corollarium ſecundum.

Cubi omnes dimetientes & ſinguli ſeſe in centro ſphæræ cubum continentis bifariam ſecant. *Ac inſuper rectas centra baſium oppoſitarum coniungentes bifariam ſecant in eodem ſigno, vt oſtendit recta* LOF. *Nam anguli* LKO *&* FIO *ſunt æquales, per vigeſimānonam primi, & æquis lateribus* LK *ipſi* FI *&* KO *ipſi* IO *oſtenſis comprehenſi, baſes igitur* LO FO *æquales erunt, per quartam primi. Similiter oſtendentur reliquæ centra baſium cubi oppoſitarum iungentes, bifariam ſecari in ipſo centro* O.

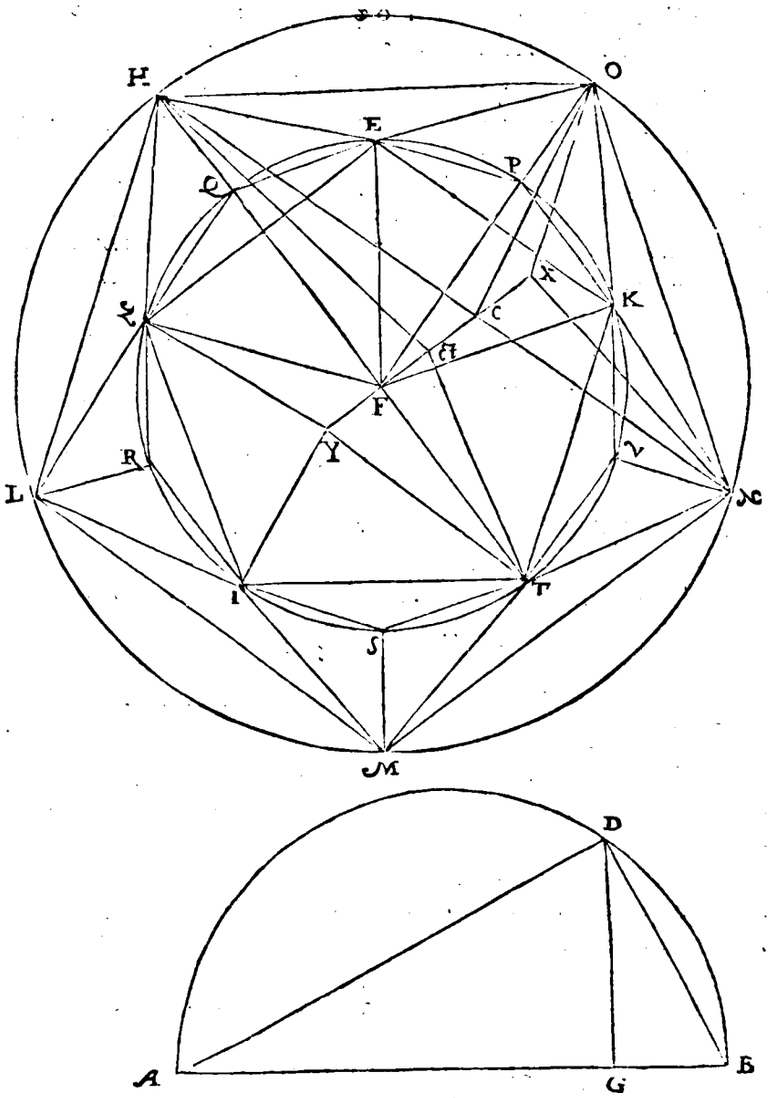
MONITVM.

Huius demonſtrationem aliam conſtruximus, vt inde proximum eliceremus corollarium, futuris admodum decimiquinti ſolidorum inſcriptionibus vtil eperficiendis.

Propoſitio decimaſexta. *Problema* 4.

Icoſahedrum conſtruere & data Sphæra comprehendere, qua & dictas figuras, oſtenderéque quod ipſius Icoſahedri latus incerta linea eſt, eáque appellatur Minor.

Proponatur datæ prioris ſphæræ diameter AB, *à quo quinta pars (per nonam ſexti) abſcindatur* GB, *ſuper* AB *verò ſemicirculus fiat* ADB, *ipſiq;* AB *ad ſignum* G *perpendicularis excitetur* DG *coniunctis* DA DB *rectis. Rectæ verò* DB *æqualis ponatur* EF, *centro autem* F *interuallo* E *circulus deſignetur* EIV, *in quo (per vndecimam quarti) pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribatur* EZITK: *ſecentur verò (per trigeſimam tertij) bifariam circunferentiæ* EZ ZI IT TK KE *in* QRSVP, *coniunctæ igitur* EQ QZ ZR EP PK *& reliquæ, erunt latera decagoni circulo* EIV *inſcripti. Ab ipſius circuli plano, à ſignis verò* QRSVPF *perpendiculares excitentur (per duodecimam vndecimi)* QH RL SM VN PO FC, *quæ ſecentur æquales ei quæ ex centro* EF *vel* DB, *ipſæ itaque (per ſextam vndecimi) parallelæ erunt, & æquales. Erunt itaque coniũgentes rectæ* CH CO CN *necnon* CM *&* CL *æquales, & parallelæ erunt rectis* FQ FP FV FS *&* FR. *Parallela igitur ſunt per ipſas plana* EZITK *&* HLMNO, *per decimamquintam vndecimi. Centro igitur* C *interuallo* CO *vel* CH *circulus per* HLMNO *ducetur, qui æqualis erit circulo* EIV. *Nam quæ ex centro* FQ *&* CH *fuerunt æquales, coniunctæ igitur* HL LM MN NO OH *pentagonum conſtituẽt, cu-*



ius latera lateribus ipſius EZITK *ſunt æqualia, per vigeſimamnonã tertij, ſingula etenim bina decagoni ſubtendunt latera, vel quintam partem æqualium circulorum. A ſignis autẽ ſuperioribus ſcilicet* HLMNO, *ducantur ſubtendentes* HE HZ LZ LI MI MT NT NK OK OB *angulos rectos, qui ſub perpendicularibus* HQ OP LR *cum reliquis, & lateribus decagoni* RZ-QEP, *&c. Cũ autem perpendiculares* HQOPLR *&c. poſitæ ſint ei quæ ex centro* FE *æquales, ipſæ lateri exagoni ei circulo inſcripti æquantur, per corollarium decimæquintæ quarti. Quare rectæ* HE HZ OE OK (*ſubtendentes ipſarum perpendicularium cum decagoni lateribus angulos rectos*) *ipſas poterunt, per quadrageſimã ſeptimam primi, ſed decagoni & exagoni latera, poteſt latus pentagoni* (ZB *vel* HO) *eidẽ circulo inſcripti per decimam huius. Ipſæ itaque ſubtendentes* HE HZ OE OK KN, *&c. idem potentes ipſis pentagoni lateribus* EZITK *vel* HLMNO *æquales erunt. Et proinde æquilatera erunt, ex ipſis triangula* HZE EOH OEK KNO NKT TNM MTI IML LIZ ZLH *numero decem. Rurſus producatur recta* FC *ad vtraſque partes in* Y *&* X, *ſecentur autem æquales lateri decagoni* QE, *rectæ* FY *&* CX, *quia recta* XY *ad planum* EZITK *recta fuit, ipſa ad reliquum* HLMNO *recta erit, per corollarium decimæquartæ vndecimi. Coniunctæ itaque* XO XN XM *& reliquæ* YZ YI YT *ſubtendunt eam quæ ex centro* CO *& latus decagoni* CX, *quæ proinde (per quartam primi) æquales erunt ipſæ* XO XN XM *& reliquæ lateri pentagoni, eaſdem rectas ſubtendenti, per decimam huius, quare triangula ex binis illis rectis* XO XN *& latere pentagoni* ON *& reliqua* XNM XML XLH *&* XHO *ſunt æquilatera, quæ quidem ſunt quinque numero: ſimiliter eiſdem æquilatera oſtendentur reliqua oppoſita à vertice* Y *ad baſes pentagoni* EZITK *ducta, quæ itaque viginti æqualia & æquilatera triangula ſolidum componentia erunt, & ideo ſolidum illud Icoſahedrum dicetur, per vigeſimamquartam diffinitionem vndecimi, vt autem illud priorum ſphæra concipi doceamus, cuius ſcilicet dimetiens fuit* AB, *ſecetur bifariam* FC *in* & *coniunctis* &H &T, *quoniam* FX *recta componitur ex* FC (*quæ æquatur lateri exagoni ſcilicet ei quæ ex centro* FE) *&* CX *lateri decagoni, ipſa extrema & media ratione ſecatur in* C, *& maius ſegmentum eſt* FC, *per nonam huius. Si igitur minus* CX *& maioris* FC *dimidia* &C *componantur, tota* &X *quintuplum poteſt eius quod ex* &C, *per tertiam huius, ſed quia* FC *&* CH *poſitæ ſunt æquales, ei quæ ex centro, recta* HC *quadruplum poterit rectæ* &C *dimidiæ, per vigeſimam ſexti, atqui ipſas* HC *&* G *rectum angulum comprehendentes ſubtendit* &H, *& proinde illas poteſt, per quadrageſimamſeptimam primi, recta igitur* &H *quintuplum poterit rectæ* &C, *quare æquales erunt* &H *&* &X *eiuſdem* &C *quintuplum potentes. Similiter oſtẽdemus ipſis* &H &X *æquales eſſe, reliquas à ſigno* & *ad reliquos angulos* LM-

NO,

NO, *ſubtendunt enim rectos angulos ab ipſa* C & *eis quæ ex centro comprehenſos: ſed quia ipſi* C & *æqualis eſt* F &, *ſimiliter recta ad reliquum planum* E Z I T K, *eadem* T & *cum reliquis quæ ex ſigno* & *in angulos reliquos* E Z I T K, *ſubtendent angulos rectos ſub recta* F & (*ipſi* & C *æquali*) *& rectis* F T. F K F E, *&c. quæ ex centro* (*reliquis* C H C O *æqualibus*) *comprehenſos. Æquales igitur erunt rectæ* & T & K & E & Z & I *rectis* & H & L & M & N & O, *quibus æqualis oſtenſa eſt* & X *dimidia totius* X Y, *reliqua itaque* & Y *eiſdem æqualis erit: ſi igitur centro* & *interuallo autem altera quadam harum, ſphæræ ſuperficies extẽdatur, ipſa icoſahedri duodecim tanget angulos,* E Z I T K H L M N O, X Y, *quæ deſcribetur ducto ſemicirculo,* (*ſuper dimetiente* X Y *facto*) *manente recta* X Y *quoad vnde cœpit redeat, per duodecimam diffinitionem vndecimi. Cæterum quia patuit rectam* & X *quintuplum poſſe rectæ* & C, *ſequetur totam* X Y *quintuplum poſſe totius* F C, *per decimamquintam quinti: ſunt enim duplæ, & ideo quintuplum rectæ* F E, *quæ ex centro ipſi* F C *æqualis, necnon ipſius* D B *eiſdem æqualis quintuplum poterit igitur ipſa* X Y, *cùm autem media ſit* D B, *quæ ad ſegmentum* G B, *inter* A B *&* G B, *per corollarium octauæ ſexti, erit ſicut* A B *ad* B G, *ſic quod a prima* A B *ad quod ex ſecunda* D B, *per corollarium vigeſimæ ſexti, quintupla autem fuit* A B *ipſius* B G, *ex hypotheſi, quintuplum igitur erit quod ex* A B *dimetiente ſphæræ, eius quod ex* D B *æquali lateri icoſahedri, ſed eiuſdem quintuplum fuit* X Y *ſphæræ dimetiens, ipſæ igitur* A B *&* X Y *ſphærarum dimetientes æquales erunt, in data igitur ſphæra, ex dimetiẽte* A B *icoſahedrum depinximus, quod autem icoſahedri præfati latus ſit minor, patet, cùm certa ſit* A B *dimetiens, quæ quidem quintuplum poteſt ipſius* D B *ſiue ipſius* E F *quæ ex centro circuli* E Z I T K, *certa erit* E F, *per ſextam diffinitionem decimi. Eius itaque* E F *dupla* (*dimetiens circuli* E Z I T K) *certa erit, per eandem. Pentagoni igitur latus eidem circulo inſcripti incerta erit, vocata verò minor, per vndecimam huius, eius autem pentagoni & icoſahedri idem oſtenſum fuit eſſe latus, icoſahedri itaque latus incerta erit appellata minor. Icoſahedrum igitur conſtruximus, & data ſphæra comprehendimus, &c.*

Corollarium primum.

Hinc fit dimetientem ſphæræ Icoſahedrum continentis, quintuplum poſſe eius quæ ex centro circuli quinque Icoſahedri angulos tangentis. *Inſuper eandem diametrum* Y X *componi ex latere exagoni* F C *& binis decagoni* F Y C X *eidem circulo inſcriptorum. Nam quintuplum potuit* X Y *dimetiens ipſius* F C, *ei quæ ex centro* (*ſcilicet* F L) *æqualis.*

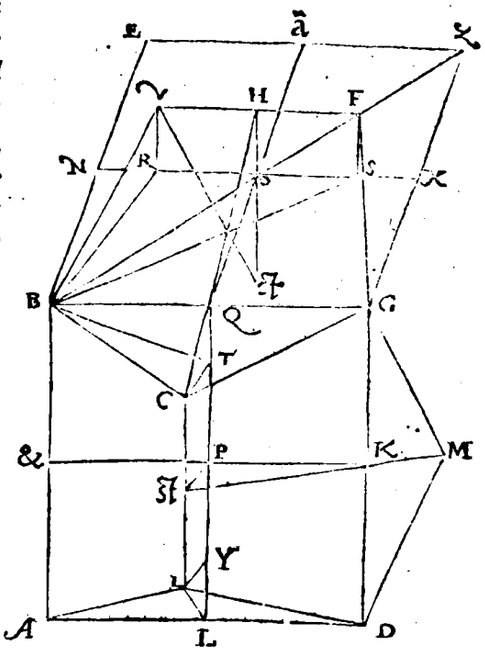
Corollarium ſecundum.

Icoſahedri latera oppoſita ſunt parallela. *Nam ſphæræ dimetientes in oppoſitos Icoſahedri cadunt angulos, vt patuit in recta* Y X. *Si itaque binæ dimetientes* H T *&* O I *ducantur, ipſæ in centro* F *concurrent. Quare rectæ* H O T I *eas iungentes in eodem ſunt plano, per ſecundam vndecimi. Quia verò ad dimetientes angulos æquales efficiunt, per octauam primi, ſcilicet triangula ex æquis ſemidimetientibus & latere Icoſahedri. Ipſa latera* H O T I *parallela erunt* (*per 28 primi.*)

Propoſitio decimaſeptima. Problema 5.

Dodecahedrum conſtruere, & data ſphæra comprehendere, qua & prædictas figuras, oſtenderéque quod dodecahedri latus incerta eſt linea, eáque appellatur Apotome.

Proponantur binæ præfati cubi baſes, hoc eſt, duo quadrata A B G D *&* E B G Z *ſeſe in communi ſectione* B G *ſecantia ad rectos, iuxta ipſius cubi naturam. Diuidantur ſingula eorũ in quatuor quadrata, ductis rectis eorum latera bifariam ſecantibus, ſcilicet* Q L *&* K Q *ã* N X, *quæ quidem in centris ipſarum baſium bifariam ſe ſecabunt, per coroll.* 34 *primi, ſcilicet in* P *&* O. *Secentur autem extrema & media ratione hæ quatuor rectæ* P Q P L O N O X *in* T Y R S, *per trigeſimam ſexti, maiora autem ſegmenta ſint ad* O *&* P. *A ſignis autem* R O S *plano* E B G Z *rectæ excitentur* R V O H S F, *per duodecimam vndecimi. A ſignis verò* T P Y *plano* A B G D *ſimiliter excitentur rectæ* T C P ſt Y I. *Quæ quidem* R V O H S F T C P ſt Y I *æquales ponantur ſingulæ ipſi* O R *vel* O S, *coniunctis* H Q Q C *&* B C C G G F F V V B: *Dico pentagonum* B C G F V *eſſe in eodem plano æquilate-*



rum æquiangulum, & insuper basim dodecahedri eadem sphæra qua reliquæ figuræ comprehensi: eius verò latus FV esse apotomen. Ad primum itaque quod BCGFV in eodem sit plano: Cùm rectæ RV SF sint ad idem planũ perpendiculares, ipsæ parallelæ erunt, per sextam vndecimi, sunt autem æquales positæ: Rectæ igitur RS & VF æquales & parallelæ erunt, per trigesimã tertiam primi. Similiter æquales & parallelæ erunt TY & CI. Ipsi autem RS parallela est BG, per constructionem: Eidem igitur BG parallela erit VF, per nonam vndecimi. Rectæ igitur BV FG ipsas coniungentes in eodem ipsarum plano erunt, per septimam vndecimi. Trapezium itaque BVFG in vno est plano. Reliquum verò BCG in vno est plano, per secundam huius, vt autem pateat BGFV & BCG in eodem esse plano, ostendamus rectas HQ QC in rectum positas esse. Cùm rectæ RV OH SF sint æquales & parallelæ, æquales erunt VH HF ipsis RO OS æqualibus, per trigesimam tertiam primi, & ideo adinuicem, & proinde æquales maiori segmento sectarũ NO PQ, &c. ex hypothesi. Quia igitur æquales sunt OH TC, per hypothesim, maiori segmento OR: Est autem minus segmentum TQ dimidij lateris cubi PQ, sicut itaque tota OQ (dimidium cubi latus) ad CT maius segmentum, sic erit OH maius eiusdem segmentum, ad TQ minus, per tertiam diffinitionem sexti. Triangulorum igitur HOQ & QTC bina latera OQ QT angulum componunt, in duabus cubi basibus existentia, binis aliis triangulorum lateribus reciproca scilicet OQ ad CT vt OH ad QT. Et insuper sunt eisdem parallela, scilicet OQ ipsi CT, per sextam vndecimi. Nam sunt ad idem planum ABGD rectæ, & similiter OH ipsi TQ, cùm sint rectæ ad reliquum EBGZ. Reliqua igitur triangulorum latera HQ QC in rectam lineam erunt, per trigesimam secundam sexti. Si igitur ducatur recta BH triangulum erit BCH, quod itaque in vno erit plano, per secundam vndecimi. Et proinde totum BCGFV pentagonum in vno est plano. Quòd autem sit æquilaterum doceamus. Cùm enim binæ BN NR binis BQ QT sint æquales, nempe totæ & minora segmenta, & angulos rectos comprehendant, scilicet quadratorum BO & BP, bases BR & BT (per quartam primi) æquales erunt. Quia verò BR BT sunt æquales, & binæ RV TC (maiora segmenta) æquales. Et anguli BRV BTC recti, ex hypothesi, bases BV BC (per eandem quartam primi) æquales erunt. Similiter ostendentur reliquæ coniunctis GT vel ZS rectis, æquales esse, FG GC ipsis BV BC. Quòd autem FV reliquis sit æqualis, patet: cùm BN sit æqualis toti NO sectæ, quadrata totius BN & minoris segmẽti NR, tripla sunt quadrati maioris segmenti RO, per quartam huius. Eiusdem quadrati RO proinde triplum erit quod ex BR ipsas BN NR potente, per quadrageſimam septimam primi. Addatur quadratum ex RV, æquali ipsi RO. Bina ex BR & RV quadrata quadrupla erunt quadrati RO, & ideo quadratum rectæ BV (ipsas BR RV potentis) quadruplum erit quadrati RO. Sed ipsius RO quadrati quadruplum est quod ex VF eius dupla, per vigesimam sexti. Rectæ igitur BV & VF (eiusdem quadruplum potentes) erunt æquales. AEquilaterum itaque erit quinquangulum BCGFV. Quod autem sit æquiangulum BCGFV, Producantur BS & BF rectæ. Quoniam enim rectæ NO extrema & media ratione sectæ, additur OS, æqualis maiori segmento, totius NS maius segmentum erit NÓ (per quintam huius) minus autem OS. Quod igitur ex tota NS & minori OS (vel SF sibi æquali) triplum est eius quod ex NO, per quartam huius. Quæ itaque ex NS SF cum quadrato BN, quadrupla sunt quadrati NS. Quorum quidem iis quæ ex BN NS æquum est quod ex BS, per quadrageſimam septimam primi, cùm rectus sit ONB quadrati angulus. Quæ igitur ex BS SF quadrupla sunt quadrati NO, Eis autem ex BS SF æquum est quod ex EF, per quadrageſimam septimam primi, fuit enim recta FS plano EBGZ. Quod itaque ex BF quadruplum est eius quod ex NO, Eiusdem verò ex NO quadruplum est quod ex BG, scilicet BGZE quadratum, æquales igitur sunt BG & BF, Haud secus ostendentur æquales esse GB GV. Cùm enim æquales sint NS ipsi XR æqualis erit GR ipsi BS, & proinde GV ipsi BF, quæ ostensa est æqualis ipsi GB. Triangulorum itaque BCG BVF & GFV tria latera, tribus sunt æqualia. Anguli igitur (per octauam primi) BCG BVF & GFV erunt æquales. Quinquanguli itaque BCGFV tres anguli qui ad CVF sunt æquales. Reliqui igitur (per septimam huius) æquales erunt reliquis. AEquiangulum igi-

tur

tur erit BCGFV. *Quia verò planum æquiangulum & æquilaterum oſtenſum eſt pentagonum* BCGFV *tangens vnicũ cubi latus, Oſtendamus quánam arte ſingulis duodecim cubi lateribus, ſingula ſimiliter applicantur pentagona ſibi mutuo cohærentia, quæ duodecim dodecahedri componunt baſes. Quoniam ſimiliter ſecta fuit recta* PL *ipſis* PQ ON *vel* OX, *& æquales ſuper ſignis* TY, *erectæ ſunt perpendiculares ipſi* OH *& reliquis, ſcilicet maiori ſegmento, ſequetur parallelas eſſe* CI TY, *& proinde* CI GD, *per nonam vndecimi. Planum igitur erit* GC ID, *per ſeptimam vndecimi. Planum autem eſt* AID *triangulum, per ſecundam huius. Iungantur itaque* IA IL ſt K, *Manifeſtum erit rectæ* CG *æquales eſſe* ID IA: *Nam* AL LY (*ipſis* BQ QT *æquales*) *efficiunt ſubtenſas* AY BT *æquales, per quartam primi. Et rurſus quia* BT TC *rectum continent angulum*, BTC *veluti &* AYI, *cùm rectæ ſint* CT IY *ad idem planum* ABGD, *ex hypotheſi. Ipſis* BT AY *æqualibus potentiùs, æquales addantur potentiæ ipſarum* CT IY. *AEquales igitur componentiũ (per quadrageſimamſeptimam primi) erunt potentiæ ipſarum* BC AI, *æquales proinde erunt rectæ* BC AI, *ſimiliter & eiſdem* ID *&* CG *ſunt æquales. Cùm autem* AI ID *&* AL LD *ſint æquales, baſis verò* IL *cõmunis, anguli* ALI DLI *æquales erunt, per octauam primi, & ideo recti, per decimam diffinit. primi: eadem cauſa recti fuerunt* CQB CQG *anguli. Quia verò binæ* QT TC *binis* LY YI, *ſunt æquales, & æquos angulos (rectos ex hypotheſi) continentes, anguli* CQT *&* IL &, *reliqui erũt æquales, per 4 primi. Quare planum* AID *æquè inclinatur ad planum* ABGD, *vt planũ* BCG *ad idẽ* ABGD *per 4 diffinit. vndecimi. Similiter oſtendemus planum* CGDI *æquè inclinari ad planum* ABGD, *vt* BVFG *ad* EBGZ, *Cùm triangulorum* HOQ *&* ſt PK *æqualibus lineis compoſitorum æquales ſint anguli* HQO ſt KP, *qui ſunt inclinationis anguli. Si autem extenſa recta* ſt K *in* M *perficiatur pentagonum* GCIDM, *oſtendemus eadem lege illud planum æquiangulum ac æquilaterum eſſe, qua reliquum* BCGFV *oſtendimus, ſimiliter & reliqua* BCIA *&* AID *ſi perficiantur, æqua ſimilia ſimilitérque poſita oſtendentur, cohærentia autem in communibus rectis* BC CG CI AI ID. *Seruata itaque hac methodo ſingulis cubi lateribus* 12, *ſingula pentagona* 12 *cohærebunt dodecahedrum componentia. Quod autem ſphæra comprehendatur præſcriptum dodecahedrum, Supponãtur cubi propoſitæ baſes. Secent autem (per trigeſimamnonam vndecimi) cubum plana bina per rectas* NX *&* QQ. *Communis eorum planorum ſectio recta erit* HO *producta: Nam communis recta eſt ad planum* EBGZ, *per decimamnonam vndecimi. Qua quidem producta* HO, *dimetientes cubi bifariam & ipſa ſeſe ſecabunt mutuò, per trigeſimamnonam vndecimi, ſecent igitur in* & *coniuncta* &V. *Signum igitur* & *communis dimetientium ſectio, eſt centrum ſphæræ cubum ambientis, per demonſtrata decimaquinta huius, quare à ſigno* & *in ſingulos ductæ cubi angulos æquales erunt. Quia inſuper æqualis eſt* & O *dimidio lateri cubi, ſcilicet ipſi* NO *&* OH *ipſi* OS, *tota* &H *toti* NS *æqualis erit. Extrema itaque & media ratione ſecatur* &H *in* O, *& proinde quæ ex* &H HO *triplum efficiunt quadrati* O & *vel* ON, *per quartam huius. Sed ipſi* HO *æqualis eſt* HV. *Recta igitur* &V *ipſas* &H HV *potens, per quadrageſimamſeptimam primi, triplum poterit quadrati* NO. *Atqui ea quæ ex centro ſphæræ cubum ambientis, triplum poteſt dimidij cubi lateris, per decimamquintam quinti. Nam dimetiens tota, totius lateris triplum poteſt, per decimamquintam huius. Quæ igitur ex centro ſphæræ cubum ambientis, æqualis erit rectæ* &V, *Similiter æqualis oſtendetur reliquis* &F &C &I, *&c. Ad reliquos dodecahedri angulos ductis. Quæ igitur ex centro ſphæræ cubum ambientis, in vtroſque & cubi & dodecahedri angulos ductæ, erunt æquales. Eadem itaque ſphæra dodecahedrum comprehendimus, qua & cubum, & ideo qua reliquas figuras, ſcilicet centro &, interuallo autem quauis rectarum &V vel &B, ſphæræ extendatur ſuperficies, ipſa per ſingulos vtriuſque cubi & dodecahedri ducetur angulos. Quod autem latus dodecahedri ſit apotome, ſcilicet* FV *patebit. Quoniam extrema & media ratione ſecta eſt* ON, *erit* ON *ad* OR *ſicut* OR *ad* RN, *per tertiam diffinit. ſexti. Erit igitur (per decimamquintam quinti) inter duplas earum eadem ratio, ſcilicet* NX *ad* RS *ſicut* RS *ad binas* NR SX. *Cubi igitur lateris* NX *extrema & media ratione ſecti, maius ſegmentum erit* RS, *vel* FV *dodecahedri latus. Sed cubi latus eſt certa linea. Nam dimetientis ſuæ ſphæræ quæ certa fuit tertiam partem poteſt, per decimamquintam huius. Si igitur certa linea* NX *extrema & media ratione ſecetur, eius ſegmenta apotome erunt, per ſextam huius. Apotome igitur erit recta* FV, *maius ſegmentũ ipſius* NX *certæ & dodecahedri latus exiſtens. Dodecahedrum itaque conſtruximus, & data ſphæra comprehendimus, qua & prædictas figuras, oſtendimúſque quod dodecahedri latus incerta eſt linea, eáque appellatur apotome.*

Corollarium primum.

Hinc fit cubi latere extrema & media ratione ſecto, maius oriri ſegmẽtum dodecahedri latus eadem Sphæra concluſi. *Vt patuit rectam* VF *maius ſegmentum fuiſſe rectæ* NX *lateris cubi.*

Corollarium ſecundum.

Cubi latus æquum eſt rectæ ſubtendenti angulum pentagoni dodecahedri eidem Sphæræ cum cubo comprehenſi. *Nam angulos* B C G A I D, *vel* G M D *ſubtendunt cubi latera* B G *ad* G D.

Corollarium tertium.

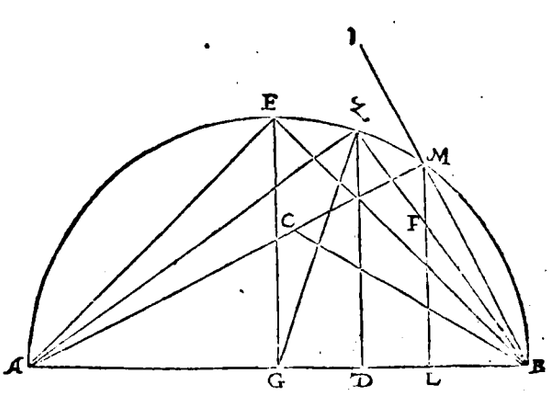
Dodecahedri ſex ſunt latera bina inter ſe oppoſita & parallela, quorum bifarias ſectiones iungunt æquales tres rectæ, in cētro Sphæræ dodecahedrum continentis ſeſe ac illa bifariam ſecantes, & ad rectos. *Quoniam ſuper ſex cubi baſibus ſex reperiūtur dodecahedri latera, vt oſtenſum eſt, quæ bifariam ſecantur à rectis centra baſium cubi coniungentibus, vt* H E *producta & ſimiles. Quæ quidem ſunt tres ſeſe ad rectos ſecantes, cùm ſint lateribus cubi parallelæ, & in centro Sphæræ cubum continentis (per oſtenſa* 15 *huius) ſeſe bifariam ſecantes. His verò cubis ſubtenſis externæ adduntur æquales, ſcilicet* H O ſt P, *& reliquæ ſimiles, dimidio dodecahedri lateri, ex hypotheſi æquales. Et proinde omnes ſunt æquales dimidia oppoſitorum dodecahedri laterum ſigna coniungentes, eáque latera bifariam & ad rectos ſecantes.*

Corollarium quartum.

Recta oppoſita dodecahedri latera bifariam diuidens, extrema & media ratione ſecta, efficit maius ſegmentum latus cubi, minus vero latus dodecahedri eadem Sphæra comprehenſi. *Quoniā enim recta* H Ω *extrema & media ratione ſecta fuit oſtenſa in* O, *maiúſque eius ſegmentum fuiſſe dimidiū cubi latus* O Ω, *minus verò* H O *dimidiū ipſius* V F. *Sequetur igitur (per decimā quintā quinti) duplas earum eādem habere rationem, ſcilicet duplam ipſius* H E, *quæ ſignum ipſi* H *oppoſitum coniungit, totam eſſe, maius verò ſegmentum duplam ipſius* O Ω, *quæ eſt cubi latus: minus verò duplam ipſius* H O, *æqualem lateri* V F *dodecahedri.*

Propoſitio decimaoctaua. *Problema 6.*

Latera quinque præfatarum figurarum exponere, & adinuicem comparare.



Eſto prædictæ ſphæræ dimetiēs A B, *quæ ſecetur bifariā in* G, *ab eadē inſuper* A B *tertia pars* B D, *& quinta* B L, *per nonā ſexti auferantur. Ducto verò ſuper* A B *ſemicirculo, à ſignis* G D L *perpēdiculares ipſi* A B *excitentur* G E D Z L M, *coniunctis* A E E B A Z Z B A M M B. *Cùm autem rectus in ſemicirculo ſit angulus* A Z B *media erit* Z A *proportionalis inter* A B *&* A D: *nam* Z A *eſt ad ſegmentum* A D, *per corollarium octauæ ſexti. Sicut igitur* A B *ad* A D, *ſic erit quadratū* A B *ad quod ex ſecunda* Z A, *per corollarium vigeſimæ ſexti. Tripla autem eſt* A B *ipſius* B D, *per hypotheſim, ſeſquialtera igitur erit* A B *reliquæ* A D: *nam veluti 3 ad 2, ſeſquialterum igitur poterit* A B *dimetiens rectæ* A Z. *Recta itaque* A Z *latus erit pyramidis huic ſphæræ inſcriptæ, per* 13 *huius: quia autem æquales ſunt* A E E B *baſes, per quartam primi: ſed eas poteſt* A B *dimetiens, quælibet earum* A E *vel* E B *latus erit octahedri, nam dimetiens ſphæræ* A B *duplum poteſt lateris octahedri, per* 14 *huius: quoniam rurſus* Z B (*ad ſegmentum* D B) *media eſt inter* A B *&* I *idem ſegmentum* D B, *per corollarium octauæ ſexti, erit* A B *ad* B D, *ſicut quadratum* A B, *ad quod ex* B Z *media, per corollarium vigeſimæ ſexti, tripla eſt* A B *ipſius* B D, *triplum igitur poterit* A B *ipſius* B Z, *quare* B Z *latus erit cubi, per* 15 *huius. Cæterùm ſumatur latus decagoni, circulo cuius quæ ex centro eſt* B M *deſcripti, per corollarium decimæ ſextæ quarti, cui lateri æqualis ſecetur* M C *à maiore* A M, *coniuncta* C B: *quia verò quæ ex centro* B M *æquatur lateri exagoni, eiuſdem circuli, per corollarium* 15 *quarti, Manifeſtum erit (ex decima huius)* B C *rectam eſſe latus pentagoni eidem circulo inſcripti: nam ipſa* B C *binas poteſt* B M M C *per* 47 *primi, exagoni & decagoni latera: quia verò quintupla eſt* A B *ipſius* B L, *ex hypothe-*

ſi.

ſi, eadem A B quintuplum poterit rectæ B M, quæ ad ſegmentum B L, vt iam patuit. Recta itaque B M erit ea quæ ex cẽtro circuli quinque latera icoſahedri continentis & angulos, per corollarium 16 huius. Sed circulus cuius ex centro oritur B M, quinquies continet rectam B C, vt oſtenſum fuit. Recta igitur B C latus erit icoſahedri huic ſphæræ ſuper dimetiente B A conſtructæ deſcripti, per 16 huius. Præterea cùm oſtenſum ſit rectam Z B eſſe cubi latus ipſam Z B ſecantes extrema & media ratione, per trigeſimam ſexti, in F efficiemus F B maius ſegmentum latus decacohedri eidem ſphæræ inſcripti per primum corollarium præfatæ.

Qua verò ratione conferãtur horũ ſolidorũ latera, adinuicẽ excutiamus. Cùm (ex 13 huius) dimeticns A B ſeſquialterũ poſsit lateris pyramidis A Z, ex 14 verò duplum poteſt lateris octahedri A E, ex 15 autem triplum lateris cubi Z B. Qualium igitur ſphæra dimetiens erit potentia 36. pyramidis latus erit 24, octahedri 18, cubi verò 12 earum partium: pyramidis verò perpẽdicularis A D earũdem erit 16. nam fuit duo tertia rectæ A B longitudine, potentia igitur erit dupla ſeſquiquarta. Eorum igitur trium latera (potentia) rationem numerorum inter ſe & ad propoſitam ſphæræ dimetientem A B obſeruant: quare certæ dicentur ipſæ magnitudines, per ſextam diffinitionem decimi. nam adinuicem & propoſitæ commenſurabiles exiſtunt, per ſextam decimi, quia verò Icoſahedri & dodecahedri latera naturam incertarum magnitudinum nanciſcuntur, cùm hoc apotome illud verò minor eſſe 16 & 17 huius oſtenſa ſint. Ea latera ad propoſitam A B dimetientem, ſeu ad trium priorum latera, propoſitæ dimetienti commenſurabilia, nulla certa ſeu determinata rationis quantitate cõferri poterunt, per octauam decimi, eò quòd numerorum ratione priuentur: ſed nec adinuicem, per corollarium 111 decimi. Nam ſi inter ſe commenſurarentur eiuſdem eſſent denominationis, per centeſimamtertiam & centeſimamquintam decimi, cuius patuit oppoſitum. Superest autem demonſtrandum maius eſſe C B icoſahedri latus dodecahedri latere F B. Primò æquũ non erit, nam commenſurabile eſſet, quod fieri non poteſt, cùm dodecaheri apotome, icoſahedri verò latus minor iam fuiſſe oſtenſa ſint, decimæſexta & decimæſeptima huius. Sit igitur, ſi fieri poſsit F B maior ipſa B C, quoniam A B quintuplum poteſt rectæ B M, perproximè oſtẽſa, qualium A B poteſt 60, earum B M poteſt 12. quia verò C M decagoni excedit dimidium ipſius B M exagoni, vt patuit dicimaſexta huius, recta C M plus quàm 3 poterit, & proinde recta B C (ipſas B M M C potens) earũ partium poterit plus quàm 15, qualium A B potuit 60: ſed earum potuit Z B 20, per decimamqnintam huius, nempe tertiam ipſius A B partem, qualium itaque Z B erit 20, earum B C erit plus quàm 15: quia verò F B eſt maior, ex hypotheſi recta B C, qualium B Z poteſt 20, earum F B poterit multò plus quàm quindecim. Cùm autem B Z B F F Z, ſint proportionales, per tertiam diffinitionem ſexti, earum quadrata (per vigeſimamſecundam ſexti) erunt ſicut quod ex B Z (ſcilicet 20) ad quod ex B F (ſcilicet plus quàm 15) ſic plus quàm 15 ad F Z reliquum ipſius 20, ſcilicet minus quàm 5. Sed 20 ad plus quàm 15 rationem habet ſeſquitertia minorem, per octauam quinti, cùm ſeſquitertiã habeat ad 15. Plus 15 verò ad minus quinque rationem habet tripla maiorem, & ideo ſeſquitertia maiorem multò, non itaque eſſent B Z B F & F Z proportionales potẽtiæ contra 22 ſexti, cũ rectæ linææ B Z B F, & F Z ſint proportionales, quod eſſet abſurdũ: non igitur erit F B maior recta B C, nec ei æqualis, quare minor eadem neceſſariò erit.

Corollarium primum.

Hinc manifeſtum aſſequimur naturam nullam pati figuram, ſub æqualibus æquilateris, & æquiangulis planis comprehenſam præter has quinque. Cùm enim (per vigeſimamprimam vndecimi) omnis angulus ſolidus ex minus quàm quatuor rectis planis componatur, & (per nonam diffinitionem eiuſdem) plures duobus planis exoptet, neceſſe erit eos planos (plures numero duobus, & quemlibet ſolidum angulum componentes) minus quatuor rectis æquiualere. Cùm autem trianguli æquilateri ſex anguli quatuor rectis æquipolleant, per demonſtratũ decimæquintæ quarti, Sequetur ſex eorum triangulorum angulos planos, ſolidum angulum non componere, per eandem vigeſimamprimam vndecimi. Is nãque angulus ſolidus minus quatuor rectis exoptat, nec igitur plures quàm ſex eorum triangulorum anguli ſolidũ cõficiẽt angulum cum tanto plus quatuor excedãt rectos, ſed quinq; horũ triãgulorum anguli icoſahedri angulũ, quatuor verò octahedri, tres autẽ pyramidis cõpoſuerunt angulos, vt oſtendimus 16, 14, & 13 huius. Duo verò ſolidum angulum nõ efficiunt per 9 diffini. vndecimi. Ex triangulorum æquiangulorum igitur angulis, ſoli fiũt icoſahedri, octahedri, & pyramidis trilatere anguli: ex quadratis verò ſolus fit cubi angulus, qui tribus angulis planis rectis conſtat per 15 huius. Nam quatuor recti ſolidum angulum excedunt, per vigeſimamprimã vndecimi, duo verò recti ſolidum non componunt (vt diximus) ex pentagonis autem tribus, genitus fuit dodecahedri angulus vnicus. Cùm duo anguli pentagoni nullum componant ſolidum, quatuor verò aut plures, rectos excedunt quatuor, eò quòd ſint rectis maiores ſinguli ſingulis. Exagoni autem an-

gulum ſolido conficiendo indecẽtem eſſe patet. Cùm enim ſex eius anguli octo rectis (per corollarium trigeſimæ ſecundæ primi) æquipolleant, ſequetur tres quatuor rectis æquales eſſe, & proinde tres exagoni angulos, ſolidum non componere, per 21 vndecimi, duo verò nullum, quatuor autem aut plures, cùm ſint obtuſi, quatuor rectis maiores erunt, & ideo ſolidum angulum non component, nec proinde Eptagoni vel aliorum poligonorum aliqui anguli, ſolidum angulum component. Duo etenim eorum ſolidi componendi ſunt incapaces, tres verò quatuor rectos excedunt, cùm tres eorum exagoni excedant tres angulos quatuor rectis æquales. Nullius itaque poligõni æquilateri & æquiãguli anguli, ſolidum angulum præter harum quinque figurarum angulos, quemquam conſtituent. Nec proinde figuram ſolidam (quæ abſque angulis planis ſolidos angulos componentibus conſtitui non poteſt) aliam præter has quinque præfatas, ſub planis æqualibus, æquilateris, & æquiangulis comprehendere licebit.

Corollarium ſecundum.

Vt autem ea quinque regularia ſolida, ſimiles ſingulas ſuarum baſium inclinationes habere doceamus, *Pyramidem priorem ſumemus, cuius vnum latus bifariam ſecetur, & à binis ipſi lateri oppoſitis angulis perpendiculares mittantur, ipſæ in ſectionem cadent, per corollarium duodecimæ decimitertij, ipſæ itaque angulum inclinationis planorum comprehendent, per quartam diffinitionẽ vndecimi, ſubtenſum à pyramidis oppoſito latere, cùm igitur reliqui pyramidis anguli inclinationis planorum, ſub binis triangulorum perpendicularibus comprehendantur, & pyramidis latere ſubtendantur, ipſi ex octaua primi erunt æquales. Pyramidis igitur plana ad ſe ſimiliter inclinari dicẽtur, per quintam diffinitionem vndecimi.*

Cubi verò binæ perpendiculares à bifaria vnius lateris ſectione, per bina plana ductæ, parallelæ & æquales erunt lateribus quadrati angulum rectum continentibus, cùm omnes baſium cubi anguli ſint recti, quare ipſæ in ſectionem communis lateris cadentes, rectum angulum adinuicem comprehendent, per decimam vndecimi, qui quidem eſt inclinationis angulus, per quartam diffinitionem vndecimi, à baſis cubi dimetiente ſubtenſus. Reliqui igitur eodem argumento recti oſtenſi, inclinationes baſium cubi ad ſe inuicem æquales efficient, per quintam diffinitionem vndecimi.

Octahedri autem ſumatur dimetiens binos oppoſitos connectens angulos, ab his angulis in idem octahedri latus, per binas eius baſes perpendiculares mittantur, ipſæ latus illud bifariam ſecabunt & ad rectos, vt ſæpius patuit, & ideo angulum inclinationis baſium continebunt, per quartam diffinitionem vndecimi, ſubtenſum ab octahedri dimetiente: quare reliqui eadem lege in reliquis baſibus deſcripti, æquis lateribus comprehenſi ac ſubtenſi, inuicem æquales erunt, per octauam primi, & proinde inclinationes planorum æquales erunt (per quintam diffinitionem vndecimi) in octahedro.

Icoſahedri verò ab angulis duarum baſium, in commune earum latus perpendiculares mittantur, ipſæ angulum inclinationis baſium comprehendent, per quartam diffinitionem vndecimi, ſubtenſum autem à recta ſubtendente angulum pentagoni, quinque icoſahedri latera ſuſcipientis, per decimamſextam huius, nam ea coniungit binos oppoſitos coniunctorum triangulorum angulos. Reliqui igitur inclinationis baſium anguli, pari methodo deprehenſi, æquis lateribus concepti, æquiſque baſibus ſubtenſi, ex octaua primi æquales erunt, & hac de cauſa quælibet baſium icoſahedri inclinationes ad ſe, æquales erunt, per quintam diffinitionem vndecimi.

Dodecahedri demum à binis proximorum pẽtagonorum oppoſitis angulis, in commune latus perpendiculares, per centra demittantur, ipſæ in bifariam lateris ſectionem cadent, per tertiam tertij, nam circulo continentur dodecahedri baſes, & earum baſium inclinationem denotabit ab ipſis perpendicularibus comprehenſus angulus, per quartam diffinitionem vndecimi, oppoſitos autem præfatos angulos copulat recta æqualis rectæ oppoſitas dodecahedri bifarias ſectiones laterum coniungenti, per trigeſimamtertiam primi. Nam ipſæ coniungunt dimidia dodecahedri latera, parallela & æqualia per corollarium tertium decimæſeptimæ decimitertij, quæquidem coniungentes ſunt æquales, per idem corollarium, anguli igitur æquis perpendicularibus comprehenſi, & æquis coniungentibus ſubtenſi (per octauam primi) æquales erunt, fuerúntque inclinationũ anguli. Dodecahedri itaque baſes ad ſe inuicem ſimiliter inclinari dicentur, per quintam diffinitionem vndecimi.

MONITVM.

Cogimur quinque regularium ſolidorum 13 & quatuor eam ſequentibus deſcriptorum demonſtrationes variare. Diffiniens enim Theon libro vndecimo ſphærã, deſcriptionẽ potius quàm ſphæræ diffini-

diffinitionem naturæ protulit, deſcribendam nanque per ſemicirculi ductum ſphæram edocet, non autem quæ ſit ſuæ naturæ vera eſſentia, quæ per æqualitatem rectarum ab vnico ſigno intrinſeco ortarum, in ſuperficie eius deſinentium præciſius exprimi videtur, cùm autem ipſi ſphæræ includenda ſunt regularia hæc ſolida, quarum angulos ab vnico ſigno interiori æquè diſtare neceſſum eſt, huius ſigni locus ita inquirendus eſt, vt cùm ab eo ſingulæ rectæ in ſolidi deſcribendi angulos ductæ, æquales repertæ ſint, ſphæræ ſuperficiem per eius ſolidi angulos extenſam, ſolidum verè amplecti teſtentur, cuius quidem ſphæræ deſcriptionem, ſuper dupla eius quæ ex ſolidi cẽtro ſemicirculum conſtituentes, illúmque manẽte dimetiente circunferentes, quoad vnde cœpit redeat abſoluemus, vt huic ſolido non tantùm ſphæræ deſcriptionem, ſed veram eius eſſentiam adhærere concipiamus, ad vltimæ autem propoſitionis poſtremam demonſtrationis partem, qua icoſahedri latus dodecahedri latere maius oſtendendam eſt, dicemus Theonem ac Campanum illud non recta methodo demonſtraſſe. Nam id probare conantur per ſimilem ſectionem extrema & media ratione factam duarum inæqualium linearum, ſupponentes ſectas quaſcũque rectas extrema ac media ratione, ſimiliter ſeu in eaſdem ſecari rationes, quod non hactenus oſtendimus, ſed ſecũda proximi libri oſtenſuri ſumus. Theon igitur illud tanquam notum quadam comminentia præterit, Campanus verò ſæpius geometricæ mentis ſequax, cùm in illud cadit, à futura decimiquarti ſecunda auxilium implorat, quod vt illi condonetur, eam ſecundam à nulla hanc ſubſequente demonſtrandam eſſe profitetur, ſed tantùm per eas quæ iam elapſæ ſunt, eandem ſecundam facilè demonſtrari poſſe. Nos itaque aliam demonſtrandi ſpeciem protulimus, arguentes ab abſurdo per numeros illuſtratam, ne præcedentia per ſequutura demonſtremus, contra veram diſciplinæ ingenuitatem.

Tpſicles quinta decimiquinti planorum ſolida quinque regularia concludentium inclinationes, ab Iſidoro ſe ſuſcepiſſe profitetur, quas poſtmodum clariores proferre volens, angulos inclinationis ſingulorum datos eſſe, ac acutos vel obtuſos iuxtà ſolidi naturam oſtendere conatus eſt, licet huc vſque quid ſit datum, his quindecim libris tacuerit Euclides, Datum igitur Tpſiclem ſentire noſcimus non certam tantùm aut determinatam quantitatem, ſed eámque geometricis argumentis demonſtrari poteſt. Nam eorum ſolidorum latera angulos inclinationis ſuſcipientia, certa quãdoque, quandoque verò incerta demonſtrantur. Cùm autem hæc huic decimotertio ſolida componenti ſanius conueniant, vt compoſitorum ſolidorum inclinationes baſium, hunc decimumtertium concludentes diſcutiamus, hinc inde hæc tranſtulimus, vt in pyramide, angulus inclinationis ſub binis triangulorum perpendicularibus continetur, latere verò pyramidis ſubtenſus quod quidem perpendicularis ſeſquitertium poteſt, per coroll. 12 huius, & ideo triangulum ex ipſis conſtans, latera certa ac inuicem potentia commenſurabilia habent.

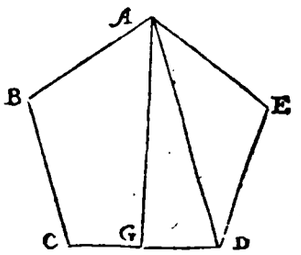
Cubi verò cum bina latera vnius baſium dimetiente ſubtenſa (aut eis æquales rectæ) angulum inclinationis cõponant, dimetiénſque cubi ſeſquialtera dimetientis baſis, quæ lateris potentia dupla (ex 47 primi) ſubſiſtat, ſequetur certas ac potentia commenſurabiles has dici lineas.

Octahedri verò, cuius binæ baſium perpendiculares angulum inclinationis continent octahedri dimetiente ſubtenſum, Dicemus dimetientem duplum poſſe lateris octahedri, latus verò ſeſquitertium perpendicularis, per coroll. 12 huius. Et proinde dimetientem ipſius perpendicularis duplum tertias bipartiens poſſe concludemus. Et hac de cauſa certas ac commenſurabiles eſſe dimetientem perpendiculari, per ſextam decimi.

Icoſahedri autem oſtendimus latus eſſe minorem, cùm certa fuerit dimetiens ſphæræ, per 16 huius. Cùm autem inclinationis ſuarum baſium angulus ſub triangulorum perpendicularibus, & ſubtendente angulum pentagoni quinque latera Icoſahedri ſuſcipientis conſtet, perpendicularibus autem commenſurabile ſit latus, nempe ſeſquitertium potentia, per coroll. 12 huius. Sequetur perpendiculares angulum continentes. Incertas ſiue minores dici, per 105 decimi. Quia verò dimetiens poteſt, & latus Icoſahedri, & eam quæ præfatum ſubtendit angulum, manifeſtum erit à certa dimetientis potentia, ablatam incertam lateris Icoſahedri potentiam, incertam relinquere ipſius ſubtendentis potentiam. Nam ſi certa eſſet, metiens numerus totam dimetientis & ablatam ſubtendentis, metiretur & reliquam lateris, ſcilicet incertam, per ſecundam communem ſentent. ſeptimi. Quod eſſet abſurdum, cùm ſit minor. Incertas itaque eſſe oſtendimus angulum inclinationis baſium Icoſahedri rectas componentes, ſubtendens enim ad comprehendentem, maiorem quam tota ad maius ſegmentum habet rationem.

Dodecahedri demùm inclinationis baſium angulus, ſub binis perpendicularibus baſium dodecahedri continetur, ſubtenſus ea recta cuius latus cubi dodecahedro inſcripti eſt maius ſegmentum, quæ æquatur copulanti binas oppoſitorum dodecahedri laterum bifarias ſectiones. Quam quidem incertam eſſe dicemus, cùm dimetiens ſphæræ certa binas poſſit, & copulantem & dodecahedri latus

atqui dodecahedri latus incerta eſt, nempe apotome, per 17 *huius. Reliqua igitur copulans incerta erit, vt proximæ præcedenti diximus. Comprehendentes verò angulum inclinationis perpendiculares, incertas eſſe doceamus.*



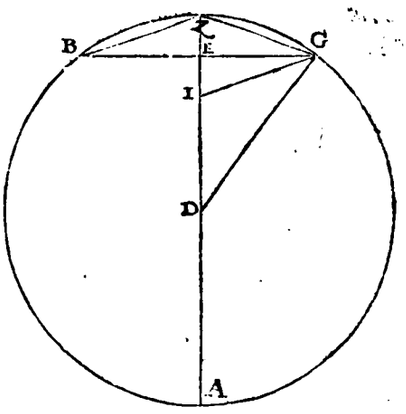
Sit pentagoni A B C D E *perpendicularis* A G, *ſubtendens verò angulum pentagoni, eſto* A C. *Quoniam* A C *recta latus eſt cubi, dodecahedri verò latus eſt* C D *eadem ſphæra deſcriptorum, per coroll. ſecundum decimæ ſeptimæ decimitertij. Sed* A C *dimetienti ſphæræ eſt commenſurabilis, per* 15 *decimitertij, & ideo certa, per ſextam diffinitionem decimi. Recta verò* C D *(dodecadri latus) incerta eſt, per* 17 *decimitertij. Quare* C G *eius dimidia incerta erit, per* 103 *decimi. Binas autem* A G G C *poteſt* A C, *per* 47 *primi. Si itaque à potentia rectæ* A C *certæ, potentia ipſius* C G *incertæ tollatur, quæ ſupererit (potentia quidem rectæ* A G*) incerta erit neceſſariò. Nam ſi* A G *ablata certa eſſet, & tota* A C *certa, reliqua* C G *certa eſſet, nempe iiſdem numeris menſa, per ſecundam communem ſententiam ſeptimi. Sed incerta oſtenſa fuit* C G, *dimidia nanque totius* C D *apotome, per* 17 *decimitertij, quod fieri non poteſt, incerta igitur erit &* A G *perpendicularis, per vndecimam diffinitionem decimi. Angulus igitur inclinationis dodecahedri, ſub binis pentagoni perpendicularibus comprehenſus, quē inſuper ſubtendit recta coniungens bifarias oppoſitorum dodecahedri laterum ſectiones, per ſecundum coroll.* 18 *decimitertij, quam incertam eſſe docuimus, cùm fuerit æqualis binis* A C C D, *per coroll. quartum decimæ ſeptimæ decimitertij, ſub incertis dicetur contineri lineis rectis.*

Præſtabat igitur angulorum intelligentiam à linearum naturæ intelligentia deprehendere quam eos ſimpliciter aut acutos, aut obtuſos dari, vt ſe ab Iſidoro ſuſcepiſſe fatetur Ypſicles. Nam per ſubtendentes ad comprehendentem rationem, reperitur anguli obliquitas. Si enim ſubtendens duplum comprehendentis poſſit, rectus erit angulus, per 48 *primi. Siquidem minus duplo acutus erit, per* 13 *ſecundi. Si autem plus duplo poſſit, aut maiorem habeat rationem quam tota ad maius ſegmentum, angulus tum obtuſus erit, per* 12 *ſecundi &* 4 *decimitertij. In qua quod ex tota plus poteſt duplo maioris ſegmenti.*

Euclid

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM reſtitutarum Liber decimusquartus.

Propoſitio prima.



QVÆ ex cẽtro circuli in pentagoni latus eidẽ circulo deſcripti perpẽdicularis acta, dimidia eſt binarũ, quæ exagoni & decagoni eidem circulo inſcripti.

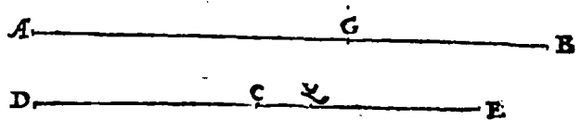
Proponatur circulus A B G, *cui inſcribatur latus pentagoni* B G, *ſuſcepto circuli centro* D, *à quo in latus* B G *perpendicularis agatur* D E, *producta in* Z, *ipſi verò* E Z *æqualis fiat* E I, *coniunctis* G I G D *&* G Z: *Dico rectam* D E (*quæ ex centro in latus pentagoni* B G) *dimidiam eſſe laterum decagoni & exagoni ſimul ſumptorum, quoniam perpendicularis eſt* D E *ad* B G, *æquales erunt* B E E G *ſectiones, per tertiam tertij, communis verò* E Z, *& anguli* Z E G Z E B, *recti, ex hypotheſi, baſes itaque* B Z Z G *æquales erunt. Pentagoni autem eſt* B G, *ex cõſtructione, decagoni igitur erit* Z G, *dimidium pentagoni ſubtendens, ipſi porrò* Z G *æqualis erit* G I, *ſubtendunt enim rectos angulos* G E I G E Z *æquis lateribus comprehenſos, per quartam primi, & proinde* G I E G Z E *anguli, trianguli* G Z I *erunt æquales, per quintam primi. Cùm autem* Z G *arcus ſit decagoni, ipſius* Z G *quadruplus erit arcus* G A, *& ideo angulus* G D A *anguli* G D Z *quadruplus erit, per trigeſimamtertiam ſexti. Quia verò idem* G D A *angulus qui ad centrum, duplus eſt anguli* G Z A *ad circunferentiam, per vigeſimam tertij, ſequetur angulum* G Z A *vel* G Z D *duplum eſſe anguli* G D Z, *nempe quadrupli dimidium, ſed angulo* G Z D *vel* G Z I *æqualis fuit* G I Z, *erit igitur* G I Z *exterior duplus anguli* G D Z, *æquales itaque erunt* G D I D G I *anguli. Nam binis ipſe* G I Z *fuit æqualis, per trigeſimamſecundam primi, quare latera* I D I G *æqualia erunt, per ſextam primi, & proinde* I D *ipſi* Z G *decagoni æqualis erit, per primam communem ſententiam, rectæ verò* Z E *æqualis eſt* E I, *per conſtructionem: tota igitur* D E *binis* G Z Z E *æqualis erit, quæ ideo ſimul ſumpta (ſcilicet* D Z Z G) *ipſius* D E *dupla erunt, quare dimidia erit* D E (*quæ ex centro in latus pentagoni*) *vtriuſque ſimul, ſcilicet lateris exagoni* D Z, *& decagoni* G Z: *nam quæ ex centro* D Z *lateri exagoni æqualis eſt, per corollarium decimæquintæ quarti. Quæ igitur ex centro circuli in pentagoni latus eidem circulo deſcripti, &c.*

Corollarium.

Recta perpendicularis à centro ad latus pentagoni extrema & media ratione ſecta, efficit maius ſegmentum eam quæ ab eodem centro in latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti. *Nam ea (per corollarium duodecimæ dicimi tertij) eſt dimidia eius quæ à centro ſiue exagoni, reliqua igitur erit dimidia decagoni: nam tota eſt binarum decagoni & exagoni dimidia, ſed decagoni & exagoni ſimul ſumptarum, maius ſegmentum eſt exagoni, per nonam decimitertij. Dimidiæ igitur earum maius ſegmentum erit dimidia exagoni, per decimamquintam quinti, quæ eſt à centro in trianguli latus demiſſa.*

Propoſitio ſecunda.

Si binæ rectæ lineæ extrema & media ratione ſecentur, ipſæ in eaſdem rationes ſecantur.



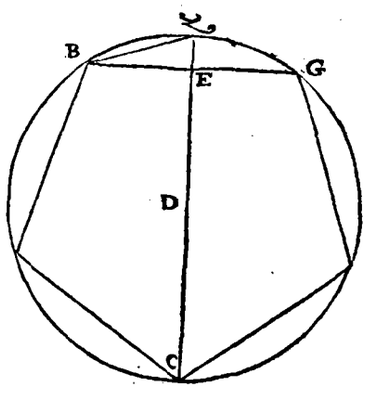
Binæ inquam rectæ A B D E *extremâ & media secentur ratione in* G *&* Z: *Dico eas in easdem secari rationes, seu similiter rectam* A B *in* G *vt* D E *in* Z, *quod si non similes credãtur sectæ, secetur altera earum quæuis, scilicet* D E *similiter ipsi* A B *in* C. *Esto igitur* D E *ad* D C *maius, vt* D C *ad* C E *minus, per tertiam diffinitionem sexti, sed est ex hypothesi* D E *ad* D Z *vt* D Z *ad* Z E, *recta igitur* D E *extrema & media ratione secabitur in duobus signis* C *&* Z, *maior autem est ratio* D E *ad* D C *minorem, quàm eiusdem* D E *ad* D Z *maiorem, per secũdam partem octauæ quinti. Est autem vt* D E *ad* D C *sic* D C *ad* C E, *maior igitur erit ratio* D C *ad* C E *ratione* D Z *ad* Z E, *quia verò* D Z *maior est ipsa* D C, *maior erit ratio* D Z *ad* C E *ratione* D C *ad* C E, *per octauam quinti, Multò itaque maior erit* D Z *ad* C E *ratione* D Z *ad* Z E, *eadem igitur* D Z *ad* C E *maiorem, maiorem haberet rationem quam ad* Z E *minorem, contra secundam partem octauæ quinti, quod fieri non potest. Non itaque dissimiliter secantur rectæ* A B D E, *sed ideo similiter ac in easdem rationes, haud secus ostendemus si signum* C *alibi cadat, nam semper earum aliqua maior erit. Si igitur binæ rectæ lineæ extrema & media ratione secentur, ipsæ in easdem rationes secantur.*

MONITVM.

Nunc demum desinunt hoc decimoquarto Theonis scripta, quæ his duobus postremis elementorũ libris suscepit Ypsicles in Euclidem, eo ordine quo processerat Theon peragẽda. Quæ quidẽ cum eousque mutilata iacent vt hoc tantùm libro 4 theoremata, proximo verò quinque ad nos peruenerint, Ypsiclem insuper à Campano & numero, & theorematum ordine dissentientẽ reperimus, quare quæ ex eorum scriptis vtiliora perspexerimus, colligere non dedignabimur, vt si qua complendis his præter hæc optari cernamus, illius clementis auxilio quæ pro viribus exiguis consequemur, eo ordine quo geometrica principia facilius percipi posse credamus, singula præparare nitemur, & prolixitates compendio, & nubilosa elucidatione, quàm facilius licebit, legentibus expositа proferemus.

Propositio tertia.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quæ ex latere pentagoni & ea quę pẽtagoni bina subtendit latera simul sumpta quadrata, quintuplum possunt eius quæ ex centro circuli.



Sit in circulo B C G *latus pentagoni* B G, *subtendens verò bina latera eius esto* B C. *Secet autem bifariam rectam* B G *aliqua per centrum* D *ducta, dimetiens* C D E, *producta in* Z, *iungatúrque* B Z: *Dico rectas* B C B G *quintuplum posse rectæ* D Z, *quæ ex centro. Quoniam (per quadragesimam septimam primi) quæ ex* C B B Z *æqualia sunt quadrato* C Z *dimetientis, & proinde quadruplum efficiunt eius, quod ex* D Z, *per vigesimam sexti. Nam* C Z *dupla est ipsius* D Z. *Rectæ igitur* C B B Z *&* Z D *quintuplum possunt ipsius* Z D, *binas autem* B Z Z D *potest recta* B G, *per decimã decimitertij, cùm* D Z *sit exagoni,* B Z *verò decagoni. Coniunctæ itaque* B C *&* B G *quintuplum possunt ipsius* D Z: *hoc est idẽ quod potuerunt rectæ* C B B Z *&* Z D. *Si itaque in circulo pẽtagonum æquilaterum describatur, &c.*

Corollarium.

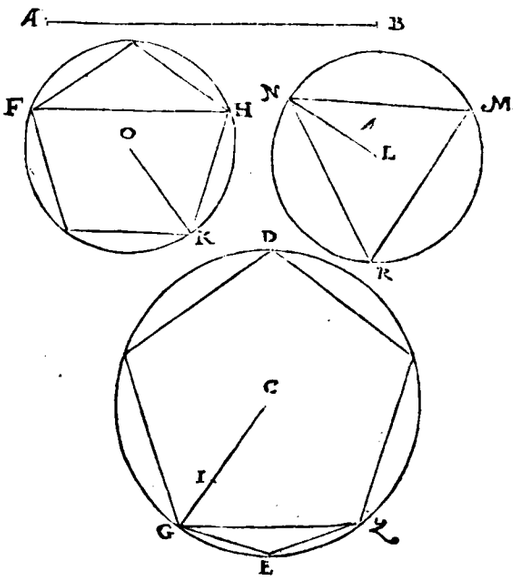
Si cubus & dodecahedrum eadem sphæra comprehendantur, latus cubi & latus dodecahedri, quintuplum possunt eius quæ ex centro circuli pentagonum dodecahedri continentis.

Ostensum est enim decimaseptima decimitertij, latus cubi bina pentagoni dodecahedri subtẽdere latera, cùm eadem capiuntur sphæra. Cubi igitur latus bina pentagoni subtendens latera, & eiusdẽ pentagoni latus eodem circulo capiũtur: quare (ex hoc theoremate) quintuplum possunt eius quæ ex centro eiusdem circuli pentagonum dodecahedri capientis.

Prop

Propoſitio quarta.

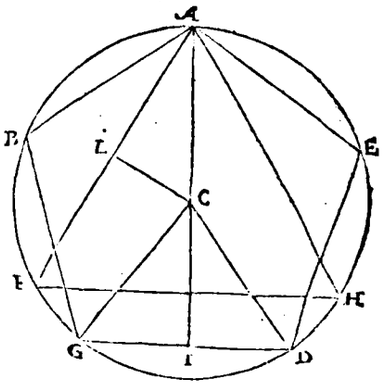
Idem circulus comprehendit, & Dodecahedri quinquangulum, & Icoſahedri triangulum in eadem Sphæra deſcriptorum.



Sit propoſitæ ſphæræ dimetiens A B, *in ea verò deſcriptorum icoſahedri & dodecahedri baſes ſint, triangulum* M N R *& pẽtagonum* F K H, *circa ipſas autem circuli deſcribantur, per* 5 *&* 14 *quarti, quorũ quæ ex cẽtro ſint* L N O K: *Dico rectas* L N O K, *quæ ex centro æquales eſſe, & ideo eundem circulum vtraſque comprehẽdere figuras. Poſit recta* A B *quintuplum alicuius rectæ quæ ſit* C G, *per corollarium* 6 *decimi, interuallo autem* C G *centro* C, *circulus deſcribatur* D Z G. *Cuiquidem circulo latus pentagoni inſcripti ſit* Z G, *per vndecimã quarti. Decagoni verò* E G *latus, nempe ſubtendens dimidium arcus* Z G: *ſecetur autem per trigeſimam ſexti,* C G *extrema & media ratione per* I: *quoniam oſtenſum fuit (*16 *decimitertij) hãc* C G *(cuius quintuplum poteſt diameter ſphæræ* A B*) eſſe eam quæ ex centro circuli quinque icoſahedri anglos continentis, latúſque pentagoni in eo* D Z G *circulo deſcripti, ſcilicet* Z G, *eſſe latus icoſahedri in ſphæra dimetientis* A B *deſcripti. Aequalis itaque erit* Z G *rectæ ipſi* M N, *quæ poſita fuit icoſahedri ſeu triangularis ſuæ baſis latus. Patuit inſuper* 17 *decimitertij, rectam* F H *(quæ ſubẽtdit angulũ pentagoni dodecahedri ſphæræ præfatæ inſcripti) eſſe latus cubi eidem ſphæræ inſcripti. Nam ſuper cubi angulis dodecahedri angulos conſtruximus. Triplum igitur poterit* A B *dimetiens, ipſius* F H *lateris cubi, per decimamquintam decimitertij, quintuplum autem (ex hypotheſi) poteſt idem* A B *rectæ* C G *Quinque itaque ex* C G *tribus ex* F H *æqualia erunt, nempe eidem quod ex* A B, *quoniam autem latus* E G *decagoni, ſecat rectam* C G *extrema & media ratione, per corollarium nonæ decimitertij. Similiter &* H K *ſecat ipſam* F H *cubi latus, per corollarium* 17 *decimitertij. Ipſæ itaque* C G *&* F H *in eaſdẽ rationes ſecantur, per ſecundam huius, æquales igitur erunt* C I *&* E G, *eiuſdem* C G *maiora ſegmenta Cùm autem quinque ex* C G *tribus ex* F H *æquipolleant, eadem ratione quinque ex* G E *tribus ex* H K *(maioribus earũ* C G *&* F H *ſegmentis) æqualia erũt. Quinque itaque ex* C G G E, *tribus ex* F H H K *æqualia erũt, per duodecimam quinti, ipſis autem ex* C G G E *æquum eſt quod ex* Z G, *per decimã decimitertij: rectæ autem* Z G *æqualis fuit* M N, *quinque igitur ex* M N *tribus ex* F H H K, *æqualia erũt. quæ autem ex* F H H K *quintuplum ſunt ipſius* O K, *quæ ex centro per tertiam huius. Tria igitur ex* F H H K *quindecim efficiunt eorum quæ ex* O K: *quia verò* M N *triplum poteſt ipſius* L N *quæ ex centro, per* 12 *decimitertij, quinque ex* M N *quindecim efficient quæ ex* L N: *atqui tribus ex* F H H K *fuerunt æqualia quinque ex* M N. *Eorum itaque æqualium æquemultiplicia decrementa (ſcilicet vtriuſque pars quindecima) æqualia erũt per* 15 *quinti, quæquidem ſunt* L N O K *quæ ex centris. Quare ab eis circuli* N R M *&* F K H *deſcripti æquales erunt, dodecahedri quidem & icoſahedri baſes (ex hypotheſi) continentes, eadem ſphæra comprehenſorum. Idem igitur circulus comprehendit, &c.*

Propoſitio quinta.

Si in circulo dodecahedri quinquangulum & Icoſahedri triangulum deſcripta fuerint, A centro autem in eorum aliquod latus perpendicularis agatur, Quod trigeſies ſub latere & perpendiculari ſibi demiſſa, æquum erit ſuperficiei eius ſolidi cuius lateri perpendicularis acta eſt.



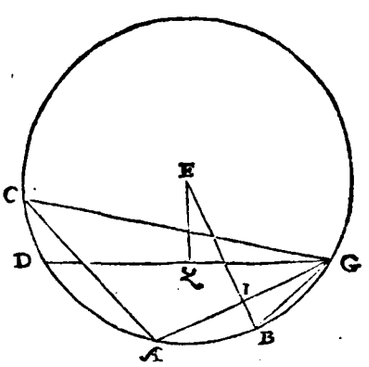
Sit in circulo A G E *dodecahedri quinquangulum* A B G D E, *& Icoſahedri triangulum* A F H, *centrum autem* C, *A quo perpendiculares ducantur* C I *in latus pentagoni,* C L *verò in latus trigoni: Dico rectangulum trigeſies ſumptum ſub* C I G D *rectis, æquum eſſe ſuperficiei dodecahedri. Quod verò trigeſies ſub* C L A F *æquum eſſe ſuperficiei Icoſahedri, eidem ſphæræ inſcriptorum, Ducantur* C A C F C G C D *rectæ. Cùm autem triãguli* G C D *duplũ ſit quod ſub* G D *baſi, &* I C *vertice, per* 41 *primi, Quinque verò ſimilia & æqualia ipſi* G C D *pentagonum dodecahedri conſtituunt* A B G D E. *Quinquies itaque ſub* G D I C, *duobus quinquangulis æquum erit. Quare & trigeſies ſub* G D I C *duodecim quinquangulis ſuperficiem dodecahedri concludentibus, æquum erit. Rurſus quod ſub* C L A F *duplum eſt trianguli* A C F. *Quod igitur ter ſub* C L A F *binis triangulis* A F H *Icoſahedri baſibus æquum erit. Et proinde quod trigeſies ſub* C L A F, *viginti huiuſmodi triangulis* A F H *Icoſahedri ſuperficiem complentibus æquum erit. Cùm autem huius pentagoni dodecahedrum & trianguli Icoſahedrum eadem ſphæra ſuſcipiat, per quartam huius,* C L *verò in latus icoſahedri,* C I *autem in latus dodecahedri cadant. Quod trigeſies ſub latere & perpendiculari ſibi demiſſa, æquum erit ſuperficiei eius ſolidi cuius lateri perpendicularis acta eſt. Si itaque in circulo dodecahedri, &c.*

Corollarium.

Dodecahedri & Icoſahedri ſuperficies in eadem ſphæra deſcriptorũ ad ſe ſunt, ſicut quod ſub latere eius & perpendiculari à centro baſis ſuæ acta, ad id quod ſub reliqui latere & perpendiculari in ipſum à centro ſuæ baſis acta. *Nam ſicut trigeſies ad trigeſies ſic (per* 15 *quinti) ſemel ad ſemel ſe habent.*

Propoſitio ſexta.

Superficies dodecahedri ad Icoſahedri ſuperficiẽ eidẽ ſphæræ inſcriptorum ſe habet, vt cubi latus ad Icoſahedri latus eadem ſphæra comprehenſi.

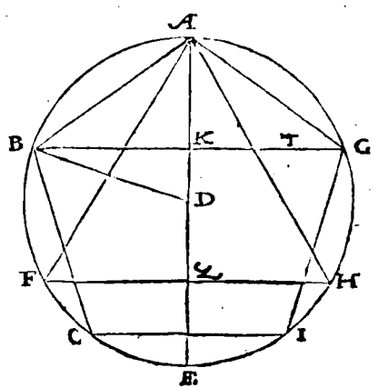


Eſto circulus A B G, *cui (per* 4 *huius) inſcribantur latera dodecahedri* A G, *& Icoſahedri* D G, *eadem ſphæra comprehenſorum, centrum verò ſit* E, *à quo in ipſa latera perpendiculares demittantur* E I E Z. *Producta verò* E I *in* B *iungatur* B G, *latus autem cubi eadem ſphæra contenti ſit* G C: *Dico eſſe dodecahedri ad icoſahedri ſuperficiem, ſicut* C G *ad* G D, *cùm recta* E I *extrema & media ratione ſecta, efficiat maius ſegmentum rectam* E Z, *per coroll. primæ huius. Ipſius verò* C G *maius ſegmentum eſt* A G, *per coroll.* 17 *decimitertij. Rectæ itaque* E I *&* C G *proportionaliter ſectæ ſunt, per ſecundam huius. Sicut igitur* C G *ad* A G, *ſic erit* E I *ad* E Z. *Quod itaque ſub* C G E Z *extremis, æquum eſt ei quod ſub* A G *&* E I *mediis continetur, per* 16 *ſexti. Sicut autem quod ſub* C G E Z *ad id quod ſub* D G E Z, *ſic per primam ſexti,* C G *ad* D G, *ſub eodem vertice* E Z. *Erit itaque ſicut quod ſub* E I A G (*æquum ei quod ſub* C G E Z *oſtenſum*) *ad id quod ſub* D G E Z, *ſic* C G *ad* D G. *Sicut autem quod ſub* E I A G *ad quod ſub* D G E Z, *ſic fuit (per coroll. præcedentis) dodecahedri ſuperficies ad icoſahedri ſuperficiem. Sicut igitur dodecahedri ſuperficies ad icoſahedri ſuperficiem, ſic* C G *cubi latus ad* G D *icoſahedri latus. Superficies itaque dodecahedri ad icoſahedri ſuperficiem, &c.*

Lemma.

Pentagonum dodecahedri æquum eſt ei quod ſub perpendiculari in baſim trianguli Icoſahedri, & quinque ſextis lateris cubi eidem ſphæræ deſcriptorum continetur.

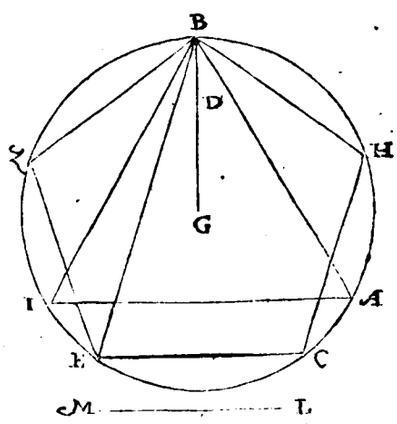
Sint



Sint in circulo A B E G *latera* A B A G *pentagoni dodecahedri* A B C I G, *ſubtenſa recta* B G, *Triangulum verò icoſahedri eidem ſphæræ inſcripti, per quartam huius, eſto* A F H, *circuli autem centrum* D: *Dimetiens verò ſit* A D E, *ſecans latus trianguli* F H *in* Z, *rectam verò* B G *in* K, *coniuncta* B D. *A recta verò* K G *tertia pars tollatur* T G, *per nonam ſexti. Erit igitur* B G *latus cubi, bina ſubtendens dodecahedri latera, eidem ſphæræ inſcriptorum, per* 17 *decimitertij, triangulum verò icoſahedri eiuſdem ſphæræ erit* A F H, *per quartam huius. In latus autem trianguli perpendicularis erit* A Z, *quæ per centrum* D. *Quoniam enim æquales ſunt anguli* G A E B A E *ſub æquis circunferentiis, per vigeſimamſeptimam tertij, baſes* B K K G (*per quartam primi*) *æquales erunt. Quinque igitur ſextas ipſius* B G *continet* B T *recta: Dico quod ſub* A Z B T *æquum eſſe pentagono* A B C I G. *Cùm ſeſquialtera ſit* A Z *ipſius* A D. *Nam ſecatur* D E *bifariam in* Z, *per coroll.* 12 *decimitertij. Similiter ſeſquialtera* K G *rectæ* K T, *erit* A Z *ad* A D *ſicut* K G *ad* K T. *Quod igitur ſub extremis* A Z K T *æquum erit ei quod ſub* A D *&* K G, *per* 16 *ſexti. Ipſi autem* K G *æqualis fuit* B K. *Quod itaque ſub* A Z K T *æquum erit ei quod ſub* A D *&* B K. *Quod quidem ſub* A D B K *duplum eſt* (*per* 41 *primi*) *trianguli* A B D. *Quod igitur ſub* A Z *&* K T *duplum erit eiuſdem trianguli* A B D. *Cùm autem pentagonum* A B C I G *quinque ſuſcipiat æqualia ipſi* A B D *triangula. Quod ſub* A Z *&* K T *verò bina, Duplum ſeſquialterum erit* A B C I G *quinquangulum, eius quod ſub* A Z *&* K T *rectanguli. Quia verò dupla ſeſquialtera eſt,* B T *rectæ* K T, *ex conſtructione. Eſt autem* (*per primam ſexti*) *quod ſub* A Z B T *ad id quod ſub* A Z K T *ſicut* B T *ad* K T *baſes. Sequetur quod ſub* A Z B T *eius quod ſub* A Z K T *duplum ſeſquialterum eſſe. Eiuſdem autem ſub* A Z K T *duplum ſeſquialterum fuit* A B C I G *quinquangulum. Pentagonum itaque* A B C I G *dodecahedri æquum eſt ei quod ſub* A Z *perpendiculari, &* B T *quinque ſextis lateris cubi comprehenditur.*

Propoſitio ſeptima.

Recta linea ſecta extrema & media ratione, quam rationem habet potens totam & maius ſegmentum, ad potentem totam & minus ſegmentum, eam habet cubi latus ad Icoſahedri latus, eadem ſphæra contenti.



Proponatur circulus A B E, *cui* (*per* 11 *quarti*) *pentagonum æquilaterum inſcribatur* B Z E C H, *&* (*per ſecundam eiuſdem*) *triangulum æquilaterum* A B I, *cuius centrum eſto* G. *Quæ ex centro verò* G B *extrema & media ratione ſecetur in* D, *per trigeſimam ſexti. Poſsit autem totam* G B *& minus eius ſegmẽtum* B D, *recta* M L, *per coroll.* 15 *decimi. Coniungantur autem* B E *ſubtẽdens pentagoni angulum, ea nanque erit cubi latus, per coroll.* 17 *decimitertij,* B I *verò icoſahedri, &* B Z *dodecahedri, per quartam huius: Dico* B E *latus cubi ſic eſſe ad* B I *latus icoſahedri, ſicut potens rectas* B G G D, *ad potentem rectas* G B B D. *Quoniam* (*per duodecimam decimitertij*) B I *triplum poteſt rectæ* B G, *quæ ex* G B B D *verò tripla ſunt eius quod ex* G D, *per quartam eiuſdem. Erunt itaque* (*per decimamquintam quinti*) *quod ex* B I *ad quæ ex* G B B D (*tripla*) *ſic quod ex* B G *ad quod ex* G D (*ſimplicia.*) *Sicut autem quod ex* B G *ad quod ex* G D, *ſic eſt quod ex* B E *ad quod ex* B Z. *Nam rectæ* B G G D *&* B E B Z *ſunt* (*per ſecundam huius*) *in eadem ratione. Cùm maximè* B Z *ſit maius ſegmentum rectæ* B E, *per coroll.* 17 *decimitertij. Sicut itaque quod ex* B E *ad quod ex* B Z, *ſic eſt quod ex* B I *ad quæ ex* B G B D. *Et viciſsim quod ex* B E *ad quod ex* B I, *ſic quod ex* B Z *ad quæ ex* G B B D. *Quod autẽ ex* B Z *æquum eſt eis quæ ex* B G G D, *per* 10 *decimitertij. Nam* B G *lateri exagoni,* G D *verò decagoni, per coroll.* 9 *eiuſdem, æquantur. Erunt igitur quæ ex* B G G D *ad quæ ex* G B B D, *ſic quod ex* B E *ad quod ex* B I. *Eſt ergo potens* B G G D *rectas recta* Z B. *Potens verò* G B B D *recta* M L. *Sicut itaque* Z B (*potens totam* B G *& maius ſegmentum* G D) *ad* M L, *potentem totam*

GB & minus segmentum BD, sic est BE cubi latus, ad BI icosahedri latus, per vigesimam secundam sexti. Recta itaque linea secta extrema & media ratione, quam, &c.

Propositio octaua.

Dodecahedri solidum ad Icosahedri solidum est, sicut cubi latus ad Icosahedri latus, eidem sphæræ descriptorum.

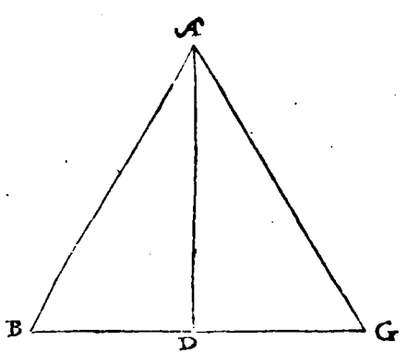
Quoniam ostensum est quarta huius eundem circulum comprehendere & icosahedri triangulum, & dodecahedri quinquangulum eadem sphæra conceptorum, Sequetur, cùm æquales sint circuli eas bases capientes, in ipsos perpendiculares à centro æquales duci, per corollar. lemmatis decimæ sextæ duodecimi, & proinde pyramides super eorum solidorum basibus eiusdem esse verticis: Nam earum pyramidum vertices in centro concurrunt. Quare ad se erunt vt bases, per quintam & sextam duodecimi. Et hac de re pyramides dodecahedrum componẽtes, ad pyramides icosahedrum componentes, ad se erunt vt bases, quæ quidem sunt eorum solidorum superficies. Eorum itaque solida ad se erunt vt superficies. Sed superficies dodecahedri ad superficiem icosahedri fuit vt cubi latus, ad icosahedri latus, per sextam huius. Sicut itaque dodecahedri solidum ad icosahedri solidum, sic cubi latus ad icosahedri latus, eidem sphæræ inscriptorum, per vndecimam quinti. Dodecahedri igitur solidum ad icosahedri solidum est sicut, &c.

Corollarium.

Dodecahedri solidũ ad Icosahedri solidũ, ad se sunt vt suæ superficies in eadẽ Sphæra descriptæ scilicet vt cubi latus ad Icosahedri latus. *vt patuit, nã resoluũtur in pyramides eiusdẽ verticis.*

Propositio nona.

Si trianguli æquilateri latus certa fuerit superficies incerta. erit, quæ vocatur Medium.



Sit triangulum æquilaterum ABG, à signo A in latus BG perpendicularis agatur AD: certa autem esto AB: Dico superficiem ABG mediam esse, quoniam AB sesquitertium potest rectæ AD, per corollarium duodecimæ decimitertij, qualia AB potest duodecim, talia AD potest nouẽ. Reliqua igitur BD eorum 3 poterit, cùm AB vtrasque AD & DB possit. Certæ itaque erunt AD DB, propositæ AB commensurabiles, per sextam decimi. Sed quia AD ad DB rationẽ potentia habet quam 9 quadratus ad 3 non quadratum. Ipsæ nõ sunt in quadratorum ratione, per corollarium 25 octaui, Nec ideo longitudine commensurabiles, per nonam decimi. Quod igitur sub AD DB certis potentia tantum commensurabilibus rectis, medium est, per vigesimamprimam decimi. Sed quod sub AD DB duplum est trianguli ABD, per 41 primi, quod sub AD DB itaque æquum est toti ABG, ipsius ABD duplo, per primã sexti, quare medium erit trianglum ABG. Si igitur trianguli æquilateri latus certa fuerit, &c.

Corollarium.

Si Octahedrum & trilatera æquilatera Pyramis, sphæræ cuius dimetiens certa est inscriban tur, eorum superficies mediæ erunt. *Nam superficies illæ constant triangulis æquilateris, quorum latera dimetienti certæ sunt commẽsurabilia, per decimamtertiam & decimamquartam decimitertij, & ideo certæ sunt, sed potentia tantum ad perpendicularem commensurabiles, & igitur medium comprehendunt triangulum, vt patuit.*

Propositio decima.

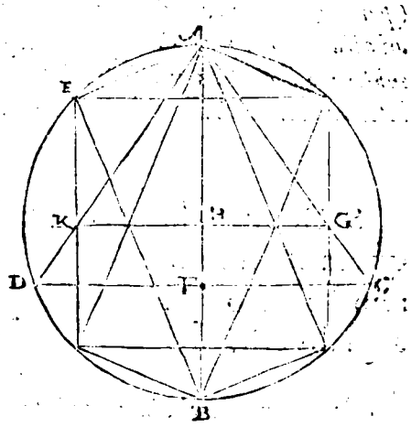
Si Pyramis trilatera, æquilatera, & Octahedrum eidem Sphęrę inscribãtur, basis pyramidis sesquitertia erit basi Octahedri, Octahedri verò superficies ad Pyramidis superficiem, sesquialtera erit.

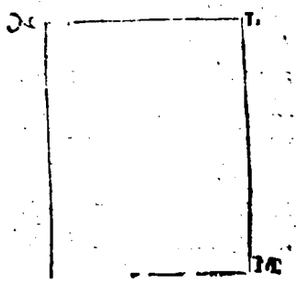
Quoniam

Quoniam dimetiens ſphæræ ſeſquialter eſt potentia lateris pyramidis, per decimamtertiam decimitertij, octahedri verò lateris dupla eſt eadem dimetiens potentia, per 14 eiuſdem. Qualia igitur dimetiens poteſt ſex, eorum pyramidis latus poterit 4, octahedri verò latus eorundē 3 poterit. Pyramidis igitur ad octahedri latus rationem quam potētia 4 ad 3 ſeruabit, quæquidem ſeſquitertia nominatur. Eandem item habebunt rationem ex ipſis lateribus ſimilia triangula (ſolidorū baſes) quā habuerunt ex ipſis quadrata. Nam ſingulæ duplæ ſunt rationis laterum, per vigeſimā ſexti, & proinde qualium baſis pyramidis fuit 4, eorum quatuor eius baſes erunt 16, ſimiliter qualiū baſis octahedri fuit eorundem 3, octo eius baſes erūt 24. Octahedri igitur baſes ad pyramidis baſes rationem habent quam 24 ad 16, quæquidem eſt ſeſquialtera. Si itaque pyramis trilatera, æquilatera, & octahedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c.

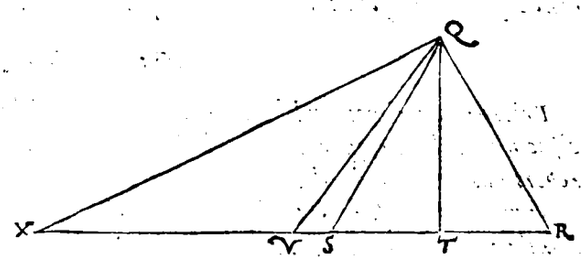
Propoſitio vndecima.

Pyramis trilatera æquilatera ad Octahedrum eidem Sphęrę inſcriptum ſe habet, ſicut rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimas quartas lateris Pyramidis, & ſub linea octopartiente nonas eiuſdem lateris comprehenſum ad quadratum diametri Sphęrę.





Supponamus ſphæram cuius dimetiens ſit A B, *centrum verò* H. *Illi autem inſcriptam eſſe pyramidē* A D C, *ſimulac octahedrum* A E K B G, *linea autem* N L *poſsit* $\frac{27}{64}$ *lateris* A C *pyramidis: linea verò* L M *ſit eiuſdem lateris lōgitudine octopartiens nonas: Dico pyramidem* A C D *ad octahedrum* A E B *ſe habere, vt quod ſub* N L, L M *ad quod ex* A B *quadratū. Quoniam quæ ab angulo* A *per centrum* H *ducitur perpendicularis baſi pyramidis, in centrum* F *circuli baſim continentis cadit, & rectam* H F *ſextam ipſius* A B *partem efficit, per corollariū decimatertiæ decimitertij, tripla erit* H A (*quæ ex cētro*) *rectæ* H F, *& proinde tota* A F *ad* A H *erit vt 4 ad 3. Secetur pyramis* A D C *plano* K H G, *per centrum* H, *parallelo ipſi* D F C *baſi, per corollariū decimæquintæ vndecimi. Eius itaque pyramidis triangulum* A D C *ſecabitur recta* K G *parallela ipſi* D C, *per 16 vndecimi. Sicut igitur* A F *ad* A H, *ſic erit* A C *ad* A G, *per ſecundam ſexti, ſeſquitertia itaq; erit* A C *ipſi* A G. *Quia verò ſimilia ſunt triangula* A D C *&* A K G, *& reliqua (plano* H K G) *ſecta inter ſe, per quintam ſexti: ſimiles erunt pyramides* A D C *&* A K G *adinuicem, per ſeptimam diffinitionem vndecimi. Ipſæ itaque erunt in tripla ratione laterum* A C *ad* A G, *per octauam duodecimi: ſed laterum* A C *ad* A G *fuit, vt 4 ad 3 ratio. Inuentis itaque (ex ſecunda octaui) quatuor numeris, in ea ratione cōtinuis & minimis, quiquidem erunt 64, 48, 36, 27. Perſpicuum erit (ex decima diffinitione quinti) extremos 64 ad 27 triplicē habere rationē propoſitæ 4 ad 3 rationis, vel bis in ſe ducta (1 & $\frac{1}{3}$) huius rationis quantitate ea conſurget ratio 64 ad 27. Pyramis igitur* A D C *ad pyramidem* A K G *erit vt 64 ad 27, quæ eſt tripla ipſorum 4 ad 3. quia verò* A C *recta ipſius* A G *ſeſquitertia eſt longitudine, qualium* A C *poteſt 64, eorum* A G *poteſt 36. Nam dupla eſt ratio potentiarum rationis laterum 64 ad 48, per vigeſimam ſexti.*



Sit igitur triangulum æquilaterum Q R S, *ſuper* R S *æquali poſita ipſi* A G *conſtitutū, per primam primi, demiſſa in baſim* R S *perpendiculari* Q T. *Extēdatur autem* R S *in* X, *fiátque (per corollarium ſextæ decimi) ſicut 27 ad 64 ſic* R S *ad* R X, *ſecetur autem bifariam* R X *in* V *ducta* Q V, *quoniā* R S *æqualis eſt ipſi* A G, *qualium* A C *poteſt 64, eorum* R S *poteſt 36, nam* A G *ea poſſe oſtenſa fuit, qualium verò* R S *poteſt 36, eorum* Q T *poteſt 27, per corollarium* 12

decimitertij. Qualium igitur A C *poteſt* 64 *eorum* Q T *poteſt* 27, *recta itaque* Q T *rectæ* L N *æqualis erit ex hypotheſi. Rurſus cũ poſita ſit* R S *ipſi* A G *æqualis, fuit autem* R X *eorũ longitudine* 64 *qualiũ* R S *fuit* 27 *eorundem verò erit* A C (*quæ ipſius* A G *vel* R S *fuit ſeſquitertia*) 36, *qualium* R X *fuit* 64. *igitur* R V (*ipſius* R X *dimidia*) *eorundẽ erit* 32, *qualiũ* A C *fuit* 36, *recta itaque* R V *rectæ* A C *erit octopartiens nonas, & proinde ipſi* L M *quæ eiuſdẽ* A C *fuit octopartiens nonas æqualis erit* R V, *cũ antẽ* N L *ipſi* Q T *&* L M *ipſi* R V *æquales oſtenſæ ſint, rectangulũ ſub* Q T R V *æquum erit rectãgulo ſub* N L *potente* $\frac{27}{64}$ *lateris* A C, *& ſub* L M *octopartiente nonas eiuſdem lateris* A C, *ſed quod ſub* Q T R V *duplum eſt trianguli* Q V R, *per* 41 *primi, eiuſdem verò* Q V R *duplum eſt* Q X R, *per primam ſexti: totum igitur* Q X R *ei quod ſub* Q T R V *æquum erit, & proinde rectãgulo* N M. *Quia* R X *fuit poſita* 64 *qualium* R S *fuit* 27, *triangula* Q R X *&* Q R S *per primã ſexti in baſium ratione erũt, vt* 64 *ad* 27, *ſicut verò* 64 *ad* 27 *ſic fuit pyramis* A D C *ad pyramidem* A K G, *ſicut itaque* N M *vel* Q R X *ad* Q R S, *ſic pyramis* A D C *ad pyramidem* A K G, *quia verò* A H *ſemidiameter eſt vertex pyramidis* A K G, *necnon binarum pyramidum octahedri communem baſim in quadrato octahedri habentium æquarum & ſimilium, per corollarium decimæquartæ decimitertij, erit ſicut baſis pyramidis* A K G (*quæ fuit* Q R S) *ad bina quadrata octahedri, hoc eſt ad quadratum diametri* A B, *ipſis quadratis* (*per qnadrageſimamſeptimam primi*) *æquum, ſic pyramis* A K G *ad octahedrum* A E B, *per ſextam duodecimi. Cũ autem fuerit* N M *rectangulum ad* Q R S *baſim, vt pyramis* A D C *ad pyramidẽ* A K G, *baſis verò* Q R S *ad quadratum* B E *fuit vt pyramis* A K G *ad octahedrum* A E B, *ſequetur æqua ratione ſublatis mediis* (*per vigeſimamſecundam quinti*) *eſſe, vt rectangulum* N M *ad quadratum* B E, *ſic pyramidem* A D C *ad octahedrum* A E B *eidem ſphæræ inſcripta, ſed* N M *continetur ſub* N L *potente* $\frac{27}{64}$ *lateris* A C *pyramidis* A D C, *& ſub* L M *octopartiẽte nonas eiuſdem* A C, *ex hypotheſi. Pyramis itaque trilatera æquilatera ad octahedrum eidem ſphæræ inſcriptum, ſe habet, &c.*

Propoſitio duodecima.

Si Cubus Sphæra comprehendatur, duplum eius quod ex dimetiente æquum eſt omnibus Cubi ſuperficiebus ſimul ſumptis, perpendicularis autem à centro Sphęrę in aliquam Cubi baſim demiſſa, dimidio Cubi lateris æqualis erit.

Cùm enim (*per decimamquintam decimitertij*) *dimetiens poſſit triplum lateris cubi, ſequetur dimetientis duplum poſſe ſextuplum eiuſdem cubi lateris, atqui ſextuplum potentiæ vnius lateris totam cubi ſuperficiem complet, nam ſex ſuperficiebus quadratis componitur cubus, per vigeſimamprimam diffinitionem vndecimi, æquis igitur lateribus comprehenſis, dupla itaque dimetientis potentia, cubi toti ſuperficiei erit æqualis: quia verò dimetiens cubi & ea quæ in baſes eius oppoſitas ſit perpendicularis, bifariam ſe in centro ſphæræ cubum continentis ſecant, per corollarium ſecundum decimæquintæ decimitertij, totáque recta centra baſium oppoſitarum coniungens, lateri cubi eſt æqualis, per trigeſimamtertiam primi, cùm coniungat ſemidimetientes baſium æquas & parallelas. Dimidia itaque dimidio cubi lateri æqualis erit, per decimamquintam quinti. Si itaque cubus ſphæra, &c.*

Corollarium.

Si pótentię dimetientis duo tertia, in perpendicularem dimidio cubi lateri æqualem ducẽtes, ſolidum fecerimus, illud cubi ſolido æquum erit. *Nam duo tertia potentiæ dimetientis ſphæræ cubum ambientis, binis cubi baſibus æqua eſſe patuit. Si itaque illis dimidia cubi altitudo conferatur, ſingula dimidio cubi ſolida efficient æqualia, per trigeſimamprimam vndecimi: nam æquas habent baſes. Bina igitur toti ſolido cubi æqualia erunt.*

MONITVM.

Priorum proximorum librorum theoremata abſoluentes, quæ ab eis oriri videbantur corollaria eiſdem contulimus, quorum plura huic decimoquarto Campanum tribuiſſe (*cùm huc ventum fuit*) *reperimus, quæ iam duodecimi ac decimitertij theorematis à quibus oriuntur, coniunximus, reliquorum verò quæ ſcripſit Campanus ſingula, ſuis locis contulimus. Horum autem aliqua* 4 *propoſitionibus & quinque corollariis explicauit Ypſicles, ſatis tamen confusè: nos autem vt quæque ſua ſorte diſcutiamus, quæ hoc libro à Campano omiſimus, eo ordine quo ea enumerabimus, diſponuntur vt quæque ſua diſtribuantur ſerie, ac quæ à theorematis oriuntur corollaria eiſdem aſſocientur.*

Quo

Quo ordine conueniant noſtra Campani theorematis hoc decimoquarto.

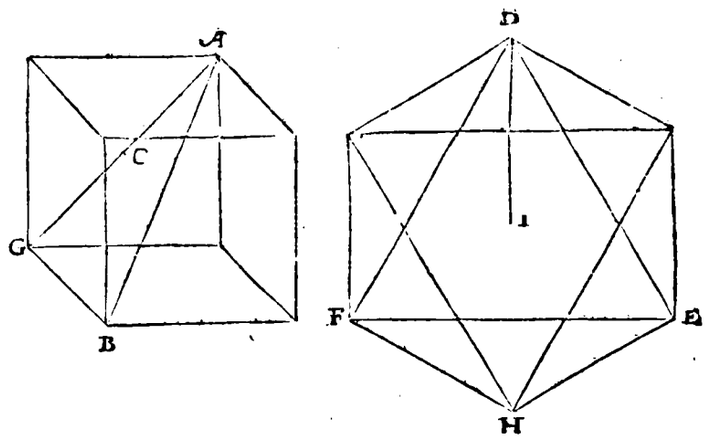
Campani ordo	1	2	3	4	5	6	7	*corol.*7	8	9	*corol.*9	10	11
Huius ordo	1	2	*corol.* 9. *dec.tertij*	3	4	5	5	*corol.*5	6	7	*lemm.*16 *duodecimi*	*cor.*8	*cor.*12 *dec.ter.*

Campani ordo	12	13	14	15	16	17	*coroll.*17	*coroll.*17	18 *cũ coroll.*
Huius ordo	9	*corol.*9	10	*cor.*13 *dec.ter.*	*corol.*14 *dec.ter.*	11	*coroll.*13. *dec.ter.*	*coro.*12. *dec.ter.*	12 *cũ coroll.*

Expliciunt quæ partim à maioribus ſuſcepimus hoc decimoquarto. Quæ autem eidem noſtris deerant temporibus conferendis ſolidis mox ſubeunt.

Propoſitio decimatertia.

Idem circulus comprehendit & Cubi quadratum & octahedri triangulum eadem Sphęra deſcriptorum.



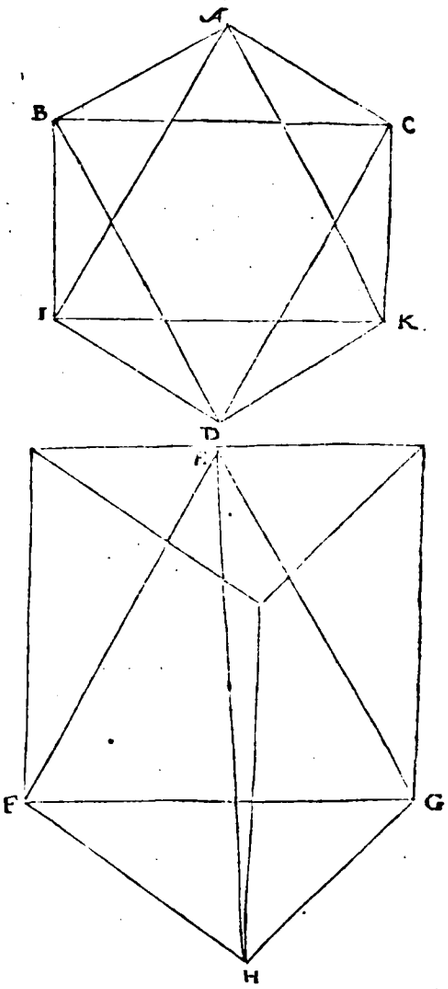
Eſto cubus A B G, *octahedrũ eſto* D E F, *eadem ſphæra cuius dimetiens ſit* A B *vel* D H *cõprehenſa, quæ verò ex centris circulorum baſes cõtinentium ſint* C A *&* I D: *Dico eas eſſe æquales, quoniam dimetiens* A B *ſphæræ cubum continentis poteſt triplũ lateris cubi* B G, *ex quintadecima decimitertij, cuius quidem lateris duplum poteſt (ex quadrageſimaſeptima primi)* A G *dimetiens baſis cubi, quæ & circuli baſim continentis, per nonam quarti, ſphæræ dimetiens* A B *ſeſquialterum rectæ* A G *poterit, ſcilicet quarum partium* A B *poteſt* 12, *earum* A G *poterit* 8, *ac proinde rectæ* A C *quæ ex centro circuli erit duarum potentia. Sextuplum itaque poteſt ſphæræ dimetiens, eius quæ ex centro circuli quadratum cubi continentis, ſphæræ verò eiuſdem octahedrum continentis dimetiens, eadem eſt ſcilicet* D H *ipſi* A B, *quæ & dimetiens quadrati quod ex lateribus fit octahedri. Et proinde duplum poteſt lateris eiuſdem octahedri, per decimamquartam decimitertij, latus autem* D F, *eius quæ ex centro circuli triangulum octahedri continentis (ſcilicet* I D*) triplum poteſt, ex duodecima decimitertij, ſextuplum igitur poterit rectæ* I D *(quæ ex centro) eadem dimetiens* A B *vel* D H, *quæ ſextuplum potuit eius quæ ex centro circuli quadratum cubi continentis, rectæ ideo ex centris circulorum baſes cubi & octahedri cõtinentium, ſunt æquales, & ideo circuli, ex prima tertij. Idem itaque circulus comprehendit & cubi, &c.*

Corollarium.

Sequitur perpendiculares in ſphæra coniungentes centra circulorum oppoſitas baſes cubi & octahedri continentium, eſſe æquales. *Cùm circuli ſint æquales, per ſecundum corollarium lemmatis* 16 *duodecimi, ac per centrum ſphæræ centra baſium coniungere, per primum corollarium eiuſdem. Perpendicularis itaque octahedri oppoſitas baſes copulans, lateri cubi æqualis erit: nam eorum habetur vtraque pro vertice recta.*

Propoſitio decimaquarta.

Octahedrum ad triplum Pyramidis eadem Sphæra comprehenſæ rationem habet quam latera.



Esto octahedrum A B C D, *pyramis verò* E F G H, *super cuius basi* F G H *erectis perpendicularibus vertici pyramidis æqualibus constituatur prisma, illud triplum erit pyramidis* E F G H, *per primum coroll. 7 duodecimi: Dico octahedrum* A B C D *sic esse ad prisma triplum pyramidis* E F G H, *vt* B C *latus ad* F G *latus. Cùm octahedri latera basium oppositarum sint rectæ sese tangentes: & parallelæ ad alias sese tãgentes, sunt enim opposita latera quadratorũ ex lateribus octahedri cõpositorum. Parallela erũt triangula plana octahedri opposita, scilicet* A B C *ipsi* K I D, *ac reliqua, per* 15 *vndecimi. Esto octahedri dimetiens* A D, *totum octahedrum secatur in quatuor pyramides æquas & similes super basibus octahedri & vertice constitutas, ac circa dimetientem* A D, *scilicet quæ super basi* B I D *vertice* A, *& basi* B C D *vertice* A, *super basi* I K D *vertice* A, *& super basi* C K D *vertice* A *cõstituuntur, quæ æquales erunt (nam singulæ binis octahedri basibus, ac binis triangulis sub dimetiente* A D *& binis octahedri lateribus comprehensis constant) per octauam diffinitionem vndecimi. Prisma igitur quod super octahedri basi & vertice constituitur, hoc est quod sub vertice parallelarum basium, vt ex præcedente patuit, æquum est tribus illarum octahedri pyramidum, per primum corollar. 7 duodecimi. Illud ideo prisma ad aliud prisma compositum sub eodem vertice ex totius octahedri quatuor pyramidibus, habebit rationem basium trigonarum, per tertium corollarium eiusdem: quia igitur 4 pyramides ad 3 rationem habent sesquitertiam, sequetur prismatis quatuor pyramides cõtinentis trigonam basim, rationem habere sesquitertiam, ad basim prismatis tres eiusdem octahedri pyramides super eius basi ac vertice continentis, hoc est ad basim octahedri: sed eiusdem octahedri basis sesquitertia fuit basis pyramidis, per decimam huius. Æquales itaque erunt trigonæ bases, scilicet prismatis quatuor octahedri pyramides sub eius vertice continentis, basibus trigonis prismatis treis pyramides sub pyramidis* E F G H *vertice continentis, sed æquũ est prisma octahedri octahedro. Prisma verò pyramidis* E F G H, *eiusdem fuit triplum, quæ quidem super æquis basibus prismata ad se sunt vt vertices, per corollarium vigesimæquintæ vndecimi, nempe vt earũ dupla parallelepipeda, per corollarium trigesimæprimæ vndecimi. Vertex autẽ octahedri, lateri eadem sphæra contẽti cubi fuit æqualis, per corollarium decimætertiæ huius: latus autem cubi ad pyramidis verticem, rationem habuit potentia quam* 12 *ad* 16, *per* 18 *decimitertij. Latus verò octahedri ad pyramidis latus eam habet quam* 18 *ad* 24, *per eandem quæ eadem est rationi* 12 *ad* 16 *verticum. Prisma igitur æquale octahedro, ad prisma triplum pyramidis eam habet quã vertices siue quam latera rationẽ. Octahedrum itaque triplum pyramidis eadem sphæræ comprehensæ, rationẽ habet quam latera.*

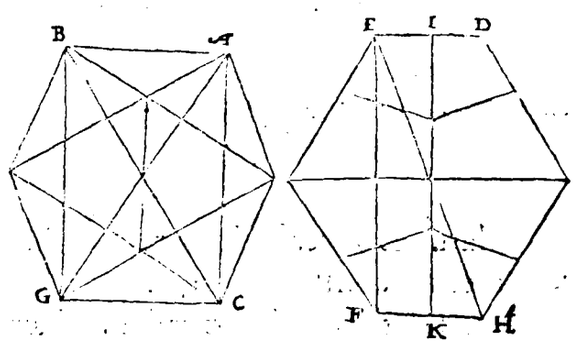
Corollarium.

Pyramidis & Octahedri, proportionalia sunt latera verticibus. *Nam latera ac vertices sesquitertia fuêre potentia, insuper dimetiens sphæræ ad pyramidis latus, vt octahedri latus ad cubi latus, nempe sesquialtera (ex* 18 *decimitertij) fuerunt potentia.*

Propositio decimaquinta.

Si certa proposita binas potens, totam & maius segmentum, rursúsque binas, totam & minus segmentum fecerit, latus Icosahedri maius erit segmentum, latus autem Dodecahedri minus eadem Sphæra cõprehensorum.

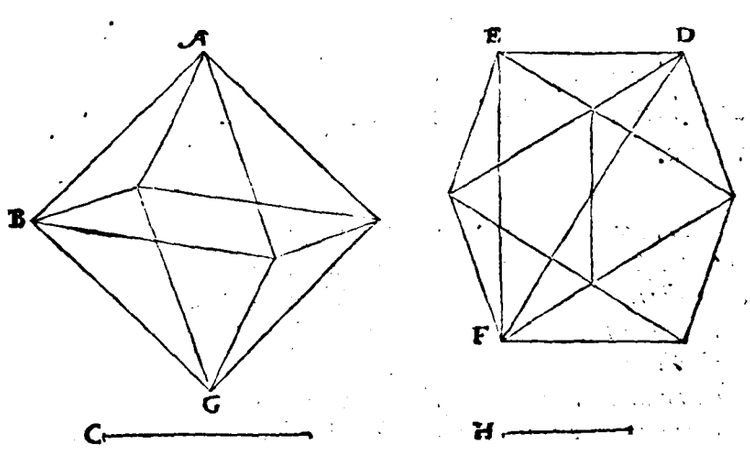
Esto



Eſto propoſita recta A G *dimetiens ſphæræ iſacohedrum* A B G C *continentis, cuius latus ſit* A B. *Eſto item recta* B G *ſubtendens angulum pẽtagoni ex icoſahedri lateribus (per* 16 *decimitertij) deſcripti. Sit inſuper ad eãdem* A G *vel* D F *ſibi æqualem dodecahedrum* D E F H, *per decimamſeptimã decimitertij, cuius oppoſita latera* E D F H *bifariam ſecentur in* I *&* K *iuncta* I K: *ſit autem recta* E F *binos coiũctarum baſium oppoſitos nectẽs angulos: Dico latus icoſahedri* A B *eſſe maius ſegmentum, quod dimetiens* A G *poteſt ſimul cum tota, latus verò dodecahedri* E D *eſſe minus, quod eadem dimetiens* A G *vel* D F *ſimul cũ tota poteſt: quoniam icoſahedri latera oppoſita* A B G C *dimetientibus* A G B C *iuncta, ſunt parallela, per corol. ſecũdũ* 16 *decimitertij, rectæ* B G *&* A C *eas coniungentes æquales & parallelæ ſunt, per* 33 *primi, inſuper anguli* B A C A B G *æquis dimetientibus ſubtenſi æquales (per octauã primi) erunt recti, per* 29 *primi. Recta ideo* A G *binas* A B B G *poteſt, per* 47 *primi: cùm autem* B G *ſubtendat angulum pentagoni ex lateribus icoſahedri compoſiti, rectæ* B G *maius ſegmentum erit* A B *per octauã decimitertij, quodquidem potuit* A G *cum tota* B G. *Cæterùm quia recta* I K *iungens oppoſita* E D F H *dodecahedri latera & parallela rectos efficit ad ea angulos, per corol.* 3 *decimæſeptimæ decimitertij. Recta* E F *æquas & parallelas* E I F K *iungens, eidem* I K *æqualis erit, per* 33 *primi. Rectus ideo erit* D E F *angulus, per* 29 *primi: quare* D F *dimetiens binas* E D E F *poteſt, atqui rectæ* I K *minus ſegmentum eſt* E D *latus dodecahedri, per* 4 *corollarium* 17 *decimitertij: reliquæ itaque* E F (*ipſi* I K *æqualis*) *minus idem ſegmentũ erit* E D. *Dimetiens igitur* D F *binas* E D E F *potens, per* 47 *primi, poteſt* E D *latus dodecahedri minus ſegmentum ſimul cum tota* E F. *Si ergo certa propoſita* A G *vel* D F *binas* A B B G *potens totam & maius ſegmentum, rurſũſque binas* E F E D *totam & minus ſegmentum fecerit, latus icoſahedri* A B *erit maius ſegmentum, latus verò dodecahedri* E D *minus, eadem ſphæra comprehenſorum.*

Propoſitio decimaſexta.

Si lateris Octahedri potentia per binas rectas extrema & media ratione coniunctas exprimatur, latus Icoſahedri eadem ſphæra comprehenſi duplum poteſt minoris earum.

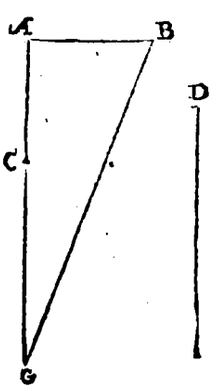


Eſto octahedri A B G *latus* A B, *potens binas* C *&* H *rationẽ habentes quam tota ad maius ſegmentum, per coroll.* 34 *ſexti. Sit autem icoſahedrum* D E F *cuius latus* D E, *recta verò ſubtendens angulos pentagoni ex lateribus icoſahedri facti eſto* E F: *Dico rectam* E D *latus, duplum poſſe rectæ* H *minoris earum. Quoniam patuit ex demonſtratis decimæquintæ huius latus* E D *icoſahedri maius ſegmentum eſſe rectæ* E F, *ac dimetientem* D F *binas* E D E F *poſſe, vt totam ſcilicet & maius ſegmentum. Poteſt autem (ex hypotheſi) latus* A B *binas* C *&* H *eadem ratione coniunctas. Erit igitur* E F *ad* E D *vt* C *ad* H, *per ſecundam decimiquarti. Ac viciſſim* E F *ad* C *vt* E D *ad* H, *per decimamſextam quinti, & quia* D F *binas* E D E F *poteſt,* A B *autem binas* C *&* H *erunt quæ ex* E F E D *ad quod ex* D F, *vt quæ ex* C *&* H *ad quod ex* A B. *Et viciſſim quæ ex* E F E D *ad quæ ex* C *&* H, *ſic quod ex* D F *ad quod ex* A B. *Atqui duplum poteſt* D F *dimetiens lateris* A B *octahedri eidem ſphæræ (ex hypotheſi)*

inſcripti, per decimamquartam decimitertij. Dupla itaque erunt quæ ex E F E D *eorum quæ ex* C & H. *Ac ideo vna* E D *vnius* H *potentia, per duodecimam quinti. Duplum igitur poteſt* E D *latus icoſahedri rectæ* H *minoris. Si ideo lateris octahedri potentia per binas rectas extrema & media ratione coniunctas exprimatur, latus, &c.*

Propoſitio decimaſeptima.

Si latus Dodecahedri & recta cuius, id eſt, minus ſegmentum, ad angulum rectum conſtituantur, ea quę dimidium poteſt rectę ſubtendentis angulum, eſt latus octahedri eadem ſphæra comprehenſi.



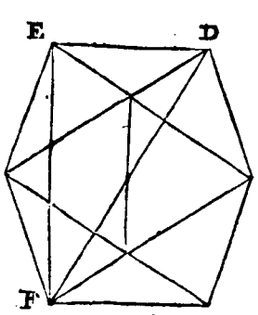
Eſto latus dodecahedri A B. *Recta verò cuius id latus eſt minus ſegmentum ſit* A G, *ſcilicet iungens oppoſita dodecahedri latera, per quartum coroll. decimæſeptimæ decimitertij, angulum rectum qui ad* A *componentes, iuncta* B G, *Poſsit autem dimidium rectæ* B G *recta* D, *per trigeſimamquartam ſexti: Dico rectam* D *latus eſſe octahedri eadem ſphæra comprehenſi. Quoniam recta* A G *efficit maius ſegmentum* G C *latus cubi eadem ſphæra comprehenſi, per idem quartũ corol. decimæſeptimæ decimitertij. Quæ verò ex tota* A G *& minori ſegmento* A B *tripla ſunt potentiæ maioris ſegmenti* G C, *per quartam decimitertij. Inſuper eiuſdem quod ex* G C *latere cubi triplum poteſt ſphæræ dimetiens, per decimamquintam decimitertij. Recta igitur* B G *dimetienti erit æqualis. Nam ea binas* A B A G (*per 47 primi*) *poteſt, ſiue ideo triplum rectæ* G C. *Atqui dimetientis dimidium poteſt latus octahedri eadem ſphæra concluſi, per 14 decimitertij. Rectæ autem* B G *dimidium potuit recta* D, *ex hypotheſi. Recta igitur* D (*dimidium eiuſdem dimetientis potens*) *erit latus octahedri. Si itaque latus dodecahedri & recta cuius, id eſt, minus ſegmentum ad angulum rectum, &c.*

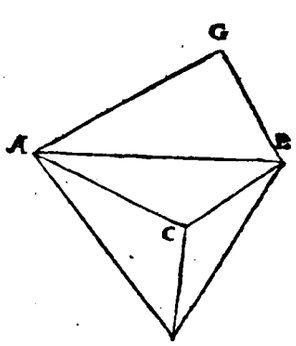
Corollarium.

Cuius rectæ latus octahedri ſeſquialterum poteſt, eiuſdem latus dodecahedri eidem ſphæræ inſcripti eſt maius ſegmentum. *Nam latus dodecahedri eſt maius ſegmentum ſegmenti* C G, *cuius* D *latus octahedri potuit ſeſquialterum, hoc eſt, dimidium potentiæ* B G, *quæ fuit ipſius* G C *tripla.*

Propoſitio decimaoctaua.

Si latus Pyramidis poſsit duas rectas extrema & media ratione coniunctas, latus Icoſahedri eadem ſphæra deſcripti ſeſquialterum poteſt minoris rectæ.





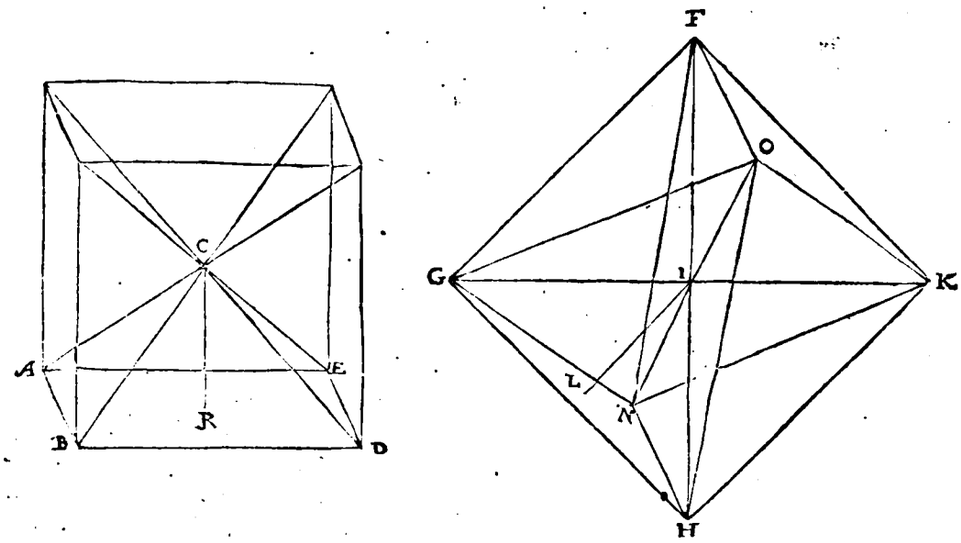
Eſto pyramis A B C, *latus autem* A B, *cuius potentia ſecetur in rectas* A G *&* G B *extrema & media ratione coniunctas, ſcilicet in* A G *totam, &* G B *maius ſegmentum, per coroll. 34 ſexti. Sit item* E D *latus icoſahedri* E D F *eadem ſphæra contenti. Recta verò ſubtendens angulum pentagoni ex lateribus icoſahedri deſcripti eſto* E F: *Dico* E D *latus icoſahedri ſeſquialterum poſſe minoris rectæ* G B. *Quoniam (per ea quæ demonſtrata ſunt decimaquinta huius) latus* E D *maius ſegmentum eſt rectæ* E F *angulum pentagoni ſubtendentis. Eſt autem ſicut* E F *tota ad* E D *maius, ſic idem maius ad minus, per 30 ſexti, & (per hypotheſim) recta* A G *fuit tota,* G B *verò maius ſegmentum. Erit ideo ſicut* E F *ad* E D *ſic* A G *ad* G B, *per ſecundam decimiquarti. Et*

viciſſim

vicißim E F *ad* A G *vt* E D *ad* G B. *Cùm autem* A B *binas* A G G B *poßit, ex hypotheſi, angulus* A G B *rectus erit, ex* 48 *primi. Rectus autem eſt* D E F, *per demonſtrata* 15 *huius. A Equiangula ideo erunt* A G B F E D *triangula, per ſextam ſexti. Eorum itaque proportionalia erunt latera* E D *ad* G B *vt* F D *ad* A B, *per quartam ſexti. Eſt autem (ex eiſdem demonſtratis)* F D *dimetiens ſphærà icoſahedrum ambientis. Quæ ſeſquialterum poteſt lateris* A B *pyramidis eidem ſphæræ inſcriptæ, per* 13 *decimitertij, ſeſquialterum igitur poterit* E D *latus octahedri, rectæ* G B *maioris ſegmenti, ſiue minoris rectæ. Si itaque latus pyramidis poßit duas rectas extrema & media ratione coniunctas, latus icoſahedri eadem, &c.*

Propoſitio decimanona.

Cubi ſuperficies ad Octahedri ſuperficiem eidem Sphęræ inſcripti, ſe habent vt ſolida.

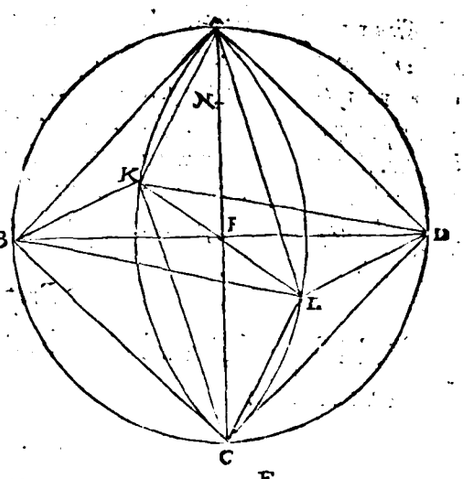


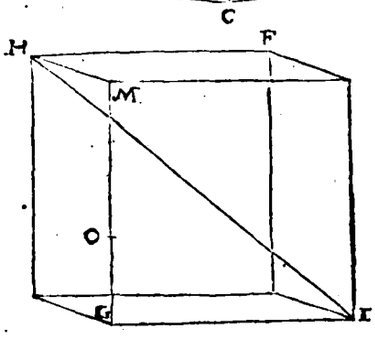
Eſto cubus A B C D E, *cuius quatuor dimetientes ſint* A C B C D C E C *vtrinque producti. Sit item octahedrum eidem ſphæræ inſcriptum* F G H K. *Cuius tres ſint dimetientes* F H G K O N: *Dico eſſe cubum* A B D *ad octahedrum* F G H, *vt cubi ſuperficies ad octahedri ſuperficiem. A centro cubi in baſim* A B E D *ſit perpendicularis* C R. *A centro verò octahedri in baſim* G N H *perpendicularis* I L. *Quoniam tres cubi dimetientes per centrum* C *tranſeunt, ex ſecundo coroll. decimæquintæ decimitertij, fient ex cubo ſex pyramides vt hæc* A B D E C *toti cubo æquales, cùm ſint cubi ſex baſes in quas æquales à centro perpendiculares cadent, per coroll. lemmatis decimæſextæ duodecimi, cum æqualibus in ſphæra circulis inſiſtant baſes. Cæterùm in octahedro tres dimetientes ſuper octo baſibus, octo conſtituunt pyramides verticem in centro habentes, per tertium coroll. decimæquartæ decimitertij. Baſes autem cubi & octahedri æqualibus in ſphærà continentur circulis, per* 13 *huius. Qui itaque æquè diſtant à centro, ac perpendiculares* C R I L *æquales erunt, per coroll. lemmatis decimæſextæ duodecimi. Erunt itaque pyramides cubi ſub eodem vertice cum octahedri pyramidibus, nempe ſub perpendiculari à centro in baſes. Pyramides igitur ſex cubi, ad octo pyramides octahedri ſub eodem vertice exiſtentes, ad ſe erunt vt baſes, per ſextam duodecimi, hoc eſt, vnica pyramis ſuper ſex cubi baſibus vertice autem perpendiculari, quæ ipſis ſex æquatur, per eandem, ad vnicam ſuper octo octahedri baſibus, ipſi octahedro æqualem, ac ſub eodem vertice, rationem habebit quam habent ſex cubi baſes, quæ totam implent cubi ſuperficiem, ad octo octahedri baſes totam octahedri ſuperficiem complentes. Earum etenim ſolida ad ſe ſunt vt baſes, ex eadem ſexta duodecimi. Cubi igitur ſuperficies ad octahedri ſuperficiem eidem ſphæræ inſcripti, ſe habet vt ſolida.*

Propoſitio vigeſima.

Si Cubus & Octahedrum eadem Sphæra comprehendantur, erit eorum ratio quæ lateris cubi ad ſemidimetientem Sphęræ.

Eſto octahedrum A E C D B *ſphæræ* A B C D *inſcriptum, cubus verò eidem ſphæræ inſcriptus eſto* F G H I M *cuius dimetiens ſit* H I *quæ quidem æquatur dimetienti* A C, *per decimamquintam decimitertij, dimetientis dimidia ſit* A E: *Dico eſſe cubum* F G H I M *ad octahedrum* A E C D B *ſicut latus* M G *ad*

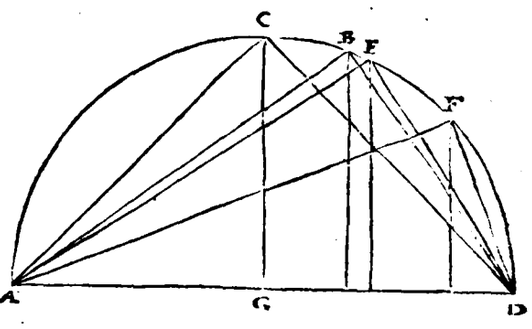




AE *ſemidimetientem. Cùm dimetiens* AC *poſsit duplum lateris* BK *octahedri, per decimã quartam decimitertij, triplum verò lateris cubi* MG, *per* 15 *eiuſdem, ſeſquialterum erit* BKDL *quadratum quadrati ipſius cubi* FM. *A recta* AE *ſecetur pars tertia* AN, *à recta* MG *ſimiliter tertia* GO, *per nonam ſexti. Duo igitur tertia rectæ* AE *erit* EN, *necnon* MO *rectæ* MG, *parallelepipedum igitur quod ſuper baſi* BKDL *vertice verò* EA, *triplum eſt eius quod ſuper eadem baſi, vertice autẽ* AN, *per coroll. trigeſimæ primæ vndecimi, ſed & triplũ pyramidis* ABKDL, *quæ ſuper iiſdem baſi & vertice, per corollariũ ſecũdum ſeptimæ duodecimi, pyramis itaque* ABKDL *æquàlis eſt parallelepipedo quod ſuper baſi ſua* BKDL, *vertice verò* AN *conſtituitur, per ſeptimam communem ſententiam. Eius porrò parallelepipedi duplum eſt quod ſuper eadem baſi* BKDL *duplo verò vertice* EN, *per corollarium trigeſimæ primæ vndecimi, pyramidis verò duplum eſt octahedrum* ABKDLC, *per corollarium ſecundum decimæquartæ decimitertij. Octahedrũ igitur* ABKDLC *æquũ eſt parallelepipedo ſuper baſi* BKLD, *vertice autem* EN *conſtituto, per decimamquintam quinti, ſed parallelepipedum quod ſuper baſi* BKDL, *ſeſquialtera baſi* FM, *vertice verò duobus tertijs* MO *lateris cubi* MG *continetur, æquum eſt cubo* FG, *per ſecũdam partem trigeſimæquartæ vndecimi, ipſi autem* FM *ſeſquialtera fuit* BKDL *baſis. Bina itaque parallelepipeda quod ſcilicet ſuper baſi* BKDL, *ſeſquialtera baſi ipſius cubi, vertice verò* MO *duobus tertijs lateris* MG *cubi, quod cubo fuit æquum, ac quod ſuper eadem baſi* BKDL *vertice autem* EN, *quod octahedro fuit æquum, ad ſe erunt vt vertices* MO *ad* EN, *per corollarium trigeſimæprimæ vndecimi, ac proinde ſicut vertices* MO *ad* EN *ſic erit cubus* FGHIM *ad octahedrum* ABKDLC, *per ſeptimam quinti, ſicut autem* MO *ad* EN *ſic tota* MG *ad totam* EA, *per decimamoctauam quinti, ſicut igitur* MG *latus cubi ad* EA *ſemidimetiẽtem, ſic cubus* FGHIM *ad octahedrum* ABKDLC *eidem ſphæræ inſcripta. Si itaque cubus & octahedrum eadem ſphæra comprehendantur, &c.*

Corollarium.

Quinque ſolidorum laterum potentias à dimetientis potentia diſtinguere.



Pyramidis & cubi latera ſecant potentiam dimetientis ſphæræ in binas rationem potentia duplam habentes, Octahedrũ in binas æquales, Icoſahedrum in binas duplam extremæ & mediæ rationem habentes, quarum minor eſt latus, Dodecahedrum verò in binas quadruplã extremæ & mediæ rationem habentes potentias, quarum minor latus eſt. Nam dimetiẽs ſphæræ AD *poteſt latus pyramidis* AB *& cubi* BD, *eiuſdem dimidium potentia, hoc eſt dimetientem, & latus baſis cubi, Octahedri verò bina poteſt* AC CD *æqualia ſphæræ dimetiens latera, Icoſahedri autem poteſt totam* AC *& eius maius ſegmentum* ED *latus, ex decimaquinta huius. Quare earũ potentiæ duplam rationem habentes quam latera, per primum corollarium vigeſimæ ſexti, duplam habent extremæ & mediæ rationem, dodecahedri autem poteſt dimetiens totam* AF *& eius minus ſegmentum* FD *latus, per eandem decimamquintam. Quare tota ad minus habens duplam extremæ & mediæ rationem, ſcilicet totius ad maius, per decimam diffinitionem quinti, efficit potentiarum rationem duplæ duplam, per idem primum corollarium vigeſimæ ſexti, quæ eſt extremæ & mediæ quadrupla, per quintam diffinitionem ſexti.*

MONITVM.

Hac itaque lege, data dimetiente ſphæræ dabitur cuiuſuis corporum inſcriptorum latus, eorum autem corporum cum tria habeant latera propoſitæ dimetienti potentia tantùm commenſurabilia, longitudine

gitudine verò nequaquam. Nam eorum potentiæ ſunt in ratione quadrati ad non quadratum, quare quadratorum rationem non habent, per corollarium vigeſimæquintæ octauæ, nec ideo latera longitudine commenſurabilia, per nonam decimi. Hæc de cauſa ſufficit potentias illorum laterum inter ſe conferre non autem longitudines, quæ quidem potentiæ reperiuntur in dimetientis potentia, ſcilicet à potentia dimetientis auferatur potentia cubi, ſupereſt pyramidis potentia, ſublata verò pyramidis relinquitur cubi, ſublata autem dimidia relinquitur octahedri lateris potentia, ſed quia dodecahedri latera ac icoſahedri ex ſe incerta (nam hoc minor ex decimaſexta, illud verò apotome, ex decimaſeptima decimitertij) probata ſunt, dimetienti propoſitæ certæ æquè longitudine & potentia ſunt incommenſurabilia, quare eorum affinitas nulla ratione numeris expreſſa diffiniri poteſt (per octauam decimi) nec inter ſe: nam ſunt incertarum diuerſæ ſpecies adinuicem incommenſurabiles, eò quòd ſi commenſurabiles eſſent, eiuſdem eſſent ſpeciei, per centeſimamtertiam & centeſimāquintam decimi, quod abeſt. Nos itaque potentiæ dimetientis ea conferre volentes, nec aptius quàm per rationes potentiam illam certam ac propoſitam per eorum latera ſecantes, exprimere viſum eſt, ſcilicet diuiſa dimetientis potentia per lineas rationem maioris ad minus ſegmentum habentes, illud minus latus eſſe icoſahedri, per rationem verò totius ad minus habentes, latus dodecahedri ſatis ſuperque expreſſum haberi, vt inter incommenſurabilia fieri licet.

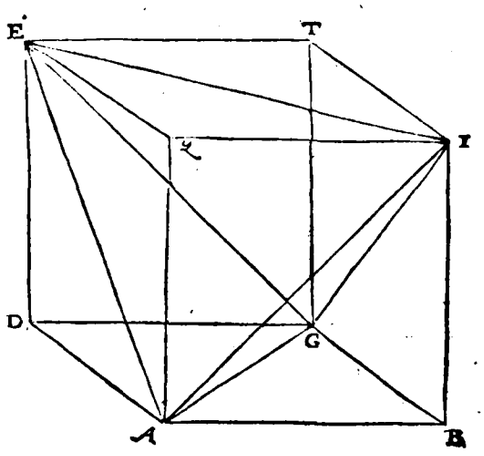
Cæterùm qui, vt ſæpius diximus, Euclidis reſtitutionem in priorē ſui ortus (aut pro viribus proximū) ſtatum reducere nitimur, id vnū his decimoquarto & decimoquinto vltimis elemētorum libris animaduerſione dignum arbitrati, cùm ad hos vētum eſt, comperimus Theonis cæptam operam ſubiiſſe (vt fertur) Ypſiclem, Campanum autem in omnes ſua dilataſſe expoſita. Ypſiclis attamē parcitas Campani luxum comitans, veriſimilis ab Euclide cæpti, videntur intelligētia caruiſſe. Nimirum vt verior elementorum ordo expoſtulat, poſt eidem ſphæræ inſcripta decimotertio quinque corpora, conſequens erat Euclidem decimoquarto affinitates ſeu eorum reſpectus per latera, baſes, aut angulos depromere, vt teſtari cæperant 4 & corollar. 3 & 4 Ypſiclis, Campani autem 8 9 10 14 17, quibus quatuor corporum conferētias, ſcilicet icoſahedri ad dodecahedrum, & cubum, octahedri verò ad cubum & pyramidē tantùm deſignantes, per latera circunferentias vel ſolida, ſex reliquarū obliti quæ optatum denarium conferentiarum complerent numerum, haud ſecus quàm decimoquinto optantes 20 inſcriptiones, Ypſicles 5, Campanus 12 tātùm ab Euclide ſe recepiſſe dixerunt: hic 8, ille verò 15 poſteris relinquens demonſtrandas. Nos idcirco geometrici cultus auidi, quæ decimoquarto competunt adiicientes, reliquas ſex conferentiarum demonſtrationes perfecimus: quarum tres tantùm decimoquarto apponendas rati, reliquas totidem noſtro decimoſexto aptiores diſtulimus, ſcilicet dodecahedri ad cubum & pyramidem cubique ad pyramidem. Hæc nanque licet eadem capiantur ſphæra, vt decimotertio patuit, quia nihilominus eadem ſibiipſis inſcribuntur, vt proximo decimoquinto dicemus, inuariata eorum quantitate aut ratione. Nempe cubus & pyramis dodecahedro, pyramiſque rurſus cubo, duplicem eorum conferentiam vitantes, ſoli decimoſexto illas competere viſum eſt, mutuas inſcriptionum cōferentias exponenti. Nam ſicuti decimoquarto corpora eadem ſphæra decimotertio concepta cōtulimus, non ſecus decimoquinto inſcripta, inter ſe conferēda decimoſexto veniūt, ne Euclidis tam fauſtè cæptus elegans elementorum ordo, noſtra depereat incuria.

LIBRI DECIMIQVARTI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO-num restitutarum Liber decimusquintus.

Propositio prima. *Problema primum.*

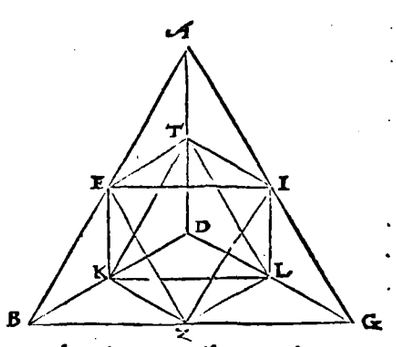
IN dato cubo, trilateram æquilateram Pyramidem describere.



Exponatur cubus ABGDZITE, *& ducantur ab vno eius angulo basium dimetientes* EA EG EI *coniunctis* AG AI GI, *Perspicuum est quatuor triangula* AEG AEI AGI *&* GEI *æquilatera esse, cùm ex æqualium quadratorum dimetientibus fiant. Ab vno igitur triangulo* AGI *à tribus cubi angulis ducto, tria cõstituũtur triangula* AEG AEI, *&* GEI *ad vnũ signũ* E (*angulũ scilicet cubi*) *æquilatera. Pyramis itaq; trilatera & æquilatera erit* AGIE *solidum, per decimam diffinitionem vndecimi, cubo* ABGDZITE *inscripta, per vigesimamsextam diffinitionem eiusdem. In dato igitur cubo, &c.*

Propositio secunda. *Problema 2.*

In data trilatera æquilatera Pyramide, Octahedrum describere.



Esto pyramis trilatera æquilatera ABGD, *cuius latera secentur bifariam in* EZIKLT, *cõiunctis* EZ ZI IE KL LT TK EK KZ ZL LI IT TE, *rectis duodecim: quæ quidem (per quartam primi) sunt æquales. Nam subtendunt pyramidis basium planos æquales angulos, æquis lateribus (nempe laterum pyramidis dimidiis) comprehensos. Triãgula igitur æquilatera erunt* TKL TLI TIE TEK, *&* ZKL ZLI ZIE ZEK, *solidum* TKLEZI *concludentia. Quod igitur octahedrum erit, per vigesimamsecundam diffinitionem vndecimi, cuius quidem anguli tangunt pyramidis* ABGD *latera insignis* EZITKL, *ipsi igitur pyramidi inscriptum erit octahedrum. In data itaque trilatera, &c.*

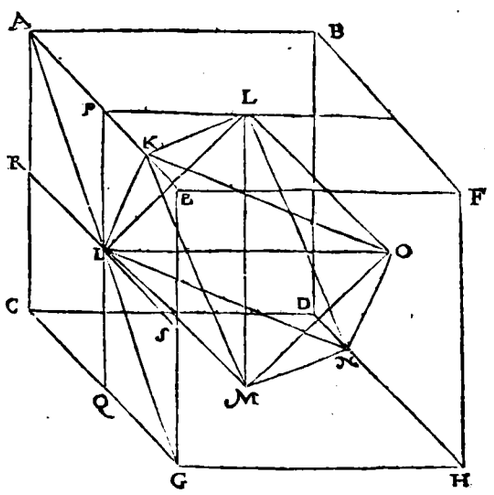
Corollarium.

Hinc subest Pyramidem secari bifariam, tribus quadratis æqualibus Octahedrum bifariam secantibus, & sese ad rectos dispescentibus. *Nam tres eorum dimetientes, in centro bifariam sese ad rectos secant, per tertium corollarium decimæquartæ decimitertii. Quæquidem quadrata vt* EKLI *discernunt pyramides & prismata, scilicet* KLTD *pyramidem &* KLTEIA *prisma, ab* EKZB *pyramide, &* EKZILG *prismate, quæ sibi sunt æqualia, per tertiam duodecimi, haud secus efficiũt reliqua* KZITac ZLTE *quadrata, octahedrum bifariã secantia, ex corollario secundo decimæquartæ decimitertii.*

Propositio tertia. *Problema 3.*

In dato cubo, Octahedrum describere.

Sumatur



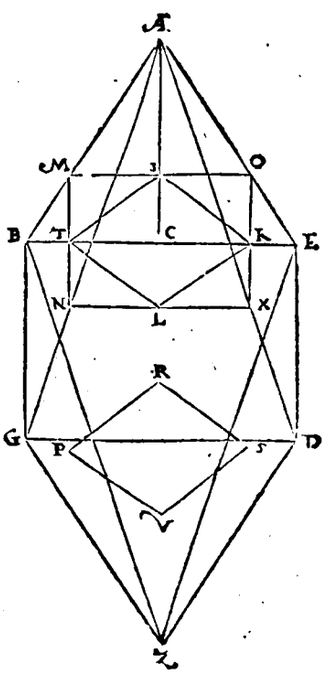
Sumatur cubus ABCDEFGH, *cuius secentur singula latera bifariam, ductis rectis sectiones coniungentibus, vt* PQRS, *quæ æquales erunt lateri cubi, per 33 primi, ac sese bifariam secabunt in medio dimetiente* AG *in signo* I, *per corollarium 34 primi. Quod igitur erit cẽtrum basis cubi, sint aliarum basium centra eadem lege comperta* KLONM, *coniunctis* LI IM MO OL KI KL KM KO *&* NI NL NM NO, *quoniam rectus est angulus* IPL, *cùm parallelæ sint* IP PL *ipsis* RA AB, *per decimam vndecimi quem subtendit* IL *recta, dimidia scilicet cubi latera angulum* IPL *rectum continentia, similiter* IM *angulũ subtendens* IQM *eidem* IPL *æquum & æqualibus rectis cõprehensum, non aliter & reliquæ* MO OL KI KL KM KO NI NL NM NO *eidem angulo* IPL *æquales, & æquis lateribus comprehensos subtendent, quæ ideo (per quartam primi) æquales rectæ erunt. Triangula itaque* KLI KLO KMI KMO *&* NLI NLO NMI NMO *æquilatera & æqualia erũt, solidũ* IKL ONM *concludentia, quod igitur octahedrum erit, per vigesimam secundam diffinitionem vndecimi. Cùm autem eius anguli simul bases insignis* IKLONM *ipsum cõtinentis cubi tangant, sequetur octahedrum ipsi cubo inscriptum esse, per vigesimam sextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque cubo octahedrum descripsimus.*

Corollarium.

Rectæ basium oppositarum cubi centra coniungentes, bifariam & ad rectos in centro cubi (siue Sphæræ eum continentis) sese secant. *Cùm enim angulos octæhedri cubo inscripti rectæ* LM IO *centra coniungẽtes nectant, sequetur (ex corollario tertio decimæquartæ decimitertii) ipsas in signo sese bifariam secare, sed & dimetientes cubi bifariam secant, per 39 vndecimi: illud igitur signum centrum erit sphæræ cubum continentis. Nam centro signo, interuallo verò aliqua ex semidimetientibus, sphæra ducetur per cubi angulos, interuallo autem dimidia* LM *sphæra, haud secus per octahedri angulos ducetur.*

Propositio quarta. Problema 4.

In dato octahedro, cubum describere.

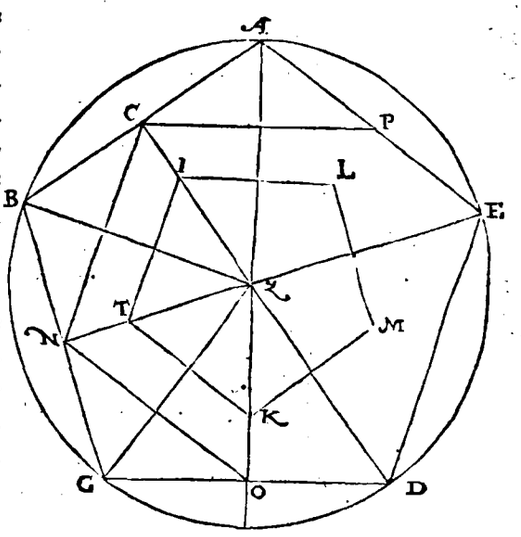


Sit octahedrum ABGDEZ. *Sintq; binæ eius pyramides* ABGDE *&* ZBGDE. *Ipsius verò pyramidis* ABGDE. *Sumantur centra triangulorum, hoc est, circulorum triangula continentium, quæ sint* TIKL. *Per ea centra parallelæ ducantur lateribus quadrati* BGDE, *rectæ* MTN NLX XKO *&* OIM, *quæ cum secent proportionaliter rectas æquales* AB AG AD AE, *per secundam sexti, ipsæ concurrent in signis* MNXO. *AEquales igitur erũt (per quartam primi) rectæ* MN NX XO OM, *angulos qui ad* A *æquales & æquis lateribus contentos subtendentes. Et insuper cum sint parallelæ ipsis* BG GD DE EB *quadratum efficientibus, & ipsæ quadratum efficient* MNXO, *per decimam vndecimi, & ipsi* BGDE *parallelum, per* 15 *eiusdem. Nam omnes sunt tangentes sese in segmentis. A centris autem* TIKL *ducantur rectæ* TI IK KL LT. *Coniungatur verò* AIC *recta. Cùm trianguli æquilateri* ABE *centrum sit* I, *recta* AI *bifariam secat* BE *rectam, per coroll. duodecimæ decimitertij. Quia verò parallela* MO *ipsi* BE *aufert triangulum* AIO *simile toti* ACE, *per coroll. secundæ sexti. Recta* MO *bifariam secta erit in* I, *per quartam sexti, similiter bifariam sectas esse* MN NX XO *ostendemus, in* TLK. *Quare & similiter rursus bases* TI IK KL LT, *æquos angulos rectos, & æquis lateribus comprehensos, qui ad* M O X N

ſubtendentes, æquales erunt. Cæterùm quia iſoſcelis T I M *trianguli, qui ad baſim* M T I M I T *ſunt æquales anguli, per quintam primi, rectus autem fuit qui ad* M *dimidium recti igitur efficient ſingulí* M I T *vel* M T I, *per coroll. 32 tertij. Haud ſecus æquales erunt* O I K O K I. *Et igitur reliquus* T I K *rectus erit, per 13 primi. Rectæ enim* T I *&* K I *ſuper ipſam* M O *conſiſtunt, eodem argumento recti oſtendentur* I K L K L T L T I *reliqui anguli, & in eodem ipſius* M N X O *plano conſtituti, per ſeptimam vndecimi. Planorum igitur triangulorum angulum ſolidum qui ad* A *conſtituentium centra coniungentes rectæ, quadratum* I T K L *efficiunt. Similiter oſtenditur reliquorum quinque octahedri ſolidorum angulorum qui ad* B G Z D *&* E *plana triangula, in ſuarum baſium centris quadrata ſuſcipere, quæ quidem numero ſex erunt, cùm ſint ſex ſolidi octahedri anguli, & æqualia: nam eorum latera æquales inclinationum angulos æquis lateribus comprehenſos, nempe eis quæ à centro in latus triangulorum æqualium comprehendunt, per coroll. ſecundum decimæoctauæ decimitertij. Erit* I T K L R Ē V S *itaque cubus, per vigeſimamprimam diffinitionem vndecimi, angulos in octo baſium octahedri centris habens, ideóque in eo deſcriptus. In dato itaque octahedro cubum deſcripſimus, &c.*

Propoſitio quinta. Problema 5.

In dato Icoſahedro, Dodecahedrum inſcribere.



Proponatur icoſahedrum, cuius aliquis ſolidorum eius angulorum ſit Z. *Quoniam (per ea quæ 16 decimitertij oſtenſa ſunt) triangulorum angulum icoſahedri efficientium baſes, pentagonum circulo inſcriptum efficiunt, ſit illud* A B G D E, *ex quinque triangulorum baſibus, quorum reliqui plani anguli angulum* Z *ſolidum componunt deſcriptum. Suſcipiantur autem centra circulorum triangula quinque prælibata continentium, quæ ſint* I T K M L, *coniunctis* I T T K K M M L L I. *A ſigno autem* Z *in planum pentagoni* A B G D E *demiſſa perpendicularis, in centrum circuli ipſum* A B G D E *capientis cadit, per demonſtrata eadem decimaſexta decimitertij. Ab ipſo verò centro perpendiculares in latera pentagoni* A B G D E *demiſſæ in* C N *&* O, *bifariam ſecant rectas* A B B G G D, *per tertiam tertij. Iungantur rectæ* C N N O, *quæ cùm ſubtendant pentagoni angulos* C B N N G O *æquis lateribus contentos, æquales erunt, per quartam primi. Itidem à ſigno* Z *perpendiculares in eaſdem* A B G D E *baſes fiant, ipſas ſimiliter bifariam ſecabunt, per tertiam tertij. Nam perpendiculares per centrum tranſeunt, per coroll. duodecimæ decimitertij. Ipſæ itaque in ſigna* C N O *cadent. Cùm autem æquales ſint* Z I I C *rectis* Z T T N *&* Z K K O, *ex ſimilitudine æqualium triangulorum parallelæ erunt* I T *&* C N, *per ſecundam ſexti, necnon* T K N O, *anguli itaque* I T K C N O *æquales erunt, per decimam vndecimi. Quia rurſus iſoſcelia ſunt triangula* C B N N G O. *Anguli* B C N B N C *æquales erunt, ac eiſdem* G N O G O N, *æqualium & ſimilium triangulorum anguli, per quintam primi. Sed tres* B N C C N O O N G *anguli, binis rectis ſunt æquales, cùm ſuper rectam* B G *conſiſtant, per 13 primi. Trianguli verò tres* B N C B C N (*vel* G N O) *&* N B C *binis item rectis ſunt æquales, per 32 primi. Ipſis* B N C *&* G N O *ablatis, reliquus* C N O *reliquo* C B N *æquus erit, & proinde eidem* C B N *æquus erit reliquus* I T K, *qui igitur pentagoni angulus erit, ſimiliter oſtendentur reliqui* T I L I L M L M K M K T *reliquis* B A E A E D E D G D G B *æquales eſſe. Quinquangulum igitur erit* I T K M L *æquilaterum & æquiangulum, per quartam primi. Subtendunt enim baſes pentagoni* I T K M L *æquales, angulos æquos qui ad* Z *æquis lateribus comprehenſos. Præterea in eodem plano eſſe quinquangulum* I T K M L *patet. Cùm anguli* O N C N C P *in eodem ſint plano* A B G D E. *Eidem verò plano parallela ſint angulorum* K T I T I L *plana, per 15 vndecimi. Concurrunt autem* K T I *&* T I L *triangula. Ipſa igitur in eodem ſunt plano, per coroll. 16 vndecimi. Similiter oſtendemus* I L M L M K M K T *in eodem reliquorum* K T I *&* T I L *plano eſſe. Angulum igitur icoſahedri qui ad* Z *ſolidum ſubtendit pentagonum æquilaterum & æquiangulum planum, & in centris triangulorum angulum* Z *conſtituẽtium habens angulos planos. Similiter igitur*

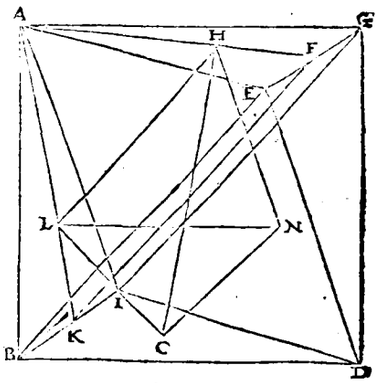
tur oſtendemus reliquos vndecim icoſahedri ſolidos angulos, æquos & ſimiles ipſi z (per decimam ſextam decimitertij) ſubtenſos eſſe ſimilibus & æquis pentagonis, & ſimiliter conſtitutis ipſi ITKML. *Quorum cùm communia latera ſint rectæ centra baſium icoſahedri coniungentes, ſequetur duodecim illa pentagona ſolidum concludere, quod ideo dodecahedrum erit, per 23 diffinit. vndecimi. Icoſahedro cuius quinque latera pentagono* ABGDE *concipiuntur deſcriptum. In dato itaque icoſahedro dodecahedrum inſcripſimus.*

MONITVM.

Hactenus quæ ab Euclide tradidit Ypſicles diximus, quinque ſcilicet problemata eouſque ſuccincta vt obſcuriora euaſerint, quorum ideo demonſtrationes variare cogimur, maximè huius quintæ præcipuam partem à Campano relictam, ab Ypſicle verò nõ plenè oſtenſam, ſcilicet conſtructum pentagonum in eodem degere plano, præcipuum inquam ſolidis conſtruendis probandum, eorum facies planas eſſe. Præterea quæ demonſtrat Ypſicles ea ſæpius arte tradit qua effectum proponens cauſam recludit, ac ſi ab quodam auditum receperit effectum qui cauſam ignoraret, non tamen ideo Ypſiclem magni nominis virum id ignoraſſe dicemus, ſed forſan quadam incuria aut temporum iniuria veluti ſi ignoraſſet ad vos peruenisſe. Quæ vt clarius reſonemus in prolixitatis quandam nos perduxerunt ſpeciem.

Propoſitio ſexta. Problema 6.

In dato Octahedro, Pyramidem trilateram æquilateram figurare.



Eſto propoſitum octahedrum ABGDEI, *cui inſcribenda ſit pyramis, ſumantur octahedri quatuor baſes, hoc eſt tres infimã* EGD *ambientes, hæ quidem* AEG BED *&* IGD, *quarta inſuper infimè oppoſita* AIB, *earum autem centra* HCNL, *ſuper triangulo* HCN *conſtruatur pyramis* HCNL, *quoniam baſes octahedri* AGE ABI *concidunt in rectas* EGBI, *quæ opponuntur in quadrato* GEBI *octahedri, mittantur à ſigno* A *per baſium centra* HL *perpendiculares* AHF ALK *eas ſecantes in* F *&* K *bifariam, per corollarium duodecimæ decimitertij. Recta igitur* FK *ſectiones iungens parallela erit & æqualis octahedri lateribus* EBGI, *per trigeſimamtertiam primi, rectáque* HL *ſecans latera* AF AK *æqualia proportione (namque* AH *&* AL *ex centris circulorum æqualium prodeunt) parallela erit rectæ* FK, *per ſecũdam ſexti, necnõ octahedri* EBGI *lateribus, per nonam vndecimi. Erit ideo* AF *ad* AH *vt* FK *ad* HL, *per quartam ſexti, ſunt enim ſimilia* AFK *&* AHL *triangula, per corollarium ſecundæ ſexti, ſed* AF *ſeſquialtera eſt rectæ* AH, *nam latus* EG *efficit* HF *dimidiam rectæ* AH, *per corollarium duodecimæ decimitertij, rectæ igitur* HL *ſeſquialterum erit* FK *vel* GI *latus octahedri. Hac arte reliquarum* HN NC CL LN CH *rectarum pyramidem* HNCL *componentium, latera octahedri ſeſquialtera eſſe docebimus, & proinde rectas æquales eſſe, ac ideo ex ipſis deſcripta triangula* HCN HNL NCL *&* CHL *pyramidem* HNCL *componentia, æqualia & æquilatera eſſe, quæ cùm angulos* HCNL *in centris baſium octahedri terminet, eidem octahedro inſcripta erit, per vigeſimamſextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque octahedro pyramidem trilateram, &c.*

Corollarium.

Pyramidis octahedro inſcriptæ baſes, baſibus octahedri ſunt parallelæ. *Cùm enim latera baſis pyramidis ſeſe tangentia, lateribus octahedri ſeſe tangentibus ſint parallela, vt fuit* HL *lateri* GI, *parallela ſunt per ipſis plana, per decimamquintam vndecimi.*

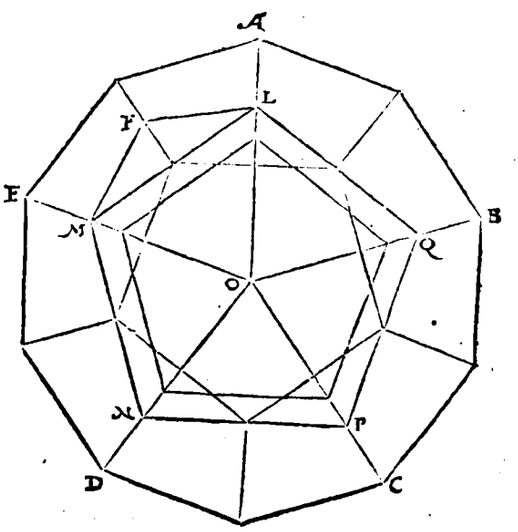
Corollarium ſecundum.

Recta coniungens centra oppoſitarum octahedri baſium, ſeſquialtera eſt perpendicularis ab angulo inſcriptæ pyramidis in baſim. *Cùm enim pyramis & eam continens cubus ad eadem ſigna terminent angulos, ex prima huius, vtraque eodem claudentur octahedro per quartam huius.*

At cubi dimetiens centra baſium oppoſitarum octahedri iungit, & proinde eſt dimetiens ſphæræ cubum & cubo inſcriptam pyramidem continentis, per decimamtertiam & decimamquartam decimi tertij, quæ dimetiens ſeſquialtera fuit eius quæ ab angulo in baſim perpendicularis in pyramide miſſa eſt: nam quæ à centro in baſim ſexta fuit dimetientis, per corollarium tertium decimætertiæ decimitertij. Qualium igitur dimetiens fuit ſex earum perpendicularis erit quatuor.

Propoſitio ſeptima. Problema 7.

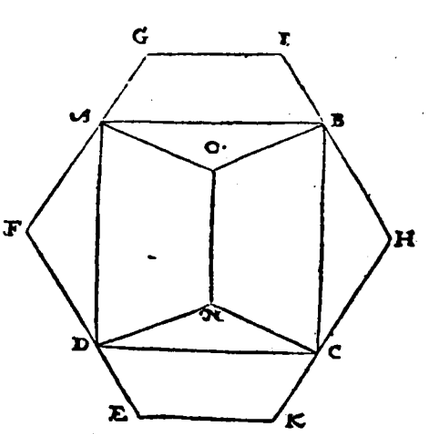
In dato Dodecahedro, Icoſahedrum conſtituere.



Eſto dodecahedrum ABCDE, *circulorum verò ſex eius baſes continentium, ſint centra* LMNPQO *quæ coniungantur rectis* OL OM ON OP OQ, *& reliquis* LMNPQ, *cùm pentagona æqualia & æquilatera circulis contineantur æqualibus, à centro eorum in latera demiſſæ perpendiculares æquales erũt, per decimamquartam tertij, & bifariam ſecabunt dodecahedri latera, per tertiam eiuſdem. Concurrent itaque præfatæ perpendiculares in ſigno bifariæ ſectionis, vt* LF MF, *ſed & angulos æquos ſuſcipiunt, nempe inclinationem baſium dodecahedri, per ſecundum corollarium decimæoctauæ decimitertij, ſubtenſæ igitur* LM MN NP PQ QL *& reliquæ bina baſiũ centra cõiungentes æquales erunt, per quartã primi. Triãgula igitur* OLM OMN ONP OPQ OQL *& reliqua, ſimiliter à centris pentagonorũ orta, erunt æquilatera & æqualia: quia verò dodecahedri duodecim pentagonorũ ſexaginta ſunt anguli plani, quorum terni quique ſingulos dodecahedri ſolidos efficiunt angulos. Sumemus hinc viginti dodecahedri ſolidos eſſe angulos, ſed eorum ſingulos ſubtendunt ſingula icoſahedri triangula, quæ ſcilicet pentagonorum (angulum ſolidum componentium) centra coniungũt, vt patuit, viginti igitur triangula æqualia & æquilatera, viginti ſolidis dodecahedri angulis ſubtenſa, communia inter ſe latera à centris pentagonorum ducentia, icoſahedrum component, per vigeſimãquartam diffinitionem vndecimi, propoſito dodecahedro inſcriptum, per vigeſimamſextam diffinitionẽ eiuſdem, cùm anguli ſimul baſes dodecahedri ſimul tangant. In dato itaque dodecahedro icoſahedrum conſtituimus.*

Propoſitio octaua. Problema 8.

In dato dodecahedro, cubum includere.



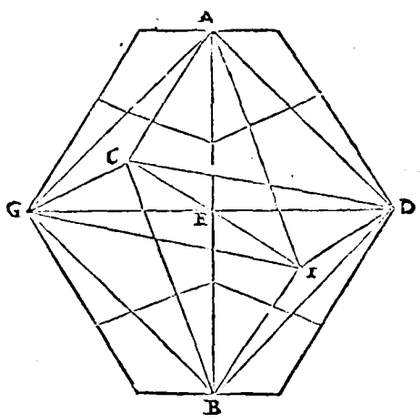
Deſcribatur (ex decimaſeptima decimitertij) dodecahedrum, & ex eadem ſumantur duodecim cubi latera, quæ ſingula ſubtendant duodecim dodecahedri baſium ſingulos angulos: nam cubi latus angulum huius pentagoni ſubtendit, per corollarium ſecundum decimæſeptimæ decimitertij. Si igitur dato (ex eadẽ decimaſeptima) dodecahedro duocim duxerimus ſubtenſas, octo dodecahedri angulis terminatas, ſimiliq; ſitu cohærentes, vt ibidem patuit, manifeſtum erit huic dato dodecahedro ab eiſdem eius angulis ductas rectas præfatum cubum deſignare, qui ideo in dodecahedro incluſus erit, cùm cubi latera in baſibus, & anguli in dodecahedri ſedeant angulis, per vigeſimamſextam diffinitionem vndecimi, ſumptis nanque quatuor dodecahedri pẽtagonis AGIBO BHCNO CKEDN *&* DFAON, *iungantur rectæ* AB BC CD DA, *quæ ideo quadrilaterum æquilaterum efficient, cũ ſingulæ rectæ æquos*

æqualium

æqualium pentagonorum ſubtendunt angulos, rectos verò vt oſtendimus dodecahedrum præfata decimaſeptima conſtruentes. Sex itaque baſes quadratæ cubum (ex vigeſimaprima diffinitione vndecimi) conſtituunt, cuius octo anguli in octo dodecahedri angulis cohærentes cubum dodecahedro inſcriptum (ex vigeſimaſexta diffinitione vndecimi) perhibent. In dato itaque dodecahedro cubum incluſimus.

Propoſitio nona. *Problema 9.*

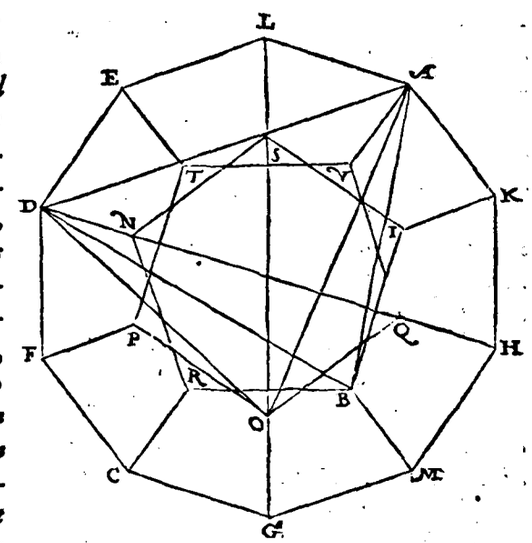
In dato Dodecahedro, Octahedrum concludere.



Eſto propoſitum dodecahedrum ABGDE, *cuius ſumantur (ex tertio corollario decimæſeptimæ decimitertij) ſex latera inter ſe oppoſita, quorum bifarias ſectiones, iungunt tres rectæ ſe ad centrum ſphæræ dodecahedrum ambientis bifariam & ad rectos ſecantes, quæ ſint* AB GD CI *centrum verò* E. *Cùm ideo (per præfatum corollarium) tres illæ rectæ ſint æquales, ſequetur (ex quarta primi) ſubtendentes illarum dimidias angulos rectos continentes, quæ ſunt* AG GB BD DA CA CG CB CD *&* IA IG IB ID *æquales eſſe. Ac proinde octo triangula* CAG CGB CBD CDA IAG IGB IBD *&* IDA *æqualia & æquilatera eſſe, & ideo octahedrum eſſe* AGBDCI, *per vigeſimamſecundam diffinitionem vndecimi. Quod ea de cauſa dodecahedro inſcriptũ erit, quod eius anguli ſimul latera dodecahedri ſimul tangant, per vigeſimamſextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque dodecahedro octahedrum concluſimus.*

Propoſitio decima. *Problema* 10.

In dato Dodecahedro, Pyramidem trilateram æquilateram inſcribere.



Eſto dodecahedrum ABCD, *cuius ſumãtur tres baſes ad ſignum* S *concurrentes,* ALSIK DNSLE *&* SIBRN, *ex quibus ſumantur tres anguli qui ad* ABD, *coniunctis* AB BD DA, *dimetiens autem ſit* SO, *coniunctis* AO BO DO *rectis: quoniam dodecahedri anguli in ſphæræ circunſcribentis ſuperficiæ conſiſtunt, per decimamſeptimam decimitertij, ſuper dimetiente* SO *per ſignum* A *ſemicirculus ductus, efficit angulum* SAO *rectum, per trigeſimãprimã tertij, ſimiliter per ſigna* DB *ductus ſemicirculus efficit angulos* SBO SDO *rectos, ex eadẽ, dimetiẽs itaque* SO *vtraſque* SA AO *vel* SB BO *aut* SD DO *poteſt, per quadrageſimamſeptimam primi, æquales autem ſunt* SA SD SB, *angulum æqualium pẽtagonorum ſubtendentes. Reliquæ igitur* AO BO DO *erunt æquales, haud ſecus patebit dimetientem* HD *binas poſſe* HA *ſubtendentem &* AD *rectam, necnon binas* HB *ſubtendentem &* BD *rectam, dimetientem demũ* AC *binas ſubtendãtem* CB *& reliquam* BA, *quare ablatis ſubtendentibus reliquæ* AB BD DA AO BO DO *æquales erunt rectæ. Ac ideo ex ipſis triangula* ABD AOB AOD *&* BOD *æqualia & æquilatera, pyramidem* ABDO *component, à baſi* ABD *ad ſignum* O *conſtitutam, cuius ſinguli qui ad* ABDO *anguli, ſingulos dodecahedri ad eadem ſigna conſtitutos tangunt angulos, quare dodecahedro inſcripta dicetur pyramis, ex vigeſimaſexta diffinitione vndecimi. In dato igitur dodecahedro pyramidem trilateram æquilateram inſcripſimus.*

Propositio vndecima. *Problema* 11.

In dato Icosahedro, cubum designare.

Patuit septima huius dodecahedri angulos, basium icosahedri centra possidere: atqui octaua huius ostensum est cubi angulos in dodecahedri angulis quiescere. Idem itaque cubi anguli in centris basium icosahedri necessariò collocãtur. Cubus itaque icosahedro hac de causa inscriptus erit, ex 26 diffinitione vndecimi. In dato igitur icosahedro cubum designauimus.

Propositio duodecima. *Problema* 12.

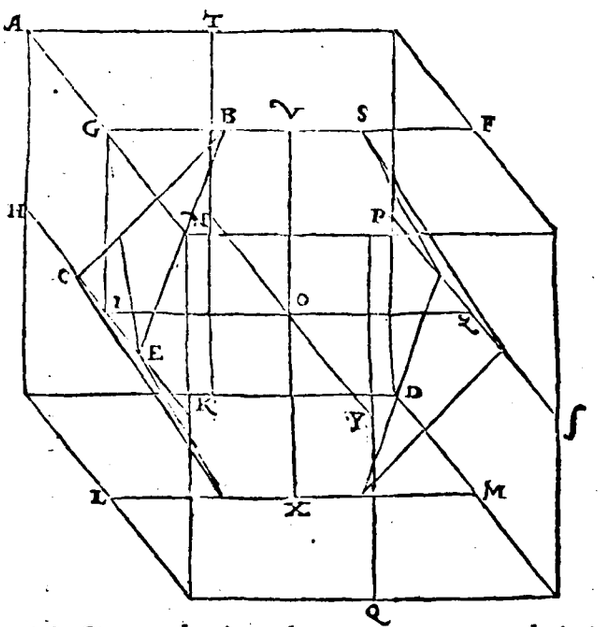
In dato icosahedro, pyramidem trilateram æquilateram collocare.

Simili via quæ proximè diximus. Nam proxima patuit cubum suiipsius angulos in cẽtris basium icosahedri collocare, in cubi verò quatuor angulis, quatuor pyramidis angulos sedere diximus prima huius. Perspicuum itaque relinquitur, pyramidem à rectis hæc quatuor basium icosahedri centra coniungẽtibus descriptam, eidem icosahedro inscriptam esse, ex vigesimasexta diffinitione vndecimi. In dato igitur icosahedro pyramidem trilateram æquilateram collocauimus.

HACTENVS QVÆ PARTIM A MAioribus ex decimoquinto Elementorum recepimus, Subsequuntur autem quæ relicta erant perficienda.

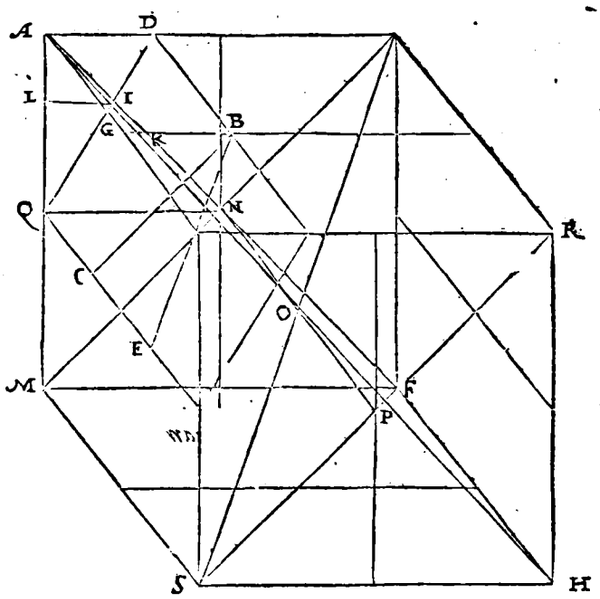
Propositio decimatertia. *Problema* 13.

Proposito cubo, dodecahedrum inscribere.

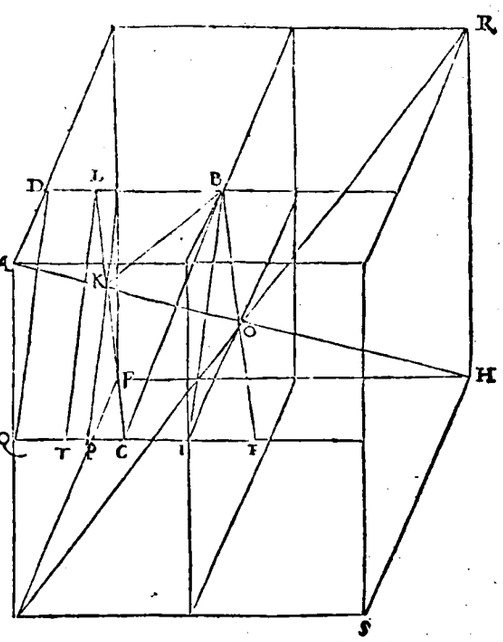


Proponatur cubus ADFL *cuius secentur singula latera bifariam in signis* THKP GLMF PKQS, *cõiunctis* TKGF PQHK PSLM *rectis, quæ rursus bifariam secentur in signis* NVYIZX, *cõiunctis* NYVX *&* IZ *rectis: quoniam tres* NYVX *&* IZ *rectæ seſe cum dimetiente bifariam secant in centro, per trigesimamnonam vndecimi, sit illud* O. *Ne diutius autẽ demõstranda protrahamus, sciãtur omnes hæ rectæ lateribus cubi æquales & parallelæ, seſeque ad rectos cõnexas esse, per vigesimamnonam primi. Secentur dimidiæ earum scilicet* FV GV HI XI, *& similes extrema & media ratione, quarum maiora segmenta sint* FS GB HC KE, *per* 30 *sexti, iunctis* GI GE BC BE *rectis. Quoniam* GI *est æqualis toti* GV *dimidio cubi lateri. Recta verò* IE *rectæ* BV *minori segmento æqualis est, quadrata ex* GI IE *tripla sunt quadrati quod ex* GB, *per quartam decimi tertij, eis verò quæ ex* GI IB *æquum est quod ex* GE *per* 47 *primi, rectus quippe est* GI E *angulus. Quod igitur ex* GE *triplum est eius quod ex* GB, *quia verò recta est* FG *ad planum* AGKL, *per quartam vndecimi, cùm sit recta ad binas* AG GI, *angulus* BGE *rectus erit: nam* GE *est in plano* AGKL. *Recta itaque* BE *binas* BG GE *potens per* 47 *primi, quadruplum rectæ* BG *poterit, eiusdem enim* GB *triplum potuit* GE, *dupla igitur lõgitudine erit* BE *rectæ* GB, *per vigesimam sexti. Dupla autem fuit (ex constructione)* CE *rectæ* IE: *erunt igitur sicut* GB *ad* IE *dimidiæ, sic* BE *ad* CE *duplæ, per decimã quintam quinti: recta igitur* CE *erit maius segmentum rectæ* BE *extrema & media ratione sectæ. Cùm autem idem ostendi possit in recta* BC *binæ* BE BC *sunt æquales, isosceles triangulum* BEC *constituen-*

ſtituentes. Oſtendamus pentagoni dodecahedri tres angulos eſſe BCE, *Reliquos verò inter* BC *&* BB *conſtitui.*



Quoniam circulus continens triangulum BCE *circunſcribit pentagonum, cuius latus eſt* CE, *per vndecimam quarti, extendatur planum trianguli* BCE *per parallelas* DB QE, *ſecans dimetientem baſis cubi* AF *in* I, *dimetientem verò cubi* AH *in* K, *fiat autẽ lateri* AD *parallela per* I *recta* IL. *Quoniam triangulum* ALI *tollitur à triangulo* AMF *parallela* LI *ſimile toti, per coroll. ſecundæ ſexti, æquales erunt* AL LI *rectæ, ſicut autem* QA *ad* AD *ſic* QL *ad* LI, *per ſecundam ſexti, vel ad* LA *æqualem illi. Sed dimidij lateris ſcilicet* QA *maius ſegmentum fuit* AD, *hoc eſt,* GB *ipſi* AD *æqualis, per 33 primi. Rectæ igitur* QL *maius ſegmentum erit* LA, *Sicut autem tota* QL *ad maius, ſic erit maius idem* QL *ad minus* LA, *per 5 decimitertij. Recta igitur* QA *ſecta eſt in* L. *In triangulo verò* AQN, *recta* NA *quæ ex centro baſis* AF *ſimiliter ipſi* AQ *ſecatur in* I, *per parallelam* LI, *ex eadem ſecunda ſexti: nam* QN MF *ſunt parallelæ, per conſtructionem. Recta igitur* NA *extrema & media ratione ſecta eſt in* I, *per planum* DBEQ. *Cæterùm quoniam parallela eſt* PON *centra baſium oppoſitarum cubi iungens, rectæ* QE. *Per eam* PON *ductum planum parallelum plano* DBEQ, *bina plana ſecabunt rectas* AO AN *in* K *&* I, *in eaſdem rationes, per 17 vndecimi, ſecta eſt autem* AN *in* I *extrema & media. Secta erit igitur ſemidimetiens cubi in* K *extrema & media ratione plano trianguli* BCE. *Cùm autem reliqua in cubo deſcripta ſimili ſitu triangula, iiſdem legibus oſtendantur eſſe in plano ſemidimetientem cubi eadem ratione ſecante. Conuenient itaque tria ſub quolibet cubi angulo dodecahedri plana, ad idem ſignum ſemidimetientis extrema & media ratione ſecti. Superest demonſtrandum rectas id ſignum dimetientis cum trianguli* BEC *angulis coniungentes æquales eſſe, vt pentagona ſint æquilatera, æquiangula, & plana.*



Sint binæ cubi baſes triangulum BCE *ſuſcipientes, dimetiens cubi verò ſit* AH, *latus autem quod ad dimetientem eſto* CK *vel* BK, *centrum cubi fuit* O. *Extendatur recta* CK *vſque ad rectam* DB *in* L. *Quoniam planum quod per rectam* QCE *& centrum* O (*ſecans cubum bifariam*) *parallelum eſt baſi cubi* ADBR, *per conſtructionem. Supponatur per ſignum* K *planum eiſdem parallelum, quod ſecabit rectas* OA CL *in* K *proportionales, per 17 vndecimi. Nam illæ extrema plana quæ per* QEO *&* ABR *contingũt. Atqui extrema & media ſecta fuit* OA *in* K, *Extrema itaque & media ratione ſecta erit* CL *in* K. *Rurſus quoniam iſoſceles eſt triangulum* BCE, *Rectáque* BI *bifariam baſim* CE *ſecuit, recti erunt* BIC *&* BIE *anguli, fiat planum per* IOB (*ſecans cubum bifariam*) *parallelum baſi* AF. *Eiſdem per ſignum* K *aliud parallelum ſupponamus* KP. *Illud rectas* OA *ſemidimetientem, &* IQ *dimidium latus, ſimiliter ſecat, per 17 vndecimi, in* K *&* P. *Secta eſt igitur* IQ *in* P *extrema & media ratione. Recta ideo* QP *rectæ* CI *vel* IE *eſt æqualis, nempe minora ſegmenta: quia verò eſt* IP *ad* IC *ſicut tota ad maius. A tota* IP *auferatur maius* IC, *Supererit minus* CP, *per quintam decimitertij, ſecta eſt ideo* IP *in* C *extrema & media ratione. Rurſus aliud excitetur planum per ſignum* L *eiſdem parallelum ſitq́* LT. *Rectæ* CL *&* CT *ſimiliter ſecantur (ex eadem 17 vndecimi) in* K *&* P, *ſecta fuit autem* CL

in K, *secta erit igitur* C T *in* P, *fuit autem* I C *ad* C P *vt maius ad minus segmentum, erit ideo* C P *maius ad* P T *minus, & igitur earum ratio vt tota* I C *ad* C P *maius, &* C P *maius ad* P T *minus. Tota itaque* C P T *maius & minus efficiens, toti* I C *vel* I E *æqualis erit. Quia verò bina plana parallela (scilicet quod per* I O B *& quod per* L T) *plano trianguli* B C E, *quod per* L T I B *secantur, communes ipsorum sectiones* L T B I *parallelæ erunt, ex decimasexta vndecimi. Rectus autem fuit* B I E *vel* B I C *angulus rectus, itaque erit* L T C (*per vigesimamnonam primi*) *angulus. Sed æquis lateribus contenti, scilicet* T C *ipsi* C I, *vt patuit,* L T *verò rectæ* B I, *per trigesimamtertiam primi. Bases igitur* C L *&* C B *æquales erunt, ex quarta primi. Sed rectæ* C B *maius segmentum fuit* C E. *Rectæ igitur* C L *eadem* C E *maius erit segmentum. sed &* C K *eiusdem* C L *maius fuit. Rectæ itaque* C E, *latus dodecahedri recta* C K *quæ ad dimetientem æqualis erit. Eadem arte reliqua latera quæ ad dimetientem rectis ipsi* C E *æqualibus æqualia ostendentur. Quæ ideo pentagonum circulo triangulum* B C E *continenti inscriptum constituunt, per vndecimam quarti, æquiangulum & æquilaterum. Quia verò dodecahedrum constituunt bina pentagona cuilibet basium cubi innixa, sex autem bases duodecim dodecahedri angulos suscipiunt, octo verò semidimetientes extrema & media ratione secti reliquos. Sunt itaque duodecim bases pentagonæ 20 solidis angulis terminatæ dodecahedrum cubo inscribentes, per vigesimamtertiam diffinitionem vndecimi. Proposito igitur cubo dodecahedrum inscripsimus.*

Corollarium primum.

Dimetiens Sphæræ dodecahedrum ambientis bina potest latera, scilicet dodecahedri & dodecahedrum ambientis cubi. *Nam in priori figura ducta ab* O *centro recta* O B *ad angulum dodecahedri, binas potest* O B *dimidium cubi latus, &* V B *dimidium dodecahedri, per 47 primi. Duplæ itaque rectæ* O B *dimetiens quidem sphæræ dodecahedrum ambientis, duplas reliquarum* O V V B *potenterit, per decimamquintam quinti, quæ sunt cubi & dodecahedri latera proposita.*

Corollarium secundum.

Cubi latus extrema & media ratione sectum efficit minus segmentum latus dodecahedri sibi inscripti. Maius vero segmentum latus cubi eidem dodecahedro inscripti. *nam patuit latus dodecahedri esse maius segmentum lateris trianguli* B E, *latus verò* B E (*binis* G B S F *æquum*) *maius fuisse lateris* G F *cubi segmentũ, quæ quidem* B E (*subtendens angulum pentagoni*) *fuit* (*octaua huius*) *latus cubi dodecahedro inscripti.*

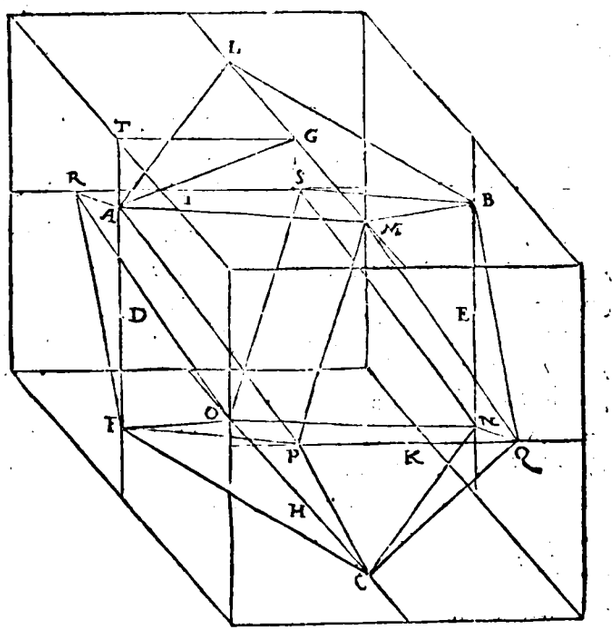
Corollarium tertium.

Cubi latus, dodecahedri inscripti & circunscripti lateribus est æquale. *Patuit enim hoc theoremate latus cubi efficere minus segmentum dodecahedri inscripti latus, nempe vt prima figura* G F *ad* S B, *idem verò cubi latus patuit* (*decimaseptima decimi tertij*) *angulum pentagoni dodecahedri circũscripti subtendere, ac proinde efficere dodecahedri siue pentagoni latus maius segmentum, per primum corollarium eiusdem, binis igitur est æquale.*

Propositio decimaquarta. *Problema* 14.

In dato cubo, Icosahedrum describere.

Esto propositus cubus A B C, *cuius basiũ centra sunt* D E G H I K, *per quæ in basibus ducãtur reliquis lateribus parallelæ non se tangentes. Quæ verò à centris* V T D T, *extrema & media ratione secentur in* A F L M N B P Q R S C O, *per trigesimam sexti, maiora verò segmenta sint circa centra, coniunctis* A L A G A M T G, *quoniam productæ sectæ parallelæ sunt cubi lateribus, angulos adinuicem rectos efficient, per vigesimamnonam primi: quia verò sunt æquales, earum sectiones æquales erunt, cùm sint similes, per secundam decimiquarti. Æqualis itaque erit* T G *ipsi* D T, *dimidia nempe cubi latera, Quod igitur ex tota* T G *& minori segmento* T A, *triplum est eius quod ex maiori* A D, *per quartam decimi-*



decimitertij, ſed rectas AT TQ *poteſt* AG, *cùm rectus ſit angulus* ATG. *Recta igitur* AG *triplum poteſt quadrati* AD, *quia verò recta eſt* MGL *ad planum* ATG, *parallelum cubi baſibus, per corollarium decimæquartæ vndecimi, rectus erit angulus* AGL: *æqualis autem eſt* LG *ipſi* AD, *nam ſunt æqualium maiora ſegmenta. Recta igitur* AG (*triplum potens ipſius* AD) *triplum poterit rectæ* LG. *Addito itaque eidem quadrato* LG, *recta* AL *binas* AG GL (*per quadrageſimamſeptimam primi*) *potẽs, quadruplum poterit rectæ* AD *vel* LG. *Recta igitur* AL *rectæ* AD (*per vigeſimam ſexti*) *dupla erit, & igitur ipſi* AF *æqualis vel ipſi* LM. *Haud ſecus æquales oſtendentur quælibet aliæ, proximas ſectarum ſectiones coniungentes, vt* AM AP PF PM MQ, *& reliquæ. Triangula igitur* ALM APF AMP PMQ, *& cætera huiuſmodi æqualia, æquiangula, & æquilatera erunt, per quartam & octauam primi. Cùm autem circa ſingulas cubi rectas ſectas, bina conueniant triangula, ſcilicet* ALM BLM *fient duodecim triangula: quia verò ſub ſingulis cubi angulis octo, reliqua octo ſubtenduntur triangula, vt* AMP *producẽt ex duodecim & octo triangulis, viginti triangula, æqualia, & æquilatera ſolidum icoſahedrum componentia, per vigeſimamquartã diffinitionem vndecimi, quod cubo* ABC *inſcriptum erit, per vigeſimam ſextam diffinitionem eiuſdem, huius demonſtrandæ inuentio à præcedẽtis dependet origine. In dato igitur cubo icoſahedrum deſcripſimus.*

Corollarium primum.

Dimetiens Sphæræ Icoſahedrum ambientis, bina poteſt, & Icoſadri & ipſum continentis cubi latera. *Nam ducta* AB, *rectos efficiet ad* AF *angulos, cùm ſit cubi lateribus parallela: quæ igitur binos* F *&* B *oppoſitos icoſahedri coniunget angulos, ipſas* AB (*latus cubi*) *&* AF (*latus Icoſahedri, per* 47 *primi*) *poteſt: quæ dimetienti ſphæræ icoſahedrum ambientis æqualis eſt per demõſtrationem decimæ ſextæ decimitertij.*

Corollarium ſecundum.

Sex oppoſitorum Icoſahedri laterũ bifarias ſectiones, cõiungunt tres rectæ æquales in centro Sphæræ Icoſahedrum continentis, ſeſe bifariam ſecantes & ad rectos. *Sunt etenim tres ipſæ centra baſium cubi* GH DB IK *iungentes, quæ ſeſe hac lege ſecant, per corollarium tertiæ huius, & ideo lateribus cubi ſunt æquales. Ab eo autem cubi centro ductæ rectæ ad angulos icoſahedri, ſingulæ dimidium cubi latus & dimidium icoſahedri (angulum rectum comprehendentes) ſubtendunt, quare æquales ſunt. Et proinde centrum præfatum ſphæræ centrum eſſe demonſtrant icoſahedrum ambientis.*

Corollarium tertium.

Cubi latus extrema & media ratione ſectum, efficit maius ſegmentum latus icoſahedri ſibi inſcripti. *Nam dimidium cubi latus, dimidium icoſahedri lateris maius ſegmentum efficit. Totum igitur cubi, totum icoſahedri maius ſegmentum efficiet, per decimamquintam quinti, cùm ſint ſimiles ſectiones, per ſecundam decimiquarti.*

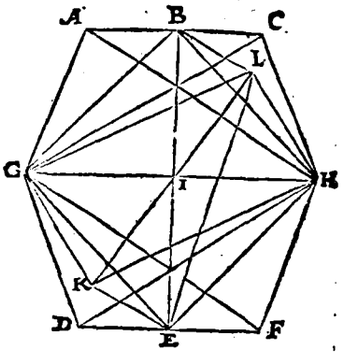
Corollarium quartum.

Icoſahedri latera & baſes quæ ex oppoſito, parallela adinuicem erunt. *Cùm oppoſita icoſahedri latera quæuis, in cubi rectis parallelis eſſe poſſint, nempe oppoſitis in cubo, quæ verò ex parallelis*

rectis triangula, parallela sint, per decimamquintam vndecimi: sequetur triangula icosahedri opposita, veluti & latera adinuicem parallela esse.

Propositio decimaquinta. *Problema* 15.

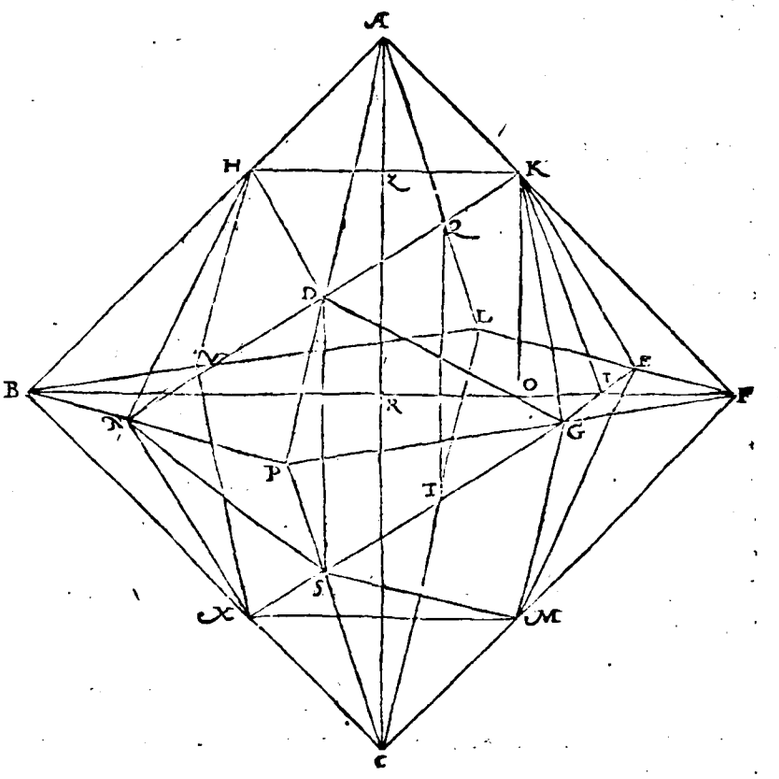
In dato Icosahedro, Octahedrum componere.



Esto icosahedrum A C D F, *cuius (per præcedens secundum corollarium) sumantur tres rectæ sese bifariam ad rectos secantes, & bifarias icosahedri laterum sectiones coniungẽtes,* B E G H *&* K L *sese secantes in* I *signo, coniunctis* B G G E E H H B: *quoniam recti sunt anguli qui ad* I, *ex constructione, & æqualibus rectis comprehensi, bases* G B H E *quadratum constituent, per quartam primi. Similiter ipsis basibus æquales erunt quæ à signis* K *&* L *in singula signa* B G E H *ducentur, Et proinde triangula pyramidem* B G E H K *constituentia, æqualia & æquilatera erũt, ac eodem argumento, eisdem reliqua reliquam pyramidem* B G E H L *super eadem basi* B G E H *constituentia, octahedrum itaq; erit* B G E H K L, *per vigesimamsecundam diffinitionem vndecimi, icosahedro inscriptum, per vigesimamsextam diffinitionem eiusdem. In dato igitur icosahedro octahedrum composuimus.*

Propositio decimasexta. *Problema* 16.

In dato Octahedro, Icosahedrum collocare.



Proponatur octahedrum, cuius sex anguli sint A B C F P L, *coniunctis rectis* A C B F P L *sese bifariam & ad rectos secãtibus in signo* R, *per corollarium secundum decimæquartæ decimitertij: secentur verò extrema et media ratione duodecim octahedri singula latera, in signis* H X M K D S N G V E Q T. *Maiora autem earum segmenta sint* B H B X F M F K A D A Q C S C T P N P G L V L E, *coniunctis* H K X M G E N V D S Q T, *quoniam triãguli* A B F *secta sunt proportionaliter latera* B H *ad* H A *vt* F K *ad* K A, *per secundam decimiquarti, parallela erit* H K *ipsi* B F, *per secũdam sexti: quia verò recta* A C *secat* H K *in* Z, *recta autẽ* Z K *parallela est ipsi* R F, *recta* R A *secta erit extrema & media ratione in* Z, *per secundam sexti, nempe similiter ipsi* F A, *maiúsque eius segmentum erit* Z R. *Ipsi* Z K *æqualis secetur* R O, *ducta* K O, *æqualis igitur erit* K O *rectæ* Z R, *per trigesimamtertiam primi, ducantur* K G K E K I, *quoniam æquiangula sunt triangula* A R F A Z K, *per sextam sexti, æqualia sunt* A Z Z K *latera adinuicem, per quartam sexti, cùm æqualia sint* A R R F *latera: rectæ itaque* R A *minus segmentum erit* Z K, *si autem maius segmentum* R Z *extrema & media ratione secetur, efficiet ipsius maius rursus segmentum, rectam* Z K, *quæ fuit minus totius* R A, *per quintam decimitertij. Quia verò binis* A H A K *æquales sunt binæ* F R F G, *minora segmenta æqualium*

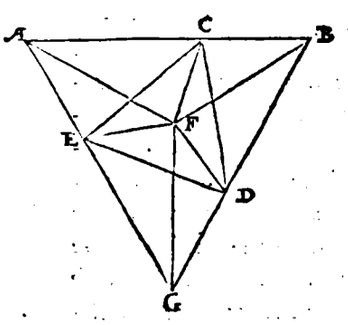
qualium octahedri laterum, & anguli æquales, HAK *ipsi* EFG, *nempe recti per decimamquartã decimitertij, baſes* HK GE *æquales erunt, per quartam primi, ſimiliter eiſdem æquales patebunt rectæ* XM NV DS QT, *quia item rectæ* AC BF *&* PL *bifariam & ad rectos ſeſe ſecant, ex conſtructione, rectæ* HK *&* GE *(ſimilia ipſis triangula ſubtendentes) bifariam ſectæ erunt in* Z *&* I, *per quartam ſexti, necnon & reliquæ* NV XM DS QT *(ipſis æquales) ſimiliter ſectæ erũt, & ſimiliter ipſas* AC BF PL *ſecabunt: recta itaque* KO *(ipſi* RZ *æqualis) efficiet maius ſegmentum rectam* RO, *rectæ* ZK *æqualẽ, nam* RZ *fecit* ZK, *& igitur minus erit* OI, *cũ tota* RI *rectæ* RZ *ſit æqualis, quæ itaque ex tota* KO *& minori ſegmẽto* OI, *tripla ſunt eius quod ex maiori* RO, *per quartã decimitertij, recta ideo* KI *binas* KO OI *potens, triplum ipſius* RO *poterit, per quadrageſimamſeptimam primi, cùm rectus ſit* KOI *angulus. Cùm autem æquales ſint* FE FG, *minora laterum octahedri ſegmẽta, communis verò* FK, *& anguli* KFG KFE *(triangulorum octahedri) æquales, baſes* KG KE *erunt (per quartam primi) æquales, quæ ideo angulos* KIE KIG *æquos ſubtendent, per octauã primi, qui igitur recti erũt, per decimamtertiam primi: recta itaque* KE *(binas* KI IE *potens) quadruplum poterit ipſius* RO *(vel* IE*) nam* KI *triplum eiuſdem* RO *potuit, cuius quidem* IE *quadruplum poteſt* GE *dupla, per vigeſimam ſexti, Binæ itaque* KE GE *erũt æquales. Eodem argumento eiſdem æquales oſtendẽtur reliquæ* HK HN NV VX XS, *& reliquæ ſectiones laterum octahedri coniungentes. Ex ipſis igitur deſcripta triangula* GEK GKD GDS GSM GME, *æqualia & æquilatera erunt, per octauam primi, angulum ſolidum qui ad* G *componentia, qui itaque icoſahedri erit angulus, per decimamſextam decimitertij, in ſectione* G *lateris* PF *conſtitutus. Haud ſecus oſtendentur reliqui vndecim icoſahedri ſolidi anguli, in ſectionibus ſingulorum octahedri laterum cõſtituti eſſe, ſcilicet* ENVHKMXDSQT: *duodecim igitur erunt icoſahedri anguli. Cùm inſuper ſingulæ octahedri baſes ſingula ſuſcipiant icoſahedri triangula, vt in pyramide dimidij octahedri* ABCFP, *triangulum* PCP *in ſuorum laterum ſectionibus ſuſcipit triangulum* GMS, *&* CPB *ipſum* NXS; *at* BAP *ſuſcipit* HDN, *&* APF *ipſum* KDG, *idẽ oſtendi poterit in oppoſita pyramide* ABCFL, *erũt igitur octo triãgula. Cæterũ quia ſingulis octahedri ſolidis angulis bina ſupponuntur præter hæc triangula, vt* KEG MEG *angulo qui ad* F, *ei verò qui ad* B, XNV HNV, *ei qui ad* P, NDS GDS, *ei qui ad* A, DHK QHK, *ei qui ad* L, EQT VQT, *ei qui ad* C, SXM TXM. *Hæc duodecim octo præoſtenſis addita producent viginti numero triangula, ſibi coniuncta æqualia & æquilatera, quæ (ex vigeſimaquarta diffinitione vndecimi) icoſahedrum component, quod octahedro propoſito* ABCFPL *inſcriptum erit, ex vigeſimaſexta diffinitione vndecimi: nam duodecim eius anguli, duodecim laterum octahedri ſectiones ſimiles poſſident. In dato igitur octahedro icoſahedrum collocauimus.*

Corollarium primum.

Latere trianguli æquilateri extrema & media ratione ſecto. Recta ſubtendens trianguli angulum, maiori & minori ſegmentis comprehenſum, duplum poteſt minoris eiuſdem lateris ſegmenti. *Nam recta* KE *angulum* KFE *trianguli* AFL *ſubtendens, binis* KF FE *ſegmentis comprehenſum, æqualis fuit rectæ* HK *binæ* HA AK *minora ſegmenta potenti, per 47 primi, cùm rectus fuerit* HAK *angulus. Duplum igitur poteſt* KE *vel* HK *rectæ* AK.

Corollarium ſecundum.

Icoſahedri baſes octahedri id continentis baſibus ſunt concentricæ.

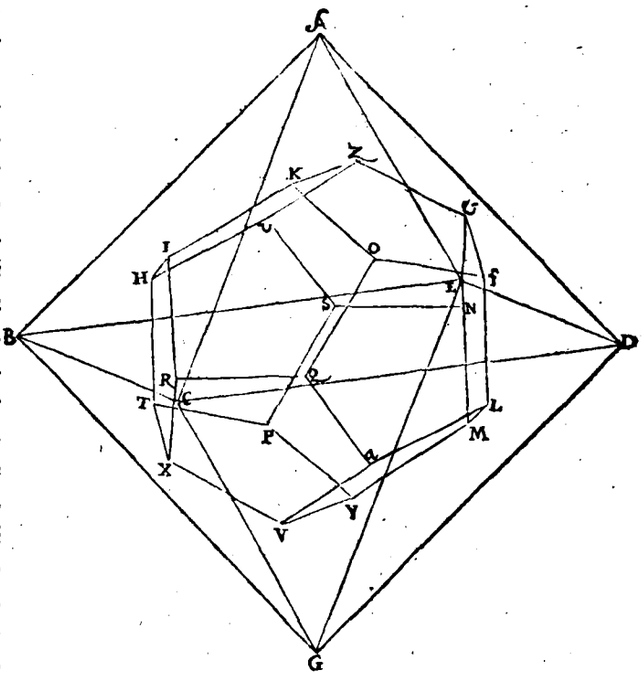


Nam ſi proponatur ABG *octahedri baſis continens* ECD *icoſahedri baſim, erit centrum baſis* ABG *ſignum* F. *Iungentur rectæ* FA FB FC FE. *Æquales erunt binæ* FA AE *binis* FB BC, *ſunt enim quæ ex centro & minora ſegmenta, Sed & angulos æqualium dimidios ſubtendunt. Baſes igitur (ex quarta primi)* FC FE *ſunt æquales, ſicq; illis reliqua* FD *æqualis erit, centro igitur* F *interuallo* FA *circulus triangulo* CED *circunſcriptus, ſignum idem* F *centrum efficiet baſis* CED *icoſahedri.*

Propoſitio decimaſeptima. *Problema* 17

In dato Octahedro, Dodecahedrum collocare.

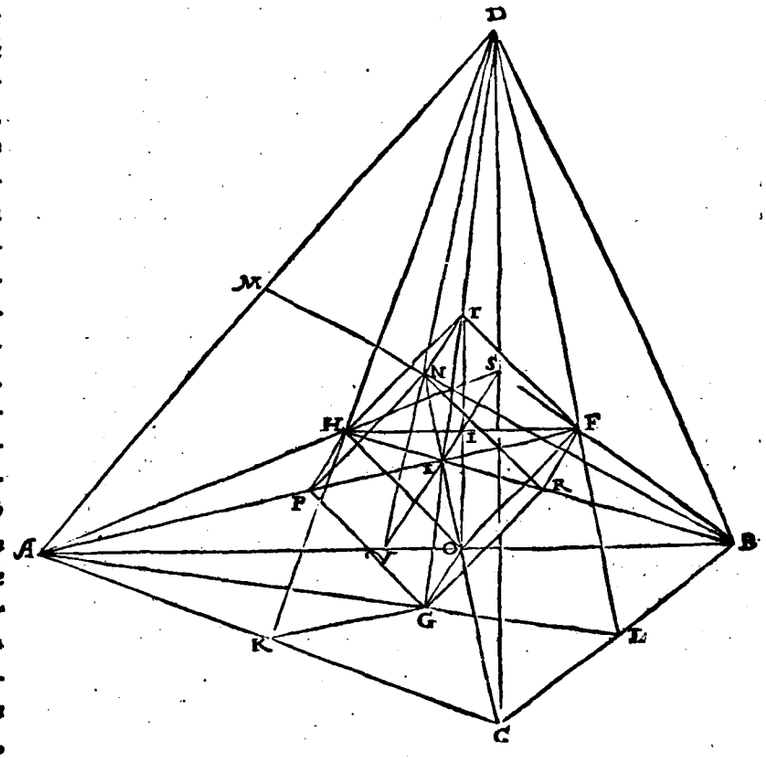
Esto ppositũ octahedrũ ABGDEC *cuius secẽtur duodecim latera extrema et media ratione instar præcedẽtis. Patuit ex rectis has sectiones iungentibus fieri viginti triangula, quorum fuerunt octo basibus octahedri concentrica, ex proximo xoroll. præfate. Si igitur singulis viginti triangulorum centris, singuli dodecahedri inscribantur (iuxta quintam huius) anguli, comperiemus octo dodecahedri angulos in octo basium octahedri centris, hos nempe* I V & O M a P *et* X. *Reliquorum autem duodecim, binos in centris binorum triangulorum latus commune sub singulis octahedri solidis angulis habentium, puta sub angulo qui ad* A *binos* K Z, *sub* B *binos* H T, *sub* G *binos* V Y, *sub* D *binos* F L, *sub* E *binos* S N, *sub* C *verò binos* Q R *degentes, qui solidi anguli cùm sint sex, duodecim fouent dodecahedri angulos, ac fiunt viginti duodecim pentagonis æqualibus æquiangulis & æquilateris planis (vt quinta huius patuit) compositi, Dodecahedrum autem (ex 23 diffinitione vndecimi) restituentes: Octahedro verò inscriptum eò quòd singulæ octohedri bases singulos eius suscipiunt angulos, per 26 diffinitionem vndecimi. In dato igitur octahedro dodecahedrum collocauimus.*



Propositio decimaoctaua. *Problema* 18

In data trilatera & æquilatera Pyramide, cubum constructe.

Esto trilatera æquilatera pyramis, cuius basis sit A B C, *vertex autem* D, *Ipsa sphæra comprehendetur, ex decimatertia decimitertij. Sit eius sphæræ centrum* E, *Ab angulis autem solidis* A B C D, *per centrum* E *singulæ rectæ in bases oppositas missæ, basibus perpendiculares erunt, & in centra circulorum bases continentium cadent, per coroll. 13 decimitertij. Sint itaque ea cẽtra trianguli quidem* A B C *signum* G, *trianguli* A D C *sit* H, *ipsius verò* A D B *sit* N, *Reliqui autem* D B C *esto* F, *Rectæ demissæ sint* D E G B E H C E N *&* A E F: *Per ea verò* G H N F *centra, ab angulis ducantur in latera opposita rectæ* A G L D H K B N M *&* D F L, *quæ perpendiculares erunt*



lateribus

lateribus BC CA AD *&* CB, *per coroll.* 12 *decimitertij. Et ideo eas ſecabunt bifariam in* KLM *ſignis, per tertiam tertij. Rurſus quæ à ſolidis angulis miſſæ ſunt in baſes oppoſitas, bifariam ſecentur, ſcilicet* DG *in* T, CN *in* O, AF *in* P, *&* BH *in* R, *coniunctis* HT FT HO FO. *Quoniam* GK GL *quæ à centro eiuſdem trianguli* ABC *in latera ſunt æquales, æqualium & ſimilium triangulorum perpendiculares. Communis autem* DG, *anguli* KDG LDG (*per octauam primi*) *æquales erunt. Sed & æquis lateribus* FD DT *ipſis* HD DT *continentur. Nam* HD DF *ſunt ex centro æqualium circulorum triangula* ADC DBC *continentium, baſes igitur* HT FT *æquales erunt, per quartam primi. Haud ſecus ductis* CF CH *rectis, reliquæ* HO FO *eiſdem* HT FT *& inter ſe æquales eſſe patebunt, Ac igitur eodem argumento reliquæ centra triangulorum & bifarias perpendicularium ſectiones iungentes, vt* NP GR GP RN NT PH GO *&* RF *æquales eſſe oſtendentur. Cùm autem à quolibet centro baſium tres oriantur rectæ in bifarias perpendicularium ſectiones ducendæ, centra autem ſint quatuor, ſequetur ductas rectas æquales, duodecim eſſe, quarum ternæ & ternæ angulum ſolidum in quatuor centris baſium ac perpendicularium mediis ſectionibus quatuor conſtituunt, eius itaque ſolidi octo erunt anguli, duodecim æquis lateribus conſcripti, quæ ſex quadrangula figurabunt, ſcilicet* HOFT PGRN PHOG GOFR FRNT *&* TNPH. *Ea quippe rectangula eſſe doceamus.*

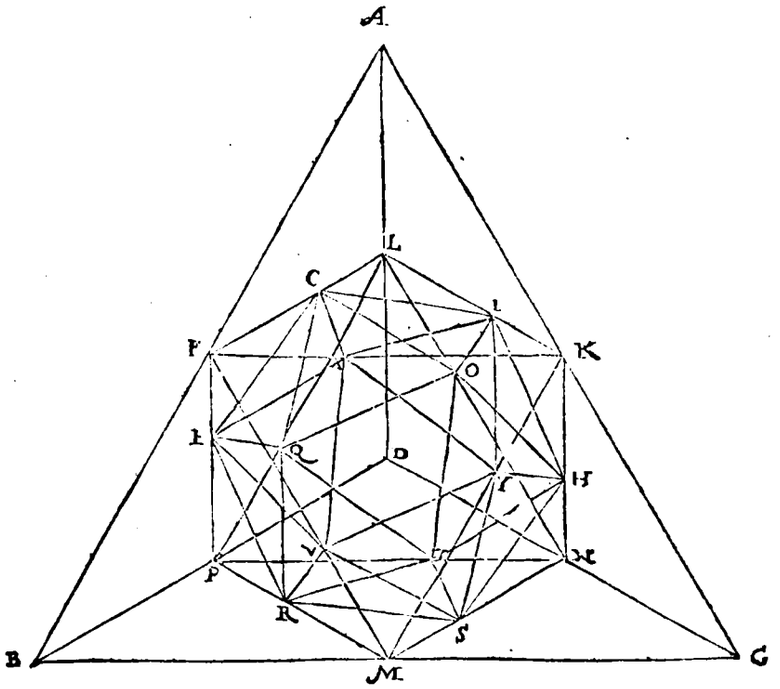
Quoniam in DC *communem triangulorum* ADC BDC *baſim perpendiculares cadunt* AS BS *per centra* H *&* F *ductæ. Singulæ ipſarum* HS SF *tertiam partem ſingularum* AS SB *efficiunt. Nam* AH *dupla eſt rectæ* HS *& baſim* DC *bifariam ſecat, per coroll. duodecimæ decimitertij. Trianguli igitur* ABS *latera* AS BS *proportionalia ſecta in* H *&* F, *efficiunt rectam* HF *parallelam reliquo* AB *lateri, per ſecundam ſexti. AEquiangula igitur erunt* ASB *&* HSF *triangula, per ſextam ſexti. Baſis igitur* HF *reliquæ* AB *tertia pars erit, per quartam ſexti. Oſtendamus inſuper* TO *tertiam eſſe rectæ* DC, *cùm æquales ſint* EC ED *rectæ, quæ ex centro ſphæræ pyramidem continentis,* EN *verò (quæ à centro in baſim) tertia pars eſt* EC *rectæ, ſicq;* GE *rectæ* ED, *per coroll. decimæ tertiæ decimitertij, eſt enim ſexta pars dimetientis. Sed* ON *fuit dimidia totius* NC. *Reliqua itaque* EO *tertia pars erit ipſius* EC *necnon* ET *tertia rectæ* ED. *Quare recta* TO *in triangulo* DEC *parallela erit rectæ* DC, *eiuſdémque pars tertia, ex præſcriptis ſecunda & quarta ſexti, veluti* HF *fuit tertia pars rectæ* AB. *Atqui* AB *&* DC *pyramidis latera ſunt æqualia. Rectæ igitur* HF *&* TO *æqualium tertiæ partes æquales erunt, per decimamquintam quinti. AEquales igitur erunt anguli* HTF *&* TFO, *ſimiliter eis oppoſiti* FOH OHT (*per octauam primi*) *ipſis ac inter ſe æquales erunt. Sed hi quatuor rectis æquipollent, per coroll. trigeſimæ ſecundæ primi. Recti itaque erunt quadranguli* HO FT *anguli. Necnon reliquorum quinque quadrangulorum, eadem lege recti oſtendentur anguli. Supereſt oſtendendum quadrangula præfata in vno plano ſingula eſſe. Suſcipiamus itaque* HOFT. *Quoniam in triangulo* ASB *recta* HF *lateri ab parallela oſtenſa eſt, ea ſecat proportione rectas* SV SB *in* I *&* F, *per* 2 *ſexti. Quia ideo tertia pars fuit* SF *rectæ* SB, *tertia erit* SI *rectæ* SV. *Quia præter hæc,* VS *mediæ ſectiones oppoſitorum pyramidis laterum iungens, horum nempe* AB DC, *bifariam per centrum* E *ſecatur, ex coroll. ſecundæ huius, cùm ſit dimetiens octahedri pyramidi inſcripti, recta* SI *duo tertia erit dimidiæ* SE. *Haud ſecus, cùm in triangulo* DEC *recta* TO *parallela fuerit rectæ* DC *lateri. Illa ſecabit proportione in eodem triangulo rectas* CE SE *in* O *&* I, *per eandem. Atqui tertia fuit* EO *rectæ* EC *tertia igitur erit* EI *rectæ* ES. *Reliqua igitur* IS *totius* ES *duo tertia erit. Quare ſignum* I *vtraſque* TO, HF *ſecuit. Binæ itaque* HIF TIO *rectæ ſeſe ſecantes in vno ſunt plano, per ſecundam vndecimi. Ac proinde ſigna* HTFO *in eodem erunt plano. Rectangulum igitur* HOFT *quadrilaterum & æquilaterum in plano exiſtens quadratum erit, per trigeſimam diffinitionem primi. Eadem cauſa reliquæ quinque ſolidi baſes quadratæ, oſtendentur æquales & planæ, duodecim lateribus octóque angulis æqualibus ſolidis coniunctæ, quorum quatuor in quatuor pyramidis baſium centris, quatuor verò in quatuor perpendicularium mediis ſectionibus degunt. Solidum igitur illud* HOFT PGRN *cubum dicemus, per vigeſimamprimam diffinitionem vndecimi, pyramidi inſcriptum, per* 26 *diffinitionem eiuſdem. In data itaque trilatera & æquilatera pyramidæ cubum conſtituimus.*

Corollarium.

Quæ bifariam ſecat oppoſita Pyramidis latera, tripla eſt lateris inſcripti cubi & per cẽtrum tranſit. *Nam* SEV *recta cuius tertia pars fuit* SI, *ea latera ſecat: at* EI (*quæ ex centro cubi in baſim*) *fuit tertia rectæ* ES. *Latus igitur cubi duplum rectæ* EI *tertium erit totius* NS *quæ fuit dupla rectæ* ES.

Propoſitio decimanona. *Problema* 19.

In data trilatera æquilatera Pyramede, Icoſahedrum deſcribere.

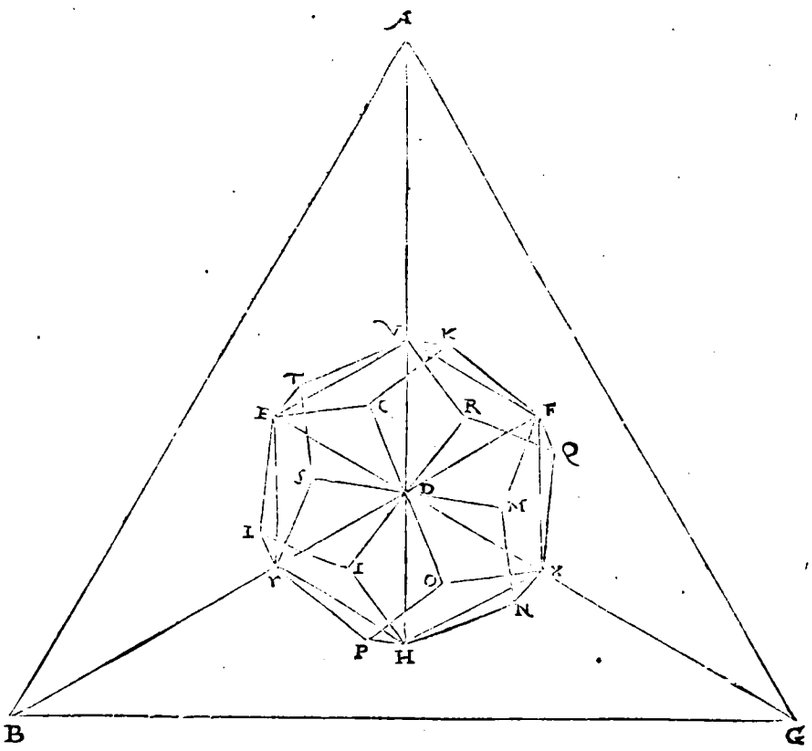


Eſto propoſita pyramis A B G D, *cuius ſingula bifariam ſecẽtur latera ſignis* F M K L P N, *deſcriptis triangulis* L F P P M N N K L *et* F M K *in ſingulis eius pyramidis baſibus, quæ quidem triangula æqualitateraerũt, per quartã primi: nã latera ſubtendunt æquos baſium pyramidis angulos dimidiis eius lateribus comprehenſos, quæ ideo ſunt æqualia. Secentur ea latera extrema & media ratione (per trigeſimam ſexti) in ſignis* C E Q R S T H I O N Y X. *Ipſa latera in eaſdẽ rationes ſecantur, per ſecundam decimæ quarti, & ideo æquales efficiũt ſimiles ſectiones, per ſecũdam partẽ nonæ quinti: Dico præfata ſigna angulos ſuſcipere icoſahedri pyramidi* A B G D *inſcripti, fiant in præfatis triangulis alia rurſus triangula iunctis ſectionibus, Sint autem hæc* T R S I O H C E Q *&* V X Y, *ipſa æquilatera erunt. Singula nanque eorum latera æquales angulos triangulorum æquilaterorum ſubtendunt, & æquis lateribus (maiori ſcilicet & minori ſegmẽto) comprehenſos, quæ ideo (per quartam primi) erunt æqualia. Oſtendamus igitur ad aliquod præfatorum ſignorum (ſcilicet* T) *conſtitui angulum ſolidum icoſahedri. Cùm triangula* T R S *&* T Q O *ſint æquilatera & æqualia æquales erunt quatuor rectæ* T R T S T Q T O: *& quia quadratum eſt* F P N K, *bifariam ſecans pyramidem* A B G D *per corollarium ſecundæ huius. Recta* T H *duplum poteſt rectæ* T N *vel* N H, *per quadrageſimamſeptimam primi, minoris quidem ſegmenti ex conſtructione. Quod idem duplum poteſt recta* R T *vel* T S, *angulum trianguli ſubtendens binis ſegmentis comprehenſum, per corollarium decimæ ſextæ huius. Rectæ igitur* T H T S T R T Q T O *æquales erunt, necnõ* H S S R R Q Q O O H, *angulos qui ad* T *ſubtendentes: nam* Q R *bina poteſt* P Q P R *minora ſegmenta, quæ potuit* T H. *Reliquæ verò angulos triãgulorũ æquilaterorũ maiori & minori ſectione comprehenſos ſubtendunt. Quinquẽ itaque triãgula* T R S T S H T H O T O Q T Q R *æquilatera & æqualia, angulum ſolidũ icoſahedri ad ſignum* T *conſtituunt, per* 16 *decimitertij, in latere* P N *trianguli* P N M. *Eadem methodo in reliquis quatuor triãgulorũ* P N M N K L F M K *&* L F P *baſibus pyramidis inſcriptorũ lateribus, quæ latera duodecim ſunt numero, duodecim icoſahedri conſtituentur anguli, viginti triangulis æqualibus & æquilateris compoſiti, quorum quatuor in quatuor pyramidis baſibus,* T R S H O I C E Q V X Y, *quatuor ſub quatuor pyramidis angulis* C I X T S H E R V *&* T Q O, *& bini ſub ſingulis ſex pyramidis lateribus, ſcilicet ſub latere* D G, T H S T H O, *ſub* D B, R Q E R Q T, *ſub* D A, C O Q C O I, *ſub* A B, E X C E X V, *ſub* B G, S V R S V Y, *ſub* A G, I Y H I Y X. *Viginti itaque æquilateris & æqualibus triangulis comprehenſum, ſolidum icoſahedrum erit, per vigeſimamquartam diffinitionem vndecimi, pyramidi* A B G D *inſcriptum cùm eius ſimul anguli pyramidis ſimul baſes tangunt, per vigeſimamſextam diffinitionem vndecimi. In data itaque trilatera pyramide icoſahedrum deſcripſimus.*

Propoſitio vigeſima. *Problema* 20.

In data trilatera æquilatera Pyramide, Dodecahedrum componere.

Eſto



Esto pyramis AB-GD, *cuius singula latera bifariam secẽtur, ductis rectis sectiones iungẽtibus, quæ rectæ extrema & media ratione sectæ, suscipiẽt ductis per sectiones rectis, viginti triangula icosahedrum componentia, vt proxima patuit, si eorum triangulorũ centra susceperimus, ibidẽ viginti dodecahedri inscripti angulos cõperiemus, per quintam huius, quia verò præfati icosahedri quatuor bases sunt basibus pyramidis concentricæ, vt ostensum fuit corollario secundo decimæsextæ huius, quatuor angulos scilicet* E F H D *dodecahedri, in quatuor basiũ centris collocabimus, reliquorum verò sedecim angulorum bini singulis sex pyramidis lateribus subiiciuntur, nempe lateri* A D *anguli* C K, *lateri* B D L *&* I, *rectæ* G D M *&* N, *rectæ* A B T *&* S, *lateri* B G P *&* O, *lateri* A G R *&* Q. *Supersunt quatuor, quorum verum locum designemus: cùm cubus eadem sphæra cum dodecahedro septus, eidẽ dodecahedro inscribatur, vt patuit decimaseptima decimitertij, & octaua huius, sequetur cubum dodecahedrúmque circunscriptum iisdem contineri corporibus, eò quòd eorum anguli ad eadem signa coëant. Ostensum est autem* (18 *huius*) *quatuor angulos cubi pyramidi inscripti perpendicularium quæ ab angulis in bases oppositas pyramidis sunt missæ, medias obtinere sectiones, Dicemus itaque quatuor reliquos dodecahedri angulos medias illas perpendicularium cum angulis cubi posside re sectiones. Has quidem* V *dimidiam perpendicularis* A H, *dimidiam verò* B F *angulum* Y, *dimidiam autem* G E *signum* X, *reliquam demùm, medium signũ perpendicularis* D *anguli, in basim oppositam. Quare quatuor illi dodecahedri angulis, solidis pyramidis quatuor angulis directi, siue ad perpendiculum suppositi dicentur: dodecahedrum itaque hac lege constitutum propositæ pyramidi inscriptum dicetur, eò quòd singulis pyramidis basibus singuli adhæreant dodecahedri inscripti anguli, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. In data igitur trilatera æquilatera pyramide dodecahedrum composuimus.*

Propositio vigesimaprima. *Problema* 21.

Cuilibet regularium solidorum, Sphæram inscribere.

Iam ostensum fuit decimatertia & quatuor sequentibus decimitertij, solida quinque regularia hac lege sphæra contineri, vt à cẽtro sphæræ siue solidi ad singulos inscriptæ angulos rectæ sint æquales. Quæ quidem rectæ ea de causa pyramides componunt, quarum vertices centrum sphæræ siue solidi possident, bases autem pyramidum singulæ sunt eorum solidorum bases, quæ cùm in quolibet solido sint inter se æquales, similes & æqualibus circulis descriptæ, hi circuli sphæram secabũt: nam anguli circunferentiam circuli tangentes sphæræ superficiem attingunt: quare à centro sphæræ in bases siue circulorum æqualium plana demissæ perpendiculares, sunt æquales, ex corollario lemmatis decimisexti duodecimi. Centro igitur sphæræ solidum continentis, interuallo verò aliqua perpendicularium æqualium descripta sphæra, ipsa singulas eius solidi bases sua superficie tanget, nec excedet superficies sphæræ cùm perpendiculares sint minimæ quæ à centro in bases mittuntur, per tertium co-

rollarium eiusdem lemmatis: cuilibet igitur regularium solidorum sphæram inscripsimus, quæ quidem sunt tantùm numero quinque, per corollarium decimæoctauæ decimitertij.

Corollarium.

Inscriptæ ac eis circunscriptæ regulares figuræ siue eas comprehendentes sphæræ, idem centrum possident. *Nempe earum pyramides quarum anguli basium sphæræ superficiem tangunt, ab his angulis ad idem signum æquales perducunt rectas, conos pyramidum ibidem constituentes, ac proinde centrum spherarum in eisdem conis collocătes, cùm ab his ad curuam superficiem, in basium pyramidis angulis existentem, ductæ rectæ fuerint æquales.*

MONITVM.

Horum solidorum vnicum octahedrum reliqua mutuò sibi inuicem inscripta suscipit solida: nam octahedrum capit icosahedrum sibi inscriptum: illud idem icosahedrum concipit dodecahedrum eidem octahedro inscriptum: Dodecahedrum verò idem, suscipit cubum ipso octahedro conceptum: cubus ille demùm Pyramidem proposito octahedro inscriptam circunscribit. Hæc reliquis denegantur solidis.

LIBRI DECIMIQVINTI FINIS.

FRAN-

FRANCISCI FLVSSATIS Candallæ Elementorum geometricorum Liber decimusſextus.

Propoſitio prima.

DOdecahedrum ſibíque inſcriptus cubus ac eidem cubo inſcripta Pyramis, eadem capiuntur Sphæra.

Quoniam pyramis angulos cubi in quo deſcribitur poſsidet, per primam decimiquinti, cubus verò omnes angulos in dodecahedri ſibi circunſcripti angulis collocat, per octauam decimiquinti. Dodecahedrum verò ſuos angulos in ſphæræ ſuperficie conſtituit, per 17 decimitertij. Sequetur itaque illa tria ſolida ſibiinuicem inſcripta, eadem capi ſphæra, per vigeſimamſextam diffinitionem vndecimi. Dodecahedrum igitur ſibíque inſcriptus, &c.

Corollarium.

Tria hæc ſolida ſimiliter eidem inſident Icoſahedro, Octahedro, & Pyramidi. *Nam icoſahedro, per quintam, vndecimam, & duodecimam decimiquinti: ac eidem octahedro, per quartam, ſextam, & decimamſextam eiuſdem: demùm eidem pyramidi, per primam, decimamoctauam, & decimamnonam eiuſdem. Nam omnium horum anguli centra baſium circunſcriptorum icoſahedri, aut octahedri, aut certæ pyramidis, obtinent.*

Propoſitio ſecunda.

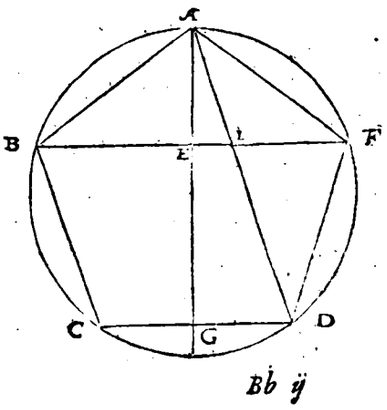
Dodecahedri circunſcripti ad dodecahedrum cubo inſcriptum ratio, tripla eſt extremæ & mediæ rationis.

Quoniam oſtendimus (decimatertiæ decimiquinti corollario 2) latus dodecahedri cubo inſcripti eſſe minus ſegmentum lateris ipſius cubi extrema & media ratione ſecti. Latus verò dodecahedri eidem cubo circunſcripti, eiuſdem cubi lateris maius ſegmentũ eſſe, eadem 13 decimiquinti, docuimus: erit latus dodecahedri circunſcripti, ad latus inſcripti, vt maius ſegmẽtum rectæ extrema & media ratione ſectæ, ad minus eiuſdẽ, quæ (ex trigeſima ſexti) dicitur extrema & media ratio, per tertiam diffinitionem eiuſdem. Sed ſimilium polyhedrorum ſolidorum ratio, tripla eſt rationis laterum ſimilium, per corollarium 17 duodecimi. Dodecahedri igitur circunſcripti ad dodecahedrũ cubo inſcriptum ratio, tripla erit rationis laterum, extrema & media ratione coniunctorum. Dodecahedri itaque circunſcripti ad dodecahedrum, &c.

Propoſitio tertia.

Omnis quinquãguli, æquianguli, & æquilateri, quæ ab vno angulorum in baſim perpendicularis, extrema & media ratione ſecatur, per rectam angulum eundem ſubtendentem.

Sit quinquangulum, æquiangulum, & æquilaterum A B C D F, *ab vno autem angulorum qui ad* A *perpendicularis demittatur* A G *in baſim* C D, *& angulum* B A F *ſubtendat* B F, *quam ſecet* A D *in* I: *Dico rectam* B F *ſecare rectam* A G *extrema & media ratione, quoniã anguli* G A F G A B *ſunt æquales, per vigeſimam ſeptimam tertij, &* A B F A F B *æquales, per quintam primi. Reliqui itaque qui ad* E *triangulorum* A E B A E F *æquales erunt, nempe reliqui duorum rectorum, per corollarium trigeſimæ ſecundæ primi. Rectus autem eſt (ex conſtructione)* E G C *angulus, parallelæ igitur ſunt* B F C D *rectæ, per vigeſimãoctauam primi: ſicut igitur-*



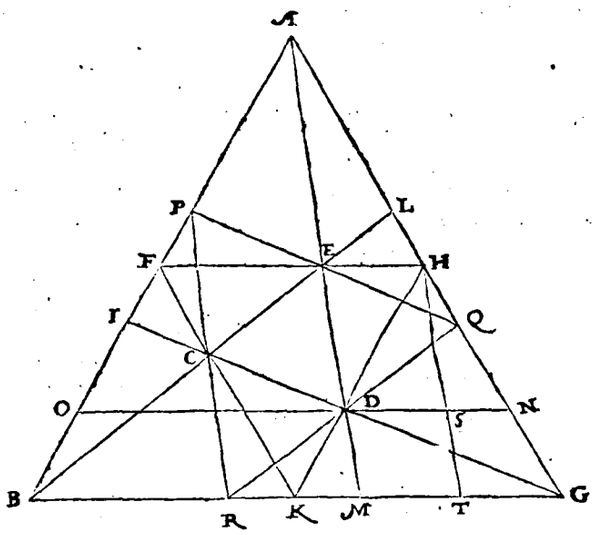
DI *ad* IA, *ſic erit* GE *ad* EA, *per ſecundam ſexti. Atqui* DA *ſecta eſt in* I *extrema & media ratione, per octauam decimitertij,* GA *igitur in* E *ſecta erit extrema & media ratione, per ſecundam decimiquarti. Omnis itaque quinquanguli, æquianguli, & æquilateri, quæ ab, &c.*

Corollarium.

Quæ angulum pentagoni ſubtendit oppoſito lateri ſit parallela. *Vt patuit in* BE *&* CD.

Propoſitio quarta.

Quæ ab angulis baſis Pyramidis latera oppoſita ſecãt extrema & media ratione rectæ, ipſæ comprehendunt baſim Icoſahedri Pyramidi inſcripti, triangulo æquilatero inſcriptam, cuius anguli latera baſis Pyramidis extrema & media ratione ſecant.



Eſto baſis pyramidis ABG, *cui inſcribatur triangulum æquilaterum* FKH, *ſectis bifariam lateribus, huic autem triangulo inſcribatur baſis icoſahedri pyramidi inſcripti (ſectis extrema & media ratione lateribus)* FK KH HF *in* CDE, *per decimamnonam decimiquinti: ſecentur rurſus pyramidis latera* AB BG GA *extrema & media ratione in* IML, *per trigeſimam ſexti, coniunctis* AM BL GI *rectis: Dico ipſas rectas triangulum icoſahedri* CDE *deſcribere: quoniam* BG *&* FH *ſunt parallelæ, per ſecũdam ſexti, per ſignum* D *vtrique parallela fiat* ODN. *Simile erit* HDN *triangulum ipſi* HKG, *per corollarium ſecundæ ſexti, æquales igitur erũt ſingulæ* DN NH *ipſi* DH, *maiori ſegmento rectæ* KH *vel* FH: *quia verò* FO *parallela eſt rectæ* HK, *&* OD *ipſi* FH, *æqualis erit* OD *rectæ* FH *toti, in parallelogrammo* FODH, *per 34 primi. Sicut itaque tota* FH *ad* FE *maius ſegmentum, ſic erunt, ipſis æquales* OD *ad* DN, *per ſeptimã quinti. Recta igitur* ON *extrema & media ratione ſecta erit in* D, *per ſecundam decimiquarti. Sed ſimilia ſunt inter ſe triangula* AOD AFE *&* ABM, *necnon inter ſe* ADN AEH *&* AMG, *per corollarium ſecũdæ ſexti. Sicut ideo* FE *ad* EH, *ſic eſt* OD *ad* DN, *&* BM *ad* MG. *Recta igitur* AM *ſimiliter ſecãs rectas* FH ON *ipſi* BG *in* EDM, *efficit* ED *latus triãguli icoſahedri* ECD, *in ſectionibus* ECD *ex hypotheſi deſcripti. Haud ſecus* BL GI *reliqua latera* EC CD *eiuſdẽ trianguli deſcribent, per ſignũ* E *rectæ* GI *parallela fiat* PEQ. *Cùm parallelæ ſint* BM FE *recta* AM *in* E *ſimiliter ipſi* AB *in* F *ſecatur, per ſecundam ſexti. Aequalis igitur erit* AE *ipſi* EM, *ac ipſi æquales erunt* GD DI, *ſimiliter poſitæ: quia rurſus parallela ſunt* DI EP *in triangulo* ADI, *erit* DI *ad* EP; *vt* AD *ad* AE: *ſed vt* AD *ad* AE, *ſic* DG *ad* EQ, *per 2 ſexti. Sicut igitur* DI *ad* EP, *ſic erit* DG *ad* EQ: *& vicißim* DI *ad* DG, *vt* EP *ad* EQ: *æquales autem ſunt* DI DG, *æquales igitur erunt* EP EQ: *quia verò æqualis eſt recta* AH *rectæ* FH, *cuius maius ſegmentum fuit recta* HN. *Tota* AN *extrema & media ratione ſecatur in* H, *per quintam decimitertij. Sicut autem* AN *ad* AH, *ſic* AD *ad* AE, *per ſecundam ſexti, quia parallelæ fuerunt* FH ON: *ſicut rurſus* AD *ad* AE, *ſic (per eandem)* AG *ad* AQ *&* AI *ad* AP, *quia parallelæ fuerunt* PQ GI. *Rectæ itaque* AG *&* AI *extrema & media ratione in* Q *&* P *ſectæ ſunt, rectáque* AQ *maius erit rectæ* AG *vel* AB *ſegmentum. Quia verò fuit tota* AG *ad maius* AQ *vt maius* AI *ad reliquam* AP, *ipſa* AP *erit minus ſegmentũ totius* AB *vel* AG. *Recta igitur* PEQ *(parallela per* E *rectæ* GI) *extrema & media ratione ſecuit rectas* AG BA *in* Q *&* P. *Haud ſecus recta* PR *(rectæ* AM *parallela per* C) *in ſectiones* PR *cadet, necnon* RQ *per ſignũ* D *(parallela rectæ* BL) *in ſectiones* RQ *cadet: vtraque igitur* PE EQ *rectæ* CD *æqualis erit, in parallelogrammis* PD QC, *per 34 primi. Cùm autem æquales fuerint rectæ* PE EQ, *æquales erũt ſimiliter* PC CR *&* RD DQ. *Triangulum itaque* PRQ *æquilaterum erit ſecans extrema & media ratione latera pyramidis in* P Q *&* R,

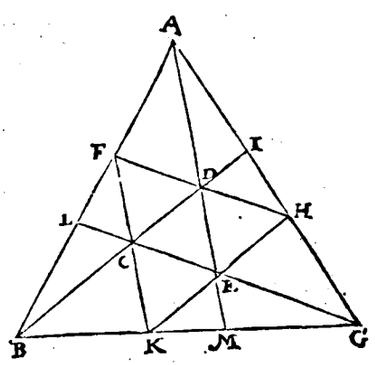
Q & R, *cui inſcripta eſt baſis icoſahedri* E C D *præfata pyramide comprehenſi. Quæ igitur ab angulis baſis pyramidis, &c.*

Corollarium.

Latus icoſahedri octahedro inſcripti, maius ſegmentum eſt eius quæ ab angulo baſis octahedri ſecat latus oppoſitum extrema & media ratione. *Quoniam (ex decimaſexta decimiquinti)* F K H *eſt baſis octahedri, icoſahedrum baſis* C D E *continentis. Cui* F K H *æquatur* H K G, *vt patuit. Excitetur rectæ* M E *per ſignum* H *parallela* H T, *ſecans* D N *in* S, *parallelogramma erunt* E S D T *&* T, *æquales inde erunt* E H M T, *& æqualiter ſectæ* E M H T *in* D *&* S, *per 34 primi. Rectæ igitur* H T *maius ſegmentum eſt* H S *recta, æqualis lateri* E D *icoſahedri. Sed* T K *ſimiliter ſecatur ipſi* H K (*ex ſecunda ſexti*) *per parallelam* D M. *Et ideo extrema & media ratione per ſecundam decimiquarti. Eſt autem* T M *æqualis rectæ* E H, *& igitur* T K *ipſi* E F *vel* D H. *Reliquæ igitur* E H *&* T G *ſunt æquales: nam* F H *&* K G *ſunt æquales. Latus itaque* K G *trianguli* H K G *ſecatur in* T *extrema & media ratione, à recta* H T *cuius maius ſegmentum fuit* E D, *latus quidem icoſahedri octahedro, cuius baſis fuit* H K G (*vel* F K H *ſibi æqualis,*) *per 16 decimiquinti, inſcripti.*

Propoſitio quinta.

Latus Pyramidis extrema & media ratione ſectũ, efficit minus ſegmentum potentia duplum lateris ſibi inſcripti icoſahedri.



Eſto baſis pyramidis A B G, *baſis autem ſibi inſcripti icoſahedri* C D E, *deſcripta tribus rectis quæ ab angulis baſis* A B G *latera oppoſita extrema & media ratione ſecant, ex præfata, his ſcilicet* A M B I *&* G L: *Dico* A I *minus ſegmentum lateris* A G, *duplum poſſe lateris* C E *icoſahedri. Quoniam proxima patuit triangulum* C D E *inſcriptum eſſe triangulo æquilatero, cuius anguli ſecant extrema & media ratione latera baſis* A B G *pyramidis. Sit illud* F H K, *ſecans rectam* A B *in* F. *Erit itaque* F A *minus ſegmentum æquale ſegmento* A I, *per ſecundam decimiquinti, nempe eadem ratione ſectum, latus inſuper* F H *trianguli* F H K *ſecatur in* D *bifariam, vt proxima dictum eſt. Ac inſuper parallelogrammum fuit* F C E D, *& proinde æquales fuerunt rectæ* C E F D, *per 33 primi. Cùm autem recta* F H *ſubtendat angulum* B A G *trianguli æquilateri, comprehenſum maiori ſegmento* A H *& minori* A F, *duplum poteſt* F H *rectæ* A F, *ſiue* A I, *minoris ſegmenti, per coroll. decimæſextæ decimiquinti. Atqui eadem* F H *quadruplum poteſt rectæ* C E, *cùm ſit eius dupla, per 19 ſexti. Recta igitur* A I *dimidium rectæ* F H *potens duplum poterit rectæ* C E. *Latus itaque pyramidis* A G *extrema & media ratione ſectum, efficit minus ſegmentum* A I *potentia duplum lateris* C E *ſibi inſcripti icoſahedri.*

Corollarium.

Latus icoſahedri pyramidi inſcripti eſt apotome. *Nam dimetiens ſphæræ corpora continentis certa exiſtens, ſeſqualtera fuit potentia lateris pyramidis, ex 13 decimitertij, & ideo certa fuit latus pyramidis, per ſextam diffinitionem decimi. Quæ ſecta extrema & media ratione efficit minus ſegmentum apotome, per ſextam decimitertij. Igitur eidem minori ſegmento latus icoſahedri commenſurabile (dimidium nanque potens fuit) apotome erit, per ea quæ monuimus centeſimatertia decimi.*

Propoſitio ſexta.

Latus cubi dimidium poteſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis triangularis æquilateræ.

Cùm enim latus pyramidis cubo inſcriptæ bina ſubtendat cubi latera angulum rectum comprehendentia, ex prima decimiquinti, patulum erit (ex 47 primi) latus pyramidis ſubtendens, duplum

posse lateris cubi: quare & hoc illius dimidium necessariò poterit. Latus itaque cubi dimidium potest, &c.

Propositio septima.

Latus Pyramidis duplum est lateris sibi inscripti Octahedri.

Quoniam (ex secunda decimiquinti) ostendimus octahedri latus pyramidi inscripti, bifarias laterum pyramidis coniungere sectiones, Pyramidis igitur & octahedri latera parallela sunt, ex corol. 39 primi, & ideo (ex coroll. secundæ sexti) similia subtendunt triangula. Quare (per quartam sexti) duplum erit pyramidis latus lateris octahedri, nempe in ratione reliquorum laterum. Latus itaque pyramidis, &c.

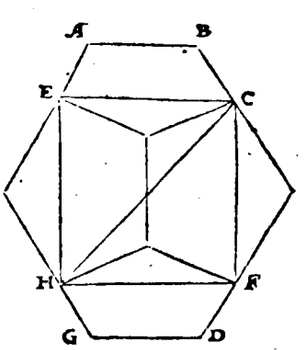
Propositio octaua.

Cubi latus duplum potest lateris sibi inscripti Octahedri.

Ostensum est (tertia decimiquinti) dimetientem octahedri cubo inscripti binarum oppositarum cubi basium centra coniungere, & ideo iam dimetientem lateri ipsius cubi æqualem esse. Sed eadem est dimetiens quadrati ex lateribus octahedri facti, scilicet sphæræ ipsum continentis, per 14 decimitertij. Dimetiens igitur illa lateri cubi æqualis, duplum poterit lateris huius quadrati, siue lateris octahedri sibi inscripti, per 47 primi. Cubi igitur latus duplum potest lateris, &c.

Propositio nona.

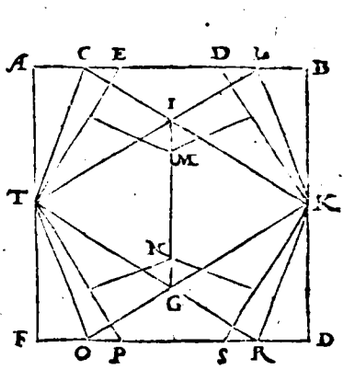
Dodecahedri latus, maius segmentum est, eius quæ dimidium potest lateris sibi inscriptæ Pyramidis.



Dodecahedri A B G D *latus esto* A B, *dodecahedro verò inscripti cubi basis sit* E C F H, *per octauam decimiquinti. Cubo verò inscriptæ pyramidis latus esto* C H, *per primam decimiquinti. Eadem igitur pyramis ipsi dodecahedro inscripta erit, per decimam decimiquinti: Dico latus dodecahedri* A B *esse maius segmentum eius quæ dimidium potest lateris* C H *sibi inscriptæ pyramidis. Quoniam* E C *latus cubi sectum extrema & media ratione efficit maius segmentum, rectam* A B *latus dodecahedri, per primum coroll. 17 decimitertij. Nam eadem sphæra capiuntur, ex prima huius, lateris verò* C H *dimidium potest* E C *latus cubi, per sextam huius. Latus igitur dodecahedri* A B *erit maius segmentum rectæ* E C, *quæ dimidium potest lateris* C H *sibi inscriptæ pyramidis. Dodecahedri itaque latus maius segmentum, &c.*

Propositio decima.

Latus Icosahedri media est proportionalis, inter latus cubi Icosahedro circunscripti, & Dodecahedri eidem cubo inscripti.



Esto cubus A B F D, *cui inscribatur icosahedrum* C L I G O R, *per 14 decimiquinti. Item dodecahedrum* E D M N P S *ex 13 eiusdem. Cùm enim icosahedri latus* C L *sit maius segmentum cubi* A B *circunscripti, per coroll. tertium decimæquartæ decimiquinti: Latus verò* E D *dodecahedri eidem cubo inscripti fuit minus segmentum lateris eiusdem* A B *cubi, per secundum coroll. 13 decimiquinti, Sequetur* A B *cubi latus extrema & media ratione sectum, efficere maius segmentum* C L *icosahedri sibi inscripti latus, minus verò segmentum* E D *latus dodecahedri sibi similiter inscripti. Sicut itaque tota* A B *cubi latus ad maius segmentum* C L *icosahedri latus, sic maius* C L *icosahedri ad minus* E D *dodecahedri latus erit, per tertiam diffinitionem sexti, Latus itaque icosahedri media est proportionalis inter latus cubi, &c.*

Propo-

Propositio vndecima.

Latus Pyramidis octodecuplum potest lateris sibi inscripti cubi.

Quoniam (per ea quæ ostensa sunt decimaoctaua decimiquinti) latus pyramidis triplum est, & ideo nocuplum potuit diametri basis sibi inscripti cubi, diameter autem, lateris cubi duplum (ex 47 primi) potest. Nocupli igitur duplum octodecuplum efficiet. Latus itaque pyramidis octodecuplum potest lateris sibi inscripti cubi.

Propositio duodecima.

Latus Pyramidis octodecupl ũ potest eius rectę cuius Dodecahedri latus Pyramidi inscripti, fit maius segmentum.

Cùm dodecahedrum & sibi inscriptus cubus eidem insideant pyramidi, per corollarium primæ huius, cubi verò inscripti lateris octodecuplum potuit latus circunscriptæ pyramidis ex proxima: at eiusdem lateris cubi maius segmentum est dodecahedri, cubum cõtinentis latus, per corollarium decimæseptimæ decimitertij. Latus igitur pyramidis octodecuplum potest, eius rectæ, scilicet lateris cubi, cuius dodecahedri latus pyramidi inscripti fit maius segmentum.

Propositio decimatertia.

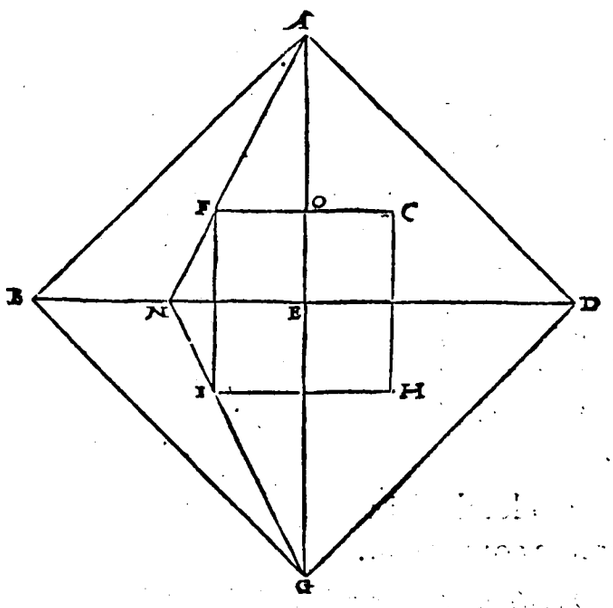
Minoris segmenti lateris Octahedri, duplum potest latus sibi inscripti Icosahedri.

Quoniam ostensum fuit (decimaseptima decimiquinti) latus icosahedri octahedro inscripti, binas laterum octahedri angulum rectum efficientium coniungere sectiones extrema & media ratione genitas, hunc autem rectum angulum minoribus ipsorum octahedri laterum segmentis contineri, à latere verò icosahedri inscripti subtensum: sequetur itaque icosahedri latus subtendens, binis comprehendentibus æquale potentia, per quadragesimamseptimam primi, dũplum posse singulorum comprehendentium angulum minorum lateris octahedri segmentorum. Minoris itaque segmenti lateris octahedri, &c.

Propositio decimaquarta.

Octahedri & sibi inscripti cubi latera, quadruplam sesquialteram rationem potentia habent.

Sit octahedrum A B G D E, *sibi verò inscriptus cubus esto* F C H I: *Dico esse* A B *latus octahedri, lateris* F I *cubi quadruplum sesquialterum potentia, in trianguli* A B E *basim* B E, *perpendicularis agatur* A N, *rursúsque alia* G N *ipsæ* A N G N *per centra* F *&* I *transeunt, & dupla est* A F *ipsius* F N, *per corollarium duodecimæ decimitertij: dupla igitur erit* A O *rectæ* O E, *per secundam sexti, cũ parallelæ sint* F O N E, *& proinde tripla erit* A G *dimetiẽs ipsius* F I: *quæ itaque* A G *eiusdem* F I *potentia nocupla erit, sed & lateris* A B *potentia dupla est* A G, *per decimamquartã decimitertij, ipsa igitur* A B *nocupli dimidium ferens, quadruplum sequialterũ potest rectæ* F I. *Octahedri itaque & sibi inscripti cubi latera quadruplã sesquialteram rationem habent potentia.*



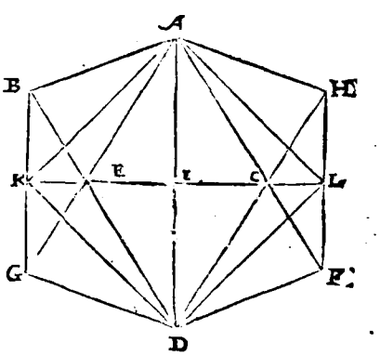
Propoſitio decimaquinta.

Octahedri latus quadruplum ſeſquialterum poteſt rectæ, cuius Dodecahedri ipſi Octahedro inſcripti latus erit maius ſegmentum.

Quoniam ex decimaquarta huius patuit latus octahedri, lateris ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum fuiſſe potentia: atqui latus cubi ſectum, efficit maius ſegmentum ſibi circunſcripti dodecahedri latus, per corollarium tertium decimætertiæ decimiquinti: ſequetur ideo octahedri latus quadruplum ſeſquialterum eſſe, eius rectæ (ſcilicet lateris cubi) cuius maius ſegmentum eſt latus dodecahedri ipſi cubo inſcripti: Dodecahedrum autem & cubus ſibi inuicem inſcripta eidem octahedro inſident, per corollarium primæ huius. Octahedri igitur latus quadruplum ſeſquialterum poteſt.

Propoſitio decimaſexta.

Icoſahedri latus eſt maius ſegmentum, eius quæ duplum poteſt lateris Octahedri ipſi Icoſahedro inſcripti.



Sit icoſahedrum A B G D F H E C, *cuius latus eſto* B G *vel* E C, *ſibi verò inſcriptum octahedrũ eſto* A K D L, *latúſque eius* A L: *Dico latus* E C *eſſe maius ſegmẽtum eius rectæ quæ duplum poteſt lateris* A L, *quoniam figurarum inſcriptarum & circũſcriptarum idem eſt centrum, per corollarium vigeſimæprimæ decimiquinti, ſit illud* I, *per quod centrum rectæ in bifarias oppoſitorum laterum ſectiones ductæ, ſcilicet* A I D K I L *ſeſe bifariam & ad rectos in* I *ſecant, per corollarium decimæquartæ decimiquinti: quia verò bifarias ſectiones rectarum oppoſitarũ* B G *&* H F *iungunt, ad rectos eas ſecãt, & igitur parallelæ ſunt* B G H F, *per quartum coroll. decimæquartæ decimiquinti, coniuncta igitur* B H *ipſi* K L *parallela & æqualis erit, per trigeſimamtertiam primi: ſed* B H *bina pentagoni latera ex lateribus icoſahedri compoſiti ſubtendit, ſcilicet* B A A H, *ipſa itaque* B H *ſecta maius ſegmentum efficit pentagoni latus, per octauam decimitertij, quod idem eſt icoſahedri ſcilicet* E C, *ipſi autem* B H *æqualis* K L *duplum poteſt lateris* A L *octahedri: nam rectus eſt quadrati* A K D L *angulus* K A L, *per quadrageſimamſeptimam primi. Latus igitur* E C *icoſahedri, maius ſegmentum eſt eius* B H *aut* K L, *quæ quidem duplum poteſt ipſius* A L, *lateris octahedri ipſi icoſahedro inſcripti. Icoſahedri itaque latus eſt maius ſegmentum eius quæ duplum poteſt lateris, &c.*

Propoſitio decimaſeptima.

Cubi latus ad ſibi inſcripti Dodecahedri latus, rationem habet extremę & mediæ rationis duplam.

Quoniam patuit ſecundo corollario decimætertiæ decimiquinti, cubi latus extrema & media ratione ſectum, efficere minus ſegmentum dodecahedri ſibi inſcripti latus, ſed tota ad minus ſegmentum duplam rationem habet quàm ad maius, per decimam diffinitionem quinti, quum tota maius & minus ſegmenta ſint continuæ proportionales rectæ, per tertiã diffinitionẽ ſexti. Tota igitur (ſcilicet cubi latus) ad ſibi inſcripti dodecahedri latus, ſcilicet minus eius ſegmentum, rationem habet duplam extremæ & mediæ rationis, ſcilicet eius quam habet tota ad maius ſegmentum, quæ ſemper eſt eadem, ex ſecunda decimiquarti.

Propoſitio decimaoctaua.

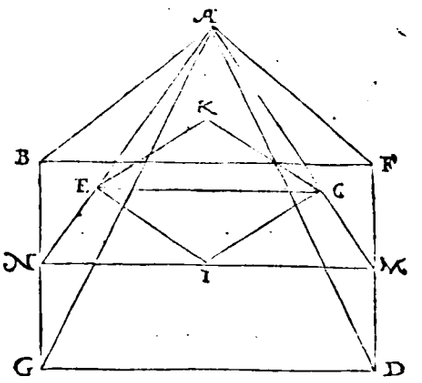
Dodecahedri ad ſibi inſcripti cubi latus, rationem habet mediæ, ac extremę conuerſam.

Oſtenſum eſt tertio corollario decimætertiæ decimiquinti, circunſcripti cubo dodecahedri latus iuſdem cubi maius eſſe ſegmentum: totum igitur inſcripti cubi latus ad maius ſegmentum ſcilicet circun-

circunſcripti dodecahedri latus, rationem habet mediam & extremam. Conuertendo itaque mains ſegmentum (hoc eſt dodecahedri latus) ad totam (nempe inſcripti cubi latus) extremæ & mediæ conuerſam habet, per decimamtertiam diffinitionem quinti.

Propoſitio decimanona.

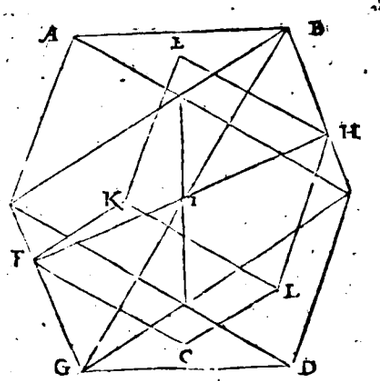
Latus Octahedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis.



Quoniam (per corollarium decimæquartæ decimitertij) octahedrum ſecatur in binas quadrilateras pyramides, eſto altera earum A B G D F, *circulorum autem quatuor octahedri baſes obeuntium centra ſint* K E I C, *coniunctis* K E E I I C, C K E C *rectis: quadratum itaque erit* K E I C, *& baſis cubi ipſi octahedro inſcripti, per quartam decimiquinti. Cùm enim cubi & ſibi inſcriptæ pyramidis anguli in centris baſium octahedri cubo circunſcripti habitent, per ſextam decimiquinti, & pyramidis latus oppoſitos baſis cubi angulos coniungat, per primã decimiquinti, manifeſtum erit rectam* E C *latus eſſe pyramidis octahedro* A B G D F *inſcriptæ: Dico igitur latus* G D *octahedri ſeſquialterum eſſe ipſius* E C, *lateris pyramidis ſibi inſcriptæ, à ſigno* A *perpẽdiculares in baſes* B G *&* F D *demittantur* A N A M, *ipſæ (ex corollario duodecimæ decimitertij) per centra* E *&* C *ducentur, Coniungantur autem* N M, *cùm autem quadratum ſit* B G D F *per decimamquartam decimitertij, parallelæ erunt* N G *&* M D, *& æquales: nam ſectæ ſunt* B G *&* F D *à perpendicularibus in* N M *bifariã, per tertiam tertij, parallelæ igitur erunt & æquales* N M G D, *per decimamtertiam primi, quia verò ſectæ ſimiliter ſunt rectæ* A N A M *in* E *&* C, *ſimilium & æqualium triangulorum perpendiculares, parallelæ erunt (per ſecundam ſexti)* E C N M *rectæ, & proinde (ex corollario eiuſdẽ) ſimilia erunt triangula* A E C A N M, *quare erit* A N *ad* A E *ſicut* N M *ad* E C, *per quartam ſexti. Eſt autem* A N *ipſius* A E *ſeſquialtera, cùm* A E *dupla ſit ipſius* E N, *per corollariũ duodecimæ decimitertij, recta igitur* N M, *ſiue* G D *ſibi æqualis, ſeſquialtera erit rectæ* E C. *Latus itaque* G D *octahedri, lateris* E C *ſibi inſcriptæ pyramidis, ſeſquialterum erit.*

Propoſitio Vigeſima.

Si ab Icoſahedri dimetientis potentia, tripla auferatur lateris ſibi inſcripti Cubi potentia, reliqua ſeſquitertia erit potentiæ lateris ipſius Icoſahedri.



Proponatur icoſahedrum A B G D, *ſibi verò inſcripti cubi binæ baſes coniunctæ ſint* E H K L F C, *dimetiens cubi ſit* F H, *latus verò* E H, *dimetiẽs autem icoſahedri ſit* B G, *latus verò* A B: *Dico ſi à potentia dimetientis* G B *auferatur tripla ipſius* E H *lateris cubi potentia, reliquam ſeſquitertiam eſſe potentiæ lateris* A B *icoſahedri, cùm centra inſcriptarum & circunſcriptarum figurarum, idem ſignum poſſideant, per corollarium vigeſimæ primæ decimiquinti, dimetientes* B G *&* F H *in eo ſeſe bifariam ſecabunt: nam vertices æqualium & ſimilium pyramidum in eo conuenire docuimus, per idem corollarium, ſit illud ſignum* I *centrum, anguli igitur cubi qui ad* F *&* H, *centra baſium icoſahedri poſſidẽt, per vndecimam decimiquinti: recta itaque* F H *vtriſque icoſahedri baſibus perpendicularis erit, per corollarium lemmatis decimæſextæ duodecimi: recta igitur* I B *binas* I H H B *poteſt, per quadrageſimamſeptimam primi, eſt autem* H B *quæ ex centro circuli baſim icoſahedri ſuſcipientis, nempe angulus* B *in circunferẽtia locatur,* H *verò centrum eſt: tota itaque* B G *totas* F H *& dimetientem circuli (ipſius* B H *duplam) poteſt, per decimamquintam quinti, ſed dupla rectæ* H B *dimetiens, ſeſquitertium poteſt lateris trianguli æquilateri eidẽ circulo inſcripti, per corollarium duodecimæ decimitertij, eſt enim ad latus, vt latus ad perpendicula-*

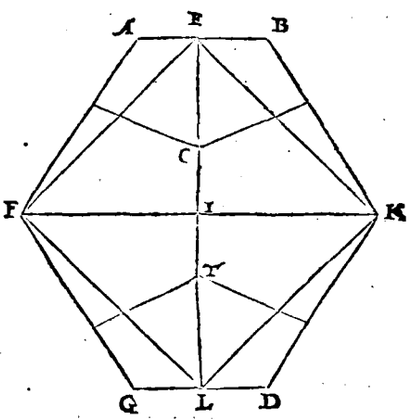
rem trianguli, per corollarium octauæ ſexti. Dimetiens verò cubi F H, *triplum poteſt lateris* E H *eiuſdem cubi, per decimamquintam decimitertij: ſi itaque à potentia dimetientis* B G *auferatur tripla potentia lateris* E H *inſcripti cubi, hoc eſt potẽtia rectæ* F H, *reliqua (ſcilicet potentia dimetientis circuli duplæ ipſius* H B) *ſeſquitertia erit lateris trianguli ipſi circulo inſcripti, quod idem eſt icoſahedri latus* A B. *Si igitur ab icoſahedri dimetientis potentia, &c.*

Corollarium.

Dimetiens Icoſahedri binas poteſt, dimetientem inſcripti cubi quæ baſium oppoſitarum centra iungit, & dimetientem circuli baſim icoſahedri continentis. *Patuit enim dimetientem* B G *poſſe rectam* F H *centra iungentem & duplam rectæ* BH, *hoc eſt dimetientem circuli baſim circa centrum* H *continentis.*

Propoſitio vigeſimaprima.

Dodecahedri latus minus ſegmentum eſt, eius quæ duplum poteſt lateris Octahedri, eidem Dodecahedro inſcripti.



Exponatur dodecahedrum A B G D C T, *cuius vnum latus ſit* A B. *Ipſi dodecahedro inſcriptum octahedrum eſto* E F L K I, *cuius latus ſit* E F: *Dico* A B *latus dodecahedri eſſe minus ſegmentum cuiuſdam rectæ (extrema & media ratione ſectæ) quæ duplum poteſt lateris* E F, *octahedri dodecahedro inſcripti. Iungãtur octahedri dimetientes* E L F K, *ipſæ bifarias ſectiones oppoſitorũ dodecahedri laterũ* A B *&* G D *coniungunt (per nonam decimiquinti, & tertium corollarium decimæſeptimæ decimitertij) ſingulæque earum extrema & media ratione ſectæ, minus efficiunt ſegmentum latus dodecahedri, per quartum corollarium eiuſdẽ. Rectæ igitur* F K *minus ſegmentum eſt* A B *latus, ſed recta* F K *binas poteſt* E F *&* E K *æquales, per* 47 *primi: nam rectus eſt* F E K *angulus quadrati* F E K L *octahedri. Recta itaque* F K *duplum poteſt rectæ* B F, *erit ideo* A B *latus minus ſegmentum eius* F K, *quæ duplum poteſt ipſius* E F, *lateris octahedri. Dodecahedri igitur latus, minus ſegmentum eſt eius quæ, &c.*

Propoſitio vigeſimaſecunda.

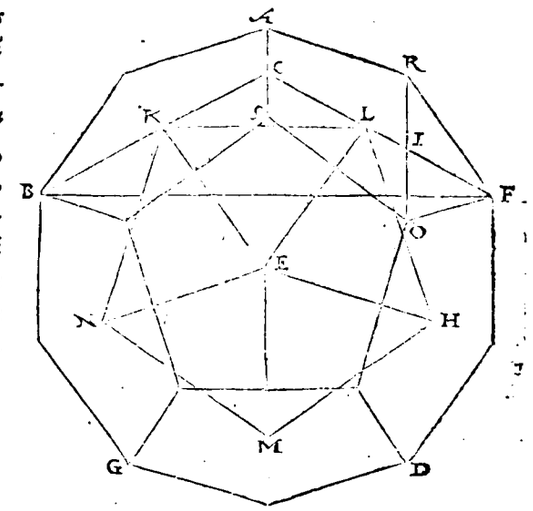
Dimetiens Icoſahedri poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Icoſahedro inſcriptæ Pyramidis ſeſquialterum.

Cùm enim oſtẽſum ſit, à dimetiente icoſahedri ablato triplo lateris cubi ſibi inſcripti, relinqui ſeſquitertium lateris ipſius icoſahedri potentia, per vigeſimam huius. Sed tripla lateris cubi potẽtia eſt dimetiens ipſius cubi, per decimamquintam decimitertij, cubus autem & ſibi inſcripta pyramis eadem ſphæra concipiuntur, per primam huius, eodémque icoſahedro, per corollarium eiuſdem. Idem itaque diameter cubi ſiue ſphæræ cubum & pyramidem continentis, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis, per decimamtertiam decimitertij. Sequetur itaque à dimetiẽte Icoſahedri ablata tripla potẽtia lateris cubi, ſiue ſeſquialtera lateris pyramidis, quæ ſunt eiuſdẽ dimetientis potentiæ, relinqui ſeſquitertium lateris ipſius Icoſahedri. Dimetiens igitur icoſahedri poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, & lateris icoſahedro inſcriptæ pyramidis ſequialterum.

Propoſitio vigeſimatertia.

Dodecahedri latus ad Icoſahedri ſibi inſcripti latus, ſe habet vt minus ſegmentum perpendicularis pentagoni, ad eam quæ ex centro in latus eiuſdem pentagoni.

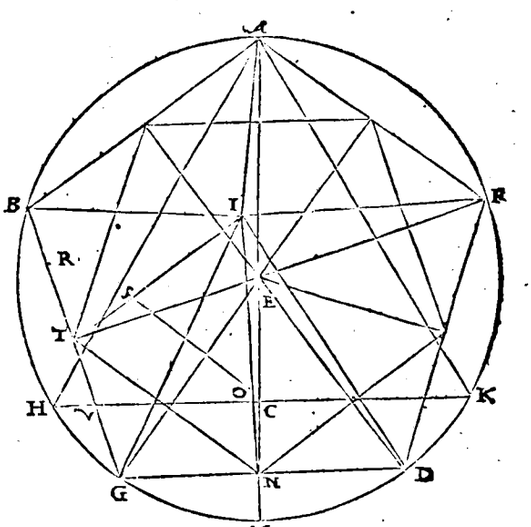
Propo-



Proponatur dodecahedrum A B G D F S O, *cuius latus sit* A S *vel* S O, *sibi verò inscriptũ icosahedrũ esto* K L H M N E, *cuius latus sit* K L. *A binis autẽ pẽtagonorũ* B A S F A S *dodecahedri angulis, in cõmunem basim* A S *perpẽdiculares mittantur* B C F C, *ipsæ per centra pentagonorum* K *&* L *transeunt, per corollarium decimæ decimitertij, iungãtur* B F R O, *quoniam* R O *subtendit angulum pentagoni dodecahedri* O F R, *ipsa secat rectam* F C *extrema & media ratione per tertiã huius, secet in* I, *quia verò* K L *est latus icosahedri dodecahedro inscripti, ipsa centra* K L *coniungit, nam anguli icosahedri in centris basium dodecahedri morantur, per septimam decimiquinti: Dico dodecahedri latus* S O *sic esse ad icosahedri latus* K L, *vt minus segmentum* I F *rectæ* C F *perpẽdicularis, ad* L C *quæ ex centro* L *in latus* A S *pentagoni. Cùm trianguli* B C F *bina latera* C B C F *similiter secta sint in* L *&* K *centris, proportionaliter sectæ parallelas efficient rectas* B F K L, *per secundam sexti, æquiangula igitur erunt triangula* B C F *&* K C L, *per corollarium eiusdem: sicut itaque* C L *ad* K L, *sic erit* C F *ad* B F, *per 4 sexti. Sed* C F *efficit minus segmentum* I F, *per tertiam huius, &* B F *efficit minus* S O, *latus inquam dodecahedri, per corollarium secundum decimætertiæ decimiquinti. Nam* B F *iungens angulos* B *&* F *basium dodecahedri, æquatur lateri cubi dodecahedrum capientis, ex decimatertia decimiquinti. Sicut itaque tota* C F *ad totam* B F, *sic erit minus segmentum* I F *ad minus* S O (*nempe similiter sectarum, per secundam decimiquarti, sed sicut* C F *ad* B F, *sic fuit* C L *ad* K L. *Sicut itaque* I F *ad* S O, *sic erit* C L *ad* K L, *vicißim igitur (per decimamsextam quinti) vt* I F *minus segmentum perpendicularis pentagoni* F A S *ad* L C *eã quæ ex centro pentagoni in basim, sic erit* S O *latus dodecahedri, ad* K L *latus sibi inscripti icosahedri. Dodecahedri igitur latus ad isacohedri sibi inscripti latus se habet, vt minus segmentum, &c.*

Propositio vigesimaquarta.

Si lateris icosahedri dimidia extrema & media ratione secta fuerit, minúsque segmentum eius à toto latere tollatur, Reliquæ verò tertia pars rursus auferatur, quæ supereſt, æqualis erit lateri Dodecahedri ipsi Icosahedro inscripti.

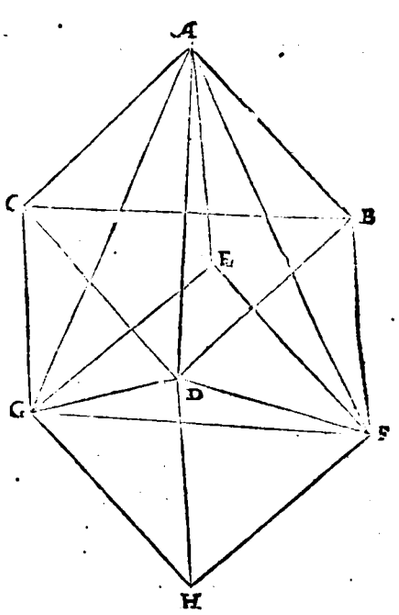


Sit quinquangulum A B G D F *quinquè icosahedri latera comprehendens, per* 16 *decimitertij, circulo cuius centrum sit* E *contentum, super huius autem quinquanguli lateribus excitentur triangula angulum solidum icosahedri qui ad* I *componentia, per* 16 *decimitertij, In circulo autem* A B D *triangulum æquilaterum inscribatur* A H K. *A centro* E *in bina* H K *&* G D *latera trianguli ac pentagoni perpendicularis mittatur* E C N M *recta, ductis* E G E D I G I D *rectis. Secetur bifariam* B G *in* T *coniunctis* I N I T T N E T. *Quoniam in rectis* I T I N *sunt centra circulorum triangula æquilatera* I B G I G D *continentium, per coroll. primæ tertij. Sint hæc* S *&* O, *coniuncta* S O *recta, lateris porrò icosahedri* B G, *dimidia* T B *extrema & media ratione secetur in* R, *per trigesimam sexti, minúsque eius segmentum esto* R B. *Cùm enim triangulorum* I B G I G D *centra coniungat recta* S O. *Ipsa (per quintam decimiquinti) erit latus dodecahedri, icosahedro cuius latus est* B G *inscripti. A* B G *igitur latere tollatur* B R, *minus segmentum dimidiæ. A reliquo verò* G R *tertia pars auferatur (per nonam sexti)* G V: *Dico reliquam* R V *æqualem esse ipsi* S O *lateri inscripti dodecahedri. Cùm autem*

perpendicularis E N *ſecetur in* C *extrema & media ratione, per coroll. primæ decimiquarti. Maiúſque eius ſegmentum ſit* E C, *Ipſi verò* E C *ſit æqualis* C M, *per coroll.* 12 *decimitertij. Erit* E C *ad* C N *vt* C M *ad eandem* C N, *per ſeptimam quinti. Sed ſicut* E C *ad* C N *ſic tota* E N *ad maius ſegmentum* E C, *per tertiam diffinit. ſexti. Sicut itaque (per vndecimam quinti) tota* E N *ad maius ſegmentum* E C, *ſic* C M *ad* C N. *Recta ideo* C M *extrema & media ratione ſecatur in* N, *nempe ſimiliter ipſi* E N, *per ſecundam decimiquarti. Recta igitur* E M *excedit rectam* E N *minori ſegmento dimidiæ ſui ipſius, quod eſt* M N. *Cùm inſuper* E G D *ſit triangulũ pentagoni æquilateri & æquianguli* A B G D F, *&* E T N *ſit ſimiliter triangulum ſimilis pentagoni ipſi* A B G D F *inſcripti. Erit (ex vigeſima ſexti)* E T N *ipſi* E G D *ſimile. Sicut itaque* E G *ad* E N *ſic erit (per quartam ſexti)* G D *ad* N T. *Recta igitur* G D *(vel* B G *ſibi æqualis) excedit rectam* N T *minori ſegmento dimidiæ ſui ipſius* B G: *nã* E G *exceſſit ſimiliter ipſam* E N. *Eſt autem minus illud ſegmentum* B R, *Reliqua igitur* R G *rectæ* N T *æqualis erit. Quoniã triangulum æquilaterum eſt* I B G. *Perpendicularis* S T *dimidia eſt eius quæ à centro* S I, *per coroll. duodecimæ decimitertij. Recta itaque* I T *excedit rectam* I S *tertia ſui ipſius parte. Quia verò* S O *ſectiones coniungens, parallela eſt ipſi* T N, *per ſecundam ſexti. Nam ſimiliter ſectæ ſunt* I T *in* per. S *&* O. *Similia erunt* I T N I S O *triangula, per coroll. ſecundæ ſexti. Sicut itaque* I T *ad* I S *ſic (per quartam ſexti)* T N *ad* S O. *Excedit autem* I T *rectam* I S *tertia parte. Excedet igitur* T N *rectam* S O *tertia parte. Sed ipſi* T N *æqualis fuit* R G. *Recta igitur* R G *excedet rectam* S O *tertia ſui parte quæ quidem fuit* G V. *Quare reliqua* R V *rectæ* S O *erit æqualis, lateri quidem dodecahedri, icoſahedro cuius latus fuit* B G *inſcripti. Si itaque lateris icoſahedri dimidia extrema & media ratione ſecta fuerit, minúſque, &c.*

Propoſitio vigeſimaquinta. Problema 1.

Datum cubum ſibi inſcriptæ trilateræ æquilaterę Pyramidis, triplum eſſe demonſtrare.

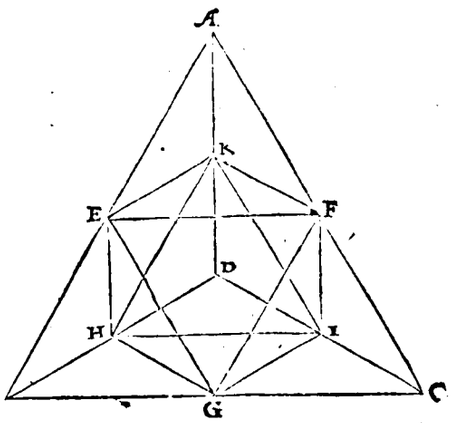


Datus cubus ſit A B C H, *ſibi verò inſcripta pyramis eſto* A G D F: *Dico cubum* A B C H *pyramidis* A G D F *triplum eſſe. Quoniam baſis* A F D *communis eſt pyramidibus* A F D B *&* A F D G, *pyramis* A F D B *extra pyramidem* A F D G *erit. Similiter & reliquæ inſcriptæ pyramidis baſes communes ſunt reliquis pyramidibus extrinſecus poſitis, quæ ſunt* A G D C *ſuper baſi* A D G, *&* A E G F *ſuper baſi* A G F. *Super baſi verò* G D F *pyramis* G D F H. *Quæ quidem pyramides extrinſecus ſumptæ ſunt quatuor, æquales adinuicem & ſimiles, per octauam diffinit. vndecimi. Nam ſingulæ tribus hemiquadris cubi vnáque pyramidis inſcriptæ baſi cõcluduntur. Quælibet itaque earum ſuper dimidia cubi baſi ac ipſius cubi altitudine continetur, vt pyramis* A E G F *baſim habet dimidiam quadrati* E H, *eam ſcilicet* E G F, *cubi verò altitudinem* A E. *Quæ ideo ſexta erit ipſius cubi pars. Nam ſi ſecetur cubus in bina priſmata plano* C B F G, *priſma* A C B G E F *triplum erit pyramidis* A E G F, *ſuper eadem eius baſi* E G F *& vertice* E A, *per coroll. primum ſeptimæ duodecimi. Totius igitur cubi ipſa* A E G F *& pyramis exterior ſexta pars erit. Et proinde ipſa eadem cum tribus reliquis* A F D B A G D C, *&* G D F H *totius cubi duo tertia complebit. Quare rliqua* A G D F *inſcripta reliquum cubi tertium comprehendet, & proinde cubus ipſius triplum conuerſim continebit. Datum itaque cubum ſibi inſcriptæ trilateræ æquilateræ pyramidis, triplum eſſe demonſtrauimus.*

Propoſitio vigeſimaſexta. Problema 2.

Pyramidem trilateram æquilateram, ſibi inſcripti octahedri duplam oſtendere.

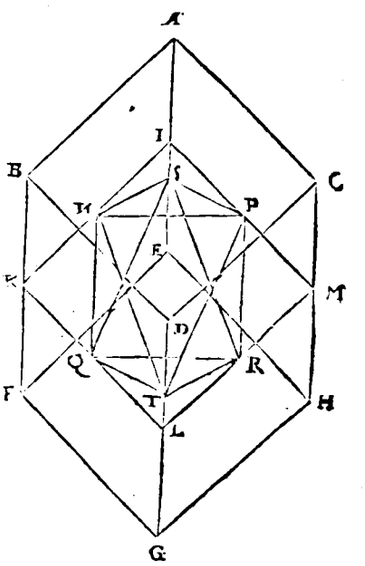
Propona



Proponatur trilatera pyramis ABCD, *cuius sex latera bifariam secentur in* EH GI FK, *descripto (ex secunda decimiquinti) in ipsa octahedro. Pyramides igitur* AEKF BEGH CGIF *&* DHKI *extra inscriptum octahedrum cadunt, per eandem secundam decimiquinti. Sed pyramides extrinsecæ (scilicet* AEKF *& tres reliquæ) sunt toti similes, per septimam diffinit. vndecimi. Nam secantur earum bases in triangula similia, per parallelas, ex coroll. secundæ sexti. Tota itaque ad singulas earum triplam habet laterum rationem, per octauam duodecimi. Dupla autem fuit laterum* AB *ad* AE *ratio, per constructionem. Pyramis itaque* ABCD *pyramidis* AEFK *ac singularum ipsi* AEFK *æqualium, octupla erit. Dupla nanque bis in se ducta octuplam restituit. Sequetur igitur quatuor pyramides* AEFK BEGH CGFI, *&* DKHI *simul sumptas, dimidium totius* ABCD *pyramidis efficere. Reliquum igitur scilicet octahedrum* EFIHKG, *dimidium totidem restituet. Pyramis ideo ipsius octahedri duplum referet. Pyramidem igitur trilateram æquilateram sibi inscripti octahedri duplam ostendimus.*

Propositio vigesimaseptima. Problema 3.

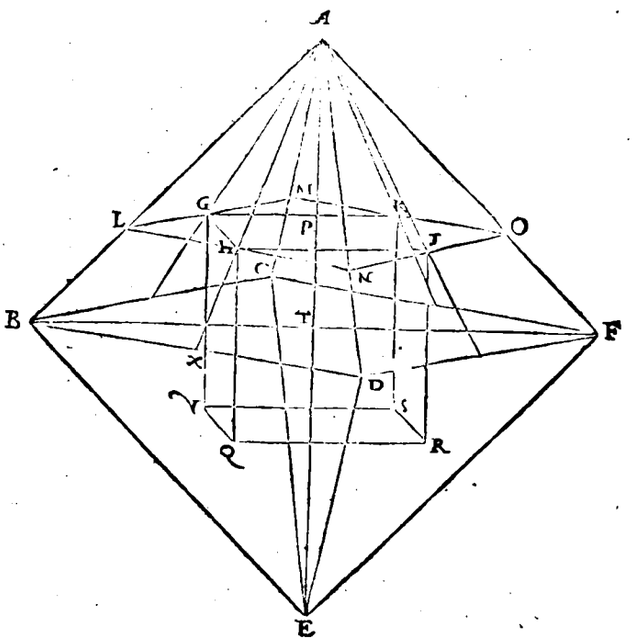
Cubum sibi inscripti octahedri, sextuplum esse propalare.



Exponatur cubus ABGD EFGH. *Cuius quatuor stantes* AE BF CH *&* DG *bifariam secentur in* IKML, *per ea verò signa ducatur planum* KLMI. *Quod quadratum erit & parallelon quadratis* BC FH, *per decimamquintam vndecimi. In ipso igitur erit basis communis binis pyramidibus octahedri in ipso cubo inscripti, per ostensa tertia decimiquinti. Sit igitur ipsa basis quadratum* NPRQ *centra basium cubi coniungens, super ipsa verò (ex eadem tertia decimiquinti) constituantur binæ octahedri pyramides* NPQRS *&* NPQRT. *Quoniam binæ illæ pyramides totius cubi altitudini æquantur sublimitate, singulæ dimidiam habent cubi altitudinem, scilicet dimidium cubi latus* KB. *Cùm autem quadratum* KLMI *quadrati* NQRP *sit duplum, per* 47 *primi, Reliqua cubi quadrata ipsius* NQRP *dupla erunt singula. Quia verò cubus vt patuit vltima decimiquinti, resoluitur in sex pyramides, quarum bases sunt bases cubi, vertices verò, quæ ex centro in bases, dimidio cubi lateri æquales, sequetur cubi singulas sex pyramides, super duplici basi eodem autem vertice ipsi octahedri pyramidibus, duplas esse pyramidum octahedri, per sextã duodecimi. Cùm itaque singulæ cubi pyramides binis octahedri pyramidibus sint æquales, sex cubi pyramides totius octahedri sextuplum proferent. Cubum itaque sibi inscripti octahedri sextuplum esse propalatum est.*

Propositio vigesimaoctaua. Problema 4.

Datum Octahedrum, sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum patefacere.



Proponatur octahedrum ABCDFE, *Ipsi verò inscriptus cubus esto* GHIK VQRS: *Dico octahedrum inscripti cubi quadruplum sesquialterum fore. Cùm à centro octahedri siue sphæræ illud continentis in suarum basium centra ductæ, æquales ostensæ sint, per* 21 *decimiquinti. Cubi verò anguli in harum basium centris degant, per quartam decimiquinti. Sequetur ipsas easdem rectas ab eodem cubi & octahedri centro ortas esse, cùm idem sit eorum centrum, per coroll.* 21 *decimiquinti. Sit igitur illud centrum* T. *Basis itaque* BDFC *secans octahedrum in binas æquas & quadrilateras pyramides, per coroll.* 14 *decimitertij, secabit cubum bifariam, per coroll.* 39 *vndecimi. Nam ea per centrum* T *transit, per demonstrata* 14 *decimitertij. Cùm autem basis cubi in* GHIK *quatuor centris basium pyramidis* ABDFC *consistat, per ea signa extensum planum* LNOM *parallelum erit plano* BDFC, *per ostensa quarta decimiquinti, secabitque pyramidem in signis* LNOM, *& parallelæ erunt* LN BD, *&* NO DF, *necnon* OM FC, *&* LM BC, *& quadrato* LNOM *inscriptum erit quadratum cubi* GHIK, *per eandem. Duplum igitur erit* LO OM *ipsius* GHIK, *per* 47 *primi. Demittatur à solido angulo* A *perpendicularis in planum* BDFC, *quæ cadat in* T, *sit q*. AT, *secans planũ* LNOM *in* P. *Ipsa recta similiter erit ad* LNOM *planum, per coroll.* 14 *vndecimi. Demittatur rursus ab angulo* BAD *trianguli* ADB, *per centrum trianguli scilicet* H *in basim, recta* AHX. *Sesquialtera igitur erit* AX *ipsius* AH, *per coroll.* 12 *decimitertij, quare dupla fiet* AH *ipsius* HX. *Similiter igitur sectæ erunt reliquæ* AB AD AF AC, *per* 17 *vndecimi, Atque perpendicularis* APT. *Dupla igitur erit* AP *rectæ* PT. *Et proinde ipsius cubi erit altitudo* AP, *cùm dimidia fuerit* PT. *Quia verò super* GHIK *cubi basi, & altitudine* AP, *eiusdem cubi constituitur pyramis* AGHIK, *ipsa cubi tertia pars est, per coroll.* 7 *duodecimi. Sed pyramidis* AGHIK *dupla est pyramis* ALNOM, *super dupla basi, per sextam duodecimi. Pyramis igitur* ALNOM *duo tertia cubi complet. Cùm autem similes sint pyramides* ALNOM *&* ABDFC, *per septimam diffinitionem vndecimi, Ipsæ triplam habent quam latera* AH *ad* AX, *vel* AL *ad* AB *rationẽ, per coroll. octauæ duodecimi. Sed* AB *ipsius* AL *sesquialterum fuit latus, sesquialtera igitur quantitas rationis ter sumpta (per* 5 *diffinitionem sexti) triplam tripartientem octauas componet, hæc est,* $3\frac{1}{8}$ *quãtitas rationis. Nam* $1\frac{1}{2}$ *in se efficit* $2\frac{1}{4}$, *quòd rursus, per* $1\frac{1}{2}$, *efficit* $3\frac{3}{8}$. *Erit igitur pyramis* ABCDF *ad pyramidem* ALNOM, *sicut* 27 *ad* 8, *in ea scilicet ratione* $3\frac{3}{8}$. *Sed qualium* ALNOM *pyramis fuit* 8, *cubis fuit* 12, *sesquialterum nempe pyramidis. Qualium igitur cubus fuit* 12 *eorum totum octahedrum (duplum, scilicet pyramidis* ABDFC) *erit* 54. *Quæ quidem* 54 *ad* 12 *rationem habent quadruplam sesquialteram. Totum itaque octahedrum inscripti cubi quadruplum sesquialterum erit. Datum igitur octahedrum, sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum patefecimus.*

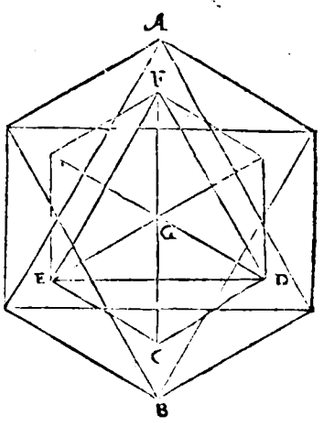
Corollarium.

Octahedrum & sibi inscriptus Cubus rationem quam latera potentia habent. *Nam* 14 *huius latus octahedri quadruplum sesquialterum potuit lateris sibi inscripti cubi.*

Propositio vigesimanona. Problema 5.

Propositum Octahedrum, sibi inscriptæ trilateræ æquilateræ Pyramidis, tredecuplum sesquialterum ostendere.

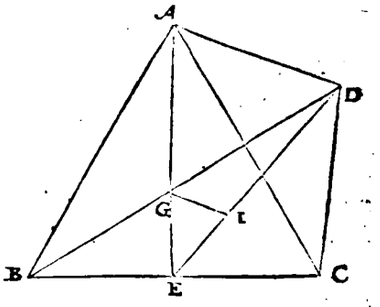
Propo



Propoſitum octahedrum eſto A B *cui inſcribatur cubus* F C E D, *per quartã decimiquinti, ipſi verò cubo pyramis* F E G D, *per primam decimiquinti inſcribatur, quoniã anguli pyramidis (ex eadem) in cubi angulis morantur, cubi verò anguli in centris baſium octahedri conſiſtunt* F E C D G, *per quartam decimiquinti, anguli itaque pyramidis in centris baſium octahedri* F E G D *conſtituentur. Pyramis igitur* F E D G *octahedro (per ſextam decimi quinti) ẽnſcripta erit, cùm autem octahedrum* A B *ſibi inſcripti cubi* F C E D *(per præfatam) quadruplum ſeſquialterum oſtenſum fuerit, cubus verò* C D E F *pyramidis* F E D G *ſibi inſcriptæ (ex vigeſimaquinta huius) triplus eſſe demonſtretur. Tribus igitur magnitudinibus expoſitis, octahedro ſcilicet cubo & pyramide extremorum (octahedri ſcilicet ad pyramidem) rationem, ex rationibus mediis (ſcilicet octahedri ad cubum, & cubi ad pyramidem) eliciamus, iuxta ea quæ decimam quinti diffinitionem exponẽtes docuimus. Tum igitur multiplicãdæ erunt rationũ (octahedri ad cubum quæ fuit* $4\frac{1}{2}$, *& cubi ad pyramidem quæ fuit* 3) *quantitates, ex quinta diffinitione ſexti, vt oriatur* $13\frac{1}{2}$ *octahedri ad ſibi inſcriptam pyramidem ratio: nam* $4\frac{1}{2}$ *per* 3 *ducta,* $13\frac{1}{2}$ *reſtituent. pyramidis igitur inſcriptæ octahedrum tredecuplum ſeſquialterum erit. Propoſitum itaque octahedrum ſibi inſcriptæ trilateræ, &c.*

Propoſitio trigeſima. *Problema 6.*

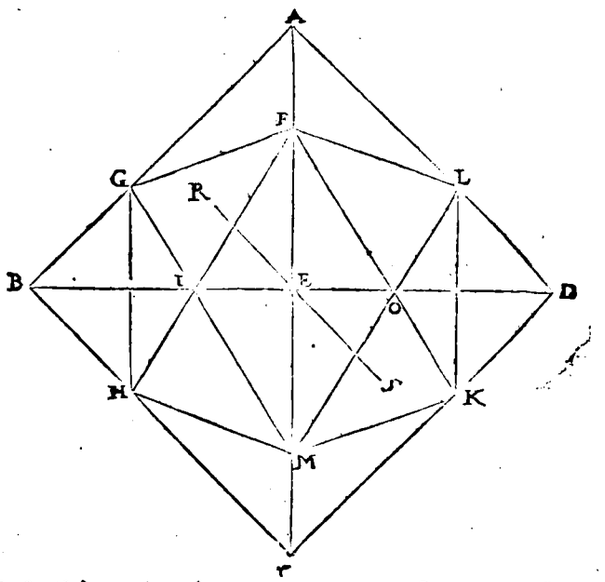
Trilateram æquilateram Pyramidem, ſibi inſcripti cubi nocuplam eſſe demonſtrare.



Eſto pyramis A B C D, *cuius duæ baſes ſint* A B C D B C, *earum verò centra ſint* G *&* I, *ab angulo* A *in baſim* B C *perpendicularis agatur* A E, *ab angulo autem* D *in baſim eandem* B C *fiat perpendicularis* D E, *ipſæ conuenient in* E *ſectionem, per tertiam tertij, & in eis erunt centra* G *&* I, *per corollarium primæ tertij: cùm autem* A D *ſit pyramidis latus, ipſa* A D *erit dimetiens baſis cubi pyramidem obeuntis, per primam decimiquinti. Iungantur ideo* G I. *Quia recta* G I *cẽtra coniungit baſium pyramidis, ipſa* G I *erit dimetiens baſis cubi ipſi pyramidi inſcripti, per decimãoctauam decimiquinti, cùm autem* A G *ſit ipſius* G E *dupla, ex corollario duodecimo decimitertii, tota* A E *tripla erit rectæ* G E, *necnon* D E *rectæ* I E, *quare parallelæ ſunt* A D G I, *per ſecũdam ſexti: & ideo ſimilia* A E D G E I *triangulæ, per corollarium eiuſdem. Quia verò ſimilia ſunt triangula* A E D G E I, *tripla erit* A D *ipſius* G I, *per quartam ſexti, ſed* A D *fuit dimetiẽs baſis cubi pyramidi* A B C D *circunſcripti,* G I *verò fuit dimetiens baſis cubi eidem pyramidi* A B C D *inſcripti, baſium verò dimetientes, laterum ſunt æquemultiplices (nempe potentia dupli) cubi igitur circunſcripti ipſi* A B C D *pyramidi latus, triplum erit lateris cubi eidem pyramidi inſcripti, per decimamquintam quinti: ſimiles autem cubi triplam habent laterum rationem, per trigeſimamtertiam vndecimi, latera verò triplam inter ſe habent. Tripla itaque ter ſumpta vigeſimamſeptuplam producet, quæ eſt* 27 *ad* 1: *nam quatuor terminis* 27, 9, 3, 1, *in tripla ratione conſtitutis, erit (per decimam diffinitionem quinti) tripla ratio primi* 27 *ad quartum* 1, *ſuæ rationis primi* 27 *ad ſecundum* 9, *quæ quidem eſt tripla laterum ratio, ſimilibus conueniens ſolidis, qualium itaque circũſcriptus cubus erit* 27, *eorum inſcriptus erit vnius: ſed qualium circũſcriptus cubus fuit* 27 *eorum ſibi inſcripta pyramis fuit* 9, *per vigeſimamquintam huius: qualium igitur pyramis* A B C D *erit* 9, *eorum pyramidi inſcriptus cubus erit vnius. Trilateram igitur æquilaterã pyramidem, ſibi inſcripti cubi nocuplam eſſe demonſtrauimus.*

Propoſitio trigeſimaprima.

Octahedrum ad ſibi inſcriptum Icoſahedrum eam ſeruat quam binę Octahedri baſes ad quinque Icoſahedri baſes rationem.

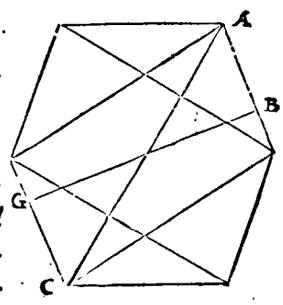


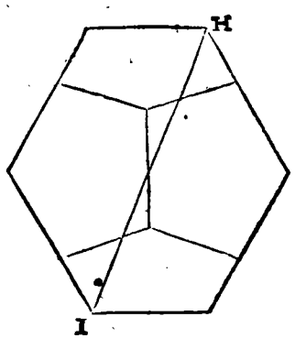
Sit propoſitum octahedrum A B C D, *ſibi verò inſcriptũ icoſahedrũ eſto* F G H M K L I O: *Dico octahedrum ad icoſahedrum eſſe, ſicut duæ octahedri baſes ad quinque icoſahedri baſes: quoniam octahedri ſolidum conſtat octo pyramidibus, ſuper octahedri baſibus altitudine verò recta à centro in baſim perpendiculari conſtitutis, ſit ea perpendicularis* E R *vel* E S, *demiſſa ab* E *centro ſolidorum eodme (per corollar. vigeſimæ primæ decimiquinti) in cẽtra baſium* R *&* S. *Tres igitur pyramides, cùm ſint æquales & ſimiles, æquales erunt priſmati ſuper eadem baſi, & altitudine per corollariũ ſeptimæ duodecimi. Sed huius priſmatis duplũ eſt quod ſuper eadẽ baſi dupla verò altitudine, ſcilicet tota* R S, *per corollarium vigeſimæquintæ vndecimi: nam æquum eſt binis æquis & ſimilibus ex quibus componitur. Priſma itaque ſuper baſi octahedri, altitudine verò* R S *æquum erit ſex pyramidibus ſuper baſibus ſex octahedri vertice verò* E R *cõſtitutis. Superſunt autem binæ pyramides, cùm ſint octo octahedri baſes, quæ igitur æquales erunt priſmati, quod ſuper tertia baſis octahedri parte, & altitudine* R S *continetur: nam priſmata eiuſdem verticis ad ſe ſunt vt baſes, per corollarium ſeptimæ duodecimi. Bina igitur priſmata quæ ſuper octahedri baſi & tertia eius parte, vertice verò* R S, *octo octahedri pyramidibus, ſiue toti octahedri ſolido, ſunt æqualia. Cùm autem octahedro inſcriptum icoſahedrum in baſibus octahedri ſuas baſes ſtatuat, per decimamſeptimam decimiquinti: ſequetur pyramides ſuper baſibus icoſahedri conſtitutas, atque ad idem centrum* E *conos deducentes, ſub eadem altitudine pyramidum octahedri contineri, ſcilicet ipſa* E R *vel* E S: *& proinde priſma ſuper baſi icoſahedri, altitudine verò dupla pyramidis ſcilicet tota* R S, *æquum eſſe ſex pyramidibus ſuper baſi icoſahedri, vertice autẽ* E R *vel* E S *conſtitutis, vt oſtendimus in octahedro. Viginti igitur baſium icoſahedri pyramides, æquantur tribus priſmatis ſuper baſi icoſahedri vertice autem* R S *conſtitutis, ac inſuper alteri priſmati ſuper tertia icoſahedri baſis parte, vertice verò eadem* R S *contento, quod priſma prioris tertia pars eſt, per corollarium ſeptimæ duodecimi, cùm ad ſe ſint vt baſes. Bina itaque priſmata quæ ſuper baſi octahedri & eius tertia parte, vertice autem* R S *continentur. Ad quatuor quæ ſuper tribus icoſahedri baſibus, & vnius baſis tertia parte, ſub eodem verò* R S *vertice continentur, ad ſe erunt vt baſes, hoc eſt vt quatuor tertiæ baſis octahedri (quæ ſunt vni baſi &* $\frac{1}{3}$ *æquales) ad decẽ tertias baſis icoſahedri, quæ ſunt tribus &* $\frac{1}{3}$ *baſibus æquales, ſiue vt duæ tertiæ octahedri ad quinque tertias icoſahedri, ſed duæ tertiæ baſis octahedri, ad quinque tertias baſis icoſahedri, ſunt vt duæ baſes ad quinque baſes, per decimamquintam quinti, partes nanque æquemultiplicium. Bina verò octahedri priſmata, ad quatuor icoſahedri priſmata, ad ſe ſunt vt octahedri ſolidum ad icoſahedri ſolidum, cùm vtraque ſingulis ſolidis ſint æqualia. Erunt igitur (per vndecimam quinti) octahedrum ad ſibi inſcriptum icoſahedrum ſolida, vt duæ octahedri baſes ad quinque inſcripti icoſahedri baſes. Octahedrum itaque ad ſibi inſcriptum icoſahedrum, eam ſeruat quam, &c.*

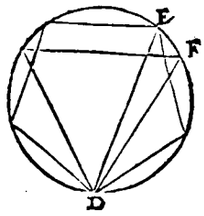
Propoſitio trigeſimaſecunda.

Icoſahedri ſolidi ad ſibi inſcriptum dodecahedri ſolidum ratio conſtat, ex ratione lateris Icoſahedri ad latus cubi eadem Sphæra comprehẽſi, & ratione tripla dimetiẽtis, ad eam quæ coniungit oppoſitarum Icoſahedri baſium centra.

Eſto dodecahedrum cuius dimetiens ſit H I, *icoſahedrum verò eadem ſphæra conceptum ſit* A B G C, *cuius dimetiens* A C. *Recta autem oppoſitarum baſium centra iungens, eſto* B G, *idem inſuper icoſahedro inſcriptum dodecahedrum ſit quod ſub dimetiente* B G, *per quintam decimiquinti, latus cubi eſto* D E, *icoſahedri verò eſto* D F, *eadem ſphæra deſcriptorum: Dico rationem icoſahedri* A B G C *ſolidi ad ſibi inſcripti dodecahedri ſuper dimetiente* B G *ſolidum conſtare, ex ratione* D F *ad*



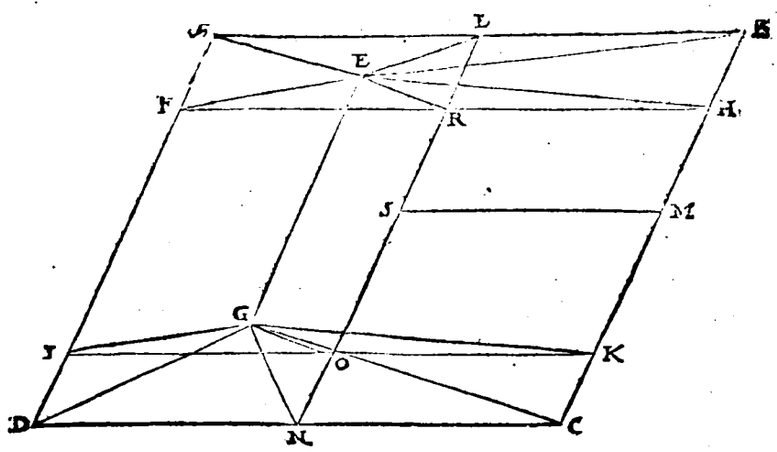




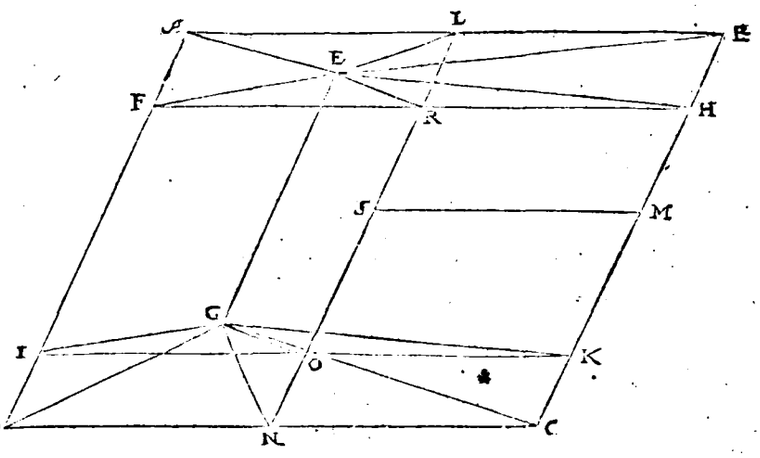
DE, *& tripla rationis* AC *ad* BG: *quoniã icosahedri* ABGC *& dodecahedri* HI, *eadẽ sphæra comprehensorum solida, ad se sunt, vt* DF *ad* DE, *per octauam decimiquarti. Dodecahedrũ verò cuius dimetiens* HI *ad illud cuius dimetiens est* BG, *triplam habet dimetientium* HI *ad* BG *rationem, per corollarium decimæseptimæ duodecimi, sed* HI *&* AC *sunt æquales ex hypothesi. Vt igitur* HI *ad* BG *sic est* AC *ad* BG. *Ratio itaque extremorum, scilicet icosahedri* ABGC *ad dodecahedrum sub dimetiente* GB *cẽtra iungente cõstat, per quintam diffinitionem sexti, ex rationibus mediorum, scilicet ex ratione icosahedri* ABGC *ad dodecahedrum* HI (*quæ fuit eadem rationi* DF *ad* DE) *& ratione eiusdẽ* HI *ad reliquũ dodecahedrum sub dimetiente* BG, *eidem icosahedro* ABGC *inscriptum, per eandem quintam decimiquinti, quæ fuit tripla rationis rectæ* HI (*vel* AC) *ad* GB *iungentem centra oppositarum icosahedri basium. Icosahedri itaque solidi ad sibi inscriptum dodecahedri solidum ratio, &c.*

Propositio trigesimatertia.

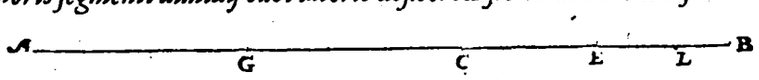
Dodecahedri solidum excedit cubi sibi inscripti solidum, parallelepipedo solido, cuius basis à basi cubi deficit tertio minoris segmenti, vertex autem à cubi vertice minori segmento minoris, dimidij lateris.



Quoniam patuit decimaseptima tertij & octaua decimiquinti, basim cubi dodecahedro inscripti suis lateribus quatuor pentagonorum ad idem dodecahedri latus concurrentium, angulos subtendere, Sit igitur basis cubi ABCD, *quatuor verò bases dodecahedri circunscripti ad latus quod sit* EG *concurrant, comprehendentes solidũ* AEBDGC *subsultans super* ABCD *basi, secentur bifariã latera* AB *&* DC *ducta* LN, *quæ parallela est lateri* EG, *vt patuit decimaseptima decimitertij, necnon perpendiculares* ER GO *ipsas iungentes æquales esse, singulas dimidio* EG *lateri, essecq; maius segmentum dimidij cubi lateris, & proinde totam* EG *totius* LN *cubi lateris maius esse segmẽum: ducantur per signa* R *&* O *rectæ parallelæ lateribus* AB *&* CD HE FH IK, *quoniã* FH ER *tãgentes ad binas* IK GO *tangentes sunt parallelæ nõ in eodem plano, parallela sunt quæ per ipsas plana* EFH *&* GIK, *per decimamquintam vndecimi, solidum* ABB DGC *secantia. Quatuor itaque fiũt pyramides, quadrangulæ super rectangulis* LH LF NK *&* NI, *vertice autem* E *&* G, *quoniã triangula* GOK ERH *sunt æqualia & similia, per quartam primi, æquis nempe lateribus æquos angulos comprehendentia, ac parallela constructa, in planis* GIK *&* EFH *constituta, parallelogramma erunt* GKHE OKHR, *&* GORE, *per trigesimamsextam diffinitionem primi, & hac de re prisma erit* GOKERH *solidum, per vndecimam diffinitionem vndecimi: simili argumento prisma patebit* GOI RRF, *quia verò super æquis basibus* NOKC *&* RLBH, *& verticibus* OG RE *constitutæ sunt pyrami-*



des, ipſæ æquales ſunt pyramidi quæ ſuper dupla baſi CKID, *& eodẽ vertice* OG, *per ſextam duodecimi, cùm etiam lateris* CB *latus* GE *ſit maius ſegmẽtum: recta* KH *rectæ* GE *æqualis per trigeſimãtertiã primi, erit eiuſdẽ* CB *maius ſegmẽtum, per ſecundam decimiquarti, reliquæ itaq;* CK *&* HB *componẽt minus ſegmentũ totius* CB. *Sicut autẽ* KH *maius ad binas* CK *&* HB *minus, ſic rectangulum* OH *ad bina* OC HL, *per primam ſexti. Rectanguli itaque* NB *minus ſegmentum, erunt bina* OC HL *rectangula, quibus æquale ponatur rectangulum* OKMS, *dupla exiſtente* MK *rectæ* CK, *ex prima ſexti, pyramis ſuper baſi* OKMS, *duo tertia priſmatis ſuper eadem baſi conſtituti poſſidet, per quartum corollarium ſeptimæ duodecimi. Quare priſma quod ſuper duobus tertiis baſis* OKMS, *binis pyramidibus* NOKCG *&* RLBHE *æquũ erit, nã priſmatis ſectiones ad ſe ſunt vt baſis ſectiones, per primum corollarium vigeſimæquintæ vndecimi, baſis verò ſectiones ad ſe vt rectæ* CB *ſiue* KM *ſectiones, per primam ſexti, binæ itaque pyramides* NOKCG *&* RLBHE *addunt priſmati* GOK ERH, *duo tertia priſmatis ſuper baſi* OKMS: *cùm autem* KM *ſit minus ſegmẽtum totius* BC, *eſt nanque æqualis binis* CK HB, *& ſimiliter ipſi* KM *ſectum ſit priſma quod ſuper* OKHR, *vt patuit, priſma binis pyramidibus æquum addet priſmati* GOK ERH *quod ſuper maiori ſegmento* KH *duo tertia minoris ſegmenti: ſupererit itaque in recta* BC *tertia pars minoris ſegmenti, & ideo in rectãgulo* NB *dimidia cubi baſi idem ſupererit tertium minoris ſegmenti, haud ſecus dicemus in reliquis pyramidibus* ONDIG *&* RLAFE, *atque priſmate* GOIERF *eundem relinqui baſis* LAND *exceſſum, tertium quidem minoris ſegmenti. Totum igitur priſma quod inter triangula* IGK *&* FEH, *ſub longitudine verò maioris ſegmenti & duobus tertiis minoris lateris cubi* BC, *æquum eſt ſolido quod ſuper baſi cubi, à quatuor dodecahedri baſibus componitur, quare baſis eius priſmatis à tota cubi baſi tertio minoris ſegmenti tantum deficit, vertex autem eius priſmatis fuit* GO, *maius quidẽ ſegmentum, dimidij cubi lateris. Cæterùm quia trianguli* IGK *duplum eſt rectangulũ ſuper eadem baſi* IK, *& vertice* OG *per quadrageſimamprimam primi, ſequetur tria rectangula ſuper eadem baſi* IK *latere cubi, vertice autem* OG *maiori ſegmento dimidij lateris, trianguli* IGK *ſextupla eſſe, Quæ ideo rectangulum ſuper baſi* IK, *vertice verò rectæ* GO *tripla conſtituunt, atqui ſex ſunt priſmata propoſito priſmati æqualia, ſuper ſingulis ſex cubi baſibus conſtituta & ſimilia, per ſeptimam diffinitionẽ vndecimi, quæ ad ſe ſunt vt baſes, per 3 corollariũ ſeptimæ duodecimi. Solidum itaque illud ſex priſmatis compoſitum à baſi* ABCD *tertium minoris ſegmenti tollet, verticem verò à præfato rectãgulo ſumens tribus dimidij cubi lateris maioribus ſegmentis* GO *æqualẽ habebit. Hæc ſegmenta oſtendamus à latere cubi minore minoris ſegmenti dimidij cubi lateris deficere. Eſto latus cubi* AB *ſectum in* AC *maius, &* CB *minus ſegmentum, per trigeſimam ſexti, ſecentur bifariam* AC



in G, *&* CB *in* E, *rectæ* CG *æqualis fiat* CL, *quoniam* AG *&* GC *ſunt maiora ſegmenta dimidiæ* AB, *vel dimidia maioris quæ idem proferunt: rectæ* EB EC *erunt minora ſegmenta dimidiæ rectæ* AB, *erit ideo tota* CL *maius,* CE *verò minus, ſed ſicut* CL *ad* CE *ſic* CE *ad reliquam* EL, *recta igitur* EL *erit maius ſegmentum rectæ* CE, *vel* EB *ſibi æqualis, reliqua igitur* LB *erit eiuſdem* EB *minus ſegmentum: atqui* AG GC *&* CL *ſunt tria maiora ſegmenta dimidiæ totius* AB, *verticem eius ſolidi efficientia, vertex itaque ſolidi à latere cubi* AB *deficit recta* LB, *quæ fuit minus ſegmentum rectæ* BE. *Quæ rurſus* BE *minus fuit dimidiæ lateris* AB *cubi, ſolidum itaque ſex ſolidis conſtans, quibus dodecahedrum ſibi inſcriptum cubum excedit, continetur ſub baſi deficiente à baſi cubi tertio minoris ſegmenti, vertice verò deficiente à latere cubi, minori ſegmento minoris dimidij cubi lateris. Dodecahedri itaque ſolidum excedit cubi ſibi inſcripti ſolidum, &c.*

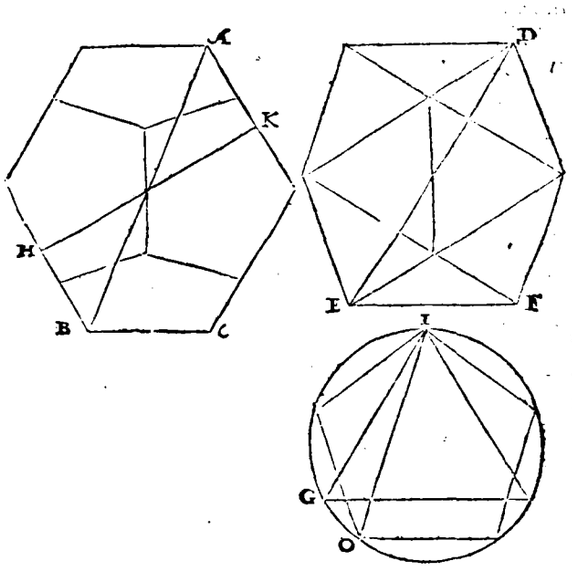
Coroll

Corollarium.

Dodecahedrum eſt ſibi inſcripti cubi duplum, dempto tertio minoris ſegmenti cubi, ac inſuper minori ſegmento minoris dimidij huius exceſſus. *Nam ſi proponatur cubus, à quo ſecetur ſolidum quod ſuper tertio minoris ſegmenti baſis, eodem autem cubi vertice, ablatũ illud ad totum rationem ſectionis ad baſim ſeruat, per trigeſimam ſecundam vndecimi, demitur itaque à cubo tertium minoris ſegmenti. Præterea quia reliquum deficit à vertice cubi minori ſegmento minoris dimidij verticis, vel lateris, cùm reliquum illud ſit parallelepipedum, ſi ſecetur plano parallelo oppoſitis planis, per ſignum ſecans verticem cubi: tollet ab eo parallelepipedo ſolidum, habens ad totum rationem ſectionis ad verticem, per tertium corollarium vigeſimæquintæ vndecimi. Deficit itaque exceſſus eidem cubo æqualis tertio minoris ſegmenti, ac inſuper minori ſegmento minoris dimidij huius exceſſus.*

Propoſitio trigeſimaquarta.

Dodecahedri ad ſibi inſcriptum Icoſahedri ſolidum ratio, conſtat ex tripla ratione dimetientis ad eam quæ coniungit oppoſitarum Dodecahedri baſium centra, & ratione lateris cubi ad latus Icoſahedri, eidem Sphæræ inſcriptorum.



Eſto dodecahedrum A H B C K *cuius dimetiens* A B, *recta verò oppoſitarum baſium centra iungens ſit* K H, *dodecahedro autem* A B C *inſcriptum icoſahedrum eſto* D E F, *cuius dimetiens* D E, *quia idem circulus comprehendit dodecahedri quinquangulum, & icoſahedri triangulum, eidem ſphæræ deſcriptorum (per quartam decimiquarti) ſit ille circulus* I G O, *erit ideo cubi latus* I O, *latus quidem icoſahedri* I G, *per eandem: Dico rationem Dodecahedri* A H B C K *ad icoſahedrum* D E F *ſibi inſcriptum conſtare, ex tripla rationis* A B *ad* K H *& ratione* I O *ad* I G: *quoniam icoſahedrum* D E F *dodecahedro* A B C *inſcriptum eſt, ex hypotheſi, æqualis erit dimetiens* D E *rectæ* K H, *per ſeptimam decimiquinti. Dodecahedrum igitur quod ſuper dimetiente* K H *eidem ſphæræ cui icoſahedrum* D E F *inſcribetur: atqui dodecahedrum* A H B C K *ad dodecahedrũ quod ſuper dimetiente* K H, *triplam habet rationem quam* A B *ad* K H *dimetientes, per corollarium decimæſeptimæ duodecimi: idem autem dodecahedrum quod ſuper dimetiente* K H, *ad icoſahedrũ* D E F *(quod ſuper eadem dimetiente, aut ſibi æquali ſcilicet* D E*) rationem habet, quam* I O *cubi latus ad* I G *icoſahedri latus, eidem ſphæræ inſcriptorum, per octauam decimiquarti. Dodecahedri itaque* A H B C K *ad icoſahedrum* D E F *ſibi inſcriptum ratio conſtat, ex tripla ratione dimetientis* A B *ad eam* K H, *quæ coniungit oppoſitarum dodecahedri baſium centra, quæ fuit dodecahedri* A H B C K, *ad dodecahedrũ quod ſuper dimetiente* K H, *& ratione lateris cubi* I O *ad latus icoſahedri* I G, *quæ fuit dodecahedri quod ſuper dimetiente* K H *ad icoſahedrum* D E F, *eidem ſphæræ deſcriptorum, per quintam diffinitionem ſexti. Dodecahedri itaque ad ſibi inſcriptum icoſahedri ſolidum ratio conſtat, ex tripla ratione, &c.*

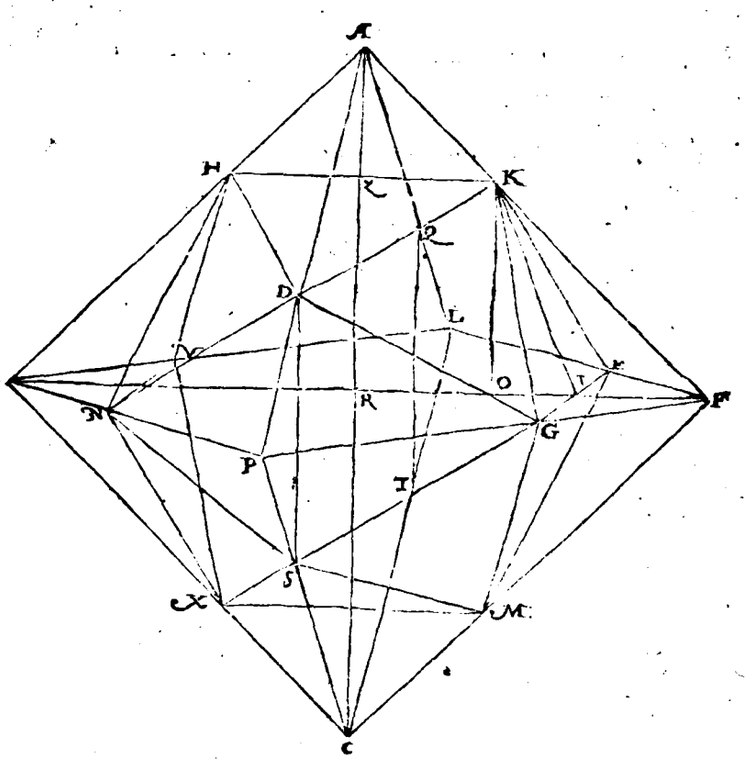
Propoſitio trigeſimaquinta.

Dodecahedri ſolidum Pyramidis ſibi circũſcriptæ ſolidi bipartitur nonas, dempto vnius nonæ (extrema & media ratione ſectæ) tertio minoris ſegmenti, ac inſuper minori ſegmento minoris dimidij reliqui.

Oſtenſum eſt dodecahedrum cùm ſibi inſcripto cubo eadem contineri pyramide corollar. primæ huius. Dodecahedrum autem eiuſdem cubi duplum fuiſſe, dempto tertio minoris ſegmenti, ac inſuper minori ſegmenta minoris dimidij reliqui, ſiue huius exceſſus, corollar. 33 huius patuit. Atqui pyramis eiuſdem cubi ſibi inſcripti nouuplum complexa eſt, per trigeſimam huius. Dodecahedrum itaque pyramidi inſcriptum bis continens eundem cubum, dempto eodem tertio minoris ſegmẽti, ac inſuper minori ſegmento minoris dimidij reliqui, ſibi ſumet, ſiue bipartietur nonas ſolidi pyramidis (quarum ſingulæ præſcripto cubo ſunt æquales) dempto hoc eodem exceſſu. Dodecahedri igitur ſolidum pyramidis ſibi circunſcriptæ ſolidi, &c.

Propoſitio trigeſimaſexta.

Octahedrum excedit ſibi inſcriptum icoſahedrum ſolido parallelpipedo quod ſuper potentia lateris Icoſahedri vertice autem ea quæ ſemidimetientis Octahedri eſt maius ſegmentum.



Eſto octahedrũ ABCFPL, *cui icoſahedrum inſcribamus* HKEGMXNVDSQT, *per* 16 *decimiquinti, ductis dimetiẽtibus* AZRC BROIF, *& perpendiculari* KO, *parallelæ rectæ* AZR: *Dico* ABCFPL *octahedrum inſcripto icoſahedro maius eſſe, parallelepipedo quod ſuper potentia lateris* HK *vel* GE, *vertice autem recta* KO *vel* RZ *maioris ſemidimetiẽtis* AR *ſegmento cõtinetur. Quoniam oſtenſum eſt eadem* 16, *triangula* KDG *&* KEQ *in baſibus octahedri* APF ALF *deſcripta eſſe. Quare circa angulum ſolidum* F *remanent ſuper baſi* FEG *tria triãgula* KEG KEF KFG, *pyramidem* KEFG *concludentia, cui eadem cauſa æqualis & ſimilis erit, oppoſita ſuper eadem baſi* FEG *pyramis in* EFG. *Haud ſecus totidem ſupererunt ſingulis octahedri ſolidis angulis, ſcilicet binæ pyramides ſuper baſi* AHK, *binæ item ſuper* BNV, *binæ ǵ ſuper* DPS, *ac binæ ſuper* QLT, *æquales & ſimiles, ex diffinit.* 8 *vndecimi. Duodecim itaque fient pyramides, ſuper baſi comprehenſa latere icoſahedri & binis minoribus ſegmentis lateris octahedri angulum rectum continentibus, vt* GEF. *Cùm autem latus* GE *angulum rectum ſubtendens, duplum poſſit* (*ex* 47 *primi*) *ſingularum* EF FG *ſic ǵ* HK *laterum* AH AK, *ſingulæ ǵ* AH AK *vel* EF FG *duplum poſſint ſingularum* AZ *vel* ZK *angulum rectum continentium, hoc eſt, trianguli ſiue baſis* AHK. *Sequetur latus* GE *vel* HK *quadruplum poſſe trianguli* EFG *vel* AHK. *Pyramis autem* KEFG, *baſim* EFG *in plano octahedri* FLBP *habens, ſuſcipit verticem perpendicularem* KO, *per* 4 *diffinit. ſexti, quæ quidem eſt maius ſegmentum ſemidimetientis octahedri, per* 16 *decimiquinti, tres itaque pyramides ſub eodem vertice & æquis baſibus, priſmati quod ſuper eiſdem baſi & vertice conſtruitur erunt æquales, per* 1 *coroll.* 7 *duodecimi, quatuor igitur priſmata ſuper quadrupla baſi ipſi* GEF (*quæ æquatur potentiæ lateris* GE) *vertice verò* KO, (*vel* RZ *maiori ſegmento ſibi æquali*) *comprehendent ſolidum duodecim pyramidibus æquum. Quæ quidem duodecim pyramides componunt exceſſum octahedri in icoſahedrum ſibi inſcriptum. Octahedrum itaque excedit ſibi inſcriptum icoſahedrum ſolido, &c.*

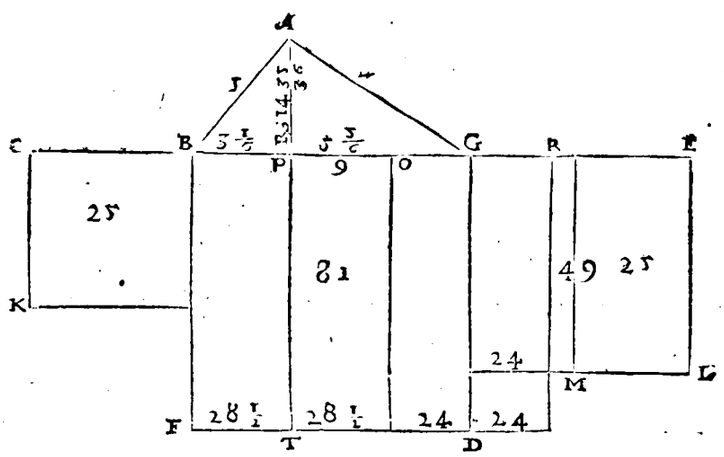
Coroll.

Corollarium.

Pyramis excedit ſibi inſcripti icoſahedri duplum, ſolido quod ſuper lateris icoſahedri ſibi inſcripti potentia, vertice autem ea tota cuius, id eſt, maius ſegmentum. *Nam patuit 19 decimiquinti, octahedrum & ſibi inſcriptum icoſahedrum eidem inſidere pyramidi. Oſtendimus inſuper 26 huius, pyramidẽ octahedri comprehẽſi duplam fuiſſe. In binis itaque octahedris bini icoſahedrorum duplicantur in vnum exceſſus, qui quidem ſuper eadem baſi latere icoſahedri comprehenſa conſtituitur, vertice autem dupla rectæ* K O *perpendicularis, cuius dupla ſcilicet iungens oppoſita latera* H K · X M, *efficit maius ſegmentum idem icoſahedri latus ex primo & ſecundo coroll. decimæquartæ decimiquinti. Quare ſuper eadem baſi & duplo vertice ſolidum, ſolidi duplum erit, ex coroll. trigeſimæprimæ vndecimi.*

Propoſitio trigeſimaſeptima.

Si trianguli certam propoſitam baſim habentis, latera baſi potẽtia commenſurabilia fuerint, Ab vertice autem demiſſa perpendicularis baſim ſecuerit, Sectiones toti baſi longitudine, Perpendicularis verò potẽtia commenſurabiles erunt.



Proponatur triangulum A Ɛ G, *cuius baſis* B G *ſit certa propoſita, latera verò* A B *&* A G *eidem* B G *potentia ſaltem commenſurabilia exiſtant. A vertice autem* A *in baſim* B G *perpendicularis baſim ſecet in* P: *Dico baſis ſectiones toti* B G *commenſurabiles. eſſe lõgitudine, perpendicularem verò* A P *eidem* B G *baſi potentia ſaltem commenſurari. Producatur vndique recta* B G *in* C *&* E. *Ipſi verò* A G *æqualis ponatur* G E, *rectæq́* A B *recta* B C, *& deſcribantur ex ipſis quadrata* B K B D *&* G L. *A maiori autem quadratorum quæ ex* A B *vel* A G, *quod eſto* G L, *minori* B K *æquum auferatur* E M, *per 45 primi, ac per eandem reliquo* G M *æquum ad rectam* G D *comparetur* O D. *Cùm enim recti ſint* A P B *&* A P G *anguli. Recta* A G *binas* A P P G *poteſt. Rectáque* A B *binas* A P P B, *per 47 primi. Quanto igitur recta* A G *plus poteſt recta* A B, *eodem plus poteſt* P G *reliqua* B P. *Nempe ablato communi quadrato ex* A P *relinquitur exceſſus quadrati* P G *ad quadratum* B P. *Sed quadratum ex* A G (*quod eſt* G L) *excedit quadratum ex* A B (*ipſum quidem* B K) *rectangulo* G M (*vel* O D) *per conſtructionem. Quadratum igitur quod ex* P G, *excedet quadratum ex* B P, *rectangulo* O D. *Quoniam autẽ quadratis* A B A G *æqualia fuerunt ex* A P P B *&* A P P G *quadrata. Ablatúſque fuit eorũ exceſſus, rectangulum ſcilicet* O D. *Relinquentur quadrata* A P P O *quadratis* A P P B *æqualia. Communi verò ex* A P *ablato quadrato. Reliqua ex* B P *&* P O *quadrata æqualia erunt, & proinde eorum latera (rectæ* B P *&* P O) *æqualia erunt. Cæterùm cùm quadrata* G L *&* B K (*ex hypotheſi*) *certa, & proinde commenſurabilia exiſtant, eorũ exceſſus* O D *ipſis cõmenſurabilis erit, ex corol. vndecimæ decimi, & igitur certus, per 9 diffinitionem decimi. Certum itaque* O D *ad certam* G D (*vel* B G) *proiectum, latitudinem* O G *certam efficiet, & longitudine ipſi* B G *toti commenſurabilem, per 20 decimi. Si autem tota* B G *vni partium* O G *commenſuretur, Ipſæ* B O O G *&* B G *commenſurabiles erũt, per eandem vndecimã decimi, & coroll. eius. Quare & recta* O G *dimidiæ ipſius* B O (*ſcilicet rectæ* P O *vel* P B) *commenſurabitur, per decimam decimi. Quia verò binæ* P O O G *commenſurabiles ſunt, tota* P G *rectæ* P O (*ſiue ipſi* B P) *commenſurabitur, per eandem* 11 *decimi. Et vtraque ideo* P G

P B *toti* B G *commensurabilis erit, per eandem. Id propterea rectæ* B G P B *&* P G *rationem inter se quam numeri seruant, per quintam decimi. Sectiones igitur* P B P G *basis* B G *eidem basi longitudine commensurabiles erunt, per sextam decimi. Quòd autem perpendicularis* A P *basi* B G *potentia commensurabilis fuerit, patet. Cùm quod ex* A B *ei quod ex* B G *(per hypothesim) fuerit commensurabile. Ei verò quod ex* A B *certo commensurabile sit certum ex* B P, *per decimam decimi. Reliquum igitur ex* P A *eidem ex* B P *commensurabile erit, per secundam partẽ* II *vndecimi. Et proinde toti ex* B G, *per decimam decimi. Recta itaque* A P *perpendicularis rectæ* B G *basi potentia commensurabilis erit, per tertiam diffinitionem decimi, quod fuit positum. Hanc demonstrantes nusquam laterum* A B A G *longitudinem, sed solius basis* B G *expressimus, eò quòd proposita recta sit* B G, *Reliquæ verò* A B A G *potentia tantùm ipsi commensurabiles exquiruntur. Itaque vt fortiori pateat argumento, si id demonstretur cùm latera basi potentia tantùm commensurabilia fuerint, facilius idem sequetur, si eadem latera potentia simul & longitudine eidem basi commensurabilia exhibeantur, hoc est, si earum longitudines per quadratorum numerorum radices expressæ sint, veluti supposito indicauimus typo.*

Corollarium primum.

Hoc supposito acquirimus. Si à potentiis basis & vnius laterum, reliqui lateris potentia demmatur. Eius autem quod supereſt dimidium ad totam basim comparetur latitudinem efficiet sectionem basis quæ ad primum latus copulatur. *Nam à potentiis basis* B G *& vnius laterum* A G, *hoc est, à quadratis* B D *&* G L. *Reliqui lateris* A B *potentia* B K (*hoc est,* B M) *aufertur. Eius autem quod supereſt (scilicet quadrati* B D *& rectanguli* O D, *siue* D R *ex hypothesi ipsi* O D *æqualis sumpti) dimidium (scilicet totius* F R *quod erit* P D: *nam* G R *&* P B *rectis* G O *&* P O *æquantur) ad totam* B G (*vel* G D) *comparetur, latitudinem efficiet* P G *sectionem quippe basis* B G, *quæ sectio ad primum latus* A G *copulatur. Haud secus in reliquo latere, si à quadratis* B D *&* B K *quadratum* G L *tollatur, supererit rectangulum* F O. *Nam* E M *rectangulum ipsi* B K *æquatur,* G M *verò ipsi* O D. *Reliqui igitur* F O *dimidium* F P, *latitudinem efficit* B P, *sectionem quæ ad sumptum prius latus* A B *copulatur.*

Corollarium secundum.

Si perpendicularis ab angulo trianguli basim secuerit, sectiones reliquis lateribus potentia sunt arithmetica ratione proportionales. *Nam patuit idem excessus potentiarum ex* A G *&* A B, *qui fuit earum quæ ex* P G *&* P B. *Si itaque potentiæ æqualiter sese excedant, Ipsæ Arithmetica ratione proportionales erunt.*

LIBRI DECIMISEXTI FINIS.

DE

DE MIXTIS ET COMPOSITIS REGVLARIBVS SOLIDIS.

COMPONI & miſceri dicuntur regularia ſolida, quando ſingula eorum in alia transformantur ſolida, ſeruatis baſium forma, numero, & inclinatione, ad ſeinuicē prius habitis, quorū tamen aliqua in mixta, alia in ſimplicia trāsformātur ſolida. In mixta, veluti Dodecahedrū & Icoſahedron, quæ transferuntur ſi ſectis bifariam lateribus, tollantur ſolidi anguli, iunctarum ſecantium figuris ſubtenſi, quod ſupereſt ſolidum, icoſidodecahedror dicetur. Si cubi & octahedri latera bifariam ſecta, rectis coniungātur, anguli ſolidi planis à coniungentibus deſcriptis ſubtenſi & ablati, ſolidum relinquunt, quod exoctahedron dicetur. Vnde dicemus ex dodecahedro & icoſahedro idem confici icoſidodecahedron, ex cubo autem & octahedro aliud idem exoctahedron. Reliquum verò ſolidum ſcilicet pyramis, in ſimplex transformatur ſolidum: nam ſectis bifariam ſingulis pyramidis lateribus, triangula à ſectiones coniungentibus deſcripta, angulos pyramidis ſolidos ſubtedentia & tollentia, æqualia & ſimilia ſunt relictis in ſingulis baſibus triangulis æquilateris, ex quibus oritur Octahedrum, ſimplex non compoſitum ſolidum. Octahedrum nanque quatuor habet baſes, ſimiles numero, forma, & inclinatione mutua, pyramidis baſibus. Ac reliquas quatuor ſimili ſitu prioribus oppoſitas, & parallelas, quare bis repetita pyramidis applicatio, Octahedrum ſimplex, veluti reliqua corpora compoſitum mixtum, binarum interuentu componit. Quod iam antea inſcriptum, ſiue hac lege pyramidi deſcriptum, ſecunda decimiquinti diſcuſſimus, quare huius fuſiori parcemus cxpoſitioni.

Diffinitio prima.

Exoctahedron eſt figura ſolida, ſex æqualibus quadratis baſibus octóque triangulis æquilateris & æqualibus comprehenſa.

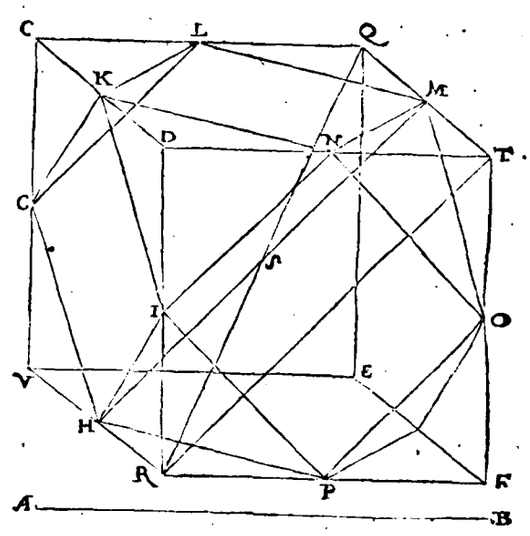
Diffinitio ſecunda.

Ycoſidodecahedron eſt figura ſolida, duodecim quinquangulis æquilateris æqualibus & æquiangulis, vigintíque triangulis æqualibus & æquilateris comprehenſa.

Problema primum.

Exoctahedron æquilaterum & æquiangulum conſtruere, & data Sphęra comprehendere, oſtenderéque dimetientem lateris duplum eſſe.

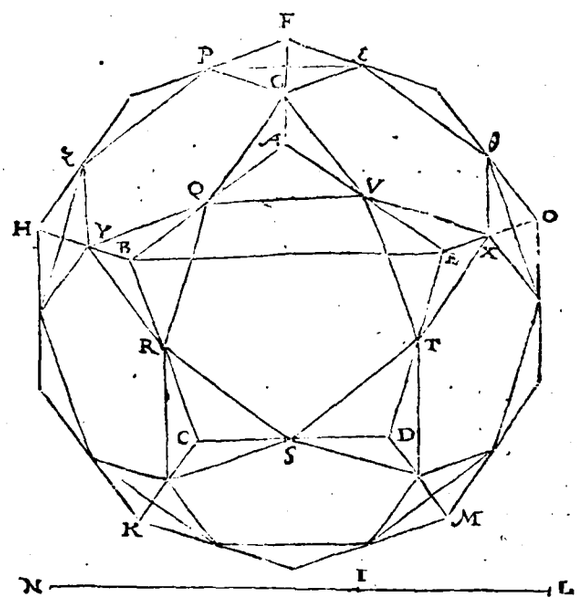
Proponatur ſphæra cuius dimetiēs ſit A B, *circa dimetientem* A B *fiat quadratum per ſextam quarti, ſuper quadrato verò cubus per* 15 *decimitertij, qui ſit* C D E F Q T V R, *dimetiens verò* Q R *& centrum* S, *cubi latera bifariā diuidātur in* G H I K L M N O P, *&c. cōiunctis in ſectionibus rectis* I N N O O P P I *& ſimilibus, angulos quadratorum ſubtendentibus, quæ quidem ſunt æquales, per quartam primi, & angulos rectos cōtinent, velut* N I P. *Nam* N I D *qui ad baſim iſoſcelis eſt recti dimidius, ſimiliter & oppoſitus* R I P, *reliquus itaque* N I P *rectus erit, & ſimiles: quadratum ideo erit* N I P O, *& eadem cauſa quadrata erūt reliqua* N M L K *&* K G H I *reliquis cubi baſibus inſcripta, quæ ſunt ſex iuxta baſium cubi numerum. Rurſus quia triāgulum* K I N *ſubtendit angulum cubi ſolidum qui ad* D, *ſimiliter* K G L *eum qui ad* C *& reliqui, octo cubi ſolidos angulos ſubtendentes, qui quidem ſunt æqua-*



les & æquialteri, nempe æquis lateribus constructi, & quadrata concludentes, vt patuit, quadratáque triangula cõcludere. Exoctahedron erit L M N O P H G K, *per diffinitionem, æquilaterum: nam sub æqualibus subtendentibus rectis, & æquiangulum, cùm solidus quisque eius angulus duobus quadratorum & binis triangulorum æquilaterum cõtineatur planis angulis. Cæterùm quia parallela sunt opposita cubi latera & dimetientes basium, parallelogrammum erit planum quod per rectas* Q T V R. *Quia item in eo plano iacet cubi dimetiẽs* Q R, *rectáque idem planum bifariam secans* M H, *angulos exoctahedri oppositos iungens, hæc ideo dimetientem bifariam secat per corollariũ 34 primi, ac seipsam in eodem signo per quartam primi. Ostenditur eodem argumento reliquas angulos exoctahedri oppositos iungentes, bifariam in centro* S *cubi se adinuicem secare: nam singuli exoctahedri anguli in singulis cubi basibus degunt. Cẽtro itaque* S *interuallo* S H *vel* S M *sphæra ducta, singulos angulos à signo* S *æquidistantes tanget. Quia verò* A B *propositæ sphæræ dimetiens, æqualis posita est dimetienti basis cubi scilicet ipsi* R T, *eadem porro* R T *rectæ* M H *est æqualis per trigesimam tertiam primi, quæquidem per centrum oppositos exoctahedri iungit angulos, ea itaque dimetiens est propositæ sphæræ exoctahedron concipientis. Denique cùm triãguli* R F T *latera bifariam secet recta* P O, *proportionalia secat basibus,* F R *ad* R T, *vt* F P *ad* P O, *per secũdam sexti. Atqui dupla est* F R *rectæ* P P *ex hypothesi, dupla igitur erit* R T (*vel* H M *dimetiens*) *rectæ* P O *lateris exoctahedri. Exoctahedron itaque æquilaterum & æquiangulum construximus, &c.*

Problema secundum.

Icosidodecahedron æquilaterum & æquiangulum constituere, & data Sphæra comprehendere, ostenderéque dimetientem extrema & media ratione sectam, efficere maius segmentum duplum lateris Icosidodecahedri.



Esto propositæ sphæræ dimetiens N L, *quæ (per trigesimam sexti) secetur in* I, *efficiens maius segmẽtum* N I, *ex* N I *recta describatur cubus, per decimãquintam decimitertij, huic cubo circunscribatur dodecahedrum, ex decimaseptima decimitertij, sit autem illud* A B C D E F H K M O, *cuius latera singula bifariam diuidantur signis* Q R S T V X Y Z P ϕ θ G *&c. coniunctis à sectionibus rectis, angulos pentagonorum subtendentibus, veluti,* Q G G V V Q, Q Y Y R R Q, V T T X X V, *ac reliquis. Quoniam hæ rectæ subtendunt æquos pentagonorum angulos, æquis (nempe dimidiis) lateribus comprehensos, ipsæ sunt æquales, ex 4 primi, triangula igitur æquilatera erũt* G Q V, Y Q R, V X T, *& reliqua solidos dodecahedri angulos tollentia. Rursus quia cuilibet pentagono describuntur quinque rectæ æquales, medias laterum sectiones iungentes, vt sunt* Q V V T T S S R R Q, *illæ pentagonum in plano pentagoni dodecahedri describunt, circulo comprehensum, nempe à centro pentagoni dodecahedri, in huius pentagoni angulos demissæ sunt æquales, cùm sint perpendiculares in sectas bases, per* 12 *quarti, æquiangulum itaque est pentagonum* Q R S T V *per* 11 *eiusdem, pari forma patebunt æqualia & similia reliqua pentagona, in basibus dodecahedri*

descripta,

deſcripta, quæ igitur ſunt numero 12, *triangula verò æqualia & ſimila, ſolidos angulos* 20 *dodecahedri ſubtendentia, ſiue tollentia, ea de cauſa* 20 *erunt numero triangula, icoſidodecahedrum itaque conſtruximus per diffinitionem æquilaterum quidem, cùm omnia triangulorum latera ſint æqualia & communia pentagonis, æquiangulum autem: nam ſinguli anguli ſolidi ex duobus pentagoni & binis trianguli æquilateri planis angulis conſtant. Quod autem datæ ſphæræ cuius dimetiens fuit* N L *contineatur oſtendamus, quoniam à centro dodecahedri in ſuorum laterũ dimidias ſectiones perpendiculares, dimidiæ ſunt earum quæ oppoſitas coniungunt dodecahedri laterum medias ſectiones, per* 3 *coroll.* 17 *decimitertij, quæ (per idem) ſeſe bifariam in centro ſecant, ab eo itaque ſigno in angulos ductæ ſunt æquales, quæ quidem ſunt triginta iuxta laterum dodecahedri numerum, poſſident nanque ſinguli anguli ſingulorum dodecahedri laterum dimidias ſectiones, ſuper dimetiente itaque per ſingulos æquidiſtantes à centro angulos ſphæra deſcripta, ſolidum icoſidodecahedrõ concludet, quia verò huius ſolidi dimetiens eſt ea recta, cuius maius ſegmentum eſt latus dodecahedro inſcripti cubi, per* 4 *coroll.* 17 *decimitertij, quod quidem latus fuit* N I *per hypotheſim, illud itaque ſolidum ſphæra data cuius dimetiens fuit* N L *concluſimus, quod inſuper huius (ſcilicet* Q V*) lateris ſit duplum dimetientis maius ſegmentum doceamus. Quia trianguli* A E B *latera, bifariam ſecant, ſigna* Q *&* V, *parallelæ ſunt* Q V B E, *per coroll. ſecundum* 39 *primi: proportionalia itaque ſunt* A E *ad* A V *ſicut* E B *ad* V Q *per* 2 *ſexti. Dupla autem eſt* A E *rectæ* A V, *dupla igitur erit* B E *rectæ* Q V, *per* 4 *ſexti, ſed* B E *æquatur datæ* N I *ſiue lateri cubi, per* 2 *coroll. decimæſeptimæ decimitertij, quæ quidem eſt maius ſegmentum dimetientis* N L. *Maius itaque dimetientis propoſitæ ſegmentum duplum eſt lateris icoſidodecahedri datæ ſphæræ inſcripti. Icoſidodecahedron itaque æquilaterum & æquiangulum conſtruximus & data ſphæra, &c.*

MONITVM.

Huius icoſidodecahedri natura binas præcipuorum ſolidorum complectitur intelligẽtias, ex vtrorúmque nempe baſibus conſtãs, vtriuſque baſes oppoſito ſitu, ſed eadẽ ad ſe inclinatione diſponit, quibus actiones reliquorum regularum ſolidorum ac paſſiones in ſe contegat. Huius ſolidi inſcriptiones ac circunſcriptiones, non vanum apponere exiſtimaſſemus, ni præpediſſet temporis angustia. Quare ne quid Lectori circa huius intelligentiæ quæſtum deſit, inſcriptionum ſingularum ac circunſcriptionum inuenta, prout licuit, compendio deſcripſimus: quorum ſubſidio modico vel nullo negocio, viſis priorum ſolidorum diſcußionibus, ſingula illi, illúdque ſingulis inſcribi demõſtrabit, implorato ſummi artificis numine.

De Icoſidodecahedri inſcriptionibus & circunſcriptionibus.

Poteſt icoſidodecahedron cætera quinque regularia ſolida continere. Nam dodecahedrũ ſuſcipiet angulos, in centris triangulorum ſolidos angulos dodecahedri ſubtendentium, quæquidẽ ſunt viginti, eo ordine quo ſolidi dodecahedri ab eis ablati, vel ſubtenſi diſpoſita. Ac proinde cubum & pyramidem dodecahedro concepta ſuſcipiet, cùm habeant angulos ad idem ſinum.

Octahedrum autem ſuſcipit icoſidodecahedron, in angulis oppoſitas dodecahedri ſectiones ſex ſecantibus non ſecus ac ſi ſimplex fuiſſet dodecahedron.

Icoſahedron autem concipit, in eiſdem duodecim pentagonorum centris collocans duodecim icoſahedri angulos.

Poteſt non minus ſingulis inſcribi, vtpote Pyramidi, collocans quatuor baſes trigonas quatuor pyramidis baſibus concentricas more pyramidi inſcripti icoſahedri. Itidem octahedro, baſes octo ſuis baſibus concentricas adaptare. Cubo verò inſcribetur ſi angulos octahedrum ſibi inſcriptum ſuſcipientes, incentris baſium cubi conſtituat. Icoſahedro autem, cùm triangula pentagonam baſim obeuntia, triangulis icoſahedri angulum ſolidum componentibus concentrica fuerint.

Dodecahedro demùm, ſingulos icoſidodecahedri angulos ſingulis dodecahedri laterum mediis ſectionibus, iuxta conſtructionis eius ordinem coaptantes, nullo tedio inſcribemus.

Parallela inſuper ſunt huius ſolidi oppoſita plana, nam ſubtenduntur anguli ſolidi qui ex oppoſito, parallelis planis æquè in angulis dodecahedri triangulis ſubtenſis, & in angulis icoſahedri pentagonis ſubtenſis, quod facili demõſtrationi ſubiacet. Præterea huic ſolido infinitæ adhærebunt ſymetriæ, ex ſolidis illud componentibus eductæ.

Patet igitur dodecahedrum & icoſahedrum mixta, in idem concurrere ſolidum icoſidodecahedron. Cubum autem & octahedron mixta, in aliud idem coire exactahedron, pyramydem demùm

omni cõsortio vt putatum est, destitutam, in præclarius reliquis solidum bis sumptam concidisse, quod instar cæterorum (quæ singulis sui appositionibus, in compositum solidum binis constans transeunt) in simplex ac perfectum bina suiipsius applicatione concidit.

Quod si bina hæc solida in vnicum solidũ coniuncta concipere velimus, id vnicum ponemus. Dodecahedro quidem, si pentagono dodecahedri simile inscribatur pentagonũ, angulos inscripti in mediis circunscripti lateribus constituens, inscriptum autem angulum icosahedri solidum subtendat, hácque lege in singulis dodecahedri basibus seruata, superpositi anguli, producent solidum vtroque integro dodecahedro & icosahedro descripto constans. Haud secus, si cuilibet icosahedri basi sectis bifariam lateribus inscribatur triãgulum æquilaterum, quod quidem dodecahedri subtendat angulum solidum illi superpositum, idem consurget vtroque integro constans solidum.

Eadem constructione, Si cubi basibus quadrata angulos octahedri solidos subtendentia, vel octahedri basibus triangnla cubi solidos angulos subtendentia inscribantur, exurget inde solidum vtroque integro constans, scilicet cubo & octahedro.

Pyramidis verò basibus sectis bifariam lateribus inscripta triangula, pyramidis solidos angulos subtendentia solidum producunt binis pyramidibus æquis & similibus constans. Horum autem solidorum à planis deleti anguli priora composita solida restituunt, nempe à dodecahedro & icosahedro, icosidodecahedron, à cubo verò & octahedro, exoctahedron, à bis sumpta verò pyramide octahedrũ. Perplura his solidis suffragari liceret, quæ propensis disciplinarum cultoribus ocio nobis illud negante legamus.

Hac subeunt quinque solidorum aliquæ symetriæ, partim ex dictis, partim ex dicendis assumptæ, naturam solidorum elucidantes, quarum subuentu lector sagax & attentus, longe plura modico sudore quàm hactenus de solidorum regularium præstantia demonstrata sint, aperiet, quæ in sui leuamen velut obsonia instanti cœnæ dicata decoximus. Hæc itaque rite concepta ad geometriæ fœcunditatem summi Conditoris numine in immensa volumina propagare valeat.

De natura Pyramidis trilateræ æquilateræ.

Pyramis æquilatera trilatera, secatur bifariam tribus quadratis æqualibus, sese in centro pyramidis bifariam & ad rectos secantibus, & quorum anguli in mediis laterum pyramidis sectionibus degunt. A pyramidæ tolluntur quatuor pyramides similes toti, pyramidisque latera penitus auferentes, reliquum autem pyramidi inscriptum octahedrum efficientes, cui quidem omnia à pyramide concepta solida inscribuntur. Perpendicularis ab angulo in basim pyramidis, dupla est dimetientis inscripti cubi. Recta verò medias oppositorum pyramidis laterum iungens sectiones, tripla est lateris eiusdem cubi: triplum item pyramidis latus ad basis cubi dimetientem. Idem itaque pyramidis latus, oppositorum laterum sectiones iungentis rectæ, duplum potest. Rectæ verò ab angulo in basim perpendicularis, sesquialterum. Perpendicularis igitur, iungentis sesquitertium poterit. Pyramis, sibi inscriptum octahedrum, octahedróque inscriptum icosahedrum, eandem sphæram suscipiunt.

De natura Octahedri.

Octahedri quatuor perpendiculares, à duobus oppositis eius angulis, per bases se iungentes rhombum describunt, cuius vna dimetientium reliquæ duplum potest: ea quippe dimetientis ad latus est ratio. Octahedrum & sibi inscriptum icosahedrum, eandem sphæram suscipiunt. Octahedri solidi dimetiens, potentia sesquialtera est dimetientis circuli basim comprehendentis, tripla verò iungentis oppositarum basium centra, & dupla bipartiens tertias perpendicularis siue lateris præfati rhombi: iungentis autem proximarum basium centra longitudine tripla. Angulus autem inclinationis babasium octahedri, cum angulo inclinationis basium pyramidis, duobus rectis æquos efficit angulos.

De natura Cubi.

Cubi dimetiens sesquialterum potest dimetientis basis, lateris verò triplum, iungentis autem proximarum basium centra, sextuplum. Insuper cubi latus est ad sibi inscriptorum latera, icosahedri quidem, vt tota ad maius segmentum, Dodecahedri verò vt tota ad minus, Octahedri duplum potest lateris, Pyramidis verò lateris dimidium. Cubus præterea Pyramidis triplus fuit, Cubi autem dodecahedrum ferè duplum. Idem itaque dodecahedrũ eiusdem pyramidis ferè sextuplũ esse cõperietur.

De

De natura Icosahedri.

Icosahedri angulum solidum constituunt quinque triangula, quorum reliquæ bases pentagonum componunt. Si itaque ab oppositis basibus aliud descriptum sumatur pentagonum, hæc pentagona dimetientem icosahedri angulos præfatos copulantem ita secabunt, vt quæ inter plana maius segmentum sit, quæ verò à plano ad angulum reliquã, minus. Siquidem binarum coniunctarum basium oppositos angulos recta coniungat, huius rectæ maius segmentum est latus icosahedri. A centro autem icosahedri ad angulos ducta, quintuplum potest dimidiæ eius quæ inter pentagona fuit suscepta, siue dimidiæ eius quæ à centro circuli præfatum pentagonum capientis, quæ ideo sunt æquales. Singulas ipsarum potest latus icosahedri, tum etiam minus segmentum potest ab angulo solido in pentagonum cadens. Icosahedri dimetiens, potest totam oppositos angulos coniunctarum basium copulantem, & maius eius segmentum, hoc est latus icosahedri. Potest etiam dimetiens quintuplum eius quæ inter pentagona suscepta fuit, siue eius quæ à centro pentagoni ex lateribus icosahedri cõpositi. Dimetiens potest rectam centra basium oppositarum icosahedri coniungentem, & dimetientem circuli basim continentis. Dimetiens insuper potest dimetientem circuli pentagonum continentis. & eam quæ ex eiusdem centro, hoc est quintuplum eius quæ ex centro, iungens centra oppositarum basium, potest iungentem centra proximarum, & reliquam cuius latus cubi icosahedro inscripti est maius segmentum, iungens medias oppositorum laterum sectiones, tripla est lateris inscripti dodecahedri. Quare si latus icosahedri & eius maius segmentum componantur, totius tertia pars, est latus dodecahedri icosahedro inscripti.

De Dodecahedri natura.

Dodecahedri dimetiens potest latus, & eam cuius latus est minus segmentum, cubi verò inscripti maius, illa porrò est recta, quæ subtendit angulum inclinationis basium, binis perpendicularibus basium dodecahedri comprehensum. Si binæ dodecahedri bases longitudine vnius lateris distantes sumantur, earum centra coniungens extrema & media ratione secta, efficit maius segmẽtum coniungentem centra proximarum basium. Si per centra quinque basim circa vnam basim constitutarum, ducatur planum, & per centra basium quæ circa oppositam basim, aliud planum: centra autem oppositarum basium coniungat recta, ipsa à planis ita secatur, vt singulæ extra plana constitutæ, sint maius segmentum eius quæ inter plana concluditur. Latus dodecahedri, est maius segmentum subtendentis angulum pentagoni. Quæ à centro dodecahedri in vnam basium perpendicularis, quintuplum potest dimidiæ eius quæ inter plana est, & ideo tota basium oppositarũ centra cõiungens, quintuplum potest totius quæ inter plana. Subtendens angulum basis dodecahedri & basis latus, possunt quintuplum eius quæ ex centro circuli basim continentis. Sectio sphæræ continens tres dodecahedri bases, sumit dimetientis tertiam partem. Dodecahedri latus & angulũ pentagoni subtendens, æquãtur rectæ coniungenti medias oppositorum dodecahedri laterum sectiones.

FINIS.

Erratorum ordo per libros distinguitur, postmodum numeri præcedentes line. quotam propositionem indicant, deinde linea quota demonstrationis, corollarij, aut moniti succedit. Quod si in figuram, aut textum incidat error, ibidem è liminine offendes text. aut figur. Primus.

Pro.3.linea 8 *lege minori* G *æquã.* 4.*text.lege subtensi:eadẽ prop.lin.*12 *ab inclinationũ.* 5.*li.*9 *necnon anguli* A B I *reliqui. Item lin.*13 *lege auferãtur* G B I *&* B G Z. 6.*lin.*1 *angulos* G B A B G A. 7.*lin.*2 *concurrant. Itẽ lin.*17 *ipsi* A D *&* B D. 10.*lin.*2 *constituatur* D C B. 11.*figu. triangulum æquilaterum* D C E. 25.*lin.*4. *æquales essent.* 27.*lin.*7 *per* 15 *diffinit.* 30.*monit.lin.*22 *infinitæ supponi.* 32.*lin.*5 *angulum* E G D *interiori.* 39.*coroll.*1 *lin.*3 *constituitur.* 41.*lin.*6 *trianguli* A E B. 44.*figu.ad sectionem dimetien.*B.*ponatur.* Secundus.

*Diffi.*1.*li.*37 *ab* A B *ad* D C *in* E.*ibid.latitudinémq; ab* A D. *Diffi.*2.*fig.sit* C *pro* G.*item fig. moni. transponantur* D *&* C. *prop.*1.*li.*4. *Ad rectã* ℔ G. 2.*li.*8. D K *quæ sub* 10*ta, item quolibet.lin.*9 *contenta scilicet* A G E Z G D C E, *&* D B K E. *lin.*10 *quadratum* A K, *lin.*12 *scilicet ipsi* A B K Z. 3.*li.*8 G Z *erit sub segmentis.* 4.*lin.*11.*ex recta* B G.*lin.*12 *contineri, item figuræ* I *in concursu.* 5.*li.*19 *à media* B G. 6.*lin.*11.*reliqua* B G *reliquæ* M Z, *figuræ* T *in concursu.* 8.*text.descripto quadrato.li.* 18(*hoc est in* O K.) 9.*lin.*8 *per* Z *verò rectæ* E G.*lin.*10 *scilicet* G A E G E A G E B G B E.*lin.*11 *recti vnius erunt.* 12.*lin.*5 *tex.oppositio angulo, ibid.lin.*10 *atqui* A B *quadratum.* 13.*lin.*9 *fiunt ex* A D D G. 14.*lin.*20 *constituimus.* Tertius.

*Diffi.*8.*li.*7 *reliqua* B C *à minori. Diffi.*10.*moni.li.*12 *necessariò metietur & sola.* 8.*li.*1 *à quo in.item lin.*4 *vtcunque sint* D K E D L Z D T G. 12.*figuræ sint centra* Z I. 16.*Monit.li.*1.*cognitio siue.ibid.li.*43 *iuxta veræ.ibid.li.*45 *ab hac angulorum.ibid.li.*76 *maior rectilineus.* 24.*li.*11 D Z G *vel* D Z E. 37.*coroll.lin.*5.*sumpto.* Quartus. 5.*Coroll.lin.*2 *ambligonium.* Quintus.

*Diffi.*1.*lin.*7 *peculiaris existit ibid.quouismodo à maiore sumpt. Diffi.*3.*ante figu.*6.*lin.memores esse. Diffi.*5.*ad finem præcipit multiplicatione. monit.lin.* 8.*saniorum salua. Diffi.*19.*figuræ* A B E *pro* 1.*monit.li.*11 *sub voce multiplicis.* 2.*fig.apponatur* E *inter* D *&* T. Sextus. 1.*lin.*13 *ipsi* A G D *æqualia.* 26.*lin.*12.*Si igitur à* 29.*lin.*8 *deleatur in.* Septimus. *Probe.lin.*7 *vt præcinuimus proximis. Diffi.*1.*lin.*14 *quæ quidem numerus. Diffi.*4.*li.*7 *partes verò. Diffi.*7. *text.qui vnitate. Diffi.*8.*li.*2 *discernantur* 2,4,8. *Diffi.*16.*lin.*2 *ante vlti.figu.lege cũ* ± *augens.*

Moni.sequẽte sentẽtias facie 2.*li.*48 *loquemur posthac numeris.* 5.*text.vtriusq; eadem pars.* 6. *figu.* B 9 A 6 D 9 G 6. 8.*figu.* G *&* Z *transponantur.* 9.*figuræ fiant* B I 4 *&* E T 4, 11.*figu.* A E 3 E B 3 G Z 4 Z D 4. 15.*li.*3 *quoniam vnitas.* 21.*Monit.figuræ* A 2 B 6 G 5 D 15. 38.*lin.*7 *minimo* D *ab ipsis.* Octauus. 8.*figuræ* B ℔. *ibid.li.*8 E *ad* Z *sint vt* A *ad* B *erit.* 14.*li.*3 *si* G *metiatur* D *&*, 19.*li.*18 *fecerit* S, *erit per.* 27.*coroll.lin.*6 *cubi, idem ostendetur.* Nonus.

6.*li.*5 *quã cubus* G *ad cubũ* B. 12.*li.*4 *sunt ab vnitate, itẽ fig.*3,9,27,81. 18.*Moni.li.*8, 26 *octa ni.* 21.*li.*4.*ipsi porrò* E D *addatur.* 23.*li.*4 *dico totũ* A E *parẽ.* 26.*fig.trãsponãtur* D *&* G. 28.*tex trãsponãtur & impar par* 36.*Mon.li.*3.*vt si dixissemus hãc.* 37.*li.*22.*nullus esse horũ.* Decimus.

Prohemio facie 3.*li.*35 *reliquæ verò illi. Diffi.*7 *monit.li.*5 *ad aliam rationem habeat aliquam.* 14.*li.*9 *sicut* B *ad* G. 17.*li.*19.*Plus igitur.* 18.*Monit.post figu.li.*4, D B 4, A V S, *li.*5 V B 2, E H 16, *lin.*6 *secatur in* V.*li.*9 *ad* 13, A V 4. 21.*Monit.li.*22.*deleatur me.item.lin.*28 *res rei scilicet* 162. 49.*fig.*E *ra.*12. 52.*li.*15 *antecedẽs ad* A G *cõsequens, itẽ fig.inter* A *&* G *esto* 16. 56.*li.*19 *cõflato ex quadratis.* 68.*lin.*15 *cõmensurabile itaque erit quod.* 71.*tex.eam quæ ex binis nominibus quæ, item li.*9 *&* 10 *rectãgulum.* 72.*tex.adinuicem incõmensurabilia.coroll.li.*25 *ex diffinitionibus binomiorum.* 78.*Scholio.li.*16 *huius cũ sex eam, itẽ li.*23 *ad certam rectã applicatæ.* 86.*fig.sumatur præcedẽtis.* 91.*li.*33 *quadrata* L M N X *ipsis.* 96.*li.*22 *illud* L X *compo.* 98.*li.*11 *ex* A I *in media cõmens.* 99.*li.*14 *ad certã* D G. 102.*li.*23 *lõgitudine* G K K M. 104.*li.*19 *quod sub* G Z Z D *per.* 105.*li.*22 *&* 23 *quòd verò sub.* 111.*Monit.li.*15 *eam autem cui statutam, item li.*25 *seu certam quod ab ea.* Vndecimus. *Diffi.*6.*diffi.sexta.* 2.*li.*13 *extra subiectũ.* 10.*li.*3.*dico ipsas* D E. 13. *li.*10 *aut in plano.* 16.*cor.li.*1 *nã si plana* D G G H, *itẽ monit.li.*3.*quare ead.necessitate.* 18.*li.*9 *ad angulos rectos existẽtes.* 23.*fig.esto* 1 *loco* T, *item li.*32 L O M L O K *&* K O M. 26.*fig.loco* A E *esto* A O.*li.*14 *plano* B A F H *perperdi.* 33.*li.*24 *rectis* E K E L E M *ipsis.* Duodecimus. 12.*li.*51 *propriorũ dimetiẽtiũ, itẽ moni.fig.loco* Z T, 4, *esto* Z I, 2. 18.*li.*10 *reliqua* D E Z. Decimustertius.

7.*li.*18 *anguli* B E A B D G *æquales.* 10.*li.*31 *sub* B A A N *per.* 14.*li.*9.*duodecimam vndecimi, item li.*14(*qui ad* K.) 16.*li.*9 *eas itaque cõiun.item li.*66.*atqui ipsas* H C *&* C *cor.*1.*li.*4.*scilicet* E ℔ 17.*li.*56 *quadrati* N O.*li.*59 B F *per quadrageſi.li.*82 *per* 5 *diffi.*11. 18.*li.*48 *decimasexta & decimasept.* Decimusquartus. 4.*li.*19 *angulos continentis.* 11.*li.vlti.ad octahedrũ cor.*20.*lin.*1. *potẽtia distinguere.* Decimusquintus. 6.*cor.*1.*li.*3.*sunt per ipsas plana.* 8.*li.*7 *duodecim duxerimus.li.*16.*subtẽdãt angulos.* Decimussextus. 4.*li.*27 *rursus parallelæ sunt.* 25.*li.*19.*tollatur &.* 33.*cor.lin.*5 *tertiam minoris.* 37.*li.*41.*partem* 11.*decimi.fol.*203.*lin.*35 *ad idem signum.*