

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

342401

EUCLIDIS

ELEMENTO-

RUM

342401

Libri xv. breviter
demonstrati,

Opera

I. S. BARRON,
CANTABRIGIENSIS
Coll. TRIN. Soc.

HEROCL.

Καθαροὶ ψυχῆς λογικῆς εἰσιν αἱ μαθηματικαὶ
ἐπιστῆμαι.



CANTABRIGIÆ:

Ex celeberrimæ Academiæ Typographeo.

Impensis Gulielmi Nealand Bibliopola.

ANN. DOM. MDCLV.

BR

Nobilissimis & Generosissimis
Adolescentibus

D^{no} EDUARDO CECILIO,
Illustriſſ. Comit̃s Sarisburiensis Filio;
D^{no} JOHANNI KNATCHBULL,
Et
D. FRANCIS. WILLOUGHBY,
ARMIGERIS.

 Nuncique vestram (Optimi Adolescentes) tantum me debere reputo, quantum homo homini debere potest. Meam enim sententiam, ultra sincerum amorem non est quod quispiam de alio bene mereri possit. Hunc autem jamdiu est quod ex singulari vestra bonitate mihi indultum expector, ejusque sensus intimis animi medullis inherens, ipsi ardens studium impressit, quovis honesto modo reciprocos affectus prodendi. Quandoquidem vero ea fortunarum mearum tenuitas, ea vestrarum amplitudo existit, ut nec ego aliam quam gratæ alicujus agnitionis significatione uti queam, nec vos aliam admittere velitis, eapropter haud illibenter hanc occasionem arripio, honoris & benevolentiae, quibus vos

A. 3. prosequor;

Epistola Dedicatoria.

prosequor, publicum hoc & durabile *μνημόσυνον*
edendi. Etsi cum oblato anathematis exilitatem,
& libellam vestris nominibus consecratum, quàm
is longè infra vestrorum meritorum dignitatem
subsidiat, attentius considero, timor subindè ali-
quis & dubitatio animum incessant, nè hoc stu-
dium erga vos meum vobis dehonestamento sit
potius, quàm ornamento; scilicet memor cum
sim, ut malæ causæ, sic & mali libri patrocinium
in patroni contumeliam magis quàm in gloriam
cedere. Sed quum vestrarum virtutum id robur,
eam fore soliditatem recognoscerem, quæ ve-
strum decus, meo quantumvis labefactato, in-
concussum sustinere possint, idcirco non dubita-
vi vos in aliquatenus commune meum pericu-
lum induere. Virtutes illas intelligo, quibus ne-
mo unquam in vestra ætate, aut in vestro ordi-
ne, saltem me iudice, majores deprehendit, quæ
vos insigniter gratos omnibus & amabiles red-
dunt, eximiam modestiam, sobrietatem, benigni-
tatem animi, modum comitatem, prudentiam,
magnanimitatem, fidem; præclaram insuper in-
genii indolem, quæ vos ad omnem ingenuam
scientiam non tantum excellenti capto, sed &
appetitu forti ac sincero instruxit. Quas vestras
præclarissimas dotes prout nemo est fortassis,
qui me melius novit, aut pro consuetudine,
quam jamdudum vobiscum dulcissimam coluisse
ex vestro favore mihi contigit, penitus introspe-
xerit, ita nemo est, qui impensis miratur, & su-
spicit; aut qui ipsas libentius prædicare, ac esse-
brare

Epistola Dedicatoria.

brare vellet, si non cum eloquii mei vires super-
grederentur, tum etiam quæ in singulis vobis e-
lucent, prolixi alicujus commentarii, aut panegy-
ricæ orationis libertatem, potius quàm præstitu-
tas hujusmodi salutationibus angustias, exposce-
rent. Quin potius divinam clementiam imploro,
ut vos earundem virtutum sancto tramiti insiste-
re, atque hos egregios fructus vernæ vestræ æta-
tis felicibus incrementis maturescere concedat;
vitamque vobis in hoc seculo ingenuam, inno-
centem, jucundam, & in futuro beatam ac sem-
piternam transigere largiatur. Minimè autem
dubito, nè pro consueto vestro in me candore,
hoc ultimum fortassis, quod vobis præstare po-
terero, benevolentia erga vos & observantia te-
stimonium, alacriter accepturi sitis, quod vobis
propensissimo affectu offert.

Vestri in aeternum amantissimus,

& observantissimus,

I. B.

[illegible]

BENEVOLO LECTORI.

SI quid in hac elementorum
editione praestitum sit, scire
desideras, amice Lector, ac-
cipe, pro genio operis, brevi-
ter. Ad duos praecipue fines conatus
meos direxi. Primum ut cum requisita
perspicuitate summam demonstrationum
brevitatem conjungerem, quò eam li-
bello molem compararem, quae commodè
absque molestia circumferri posset. Id
quod affectus videor, si absentem Typo-
graphi cura non frustretur. Concinnius
enim quispiam meliori ingenio, aut ma-
jori peritiâ excellens, at nemo forsitan bre-
vius plerasque propositiones demonstra-
verit, praesertim cum in numero & or-
dine propositionum ipse nihil immutâ-
rim, nec licentiam mihi assumpserim
quancunque propositionem Euclidean
procul ablegandi tanquam minus neces-
sariam, aut quasdam faciliores in axio-
matum censum referendi, quod nonnulli
fecerunt; inter quas peritissimus Geome-
tra A. Tacquetus C quem ideo etiam
nomino, (quod quadam ex eo desumpta
agnoscere honestum duco) post cuius ele-
gantissimam editionem, ipse nihil atten-
tare

Ad Lectorem.

care voluissim, si non visum fuisset do-
ctissimo viro non nisi octo Euclidis libros
sua cura adornatos publico communica-
re, reliquis septem, tanquam ad ele-
menta Geometriae minus spectantibus,
omnia quasi secretis atque posthabitis.
Mibi autem jam ab initio alia provin-
cia demandata fuit, non elementa Geo-
metriae utcumque pro arbitrio conscriben-
di, verum Euclidem ipsum, cumque to-
tum, quam possem brevissime, deman-
strandi. Quod enim quatuor libros spe-
ctat, septimum, octavum, nonum, deci-
mum, quamvis illi ad Geometriae plane
& solide elementa, ut sex praecedentes,
& duo subsequentes, non tam prope per-
tineant, quae tamen ad res Geometricas
admodum utiles sint, tam propter Arith-
meticae & Geometriae valde propinquam
cognitionem, quam quod notitiam commen-
surabilium & incommensurabilium ma-
gnitudinum ad figurarum tam plana-
rum, quam solidarum apprimè necessari-
am, nemo est è peritioribus Geometris
qui ignorat. Qua verò in tribus ultimis
libris continetur, 5 corporum regulari-
um nobilis contemplatio, illa non nisi in-
juriâ pratermitti potuit, quando nempe
illius gratiâ noster socius, Platonica
familia philosophus, hoc elementorum sy-
stema universam condidisse perhibetur.

Ad Lectorem.

ut testis est. * Proclus, iis verbis. *Ὁτι* lib. 2.
 διὰ τὴν ἀπὸ τοῦ συγγραφέως συχναίαν τὴν τὴν τὴν τὴν
 σίαν τὴν πρὸς τοῦ καλεσμένου πρὸς τοῦ συγγραφέως
 πρὸς τοῦ συγγραφέως. Præterea facile in ani-
 mum induxi ut opinarer, nequam harum
 scientiarum amanti non futurum esse
 cordi, penes se habere integrum Eucli-
 dem opus, quale passim ab omnibus ci-
 tatur, & celebratur. Quare nullum li-
 brum, nullamque propositionem negligere
 volui earum, quæ apud P. Herigomum
 habentur, cujus vestigiis pressè insistere
 necesse habui, quoniam ejusce libri sche-
 matismis maximâ ex parte uti statutum
 erat, quod præviderem mihi ad novas
 describendas, tempus non suppetere, etsi
 nunquam id facere præoptassem. Ea-
 dem de causa nec alias plerâsque quam
 Euclidæ demonstrationes adhibere vo-
 lai, succinctiori formâ expressas, nisi
 forte in 2, & 13, & parçè in 7, 8, 9 li-
 bris, ubi ab eo nonnihil deflectere opere
 primum videbatur. Bona igitur spes est
 saltem in hac parte, cum nostris consiliis,
 tum studiosorum votis aliquo modo satis-
 factum iri. Nam, quæ adjecta sunt in
 Scholiis problemata quadam & theore-
 mata, siue ob suum frequentem usum ad
 naturam elementarem accedentia, siue ad
 eorum, quæ sequuntur, expeditam demon-
 strationem conducantia, seu quæ regula-
 rum

Ad Lectorem.

ram practica Geometria quarundam principuarum rationes innuunt ad suos fontes relatas, per ea, ut spero, libellus ultra destinatam molem magnopere non intumescet.

Alter scopus, ad quem collineatum est, eorum desideriis consuluit, qui demonstrationibus symbolicis potius quam verbalibus delectantur. In quo genere cum plerique apud nos Gulielmi Oughtredi symbolis assueti sint, ea plerumque usurpare consultius duximus. Nam qui Euclidem, hac viâ tradere & interpretari aggressus sit, hætenus, quod ego sciam, præter unum P. Herigonium, repertus est nemo. Cujus viri longè doctissimi methodus, sanè in multis egregia, ac ejus peculiari proposito admodum accommodata, duplici tamen defectu laborare mihi visa est. Primo, quod cum Propositionum ad unius alicujus theorematris aut problematis probationem adductarum, posterior à priori non semper dependeat, quando tamen illa inter se coherant, quando non, nec ex ordine singularum, nec ullo alio modo satis promptè innotescere potest; unde ob defectum conjunctionum, & adjectivorum ergo, rursus, &c. non raro difficultas & dubitandi occasio, præsertim minus exercitatis, inter legendum oboriri solent. Deinde sæpe evenit, ut prædi-

Sta

Ad Lectorem.

Et methodus nimis frequenter supervacaneas repetitiones effugere nequeat, à quibus demonstrationes est quando prolixæ, aliquando & magis intricatæ evadunt. Quibus vitiis noster modus facile per verborum signorumque arbitrariam mixturam medetur. Atque hæc de opella hujus intentione & methodo dicta sufficiant. Cæterum quæ in laudem Mathematicos in genere, aut Geometria ipsius, & quæ de historia harum scientiarum, idè quæ de Euclide horum elementorum digestore dici possent, & reliqua hujusmodi, cui hæc placent, apud alios interpretes consulere potest. Neque nos angustia temporis, quod huic operi impendi potuit, nec interpellationes negotiorum, nec adjumentorum ad hæc studia apud nos egestatem, & quadam alia, ut liceret non immerito, in excusationem obtemperamus, metâ scilicet indacti, nè hæc nostra omnibus minus satisfaciunt. Verum quæ ingenui Lectoris usibus elaboravimus, eadem in solidum ipsius censure ac judicio submittimus, probanda si utilia sibi compererit, sin omnino secus, rejicienda.

J. B.

Ad amicissimum Virum J. B. de
 EUCLIDE contracto
 Εὐκλείδης.

FActum bene! didicit Laconicè loqui
 Senex profundus, & aphorismos induit.
 Immensa dudum margo commentarii
 Diagrammâ circuit minutum; utque Insula
 Problemâ breve natabat in vasto mari.
 Sed unda jam detumuit; & glossa arctior
 Stringit Theoremata: minoris anguli
 Lateribus ecce totus Euclides jacet,
 Inclusus olim velut Homerus in nuce;
 Pluteâque sarcina modo qui incubuit, levis
 Em fit manipulus. Pelle in exigua latet
 Ingens Mathêsis, matris ut in utero Hercules,
 In glande quercus, vel Ithaca Eurys in pila.
 Nec mole dum decrevit, usu fit minor,
 Quin auctior jam evadit, & cumulatis
 Contracta prodest erudita pagina.
 Sic ubere magis liquor è presso effluit;
 Sic pleniori vasa inundat sanguinis
 Torrente cordis Systole; sic fuscus
 Procurrit liquor ex Abylæ angustis.
 Tantilli operis ars tanta referenda unice est
 BAROVIANO nomini, ac solertie.
 Sublimis euge mentis ingenium potens!
 Cui invium nil, arduum esse nil solet.
 Sic usque pergas prospero coamine,
 Radînsque multam debeat ac abacus tibi.
 Sic crescat indies feracior seges,
 Simili cottonum germine affuso beatus.
 Specimen futura messis hîc fiet labor,
 Magna! que fama illustra hac pratudia.
 Juvenis dedit qui tanta, quid dabit senex?

Car. Robotham, CANTAB.
 Coll. Trin. Sen. Soc.

In

In novam Elementorum
EUCLIDIS

Editionem, à D. I. S. BARROW,
Collegii SS. TRIN. Socio,
viro opt. & eruditissimo
adornatam.

Benigne Lector: si aspiciam auditum est tibi,
Quamvis tenella Nix Geometres heret;
Qua mille radiis, mille ludis angulis,
Totumque puro docuit Euclidem sine
Amphis altero candidissimum Virum,
Cum plena nivium est in dolos, sed quas tamen
Præclarus ardor mentis urget Euxheæ,
Et æque blandis temperat caloribus:
Quos sudor non orruit, & melius nihil
Is, dum liquentes pectore excutit nives,
Et inde, & inde spargit, en aliam tibi,
Lector benigne, & nivibus Geometriam!

G. E. A. M. C. A. S.

Notarum explicatio.

$\equiv$ æqualitatem.

$\sqsupset$ majoritatem.

$\sqsubset$ minoritatem.

$+$ plus, vel addendum esse.

$-$ minus, vel subtrahendum esse.

$-;$ differentiam vel excessum; item quantitates omnes, quæ sequuntur, subtrahendas esse, signis non mutatis.

$\times$ multiplicationem, vel ductum lateris rectanguli in aliud latus.

Idem denotat conjunctio literarum, ut
 $AB = A \times B$.

$\sqrt{\quad}$ Latus, vel radicem quadrati, vel cubi, &c.

Q. & q quadratum. C. & c cubum.

Q. Q. rationem quadrati numeri ad quadratum numerum.

Reliquas, quæ ubicunque occurrunt, vocabulorum abbreviaciones ipso Lector per se facile intelleget; exceptis illis, quæ tanquam minus generalis usus, suis locis explicandas relinquimus.

CANDIDE LECTOR, Quamvis in hac editione accuranda multum opere insumpsimus, cavere tamen omnino non potuimus, ne irreperent quedam. Quorum summa si subducas eam quæ incutitur & imperturbati operibus, tum quæ Autoris manuscripto calamo festinante exarata debentur, reliqua; siqua modo restant, pro nostris libenter agnoscimus. In universum tamen, si omnia nobis imputes, non ita multa sunt, ut illarum nos admodum pudeat, aut ut æquus Lector ea & uni, & homini difficulter ignoscat.

Paucula hæc, quæ temere aliquoties pagellas sparsim relegenti obiter occurrerant, diligenter adnotes velim, aut si places, calamo emendes.

Pag. 5. lin. 10. pro æquilateræ lege quadrilat. p. 13. l. 6, & 7. pro $\sqsupset$ pone $\sqsubset$ in aliquibus exempl. p. 21. desunt figura pro 2 & 3 Cas. Prop. 24. p. 168. l. penult. pro Aq. lege AB. p. 314. l. ult. pro AC. l. AD. p. 144. & 145 pro Lib. VI. l. Lib. VII. Est & in octavo libro :: pro $\equiv$, sed locum non meminimus.

significat.

Definitiones.

I.  Unctum est cujus pars nulla est.

*II. Linea verò longitudo latitudinis expers.

III. Lineæ autem termini sunt puncta.

IV. Recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

V. Superficies est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.

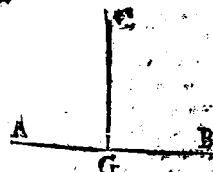
VI. Superficie autem extrema sunt lineæ.

VII. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas.

VIII. Planus verò angulus est, duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium alterius ad alteram inclinatio.

IX. Cum autem quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

X. Cum verò recta linea CG super rectam lineam AB consistens, eos qui sunt deinceps angulos CGA , AGB æquales inter se fecerit, rectus est uterque

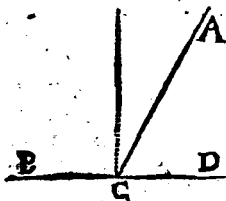


æqualium angulorum, & quæ insitit recta linea CG , perpendicularis vocatur ejus (AB) cui insitit.

Not. Cum plures anguli ad unum punctum: (ut ad G) existunt, designatur quilibet angulus, tribus literis, quarum media ad verticem est illius de quo agitur: ut angulus quem rectæ CG , AG efficiunt ad partes A vocatur CGA , vel AGC .

B

Obtusus



XI. Obtusus angulus est, qui recto major est, ut ACB .

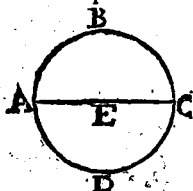
XII. Acutus verò, qui minor est recto, ut ACD .

XIII. Terminus est, quod alicujus extre-

tremum est.

XIV. Figura est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

XV. Circulus est figura plana, sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.



XVI. Hoc verò punctum centrum circuli appellatur.

XVII. Diametrum autem circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte in

circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

XVIII. Semicirculus verò est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

In circulo $EABCD$. E est centrum, AC diameter, ABC semicirculus.

XIX. Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

XX. Trilateræ quidem, quæ sub tribus.

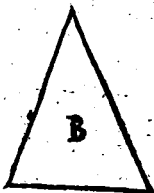
XXI. Quadrilateræ verò, quæ sub quatuor.

XXII. Multilateræ autem, quæ sub pluribus, quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur,

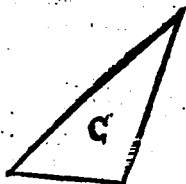
XXIII. Tri-



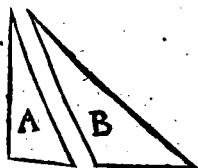
XXIII. Trilaterarum autem figurarum, æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia, ut triangulum A.



XXIV. Isosceles autem, quod duo tantum æqualia habet latera, ut triangulum B.



XXV. Scalenum verò, quod tria inæqualia habet latera, ut C.



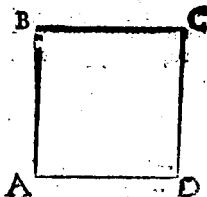
XXVI. Adhuc etiam trilaterarum figurarum, rectangulum quidē triangulum est, quod rectum angulum habet, ut triangulum A.

XXVII. Amblygonium autem, quod obtusum angulum habet, ut B.

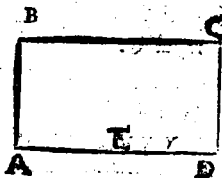


XXVIII. Oxygonium verò, quod tres habet acutos angulos, ut C.

Figura æquiangularis est, cujus omnes anguli inter se æquales sunt. Duæ verò figure æquiangularæ sunt; si singuli anguli unius singulis angulis alterius sint æquales. Similiter de figuris æquilateris concipe.



XXIX. Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est, ut ABCD.

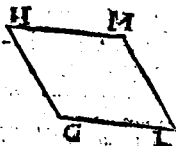


XXX. Altera verò parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est, ut ABCD.

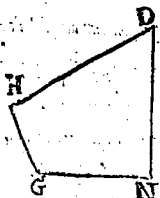


XXXI. Rhombus autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est, ut A.

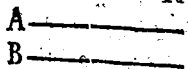
XXXII.



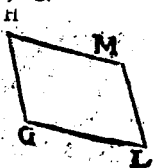
XXXII. Rhomboides verò, quæ ad-
versa & latera, & an-
gulos habens inter se
æquales, neque æqui-
latera est, neque re-
ctangula, ut GLMH.



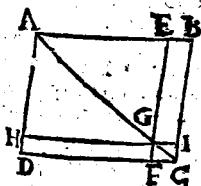
XXXIII. Præ-
ter has autem reliquæ
æquilateræ figuræ tra-
pezia appellantur; ut
GNDH.



XXXIII. Pa-
rallæ rectæ lineæ
sunt, quæ cum in eo-
dem sint plano, & ex utraque parte in infinitum
producantur, in neutram sibi mutuò incidunt,
ut A, & B.



XXXV. Paral-
lelogrammum est fi-
gura quadrilatera, cu-
jus bina opposita la-
tera sunt parallela,
seu æquidistantia, ut
GLHM.



XXXVI. Cum
verò in parallelo-
grammo ABCD di-
ameter AC ducta fu-
erit, duæq; lineæ EF,
HI, lateribus paral-
læ secantes diame-
trum in uno eodémq;

puncto G, ita ut parallelogrammum ab hisce
B 3. paralle-

parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa DG , GB , per quæ diameter non transit, Complementa; duo verò reliqua HE , FI , per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.

Problema est, cùm proponitur aliquid efficiendum.

Theorema est, cùm proponitur aliquid demonstrandum.

Corollarium est consecutarium, quod è facta demonstratione tanquam lucrum aliquod colligitur.

Lemma est demonstratio præmissa alicujus, ut demonstratio quæsitæ evadat brevior.

Postulata.

1. **P**ostuletur, ut à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.
2. Et rectam lineam terminatam in continuum rectâ producere.
3. Item, quovis centro, & intervallo circulum describere.

Axiomata.

1. **Q**uæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.
ut $A = B = C$. ergò $A = C$, vel ergò omnes A, B, C æquantur inter se.

Nota, Cùm plures quantitates hoc modo conjunctas invenias, ut hujus axiomatis primam ultimæ & quamlibet earum cuilibet æquari. Quo in casu sæpe, brevitatis causâ, ab hoc axioma citando abstinemus, etsi vis consecutionis ab eo pendeat.

2. Et si æqualibus æqualia adjecta sunt, tota sunt æqualia.

3. Et

3. Et si ab æqualibus æqualia ablata sunt, quæ relinquuntur sunt æqualia.

4. Et si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia.

5. Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

6. Et quæ ejusdem vel æqualium sunt duplicia, inter se sunt æqualia. Idem puta de triplicibus, quadruplicibus, &c.

7. Et quæ ejusdem, vel æqualium sunt dimidia, inter se sunt æqualia. Idem concipe de subtriplicis, subquadruplicis, &c.

8. Et quæ sibi mutuò congruunt, ea inter se sunt æqualia.

Hoc axioma in rectis lineis, & angulis valet conversum, sed non in figuris, nisi illæ similes fuerint.

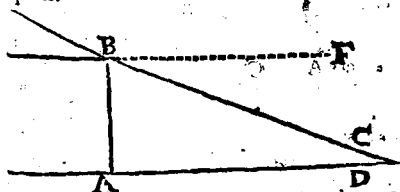
Ceterum, magnitudines congruere dicuntur, quarum partes applicatæ partibus, æqualem vel eundem locum occupant.

9. Et totum suâ parte majus est.

10. Dux rectæ lineæ non habent unum & idem segmentum commune.

11. Dux rectæ in uno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuò in eo puncto interfecabunt.

12. Item omnes anguli recti sunt inter se æquales.



13. Et si in duas rectas lineas AD, CB, altera recta BA incidens, internos ad eandemq; partes angulos

los BAD, ABC duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ linæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

14. Duæ rectæ linæ spatium non comprehendunt.

15. Si æqualibus inæqualia adjiciantur, erit totorum excessus adjunctorum excessui æqualis.

16. Si inæqualibus æqualia adjungantur, erit totorum excessus excessui eorum, quæ à principio, æqualis.

17. Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

18. Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.

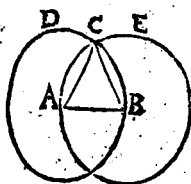
19. Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

20. Si totum totius est duplum, & ablatum ablati, erit & reliquum reliqui duplum. Idem de reliquis multiplicibus intellige.

Citationes intellige sic. Cùm duo numeri occurrant, prior designat propositionem, posterior librum. Ut per 4. 1. intelligitur quarta propositio primi libri, atque ità de reliquis. Cæterùm, ax. axioma, post. postulatum, def. definitionem, sch. scholium, cor. corollarium denotant, &c.

LIB. I.

PROP. I.



Super datâ rectâ li-
neâ terminatâ A
B, triangulum aquila-
terum ACB consti-
tuere.

Centris A & B, eo-
dem intervallo AB,
vel BA^a describe duos
circulos se intersecan-

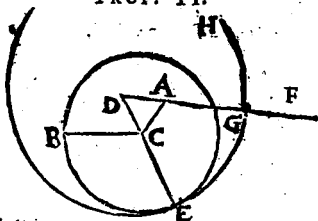
a 3. post.
b 1. post.
c 15. def.
d 1. ax.
e 23. def.

tes in puncto C, ex quo^b duc rectas CA, CB.
Erit AC^c = AB^c = BC^d = AC. ^e Quare
triangulum ACB est æquilaterum. Quod Est
Faciendum.

Scholium.

Eodem modo super AB describetur triangu-
lum Iſosceles, si intervalla, æqualium circulo-
rum majora sumantur, vel minora, quàm AB.

PROP. II.



Ad datum punctum A datæ rectæ lineæ BC
æqualem rectam lineam AG ponere.

Centro C, intervallo CB^a describe circulo-
rum CBE. ^b Junge AC, super qua ^c fac trian-
gulum æquilaterum ADC. ^d produc DC ad E.

a 3. post.
b 1. post.
c 1. 1.
d 2. post.

B. 5.

centro

lem, sub aequalibus rectis lineis contentum, & basim BC basi EF aequalem habebunt; eritque triangulum BAC triangulo EDF aequale, ac reliqui anguli B, C reliquis angulis E, F aequales erunt, uterque utriusque, sub quibus aequalia latera subtenduntur.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE rectae AB superponatur, cadet punctum E in B, quia $DE^a = AB$. Item recta DF cadet a hyp. in AC, quia ang. $A^a = D$. Quinetiam punctum F puncto C coincidet, quia $AC^a = DF$. Ergo rectae EF, BC, cum eodem habeant terminos, ^b congruent, & proinde aequales sunt. ^{b 14. ax.} Quare triangu- la BAC, EDF; & anguli B, E; itemq; anguli C, F etiam congruunt, & a- quantur. Quod erat Demonstrandum.

PROP. V.



Isoscelium triangulum ABC qui ad basim sunt anguli ABC, ACB inter se sunt aequales. Et productis aequalibus rectis lineis AB, AC qui sub base sunt anguli CBD, BCE inter se aequales erunt.

^b Accipe $AF = AD$, & ^{a 3. r.} ^{b 1. p. 57.} junge CD, ac BF.

Quoniam in triangulis ^{c hyp.} ACD, ABF, sunt $AB^c = AC$, & $AF^d = AD$, ^{d constr.} ^{c 4. 1.} angulusq; A communis, erit ang. $ABF = ACD$; & ang. $AFB^e = ADC$, & bas. $BF^e = DC$; item $FC^f = DB$. ergo in triangulis BFC, BDC erit ang. $FGB = DBC$. Q. E. D. Item ideo ang. $FBC = DCB$. atqui ang. $ABF^h =$ ^{f 3. ax.} ^{g 4. 1.} ^{h pr.} ^{k 3. ax.} ACD . ergo ang. $ABC^k = ACB$. Q. E. D.

Corollarium.

Hinc, Omne triangulum æquilaterum est quoq; æquiangulum.

PROP.

PROP. VI.

Si trianguli ABC duo anguli ABC , ACB aequales inter se fuerint, & sub aequalibus angulis subtensa latera AB , AC aequalia inter se erunt.



a 3. l.
b f. post.

c suppos.
d hyp.

e 4. l.
f 2. ar.

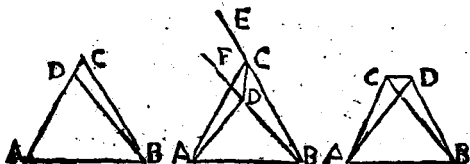
Si fieri potest, sit utraque $BA = CA$. Fac igitur $BD = CA$, & b duc CD .

In triangulis DBC , ACB , quia $BD = CA$, & latus BC commune est, atq; ang. $DBC = ACB$, e erunt triangula DBC , ACB aequalia inter se, pars & totum, f Quod Fieri Nequit.

Coroll.

Hinc, Omne triangulum æquiangulum est quoq; æquilaterum.

PROP. VII.



Super eadem recta linea AB duabus eisdem rectis lineis AC , BC , alia duæ rectæ lineæ aequales AD , BD , utraque utrique (hoc est, $AD = AC$, & $BD = BC$) non constituentur ad aliud punctum C , atque aliud D , ad easdem partes C , eisdemque terminos A , B cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

a 2. ar.

1. Cas. Si punctum D statuatur in AC , 2 -liquet non esse $AD = AC$.

2. Cas. Si punctum D dicatur intra triangulum ACB , duc CD , & produc BDF , ac BCE . Jam vis $AD = AC$. ergo ang. $ADC = ACD$; item quia $BD = BC$, erit ang. $EDC = ECD$.
ergo.

b 5. l.

c suppos.

ergo ang. $FDC \stackrel{d}{=} ACD$, id est ang. d 9. ax.
 $FDC \stackrel{d}{=} ADC \stackrel{d}{=} Q.F.N.$

3. *Cas.* Sin D cadat extra triangulum ACB, jungatur CD.

Rursus, ang. $BCD \stackrel{e}{=} BDC$, & $BCD \stackrel{e}{=} e$ 5. 1.
 $BDC \stackrel{f}{=} ergo \text{ ang. } ACD \stackrel{f}{=} BDC$. & proin- f 9. ax.
 de multò magis ang. $BCD \stackrel{f}{=} BDC$. Sed erat
 ang. $BCD = BDC$. Quæ repugnant. Er-
 go, &c.

PROP. VIII.



Si duo trian-
 gula ABC, DEF
 habuerint duo la-
 tera AB, AC
 duobus lateribus
 DE, DF, u-
 trumque utriq; æ-

qualia; habuerint verò & basim BC, basim EF, æqua-
 lem: angulum A sub æqualibus rectis lineis con-
 tentum angulo D æqualem habebunt.

Quia $BC \stackrel{a}{=} EF$, si basis BC superponatur a hyp.
 basi EF, illæ b congruent. ergo, cum $AB \stackrel{c}{=} DE$, b 8. ax.
 & $AC \stackrel{c}{=} DF$, cadet punctum A in D. (nam c hyp.
 in aliud punctum cadere nequit, per præceden-
 tem) ergo angulorum A, & D latera coinci-
 dunt. d quare anguli illi pares sunt. Q. E. D. d 8. ax.

Coroll.

1. Hinc triangula sibi mutuò æquilatera, etiam
 mutuò æquiangula sunt.

x 4. 1.

2. Triangula sibi mutuò æquilatera y æquan- y 4. 1.
 tur inter se.

PROP. IX.

Datum angulum rectilineum BAC bisariam secare.

^a Sume $AD = AE$; duc DE , super qua^b fac triang. æquilat. DFE .

Ducta AF angulum BAC bisecabit.

Nam $AD = AE$, & latus AF commune est, & bas. $DF = FE$.
ergo ang. $DAF = EAF$. Q. E. F.

Coroll.

Hinc patet quomodo angulus secari possit in æquales partes 4, 8, 16, &c. Singulos nimirum partes iterum bisecare.

Methodus verò regulâ & circino angulos secandi in æquales quoscunq; hætenus Geometras latuit.

PROP. X.

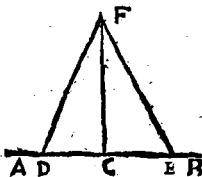
Datam rectam lineam AB bisariam secare.

Super data AB ^a fac triang. æquilat. ABC .
ejus angulum C ^b biseca rectâ CD , Eadem datam AB bisecabit.

Nam $AC = BC$, & latus CD est commune; & ang. $ACD = BCD$; ergo $AD = BD$. Q. E. F. Præxin hujus & præcedentis, constructio primæ hujus libri satis indicat.

PROP.

PROP. XI.

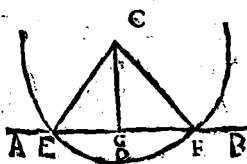


Data recta linea AB, & puncto in ea dato C, rectam lineam CF ad angulos rectos excitare.

^a Accipe hinc inde ^{a 3. 1.} $CD = CE$. Super ^{b 1. 1.} per DE ^{c constr.} fac triang. ^{d 8. 1.} $\triangle DFC, \triangle EFC$. ^{e 10. def.} Nam triangula $\triangle DFC, \triangle EFC$ sibi mutuo ^a æquilatera sunt. ^d ergo ang. $\angle DCF = \angle ECF$. ^e ergo FC perpendicularis est. Q. E. F.

Praxis tam hujus, quam sequentis expeditur facillime ope normæ.

PROP. XII.



Super datam rectam lineam infinitam AB, à dato puncto C quod in ea non est, perpendicularem rectam C-G deducere.

Centro C ^a describe circulum, qui secet datam AB in punctis B & F ^b biseca E-F in G ^{b 10. 1.} ducta CG perpendicularis est.

Ducantur enim CE, CF. Triangula EGC, FGC, sibi mutuo ^a æquilatera sunt. ^d ergo anguli EGC, FGC, æquales, & ^e proinde recti sunt. Q. E. F. ^{c constr.} ^{d 8. 1.} ^{e 10. def.}

PROP. XIII.



Cum recta linea AB, super rectam lineam CD constans, facit angulos ABC, ABD; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

C 2.

SI

a 10. def.

b 11. 1.

c 19. ax.

d 3. ax.

e 2. ax.

Si anguli ABC, ABD pares sint, ^a liquet illos rectos esse; sin inæquales sint, ex B ^b excitetur perpendicularis BE. Quoniam ang. ABC ^c = Rect. + ABE; & ang. ABD ^d = Rect. - ABE; erit ABC + ABD ^e = 2 Rect. + ABE - ABE = 2 Rect. Q. E. D.

Coroll.

1. Hinc, si unus ang. ABD rectus sit, alter ABC etiam rectus erit; si hic acutus, ille obtusus erit, & contra.

2. Si plures rectæ quàm una ad idem punctum eidem rectæ insistant, anguli fient duobus rectis æquales.

3. Duæ rectæ invicem secantes efficiunt angulos quatuor rectis æquales.

4. Omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt quatuor rectos. patet ex Coroll. 2.

PROP. XIV.

Si ad aliquam rectam lineam AB, atque ad ejus punctum B, duæ rectæ lineæ CB, BD non ad easdem partes ductæ, eos qui sunt deinceps angulos ABC, ABD duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ CB, BD.

Si negas, faciant CB, BE unam rectam. ergo ang. ABC + ABE ^a = 2 Rect. ^b = ABC + ABD. ^c Quod Est absurdum.

PROP. XV.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD se mutuò secuerint, angulos ad verticem CEB, AED æquales inter se efficient.

Nam ang. AEC + CEB = 2 Rect. = AEC + AED. Ergo CEB = AED. Q. E. F.

a 13. 1.

b hyp.

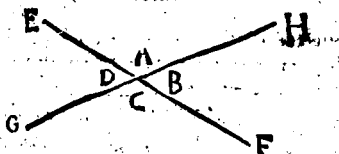
c 9. ax.

a 13. 1.

b 3. ax.

Schol.

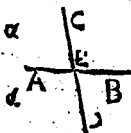
Schol.



Si ad aliquam rectam lineam GH, atque ad ejus punctum, A duæ rectæ lineæ EA, AF non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem D, & B æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ EA, AF in directum sibi invicem erunt.

Nam $2 \text{ Rect.} = \angle D + \angle A = \angle B + \angle A$. ^b ergo $\angle A = \angle B$. ^a 13. 1. EA, AF sunt in directum sibi invicem. Q. E. D. ^b 14. 1.

Schol. 2.

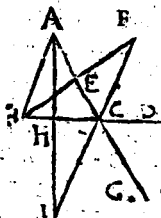


Si quatuor rectæ lineæ EA, EB, EC, ED ab uno puncto E exeuntes, angulos oppositos ad verticem æquales inter se fecerint, erunt quælibet duæ lineæ AE,

EB, & CE, ED in directum positæ.

Nam quia $\text{ang } \angle AEC + \angle AED + \angle CEB + \angle DEB = 4 \text{ Rect.}$ erit $\angle AEC + \angle AED = \angle CEB + \angle DEB$. ^a 4 Cor. 13. 1. ^b 13. 1. ^c 2. ax. ^c 14. 1. ergo CED, & AEB sunt rectæ lineæ. Q. E. D.

PROP. XVI.



Cujuscunque Trianguli ABC uno latere BC producto, externus angulus ACD utrolibet interno & opposito CAB, CBA, major.

Latera AC, BC ^a bi- ^a 10. 1. & ^b 1. post. secant rectæ AH, BE, e quibus productis ^b cape EF ^b 3. 1. = BE, & HI = AH,

Conjuganturq; FC, I.

C 3 Quo-

c constr.
d 15. 1.
e 4. 1.
f 15. r.
g 9. ax.

Quoniam $CE = EA$, & $EF = EB$, &
ang. $FEC = BEA$; e erit ang. $ECF = EAB$.
Simili argumento ang. $ICH (f FCD) = ABH$.
ergo totus ACD major est utrovis CAB , &
 ABC . Q. E. D.

PROP. XVII.



Cujuscunque trianguli
 ABC duo anguli duobus
rectis sunt minores, omni-
fariam sumpti.

Producatur latus BC .

Quoniam ang. $ACD +$
 $ACB = 2$ Rect. & ang.
 $ACD = A$, e erit $A + ACB = 2$ Rect. Eo-
dem modo erit ang. $B + ACB = 2$ Rect. De-
nique producto latere AB , erit similiter ang.
 $A + B = 2$ Rect. Quæ E. D.

Coroll.

1. Hinc, in omni triangulo, cujus unus an-
gulus fuerit rectus, vel obtusus, reliqui acuti
sunt.

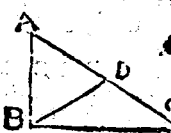


2. Si linea recta AE cum alia recta CD an-
gulos inæquales faciat, unum AED acutum, &
alterum AEC obtusum, linea perpendicularis
 AD ex quovis ejus puncto A ad aliam illam
 CD demissa, cader ad partes anguli acuti AED .

Nam si AC ad partes anguli obtusi ducta, di-
catur perpendicularis; in triangulo AFC erit ang.
 $AEC + ACE = 2$ Rect. * Q. F. N.

3. Omnes anguli trianguli æquilateri, & duo
anguli trianguli isoscelis, supra basim, acuti sunt.

PROP. XVIII.



Omnis trianguli ABC
majus latus AC majorem
angulum ABC subtendit.

Ex AC aufer $AD =$
 AB , & junge DB . b ergo
ang. $ADB = ABD$. Sed
 ADB

a 13. 1.
b 16. 1.
c 4 ax.

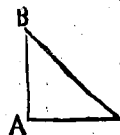
* 17. 1.

a 3. 1.
b 5. 1.

$\angle ADB \sqsubset C$. ergo $\angle ABD \sqsubset C$. $\therefore$ ergo totus $\angle ADB$ $\sqsubset C$. 16. 1.
ang. $\angle ABC \sqsubset C$. Eodem modo erit $\angle ACB \sqsubset A$. 9. ax.
Q. E. D.

PROP. XIX.

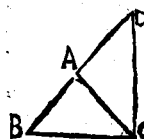
Omnis trianguli ABC major angulus A majori lateri BC subtenditur.



Nam si dicatur $AB = BC$, $\therefore$ erit $\angle A = \angle C$. contra 5. 1.
tra Hypoth. & si $AB \sqsubset BC$, $\therefore$ erit $\angle C \sqsubset A$, contra hyp. quare potius $BC \sqsubset AB$. & eodem modo $BC \sqsubset AC$.
Q. E. D.

PROP. XX.

Omnis trianguli ABC duo latera BA, AC reliquo BC sunt majora quomocunque sumpta.



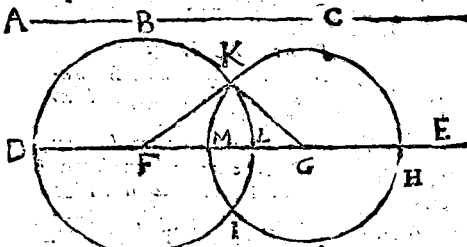
Ex BA producta $\therefore$ cape $AD = AC$, & duc DC. 3. 1.
 $\therefore$ ergo ang. $\angle D = \angle ACD$. 5. 1.
 $\therefore$ ergo totus $\angle BCD \sqsubset \angle D$ $\therefore$ ergo $BD \sqsubset BA + AC$. 9. ax.
Q. E. D. 19. 1.
c. constr. & 2. ax.

PROP. XXI.

Si super trianguli ABC uno latere BC, ab extremitatibus duae rectae lineae BD, CD, interius constitutae fuerint, haec constitutae reliquis trianguli duobus lateribus BA, CA minores quidem erunt, majorem vero angulum BDC continebunt.



Producatur BD in E. estq; $CE + ED \sqsubset BA + AC$. 20. 1.
CD adde commune BD, $\therefore$ erit $BE + EC \sqsubset BD + DC$. 4. ax.
Rursus $BA + AE \sqsubset BE$, $\therefore$ ergo $BA + AC \sqsubset BE + EC$. quare $BA + AC \sqsubset BD + DC$. Q. E. D. 2. Ang. $\angle BDC \sqsubset \angle A$. 16. 1.
DE $\sqsubset A$. ergo ang. $\angle BDC \sqsubset A$. Q. E. D.
C 4 PROP.



Ex tribus rectis lineis FK, FG, GK, quæ sunt tribus datis rectis lineis A, B, C æquales, triangulum FKG constituere. Oportet autem duas reliquas esse majores omnifariam sumptas, quoniam minuscujusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt majora.

a 3. 1.

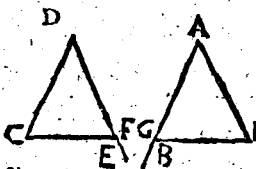
b 3. post.

c 15. def.

d 1. ex.

Ex infinita DE ^a sume DF, FG, GH datis A, B, C ordine æquales. Tum si ^b centris F, & G, intervallis FD, & GH ducantur circuli se intersecantes in K; junctis rectis KF, KG constituetur triangulum FKG; ^c cujus latera FK, FG, GK tribus DF, FG, GH, ^d id est tribus datis A, B, C æquantur. Q. E. F.

* PROP. XXIII.



Ad datam rectam lineam AB, datumque in ea punctum A, dato angulo rectilineo D æquale angulum rectilineum A constitutare.

a 1. post.

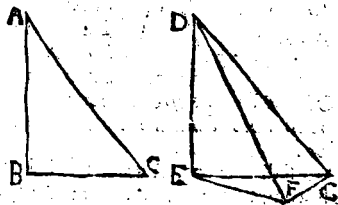
b 3. 1.

c 22. 1.

— ^a Duc rectam CE secantem dati anguli latera utcumque. ^b Fac AG = CD. Super AG ^c constitue triangulum alteri CDF æquilaterum, ita ut,

ut $AM = DF$, & $GH = CF$; & habebis ang. d 8. i.
 $A^d = D$. Q. E. F.

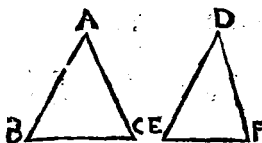
PROP. XXIV.



Si duo triangu^a ABC, DEF duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF equalia habuerint, utrumque utrique, angulam verò A angulo EDF majorem sub equalibus rectis lineis contentum, & basim BC, basi EF, majorem habebunt.

^a Fiat ang. EDG = A, & DG ^b = DF ^c = AC, connectanturque EG, FG.

1. Cas. Si EG cadit supra EF. Quia AB ^d = DE, & AC ^e = DG, & ang. A ^e = EDG, ^e ^f ^g ^h ⁱ ^j ^k ^l ^m ⁿ ^o ^p ^q ^r ^s ^t ^u ^v ^w ^x ^y ^z ^{aa} ^{ab} ^{ac} ^{ad} ^{ae} ^{af} ^{ag} ^{ah} ^{ai} ^{aj} ^{ak} ^{al} ^{am} ^{an} ^{ao} ^{ap} ^{aq} ^{ar} ^{as} ^{at} ^{au} ^{av} ^{aw} ^{ax} ^{ay} ^{az} ^{ba} ^{bb} ^{bc} ^{bd} ^{be} ^{bf} ^{bg} ^{bh} ^{bi} ^{bj} ^{bk} ^{bl} ^{bm} ^{bn} ^{bo} ^{bp} ^{bq} ^{br} ^{bs} ^{bt} ^{bu} ^{bv} ^{bw} ^{bx} ^{by} ^{bz} ^{ca} ^{cb} ^{cc} ^{cd} ^{ce} ^{cf} ^{cg} ^{ch} ^{ci} ^{cj} ^{ck} ^{cl} ^{cm} ^{cn} ^{co} ^{cp} ^{cq} ^{cr} ^{cs} ^{ct} ^{cu} ^{cv} ^{cw} ^{cx} ^{cy} ^{cz} ^{da} ^{db} ^{dc} ^{dd} ^{de} ^{df} ^{dg} ^{dh} ^{di} ^{dj} ^{dk} ^{dl} ^{dm} ^{dn} ^{do} ^{dp} ^{dq} ^{dr} ^{ds} ^{dt} ^{du} ^{dv} ^{dw} ^{dx} ^{dy} ^{dz} ^{ea} ^{eb} ^{ec} ^{ed} ^{ee} ^{ef} ^{eg} ^{eh} ^{ei} ^{ej} ^{ek} ^{el} ^{em} ^{en} ^{eo} ^{ep} ^{eq} ^{er} ^{es} ^{et} ^{eu} ^{ev} ^{ew} ^{ex} ^{ey} ^{ez} ^{fa} ^{fb} ^{fc} ^{fd} ^{fe} ^{ff} ^{fg} ^{fh} ^{fi} ^{fj} ^{fk} ^{fl} ^{fm} ^{fn} ^{fo} ^{fp} ^{fq} ^{fr} ^{fs} ^{ft} ^{fu} ^{fv} ^{fw} ^{fx} ^{fy} ^{fz} ^{ga} ^{gb} ^{gc} ^{gd} ^{ge} ^{gf} ^{gg} ^{gh} ^{gi} ^{gj} ^{gk} ^{gl} ^{gm} ^{gn} ^{go} ^{gp} ^{gq} ^{gr} ^{gs} ^{gt} ^{gu} ^{gv} ^{gw} ^{gx} ^{gy} ^{gz} ^{ha} ^{hb} ^{hc} ^{hd} ^{he} ^{hf} ^{hg} ^{hh} ^{hi} ^{hj} ^{hk} ^{hl} ^{hm} ^{hn} ^{ho} ^{hp} ^{hq} ^{hr} ^{hs} ^{ht} ^{hu} ^{hv} ^{hw} ^{hx} ^{hy} ^{hz} ^{ia} ^{ib} ^{ic} ^{id} ^{ie} ^{if} ^{ig} ^{ih} ⁱⁱ ^{ij} ^{ik} ^{il} ^{im} ⁱⁿ ^{io} ^{ip} ^{iq} ^{ir} ^{is} ^{it} ^{iu} ^{iv} ^{iw} ^{ix} ^{iy} ^{iz} ^{ja} ^{jb} ^{jc} ^{jd} ^{je} ^{jf} ^{jj} ^{jh} ^{ji} ^{jj} ^{jk} ^{jl} ^{jm} ^{jn} ^{jo} ^{jp} ^{jq} ^{jr} ^{js} ^{jt} ^{ju} ^{jv} ^{jw} ^{jx} ^{ky} ^{kz} ^{la} ^{lb} ^{lc} ^{ld} ^{le} ^{lf} ^{lg} ^{lh} ^{li} ^{lj} ^{lk} ^{ll} ^{lm} ^{ln} ^{lo} ^{lp} ^{lq} ^{lr} ^{ls} ^{lt} ^{lu} ^{lv} ^{lw} ^{lx} ^{ly} ^{lz} ^{ma} ^{mb} ^{mc} ^{md} ^{me} ^{mf} ^{mg} ^{mh} ^{mi} ^{mj} ^{mk} ^{ml} ^{mm} ^{mn} ^{mo} ^{mp} ^{mq} ^{mr} ^{ms} ^{mt} ^{mu} ^{mv} ^{mw} ^{mx} ^{my} ^{mz} ^{na} ^{nb} ^{nc} nd ^{ne} ^{nf} ^{ng} ^{nh} ⁿⁱ ^{nj} ^{nk} ^{nl} ^{nm} ⁿⁿ ^{no} ^{np} ^{nq} ^{nr} ^{ns} ^{nt} ^{nu} ^{nv} ^{nw} ^{nx} ^{ny} ^{nz} ^{oa} ^{ob} ^{oc} ^{od} ^{oe} ^{of} ^{og} ^{oh} ^{oi} ^{oj} ^{ok} ^{ol} ^{om} ^{on} ^{oo} ^{op} ^{oq} ^{or} ^{os} ^{ot} ^{ou} ^{ov} ^{ow} ^{ox} ^{oy} ^{oz} ^{pa} ^{pb} ^{pc} ^{pd} ^{pe} ^{pf} ^{pg} ^{ph} ^{pi} ^{pj} ^{pk} ^{pl} ^{pm} ^{pn} ^{po} ^{pp} ^{pq} ^{pr} ^{ps} ^{pt} ^{pu} ^{pv} ^{pw} ^{px} ^{py} ^{pz} ^{qa} ^{qb} ^{qc} ^{qd} ^{qe} ^{qf} ^{qg} ^{qh} ^{qi} ^{qj} ^{qk} ^{ql} ^{qm} ^{qn} ^{qo} ^{qp} ^{qq} ^{qr} ^{qs} ^{qt} ^{qu} ^{qv} ^{qw} ^{qx} ^{qy} ^{qz} ^{ra} ^{rb} ^{rc} rd ^{re} ^{rf} ^{rg} ^{rh} ^{ri} ^{rj} ^{rk} ^{rl} ^{rm} ^{rn} ^{ro} ^{rp} ^{rq} ^{rr} ^{rs} ^{rt} ^{ru} ^{rv} ^{rw} ^{rx} ^{ry} ^{rz} ^{sa} ^{sb} ^{sc} ^{sd} ^{se} ^{sf} ^{sg} ^{sh} ^{si} ^{sj} ^{sk} ^{sl} sm ^{sn} ^{so} ^{sp} ^{sq} ^{sr} ^{ss} st ^{su} ^{sv} ^{sw} ^{sx} ^{sy} ^{sz} ^{ta} ^{tb} ^{tc} ^{td} ^{te} ^{tf} ^{tg} th ^{ti} ^{tj} ^{tk} ^{tl} tm ^{tn} ^{to} ^{tp} ^{tq} ^{tr} ^{ts} ^{tt} ^{tu} ^{tv} ^{tw} ^{tx} ^{ty} ^{tz} ^{ua} ^{ub} ^{uc} ^{ud} ^{ue} ^{uf} ^{ug} ^{uh} ^{ui} ^{uj} ^{uk} ^{ul} ^{um} ^{un} ^{uo} ^{up} ^{uq} ^{ur} ^{us} ^{ut} ^{uu} ^{uv} ^{uw} ^{ux} ^{uy} ^{uz} ^{va} ^{vb} ^{vc} ^{vd} ^{ve} ^{vf} ^{vg} ^{vh} ^{vi} ^{vj} ^{vk} ^{vl} ^{vm} ^{vn} ^{vo} ^{vp} ^{vq} ^{vr} ^{vs} ^{vt} ^{vu} ^{vv} ^{vw} ^{vx} ^{vy} ^{vz} ^{wa} ^{wb} ^{wc} ^{wd} ^{we} ^{wf} ^{wg} ^{wh} ^{wi} ^{wj} ^{wk} ^{wl} ^{wm} ^{wn} ^{wo} ^{wp} ^{wq} ^{wr} ^{ws} ^{wt} ^{wu} ^{wv} ^{ww} ^{wx} ^{wy} ^{wz} ^{xa} ^{xb} ^{xc} ^{xd} ^{xe} ^{xf} ^{xg} ^{xh} ^{xi} ^{xj} ^{xk} ^{xl} ^{xm} ^{xn} ^{xo} ^{xp} ^{xq} ^{xr} ^{xs} ^{xt} ^{xu} ^{xv} ^{xw} ^{xx} ^{xy} ^{xz} ^{ya} ^{yb} ^{yc} ^{yd} ^{ye} ^{yf} ^{yg} ^{yh} ^{yi} ^{yj} ^{yk} ^{yl} ^{ym} ^{yn} ^{yo} ^{yp} ^{yq} ^{yr} ^{ys} ^{yt} ^{yu} ^{yv} ^{yw} ^{yx} ^{yy} ^{yz} ^{za} ^{zb} ^{zc} ^{zd} ^{ze} ^{zf} ^{zg} ^{zh} ^{zi} ^{zj} ^{zk} ^{zl} ^{zm} ^{zn} ^{zo} ^{zp} ^{zq} ^{zr} ^{zs} ^{zt} ^{zu} ^{zv} ^{zw} ^{zx} ^{zy} ^{zz} ^{aa} ^{ab} ^{ac} ^{ad} ^{ae} ^{af} ^{ag} ^{ah} ^{ai} ^{aj} ^{ak} ^{al} ^{am} ^{an} ^{ao} ^{ap} ^{aq} ^{ar} ^{as} ^{at} ^{au} ^{av} ^{aw} ^{ax} ^{ay} ^{az} ^{ba} ^{bb} ^{bc} ^{bd} ^{be} ^{bf} ^{bg} ^{bh} ^{bi} ^{bj} ^{bk} ^{bl} ^{bm} ^{bn} ^{bo} ^{bp} ^{bq} ^{br} ^{bs} ^{bt} ^{bu} ^{bv} ^{bw} ^{bx} ^{by} ^{bz} ^{ca} ^{cb} ^{cc} ^{cd} ^{ce} ^{cf} ^{cg} ^{ch} ^{ci} ^{cj} ^{ck} ^{cl} ^{cm} ^{cn} ^{co} ^{cp} ^{cq} ^{cr} ^{cs} ^{ct} ^{cu} ^{cv} ^{cw} ^{cx} ^{cy} ^{cz} ^{da} ^{db} ^{dc} ^{dd} ^{de} ^{df} ^{dg} ^{dh} ^{di} ^{dj} ^{dk} ^{dl} ^{dm} ^{dn} ^{do} ^{dp} ^{dq} ^{dr} ^{ds} ^{dt} ^{du} ^{dv} ^{dw} ^{dx} ^{dy} ^{dz} ^{ea} ^{eb} ^{ec} ^{ed} ^{ee} ^{ef} ^{eg} ^{eh} ^{ei} ^{ej} ^{ek} ^{el} ^{em} ^{en} ^{eo} ^{ep} ^{eq} ^{er} ^{es} ^{et} ^{eu} ^{ev} ^{ew} ^{ex} ^{ey} ^{ez} ^{fa} ^{fb} ^{fc} ^{fd} ^{fe} ^{ff} ^{fg} ^{fh} ^{fi} ^{fj} ^{fk} ^{fl} ^{fm} ^{fn} ^{fo} ^{fp} ^{fq} ^{fr} ^{fs} ^{ft} ^{fu} ^{fv} ^{fw} ^{fx} ^{fy} ^{fz} ^{ga} ^{gb} ^{gc} ^{gd} ^{ge} ^{gf} ^{gg} ^{gh} ^{gi} ^{gj} ^{gk} ^{gl} ^{gm} ^{gn} ^{go} ^{gp} ^{gq} ^{gr} ^{gs} ^{gt} ^{gu} ^{gv} ^{gw} ^{gx} ^{gy} ^{gz} ^{ha} ^{hb} ^{hc} ^{hd} ^{he} ^{hf} ^{hg} ^{hh} ^{hi} ^{hj} ^{hk} ^{hl} ^{hm} ^{hn} ^{ho} ^{hp} ^{hq} ^{hr} ^{hs} ^{ht} ^{hu} ^{hv} ^{hw} ^{hx} ^{hy} ^{hz} ^{ia} ^{ib} ^{ic} ^{id} ^{ie} ^{if} ^{ig} ^{ih} ⁱⁱ ^{ij} ^{ik} ^{il} ^{im} ⁱⁿ ^{io} ^{ip} ^{iq} ^{ir} ^{is} ^{it} ^{iu} ^{iv} ^{iw} ^{ix} ^{iy} ^{iz} ^{ja} ^{jb} ^{jc} ^{jd} ^{je} ^{jf} ^{jj} ^{jh} ^{ji} ^{jj} ^{jk} ^{jl} ^{jm} ^{jn} ^{jo} ^{jp} ^{jq} ^{jr} ^{js} ^{jt} ^{ju} ^{jv} ^{jw} ^{jx} ^{ky} ^{kz} ^{la} ^{lb} ^{lc} ^{ld} ^{le} ^{lf} ^{lg} ^{lh} ^{li} ^{lj} ^{lk} ^{ll} ^{lm} ^{ln} ^{lo} ^{lp} ^{lq} ^{lr} ^{ls} ^{lt} ^{lu} ^{lv} ^{lw} ^{lx} ^{ly} ^{lz} ^{ma} ^{mb} ^{mc} ^{md} ^{me} ^{mf} ^{mg} ^{mh} ^{mi} ^{mj} ^{mk} ^{ml} ^{mm} ^{mn} ^{mo} ^{mp} ^{mq} ^{mr} ^{ms} ^{mt} ^{mu} ^{mv} ^{mw} ^{mx} ^{my} ^{mz} ^{na} ^{nb} ^{nc} nd ^{ne} ^{nf} ^{ng} ^{nh} ⁿⁱ ^{nj} ^{nk} ^{nl} ^{nm} ⁿⁿ ^{no} ^{np} ^{nq} ^{nr} ^{ns} ^{nt} ^{nu} ^{nv} ^{nw} ^{nx} ^{ny} ^{nz} ^{oa} ^{ob} ^{oc} ^{od} ^{oe} ^{of} ^{og} ^{oh} ^{oi} ^{oj} ^{ok} ^{ol} ^{om} ^{on} ^{oo} ^{op} ^{oq} ^{or} ^{os} ^{ot} ^{ou} ^{ov} ^{ow} ^{ox} ^{oy} ^{oz} ^{pa} ^{pb} ^{pc} ^{pd} ^{pe} ^{pf} ^{pg} ^{ph} ^{pi} ^{pj} ^{pk} ^{pl} ^{pm} ^{pn} ^{po} ^{pp} ^{pq} ^{pr} ^{ps} ^{pt} ^{pu} ^{pv} ^{pw} ^{px} ^{py} ^{pz} ^{qa} ^{qb} ^{qc} ^{qd} ^{qe} ^{qf} ^{qg} ^{qh} ^{qi} ^{qj} ^{qk} ^{ql} ^{qm} ^{qn} ^{qo} ^{qp} ^{qq} ^{qr} ^{qs} ^{qt} ^{qu} ^{qv} ^{qw} ^{qx} ^{qy} ^{qz} ^{ra} ^{rb} ^{rc} rd ^{re} ^{rf} ^{rg} ^{rh} ^{ri} ^{rj} ^{rk} ^{rl} ^{rm} ^{rn} ^{ro} ^{rp} ^{rq} ^{rr} ^{rs} ^{rt} ^{ru} ^{rv} ^{rw} ^{rx} ^{ry} ^{rz} ^{sa} ^{sb} ^{sc} ^{sd} ^{se} ^{sf} ^{sg} ^{sh} ^{si} ^{sj} ^{sk} ^{sl} sm ^{sn} ^{so} ^{sp} ^{sq} ^{sr} ^{ss} st ^{su} ^{sv} ^{sw} ^{sx} ^{sy} ^{sz} ^{ta} ^{tb} ^{tc} ^{td} ^{te} ^{tf} ^{tg} th ^{ti} ^{tj} ^{tk} ^{tl} tm ^{tn} ^{to} ^{tp} ^{tq} ^{tr} ^{ts} ^{tt} ^{tu} ^{tv} ^{tw} ^{tx} ^{ty} ^{tz} ^{ua} ^{ub} ^{uc} ^{ud} ^{ue} ^{uf} ^{ug} ^{uh} ^{ui} ^{uj} ^{uk} ^{ul} ^{um} ^{un} ^{uo} ^{up} ^{uq} ^{ur} ^{us} ^{ut} ^{uu} ^{uv} ^{uw} ^{ux} ^{uy} ^{uz} ^{va} ^{vb} ^{vc} ^{vd} ^{ve} ^{vf} ^{vg} ^{vh} ^{vi} ^{vj} ^{vk} ^{vl} ^{vm} ^{vn} ^{vo} ^{vp} ^{vq} ^{vr} ^{vs} ^{vt} ^{vu} ^{vv} ^{vw} ^{vx} ^{vy} ^{vz} ^{wa} ^{wb} ^{wc} ^{wd} ^{we} ^{wf} ^{wg} ^{wh} ^{wi} ^{wj} ^{wk} ^{wl} ^{wm} ^{wn} ^{wo} ^{wp} ^{wq} ^{wr} ^{ws} ^{wt} ^{wu} ^{wv} ^{ww} ^{wx} ^{wy} ^{wz} ^{xa} ^{xb} ^{xc} ^{xd} ^{xe} ^{xf} ^{xg} ^{xh} ^{xi} ^{xj} ^{xk} ^{xl} ^{xm} ^{xn} ^{xo} ^{xp} ^{xq} ^{xr} ^{xs} ^{xt} ^{xu} ^{xv} ^{xw} ^{xx} ^{xy} ^{xz} ^{ya} ^{yb} ^{yc} ^{yd} ^{ye} ^{yf} ^{yg} ^{yh} ^{yi} ^{yj} ^{yk} ^{yl} ^{ym} ^{yn} ^{yo} ^{yp} ^{yq} ^{yr} ^{ys} ^{yt} ^{yu} ^{yv} ^{yw} ^{yx} ^{yy} ^{yz} ^{za} ^{zb} ^{zc} ^{zd} ^{ze} ^{zf} ^{zg} ^{zh} ^{zi} ^{zj} ^{zk} ^{zl} ^{zm} ^{zn} ^{zo} ^{zp} ^{zq} ^{zr} ^{zs} ^{zt} ^{zu} ^{zv} ^{zw} ^{zx} ^{zy} ^{zz} ^{aa} ^{ab} ^{ac} ^{ad} ^{ae} ^{af} ^{ag} ^{ah} ^{ai} ^{aj} ^{ak} ^{al} ^{am} ^{an} ^{ao} ^{ap} ^{aq} ^{ar} ^{as} ^{at} ^{au} ^{av} ^{aw} ^{ax} ^{ay} ^{az} ^{ba} ^{bb} ^{bc} ^{bd} ^{be} ^{bf} ^{bg} ^{bh} ^{bi} ^{bj} ^{bk} ^{bl} ^{bm} ^{bn} ^{bo} ^{bp} ^{bq} ^{br} ^{bs} ^{bt} ^{bu} ^{bv} ^{bw} ^{bx} ^{by} ^{bz} ^{ca} ^{cb} ^{cc} ^{cd} ^{ce} ^{cf} ^{cg} ^{ch} ^{ci} ^{cj} ^{ck} ^{cl} ^{cm} ^{cn} ^{co} ^{cp} ^{cq} ^{cr} ^{cs} ^{ct} ^{cu} ^{cv} ^{cw} ^{cx} ^{cy} ^{cz} ^{da} ^{db} ^{dc} ^{dd} ^{de} ^{df} ^{dg} ^{dh} ^{di} ^{dj} ^{dk} ^{dl} ^{dm} ^{dn} ^{do} ^{dp} ^{dq} ^{dr} ^{ds} ^{dt} ^{du} ^{dv} ^{dw} ^{dx} ^{dy} ^{dz} ^{ea} ^{eb} ^{ec} ^{ed} ^{ee} ^{ef} ^{eg} ^{eh} ^{ei} ^{ej} ^{ek} ^{el} ^{em} ^{en} ^{eo} ^{ep} ^{eq} ^{er} ^{es} ^{et} ^{eu} ^{ev} ^{ew} ^{ex} ^{ey} ^{ez} ^{fa} ^{fb} ^{fc} ^{fd} ^{fe} ^{ff} ^{fg} ^{fh} ^{fi} ^{fj} ^{fk} ^{fl} ^{fm} ^{fn} ^{fo} ^{fp} ^{fq} ^{fr} ^{fs} ^{ft} ^{fu} ^{fv} ^{fw} ^{fx} ^{fy} ^{fz} ^{ga} ^{gb} ^{gc} ^{gd} ^{ge} ^{gf} ^{gg} ^{gh} ^{gi} ^{gj} ^{gk} ^{gl} ^{gm} ^{gn} ^{go} ^{gp} ^{gq} ^{gr} ^{gs} ^{gt} ^{gu} ^{gv} ^{gw} ^{gx} ^{gy} ^{gz} ^{ha} ^{hb} ^{hc} ^{hd} ^{he} ^{hf} ^{hg} ^{hh} ^{hi} ^{hj} ^{hk} ^{hl} ^{hm} ^{hn} ^{ho} ^{hp} ^{hq} ^{hr} ^{hs} ^{ht} ^{hu} ^{hv} ^{hw} ^{hx} ^{hy} ^{hz} ^{ia} ^{ib} ^{ic} ^{id} ^{ie} ^{if} ^{ig} ^{ih} ⁱⁱ ^{ij} ^{ik} ^{il} ^{im} ⁱⁿ ^{io} ^{ip} ^{iq} ^{ir} ^{is} ^{it} ^{iu} ^{iv} ^{iw} ^{ix} ^{iy} ^{iz} ^{ja} ^{jb} ^{jc} ^{jd} ^{je} ^{jf} ^{jj} ^{jh} ^{ji} ^{jj} ^{jk} ^{jl} ^{jm} ^{jn} ^{jo} ^{jp} ^{jq} ^{jr} ^{js} ^{jt} ^{ju} ^{jv} ^{jw} ^{jx} ^{ky} ^{kz} ^{la} ^{lb} ^{lc} ^{ld} ^{le} ^{lf} ^{lg} ^{lh} ^{li} ^{lj} ^{lk} ^{ll} ^{lm} ^{ln} ^{lo} ^{lp} ^{lq} ^{lr} ^{ls} ^{lt} ^{lu} ^{lv} ^{lw} ^{lx} ^{ly} ^{lz} ^{ma} ^{mb} ^{mc} ^{md} ^{me} ^{mf} ^{mg} ^{mh} ^{mi} ^{mj} ^{mk} ^{ml} ^{mm} ^{mn} ^{mo} ^{mp} ^{mq} ^{mr} ^{ms} ^{mt} ^{mu} ^{mv} ^{mw} ^{mx} ^{my} ^{mz} ^{na} ^{nb} ^{nc} nd ^{ne} ^{nf} ^{ng} ^{nh} ⁿⁱ ^{nj} ^{nk} ^{nl} ^{nm} ⁿⁿ ^{no} ^{np} ^{nq} ^{nr} ^{ns} ^{nt} ^{nu} ^{nv} ^{nw} ^{nx} ^{ny} ^{nz} ^{oa} ^{ob} ^{oc} ^{od} ^{oe} ^{of} ^{og} ^{oh} ^{oi} ^{oj} ^{ok} ^{ol} ^{om} ^{on} ^{oo} ^{op} ^{oq} ^{or} ^{os} ^{ot}



Si duo trian-
gula ABC, DEF duo
latera AB, AC
duobus lateribus
DE, DF equalia
habuerint, utrumq;
utriusque, basim ve-

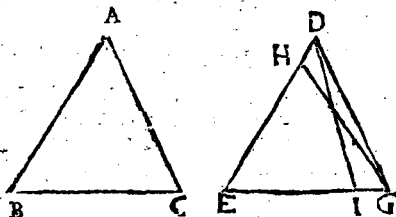
ro BC basi EF maiorem, & angulum A sub equalibus rectis lineis contextum angulo D maiorem habebunt.

a 4. 1.

Nam si dicatur ang. A = D. ^a erit basis BC = EF, contra Hyp. Sin dicatur ang. A > D, ^b erit BC > EF, etiam contra Hyp. ergo BC < EF. Q. E. D.

b 24. 1.

PROP. XXVI.



Si duo trian-
gula BAC EDG, duos angulos
B, C, duobus angulis E, DGE, aequales habu-
erint, utrumque utrique, unumque latus uni lateri
equale, sive quod equalibus adjacet angulis, seu
quod uni equalium angulorum subtenditur: reliqua
latera reliquis lateribus equalia, utrumque utrique,
& reliquum angulum reliquo angulo aequalem ha-
bebunt.

1. Hyp. Sit BC = EG. Dico BA = ED, &
AC = DG, & ang. A = EDG. Nam si dicatur
ED < BA, ^a fiat EH = BA, ducaturq; GH.

a 3. 1.

Quoniam

Quoniam $AB^b = HE$, & $BC^c = EG$, & b *suppos.*
 $ang. B^c = E$, erit $ang. EGH^d = C^e = DGE$. c *hyp.*
 $Q. E. A.$ ergo $AB = ED$. Eodem modo AC d *4. 1.*
 $= DG$. e *hyp.*
 $quare etiam ang. A = EDG$. f *9. ax.*

2. *Hyp.* Sit $AB = ED$. Dico $BC = EG$, &
 $AC = DG$ & $ang. A = EDG$. Nam si dicatur
 $EG \neq BC$, fiat $BI = BC$, & connectatur DI . g *hyp.*
 Quia $AB = ED$, & $BC = BI$; & $ang. B = E$, h *suppos.*
 erit $ang. BID^k = C^m = EGD$. k *4. 1.*
 $Q. E. A.$ ergo $BC = EG$. ergo ut prius, $AC = DG$, m *hyp.*
 & $ang. A = EDG$. $Q. E. D.$ n *16. 1.*

PROP. XXVII.

Si in duas rectas lineas AB, CD recta incidens linea EF alternatim angulos AEF, DFE, & quales inter se fecerit, parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ AB, CD.

Si AB, CD dicantur non esse parallelæ; conveniant productæ, nempe in G. quo posito angulus externus AEF interno DFE ^a major a 16. 1. erit, cui tamen ponitur æqualis. Quæ repugnant.

PROP. XXVIII.

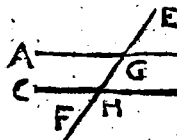
Si in duas rectas lineas AB, CD recta incidens linea EF externum angulum AGE interno & opposito, & ad easdem partes CHG æqualem fecerit, aut internos & ad easdem partes AGH, CHG duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ AB, CD.

1. *Hyp.* Quia per *hyp.* $ang. AGE = CHG$, a 15. 1.
^a erit altern. $BGH = CHG$. b parallelæ igitur b 27. 1.
 sunt AB, CD. $Q. E. D.$

2. *Hyp.* Quia ex *hyp.* $Ang. AGH + CHG =$ a 13. 1.
² Rect. $= AGH + BGH$, b erit $CHG =$ b 3. *ax.*
 BGH . Ergo AB, CD parallelæ sunt. $Q. E. D.$ c 27. 1.

PROP.

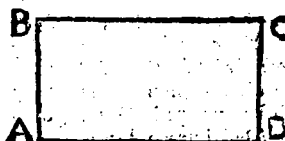
PROP. XXIX.



In parallelas rectas lineas AB, CD, recta incidens linea EF, & alternatim angulos DHG, AGH aequales inter se efficit; & externum BGE interno, & opposito, & ad easdem partes DHE aequalem; & internos & ad easdem partes AGH, CHG duobus rectis aequales facit.

Liquet AGH, + CHG = 2 Rect. ^a alias AB, CD non essent parallelæ, contra hyp. Sed & ang. DHG + CHG ^b = 2 Rect. ergo DHG = AGH ^d = BGE. Q. E. D.

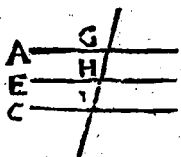
Coroll.



Hinc omne Parallelogrammum AC habens unum angulum rectum A, est rectangulum.

Nam A + B ^a = 2 Rect. ergo cum A rectus sit, ^b etiam B rectus erit. Eodem argumento D, & C recti sunt.

PROP. XXX.

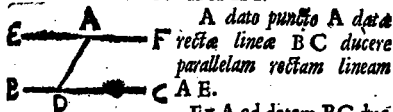


Quæ (AB, CD) eadem recta linea EF parallela, & inter se sunt parallela.

Tres rectas secet utcumq; recta GL. Quoniam AB, EF parallelæ sunt, ^a erit ang. AGI = EHI, Item propter CD, EF parallelas, ^a erit ang. EHI = DIG. ^b ergo ang. AGI = DIG. ^c quare AB, CD parallelæ sunt. Q. E. D.

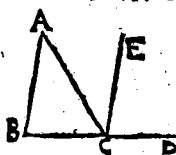
PROP.

PROP. XXXI.



A dato puncto A data recta linea BC ducere parallelam rectam lineam AE.
Ex A ad datam BC duc rectam utcumque AD. ad quam, ejusq; punctum a 23. 1.
A^a fac ang. DAE = ADC. b erant AE, BC b 27. 1.
parallelæ. Q. E. F.

PROP. XXXII.



Cujuscunque trianguli ABC uno latere BC producto, externus angulus ACD duobus internis, & oppositis, AB est æqualis. Et trianguli tres interni anguli, A, B, ACB duobus sunt rectis æquales.

Per C^a duc CE parall. BA. Ang. A^b = a 31. 1.)
ACE. & ang. B^b = ECD. ergo A + B^c = b 29. 1.
ACE + ECD^d = ACB. Q. E. D. Pono c 2. ax.
ACD + ACB^e = 2 Rect. f ergo A + B + d 19. ax.
ACB = 2 Rect. Q. E. D. e 13. 1.
f 1. ax.

Corollaria.

1. Tres simul anguli cujuscunque trianguli æquales sunt tribus simul cujuscunque alterius. Unde
2. Si in uno triangulo duo anguli (aut singuli, aut simul) æquales sint duobus angulis (aut singulis, aut simul) in altero triangulo, etiam reliquus reliquo æqualis est. Item, si duo triangula unum angulum uni æqualem habeant, reliquorum summæ æquantur.
3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui unum rectum conficiunt. Item, angulus, qui duobus reliquis æquatur, rectus est.
4. Cum in Isoscele angulus æquis cruribus contentus rectus est, reliqui ad basim sunt semi-recti.

D

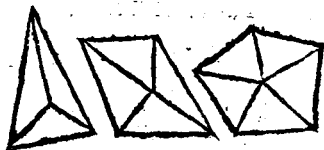
5. Tri

5. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti, nam $\frac{1}{3} \times 2 \text{ Rect.} = \frac{2}{3} \text{ Rect.}$

Schol.

Hujus propositionis beneficio, cujuslibet figuræ rectilineæ tam interni quàm externi anguli quot rectos conficiant, innotescet per duo sequentia theoremata.

THEOREMA 1.



Omnes simul anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

Ex quovis puncto intra figuram ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ figuram resolvunt in tot triangula quot habet latera. Quare cum singula triangula conficiant duos rectos, omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera. Sed anguli circa dictum punctum conficiunt quatuor rectos. Ergo, si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa id punctum, anguli reliqui qui componunt angulos figuræ conficient bis tot rectos demptis quatuor, quot sunt latera figuræ. Q. E. D.

Hinc *Coroll.* Omnes ejusdem speciei rectilineæ figuræ æquales habent angulorum summas.

THEOREMA 2.

Omnes simul externi anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam singuli figuræ interni anguli cum singulis externis conficiunt duos rectos. Ergo interni

terni simul omnes, cum omnibus simul externis conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ. Sed (ut modò ostensum est,) interni simul omnes etiam cum quatuor rectis efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ. Ergò externi anguli quatuor rectis æquantur. Q. E. D.

Coroll. Omnes cujuscunque speciei rectilinez figuræ æquales habent externorum angulorum summas.

PROP. XXXIII.



Recta linea AC, BD, quæ æquales & parallelas lineas AB, CD, ad partes eadem conjungunt, & ipsæ æquæ & parallelæ sunt.

Connectatur CB. Quoniam ob AB, CD parallelas, ang. $ABC^a = BCD$, & per hyp. $AB^a = CD$, & latus CB commune est, b erit $AC = b$ 4. 1. BD, b & ang. $ACB = DBC$. c ergò AC, BD c 27. 1. etiam parallelæ sunt. Q. E. D.

PROP. XXXIV.



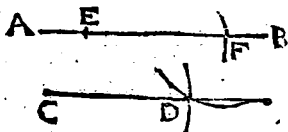
Parallelogrammorum spatiorum ABDC æqualia sunt inter se quæ ex adverso latera AB, CD; ac AC, BD; angulique A, D, & ABD, ACD; & illa bisectionem secant diametrum CB.

Quoniam AB, CD a parallelæ sunt, b erit a hyp. ang. $ABC = BCD$. Item ob AC, DB a parallelas, b erit ang. $ACB = CBD$. c ergò toti ang. c 2. anguli ACD, ABD æquantur. Similiter ang. $A = D$. Porro, cum communi lateri CB adjacent anguli ABC, ACB, ipsis BCD, CBD pares d , erunt $AC = BD$, d & $AB = CD$. adeo d 26. 1. & etiam triang. $ABC = CBD$. Quæ E. D.

SCHOL.

Omne quadrilaterum $ABDC$ habens latera opposita equalia, est parallelogrammum.

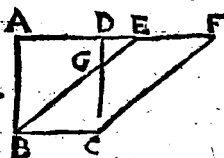
a 27. i. Nam per 8. i. ang. $\angle ABC = \angle BCD$.^a ergo
 AB, CD parallelæ sunt. Eâdem ratione ang.
 $\angle BCA = \angle CBD$; ^a quare AC, BD etiam paralle-
 b 35. def. i. læ sunt. ^b Ergo $ABDC$ est parallelogrammum.
 Q. E. D.



Hinc expeditiùs per datum punctum C datæ rectæ AB ducetur parallela CD.

Sume in AB quodvis punctum E. centro E, & C ad quodvis intervallum duc æquales circulos EF, CD. centro verò F, spatio EC duc circulum FD, qui priorem CD secet in D. Erit ducta CD parall. AB. Nam ut modò demonstratum est, CEFD est parallelogrammum.

PROP. XXXV.



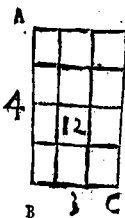
Parallelogramma
BCDA, BCFE su-
per eâdem basi BC,
& in eisdem paral-
lelâ AF, BC constitu-
ti, inter se sunt æ-
qualia.

a 34. 1.
b 2. ax.
c 29. 1.
d 4. 1.
e 3. ax.
f 2. ax.

Nam $AD^2 = EC^2 = EF$. adde communem DE ,^b erit $AE = DF$. Sed & $AB^2 = DC$, & ang. $A^c = CDF$.^d ergo triang. $ABE = DCF$. aufer commune DGE ,^e erit Trapez. $ABGD = EGCF$. adde commune BGC ,^f erit Pgr. $ABCD = EBCF$. Q. E. D. Reliquorum casuum non dissimilis, sed simplicior & facilior est demonstratio.

Scholium:

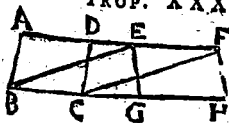
Scholium.



Si latus AB parallelogrammi rectanguli ABCD ferri intelligatur perpendiculariter per totam BC, aut BC per totam AB, producet eo motu area rectanguli ABCD. Hinc rectangulum fieri dicitur ex ductu seu multiplicatione duorum laterum contiguorum. Sit exempli, gr. BC pedum 3, AB 4. Duc 3 in 4; proveniunt 12 pedes quadrati pro area rectanguli.

Hoc supposito, ex hoc theoremate cujuscunq; parallelogrammi (*EBCF) habetur dimensio. * v. fig. pro- Illius enim area producitur ex altitudine BA ducta in basim BC. Nam area rectanguli AC parallelogrammo EBCF æqualis, fit ex BA in BC. ergo, &c.

PROP. XXXVI.

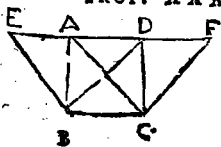


Parallelogramma BCDA, GHFE super æqualibus basibus BC, GH, & in eisdem

parallelis AF, BH constituta, inter se sunt equalia.

Ducantur BE, CF. Quia $BC^a = GH^a$ b $\cong$ a hyp. b 34. 1. EF, c $\cong$ crit BCFE parallelogrammum. ergo pgr. c 33. 1. BCDA $\cong$ BCFE $\cong$ GHFE. Q.E.D. d 35. 1.

PROP. XXXVII.



Triangula BCA, BCD super eadem basi BC constituta, & in eisdem parallelis BC, EF, inter se sunt equalia.

D 3 a Duc.

a 31. I.

b 34. I.

c 35. I. &

7. ax.

^a Duc BE parall. CA, ^a & CF parall. BD.
 Erit triang. BCA ^b = $\frac{1}{2}$ Pgr. B C A E = ^c $\frac{1}{2}$
 B D F C ^b = B C D. Q. E. D.

PROP. XXXVIII.



Triangula BCA,
 EFD super æqua-
 libus basibus EC,
 EF constituta, &
 in eisdem parallelis
 GH, BF, inter se
 sunt equalia.

Duc BG parall. CA. & FH parall. ED.
 erit triang. BCA ^a = $\frac{1}{2}$ Pgr. BCAG ^b = $\frac{1}{2}$
 EDHF ^c = EFD. Q. E. D.

a 34. I.

b 36. I. &

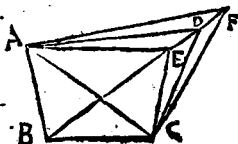
7. ax.

c 34. I.

Schol.

Si basis FC = EF, liquet triang. FAC =
 EDF. & si BC = EF, erit BAC = EDF.

PROP. XXXIX.



Triangula æqua-
 lia BCA, BCD,
 super eadem basi
 BC, & ad easdem
 partes constituta,
 etiam in eisdem
 sunt parallelis AD,

BC.

Si negas, fit altera AF parall. BC; & ducatur
 CF. ergo triang. CBF ^a = CBA ^b = CBD.
 Q. E. A.

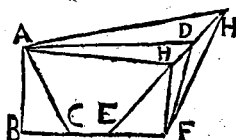
a 37. I.

b hyp.

c 9. ax.

PROP.

PROP. XL.

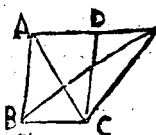


Triangula æquili-
lia BCA, EFD
super æqualibus ba-
sibus BC, EF, &
ad easdem partes
constituta, & in

eisdem sunt parallelis AD, BF.

Si negas, sit altera AH parall. BF. & ducatur a 38. i.
FH. ergo triang. EFH ^a = BCA ^b = EFD. ^b hyp.
^c Q. E. A. ^c 9. ax.

PROP. XLI.



Si parallelogrammum
ABCD cum triangulo
BCE eandem basim
BC habuerit, in eis-
demque fuerit parallelis
AE, BC, duplum erit

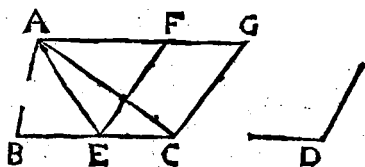
parallelogrammum ABCD ipsius trianguli BCE.

Ducatur AC. Triang. BCA ^a = BCE. ergo ^a 37. i.
Pgr. ABCD ^b = 2 BCA ^c = 2 BCE. Q. E. D. ^b 34. i.
^c 6. ax.

Scholium.

Hinc habetur area cujuscunq; trianguli BCE.
Nam cum area parallelogrammi ABCD produ-
catur ex altitudine in basim ducta; producetür
area trianguli ex dimidia altitudine in basim du-
cta, vel ex dimidia basi in altitudinem. ut si ba-
sis BC sit 8, & altitudo 7; erit trianguli BCE
area, 28.

PROP. XLII.

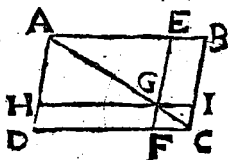


Dato triangulo ABC aequale parallelogrammum ECGF constituere in dato angulo rectilineo D.

Per A^a duc AG parall. BC. ^b fac ang. BCG = D, basim BC ^c biseca in E. ^a duc EF parall. CG. Dico factum.

Nam ductâ AE, erit ex constr. ang. ECG = D, & triang. BAC ^d = 2 AEC^e = Pgr. ECGF. Q. E. F.

PROP. XLIII.

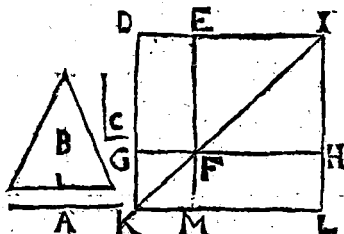


In omni parallelogrammo ABCD complementa DG, GB eorum quæ circa diametrum AC sunt parallelogrammorum HE, FI inter se sunt æqualia.

Nam Triang. ACD, =^a ACB. & triang. AGH^a = AGE. & triang. GCF^a = GCI, ^b ergo Pgr. DG = GB. Q. E. D.

PROP.

PROP. XLIV.



Ad datam rectam lineam A, dato triangulo B, aequale parallelogrammum FL applicare in dato angulo rectilineo C.

^a Fac Pgr. FD = triang. B, ita ut ang. GFE a 42. 11. = C. & pone lateri GF in directum FH = A. Per H ^b duc IL parall. EF; cui occurrat DE ^b 31. 17. producta ad I. per I F ductæ rectæ occurrat DG. protracta ad K. Per K ^b duc KL parall. GH; cui occurrant EF, & IH prolongatæ ad M, & L. Erit FL. Pgr. quæsitum.

Nam Pgr. FL ^c = FD = B ^d & ang. MFH ^c 43. 12. = GFE = C. Q.E.F. d. 15. 18.

PROP. XLV.



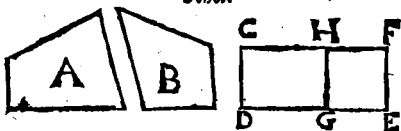
Ad datam rectam lineam FG dato rectilineo ABCD aequale parallelogrammum FL constituere, in dato angulo rectilineo E.

Datum rectilineum resolve in triangula BAD, BCD. ^a = Fac Pgr. FH = BAD ita ut ang. F = E. producta FI ^a fac (ad HI) Pgr. a 44. 1. 11. D. 53

b 19. ax.
c constr.

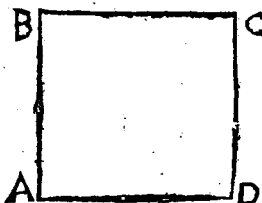
IL = BCD. erit Pgr. FL = FH + IL = ABCD. Q. E. F.

Schol.



Hinc facillè invenitur excessus HE, quo rectilineum aliquod A superat rectilineum minus B; nimirum si ad quamvis rectam CD applicentur Pgr. DF = A. & DH = B.

PROP. XLVI.



A data recta lineae AD quadratum AC describere.

Erige duas perpendiculares AB, DC ^b æquales datæ AD; & junge BC. dico

factum:

Cùm enim ang. A + D = 2 Rect. ^d erunt AB, DC parallelæ. Sunt verò etiam ^e æquales. ^f ergò AD, BC pares etiam sunt, & parallelæ. ergò Figura AC est parallelogramma, & æquilatera. Anguli quoq; omnes recti sunt, ^g quoniam unus A est rectus. ^h ergò AC est quadratum. Q. E. F.

Eodem modo facillè describes rectangulum, quod sub datis duabus rectis contineatur.

PROP.

a 11. 1.

b 3. 1.

c constr.

d 28. 1.

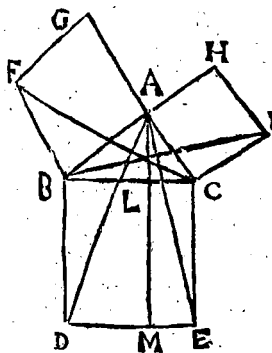
e constr.

f 34. 1.

g Sch. 29. 1.

h 29. def.

PROP. XLVII.



In rectan-
gulis trian-
gulis BAC
quadratum
BE, quod à
latere BC
rectum angu-
lum BAC
subtendente
describitur,
æquale est
eis, BG,
CH, quæ à
lateralibus AB,
AC rectum
angulum continentibus describuntur.

Junge AE, AD; & duc AM. parall. CE.

Quoniam ang. DBC^a = FBA; adde com-^a 12. ex-
munem ABC, erit ang. ABD = FBC. Sed &
AB^b = FB, & BD^b = BC. ^c ergò triang. ^b 29. de
ABD = FBC. atqui Pgr. BM. ^d = 2 ABD; & ^c 4. 1.
Pgr. BG^d = 2 FBC (nam GAC est una recta ^d 41. 1.
per hyp. & 14. 1.) ^e ergò Pgr. BM = BG. Si- ^e 6. ax.
mili discursu Pgr. CM = CH. Totum igitur
BE = BG + CH. Q. E. D.

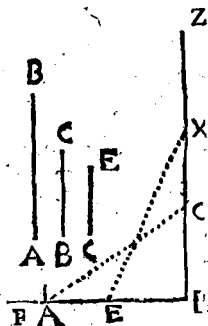
Schol.

Hoc nobilissimum, & utilissimum theorema
ab inventore Pythagora, Pythagoricum dici me-
ruit. Ejus beneficio quadratorum additio, &
substractio perficitur; quò spectant duo sequen-
tia problemata.

PROBL.

PROBL. I.

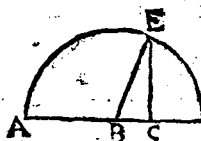
Andr. Tacq.



Datis quocunque qua-
dratis, unum omnibus æ-
quale construere.

Dentur quadrata tria, quorum latera sint AB, BC, CE. ^a Fac ang. rectum FBZ infinita habentem latera, in eaque transfer BA, & BC, & junge AC, ^b erit ACq = ABq + B Cq. Tum

PROBL. 2.

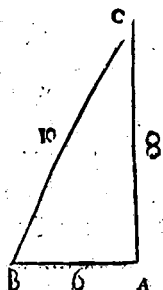


Datis duabus rectis inæqualibus AB, BC, exhibere quadratum, quod quadratum majoris AB excedit quadratum minoris BC.

Centro B intervallo BA describe circulum. ex
C erige perpendicularem CE occurrentem pe-
ripheriæ in E. & ducatur BE. ^a Erit BEq
(BAq) = BCq + CEq. ^b ergò BAq - BCq =
CE. Q. E. F.

PROBLEMS

PROBL. 3.

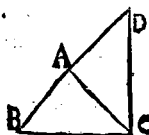


Notis duobus quibuscunque lateribus trigoni rectanguli ABC, reliquum invenire.

Latera rectum angulum ambientia sint AC, AB, hoc 6. pedum, illud 8. ergò cum $AC^2 + AB^2 = 64 + 36 = 100 = BC^2$. erit $BC = \sqrt{100} = 10$.

Nota sint deinde latera AB, BC, hoc 10. pedum, illud 6. ergò cum $BC^2 - AB^2 = 100 - 36 = 64 = AC^2$. erit $AC = \sqrt{64} = 8$.

PROP. XLVIII.



Si quadratum quod ab uno latere BC trianguli describitur, aequale sit eis quae à reliquis trianguli lateribus AB, AC describuntur quadratis, angulus BAC comprehensus sub AB, AC reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

Duc ad AC perpendicularem DA = AB, & junge CD.

Jam $CD^2 = AD^2 + AC^2 = AB^2 + AC^2$. * $CD = BC$. ergò trian- * *Vid. sequ. Theor. b. 8. i. c. hyp.*
gula CAB, CAD, sibi mutuò æquilatera sunt; quare ang. CAB = CAD = Rect. Q. E. D.

Schol.

Assumpimus exinde quòd $CD = BC$, sequi $CD = BC$. Hoc verò manifestum fiet ex sequenti theoremate.

THEOREMA.



Linearum equalium AB, CD, equalia sunt quadrata AF, CG; & quadratorum equalium NK, PM equalia sunt latera IK, LM.

Pro 1 Hyp. Duc diagonos EB, HD. Li-
quet $AF = {}^a 2$ triang. $EAB = {}^b 2$ triang.
 $HCD = {}^a CG$. Q. E. D.

2. Hyp. Si fieri potest, sit $LM \sqsubset IK$. fac
 $LT = IK$; ^{a} sitque $LS = LT$ q. ergo LS
 ${}^b = NK$ ${}^c = LQ$. ^{d} Q. E. A. ergo $LM = IK$.

Coroll.

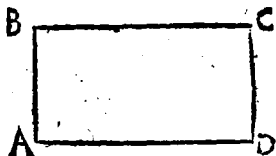
Eodem modo quælibet rectangula inter se
æquilatera æqualia ostendentur.

LIB.

a 34. 1.
b 4. 1. &
6. ax.
a 46. 1.
b 1. part.
c hyp.
d 2. ax.

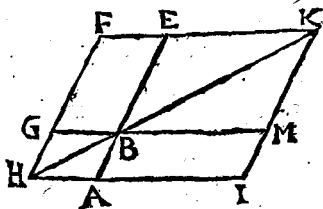
LIB. II.

Definitiones.



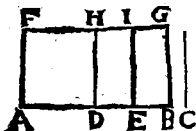
- I. **O**mnē parallelogrammum rectangulum $ABCD$ contineri dicitur sub rectis duabus AB , AD , quæ rectum comprehendunt angulum.

Quando igitur dicitur rectangulum sub BA , AD ; vel brevitatis causâ, rectangulum BAD , vel $BA \times AD$, (vel ZA pro $Z \times A$) designatur rectangulum, quod continetur sub BA , & AD ad rectum angulum constitutis.



- II. In omni parallelogrammo spatio $FHIK$ unumquodq; eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis Gnomon vocetur. ut Pgr. $FB + BI + GA$ (EHM) est Gnomon. item Pgr. $FB + BI + EM$ (GKA) est Gnomon.

PROP. I.



Si fuerint dua recta linea AB, AF, seceturque ipsarum altera AB in quocunque segmenta AD, DE, EB: rectangulum comprehensum sub illis duabus re-

ctis lineis AB, AF, æquale est eis, quæ sub in-
secta AF, & quolibet segmentorum AD, DE,
EB comprehenduntur rectangulis.

a 11 I.

Statue AF, perpendicularem ad AB. per
F duc infinitam FG perpendicularem ad AF.

Ex D, E, B erige perpendiculares DH, EI,
BG. Erit AG rectangulum sub AF, AB, &

b 19 ax. 1.

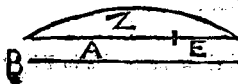
c 34 I.

est æquale rectangulis AH, DI, EG, hoc est
(quia DH, EI, AF pares sunt) rectangu-
lis sub AF, AD; sub AF, DE; sub AF, EB.
Q. E. D.

Scho!

Propositiones decem primæ hujus libri valent
etiam in numeris. Reliquas quilibet tyro exami-
net. pro hac, sit AF 6, & AB 12, sectus in
AD 5, DE 3, & EB 4. Estque 6×12 (AG)
 $= 72$. 6×5 (AH) $= 30$. 6 in 3 (DI) $= 18$.
denique 6×4 (EG) $= 24$. Liquet verò
 $30 + 18 + 24 = 72$.

PROP. II.



Si recta linea Z
secta sit utrunque;
rectangula, quæ sub
tota Z, & quolibet

segmentorum A, E comprehenduntur, æqualia sunt
ei, quod à tota Z fit, quadrato.

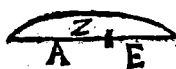
Dico $ZA + ZE = Zq$. Nam sume $B = Z$.

Estque $BA + BE = BZ$; hoc est (ob $B = Z$),
 $ZA + ZE = Zq$. Q. E. D.

PROP.

a 12 2.

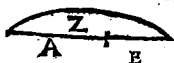
PROP. III.



Si recta linea Z secta sit utcumque; rectangulum sub tota Z, & uno segmentorum E comprehensum, aequale est illi, quod sub segmentis A, E comprehenditur, rectangulo, & illi quod à prædicto segmento E describitur, quadrato.

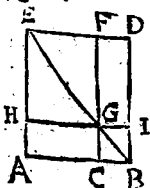
Dico. $ZE = AE + Eq.$ Nam $EZ = EA + a$ 1. 2. $EE.$

PROP. IV.



Si recta linea Z secta sit utcumque; Quadratum, quod à tota Z describitur, aequale est, & illis quæ à segmentis A, E describuntur quadratis, & ei, quod bis sub segmentis A, E comprehenditur, rectangulo.

Dico $Zq = Aq + Eq + 2 AE.$ Nam $ZA = Aq + a$ 3. 2. $AE.$ & $ZE = Eq + AE.$ quum igitur $ZA + ZE = Zq,$ erit $Zq = Aq + Eq + 2 AE.$ b 2. 2. c 1. ax. Q. E. D.



Aliter. Super AB fac quadratum AD, cujus diameter EB. per divisionis punctum C duc perpendicularem CF; & per G duc HI parall. AB.

Quoniam ang. $EHG = A$ rectus est, & AEB semirectus, erit reliquus HGE etiam semirectus. Ergo $HE = HG = EF = AC.$ proinde HF quadratum est rectæ AC. eodem modo CI est CBq. ergo AG, GD rectangula sunt sub AC, CB. Quare totum quadratum AD = ACq + CBq + 2 ACB. Q. E. D.

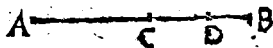
Coroll.

1. Hinc liquet parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

2. Item diametrum cujusvis quadrati ejus angulos bisecare.

3. Si $A = \frac{1}{2} Z$; erit $Zq = 4 Aq$, & $Aq = \frac{1}{4} Zq$. item è contra, si $Zq = 4 Aq$. erit $A = \frac{1}{2} Z$.

PROP. V.



Si recta linea
AB secetur in
aqualia AC,

CB, & non aqualia AD, DB, rectangulum sub inaequalibus segmentis AD, DB comprehensum, una cum quadrato, quod fit ab intermedia sectione CD, aequale est ei, quod à dimidia CB describitur, quadrato.

Dico $CBq = ADp + CDq$.

a 4. 2.

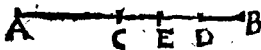
b 3. 2.

c hyp.

d 1. 2.

Æquantur enim ista $\left\{ \begin{array}{l} CBq \\ CDq + CDE + DBq + CDB \\ CDq + {}^b CBD ({}^c AC \times BD) + CDB \\ CDq + {}^d ADB. \end{array} \right.$

Scholium.



Si AB aliter
dividatur, propi-
us scilicet puncto

bisectionis, in E; dico $AEB < ADB$.

a 5. 2. &

3. ax.

Nam $AEB^2 = CBq - CEq$. & $ADB^2 = CBq - CDq$. ergo quum $CDq < CEq$, erit $AEB < ADB$. Q. E. D.

Coroll.

b 4. 2.

Hinc $ADq + DBq < AEq + EBq$. Nam $ADq + DBq + 2 ADB^2 = ABq^2 = AEq + EBq + 2 AEB$. ergo quum $2 AEB < 2 ADB$, erit $ADq + DBq < AEq + EBq$. Q. E. D.

c 3. ax.

Unde $2 ADq + DBq - AEq + EBq = 2 AEB - 2 ADB$.

PROP.

PROP. VI.



Si recta linea A
bifariam secetur, &
illi recta quapiam li-

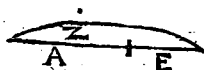
nea E in directum adjiciatur, rectangulum compre-
hensum sub tota cum adjecta (sub. A + E), & ad-
jecta E, unà cum quadrato, quod à dimidia $\frac{1}{2} A$,
æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia,
tum ex adjecta componitur, tanquam ab una $\frac{1}{2} A +$
E descripto.

Dico $\frac{1}{2} Aq + AE + Eq = Q. \frac{1}{2} A + E$ a 4. & 3.
+ E. Nam $Q. \frac{1}{2} A + E = \frac{1}{2} Aq + Eq + AE$. Cor. 4. 2.

Coroll.

Hinc si tres rectæ E, $E + \frac{1}{2} A$, $E + A$ sint in
proportione Arithmetica, rectangulum sub ex-
tremis E, $E + A$ contentum, unà cum quadra-
to excessus $\frac{1}{2} A$, æquale erit quadrato mediæ
 $E + \frac{1}{2} A$.

PROP. VII.



Si recta linea Z se-
celur utcumque, Quod
à tota Z, quodque ab
uno segmentorum E,

utraque simul quadrata, æqualia sunt illi, quod bis
sub tota Z, & dicto segmento E comprehenditur,
rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento A fit,
quadrato.

Dico $Zq + Eq = 2 ZE + Aq$. Nam $Zq = Aq$ a 4. 2.
+ $Eq + 2 AE$. & $2 ZE = 2 Eq + 2 AE$. b 3. 2.

Coroll.

Hinc, quadratum differentię duarum quarum-
cunque linearum Z, E, æquale est quadratis u-
triusque minùs duplo rectangulo sub ipsis.

Nam $Zq + Eq - 2 ZE = Aq - Q. Z - E$.

c 7. 2. &
3. ax.

E 4

PROP.

PROP. VIII.

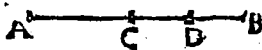


Si recta linea Z secetur utcumque; rectangulum quater comprehensum sub tota Z, & uno segmentorum E, cum eo,

quod à reliquo segmento A fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota Z, & dicto segmento E, tanquam ab una linea Z+E describitur, quadrato.

Dico $4 ZE + Aq = Q. Z + E$. Nam $2 ZE^2 = Zq + Eq - Aq$. ergo $4 ZE + Aq = Zq + Eq + 2 ZE^2 = Q. Z + E$. Q. E. D.

PROP. IX.



Si recta linea AB secetur in æqualia AC, CB,

& non æqualia AD, DB. quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis AD, DB fiunt, simul duplicia sunt, & ejus, quod à dimidia AC, & ejus, quod ab intermedia sectionum CD fit, quadrati.

Dico $ADq + DBq = 2 ACq + 2 CDq$. Nam $ADq + DBq = ACq + CDq + 2 ACD + DBq$. atqui $2 ACD$ ($= 2 BCD$) $+ DBq = CBq$ ($= ACq$) $+ CDq$.^d ergo $ADq + DBq = 2 ACq + 2 CDq$. Q. E. D.

PROP. X.



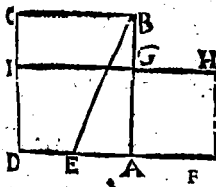
Si recta linea A secetur bifariam, adjiciatur autem ei in rectum quæpiam linea; Quod à tota

A cum adjuncta E, & quod ab adjuncta E, utraque simul quadrata, duplicia sunt & ejus, quod à dimidia $\frac{1}{2} A$; & ejus, quod à composita ex dimidia, & adjuncta, tanquam ab una $\frac{1}{2} A + E$, descriptum est, quadrati.

Dico $Eq + Q. A + E$, hoc est $Aq + 2Eq + 2 AE = 2 Q. \frac{1}{2} A + 2 Q. \frac{1}{2} A + E$. Nam $2 Q. \frac{1}{2} A^2 = \frac{1}{2} Aq$. & $2 Q. \frac{1}{2} A + E^2 = \frac{1}{2} Aq + 2Eq + 2 AE$.

PROP.

PROP. XI.



Datam rectam lineam AB secare in G, ut comprehensum sub tota AB, & altero segmentorum BG rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento AG fit, quadrato.

Super A B² describe quadratum A C. latus a 46. i. AD^b biseca in E. duc EB. ex EA producta cape EF=EB. ad AF² statue quadratum A H, Erit AH=ABx BG.

Nam protractâ HG ad I; Rectang. DH+EAq=EFq=EBq=BAq+EAq. ergo DH c 6. 2. f=BAq=quad. AC. subtrahe commune AI; d constr. f remanet quad. AH=GC; e 47. i. id est AGq=ABx f 3 ax. B-G. Q. E. F.

Scholium.

Hæc Propositio numeris explicari nequit; * vid. 6. 13. * neque enim ullus numerus ita secari potest, ut productum ex toto in partem unam æquale sit quadrato partis reliquæ.

PROP. XII.



In amblygoniis triangulis ABC quadratum, quod fit à latere AC angulum obtusum ABC subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt à lateribus AB, BC obtusum angulum ABC comprehendentibus, rectangulo his comprehenso, & ab uno latere BC, quæ sunt circa obtusum angulum ABC, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis AD, & ab assumpta exterius linea BD sub perpendiculari AD prope angulum obtusum ABC. Dico

Dico $ACq = CBq + ABq + 2 CB \times BD$.

Nam ista ACq .

a 47. 1.

b 4. 2.

c 47. 1.

æqualia

sunt in-

ter se

$$\left\{ \begin{array}{l} a \quad CDq + ADq. \\ b \quad CBq + 2 CBD + BDq + ADq \\ c \quad CBq + 2 CBD + ABq. \end{array} \right.$$

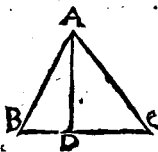
$$\left\{ \begin{array}{l} a \quad CDq + ADq. \\ b \quad CBq + 2 CBD + BDq + ADq \\ c \quad CBq + 2 CBD + ABq. \end{array} \right.$$

Schol.

Hinc, cognitis lateribus trianguli obtusanguli ABC , facile invenientur tum segmentum BD inter perpendicularem AD , & obtusum angulum ABC interceptum, tum ipsa perpendicularis AD .

Sic; Sit AC 10, AB 7, CB 5; unde ACq 100, ABq 49, CBq 25. Proinde $ABq + CBq = 74$ hunc deme ex 100, manet 26 pro $2 CBD$. unde CBD erit 13. hunc divide per CB 5, provenit $2\frac{1}{2}$ pro BD . quare AD invenitur per 47. 1.

PROP. XIII.



In oxygonis triangulis ABC quadratum à latere AB angulum acutum ACB subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus AC , CB acutum angulum ACB comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso,

& ab uno laterum BC , quæ sunt circa acutum angulum ACB , in quod perpendicularis AD cadit, & ab assumpta interioris linea DC sub perpendiculari AD , prope angulum acutum ACB .

Dico $ACq + BCq = ABq + 2 BCD$.

Nam æquantur ista

$$\left\{ \begin{array}{l} a \quad ACq + BCq. \\ b \quad ADq + DCq + BCq. \\ c \quad ADq + BDq + 2 BCD. \\ d \quad ABq + 2 BCD. \end{array} \right.$$

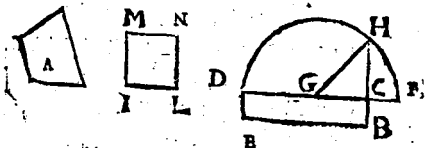
Coroll.

Hinc etiam cognitis lateribus trianguli ABC , invenire est tam segmentum DC inter perpendicularem

rem AD, & acutum angulum A B C interceptum, quam ipsam perpendicularem AB.

Sit AB 13, AC 15, BC 14. Detrahe ABq (169) ex ACq + BCq hoc est ex 225 + 196 = 421; remanet 252 pro 2 BCD; unde ECD erit 126. hunc divide per BC 14, provenit 9 pro DC. unde AD = $\sqrt{225 - 81} = 12$.

PROP. XIV.



Dato rectilineo A aequale quadratum ML invenire.

^a Fac rectangulum DB = A, cujus majus latus DC produc ad F, ita ut CF = CB. ^b Bi- ^a 45. 1. ^b 10. 2. seca DF in G, quo centro ad intervallum GF describe circulum FHD, producat CB, donec occurrat circumferentiae in H. Erit CHq =

* ML = A

Ducatur enim GH. Estque A^c = DB^c = DCF^d = GFq - GCq^e = HCq^e = ML Q.E.F.

* 46. 1.

c constr.

d 5. 2. &

3. ax.

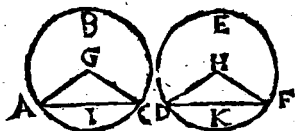
e 47. 1. &

3. ax.

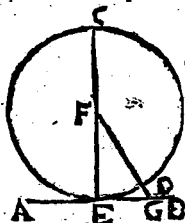
LIB.

LIB. III.

Definitiones.

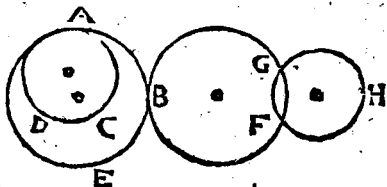


- I. Quales circuli (GABC; HDEF) sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris rectæ lineæ GA, HD, sunt æquales.



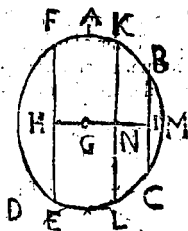
- II. Recta linea AB circulum FED tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producat circulum non secat.

Recta FG secat circulum FED.



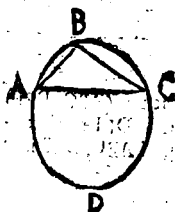
- III. Circuli DAC, ABE (item FBG, ABE) se mutuò tangere dicuntur, qui se mutuò tangentes sese mutuò non secant.

Circulus BFG secat circulum FGH.



IV. In circulo GABD æqualiter distare à centro dicuntur rectæ lineæ FB, KL, cùm perpendiculares GH, GN quæ à centro G in ipsas ducuntur, sunt æquales, Longius autem abesse illa BC dicitur,

in quâ major perpendicularis GI cadit.

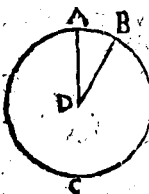


V. Segmentum circuli (ABC) est figura quæ sub recta linea AC, & circuli peripheria ABC comprehenditur.

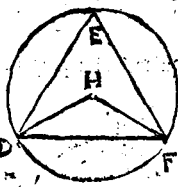
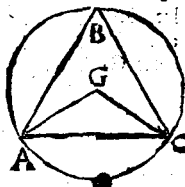
VI. Segmenti autem angulus (CAB) est, qui sub recta linea CA, & circuli peripheria AB comprehenditur.

VII. In segmento autem (ABC) angulus (ABC) est, cùm in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum B, & ab illo in terminos rectæ ejus lineæ AC, quæ segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ AB, CB, is inquam angulus ABC ab adjunctis illis lineis AB, CB comprehensus.

VIII. Cùm verò comprehendentes angulum ABC, rectæ lineæ AB, BC aliquam assument peripheriam ADC, illi angulus ABC insisteret dicitur.

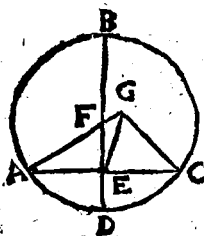


IX. Sector autem circuli (ADB) est, cum ad ipsius circuli centrum D constitutus fuerit angulus ADB; comprehensa nimirum figura ADB. & à rectis lineis AD, BD angulum continentibus, & à peripheria AB ab illis assumpta.



X. Similia circuli segmenta (ABC, DEF) sunt, quæ angulos (ABC, DEF) capiunt æquales; aut in quibus anguli ABC, DEF inter se sunt æquales.

PROP. I.



Dati circuli ABC centrum F reperire.

Duc in circulo rectam AC utcunq; quam biseca in E. per E duc perpendicularē DB. Hanc biseca in F. erit F centrū.

Si negas, centrum esto G, extra rectam DB (nam in ea esse non potest, cum ubiq; extra

F dividatur inæqualiter) ducanturque GA, GC, GE. Vis G centrum esse; ^a ergo GA = GC; & per constr. AE = EC, latus verò GE commune est; ^b ergo anguli GEA, GEC pares, & ^c proinde recti sunt. ^d ergo ang. GEC = FEC recti. ^e Q. E. A.

^a 15. def. 1.

^b 8. 1.

^c 10. def. 1.

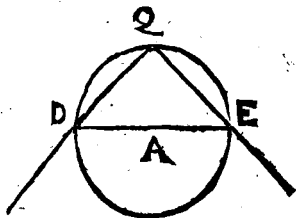
^d 12. ax.

^e 9. ax.

Coroll.

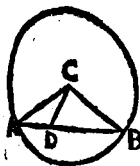
Coroll.

Hinc, si in circulo recta aliqua linea BD aliquam rectam lineam AC bifariam & ad angulos rectos secet, in secante BD erit centrum.



Facillimè per normam invenitur centrum vertice *Andr. Tacq.* Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta DE jungens puncta D, & E, in quibus normæ latera QD, QE peripheriam secant, biseccetur in A, erit A centrum. Demonstratio pendet ex 31. hujus.

PROP. II.



Si in circuli CAB peripheria duo quælibet puncta, A, B accepta fuerint, recta linea AB, quæ ad ipsa puncta adjungitur, intra circulum cadet.

Accipe in recta AB quodvis punctum D, & ex centro C duc CA, CD, CB. & quoniam $CA = CB$, erit ang. A = B. Sed ang. CDB = A; ergo ang. CDB = B. ergo CB = CD. atqui CB tantum pertinet ex centro ad circumferentiam; ergo CD eoque non pertingit. ergo punctum D est intra circulum. Idemque ostenderetur de quovis alio puncto rectæ AB. Tota igitur AB cadit intra circulum. Q. E. D.

a 15. def. 1.
b 5. 1.
c 16. 1.
d 19. 1.

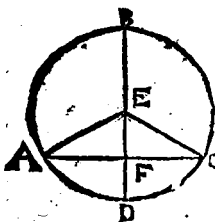
F 2

Coroll.

Coroll.

Hinc, Recta circulum tangens, ita ut eum non secet, in unico puncto tangit.

PROP. III.



Si in circulo EABC recta quadam linea BD per centrum ex e si quadam AC non per centrum extensam bisariam secet, (in F) & ad angulos rectos ipsam secabit; & si ad angulos rectos eam secet, bisariam quoque eam secabit.

Ex centro E ducantur EA, EC.

a hyp.

b 15. def. 1.

c 8. 1.

d 10. def. 1.

e hyp. &

12. ax.

f 5. 1.

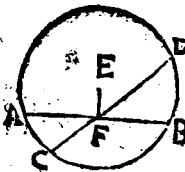
g 26. 1.

1. Hyp. Quoniam $AF^a = FC$, & $EA^b = EC$, latúsque EF commune est, ^c erunt anguli EFA, EFC pares, & ^d consequenter recti. Q. E. D.
 2. Hyp. Quoniam ang. $EFA^e = EFC$, & ang. $EAF^f = ECF$, latúsque EF commune, ^g erit $AF = FC$. Bisecta est igitur AC. Q. E. D.

Coroll.

Hinc, in triangulo quovis æquilatelo & Isocele linea ab angulo verticis bisecans basim, perpendicularis est basi. & contrà perpendicularis ab angulo verticis bisecat basim.

PROP. IV.



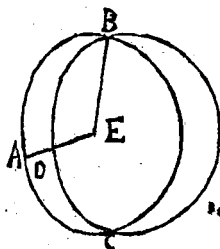
Si in circulo ACD duæ rectæ lineæ AB, CD sese mutuò secant non per centrum E extensæ, sese mutuò bisariam non secabunt.

Nam si una per centrum

trum transeat, patet hanc non bisecari ab altera, quæ ex hyp. per centrum non transit.

Si neutra per centrum transit, ex E centro duc EF. Si jam ambæ AB, CD forent bisectæ in F, anguli EFB, EFD^a ambo essent recti, &^a 3 3. proinde æquales. ^b Q. E. A. ^b 9. ax.

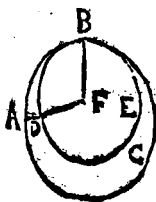
PROP. V.



Si duo circuli BAC, BDC sese mutuò secant, non e- illorum idem cen- rum E.

Aliàs enim ductis ex communi centro E rectis^a EB, EDA, essent^a 15. def. 2. $ED^a = EB^a = EA.$ ^b Q. E. A. ^b 9. ax.

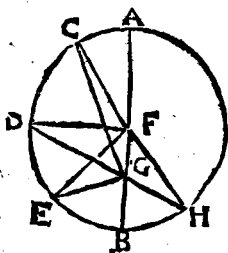
PROP. VI.



Si duo circuli BAC, BDE, sese mutuò interius tangant (in B). eorum non erit idem centrum F.

Aliàs ductis ex centro F rectis FB, FDA, essent^a 15. def. 1. $FD^a = FB^a = FA.$ ^b Q. E. N. ^b 9. ax.

PROP. VII.



Si in AB diametro circuli quodpiam sumatur punctum G, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quaedam rectæ lineæ GC, GD, GE cadunt; maxima quidam erit ea (GA) in qua centrum F,

minima verò reliqua GB. aliarum verò illi, quæ per centrum ducitur, propinquior GC remotiore GD semper maior est. Duæ autem solius rectæ lineæ GE GH æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA.

a 23. 1.

Ex centro F duc rectas FC, FD, FE; & ^a fac ang. BFH = BFE.

a 20. 1.

1. GF + FC (hoc est GA) ^a > GC. Q. E. D.

b 15. def. 1.

2. Latus FG commune est, & FC ^b = FD, atque ang. GFC ^c = GFD ^d ergò bas. GC > GD. Q. E. D.

c 9. ax.

d 24. 1.

e 20. 1.

f 5. ax.

3. FB (FE) ^e > GE + GF. ergò ablatō communi FG ^f remanet BG > EG. Q. E. D.

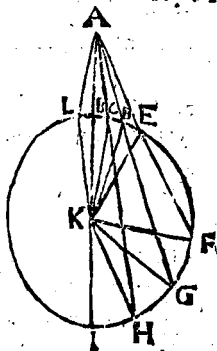
g conftr.

h 4. 1.

4. Latus FG commune est, & FE = FH; atque ang. BFH ^g = BFE. ^h ergò GE = GH. Quòd verò nulla alia GD ex puncto G æquetur ipsi GE, vel GH, jamjam ostensum est. Q. E. D.

PROP.

PROP. VIII.



Si extra circulum sumatur punctum quodpiam A, ab eoque puncto ad circulum deducantur quaedam lineae AI, AH, AG, AF, quarum una quidem AI per centrum K protendatur, reliquae vero ut libet, in eadem peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa AI,

quae per centrum ducetur, aliarum autem ei quae per centrum transit propinquior AH remotiore AG semper major est. In convexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa AB, quae inter punctum A, & diametrum BI interponitur; aliarum autem ea, quae est minima propinquior AC remotiore AD semper minor est. Duae autem tantum rectae lineae AC, AL aequales ab eoque puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimae AB, vel maximae AI.

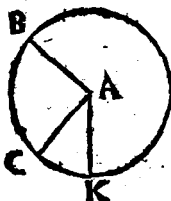
Ex centro K duc rectas KH, KG, KF; KC, KD, KE. & fac ang. AKL = AKC.

1. AI (AK + KH) = AH. Q. E. D. a 20. 1.
2. Latus AK commune est; & KH = KG; atque ang. AKH = AKG. b ergo bas. AH = AG. Q. E. D. b 24. 1.
3. KA = KC + CA. aufer hinc indè æquales KC, KB, d erit AB = AC. e 20. 1. d 5. ax.
4. AC + CK = AD + DK. aufer hinc indè æquales CK, DK, f erit AC = AD. Q. E. D. e 21. 1. f 5. ax.

g const.
h 4. 1.

5. Latus KA est commune & $KL = KC$; atque ang. $AKL = AKC$, ^h ergò $LA = CA$. hisce verò nulla alia æquatur, ex mox ostensis. ergò, &c.

PROP. IX.

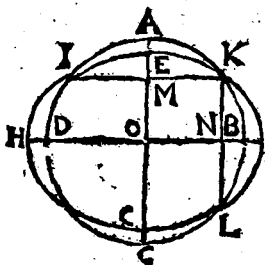


Si in circulo BCK acceptum fuerit punctum aliquod A, & ab eo puncto ad circumulum cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales AB, AC, AK, acceptum punctum A centrum est ipsius circuli.

a 7. 3.

Nam ^a à nullo puncto extra centrum plures quàm duæ rectæ lineæ æquales duci possunt ad circumferentiam. Ergò A est centrum. Q. E. D.

PROP. X.



Circulus IAKL circulum IEKL in pluribus quàm duobus punctis non secat.

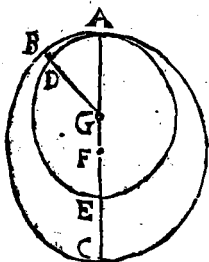
Secet, & fieri potest, in tribus punctis I K L. Junctæ IK KL. biscentur in M & N. ^a Ambo circuli centrum

a cor. 1. 3.
b 5. 3.

habent in singulis perpendicularibus MC, NH, & proinde in earum intersectione O. ergò secantes circuli idem centrum habent. Q. E. N.

PROP.

PROP. XI.

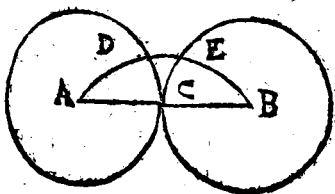


Si duo circuli
GADB, FABC
se se intus contin-
gant, atque accepta
fuerint eorum cen-
tra G, F; ad eo-
rum centra adjun-
ctæ recta linea FG,
& producta, in A
contactum circulo-
rum cadet.

Si fieri potest, recta FG protracta secet cir-
culos extra contactum A, sic ut non FGA, sed
FGDB sit recta linea. ducatur GA. Et quia
 $GD = GA$, & $GB \perp GA$, (cùm recta FGB
transcat per F centrum majoris circuli) erit GB
 $\perp GD$. Q. E. A.

a 15. def. 1.
b 7. 3.
c 9. ax.

PROP. XII.

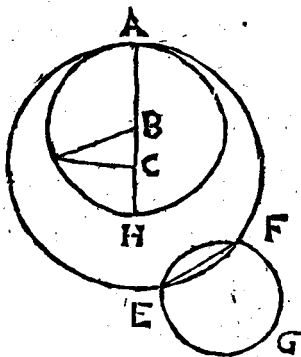


Si duo circuli ACD, BCE se se exterius contin-
gant, linea recta AB quæ ad eorum centra A, B ad-
jungitur, per contactum C transibit.

Si fieri potest, sit recta ADEB secans circulos
extra contactum C in punctis D, E. Duc AC,
CB, erit $AD = EB$ ($AC + CB$) = AD
 EB . Q. E. A.

a 20. 1.7
b 2. ax.

PROP. XIII.



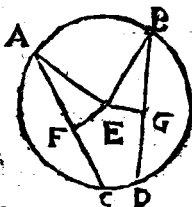
Circulus CAF circulum BAH non tangit in pluribus punctis, quam uno A, siue intus, siue extra tangat

1. Tangat, si fieri potest, intus in punctis A, H. ^a ergo recta CB centra

connectens, si producat, cadet tam in A, quam in H. Quoniam igitur $CH^b = CA$, & $BH^c = CH$. erit BA ($= BH$) $= CA$. ^d Q. E. A.

2. Sin dicatur exterius contingere in punctis E & F, ^educta recta EF in utroque circulo erit. Circuli igitur se mutuò secant, quod non ponitur.

PROP. XIV.



In circulo EABC æquales rectæ lineæ AC BD, æqualiter distant à centro E. & quæ AC, BD æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

Ex centro E duæ perpendiculares EF,

EG: ^a quæ bisecabunt AC, DB. connecte EA EB.

1. Hyp. $AC = BD$. ergo $AF^b = BG$. sed & EA

a 11. 3.

b 15. def. 1.

c 15. def. 1.

d 9. ax.

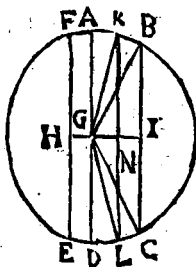
e 2. 3.

a 3. 3.

b 7. ax.

EA = EB. ergò FEq = EAq = AFq = c 47. 1. &
EBq = EGq = EGq. ergò FE = EG. Q. E. D. 3. ax.
2. Hyp. EF = EG. ergò AFq = EAq = EFq = d Schol. 48. 1.
EBq = EGq = GBq. ergò AF = GB. c 6. ax.
proinde AD = BC. Q. E. D.

PROP. XV.

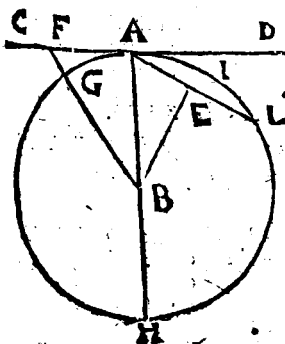


In circulo GABC
maxima quidem linea
est diameter AD; ali-
arum autem centro G
propinquior FE remo-
tior BC semper ma-
jor est.

1. Duc GB, GC.
Diameter AD (a 15. def. 1.
GB + GC) b BC b 20. 1.
Q. E. D

2. Sit distantia
GI = GH. accipe GN = GH. per N duc
KL perpend. GI. junge GK, GL. & quia
GK = GB, & GL = GC; estque ang. KGL =
BGC, erit KL (FE) = BC. Q. E. D. c 24. 1.

PROP. XVI.



Que CD
ab extreni-
tate diame-
tri HA cu-
jusq; circuli
BALH ad
angulos rectos
ducitur, ex-
tra ipsi cir-
culum cadet,
& in locum
inter ipsam
rectam line-
am, & peri-
pheriā com-
prehen-

prehensum altera recta linea AL non cadet, & semicirculi quidem angulus BAI quovis angulo acuto rectilineo BAL major est; reliquus autem DAI minor.

a 19. 1. 1. Ex centro B ad quodvis punctum F in recta AC duc rectam BF. Latus BF subtendens angulum rectum BAF^a majus est latere BA, quod opponitur acuto BFA. ergo cum BA(BG) pertingat ad circumferentiam, BF ulterius porrigetur, adeoque punctum F, & eadem ratione quodvis aliud rectæ AC, extra circulum situm erit. Q. E. D.

b 19. 1. 2. Duc BE perpendic. AL. Latus BA oppositum recto angulo BEA^b majus est latere BE, quod acutum BAE subtendi: ergo punctum E, adeoque tota EA cadit intra circulum. Q. E. D.

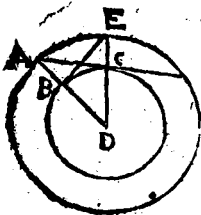
3. Hinc sequitur angulum quemvis acutum, nempe EAD angulo contactus DAI majorem esse. Item angulum quemvis acutum BAE angulo semicirculi BAI minorem esse. Q. E. D.

Coroll.

Hinc, recta à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta ipsum circulum tangit.

Ex hac propositione paradoxa consequuntur, & mirabilia bene multa, quæ vide apud interpretes.

PROP. XVII.



A dato puncto A rectam lineam AC ducere, quæ datum circulum DBC tangat.

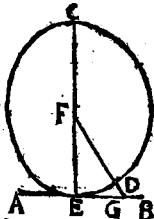
Ex D dati circuli centro ad datum punctum A ducatur recta DA secans peripheriam in B. Centro D describe per A alium circulum.

AL.

A E; & ex B duc perpendiculararem ad AD, quæ
occurrat circulo AE in E. duc ED occurrentem
circulo BC in C. ex A ad C ducta recta tanget
circulum DBC.

Nam $DB^2 = DC^2$, & $DE^2 = DA^2$, & ang. a 15. def. 1.
D communis est; b ergo ang. $ACD = EBD$, b 4. 1.
recti. c ergo AC tangit circulum C. Q. E. F. c cor. 16. 3.

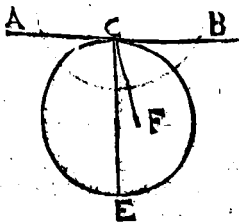
PROP. XVIII.



Si circulum FE DC
tangat recta quapiam
linea AB, à centro au-
tem ad contactum E ad-
jungatur recta quædam
linea FE; quæ adjun-
cta fuerit FE ad ipsam
contingentem AB per-
pendicularis erit.

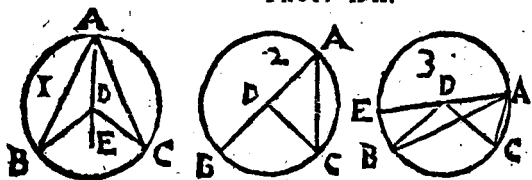
Si negas, sit ex F centro alia quædam FG
perpendicularis ad contingentem, a secabit ea cir- a 2. def. 3.
culum in D. Quum igitur ang. FGE rectus b cor. 17. 1.
dicatur b erit ang. FEG acutus c. ergo FE c 19. 1.
(FD) $\perp$ FG. d Q. E. A. d 9. ax.

PROP. XIX.



Si circulum te-
riggerit recta qua-
piam linea AB, à
contactu autem C
recta linea CE ad
angulos rectos ipsi
tangenti excitetur,
in excitata CE
erit centrum cir-
culi.

Si negas, sit centrum extra CE in F, & ab F
ad contactum ducatur FC. Igitur ang. FCB
rectus est; & a proinde par angulo ECB recto a 12. ax.
per hypoth. b Q. E. A. b 9. ax.

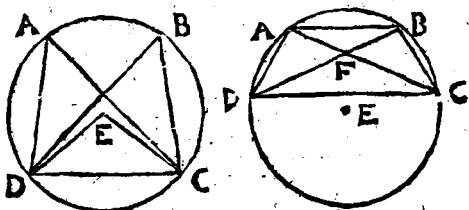


In circulo DABC, angulus BDC ad centrum duplex est anguli BAC ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria BC basis angulorum.

Duc diametrum ADE.

Externus angulus BDE^a = DAB + DBA^b = 2 DAB. Similiter ang. EDC = 2 DAC. ergo in primo casu totus BDC = 2 BAC, sed in tertio casu^c reliquus angulus BDC = 2 BAC. Q. E. D.

PROP. XXI.



In circulo EDAC qui in eodem segmento sunt anguli, DAC & DBC sunt inter se aequales.

1. Cas. Si segmentum DABE semicirculo sit majus, ex centro E, duc ED, EC. Erigq; 2 ang. A^a = E^a = 2 B. Q. E. D.

2. Cas. Sin segmentum semicirculo majus non fuerit, summa angulorum trianguli ADF aequatur summae angulorum in triangulo BCF. De^a mantur hinc inde AFD^b = BEC, & ADB^c = ACB, remanent DAC = DBC. Q. E. D.

a 32. 1.

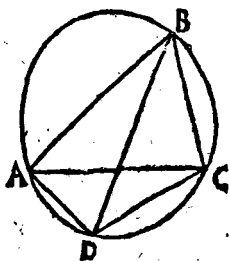
b 5. 1.

c 20. ax.

a 20. 3.

b 15. 1.

c per 1. cas.



Quadrilatero-
rum ABCD in
circulo descripto-
rū anguli ADC,
ABC, qui ex ad-
verso, duobus re-
ctis sunt aequales.

Duc AC, BD.
Ang. ABC +
BCA + BAC a 32. 1.
= 2 Rect. Sed
BDA^b = BCA, b 21. 3.

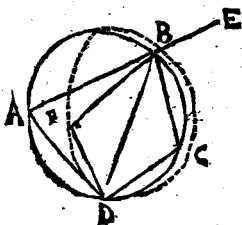
& BDC^b = BAC. ergo ABC + ADC = 2 Rect. c 1. ax.
Q. E. D.

Coroll.

1. Hinc, si * AB unum latus quadrilateri * vid. seq. diagram.
in circulo descripti producat, erit angu-
lus externus EBC æqualis angulo interno
ADC, qui opponitur ei ABC, qui est dein-
ceps externo EBC. ut patet ex 13. 1. & 3. ax.

2. Item circa Rhombum circulus describi ne-
quit; quia aduersi ejus anguli vel cedunt duobus
rectis, vel eos excedunt.

SCHOL.



Si in quadri-
latero ABCD
anguli A, & C,
qui ex aduerso
duobus rectis æ-
quantur, circa
quadrilaterum
circulus describi
potest.

Nam circu-
lus per quosli-
ben

bet tres angulos B, C, D transibit (ut patebit ex 5.4.) dico eundem per A transire. Nam si neges, transeat per F. ergo ductis rectis BF, FD, BD; ang. $C + F^a = 2 \text{ Rect.}^b = C + A^c$ quare $A = F$.
^d Q. E. A.

a 22. 3.
 b hyp.
 c 3. ax.
 d 21. 1.

PROP. XXIII.



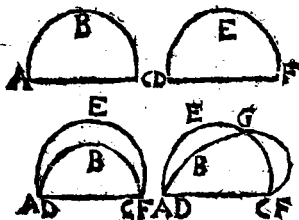
Super eadem recta linea AC duo circularium segmenta ABC, ADC similia & inequa-

lia non constituentur ad easdem partes.

Nam si dicantur similia, duc CB secantem circumferentias in D, & B, & junge AD, ac AB. Quia segmenta ponuntur similia, ^a erit ang. $ADC = ABC^b$ Q. E. A.

a 10. def. 3.
 b 16. 1.

PROP. XXIV.



Super aqualibus rectis lineis AC, DF similia circularium segmenta ABC, DEF sunt inter se aqualia.

Basis AC superposita basi DF ei congruet, quia $AC = DF$. ergo segmentum ABC congruet segmento DEF (alias enim aut intra cadet, aut extra, ^a atque ita segmenta non erunt similia, contra Hyp. aut saltem partim intra, partim extra, adeoque ipsum in tribus punctis secabit. ^b Q. E. A.) ^c proinde segmentum $ABC = DEF$. Q. E. D.

a 23. 3.

b 10. 3.
 c 8. ax.

PROP.

PROP. XXV.

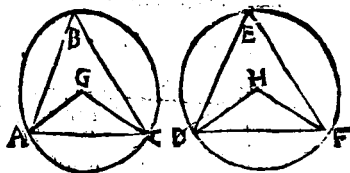


Circuli segmento ABC dato, describere circum, cujus est segmentum.

Subtendantur ut-
eunque duæ rectæ
AB, BC, quas bi-
seca in D, & E. Ex D, & E duc perpendicular-
lares DF, EF occurrentes in puncto F. Hoc
erit centrum circuli.

Nam centrum^a tam in DF, quam in EF a Cor. 1. 3.
existit. ergo in communi puncto F. Q. E. F.

PROP. XXVI.



*In aequalibus circulis GABC, HDEF aequales an-
guli aequalibus peripheriis AC, DF insunt, siue ad
centra G, H, siue ad peripher. B, E constituti insunt.*

Ob circulorum æqualitatem, est $GA = HD$,
& $GC = HF$ item per hyp. ang. $G = H$.

ergo $AC = DF$. Sed & ang. $B = \frac{1}{2} G = \frac{1}{2} H = E$.

ergo segmenta ABC, DEF similia,
& proinde paria sunt. ergo etiam reliqua se-
gmenta AC, DF æquantur. Q. E. D.

a 4. 1.
b 20. 3.
c hyp.
d 16. def. 3.
e 24. 3.
f 3. ax.

Scholium.

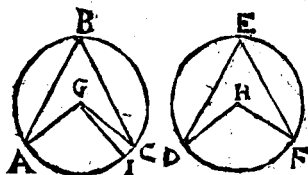


In circulo ABCD, sit ar-
cus AB par arcui DC; erit
AD parall. BC. Nam ductâ
AC, erit ang. $ACB = CAD$.
quare per 27. 1.

G 3

PROP.

PROP. XXVII.



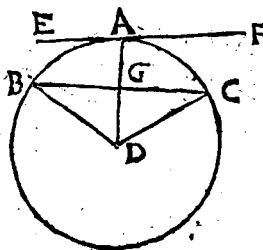
In equali-
bus circulis
GABC,
HDEF, an-
guli qui e-
qualibus pe-
ripheriis AC
DF insi-

stunt, sunt inter se aequales, sive ad centra G, H,
sive ad peripherias B, E constituti insistant.

Nam si fieri potest, sit alter eorum AGC
DHF. fiatque $AGI = DHF$. ergo arcus
 $AI = DF = AC$. Q. E. A.

a 26. 3.
b hyp.
c 9. ax.

SCHOL.



Linea recta
EE, quæ ducta
ex A medio pun-
cto peripheriæ a-
licujus BC cir-
culum tangit,
parallela est re-
ctæ lineæ DC,
quæ peripheriam
illam subtendit.

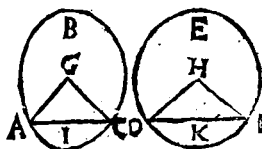
Duc e centro
D ad conta-
ctum A rectam DA, & connecte DB, DC.

Latus DG commune est; & $DB = DC$, atq;
ang. $BDA = CDA$ (ob arcus BA, CA æ-
quales) ergo anguli ad basim DGB, DGC
æquales & proinde recti sunt. Sed interni an-
guli GAE, GAF etiam recti sunt. ergo BC,
EF sunt parallelæ. Q. E. D.

a 27. 3.
b hyp.
c 4. 1.
d 10. def. 1.
e hyp.
f 28. 1.

PROP.

PROP. XXVIII.



In aequalibus circulis
GABC,
HDEF a-
quales rectae
lineae AC,
DF aequales

peripherias auferunt, majorem quidem ABC ma-
jori DEF, minorem autem AIC minori DKF.

E centrīs, G, H duc GA, GC; & HD, HF.

Quoniam $GA=HD$, & $GC=HF$, atque

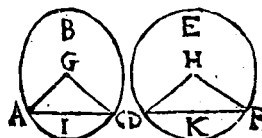
$AC=DF$; ^aerit ang. $G=H$. ^cergo arcus

$AIC=DKF$. ^dproinde reliquus $ABC=DEF$.

Q. E. D.

a hyp.
b 8. 1.
c 26. 3.
d 3. ax.

PROP. XXIX.



In aequalibus circulis
GABC,
HDEF a-
quales periphe-
rias ABC,
DEF aequa-

les rectae lineae AC, DF subtendunt.

Duc GA, GC; & HD, HF. Quia $GA=$

HD ; & $GC=HF$; & (ob arcus AC, DF

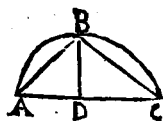
^apares) etiam ang. $G=H$; ^cerit bas. $AC=DF$.

Q. E. D.

Hæc & tres proximè præcedentes intelligan-
tur etiam de eodem circulo.

a hyp.
b 27. 3.
c 4. 8.

PROP. XXX.



Datam peripheriam ABC
bifurcā secare.

Duc AC; quam bise-
ca in D. ex D duc per-
pendicularem DB oc-
currentem arcui in B. Dico factum.

a const.

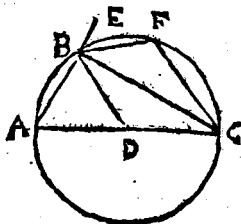
b 12. ax.

c 4. 1.

d 29. 3.

Jungantur enim AB, CB. Latus DB commune est; & $AD^a = DC$; & ang. $ADB^b = CDB$. $\therefore$ ergo $AB = BC$. $\therefore$ quare arcus $AB = BC$. Q. E. F.

PROP. XXXI.



In circulo angulus ABC, qui in semicirculo, rectus est; qui autem in maiore segmento B C, minor recto; qui vero in minore segmento BFC, major est recto. Et insuper angulus majoris segmenti recto quidem major est, minor

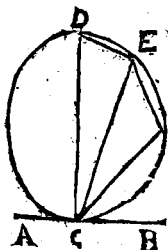
autem segmenti angulus, minor est recto.

Ex centro D duc DB. Quia $DB = DA$, erit ang. $A^a = DBA$. pariter ang. $DCB^a = DBC$. $\therefore$ ergo ang. $ABC = A + ACB^c = EBC$, $\therefore$ proinde ABC, & EBC recti sunt. Q. E. D. $\therefore$ ergo BAC acutus est. Q. E. D. ergo cum $BAC + BFC^f = 2$ Rect. erit BFC obtusus. denique angulus sub recta CB, & arcu BAC major est recto ABC. factus vero sub CB, & BFC peripheria minoris segmenti, recto EBC minor est. Q. E. D.

SCHOLIUM.

In triangulo rectangulo ABC, si hypotenusa AC bisecetur in D, circulus centro D, per A descriptus transibit per B. ut facillè ipse demonstrabis ex hac, & 21. 1.

PROP. XXXII.



Si circulum teti-
gerit aliqua recta li-
nea AB, à contactu
autè producatu quæ-
dam recta linea CE
circulum secans: an-
guli ECB, ECA,
quos ad contingen-
tem facit, æquales
sunt iis, qui in alter-
nis circuli segmentis

constitunt, angulis EDC, EFC.

Sit CD latus anguli EDC perpendicularare ad
AB (^a perinde enim est) ^b ergò CD est dia-
meter. ^c ergò ang. CED in semicirculo rectus
est. ^d ergò ang. D + DCE = Rect. ^e = ECB +
DCE. ^f ergò ang. D = ECB. Q. E. D.

Cùm igitur ang. ECB + ECA = 2 Rect.
^g = D + F; aufer hinc indè æquales ECB, &
D, ^h remanent ECA = F. Q. E. D.

PROP. XXXIII.



Sûper da-
ta recta li-
nea AB de-
scribere cir-
culi segmen-
tum AIEB,
quod capiat
angulũ AIB
æqualem da-
to angulo re-
ctilineo C.

^a Fac ang. BAD = C. Per A due AE per-
pendicularem ad HD. ad alterum terminum
datæ AB fac ang. ABF = BAF. cujus alterum
latus secet AE in F. centro F per A describe
circulum, quod transibit per B (quia ang. FBA
^b = FAB,

a 26. 3.
b 19. 3.
c 31. 3.
d 32. 1.
e const.
f 3. ax.
g 13. 1.
h 22. 3.
k 3. ax.

a 23. 1.

b *constr.*
c 6. 1.

$b = FAB$, c ideoque $FB = FA$); segmentum AIB est id quod quaeritur.

d cor. 16. 3.

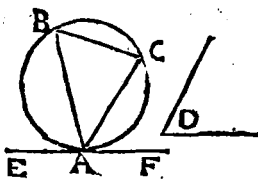
e 32. 3.

f *constr.*

Nam quia HD diametro AE perpendicularis est, d tangit HD circulum, quem secat AB . ergo ang. $AIB^e = BAD^f = C$. Q. E. F.

PROP. XXXIV.

A dato circulo
 ABC segmentum
 ABC abscindere
capiens angulum
 B aequalem dato
angulo rectilineo
 D .



a 17. 3.

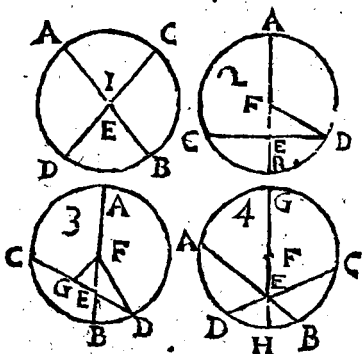
b 23. 1.

c 32. 3.

d *constr.*

a Duc rectam EF , quæ tangat datum circulum in A . b ducatur item AC faciens ang. $FAC = D$. Hæc auferet segmentum ABC capiens angulum $B^c = CAF^d = D$. Q. E. F.

PROP. XXXV.



Si in circulo $FBCA$ due rectæ lineæ AB , DC sese mutuè secuerint, rectangulum comprehensum sub

sub segmentis AB, EB unius, æquale est ei quod sub segmentis CE, ED alterius comprehenditur, rectangulo.

Cas. 1. Si rectæ sese in centro secent, res clara est.

2. Si una AB transeat per centrum F, & reliquam CD bisecet, duc FD. Estque Rectang. AEB + FEq^a = FBq^b = FDq^c = EDq^a + FEq^d = CED + FEq. ^a 5. 2. ^b sch. 48. 1. ^c 47. 1. ^d hyp. ergo Rectang. AEB = CED. Q. E. D.

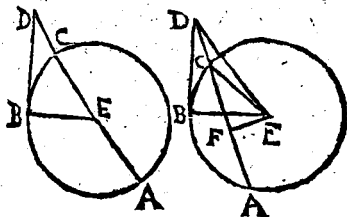
3. Si una AB diameter sit, alteramque CD secet inæqualiter, biseca CD per FG perpendiculararem ex centro.

Equantur ista $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rectang. AEB} + \text{FEq.} \\ \text{f FBq (FDq)} \\ \text{g FGq} + \text{GDq.} \\ \text{FGq} + \text{h GEq} + \text{Rectang. CED.} \\ \text{k FEq} + \text{CED.} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{f 5. 2.} \\ \text{g 47. 1.} \\ \text{h 5. 2.} \\ \text{k 47. 1.} \\ \text{l 3. ax.} \end{array} \right.$

ⁱ Ergo Rectang. AEB = CED.

4. Si neutra rectarum AB, CD per centrum transeat; per intersectionis punctum E duc diametrum GH. Per modò demonstrata Rectang. AEB = GEH = CED. Q. E. D.

PROP. XXXVI.



Si extra circulum EBC sumatur punctum aliquod D, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ DA, DB; quarum altera DA circulum secet,

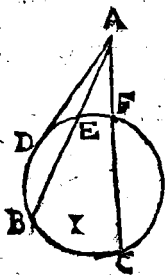
fecet, altera verò DB tanget; Quod sub tota secante DA, & exterius inter punctum D, & convexam peripheriam assumptâ DC comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente DB describitur, quadrato.

1. Cas. Si secans AD transeat per centrum E, jungo EE; ^a faciet hæc cum DB rectum angulum; quare $DDq + EBQ (ECq) = EDq$
^c $= AD \times DC + ECq$ ^d ergo $AD \times DC = DBq$. Q. E. D.

2. Cas. Sin AD per centrum non transeat, duc EC, EB, ED; atq; EF perpend. AD, quare ^a bisecta est AC in F.

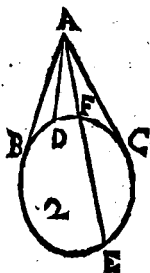
Quoniam igitur $BDQ + EBq = DEq = EFq + FDq = EFq + ADC + FCQ = ADC + CEq (EBq)$; ^e erit $BDq = ADC$. Q. E. D.

Coroll.



1. Hinc, si à puncto quovis A extra circulum assumpto, plurimæ lineæ rectæ AB, AC circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis AB, AC, & partibus externis AE, AF inter se sunt æqualia. Nam si ducatur tangens AD; erit $CAF = ADq = BAE$.

2. Constat



2. Constat etiam duas rectas AB, AC ab eodem puncto A ductas, quæ circum-
culum tangant, inter se
æquales esse.

Nam si ducatur AE se-
cans circum-
culum; erit ABq
= EAF^b = ACq.

a 36. 3.
b 36. 3.

3. Perspicuum quoque est ab eodem puncto
A extra circum-
culum assumpto, duci tantum posse
duas lineas, AB, AC quæ circum-
culum tangant.

Nam si tertia AD tangere dicatur, erit AD
= AB^c = AC.^d Q. E. N.

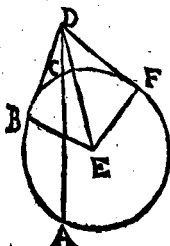
c 2 cor.
d 8. 3.

4. E contra constat, si duæ rectæ æquales
AB, AC ex puncto quopiam A in convexam
peripheriam incidant, & earum una AB circu-
lum tangat, alteram quoq; circum-
culum tangere.

Nam si fieri potest, non AC, sed altera AD
circum-
culum tangat. ergo AD^e = AC^f = AB.^f Q. E. A.

e 2 cor.
f hyp.
g 8. 3.

PROP. XXXVII.



Si extra circum-
culum EBF
sumatur punctum D, ab
eoque in circum-
culum cadant
duæ rectæ lineæ DA, DB;
quarum altera DA circu-
lum secet, altera DB in
eum incidat; sit autem
quod sub tota secante DA,
& exterius inter punctum,
& convexam peripheriam
assumpta DC, comprehen-
ditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente

H

DB

DB describitur quadrato, incidens ipsa DB circulum tanget.

a 17. 3.

b hyp.

c 36. 3.

d 1. ax. &

fib. 48. 1.

e 8. 1.

f 12. ax.

g cor. 16. 3.

Ex D^a ducatur tangens DF; atque ex E centro duc ED, EB, EF. Quia DBq^b = ADC^c = DFq, ^d erit DB = DF. Sed EB = EF, & latus ED commune est; ^e ergo ang. EBD = EFD. Sed EFD rectus est, ^f ergo EBD etiam rectus est. ^g ergo DB tangit circulum.

Q. E. D.

Coroll.

h 8. 1.

Hinc, ^h ang. EDB = EDF.

LIB. IV.

Definitiones.

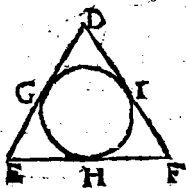
I.  Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera ejus in qua inscribitur, tangunt.

Sic triangulum DEF est inscriptum in triangulo ABC.



II. Similiter & figura circa figuram describi dicitur, cum singula ejus, quæ circumscribitur, latera singulos ejus figuræ angulos tetigerint, circa quam illa describitur.

Ita triangulum ABC est descriptum circa triangulum DEF.



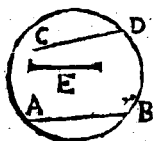
III. Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

IV. Figura verò rectilinea circa circumscriptum dicitur, cum singula latera ejus, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

V. Similiter & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ, cui inscribitur.

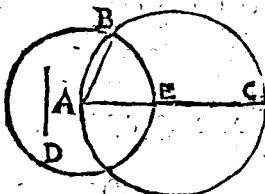
VI. Circulus autem circa figuram describi dicitur,

dicatur, cum circuli peripheria singulos tangit
ejus figuræ, quam circumscribit, angulos.



VII. Recta linea in cir-
culo accommodari, seu coa-
ptari dicitur, cum ejus ex-
trema in circuli peripheria
fuerint; ut recta linea AB.

PROP. I. Probl. 1.

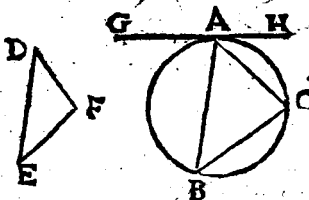


In dato circulo
ABC rectam li-
neam AB accom-
modare, æqualem
datæ rectæ linea
D, quæ circuli di-
ametro AC non
sit major.

Centro A, spatio $AE = D$ describe circum-
lato circulo occurrentem in B. Erit ducta
 $AB = AE = D$. Q. E. F.

a 3. post.
b 3. 1.
c 15. def. 1.
d const.

PROP. II. Probl. 2.



In da-
to cir-
culo ABC
triangu-
lū ABC
descri-
bere da-
to tri-
angulo

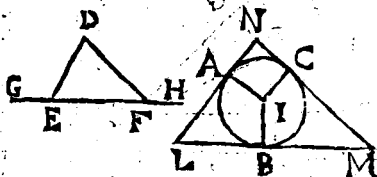
DEF æquiangulum.

Recta GH circumlato datum^a tangat in A.
^b Fac ang. $HAC = E$; & ang. $GAB = F$, &
junge EC. Dico factum. Nam

a 17. 3.
b 23. 1.

Nam ang. $B^c = HAC^d = E$; & ang. $c^{32. 3.}$
 $C^c = GAB^d = F$; e quare etiam ang. $BAC = D$. $d^{conf.}$
 ergo triang. BAC circulo inscriptum triangulo $c^{32. 1.}$
 DEF æquiangulum est. Q. E. F.

PROP. III. Probl. 3.

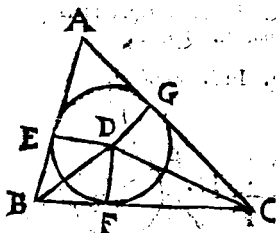


Circa datum circulum IABC triangulum LNM
 describere, dato triangulo DEF æquiangulum.

Produc latus EF utrinque. a Fac ad centrum $a^{23. 1.}$
 I ang. $AIB = DEG$. & ang. $BIC = DFH$.
 deinde in punctis A, B, C circulum b tangant $b^{17. 3.}$
 tres rectæ LN, LM, MN . Dico factum.

Nam quod coibunt rectæ LN, LM, MN ,
 atque ita triangulum constituent; patet; $c^{13. ax.}$
 anguli LAI, LBI^d recti sunt, adeoque ducta $d^{18. 3.}$
 AB angulos faciet LAB, LBA duobus rectis mi-
 nores. Quoniam igitur ang. $AIB + L^c = 2$ $c^{Scol. 32. 1.}$
 Rect. $f = DEG + DEF$; & $AIB = DEG$; h erit $f^{13. 1.}$
 ang. $L = DEF$. Simili argumento ang. $M = DFE$. $g^{conf.}$
 ergo etiam ang. $N = D$. ergo triang. LMN $h^{3. ax.}$
 circulo circumscriptum dato EDF est æquan- $k^{32. 1.}$
 gulum. Q. E. F.

PROP. IV. Probl. 4.



In dato trian-
gulo ABC cir-
culum EFG in-
scribere.

Duos angu-
los B, & C bi-
seca rectis BD,
CD coeunti-
bus in D. Ex
D duc perpen-

diculares DE, DF, DG. circulus centro D per
E descriptus transibit per G, & F, tangetque
tria latera trianguli.

Nam ang. $\angle DBE = \angle DBF$; & ang. $\angle DEB = \angle DFB$; & latus DB commune est, ergo $DE = DF$. Simili argumento $DG = DF$. circulus igitur centro D descriptus transit per E, F, G, & cum anguli ad E, F, G sint recti, tangit omnia trianguli latera. Q.E.F.

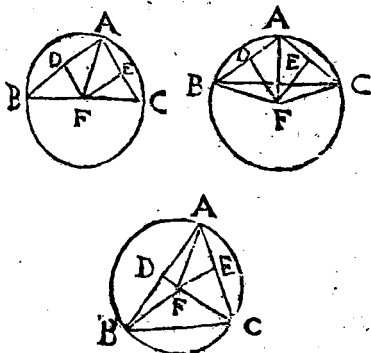
Scholium.

Petr. Herig.

Hinc, cognitis lateribus trianguli, invenientur eorum segmenta, quae sunt à contactibus circuli inscripti. Sic.

Sit AB 12, AC 18, BC 16. Erit $AB + BC = 28$. ex quo subduc $18 = AC = AE + FC$, remanet $10 = BE + BF$. ergo BE, vel $BF = 5$. proinde FC, vel $CG = 11$. quare GA, vel $AE = 7$.

PROP.



Circa datum triangulum ABC circulum FABC describere.

Latera quævis duo BA, AC^a biseca perpendicularibus DF, EF concurrentibus in F. Hoc^{a 10, & 11. 1.} erit centrum circuli.

Nam ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam AD^b=DB; & latus DF commune est; & ang. b *constr.* FDA^c=FDB, d erit FB=FA. eodem modo c *constr.* & FC=FA. ergo circulus centro F per dati tri-^{12. ax.} anguli angulos B, A, C transibit. Q. E. F. d 4. 1.

Coroll.

* Hinc, si triangulum fuerit acutangulum, * 31. 3. centrum cadet intra triangulum, si rectangulum, in latus recto angulo oppositum; si denique obtusangulum, extra triangulum.

Schol.

Eâdem methodo describetur circulus, qui transeat per data tria puncta, non in una recta linea existentia.

b constr.
c 6. 1.

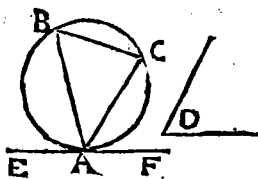
$b = FAB$, c ideoque $FB = FA$); segmentum AIB est id quod quaeritur.

d cor. 16. 3.
e 32. 3.
f constr.

Nam quia HD diametro AE perpendicularis est, d tangit HD circulum, quem secat AB. ergo ang. AIB^e = BAD^f = C. Q. E. F.

PROP. XXXIV.

A dato circulo
ABC segmentum
ABC abscindere
capiens angulum
B aequalem dato
angulo rectilineo
D.



a 17. 3.

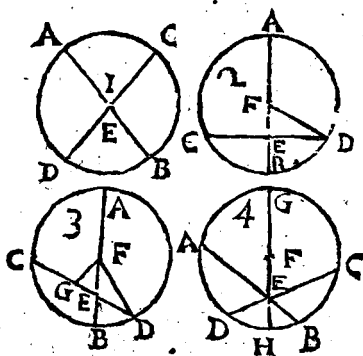
b 23. 1.

c 32. 3.

d constr.

a Duc rectam EF, quae tangat datum circulum in A. b ducatur item AC faciens ang. FAC = D. Hæc auferet segmentum ABC capiens angulum B^c = CAF^d = D. Q. E. F.

PROP. XXXV.



Si in circulo FBCA due rectæ lineæ AB, DC sese mutuè secuerint, rectangulum comprehensum sub

sub segmentis AB, EB unius, æquale est ei quod sub segmentis CE, ED alterius comprehenditur, rectangulo.

Cas. 1. Si rectæ sese in centro secent, res clara est.

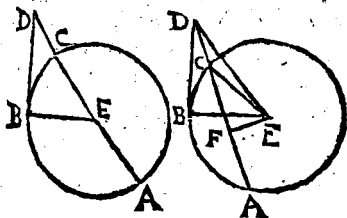
2. Si una AB transeat per centrum F, & reliquam CD bisecet, duc FD. Estque Rectang. $AEB + FEq^a = FBq^b = FDq^c = EDq^a + FEq^d = CED + FEq^c$ ergo Rectang. $AEB = CED$. Q. E. D.

3. Si una AB diameter sit, alteramque CD secet inæqualiter, biseca CD per FG perpendiculararem ex centro.

Rectang. $AEB + FEq^a$
 $\left\{ \begin{array}{l} f FBq (FDq) \\ g FGq + GDq. \\ h FGq + GEq + Rectang. CED. \\ k FEq + CED. \end{array} \right.$
 Ergo Rectang. $AEB = CED$.

4. Si neutra rectarum AB, CD per centrum transeat; per intersectionis punctum E duc diametrum GH. Per modò demonstrata Rectang. $AEB = GEH = CED$. Q. E. D.

PROP. XXXVI.



Si extra circulum EBC sumatur punctum aliquod D, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ DA, DB; quarum altera DA circulum secet,

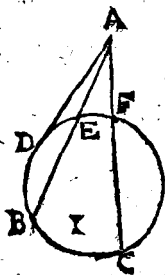
secet, altera verò DB tanget; Quod sub tota secante DA, & exterius inter punctum D, & convexam peripheriam assumptâ DC comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente DB describitur, quadrato.

1. Cas. Si secans AD transeat per centrum E, jungo EB; ^a faciet hæc cum DB rectum angulum; quare $DEq + EBQ (ECq) = EDq$
^b $= AD \times DC + ECq$ ^d ergò $AD \times DC = DBq$. Q. E. D.

2. Cas. Sin AD per centrum non transeat, duc EC, EB, ED; atq; EF perpend. AD, quare ^a bisecta est AC in F.

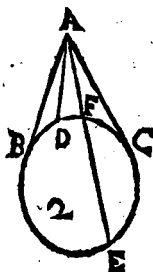
Quoniam igitur $BDQ + EBq = DEq = EFq + FDq = EFq + ADC + FCQ = ADC + CEq (EBq)$; ^c erit $BDq = ADC$. Q. E. D.

Coroll.



1. Hinc, si à puncto quovis A extra circulum assumpto, plurimæ lineæ rectæ AB, AC circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis AB, AC, & partibus externis AE, AF inter se sunt æqualia. Nam si ducatur tangens AD; erit $CAF = ADq = BAE$.

2. Constat



2. Constat etiam duas rectas AB, AC ab eodem puncto A ductas, quæ circumulum tangant, inter se æquales esse.

Nam si ducatur AE secans circumulum; erit ABq^a = EAF^b = ACq.

a 36. 3.
b 36. 3.

3. Perspicuum quoque est ab eodem puncto A extra circumulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, AB, AC quæ circumulum tangant.

Nam si tertia AD tangere dicatur, erit AD^c = AB^e = AC^f. Q. F. N.

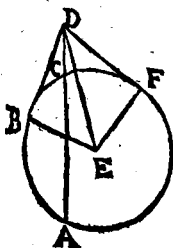
c 2 cor.
d 8. 3.

4. E contrâ constat, si duæ rectæ æquales AB, AC ex puncto quopiam A in convexam peripheriam incidant, & earum una AB circumulum tangat, alteram quoq; circumulum tangere.

Nam si fieri potest, non AC, sed altera AD circumulum tangat. ergo AD^e = AC^f = AB^g. Q. E. A.

e 2 cor.
f hyp.
g 8. 3.

PROP. XXXVII.



Si extra circumulum EBF sumatur punctum D, ab eoque in circumulum cadant duæ rectæ lineæ DA, DB; quarum altera DA circumulum secet, altera DB in eum incidat; sit autem quod sub tota secante DA, & externis inter punctum, & convexam peripheriam assumpta DC, comprehen-

ditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente DB

H

DB

DB describitur quadrato, incidens ipsa DB circulum tanget.

a 17. 3.

b hyp.

c 36. 3.

d 1. ax. & sch. 48. 1.

e 8. 1.

f 12. ax.

g cor. 16. 3.

Ex D^a ducatur tangens DF; atque ex E centro duc ED, EB, EF. Quia DBq^b = ADC^c = DFq, ^d erit DB = DF. Sed EB = EF, & latus ED commune est; ^e ergò ang. EBD = EFD. Sed EFD rectus est, ^f ergò EBD etiam rectus est. ^g ergò DB tangit circulum.

Q. E. D.

Coroll.

h 8. 1.

Minc, ^h ang. EDB = EDF.

LIB. IV.

Definitiones.

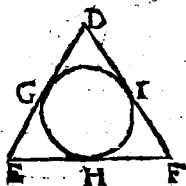
- I.  Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera ejus in qua inscribitur, tangunt.

Sic triangulum DEF est inscriptum in triangulo ABC.



- II. Similiter & figura circa figuram describi dicitur, cum singula ejus, quæ circumscribitur, latera singulos ejus figuræ angulos tetigerint, circa quam illa describitur.

Ita triangulum ABC est descriptum circa triangulum DEF.



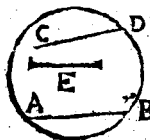
- III. Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

- IV. Figura verò rectilinea circa circumscriptum dicitur, cum singula latera ejus, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

- V. Similiter & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ, cui inscribitur.

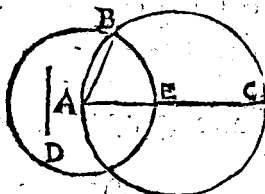
- VI. Circulus autem circa figuram describi dicitur,

dicitur, cūm circuli peripheria singulos tangit
ejus figuræ, quam circumscribit, angulos.



VII. Recta linea in cir-
culo accommodari, seu coa-
ptari dicitur, cūm ejus ex-
trema in circuli peripheria
fuerint; ut recta linea AB.

PROP. I. Probl. 1.



In dato circulo
ABC rectam li-
neam AB accom-
modare, equalem
datæ rectæ lineæ
D, quæ circuli di-
ametro AC non
sit major.

Centro A, spatio $AE = D$ describe circulum
dato circulo occurrentem in B. Erit ducta
 $AB = AE = D$. Q. E. F.

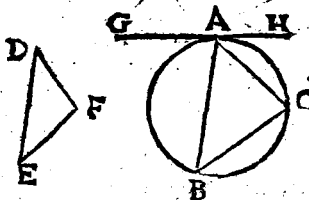
a 3. post.

b 3. 1.

c 15. def. 1.

c constr.

PROP. II. Probl. 2.



In da-
to circu-
lo ABC
triangu-
lū ABC
descri-
bere da-
to tri-
angulo

DEF æquiangulum.

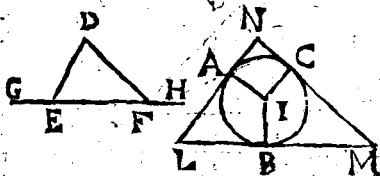
Recta GH circulum datum^a tangat in A.
^b Fac ang. $HAC = E$; ^b & ang. $GAB = F$, &
junge EC. Dico factum. Nam

a 17. 3.

b 23. 1.

Nam ang. $B^c = HAC^d = E$; & ang. $c^{12. 3.}$
 $C^c = GAB^d = F$; ^{c} quare etiam ang. $BAC = D$. $d^{conf.}$
 ergo triang. BAC circulo inscriptum triangulo $c^{32. 1.}$
 DEF æquiangulum est. Q. E. F.

PROP. III. Probl. 3.

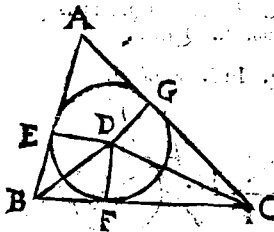


Circa datum circulum $IABC$ triangulum $LN M$
 describere, dato triangulo DEF æquiangulum.

Produc latus EF utrinque. ^{a} Fac ad centrum $a^{23. 1.}$
 I ang. $AIB = DEG$. & ang. $BIC = DFH$.
 deinde in punctis A, B, C circulum ^{b} tangant $b^{17. 3.}$
 tres rectæ LN, LM, MN . Dico factum.

Nam quod coibunt rectæ LN, LM, MN ,
 atque ita triangulum constituent; patet; ^{c} quia $c^{13. ax.}$
 anguli LAI, LBI^d recti sunt, adeoque ducta $d^{18. 3.}$
 AB angulos faciet LAB, LBA duobus rectis mi-
 nores. Quoniam igitur ang. $AIB + L^e = 2$ $c^{Schol. 32. 1.}$
 $Rect. f = DEG + DEF$; & $AIB = DEG$; ^{h} erit $f^{13. 1.}$
 ang. $L = DEF$. Simili argumento ang. $M = DFE$. $g^{conf.}$
 ^{k} ergo etiam ang. $N = D$. ergo triang. $LN M$ $h^{3. ax.}$
 circulo circumscriptum dato EDF est æquian- $k^{32. 1.}$
 gulum. Q. E. F.

PROP. IV. Probl. 4.



In dato trian-
gulo ABC cir-
culum EFG in-
scribere.

Duos angu-
los B, & C² bi-
seca rectis BD,
CD coeuntibus in D. Ex
D³ duc perpen-

diculares DE, DF, DG. circulus centro D per
E descriptus transibit per G, & F, tangetque
tria latera trianguli.

Nam ang. DBE^c = DBF; & ang. DEB^d =
DFB; & latus DB commune est, ^e ergo DE =
DF. Simili argumento DG = DF. circulus igitur
centro D descriptus transit per E, F, G; &
cum anguli ad E, F, G sint recti, tangit omnia
trianguli latera. Q.E.F.

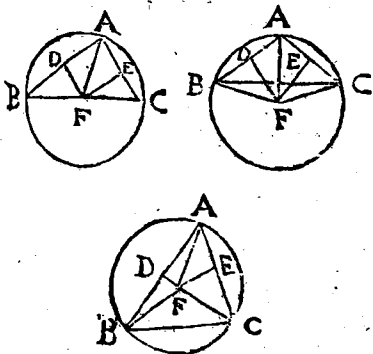
Scholium.

Pap. Herig.

Hinc, cognitis lateribus trianguli, invenientur
eorum segmenta, quae sunt à contactibus circuli in-
scripti. Sic.

Sit AB 12, AC 18, BC 16. Erit AB +
BC = 28. ex quo subduc 18 = AC = AE + FC,
remanet 10 = BE + BF. ergo BE, vel BF = 5.
proinde FC, vel CG = 11. quare GA, vel
AE = 7.

PROP.



Circa datum triangulum ABC circulum FABC describere.

Latera quævis duo BA, AC^a biseca perpendicularibus DF, EF concurrentibus in F. Hoc^{a 10, & 11. 1.} erit centrum circuli.

Nam ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam AD^b=DB; & latus DF commune est; & ang. b^c const. FDA^c=FDB, d^e erit FB=FA. eodem modo c^c const. & FC=FA. ergo circulus centro F per dati tri-^{12. ax.} anguli angulos B, A, C transibit. Q. E. F. d^{4. 1.}

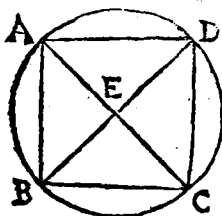
Coroll.

* Hinc, si triangulum fuerit acutangulum, * 31. 3. centrum cadet intra triangulum, si rectangulum, in latus recto angulo oppositum; si denique obtusangulum, extra triangulum.

Schol.

Eâdem methodo describetur circulus, qui transeat per data tria puncta, non in una recta linea existentia.

PROP. VI. Probl. 6.



In dato circulo
EABCD qua-
dratum ABCD
inscribere.

^a Duc diame-
tros AC, BD
se mutuò secan-
tes ad angulos
rectos in centro
E. junge harum

terminos rectis AB, BC, CD, DA. Dico
factum.

^b 26. 3.

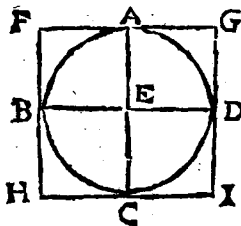
^c 29. 3.

^d 31. 3.

^e 29. def. 1.

Nam quia 4 anguli ad E recti sunt; ^b arcus;
& ^c subtensæ AB, BC, CD, DA pares sunt.
ergò ABCD æquilaterum est; ejusque omnes
anguli in semicirculis, adeoque ^d recti sunt. ^e er-
gò ABCD est quadratum, dato circulo inscri-
ptum. Q. E. F.

PROP. VII. Probl. 7.



Circa datum cir-
culum EABCD
quadratum FHIG
describere.

Duc diametros
AC, BD se mu-
tuò secantes per-
pendiculariter. per
harum extrema ^aduc
tangentes consur-

^a 17. 3.

^b 18. 3.

^c 28. 1.

^d 34. 1.

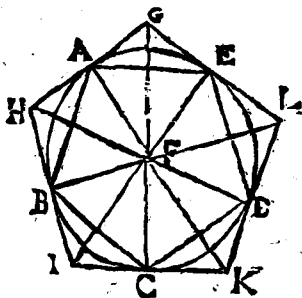
^e 15. def. 1.

^f 29. def. 1.

rentes in F, H, I, G. Dico factum. Nam ob
angulos ad A, & C ^b rectos, ^c erit FG parall.
HI. eodem modo FH parall. GI. ergò FHIG
est parallelogrammum; & quidem rectangulum.
sed & æquilaterum, quia $FG^d = HI^d = BD^e =$
 $CA^d = FH^d = GI.$ quare FHIG est ^f quadra-
tum, dato circulo circumscriptum. Q. E. F.

SCHOL.

PROP. XII. Probl. 12.



Circa datum circulum **FABCDE** pentagonum
aquilaterum & æquiangulum **HIKLG** describere.

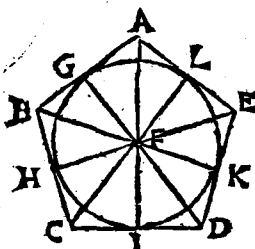
^a Inscribe pentagonum **ABCDE** æquilaterum & æquiangulum; duc è centro rectas **FA, FB, FC, FD, FE**, iisque totidem perpendiculares **GAH, HBI, ICK, KDL, LEG** concurrentes in punctis **H, I, K, L, G**. Dico factum. Nam quia **GA, GE** ex uno puncto **G** tangunt circulum, ^b erit **GA = GE**. ^c ergò ang. **GFA = GFE**. ergò ang. **AFE = 2 GFA**, eodem modo ang. **AFH = HFB**; & proinde ang. **AFB = 2 AFH**. Sed ang. **AFE = AFB**. ^d ergò ang. **GFA = AFH**. sed & ang. **FAH = FAG**; & latus **FA** est commune, ^e ergò **HA = AG = GE = EL**, &c. ^f ergò **HG, GL, LK, KI, IH** latera pentagoni æquantur: sed & anguli etiam, utpote ^g æqualium **AGE, AHF**, &c. dupli; ergò, &c.

Coroll.

Hodem pacto, Si in circulo quæcunque figura æquilatera & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductæ.

ductarum, excitentur lineæ perpendiculares, hæ perpendiculares constituent aliam figuram totidem laterum & angulorum æqualium circulo circumscriptam.

PROP. XIII. Probl. 13.



In dato pentagono æquilatelo, & æquiangulari ABCDE circulum FGHK inscribere.

Duos pentagoni angulos A, & B biseca rectis AF, BF concurrentibus in F.

Ex F duc perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Circulus centro F per G descriptus tanget omnia pentagoni latera.

Duc FC, FD, FE. Quoniam $BA^b = BC$; & latus BF commune est; & ang. $FBA^c = FBC$, erit $AF = FC$; & ang. $FAB^e = FCB$. Sed ang. $FAB^e = \frac{1}{2} BAE^e = \frac{1}{2} BCD$. ergo ang. $FCB = \frac{1}{2} BCD$. eodem modo anguli totales C, D, E omnes bisecti sunt. Quum igitur ang. $FGB^f = FHB$; & ang. $FBH = FBG$, & latus FB sit commune, erit $FG = FH$. similiter omnes FH, FI, FK, FL, FG æquantur. ergo circulus centro F per G descriptus transit per H, I, K, L; ^h tangitque pentagoni latera, cum anguli ad ea puncta sint recti. Q. E. F.

Coroll.

Hinc, si duo anguli proximi figuræ æquilateræ & æquiangularæ bisecentur, & à puncto, in quo occurrunt lineæ angulos bisecantes, ducantur rectæ lineæ:

a 9. 1.

b hyp.

c const.

d 4. 1.

e hyp.

f 12. cor.

g 26. 1.

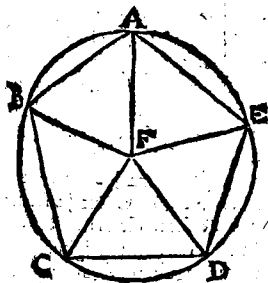
h cor. 16. 3.

lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt bisecti.

Schol.

Eâdem methodo in qualibet figura æquilatere & æquiangula circulus describetur.

PROP. XIV. Prob. 14.



Circa datum Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE circulum FABCD describere.

Duos pentagoni angulos biseca rectis AF, BF concurrentibus in F. Circulus centro F per A descriptus pentagono circumscribitur.

Ducantur enim FC, FD, FE. Bisecti itaq; sunt anguli C, D, E. ergo FA, FB, FC, FD, FE æquantur. ergo circulus centro F descriptus, per A, B, C, D, E, pentagoni angulos transibit. Q. E. F.

Schol.

Eâdem arte circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulus describetur.

I. 2.

PROP.

DB describitur quadrato, incidens ipsa DB circulum tanget.

a 17. 3. Ex D^a ducatur tangens DF; atque ex E centro duc ED, EB, EF. Quia DBq^b = ADC
 b hyp. c = DFq, d erit DB = DF. Sed EB = EF,
 e 36. 3. & latus ED commune est; e ergo ang. EBD
 d 1. ax. & fih. 48. 1. = EFD. Sed EFD rectus est, f ergo EBD
 e 8. 1. etiam rectus est. g ergo DB tangit circulum.
 f 12. ax. g cor. 16. 3. Q. E. D.

Coroll.

h 8. 1. Hinc, h ang. EDB = EDF.

LIB. IV.

Definitiones.

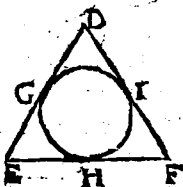
- I.  Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum anguli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera ejus in qua inscribitur, tangunt.

Sic triangulum DEF est inscriptum in triangulo ABC.



- II. Similiter & figura circa figuram describi dicitur, cum singula ejus, quæ circumscribitur, latera singulos ejus figuræ angulos tetigerint, circa quam illa describitur.

Ita triangulum ABC est descriptum circa triangulum DEF.



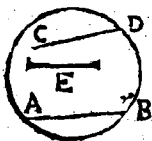
- III. Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

- IV. Figura verò rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera ejus, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

- V. Similiter & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ, cui inscribitur.

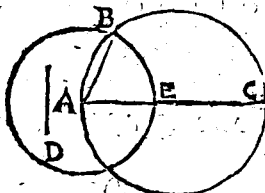
- VI. Circulus autem circa figuram describi dicitur,

dicitur, cūm circuli peripheria singulos tangit
ejus figuræ, quam circumscribit, angulos.



VII. Recta linea in cir-
culo accommodari, seu co-
ptari dicitur, cūm ejus ex-
trema in circuli peripheria
fuerint; ut recta linea AB.

PROP. I. Probl. 1.



In dato circulo
ABC rectam li-
neam AB accom-
modare, æqualem
datæ rectæ lineæ
D, quæ circuli di-
ametro AC non
sit major.

a 3. post.

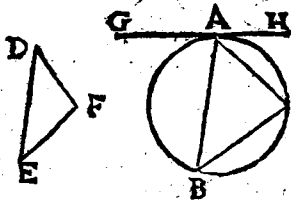
b 3. 1.

c 15. def. 1.

c constr.

Centro A, spatio $AE = D^a$ describe circulum
dato circulo occurrentem in B. Erit ducta
 $AB^b = AE^c = D$. Q. E. F.

PROP. II. Probl. 2.



In da-
to circulo ABC
triangu-
lū ABC
descri-
bere da-
to tri-
angulo

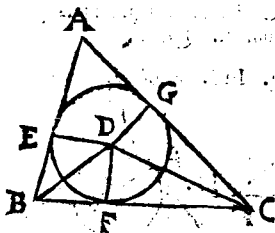
DEF æquiangulum.

Recta GH circulum datum ^a tangat in A.
^b Fac ang. $HAC = E$; ^b & ang. $GAB = F$, &
junge EC. Dico factum. Nam

a 17. 3.

b 23. 1.

PROP. IV. Probl. 4.



In dato trian-
gulo ABC cir-
culum EFG in-
scribere.

Duos angu-
los B, & C^b bi-
seca rectis BD,
CD coeuntibus in D. Ex
D^b duc perpen-

diculares DE, DF, DG. circulus centro D per
E, descriptus transibit per G, & F, tangetque
tria latera trianguli.

Nam ang. DBE^c = DBF; & ang. DEB^d =
DFB; & latus DB commune est, ^e ergo DE =
DF. Simili argumento DG = DF. circulus igitur
centro D descriptus transit per B, F, G, &
cum anguli ad E, F, G sint recti, tangit omnia
trianguli latera. Q.E.F.

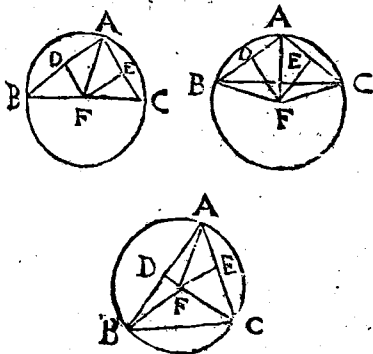
Scholium.

Petr. Herig.

Hinc, cognitis lateribus trianguli, interuentur
eorum segmenta, quae sunt à contactibus circuli in-
scripti. Sic.

Sit AB 12, AC 18, BC 16. Erit AB +
BC = 28. ex quo subduc 18 = AC = AE + FC,
remanet 10 = BE + BF. ergo BE, vel BF = 5.
proinde FC, vel CG = 11. quare GA, vel
AE = 7.

PROP.



Circa datum triangulum ABC circulum FABC describere.

Latera quævis duo BA, AC^a biseca perpendicularibus DF, EF concurrentibus in F. Hoc^{a 10, & 11. 1.} erit centrum circuli.

Nam ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam AD^b=DB; & latus DF commune est; & ang. b^{c onstr.} FDA^c=FDB, d^e erit FB=FA. eodem modo c^{c onstr. &} FC=FA. ergo circulus centro F per dati tri-^{12. a.c.} anguli angulos B, A, C transibit. Q. E. F. d^{d 4. 1.}

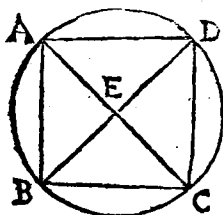
Coroll.

* Hinc, si triangulum fuerit acutangulum, * 31. 3. centrum cadet intra triangulum, si rectangulum, in latus recto angulo oppositum; si denique obtusangulum, extra triangulum.

Schol.

Eâdem methodo describetur circulus, qui transeat per data tria puncta, non in una recta existentia.

PROP. VI. Probl. 6.



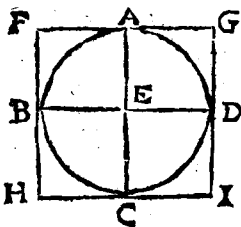
In dato circulo
EABCD qua-
dratum ABCD
inscribere.

^a Duc diame-
tros AC, BD
se mutuò secan-
tes ad angulos
rectos in centro
E. junge harum

terminos rectis AB, BC, CD, DA. Dico
factum.

Nam quia 4 anguli ad E recti sunt; ^b arcus;
& ^c subtensæ AB, BC, CD, DA pares sunt.
ergò ABCD æquilaterum est; ejusque omnes
anguli in semicirculis, adeoque ^d recti sunt. ^e er-
gò ABCD est quadratum, dato circulo inscrip-
tum. Q. E. F.

PROP. VII. Probl. 7.



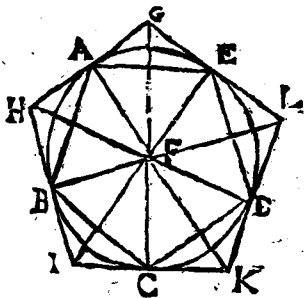
Circa datum cir-
culum EABCD
quadratum FHIG
describere.

Duc diametros
AC, BD se mu-
tuò secantes per-
pendiculariter. per
harum extrema ^aduc
tangentes concur-

rentes in F, H, I, G. Dico factum. Nam ob
angulos ad A, & C ^b rectos, ^c erit FG parall.
HI. eodem modo FH parall. GI. ergò FHIG
est parallelogrammum; & quidem rectangulum.
sed & æquilaterum, quia $FG^d = HI^d = BD^e =$
 $CA^d = FH^d = GI$. quare FHIG est ^f quadra-
tum, dato circulo circumscriptum. Q. E. F.

SCHOL.

PROP. XII. Probl. 12.



Circa datum circulum **FABCDE** pentagonum
aquilaterum & æquiangulum **HIKLG** describere.

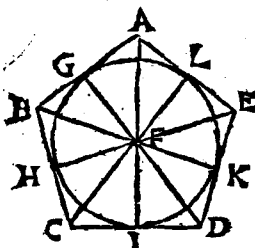
^a Inscribe pentagonum **ABCDE** æquilaterum & æquiangulum; duc è centro rectas **FA, FB, FC, FD, FE**, iisque totidem perpendiculares **GAH, HBI, ICK, KDL, LEG** concurrentes in punctis **H, I, K, L, G**. Dico factum. Nam quia **GA, GE** ex uno puncto **G** tangunt circulum, ^b erit **GA = GE**. ^c ergò ang. **GFA = GFE**. ergò ang. **AFE = 2 GFA**, eodem modo ang. **AFH = HFB**; & proinde ang. **AFB = 2 AFH**. Sed ang. **AFE = AFB**. ^d ergò ang. **GFA = AFH**. sed & ang. **FAH = FAG**; & latus **FA** est commune, ^e ergò **HA = AG**. ^f **GB = EL**, &c. ^g ergò **HG, GL, LK, KI, IH** latera pentagoni æquantur: sed & anguli etiam, utpote ^h æqualium **AGE, AHF**, &c. ⁱ dupli; ergò, &c.

Coroll.

Hodem pacto, Si in circulo quæcunque figura æquilatera & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductæ.

ductarum, excitentur lineæ perpendiculares, hæ perpendiculares constituent aliam figuram totidem laterum & angulorum æqualium circulo circumscriptam.

PROP. XIII. Probl. 13.



In dato pentagono æquilatèro, & æquiangulo ABCDE circulum FGHIK inscribere.

Duos pentagoni angulos A, & B a biseca rectis AF, BF concurrentibus in F.

Ex F duc perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Circulus centro F per G descriptus tanget omnia pentagoni latera.

b hyp.

c constr.

d 4. 1.

e hyp.

f 12. ax.

g 26. 1.

h cor, 16. 3.

Duc FC, FD, FE. Quoniam BA^b = BC; & latus BF commune est; & ang. FBA^c = FBC, erit AF = FC; & ang. FAB = FCB. Sed ang. FAB^e = $\frac{1}{2}$ BAE^e = $\frac{1}{2}$ BCD. ergo ang. FCB = $\frac{1}{2}$ BCD. eodem modo anguli totales C, D, E omnes bisecti sunt. Quum igitur ang. FGB^f = FHB; & ang. FBH = FBG, & latus FB sit commune, erit FG = FH. similiter omnes FH, FI, FK, FL, FG æquantur. ergo circulus centro F per G descriptus transit per H, I, K, L; h tangitque pentagoni latera, cum anguli ad ea puncta sint recti. Q. E. F.

Coroll.

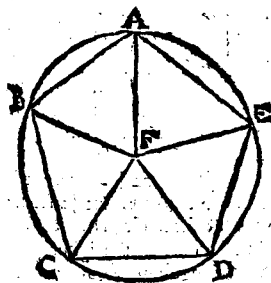
Hinc, si duo anguli proximi figuræ æquilatere & æquiangulæ bisecentur, & à puncto, in quo occurrunt lineæ angulos bisecantes, ducantur rectæ lineæ.

lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt bisecti.

Schol.

Eadem methodo in qualibet figura æquilatere & æquiangula circulus describetur.

PROP. XIV. Prob. 14.



Circa datum Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE circulum FABCD describere.

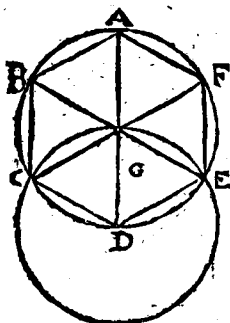
Duos pentagoni angulos biseca rectis AF, BF concurrentibus in F. Circulus centro F per A descriptus pentagono circumscribitur.

Ducantur enim FC, FD, FE. Bisecti itaq; sunt anguli C, D, E. ergo EA, FB, FC, FD, FE æquantur. ergo circulus centro F descriptus, per A, B, C, D, E, pentagoni angulos transibit. Q. E. F.

Schol.

Eadem arte circa quamlibet figuram æquilatram, & æquiangulam circulus describetur.

PROP. XV. Probl. 15.



In dato circulo G^r
ABCDEF hexago-
num & æquilaterum,
& æquiangulum AB-
CDEF inscribere.

Duc diametrum
AD, centro D per
centrum G describe
circulum, qui datum
secet in C, & E, duc
diametros GF, EB.
junge AB, BC, CD,
DE, EF, FA. Dico
factum.

a 33. 1.

b 15. 1.

c cor. 13. 1.

d 26. 3.

e 29. 3.

f 27. 3.

Nam ang. CGD^a = $\frac{1}{2}$ 2 Rect^a = DGE^b =
AGF^b = AGB.^c ergo BGC = $\frac{1}{2}$ 2 Rect. = FGE.
^d ergo arcus^e & subtensæ AB, BC, CD, DE,
EF æquantur. Hexagonum igitur æquilaterum
est: sed & æquiangulum, ^f quia singuli ejus an-
guli arcibus insistant æqualibus. Q. E. F.

Coroll.

1. Hinc latus Hexagoni circulo inscripti semi-
diametro æquale est.

2. Hinc facile triangulum æquilaterum ACE
in circulo describetur.

Schol. Probl.

Andr. Tacq.

a. 1. 1.

Hexagonum ordinatum super datâ rectâ CD isâ
construes. ^a Fac triangulum CGD æquilaterum
super data CD. centro G per C, & D descri-
bo circulum. Is capiet Hexagonum super data
CD.

Br. 6. 7.

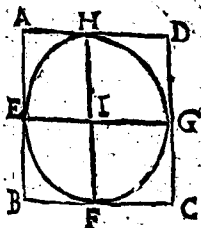
SCHOL.



Quadratum ABCD circulo circumscriptum duplum est quadrati EFGH circulo inscripti.

Nam rectang. HB = 2 HEF. & HD = 2 HGE. per 41. I.

PROP. VLII. Probl. 8.



In dato quadrato ABCD circulum IEFHG inscribere.

Latera quadrati biseca in punctis, H, E, F, G. junge HF, EG sese secantes in I. circulus centro I

per H descriptus quadrato inscribetur.

Nam quia AH, BF^a pares ac. b parallelae a 7. ax. sunt, c erit AB parall. HF parall. DC. eodem b 34. 1. modo AD parall. EG parall. BC. ergo IA, c 33. 1. ID, IB, IC sunt parallelogramma. Ergo AH = AE = HI = EI = IF = IG. Circulus igitur centro I per H descriptus transibit per e 34. 1. H, E, F, G, tangetque quadrati latera, cum anguli ad H, E, F, G sint recti. Q. E. F.

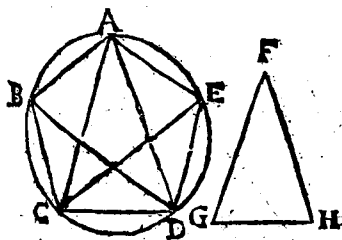
in hoc^b accommoda $BD = AC$, & junge AD . b 1. 4.
erit triang. ABD quod queritur.

Nam duc DC ; & per CD a describe circu- c 5. 4.
lum. Quoniam $AB \times BC = ACq$. d liquet BD d 37. 3.
tangere circumulum ACD , quem secat CD . e er- e 32. 3.
gò ang. $BDC = A$. ergò ang. $BDC + CDA =$ f 2. ax.
 $A + CDA = BCD$. sed $BDC + CDA =$ g 32. 4.
 $BD + CB$. k ergò ang. $BCD = CBD$. k 1. ax.
ergò $DC = DB$ m = AC , n quare ang $CDA =$ l 6. 1.
 $A = BDC$, ergò $ADB = 2. A = ABD$. m conlr. n 5. 1.
Q. E. F.

Coroll.

Cum omnes anguli A, B, D conficiant $\frac{2}{3}$ o 32. 1.
2 Rect. (2 Rect.) liquet A esse $\frac{1}{3}$ 2 Rect.

PROP. XI. Probl. II.



In dato circulo $ABCDE$ pentagonum equilate-
rum & equiangulum $ABCDE$ inscribere.

a Describe triangulum Isosceles FGH , habens a 10. 4.
utrumque angulorum ad basim duplu n anguli
ad verticem. b Huic xquiangulum CAD inscri- b 2. 4.
be circulo. Angulos ad basim ACD , & ADC
c bilingua rectis DB , CE occurrentibus circumfe- c 9. 1.
rentia in B , & E . connecte rectas $CB, BA, AE,$
 ED . Dico factum.

Nam

d 16. 3.

e 29. 3.

f 27. 3.

g 2. 4x.

Nam ex constr. liquet quinque angulos CAD, CDB, BDA, DCE, ECA pares esse; quare arcus^e & subtensæ DC, CB, BA, AE, DE æquantur. Pentagonum igitur æquilaterum est. Est verò etiam æquiangulum, quia ejus anguli BAE, AED &c. insistant arcibus & æqualibus BCDE, ABCD, &c.

Hujus problematis praxis facilior tradetur ad 10, 13.

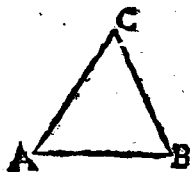
Coroll.

Hinc, angulus pentagoni æquilateri & æquianguli æquatur $\frac{1}{3}$ 2 Rect. vel $\frac{2}{3}$ Rect.

Schol.

Petr. Horig.

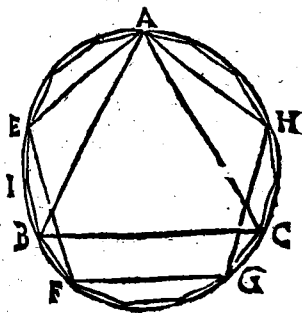
Universaliter figura imparium laterum inscribuntur circulo: beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basim multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt. angulorum; parium verò laterum figura in circulo inscribuntur ope Isoscelium triangulorum, quorum anguli ad basim multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum.



Ut in triangulo Isoscele CAB, si ang A = 3 C = B; AB erit latus Heptagoni. Si A = 4 C; erit AB latus Enneagoni, &c. Sin verò A = $1\frac{1}{2}$ C, erit AB latus quadrati. Et si A = $2\frac{1}{2}$ C subtendet AB sextam partem circumferentiæ; pariterque si A = $3\frac{1}{3}$ C; erit AB latus octagoni, &c.

P. Q. R.

PROP. XVI. Probl. 16.



In dato circulo AEBC quindecagonum æquila-
terum & æquiangulum inscribere.

Dato circulo^a inscribe pentagonum æquila-^a 11. 4.
terum AEFGH; ^b itémque triangulum æqui-^b 3. 4.
lateru AE C. erit BF latus quindecagoni quæsitum.

Nam arcus AB^c est $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{12}$ peripheriæ cu-^c conf. 27. 3.
jus AF est $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{6}$, ergo reliquus BF = $\frac{1}{3}$, pe-
riph. ergo quindecagonum cujus latus BF, æ-
quilaterum est; sed & æquiangulum, ^d cum sin-^d 27. 3.
guli ejus anguli arcubus insistant æqualibus,
quorum unusquisque est $\frac{1}{12}$ totius circumferen-
tiæ, ergo, &c.

Schol.

Circulus di-
viditur Geo-
metricè in
partes

{ 4, 8, 16 &c. per 6, 4, & 9, 1.
3, 6, 12, &c. per 15, 4, & 9, 1.
5, 10, 20, &c. per 11, 4, & 9, 1.
15, 30, 60, &c. per 16, 4 & 9, 1.

Cæterum divisio circumferentiæ in partes datas
etiānum desideratur, quare pro figurarum qua-
rumcunq; ordinarum constructionibus sæpe ad
mechanica artificia recurrendum est, propter
quæ Geometriæ practici consulendi sunt.

d 26. 3.

e 29. 3.

f 27. 3.

g 2. 47.

Nam ex constr. liquet quinque angulos CAD, CDB, BDA, DCE, ECA pares esse; quare arcus & subtensæ DC, CB, BA, AE, DE æquantur. Pentagonum igitur æquilaterum est. Est verò etiam æquiangulum, quia ejus anguli BAE, AED &c. insistant arcibus & æqualibus BCDE, ABCD, &c.

Hujus problematis praxis facilior tradetur ad 10, 13.

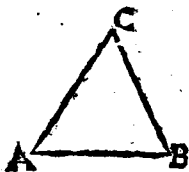
Coroll.

Hinc, angulus pentagoni æquilateri & æqui-
anguli æquatur $\frac{1}{2}$ 2 Rect. vel $\frac{1}{2}$ Rect.

Schol.

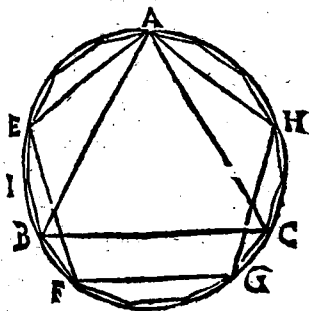
Petr. Herig.

Universaliter figura imparium laterum inscribuntur circulo: beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basim multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt. angulorum; parium verò laterum figura in circulo inscribuntur ope Isoscelium triangulorum, quorum anguli ad basim multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum.



Ut in triangulo Isoscele CAB, si ang A = 3 C = B; AB erit latus Heptagoni. Si A = 4 C; erit AB latus Enneagoni, &c. Sin verò A = $1\frac{1}{2}$ C, erit AB latus quadrati. Et si A = $2\frac{1}{2}$ C subtendet AB sextam partem circumferentiæ; pariterque si A = $3\frac{1}{2}$ C; erit AB latus octagoni, &c.

PROP. XVI. Probl. 16.



In dato circulo ABEC quintodecagonum æquilat-
terum & æquiangulum inscribere.

Dato circulo^a inscribe pentagonum æquila-^a 11. 4.
terum AEF GH; ^b itémque triangulum æqui-^b 3. 4.
lateru AEC. erit BF latus quintodecagoni quæsit.

Nam arcus AB^c est $\frac{1}{3}$, vel $\frac{2}{12}$, peripheriæ cu-^c conf. ^d
jus AF est $\frac{2}{3}$ vel $\frac{8}{12}$, ergò reliquus BF = $\frac{2}{12}$, pe-
riph. ergò quintodecagonum cujus latus BF, æ-
quilaterum est; sed & æquiangulum, ^d cum sin-^d 27. 3.
guli ejus anguli arcubus insistant æqualibus,
quorum unusquisque est $\frac{1}{15}$ totius circumferen-
tiæ, ergò, &c.

Schol.

Circulus di-
viditur Geo-
metricè in
partes

4, 8, 16 &c. per 6, 4, & 9, 1.
3, 6, 12, &c. per 15, 4, & 9, 1.
5, 10, 20, &c. per 11, 4, & 9, 1.
15, 30, 60, &c. per 16, 4 & 9, 1.

Cæterum divisio circumferentiæ in partes datas
etiānum desideratur; quare pro figurarum qua-
rumcunq; ordinarum constructionibus sæpe ad
mechanica artificia recurrendum est, propter
quæ Geometriæ practici consulendi sunt.

LIB. V.

Definitiones.

I.  Ars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.

II. Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem.

III. Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua, quædam secundum quantitatem habitudo.

In omni ratione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur antecedens rationis; ea verò, ad quam alia refertur, consequens rationis dici solet. ut in ratione 6 ad 4; antecedens est 6, & consequens 4.

Nota.

Cujusque rationis quantitas innotescit dividendo antecedentem per consequentem. ut ratio 12 ad 5 effertur per $\frac{12}{5}$ item quantitas rationis A ad B est $\frac{A}{B}$. Quare non raro brevitatæ causâ, quantitates

rationum sic designamus, $\frac{A}{B}$ $\subset$, vel $=$, vel $\supset \frac{C}{D}$;

hec est ratio A ad B major est ratione C ad D, vel ei equalis, vel minor. Quod probe animadvertat, quisquis hac legere volet.

Rationis, sive proportionis species, ac divisiones vide apud interpretes.

IV. Proportio verò est rationum similitudo.

Rectius quæ hîc vertitur proportio, proportionalitas, sive analogia dicitur; nam proportio idem denotat quod ratio, ut plerisque placet.

V. Rationem habere inter se magnitudines dicuntur; quæ possunt multiplicatæ se mutuo superare.

VI. In

E, 12. | A, 4. B. 6. | G, 24. VI. In ea-
F, 30. | C, 10. D, 15. | H, 60. de ratione ma-
gnitudines di-

cuntur esse, prima A ad secundum B; & tertia
C ad quartum D; cum primæ A, & tertiæ C
æquemultiplicia E, & F à secundæ B, & quar-
tæ D æquemultiplicibus G, & H, qualiscunq;
sit hæc multiplicatio, utrumque E, F ab utroq;
G, H vel unà deficient, vel unà æqualia sunt,
vel unà excedunt, si ea sumantur E, G, & F, H
quæ inter se respondent.

Hujus nota est :: ut A. B :: C. D. hoc est
A ad B, & C ad D in eadem sunt ratione. ali-
quando sic scribimus $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ id est, A.B:: C.D.

VII. Eandem autem habentes rationem (A.B::
C.D) proportionales vocentur.

E, 30. | A, 6. B, 4. | G, 28. VIII. Cum
F, 60. | C, 12. D, 9. | H, 6. 3. verò æquemul-
tipliciu, E mul-

tiplex primæ magnitudinis A excesserit G mul-
tiplicem secundæ B; at F multiplex tertiæ C
non excesserit H multiplicem quartæ D; tunc
prima A ad secundam B majorem rationem
habere dicetur; quàm tertia C ad quartam D.

Si $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$, necessarium non est ex hac definitio-
ne, ut E semper excedat G; quum F minor est
quàm H; sed conceditur hoc fieri posse.

IX. Proportio autem in tribus terminis pau-
cissimis consistit. Quorum secunda est instar
duorum.

X. Cum autem tres magnitudines A, B, C
proportionales fuerint prima A ad tertiam C
duplicatam rationem habere dicetur ejus, quam
habet ad secundam B: at quum quatuor magni-
tudines A, B, C, D, proportionales fuerint, prima
A ad quartam D triplicatam rationem habere
dicetur.

dicetur ejus, quam habet ad secundam B; & semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Duplicata ratio exprimitur sic $\frac{A}{C} = \frac{A}{B}$ bis. Hoc est, ratio A ad C duplicata est rationis A ad B. triplicata autem sic $\frac{A}{D} = \frac{A}{B}$ ter. id est, ratio A ad D triplicata est rationis A ad B.

∴ denotat continuè proportionales. ut A, B, C, D; item 2, 6, 18, 64 sunt ∴

XI. Homologæ seu similes ratione magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes verò consequentibus.

Ut si A. B. ∴ C. D; tam A, & C; quam B & D homologæ magnitudines dicuntur.

XII. Alterna ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

ut sit A. B. ∴ C. D. ergò alternè, vel permutando, vel vicissim A. C. ∴ B. D. per 16. §.

In hac definitione, & §. sequentibus imponuntur nomina sex modis argumentandi, quibus mathematici frequenter utuntur, quarum illationum vis innititur propositionibus hujus libri, quæ in explanationibus citantur.

XIII. Inversa ratio, est sumptio consequentis ceu antecedentis, ad antecedentem velut ad consequentem.

ut A. B. ∴ C. D. ergò universè, B. A. ∴ D. C. per cor. 4. §.

XIV. Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsam consequentem.

ut A. B. ∴ C. D. ergò componendo, A + B. B. ∴ C + D. D. per 18. §.

XV. Divisio rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

ut $A. B :: C. D.$ *ergò dividendo,* $A. B. B :: C. D. D.$ *per* 17. 5.

XVI. *Conversio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.*

ut $A. B :: C. D.$ *ergò per conversam rationem,* $A. A. B :: C. C. D.$ *per* cor. 19. 5.

XVII. *Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione; cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit. Vel aliter: sumptio extremorum, per subtractionem mediorum.*

XVIII. *Ordinata proportio est, cum fuerit quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.*

ut si $A. B :: D. E.$ *item* $B. C :: E. F.$ *erit ex æquo* $A. C :: D. F.$ *per* 22. 5.

XIX. *Perturbata autem proportio est; cum tribus positis magnitudinibus, & aliis, quæ sint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.*

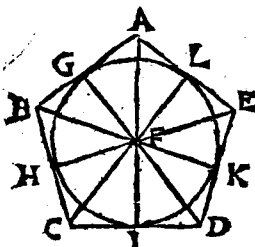
ut si $A. B :: F. G.$ *item* $B. C :: E. F.$ *erit ex æquo perturbatè* $A. C :: E. G.$ *per* 23. 5.

XX. *Quotlibet magnitudinibus ordine positis; proportio primæ ad ultimam componitur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, & ita deinceps, donec extiterit proportio.*

Siat

ductarum, excitentur lineæ perpendiculares, hæc perpendiculares constituent aliam figuram totidem laterum & angulorum æqualium circulo circumscriptam.

PROP. XIII. Probl. 13.



In dato pentagono æquilatelo, & æquiangulo ABCDE circulum FGHK inscribere.

Duos pentagoni angulos A, & B ^a biseca rectis AF, BF concurrentibus in F.

Ex F duc perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Circulus centro F per G descriptus tangit omnia pentagoni latera.

Duc FC, FD, FE. Quoniam BA ^b = BC; & latus BF commune est; & ang. FBA ^c = FBC, ^d erit AF = FC; & ang. FAB = FCB. Sed ang. FAB ^e = $\frac{1}{2}$ BAB ^e = $\frac{1}{2}$ BCD. ergo ang. FCB = $\frac{1}{2}$ BCD. eodem modo anguli totales C, D, E omnes bisecti sunt. Quum igitur ang. FGB ^f = FHB; & ang. FBH = FBG, & latus FB sit commune, ^g erit FG = FH. similiter omnes FH, FI, FK, FL, FG æquantur. ergo circulus centro F per G descriptus transit per H, I, K, L; ^h tangitque pentagoni latera, cum anguli ad ea puncta sint recti. Q. E. F.

Coroll.

Hinc, si duo anguli proximi figuræ æquilatere & æquiangulæ bisecentur, & à puncto, in quo occurrunt lineæ angulos bisecantes, ducantur rectæ lineæ.

a 9. 1.

b hyp.

c constr.

d 4. 1.

e hyp.

f 13. ax.

g 26. 1.

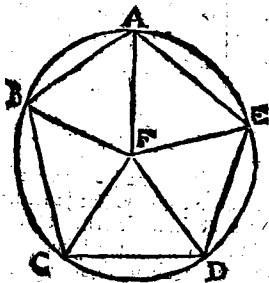
h cor, 16. 3.

lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt bisecti.

Schol.

Eadem methodo in qualibet figura æquilatere & æquiangula circulus describetur.

PROP. XIV. Prob. 14.



Circa datum Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE circulus FABCD describere.

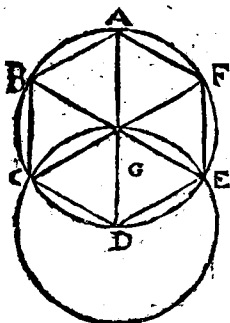
Duos pentagoni angulos biseca rectis AF, BF concurrentibus in F. Circulus centro F per A descriptus pentagono circumscribitur.

Ducantur enim FC, FD, FE. Bisecti itaq; sunt anguli C, D, E. ergo EA, FB, FC, FD æquantur. ergo circulus centro F descriptus, per A, B, C, D, E, pentagoni angulos transibit. Q. E. F.

Schol.

Eadem arte circa quamlibet figuram æquilatram, & æquiangulam circulus describetur.

PROP. XV. Probl. 15.



In dato circulo G^r
ABCDEF hexago-
num & æquilaterum,
& æquiangulum AB-
CDEF inscribere.

Duc diametrum
AD, centro D per
centrum G describe
circulum, qui datum
secet in C, & E, duc
diametros GF, EB.
junge AB, BC, CD,
DE, EF, FA. Dico
factum.

a 32. 1.

b 15. 1.

c cor. 13. 1.

d 26. 3.

e 29. 3.

f 27. 3.

Nam ang. CGD^a = $\frac{1}{2}$ 2 Rect^b = DGE^b =
AGF^b = AGB.^c ergo BGC = $\frac{1}{2}$ 2 Rect. = FGE.
^d ergo arcus^e & subtensæ AB, BC, CD, DE,
EF æquantur. Hexagonum igitur æquilaterum
est: sed & æquiangulum, ^f quia singuli ejus an-
guli arcibus insistant æqualibus. Q. E. F.

Coroll.

1. Hinc latus Hexagoni circulo inscripti semi-
diametro æquale est.

2. Hinc facile triangulum æquilaterum ACE
in circulo describetur.

Schol. Probl.

Andr. Tacq.

a. 1. 1.

Hexagonum ordinatum super datâ rectâ CD ita
construes. ¹ Fac triangulum CGD æquilaterum
super data CD. centro G per C, & D descri-
bo circulum. Is capiet Hexagonum super data
CD.

Baon.

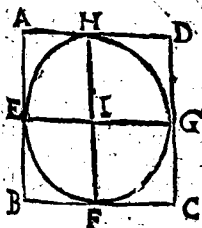
SCHOL.



Quadratum ABCD circulo circumscriptum duplum est quadrati EFGH circulo inscripti.

Nam rectang. HB = 2 HEF. & HD = 2 HGF. per 41. I.

PROP. VLII. Probl. 8.



In dato quadrato ABCD circulum IEFHG inscribere.

Latera quadrati biseca in punctis, H, E, F, G, junge HF, EG, sese secantes in I. circulus centro I

per H descriptus quadrato inscribetur.

Nam quia AH, BF pares ac b parallelæ a 7. ax. sunt, erit AB parall. HF parall. DC. eodem b 34. 1. modo AD parall. EG parall. BC. ergo IA, c 33. 1. ID, IB, IC sunt parallelogramma. Ergo AH = AE = HI = EI = IF = IG. Circulus igitur centro I per H descriptus transibit per e 34. 1. H, E, F, G, tangetque quadrati latera, cum anguli ad H, E, F, G. sint recti. Q. E. F.

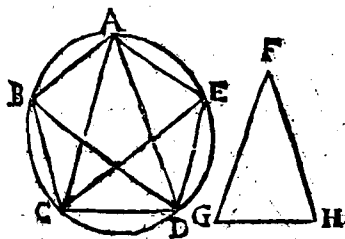
in hoc^b accommoda $BD = AC$, & junga AD . ^b 1. 4.
erit triang. ABD quod quaeritur.

Nam duc DC ; & per CD ^a describe circu- ^c 5. 4.
lum. Quoniam $AB \times BC = AC \times CQ$. ^d liquet BD ^d 37. 3.
tangere circulum ACD , quem secat CD . ^e er- ^e 32. 3.
gò ang. $BDC = A$. ergò ang. $BDC + CDA$ ^f 2. ax.
 $= A + CDA = BCD$. sed $BDC + CDA =$ ^g 32. 1.
 $BD + CB$. ^h 5. 1.
^k ergò ang. $BCD = CBD$. ^k 1. ax.
ergò $DC = DB$. ^m 6. 1.
ⁿ quare ang. $CDA =$ ^m 6. 1.
 $A = BDC$. ergò $ADB = 2. A = ABD$. ⁿ 5. 1.
Q. E. F.

Coroll.

Cum omnes anguli A, B, D conficiant $\frac{2}{3}$ ^o 32. 1.
2 Rect. (2 Rect.) liquet A esse $\frac{1}{3}$ 2 Rect.

PROP. XI. Probl. 11.



In dato circulo $ABCDE$ pentagonum aequilate-
rum & æquiangulum $ABCDE$ inscribere.

^a Describe triangulum isosceles FGH , habens ^a 10. 4.
utrumque angulorum ad basim duplū n anguli
ad verticem. ^b Huic æquiangulum CAD inscri- ^b 2. 4.
be circulo. Angulos ad basim ACD , & ADC
^c biseca rectis DB ; CE occurrentibus circumfe- ^c 9. 1.
rentiæ in B , & E . connecte rectas $CB, BA, AE,$
 ED . Dico factum.

Nam

d 26. 3.

e 29. 3.

f 27. 3.

g 2. ar.

Nam ex constr. liquet quinque angulos CAD, CDB, BDA, DCE, ECA pares esse; quare arcus & subtensæ DC, CB, BA, AE, DE æquantur. Pentagonum igitur æquilaterum est. Est verò etiam æquiangulum, quia ejus anguli BAE, AED &c. insistant arcibus & æqualibus BCDE, ABCD, &c.

Hujus problematis praxis facilior tradetur ad 10, 13.

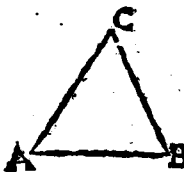
Coroll.

Hinc, angulus pentagoni æquilateri & æquiangularis æquatur $\frac{1}{2}$ 2 Rect. vel $\frac{1}{2}$ Rect.

Schol.

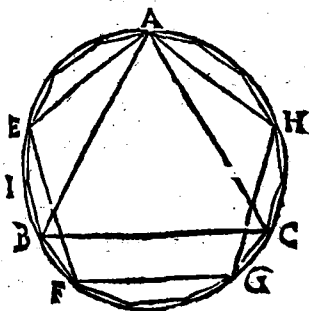
Petr. Herig.

Universaliter figura imparium laterum inscribitur circulo: beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basim multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt. angulorum; parium verò laterum figura in circulo inscribuntur ope Isoscelium triangulorum, quorum anguli ad basim multiplices sesquialterè sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum.



Ut in triangulo Isoscele CAB, si ang A = $\frac{1}{3}$ C = B; AB erit latus Heptagoni. Si A = $\frac{1}{4}$ C; erit AB latus Enneagoni, &c. Sin verò A = $1\frac{1}{3}$ C, erit AB latus quadrati. Et si A = $2\frac{1}{2}$ C subtendet AB sextam partem circumferentiæ; pariterque si A = $3\frac{1}{4}$ C; erit AB latus octagoni, &c.

PROP. XVI. Probl. 16.



In dato circulo AEBC quindecagonum æquila-
terum & æquiangulum inscribere.

Dato circulo^a inscribe pentagonum æquila-^a 11. 4.
terum AEFGH; ^b itémque triangulum æqui-^b 3. 4.
lateru AEBC. erit BF latus quindecagoni quaesiti.

Nam arcus AB^c est $\frac{1}{3}$, vel $\frac{2}{3}$, peripheriæ cu-^c conf. ^d
jus AF est $\frac{2}{3}$ vel $\frac{4}{3}$, ergo reliquus BF = $\frac{1}{3}$, pe-
riph. ergo quindecagonum cujus latus BF, æ-
quilaterum est; sed & æquiangulum, ^d cum sin-^d 27. 3.
guli ejus anguli arcubus insistant æqualibus,
quorum unusquisque est $\frac{1}{15}$ totius circumferen-
tiæ, ergo, &c.

Schol.

Circulus di-
viditur Geo-
metricè in
partes

$\left\{ \begin{array}{l} 4, 8, 16 \text{ \&c. per } 6, 4, \text{ \& } 9, 1. \\ 3, 6, 12, \text{ \&c. per } 15, 4, \text{ \& } 9, 1. \\ 5, 10, 20, \text{ \&c. per } 11, 4, \text{ \& } 9, 1. \\ 15, 30, 60, \text{ \&c. per } 16, 4 \text{ \& } 9, 1. \end{array} \right.$

Cæterum divisio circumferentiæ in partes datas
etiânum desideratur; quare pro figurarum qua-
rumcunq; ordinarum constructionibus sæpe ad
mechanica artificia recurrendum est, propter
quæ Geometriæ practici consulendi sunt.

LIB. V.

Definitiones.

I.  Ars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.

II. Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem.

III. Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua, quædam secundum quantitatem habitudo.

In omni ratione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur antecedens rationis; ea verò, ad quam alia refertur, consequens rationis dici solet. ut in ratione 6 ad 4; antecedens est 6, & consequens 4.

Nota,

Cujusque rationis quantitas innotescit dividendo antecedentem per consequentem. ut ratio 12 ad 5 effertur per $\frac{12}{5}$ item quantitas rationis A ad B est

$\frac{A}{B}$. *Quare non raro brevitatis causâ, quantitates rationum sic designamus, $\frac{A}{B}$ $\sqsubset$, vel $\sqsupset$, vel $\sqsupset \frac{C}{D}$;*

hec est ratio A ad B major est ratione C ad D, vel ei equalis, vel minor. Quod probe animadvertat, quisquis hac legere volet.

Rationis, siue proportionis species, ac divisiones vide apud interpretes.

IV. Proportio verò est rationum similitudo.

Reblius quæ hîc vertitur proportio, proportionalitas, siue analogia dicitur; nam proportio idem denotat quod ratio, ut plerisque placet.

V. Rationem habere inter se magnitudines dicuntur; quæ possunt multiplicatæ se mutuo superare.

VI. In

E, 12. | A, 4. B. 6. | G, 24. VI. In ea-
F, 30. | C, 10. D, 15. | H, 60. de ratione ma-
gnitudines di-

cuntur esse, prima A ad secundum B; & tertia
C ad quartum D; cum primæ A, & tertiæ C
æquemultiplicia E, & F à secundæ B, & quar-
tæ D æquemultiplicibus G, & H, qualiscunq;
sit hæc multiplicatio, utrumque E, F ab utroq;
G, H vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt,
vel unà excedunt, si ea sumantur E, G, & F, H
quæ inter se respondent.

Hujus nota est :: ut A. B :: C. D. hoc est
A ad B, & C ad D in eadem sunt ratione. ali-
quando sic scribimus $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ id est, A.B:: C.D.

VII Eandem autem habentes rationem (A.B::
C.D) proportionales vocentur.

E, 30. | A, 6. B, 4. | G, 28. VIII. Cum
F, 60. | C, 12. D, 9. | H, 6.3. verò æquemul-
tipliciu, E mul-

tiplex primæ magnitudinis A excesserit G mul-
tiplicem secundæ B; at F multiplex tertiæ C
non excesserit H multiplicem quartæ D; tunc
prima A ad secundam B majorem rationem
habere dicetur; quam tertia C ad quartam D.

Si $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$, necessarium non est ex hac definitio-
ne, ut E semper excedat G; quam F. minor est
quam H; sed conceditur hoc fieri posse.

IX. Proportio autem in tribus terminis pau-
cissimis consistit. Quorum secunda est instar
duorum.

X. Cum autem tres magnitudines A, B, C
proportionales fuerint prima A ad tertiam C
duplicatam rationem habere dicetur ejus, quam
habet ad secundam B: at quum quatuor magni-
tudines A, B, C, D, proportionales fuerint, prima
A ad quartam D triplicatam rationem habere
dicetur.

dicetur ejus, quam habet ad secundam B; & semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Duplicata ratio exprimitur sic $\frac{A}{C} = \frac{A}{B}$ bis. Hoc est, ratio A ad C duplicata est rationis A ad B. triplicata autem sic $\frac{A}{D} = \frac{A}{B}$ ter. id est, ratio A ad D triplicata est rationis A ad B.

∴ denotat continuè proportionales. ut A, B, C, D; item 2, 6, 18, 64 sunt ∴

XI. Homologæ seu similes ratione magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes verò consequentibus.

Ut si A. B :: C. D; tam A, & C; quam B & D homologæ magnitudines dicuntur.

XII. Alterna ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

ut sit A. B :: C. D. ergò alternè, vel permutando, vel vicissim A. C :: B. D. per 16. 5.

In hac definitione, & 5. sequentibus imponuntur nomina sex modis argumentandi, quibus mathematici frequenter utuntur, quarum illationum vis innititur propositionibus hujus libri, quæ in explanationibus citantur.

XIII. Inversa ratio, est sumptio consequentis ceu antecedentis, ad antecedentem velut ad consequentem.

Ut A. B :: C. D. ergò universè, B. A :: D. C. per cor. 4. 5.

XIV. Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsam consequentem.

ut A. B :: C. D. ergò componendo, A+B. B :: C+D. D. per 18. 5.

XV. Divisio rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

ut

ut $A. B :: C. D.$ ergò dividendo, $A - B. B :: C - D. D.$ per 17. §.

XVI. Conversio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

ut $A. B :: C. D.$ ergò per conversam rationem, $A. A - B :: C. C - D.$ per cor. 19. §.

XVII. Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione; cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit. Vel aliter: sumptio extremorum, per subtractionem mediorum.

XVIII. Ordinata proportio est, cum fuerit quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

ut si $A. B :: D. E.$ item $B. C :: E. F.$ erit ex æquo $A. C :: D. F.$ per 22. §.

XIX. Perturbata autem proportio est; cum tribus positis magnitudinibus, & aliis, quæ sint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

ut si $A. B :: F. G.$ item $B. C :: E. F.$ erit ex æquo perturbate $A. C :: E. G.$ per 23. §.

XX. Quotlibet magnitudinibus ordine positis; proportio primæ ad ultimam componitur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertię ad quartam, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

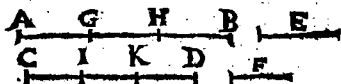
Siat

Sint quotcunque A, B, C, D ; ex hac def.
 $\frac{A}{D} = \frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{D}$.

Axioma.

Æquemultiples eidem multiplici sunt quoque inter se æquemultiples.

PROP. I.



Si sint quotcunque magnitudines AB, CD quotcunque magnitudinum E, F æqualium numero, singule singularum, æquemultiples; quàm multiplex est unus E una magnitudo AB , tam multiplices erunt & omnes $AB+CD$ omnium $E+F$.

Sint AG, GH, HB partes quantitatis AB ipsi E æquales. item CI, IK, KD partes quantitatis CD ipsi F pates. Harum numerus illarum numero æqualis ponitur. Quum igitur $AG+CI=E+F$; ² & $GH+IK=E+F$; ² & $HB+KD=E+F$, liquet $AB+CD$ æquè multoties continere $E+F$, ac una AB unam E continet. Q. E. D.

a 2. ax.

PROP.

PROP. II.

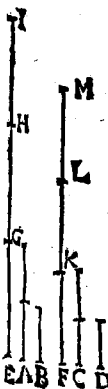
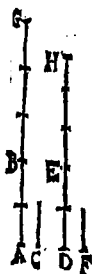
Si prima AB secunda C aequè fuerit multiplex, atque tertia DE quarta F; fuerit autem & quinta BG secunda C aequè multiplex, atque sexta EH quarta F, erit & composita prima cum quinta (AG) secunda C aequè multiplex, atque tertia cum sexta (DH) quarta F.

Numerus partium in AB ipsi C æqualium æqualis ponitur numero partium in DE ipsi F æqualium. Item numerus partium in BG ponitur æqualis numero partium in EH. ergo numerus partium in AB+BG æ 2. ax. æquatur numero partium in DE+EH. hoc est tota AG æquemultiplex est ipsius C, atque tota GH ipsius F. Q. E. D.

PROP. III.

Sit prima A secunda B æquemultiplex, atque tertia C quarta D; sumantur autem EI FM æquemultiplices prima & tertia; erit & ex æquo, sumptarum utraque utriusque æquemultiplex: altera quidem EI secunda B, altera autem FM quarta D.

Sint EG, GH, HI partes multiplicis EI ipsi A pares; item FK, KL, LM partes multiplicis FM ipsi C æquales. Harum numerus illarum numero æquatur. porro A, id est EG, vel GH, vel GI ipsius B ponitur æque multiplex atque C, vel FK&c. ipsius D. ergo



b 2. 5.

c 2. 5.

b ergò EG + GH æquemultiplex est secundæ B, atque FK + KL quartæ D. c Simili argumento EI (EH + HI) tam multiplex est ipsius B, quàm FM (FL + LN) ipsius D. Q. E. D.

PROP. IIII.



Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, & tertia C ad quartam D; etiam E & F æquemultiplices prima A, & tertia C, ad G, & H æquemultiplices secundæ B, & quartæ D, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint. (E. G :: F. H.)

Sume I, & K ipsarum E, & F; item L & M ipsarum G, & H æquemultiplices. a Erit I ipsius A æquemultiplex atque K ipsius C; a pariterque L tam multiplex ipsius B quàm M ipsius D. Itaque cum sit A. B^b :: C. D; juxta 6 def. si I □, =, ⊃ L consequenter pari modo K □, =, ⊃ M, ergò cum I, & K ipsarum E, & F sumptæ sint æquemulti-

plices, atque L, & M ipsarum G & H; erit juxta 7. def. E. G :: F. H. Q. E. D.

Coroll.

Hinc demonstrari solet inversa ratio.

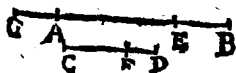
Nam quoniam A. B :: C. D, si E □, =, ⊃

c o. 6. def. 5. G, erit similiter F □, =, ⊃ H. ergò liquet, quòd

quod si $G \square = \square E$, esse $H \square = \square E$.
ergo $B. A :: D. C. Q. E. D.$

d 6. def. 5.

PROP. V.



Si magnitudo
AB magnitudi-
nis CD aequè

fuert multiplex, atq; ablata AE ablata CF; etiam
reliqua EB reliqua FD ita multiplex erit, ut tota
AB totius CD.

Accipe aliam quandam GA, quæ reliquæ FD
ita sit multiplex, atque tota AB totius CD, vel
ablata AE ablatæ CF. ^a ergo tota $GA + AE$ ^a 1. 5.
totius CF; + FD æquemultiplex est, ac una AB
unius CF. hoc est, ac AB ipsius CD. ^b ergo $GE =$ ^b 6. ax.
AB. ^c proinde, ablatâ communi AE, manet GA ^c 3. ax.
 $= EB$. ergo, &c.

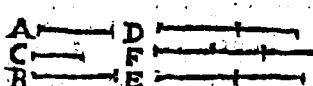
PROP. VI.



Si duæ magnitudines AB CD
duarum magnitudinum E, F sint æ-
quemultiplices; & detractæ quadam
sint, AG & CH, earundem E, & F
æquemultiplices, & reliquæ GB,
HD eisdem E, F aut æquales sunt,
aut æquè ipsarum multiplices.

Nam quia numerus partium in
AB ipsi E æqualium ponitur æ-
qualis numero partium in CD ipsi
F æqualium. Item numerus par-
tium in AG æqualis numero par-
tium in CH. Si hinc AG, indè
CH detrahatur, ^a remanet numerus partium in ^a 3. ax.
reliqua GB æqualis numero partium in HD.
ergo si GB sit E semel, erit HD etiam C semel.
Si GB sit E aliquoties, erit HD etiam C aliquo-
ties accepta. Q. E. D.

PROP. VII.

Aequales

 A & B ad eandem C eandem habent rationem, & eadem C ad æquales A & B.

Sumantur D, & E æqualium A, & B æquemultiplices, & F ituncque multiplex ipsius C, ^a erit $D = E$. quare si $D \sqsubset, =, \supset F$, erit similiter $E \sqsubset, =, \supset F$. ^b ergò A. C :: B. C. inverse igitur C. A :: C. B. Q. E. D.

^a 6. ax.

^b 6. def. 5.

^c cor. 4 5.

Schol.

Si loco multiplicis F sumantur duæ æquemultiplices, eodem modo ostendetur æquales magnitudines ad alias inter se æquales eandem habere rationem.

PROP. VIII.

Inæqualium magnitudinum AB, C, major AB ad eandem D maiorem rationem habet, quàm minor C. Et eadem D ad minorem C maiorem rationem habet, quàm ad maiorem AB.

Ex maiori AB aufer AE = C. sumatur HG tam multiplex ipsius AE, vel C, quàm GF reliquæ FB. Multiplicetur D, donec ejus multiplex IK major evadat. quàm HG, sed minor quàm HF.

Quoniam HG ipsius AE ^a tam multiplex est, quàm GF ipsius EB, ^b erit tota HE totius AB æquemultiplex, atque una HG unius AE, vel C. ergò cum $HF \sqsubset IK$ (quæ multiplex est ipsius D) sed $HG \supset IK$, ^c erit AB C
 $D \sqsubset D$ Q. E. D.

^a const.

^b 1. 5.

^c 8. def. 5.



Rursus

Rurſus quia $IK \sqsubset HG$, at $IK \supset HE$ (ut prius dictum) ^d erit $D \sqsubset \frac{D}{\bar{C}} \bar{AB} Q.E.D.$

PROP. IX.

Quae ad eandem eandem habent rationem, aequales sunt inter ſe. Et ad quas eadem eandem habet rationem, eae quoque sunt inter ſe aequales.

1. Hyp. Sit $A.C :: B.C.$ dico $A = B$.
Nam ſit $A \sqsubset$, vel $\supset B$, ^a erit ideo a 8. 5.
 $\frac{A}{\bar{C}} \sqsubset$, vel $\supset \frac{B}{\bar{C}}$ contra Hyp.

2. Hyp. Sit $C.B :: C.A.$ dico $A = B$. nam
ſit $A \sqsubset B$. ^b ergo $\frac{C}{\bar{B}} \sqsubset \frac{C}{\bar{A}}$ contra Hyp. b 8. 5.

PROP. X.

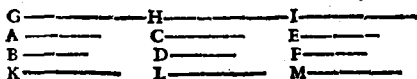
Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quae majorem rationem habet, illa major est: ad quam verò eadem majorem rationem habet, illa minor est.

1. Hyp. Sit $\frac{A}{\bar{C}} \sqsubset \frac{B}{\bar{C}}$. Dico $A \sqsubset B$. Nam
ſi dicatur $A = B$, ^a erit $A.C :: B.C.$ contra a 7. 5.
Hyp. Sin $A \supset B$, ^b erit $\frac{A}{\bar{C}} \supset \frac{B}{\bar{C}}$ etiam contra b 8. 5.
(Hyp.)

2. Hyp. Sit $\frac{C}{\bar{B}} \sqsubset \frac{C}{\bar{A}}$. Dico $B \supset A$. Nam dic
 $B = A$. ^c ergo $C.B :: C.A.$ contra Hyp. vel ^c 7. 5.
dic $B \sqsubset A$. ^d ergo $\frac{C}{\bar{A}} \sqsubset \frac{C}{\bar{B}}$ etiam contra Hyp. d 8. 5.



PROP. XI.



Quæ eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem.

Sit $A.B :: E.F$. item $C.D :: E.F$. dico $A.B :: C.D$. sume ipsarum A, C, E æquemultiples, G, H, I; atque ipsarum B, D, F æquemultiples K, L, M. Et quoniam $A.B :: E.F$ si $G \square, =, \rceil, K$. ^a erit pari modo $I \square, =, \rceil, M$, pariterque quia $E.F :: C.D$. Si $I \square, =, \rceil, M$, ^b erit H similiter $\square, =, \rceil, L$. ergo si $G \square, =, \rceil, K$, erit similiter $H \square, =, \rceil, L$. ^c quare $A.B :: C.D$. Q.E.D.

^a hyp.

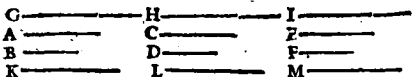
^b 6. def. 5.

^c 6. def. 5.

Schol.

Quæ eisdem rationibus sunt eadem rationes, sunt quoque inter se eadem.

PROP. XII.



Si sint magnitudines quocunque A, & B; C & D; E, & F proportionales; quemadmodum se habuerit una antecedentium A ad unam consequentium B, ita se habebunt omnes antecedentes, A, C, E ad omnes consequentes. B, D, F.

Sume antecedentium æquemultiples G, H, I; & consequentium K, L, M. Quoniam quam multiplex est una G unius A, ^a tam multiplices sunt omnes G, H, I omnium A, C, E; pariterque quam multiplex est una K unius B, ^a tam multiplices sunt omnes K, L, M omnium B, D, F; Si $G \square, =, \rceil, K$, erit similiter

^a 1. 5.

G

$G + H + I \sqsubset, =, \supset K + L + M.$ ^b quare b 6. def. 5.
 $A.B :: A + C + E. B + D + F. Q. B. D.$

Coroll.

Hinc, si similia proportionalia similibus proportionalibus addantur, tota erunt proportionalia.

PROP. XIII.

G _____	H _____	I _____
A _____	C _____	E _____
B _____	D _____	F _____
K _____	L _____	M _____

Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, quàm tertia C ad quartam D; tertia vero C ad quartam D maiorem habuerit rationem; quàm quinta E ad sextam F; prima quoque A ad secundam B maiorem rationem habebit, quàm quinta E ad sextam F.

Sume ipsarum A, C, E æquemultiplices G, H, I: ipsarumque B, D, F æquemultiplices K, L, M. Quia $A.B :: C.D$; Si $H \sqsubset L$, ^a erit a 6. def. 5. $G \sqsubset K$. Sed quia $\frac{C}{D} \sqsubset \frac{E}{F}$, ^b fieri potest ut sit b 8. def. 5. $H \sqsubset L$, & I non $\sqsubset M$. ergò fieri potest ut $G \sqsubset K$, & I non $\sqsubset M$. ^c ergò $\frac{A}{B} \sqsubset \frac{E}{F}$. Q. B. D. c 8. def. 5.

SCHOL.

Quòd si $\frac{C}{D} \supset \frac{E}{F}$, erit quoq; $\frac{A}{B} \supset \frac{E}{F}$. Item si $\frac{A}{B} \sqsubset \frac{C}{D} \sqsubset \frac{E}{F}$, erit $\frac{A}{B} \sqsubset \frac{E}{F}$. & si $\frac{A}{B} \supset \frac{C}{D} \supset \frac{E}{F}$ erit $\frac{A}{B} \supset \frac{E}{F}$.

PROP. XIV.

Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, quàm tertia C ad quartam D; prima verò A, quàm tertia C major fuerit, erit & secunda B major quàm quarta D. Quòd si prima A fuerit æqualis tertia C, erit & secunda B æqualis quarta D; si verò A minor, & B minor erit.

Sit $A \sqsubset C$. ^a ergò $\frac{A}{B} \sqsubset \frac{C}{B}$. ^b sed

$A \sqsubset C$ $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. ^c ergò $\frac{C}{D} \sqsubset \frac{C}{B}$. ^d ergò $B \sqsubset D$.

Simili argumento si $A \sqsupset C$, ^d erit $B \sqsupset D$. Sin ponatur $A = C$; ergò $C.B :: A.B :: C.D$. ^e ergò $B = D$. Quæ E. D.

SCHOL.

A fortiori, si $\frac{A}{B} \sqsupset \frac{C}{D}$, atque $A \sqsubset C$, erit $B \sqsubset D$. Item si $A = B$, erit $C = D$. Et si $A \sqsubset$, vel $\sqsupset B$, erit pariter $C \sqsubset$, vel $\sqsupset D$.

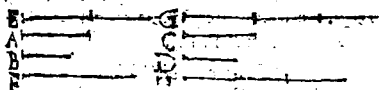
PROP. XV.

Partes E & F compariter multiplicibus AB, & DE in eadem sunt ratione; si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur. ($AB.DE :: C.F.$).

Sint AG, GB partes multiplicis AB ipsi C æquales: item DH, HE partes multiplicis DE ipsi F æquales. ^a Harum numerus illarum numero æquatur. ergò quum ^b AG. C :: DH. F; ^b atq; GB. C :: HE. F. ^c erit AG + GB (AB). DH + HE (DE) :: C. F. Q. E. D.

PROP.

PROP. XVI.



Si quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales fuerint; & vicissim proportionales erunt. (A. C :: B. D.)

Accipe E, & F æquemultiples ipsarum A, & B. ipsarumque C, & D. æquemultiples G, & H. Itaque E. E^a :: A. B. ^b :: C. D^a :: G. H. Quare si E = G, erit similiter F = H. ergo A. C :: B. D. Q. E. D.

a 5. 5.
b hyp
c 11. 5. &
14. 5.
d 6. d. f. 5.

SCHOL.

Alterna ratio locum tantum habet, quando quantitates ejusdem sunt generis. Nam Heterogeneæ quantitates non comparantur.

PROP. XVII.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint (AB. CB :: DE. FE) hæc quoque divisæ proportionales erunt. (AC. CB :: DF. FE.)

Accipe GH, HL, IK, KM ordine æquemultiples ipsarum AC, CB, DE, FE, item LN, MO æquemultiples ipsarum CB, FE. Totæ GL totius AB, ^a tam multiplex est, quàm una ^a 1. 5. GH unius AC, ^b id est quàm ^b const. IK ipsius DE; ^c hoc est quàm ^c 1. 5. tota IM. totius DE: Item HN (HL + LN) ipsius CB ^d æque- d 2. 5. multiplex est, ac KO (KM + MO) ipsius FE. Quum igitur per hyp. AB. BC :: DE. EF. Si GL = HN, etiam si- militer

- e 6. def. 5. militer^e erit $IM \sqsubset, =, \supset KO$. aufer hinc inde æquales HL, KM , si reliqua $GH \sqsubset, =, \supset LN$,^f erit similiter $IK \sqsubset, =, \supset MO$,^g aut de $AC. CB :: DF. FE. Q. E. D.$
- f 5. ex.
- g 6. def. 5.

PROP. XVIII.

Si divisæ magnitudines sint proportionales (AB. BC :: DE. EF), hæ quoque compositæ proportionales erunt (AC. CB :: DF. FE.).

Nam si fieri potest, sit $AB. CB :: DF. FG \supset FE$.^a ergo erit divisim $AB. BC :: DG. GF$.^b hoc est $DG. GF :: DE. EF$. ergo cum $DG \sqsubset DE$.^c erit $GF \sqsubset EF$. Q. E. A. Simile absurdum sequetur, si dicatur $AB. CB :: DE. GF \sqsubset FE$.

PROP. XIX.

Si quemadmodum totum AB ad totum DE ita ablatum AC subtraherit ad ablatum DF; & reliquum CB ad reliquum FE, ut totum AB ad totum DE, se habebit.

Quoniam^a $AB. DE :: AC. DF$,^b erit permutando $AB. AC :: DE. DF$.^c ergo divisim $AC. CB :: DF. FE$. quare rursus^b permutando $AC. DF :: CB. FE$; ^dHoc est $AB. DE :: CB. FE. Q. E. D.$

Coroll.

1. Hinc, si similia proportionalia similibus proportionalibus subducantur, residua erunt proportionalia.

2. Hinc, demonstrabitur conversæ ratio.

Sit $AB. CB :: DE. FE$. Dico $AB. AC :: DE. DF$. Nam^a permutando $AB. DE :: CB. FE$.^b ergo $AB. DE :: AC. DF$. quare iterum permutando, $AB. AC :: DE. DF. Q. E. D.$

PROP.

a 17. 5.

b hyp. & 11. 5.

c 14. 5.

d 9. ex.

a hyp.

b 16. 5.

c 17. 5.

d hyp. & 11. 5.

11. 5.

a 16. 5.

b 19. 5.

PROP. XX.



Si sint tres magnitudines A, B, C;
 & alie D, E, F ipsis aequales nu-
 mero, quæ binæ & in eadem ratio-
 ne sumantur (A. B :: D. E; atque
 B. C :: E. F); ex aquo autem
 prima A major fuerit, quàm tertia
 C; erit & quarta D major quàm
 sexta F. Quòd si prima A tertiæ
 C fuerit æqualis; erit & quarta
 D æqualis sextæ F. Sin illa mi-
 nor, hæc quoque minor erit.

1. Hyp. Si $A \sqsubset C$. Quoniam $E : F :: B : C$. a hyp.
 erit inversè $F : E :: C : B$. c Sed $\frac{C}{B} \supset \frac{A}{B}$ d ergò b cor 4. 5.
 $\frac{F}{E} \supset \frac{A}{B}$ vel $\frac{D}{B}$. e ergò $D \sqsubset F$. Q. E. D. c hyp. &
 8. 5. d schol. 1. c
 2. Hyp. Simili argumento, Si $A \supset C$, osten- c 10. 5. E
 detur $D \supset F$.
 3. Hyp. Si $A = C$. Quoniam $F : E :: C : B ::$ f 7. 5.
 $A : B :: D : E$. & erit $D = F$. Q. E. D. g 11. 5. e
 9. 9.

PROP. XXI.



Si sint tres magnitudines A, B, C;
 & alie D, E, F ipsis aequales nu-
 mero, quæ binæ & in eadem ratio-
 ne sumantur, fueritque perturbata
 eorum proportio, (A. B :: E. F.
 atque B. C :: D. E.); ex aquo
 autem prima A quàm tertia C ma-
 jor fuerit; erit & quarta D quàm
 sexta F major; Quòd si prima
 fuerit tertiæ æqualis, erit & quarta
 æqualis sextæ, sin illa minor, hæc quoque minor erit.

1. Hyp. $A \sqsubset C$. Quoniam $D : E :: B : C$, a hyp.
 invertendo erit $E : D :: C : B$. atqui $\frac{C}{B} \supset \frac{A}{B}$ b 8. 5.
 K: 5 ergò

e schol. 13. 5. *c* ergò $\frac{B}{D} = \frac{A}{B}$, hoc est $\frac{B}{F}$. *d* ergò $D = F$.
d 10. 5.

Q. E. D.

2. Hyp. Similiter, Si $A = C$, erit $D = F$.

e 7. 5.

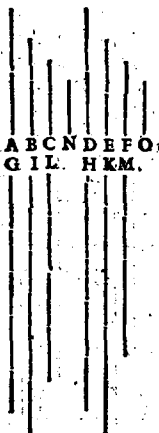
3. Hyp. Si $A = C$. Quoniam $E.D :: C.B ::$

f hyp.

$A.B :: E.F$, & erit $D = F$. Q. E. D.

e 9. 5.

PROP. XXII.



Si sint quocunque magnitudines A, B, C; & alia ipsis aequales numero D, E, F, quibina & in eadem ratione sumantur (A.B :: D.E: & B.C :: E.F); & ex aequalitate in eadem ratione erunt (A.C :: D.F.).

Accipe G, H ipsarum A, D; & I, K ipsarum B, E; item L, M ipsarum E, F æquemultiplices.

Quoniam $A.B :: D.E$,
^b erit $G.I :: H.K$. eodem modo, erit, $I.L :: K.M$. ergò si $G = L$, ^c erit $H = M$, ^d ergò $A.C :: D.F$. Eodem pacto si ulterius $C.N :: F.O$; erit ex

æquali $A.N :: D.O$. Q. E. D.

a hyp.

b 4. 5.

c 20. 5.

d 6. def. 5.

PROP.

PROP. XXIII.

Si sint tres magnitudines A, B, C; aliaque D, E, F ipsis aequales numero, quae bina in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio. (A.B :: E.F. & B.C :: D.E.) etiam ex aequalitate in eadem ratione erunt.

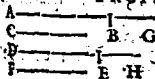
ABCDEF
GHKILM

Sume G, H, I ipsarum A, B, D; item K, L, M ipsarum C, E, F æquemultiplices. erit G.H :: A.B^a :: E.F^a :: L.M. porro quia^a 15. 5.
^b B.C :: D.E. erit^c H.K :: I.L. ^b hyp. ^c 4. 5.
ergo G, H, K; & I, L, M habent se juxta 21. 5. quare si G =, K erit similiter I =, M.
^d proinde A.C :: D.F. Q.E.D.
Eodem modo si plures fuerint^d 6. def 5. magnitudinibus tribus, &c.

Coroll.

Ex his sequitur, rationes ex iisdem rationibus compositas esse inter se easdem. item, earundem rationum easdem partes inter se easdem esse. * 22. & 23 5. & 20. def 1.

PROP. XXIIII.



Si prima A B ad secundam C eandem habuerit rationem quam tertia DE ad quartam F; habuc-

rit autem & quinta BG ad secundam C eandem rationem, quam sexta EH ad quartam F; etiam composita prima cum quinta (AG) ad secundam C eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta (DH) ad quartam F.

Nam quia^a A.B. C :: D.E. F. atque ex hyp. ^a hyp. & inversè C.BG :: F.EH, erit^b ex æquali^b 22. 5. A.B. BG :: D.E. EH. ergo componendo AG.BG :: DH. EH. item BG. C :: EH. F. ^c er- ^c hyp. go rursus ex æquo, AG.C :: DH. F. Q.E.D.

PROP.

PROP. XXV.

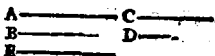
Si quatuor magnitudinis proportionales fuerint ($AB. CD :: E. F.$); maxima AB , & minima F reliquis CD , & E majores erunt.

Fiant $AG = E$; & $CH = F$.
Quoniam $A B. C D :: E. F ::$
 $AG. CH.$ erit $AB. CD :: GB.$
 $HD.$ sed $AB < CD.$ ergo
 $GB < HD.$ atqui $AG + F = E +$
 $CH.$ ergo $AG + F + GB < E +$
 $CH + HD.$ hoc est $AB + F < E +$

$CD. Q. E. D.$

Quæ sequuntur propositiones non sunt Euclidis; sed ex aliis desumptæ ob frequentem earum usum Euclidæis subjungi solent.

PROP. XXVI.

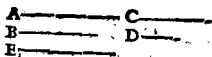


Si prima ad secundam habuerit majorem proportionem, quam tertia ad quartam, habebit convertendo, secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

Sit $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$. Dico $\frac{B}{A} > \frac{D}{C}$. Nam concipe

$\frac{C}{D} = \frac{E}{B}$. ergo $\frac{A}{B} < \frac{E}{B}$. quare $A < E$. ergo
 $\frac{B}{A} > \frac{B}{E}$. vel $\frac{D}{C} > \frac{B}{E}$. Q. E. D.

PROP. XXVII.



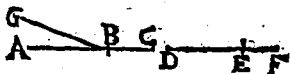
Si prima ad secundam habuerit majorem proportionem, quam tertia ad quartam, habebit quoque vicissim prima ad tertiam majorem proportionem, quam secunda ad quartam.

Sit

Sit $\frac{A}{B} \sqsubset \frac{C}{D}$. Dico $\frac{A}{C} \sqsubset \frac{B}{D}$. Nam puta $\frac{E}{B} = \frac{C}{D}$.

ergo $A \sqsubset E$. ergo $\frac{A}{C} \sqsubset \frac{E}{C}$ vel $\frac{B}{D}$. Q.E.D. a 10. 5.
b 8. 5.
c 16. 5.

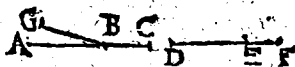
PROP. XXVIII.



Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam, habebit quoque composita prima cum secunda ad secundam maiorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta ad quartam.

Sit $\frac{AB}{BC} \sqsubset \frac{DE}{EF}$. Dico $\frac{AC}{BC} \sqsubset \frac{DF}{EF}$. Nam cogita $\frac{GB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. ergo $AB \sqsubset GB$. adde utrinque BC , a 10. 5.
erit $AC \sqsubset GC$. ergo $\frac{AC}{BC} \sqsubset \frac{GC}{BC}$. hoc est $\frac{DF}{EF}$. b 4. ax.
c 8. 5.
d 18. 5.
Q.E.D.

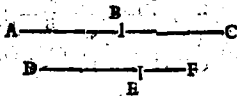
PROP. XXIX.



Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quàm composita tertia cum quarta ad quartam, habebit quoque dividendo prima ad secundam maiorem proportionem quàm tertia ad quartam.

Sit $\frac{AC}{BC} \sqsubset \frac{DF}{EF}$. Dico $\frac{AB}{BC} \sqsubset \frac{DE}{EF}$. Intellige $\frac{GC}{BC} = \frac{DE}{EF}$. ergo $AC \sqsubset GC$. aufer commune a 10. 5.
b 5. ax.
c 8. 5.
d 17. 5.
ergo $AB \sqsubset GB$. ergo $\frac{AB}{BC} \sqsubset \frac{GB}{BC}$ vel $\frac{DE}{EF}$.
Q.E.D. L PROP.

PROP. XXX.



Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita

tertia cum quarta ad quartam; Habebit, per conversionem rationis, prima cum secunda ad primam minorem rationem, quam tertia cum quarta ad tertiam.

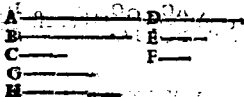
Sit $\frac{AC}{BC} \sqsubset \frac{DF}{EF}$. Dico $\frac{AC}{AB} \sqsupset \frac{DE}{DB}$. Nam quia

$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$, ^a erit dividendo $\frac{AB}{BC} \sqsupset \frac{DE}{EF}$. ^c conver-

tendo igitur $\frac{BC}{AB} \sqsupset \frac{EF}{DE}$. ^d ergo componendo

$\frac{AC}{AB} \sqsupset \frac{DE}{DB}$. Q. E. D.

PROP. XXXI.



Si sint tres magnitudines A, B, C, & alia ipsis aequales numero D, E, F,

sitque major proportio prima priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam ($\frac{A}{B} \sqsubset \frac{D}{E}$); item secunda priorum ad tertiam major, quam secunda posteriorum ad tertiam ($\frac{B}{C} \sqsubset \frac{E}{F}$). Erit quoque ex aequalitate major proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam ($\frac{A}{C} \sqsubset \frac{D}{F}$).

Concipe $\frac{G}{C} = \frac{H}{F}$. ^a ergo $B \sqsubset G$, ^b ergo $\frac{A}{C} \sqsubset \frac{A}{B}$.

Rursus puta $\frac{H}{G} = \frac{D}{E}$. ^c ergo $\frac{H}{G} \sqsupset \frac{A}{B}$; ^d ergo fortius

$\frac{H}{G} \sqsupset \frac{A}{C}$. ^d quare $A \sqsubset H$. ^e proinde $\frac{A}{C} \sqsupset \frac{H}{C}$, vel $\frac{D}{F}$.

Q. E. D.

PROP.

a 57.

b 29. 5.

c 26. 5.

d 28. 5.

a 10. 5.

b 8. 5.

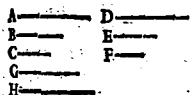
c 13. 5.

d 10. 5.

e 8. 5.

f 22. 5.

PROP. XXXII.



Si sint tres magnitudines A, B, C, & alie ipsis aequales D, E, F, sitque major proportio prima priorum ad secundam, quam secunda posteriorum ad tertiam;

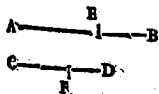
$(\frac{A}{B} \sqsupset \frac{C}{F})$ item secunda priorum ad tertiam major quam prima posteriorum ad secundam; $(\frac{B}{C} \sqsupset \frac{D}{E})$

erit quoque ex aequalitate major proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam.

$$(\frac{A}{C} \sqsupset \frac{D}{E})$$

Hujusce demonstratio plane similis est demonstrationi praecedentis.

PROP. XXXIII.



Si fuerit major proportio totius AB ad totum CD, quam ablati AE ad ablatum CF. Erit & reliqui EB ad reliquum FD major proportio, quam totius AB ad totum CD.

Quoniam $\frac{AB}{CD} \sqsupset \frac{AE}{CF}$, ^{a hyp.} ^{b 27. 5.} ^{c 30. 5.} erit permutando

$\frac{AB}{AE} \sqsupset \frac{CD}{CF}$ ergo per conversionem rationis

$\frac{AB}{EB} \sqsupset \frac{CD}{FD}$ permutando igitur $\frac{AB}{CD} \sqsupset \frac{EB}{FD}$

Q. E. D.

PROP. XXXIV.

A	_____	D	_____
B	_____	E	_____
C	_____	F	_____
G	_____	H	_____

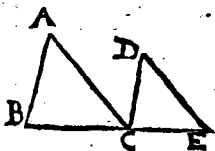
*Si sint quo-
cunque magni-
tudines, & a-
liae ipsis equa-*

les numero, sitque major proportio primae priorum ad primam posteriorum, quam secunda ad secundam, & haec major quam tertia ad tertiam, & sic deinceps: habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam quam ultima priorum ad ultimam posteriorum.

Horum demonstratio est penes interpretes. quos audeat, qui eam desiderat. nos omisimus, brevitatis studio, & quia illorum nullus usus in his elementis.

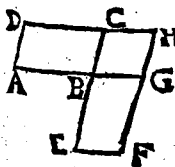
LIB. VI.

Definitiones.



I. Similes figuræ rectilineæ sunt (ABC, DCE), quæ & angulos singulos singulis æquales habent; atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

Ang. B = DCE & AB. BC :: DC. CE.
item ang. A = D; atque BA. AC :: CD. DE.
denique ang. ACB = E. atque BC. CA :: CE. ED.

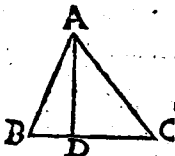


II. Reciproce autem sunt (BD, BF), cum in utraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint. (hoc est AB. BG :: EB. BC.)

III. Secundum extremam & mediam rationem recta linea AB secta, esse dicitur, cum ut tota AB ad majus segmentum AC, ita majus segmentum AC ad minus CB se habuerit. (AB. AC :: AC. CB.)

L 4

IV. Alti-



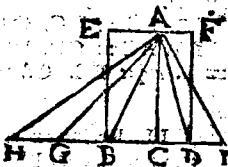
IV. Altitudo cujusq; figuræ ABC est linea perpendicularis AD, à vertice A ad basim BC deducta.

V. Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

Ut ratio A ad C, composita ex rationibus A

a 20. def. 5. ad B, & B ad C. nam $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A}{C} = \frac{AB}{BC}$.

PROP. I.



Triangula ABC, ACD, & parallelogramma BCAB, CDFA, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases BC, CD.

a Accipe quotvis BG, HG ipsi BC æquales; idem DI = CD. & connecte AG, AH, AI.

b Triangula ACB, ABG, AGH æquantur; item triang. ACD = ADI, ergo triangulum ACH tam multiplex est trianguli ACB, quam basis HC, basis BC. & æquemultiplex est triang. ACI trianguli ACD, ac basis CI basis CD. cum igitur si HC = CI, erit similiter triang. AHC = ACI, ideoque BC. CD :: triang. ABC. ACD :: pgr. CE. CF. Q. E. D.

a 3. 1.

b 38. 1.

c sch. 38. 1.

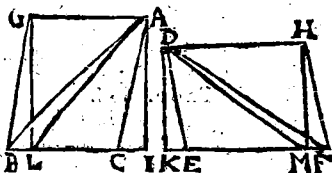
d 6. def. 5.

e 41. 1. &

15. 5.

Scd.

Scholi.



Hinc, triangula ABC, DEF, & parallelogramma AGBC, DEFH, quorum aequales sunt bases BC, EF, ita se habent ut altitudines AI, DK.

*Sume $IL = CB$; & $KM = EF$; ac junge LA, LG, MD, MH . liquet esse triang. ABC. DEF. $\therefore ALI. DKM :: AL. DK ::$ pgr. d 41. 1. 84
AGBC. DEFH. Q. E. D. 15. 5.

PROP. II.



Si ad unum trianguli ABC, latus BC parallela ducta fuerit recta quaedam linea DE, hac proportionaliter secabit ipsius trianguli latera ($AD. BD :: AE. EC$). Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint ($AD. BD :: AE. EC$) quae ad sectiones D, E adjuncta

fuerit recta linea DE, erit ad reliquum ipsius trianguli latus BC parallela. Ducantur CD, BE.

1. Hyp. Quia triang. $DEB = DEC$; $\therefore$ erit a 37. 1. triang. ADE. DBE $::$ ADE. ECD. atqui b 7. 5. triang. ADE. DBE $::$ AD. DB. & triang. c 1. 6. ADE. DEC $::$ AE. EC. $\therefore$ ergo AD. DB $::$ AE. EC. d 11. 5.

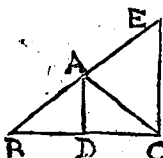
2. Hyp. Quia AD. DB $::$ AE. EC. $\therefore$ hoc e 1. 6. est triang. ADE. DBE $::$ ADE. ECD; $\therefore$ erit triang. DBE = ECD. $\therefore$ ergo DE, BC f 9. 5. sunt parallelae. Q. E. D. g 39. 1.

Schol.

Schol.

Imò, si plures ad unum trianguli latus parallelæ ductæ fuerint, erunt omnia laterum segmenta proportionalia, ut faciliè deducitur ex hac.

PROP. III.



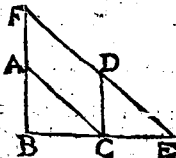
Si trianguli BAC angulus BAC bisariam sectus sit, secans autem angulum recta linea AD secuerit & basim, basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera ($BD, DC :: AB, AC.$) Et si basis segmenta eandem habeant rationem quam reliqua ipsius trianguli latera ($BD, DC :: AB, AC.$) recta linea AD quæ à vertice A ad sectionem D ducitur, bisariam secat trianguli ipsius angulum BAC.

Produc BA; & fac $AE = AC.$ & junge CE.

1. Hyp. Quoniam $AE = AC$, erit ang. $ACE = E = \frac{1}{2} BAC = DAC.$ ergò DA, CE parallelæ sunt. ^c quare BA, AE (AC) $:: BD, DC.$ Q. E. D.

2. Hyp. Quoniam BA, AC (AE) $:: BD, DC$ erunt DA, CE parallelæ: & ergò ang. $BAD = E$; & ang. $DAC = ACE = E$, ergò ang. $BAD = DAC.$ bisectus igitur est ang. BAC. Q. E. D.

PROP. IV.



Aequiangulorum triangulorum ABC, DCE proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos B, DCE ($AB, BC :: DC, CE$, &c.) & homologa sunt latera AB, DC &c. quæ æqualibus angulis ACB, E &c. subtenduntur.

Statue

- a 5. 1.
- b 32. 1.
- c hyp.
- d 27. 1.
- e 2. 6.
- f 2. 6.
- g 29. 1.
- h 5. 1.
- k 1. ax.

Statue latus BC in directionem lateri CE, & produc BA, ac ED donec^a occurrant.

a 32. 1. 2

Quoniam ang. B^b = ECD, ^c sunt BF, CD parallelæ. Item quia ang. BCA^b = CED^c sunt CA. EF parallelæ. Figura igitur CAFD est parallelogramma. ^d ergo AF = CD; ^d & AC

& 13. ax.

b hyp.

c 28. 1.

= FD. Liqueat igitur AB. AF (CD) :: BC. CE. ^f permutando igitur AB. BC :: CD. CE,

d 34. 1.

e 2. 6.

f 16. 5.

Item BC. CE :: FD. (AC) DE ^f ergo permutando EC. AC :: CE. DE. quare etiam sex

g 22. 5.

quo AB. AC :: CD. DE. ergo, &c.

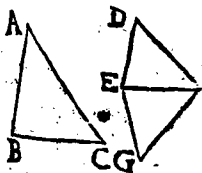
Coroll.

Hinc AB. DC :: BC. CE :: AC. DE.

Schol.

Hinc si in triangulo FBE ducatur uni lateri FE parallela AC; erit triangulum ABC simile toti FBE.

PROP. V.



Si duo triangu-
la ABC, DEF

latera proportiona-
lia habeant (AB.

BC :: DE. EF

& AC BC ::

DE. EF. item

AB.AC :: DE

EF) æquiangula erunt triangu-
la, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

Ad latus EF^a fac ang. FEG = B; ^a & ang.

a 23. 1.

EFG = C, ^b quare etiam ang. G = A. ergo

b 32. 1.

GE. EF ^c :: AB. BC :: ^d DE. EF. ^e ergo

c 4. 6.

d hyp.

GE = DE. Item GF. FE ^c :: AC. CB ^d ::

c 11. 5.

DE. FE. ^e ergo GF = DF. Triangula igitur

& 9. 5.

DEF. GEF sibi mutuò æquilatera sunt. ^f ergo

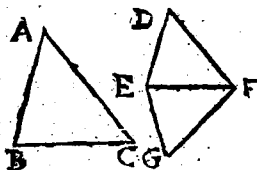
f 8. 1.

ang. D = G = A. ^f & ang. FED = FEG = B.

g 32. 1.

proinde & ang. DFE = C. ergo &c.

PROP.



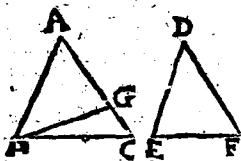
Si duo trian-
gu'la ABC,
DEF unum an-
gulum B uni an-
gulo DEF. a-
qualem, & cir-
cum aequales an-
gulos B, DEF

latera proportionalia habuerint ($AB. BC :: DE. EF$;) *aquiangularia erunt triangula ABC, DEF; aequalesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.*

Ad latus EF fac ang. $FEG = B$; & ang. $EFG = C$. ^a unde & ang. $G = A$. ergo $GE. EF^b :: AB. BC^c :: DE. EF^d$ ergo $DE = GE$. atqui ang. $DEF^e = B^f = GEF$. ^g ergo ang. $D = G = A$. ^h proinde etiam ang. $EFD = C$. Q. E. D.

a 32. 1.
b 4. 6.
c hyp.
d 9. 5.
e hyp.
f constr.
g 4. 1.
h 32. 1.

PROP. VII.



Si duo triangu-
la ABC, DEF unum
angulum A uni angu-
lo D. aequalem, circa
autem alios angulos
ABC, E latera pro-
portionalia habeant

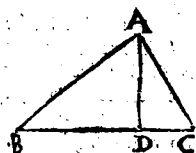
($AB. BC :: DE. EF$); *reliquorum autem simul utrumque C, F aut minorem, aut non minorem recto; aquiangularia erunt triangula ABC, DEF, & aequales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.*

Nam si fieri potest, sit ang. $ABC = E$. fac igitur ang. $ABG = E$; ergo cum ang. $A^a = D$, ^b erit etiam ang. $AGB = F$. ergo $AB. BG^c :: DE. EF^d :: AB. BC$. ^e ergo $BG = BC$. ^f ergo ang. $BGC :: BCG$. ^g ergo ang. BGC . vel C minor

a hyp.
b 32. 1.
c 4. 6.
d hyp.
e 9. 5.
f 5. 1.
g cor. 17. 1.

minor est recto; & proinde ang. AGB, vel F rectus cor. 13. 1.
 & major est. ergo anguli C, & F non sunt e-
 jusdem speciei, contra Hyp.

PROP. VIII.



Si in triangulo re-
 ctangulo ABC, ab an-
 gulo recto BAC in
 basin BC perpendicu-
 laris AD ducta est;
 qua ad perpendicula-
 rem triangula ADB,
 ADC, tum toti trian-

gulo ABC, tum ipsa inter se similia sunt.

Nam ang. BAC^a = BDA^a = CDA. & ^{a 12. ax.}
 ang. BAD^b = C. & CAD^b = B. ergo per ^{b 32. 1.}
 4. 6. & 1 def. 6.

Coroll.

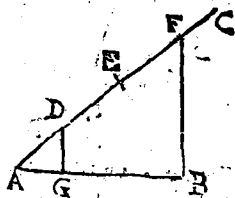
Hinc 1. BD.DA^c :: DA. DC.

^{c 1. def. 6.}

2. BC. AC :: AC. DC. & CB.

BA. :: BA. BD.

PROP. IX.



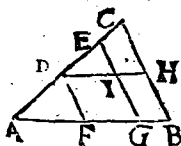
A data recta
 linea AB im-
 peratam partem
 $\frac{1}{2}$ AG auferre.

Ex A duc
 infinitam AC
 utcumq; in qua
^a sume tres, ^{a 3. 1.}
 AD, DE, EF
 æquales ut-

cunque, junge FB, cui ex D^b duc parallelam ^{b 31. 1.}
 DG. Dico factum.

Nam GB. AG^c :: FD. AD. ergo ^{d com- c 2. 6.}
 ponendo AB. AG :: AF. AD. ergo sum AD = ^{d 18. 3.}
 AF, erit AG = $\frac{1}{2}$ AB. Q. E. F. PROP.

PROP. X.



Datam rectam lineam AB infectam similiter secare (in F, G), ut data altera AC, secta fuerit (in D, E.)

Extremitates sectæ & infectæ jungat recta

a 31. 1.

BC. Huic ex punctis E, D^a duc parallelas EG, DF rectæ secundæ occurrentes in G, & F. Dico factum.

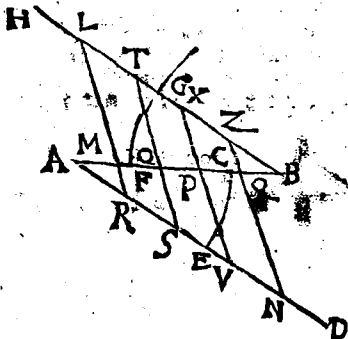
b 2. 6.

c 34. 1. &

7. 5.

^a Ducatur enim DH parall^a AB. Estque AD. DE^b :: AF. FG, & DE. EC^b :: DI. IH :: FG. GB. Q. E. F.

Scholium.



Hinc discimus rectam datam AB in quovis æquales partes (puta 5.) secare. id quod facilius præstabitur sic.

Duc infinitam AD, eiq; parallelam BH etiam infinitam. Ex his cape partes æquales AR, RS, SV, VN; & BZ, ZX, XT, TL; in singulis unâ pau-

pauciores, quàm desiderentur in AB; tum rectæ ducantur LR, TS, XV, ZN. hæ quinque-
cabunt datam AB.

Nam RL, ST, VX, NZ^a parallelæ sunt. a 33. 1.
ergò quoniam AR, RS, SV, VN^b æquales sint, b constr.
erunt AM, MO, OP, PQ æquales. Similiter c 2. 6.
quia BZ=ZX, erit BQ=QP. ergò AB. quin-
quiesceta est. Q. E. F.

PROP. XI.



Datis duabus
rectis lineis AB
AD. tertiam
proportionalem
DE invenire.

Junge BD,

ex AB protractâ sume BC=AD. per C
duc CE parall. BD. cûi occurrat AD pro-
ducta in E. Erit DE expetita.

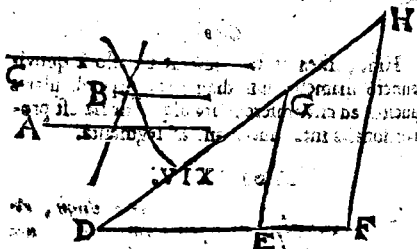
Nam AB.BC. (AD) :: AD.DE. Q.E.F. a 2. 6.



Vel sic, fac ang. ABC rectum
& ang. ACD etiam rectum.
erit AB.BC :: BC.BD.

b cor. 9.

PROP. XII.



Tribus datis rectis lineis DE , EF , DG , quartam proportionalem GH invenire.

Connectatur EG . per F duc FH parall. EG , cui accurrat DG producta ad H . liquet esse $DE : EF :: DG : GH$, Q. E. F.

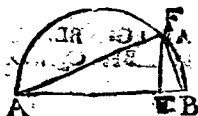
a 2. 6.

Vel ita. $CD = CB + BD$ ad E apta circulo. Circino sume AB . Erit $AB \times BE = CB \times BD$, quia $AB : CB :: BD : BE$.

a 35. 3.
p 16. 6.

PROP. XIII.

Duabus datis rectis lineis AE , EB , mediam proportionalem EF adinvenire.



Super tota AB diametro describe semicirculum AFB . Ex E erige perpendicularem EF occurrentem peripheriæ in F . Dico $AE : EF :: EF : EB$. Ducantur enim AF , & FB . Ex trianguli rectanguli

a 2. 6.

guli AFB recto angulo, deducta est FE basi perpendicularis; Ergo AE. FE :: FE. EB. b cor. 8. 6
Q. E. F.

Coroll.

Hinc, linea recta, quae in circulo à quovis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, media est proportionalis inter duo diametri segmenta.

PROP. XIV.



Aequalium, & unum ADC unum EBG aequalem habentium, angulum, parallelogrammorum BD, BF reciproca sunt latera, quae circum aequales angulos.

lor. (AB. BG :: EB. BC) : Et quorum parallelogrammorum BD, BF unum angulum ABC unum angulum EBG aequalem habentium, reciproca sunt latera, quae circum aequales angulos, sunt aequalia.

Nam latera AB, BG circa aequales angulos faciant unam rectam, quare EB, BC etiam in directum jacebunt. Producantur FG, DC, donec occurrant.

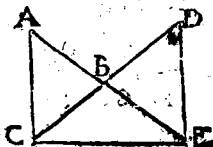
Hyp AB. BG :: BD. BH :: BF. BH :: BB. BC, ergo, &c.
Hyp BD. BH :: AB. BG :: BE. BC :: BF. BH, ergo Pgr. BD = BF. Q. E. D.

sch. 15. 1.
b 1. 6.
c 7. 5.
d 1. 6.
e 11. 5.
f 1. 6.
g hyp.
h 1. 6.
k 11. 6. 9. 5.

M 1

PROP.

PROP. XV.



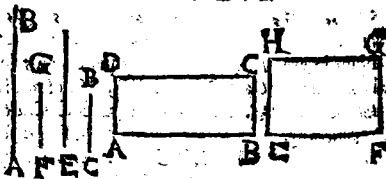
Aequalium, & unum
ABC, uni DBE æ-
qualem habentiū angu-
lum triangulorū ABC,
DBE, reciproca sunt
lateral, quæ circum æ-
quales angulos (AB.

BE :: DB. EC): Et quoniam triangulorum ABC,
DBE, unum angulum ABC uni DBE æqualem
habentium reciproca sunt lateral, quæ circum æqua-
les angulos (AB. BE :: DB. BC), illa sunt
æqualia.

Lateral CB, BD præ æquales angulos, sta-
uantur sibi in directum; ergo ABE est recta
linea. ducatur CE.

1. Hyp. AB. BE^b :: triang. ABC. CBE
c :: triang. DBE. CBE. d :: DB. BC. e ergo, &c.
2. Hyp. Triang. ABC. CBE^f :: AB. BE^g ::
DB. BC^h :: triang. DBE. CBE. * ergo triang.
ABC = DBE. Q. E. D.

PROP. XVI.



Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint
(AB. FG :: EF. CB), quod sub extremis AB
CB comprehenditur rectangulum AC æquale est ei,
quod sub mediis EF, FG comprehenditur, rectan-
gulo EG. Et si sub extremis comprehensum rectan-
gulum AC æquale fuerit ei, quod sub mediis com-
prehenditur, rectangulo EG, illæ quatuor rectæ lineæ
proportionales erunt. (AB. FG :: EF. CB.)

1. Hyp.

1. Hyp. Anguli B, & E recti, ac^a proinde a 12. ax. pares sunt; atque ex hyp. AB. FG :: EF. CE.

ergo Rectang. AC = EG. Q. E. D. b 14. 6.

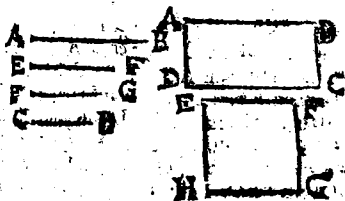
2. Hyp. Rectang. AC = EG; atque ang. c hyp.

B = F; ergo AB. FG :: EF. EB. Q. E. D. d 14. 6.

Coroll.

Hinc ad datam rectam lineam AB facile est datum rectangulum EG applicare, e faciendo e 4. & 10. 6. AB. EF :: FG. BC.

PROP. XVII.



Si tres recte lineae sint proportionales AB. EF :: EF. CB, quod sub extremis AB, CB comprehenditur rectangulum AC inaequale est ei, quod à media EF, describitur, quadrato EG. Et si sub extremis AB, CB comprehensum rectangulum AC, aequale sit ei, quod à media EF, describitur, quadrato EG, illae tres recte lineae proportionales erunt (AB. EF :: EF. CB).

Accipe EG = EF.

1. Hyp. AB. EF :: EF (FG). CB, ergo a hyp.

Rectang. AC = EG = EFq. Q. E. D. b 16. 6.

2. Hyp. Rectang. AC = quadr. EG =

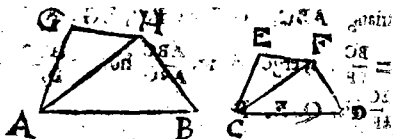
EFq. ergo AB. EF :: FG (EF). BC. c 29 def. 1. d hyp. e 16. 6.

Coroll.

Si A in B = Cq. ergo A. C :: C. B.

M 3.

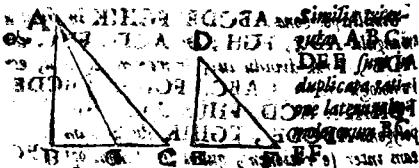
PROP.



A data recta linea AB dato rectilineo CEDF. simile similiterque positum rectilineum AGHB describere.

Datum rectilineum resolve in triangu-
la fac ang. ABH = D; & ang. BAH = DCF;
& ang. AHG = CFE; & ang. HAG =
FCE. Rectilineum AGHB est quæsitum.

Nam ang. B = D, & ang. BAH = DCF;
quare ang. AHB = CFD; item ang. HAG
= FCE, & ang. AHG = CFE. quare ang.
G = E; & totus ang. GAB = ECD; & totus
GHB = EFD. Polygona igitur sibi mutuo
æquiangula sunt. Porro, ob tri-
gona æquiangu-
la, AB, BH :: CD, DF. & AG, GH :: CF,
EF. item AG, AH :: GE, CF. & AH, AB ::
CF, CD. unde ex æqu AG, AB :: CF, CD.
eodem modo GH, HB :: EF, FD. ergo polygo-
na ABHG, CEDF simile similiterque posita
existunt. Q. E. D.



Fiat BC, EF :: EF, BE. & ducatur AG.

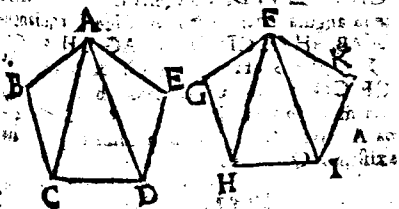
Quia

Quia $AB.DE :: BC.EF :: EF.BG$ & ang. b cor. 4. 6.
 $\angle E$; erit triang. $ABG = DEF$. verum c consir.
 triang. $ABC, ABG :: BC, BG$; & d 15. 6.
 $= \frac{BC}{EF}$ bis ergo triang. ABC hoc est ABC e 1. 6.
 DEF f 10. def 5.
 $\frac{BC}{EF}$ bis. Q. E. D. g 11. 3.

Coroll.

Hinc, si tres lineæ BC, EF, BG proportionales fuerint; ut est prima ad tertiam, ita est triangulum super primam BC descriptum ad triangulum super secundam EF simile, similiterque descriptum. vel ita est triangulum super secundam EF descriptum ad triangulum super tertiam simile similiterque descriptum.

PROP. XX.



Similia polygona $ABCDE, FGHIK$ in similia
 triangula ABG, FGH ; & ACD, FHI , &
 ADE, FIK dividuntur; & numero equalia, &
 homologa tota. ($ABC. FGH :: ABCDE.$
 $FGHIK :: ACD. FHI :: ADE. FIK$) Et
 polygona $ABCDE, FGHIK$ duplicatam habent
 eam inter se rationem, quam latus homologum BC
 ad homologum latus GH . M 4. Nam.

a hyp.
b 6. 6.

c hyp.
d 3. ax.
e 32. 1.

1. Nam ang. $B^a = G$; & $AB, BC^a :: FG, GH$. b ergo triangula ABC, FGH æquiangula sunt. eodem modo, triangula AED, FKI assimulantur. cum igitur ang. $BCA^b = GHF$; & ang. $ADE^b = FIK$; totique anguli BCD, GHI , atque toti CDE, HIK c pares sint; d remanent ang. $ACD = FHI$; & ang. $ADC = FIH$; e unde etiam ang. $CAD = HFI$. ergo triangula ACD, FHI similis sunt. ergo, &c.

2. Quoniam igitur triangula BCA, GHF similia sunt, f erit $\frac{BCA}{GHF} = \frac{BC}{GH}$ bis. ob eandem causam $\frac{CAD}{HFI} = \frac{CD}{HI}$ bis. denique triang. $DEA, IKF = \frac{DE}{IK}$ bis. quare cum $BC, GH :: CD, HI$ g ; DE, IK , h erit triang. $BCA, GHF :: CAD, HFI :: DEA, IKF :: *$ polyg. $ABCDE, FGHIK :: \frac{BC}{GH}$ bis.

g hyp. &
16. 5.
h feb. 23. 5.
k 12. 5.

Coroll.

1. Hinc, si fuerint tres linear rectæ proportionales; ut est prima ad tertiam, ita erit polygonum super primam descriptum ad polygonum super secundam simile; similiterque descriptum vel ita erit polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile similiterque descriptum.

Unde elicitur methodus figuram quavis rectilineam augendi vel minuendi in ratione data. ut si velis pentagoni, cuius latus ED alius facere quintuplum. inter AB, c & AB inveni medium proportionalem. Super hac $*$ construe pentagonum simile dato. hoc erit quintuplum dati.

* 18. 6.

2. Hinc etiam, si figurarum similium homologa latera nota fuerint, etiam proportio figurarum innotescet, nempe inveniendo tertiam proportionalem.

PROP.

PROP. XXI.



Quæ (ABC, DIE) eidem rectilincio HFG sunt similia, & inter se sunt similia.

Nam ang. $A^{\circ} = H^{\circ} = D^{\circ}$, & ang. $C^{\circ} = G^{\circ}$ a 1. def. 6.
 $= E^{\circ}$, & ang. $B^{\circ} = F^{\circ} = I^{\circ}$ item $AB : AC ::$
 $HF : HG :: DE : DG$, & $AC : CB :: HG :$
 $GF : DE : BI$, & $AB : BC :: HF : FG :: DI :$
 IE , ergo ABC, DIE similia sunt. Q. E. D.

PROP. XXII.



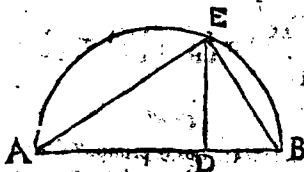
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint
 $(AB : CD :: EF : GH)$, & ab eis rectilincia si-
 milia similiterque descripta, proportionalia erunt.
 $(ABI : CDK :: EM : GO)$ Et si à rectis lineis
 similia similiterque descripta rectilincia propor-
 tionalia fuerint $(ABI : CDK :: EM : GO)$ ipsæ etiâ re-
 ctæ lineæ proportionales erunt. $(AB : CD :: EF : GH)$

1. Hyp. $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$ bis $= \frac{EM}{GO}$ a 19. 9.
 ergo $ABI : CDK :: EM : GO$. Q. E. D.

2. Hyp. $\frac{AB}{CD} = \frac{EM}{GO}$ bis $= \frac{EF}{GH}$ b hyp.
 bis, ergo $AB : CD :: EF : GH$. Q. E. D. c 20. 6.
 d cor. 23. 5.

hinc deducitur, & demonstratur ratio multipli-
candi quantitates surdas. ex gr. Sit $\sqrt{5}$ multi-
plicandus in $\sqrt{3}$. dico provenire $\sqrt{15}$. Nam
ex multiplicationis definitione debet esse, $1. \sqrt{3} ::$
 $\sqrt{5}. \text{product.}$ ergo per hanc, $q. 1. q. \sqrt{3} :: q.$
 $\sqrt{5}. q. \text{product.}$ hoc est. $1. 3 :: 5. q. \text{product.}$
ergo $q. \text{product.}$ est 15. quare $\sqrt{15}$ est productus
ex $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$. Q. E. D.

THEOR.



Cor. Herig.

Si recta linea AB secta sit utroque in D. re-
ctangulum sub partibus AD, DB. contentum, est
mediam proportionale inter earum quadrata. Item
rectangulum contentum sub tota AB, & una parte
AD, vel DB, est medium proportionale inter qua-
dratum totius AB, & quadratum dicta partis
AD, vel DB.

Superdiameter AB describe semicirculum.
ex D erige normalem DE occurrentem periph-
erie in E. iunge AE, BE.

Liquet esse AD. DE ^{2} :: DE. DB. ^{b} ergo
ADq. DEq. :: DEq. DBq. ^{c} hoc est ADq.
ADB :: ADB.DBq. Q. E. D.

Porro, BA. AE ^{d} :: AE. AD. ^{e} ergo BAq.
AEq. :: AEq. ADq. ^{f} hoc est BAq. BAD ::
BAD. ADq. Eodem modo ABQ. ABD ::
ABD. BDq. Q. E. D.

Sic quidem P. Herigonius scit. Sed facilli-
mè hæc etiam ex 1. 6. & 11. 5. deduci pos-
sunt.

PROP.

a cor. 8. 6.

b 12. 6.

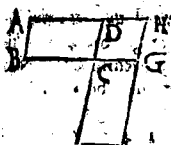
c 17. 6.

d cor. 8. 6.

e 22. 6.

f 17. 6.

PROP. XXIII.



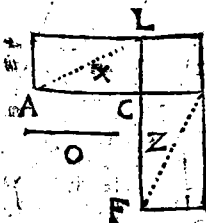
Aequiangula parallelogramma AC, CF inter se rationem habent eam quae ex lateribus componitur. $\left(\frac{AC}{CF} = \frac{BC}{CG}\right)$

Latera circa aequales angulos C^a sibi in di- a seb. 15
rectum statuuntur; & compleatur parallelogram-
mum CH.

Ratio $\frac{AC}{CF} = \frac{AC}{CH} + \frac{CH}{CF} = \frac{BC}{CG} + \frac{DC}{CE}$ b 20. def. 5.
Q. E. D. c 1. 6.

Coroll.

Hinc & ex 34. 1. patet primò, Triangula, quae Andr. Tacqu.
unum angulum (ad C) aequalem habent, rationem 15. 5.
habere ex rationibus rectarum, AC ad CB, & LC
ad CF, aequalem angulum continentium.



Patet secundò,
Rectangula ac * pro- * 35
inde & paralle-
gramma quaevisque
rationem inter se
habere compositam
ex rationibus basis
ad basim, & alti-
tudinis ad altitu-
dinem. Necque ali-
ter de triangulis
ratiocinaberis.

Patet tertio, Quomodo triangulorum ac paral-
lelogrammorum proportio exhiberi possit. Sinto
parallelogramma X & Z; quorum bases AC,
CB; altitudines verò CL, CF. fiat CL. CF :: * 14. 6. &
CB. O, * erit X. Z :: A. C. O. 1. 6.

PROP.



In omni parallelogrammo
ABCD, quæ circa diame-
trum AC sunt parallelo-
gramma EG, HF, & toti
& inter se sunt similia.

Nam parallelogramma
EG, HF habent singula unum angulum tam
toto communem. ^a ergo toti & sibi mutuo æqui-
angula sunt. ^a Item tam triângula ABC, AEI,
IHC, quàm triângula ADC, AGI, IFG sunt
inter se æquiangula. ^b ergo AE. EI :: AB. BC,
^b atque AE. AI :: AB. AC, ^b & AI. AG :: AC.
AD. ^c ex æquali igitur, AE. AG :: AB. AD.

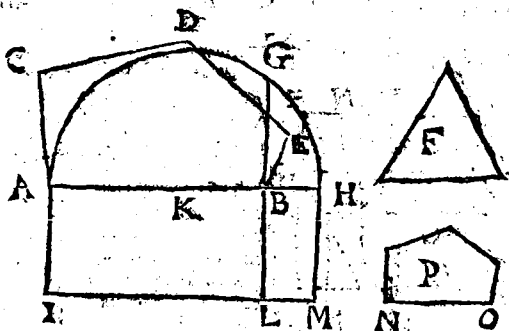
a. 29. 1.

b. 4. 6.

c. 22. 5.

d. 1. def. 6. ^d ergo Pgra. EG, BF similia sunt, eodem modo
HF, BD similia sunt, ergo, &c.

Prop. XXV.



Dato rectilineo ABEDC simile, similiterque po-
situm P, idemque alteri dato F æquale, construere.

^a Fac rectang. AL = ABEDC. ^b item super
BL fac rectang. BM = F. Inter AB, BH c in-
veni mediam proportionalem NO. super NO

a. 47. 1.

b. 44. 1.

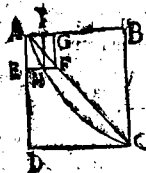
c. 13. 6.

d. fac.

fac polygonum B simile dato ABEDC. Erit d' 18. 6.
hoc æquale dato F.

Nam ABEDC (AL). P = AB. BH. F r. 6.
AL. BM. ergo P = BM = E. Q. E. E. g 14. 5.
h cor. 1r.

PROP. XXVI.

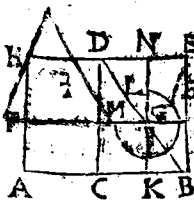


Si a parallelogrammum
ABCD parallelogrammum
AGFE ablatum sit, & si-
mile toti, & similiter posi-
tum, communem cum coha-
bens angulum EAG, hoc
circa eandem cum toto dia-
metrum AC consistet.

Si negas AC esse communem diametrum,
esset diameter AHC secans EF in H. & ducatur
HI parall. AE. Parallelogramma EI, DB^a fi-
milis sunt. b ergo AE:EH::AD. DC::AE.
EF. d proinde EH = EF. e Q. E. A.

a 24. 6.
b 1. def. 6.
c hyp.
d 9. 5.
e 9. ax.

PROP. XXVII.

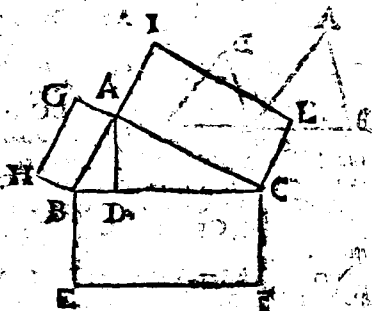


Omnium parallelo-
grammorum AD,
AG secundum ean-
dem rectam lineam
AB applicatorum,
deficientiumque fi-
guris parallelogram-
mis CE, KI simi-
libus, similiterq; po-

sitis, ei AD, quod à dimidia describitur, maxi-
mum est AD, quod ad dimidium est applicatum, si-
mile existens dissectui KI.

Nam quia GE^a = GC, addito communi a 43. 1.
KI, b erit KE = CI^c = AM. adde commune b 2. ax.
AG, d erit AG = Gnom. MBL. sed Gnom. c 36. 1.
MBL = CE (AD). ergo AG = AD. d 2. ax.
Q. E. D. e 9. ax.

PROP. XXXI.



In rectis angulis triangulis BAC , si una quatuor BF à latere BC rectum angulum BAC subtendente, descripta, aequalis est figuris EG , AL , quæ priori illi BF similis, & similiter posita à latere BA , AC rectum angulum continentibus describuntur.

Ab angulo recto BAC demitte perpendicularem AD . Quoniam $CB.CA^2 :: CA.DC$. a Cor. 8. 6. b erit $BF.AL :: CB.DC$; inversèque $AL.BF :: DC.CB$. Item quia $BC.BA^2 :: BA.DB$. b erit $BF.BG :: BC.DB$; ac invertingendo, $BG.BF :: DB.BC$. c ergo $AL + BG.BF :: DC + DB.BC$. d ergo $AL + BG = BF$. Q. E. D. e. 22. 6. Vel sic. $BG.BF^e :: BAq.BCq.^e$ & $AL.BF :: ACq.BCq.^f$ ergo $BG + AL.BF :: BAq + ACq.^g$ & $BCq.^g$ ergo cum $BAq + ACq.^h = BCq.$ h erit $BG + AL = BF$. Q. E. D. f. 24. 5. g sch. 14. 5. h 47. 1.

Coroll.

Ex hac propositione, addi possunt, & subtrahi figure quævis similes, eadem methodo, quâ quadrata adduntur & subtrahuntur, in schol. 47. 1. c

PROP.

PROP. XXXII.

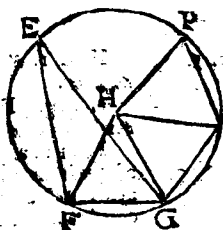
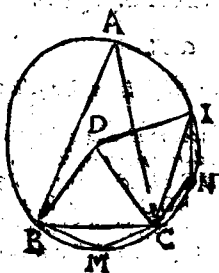


Si duo trianguli
ABC, DCE, quae
duo latera duobus
lateribus proportio-
nalia habent (AB.
AC :: DC.DE),

et secundum unum an-
gulum ACD comprehensae fuerint, ita ut homologa
eorum latera sint etiam parallela (AB ad DC,
& AC ad DE): tunc reliqua illorum triangu-
lorum latera BC, CE in rectam lineam collocata
reperiuntur.

Nam ang. A = ACD = D; & AB.^a 29. 1.
AC^b :: DC.DE. ergo ang. E = DCE. ergo^b hyp.
ang. B + A = ACB. sed ang. B + A = ACB = ad 2. ex.
Rect. ergo ang. ACE + ACB = Rect. ergo^c 32. 1. 2.
BCE est recta linea. Q. E. D.^f 1. ex.
^g 14. 1.

PROP. XXXIII.



In aequalibus circulis DBCA, HFGP, anguli
BDC, FHG eandem habent rationem cum peri-
pheriis BC, FG, quibus insistant: sive ad contra-
(ut BDC, FHG), sive ad peripherias A, E
constituta insistant: insuper verò & sectores BDC,
FHG, quippe qui ad centra constituentur.

N 3.

Duc

Duc rectas BC, FG. Accommoda $CI = CB$; & $GL = FG = LP$; & junge DI, HL, HP.

a 28. 3. Arcus $BC = CI$,^a item arcus FG, GL, LP
b 27. 3. æquantur, b ergo ang. $BDC = CDI$. b & ang.
FGH = GHL = LHP. Ergo arcus BI tam mul-
tiplex est arcus BC, quam ang. BDI anguli
BDC. pariterque æquemultiplex est arcus FP
arcus FG; atque ang. FHP anguli FHG. Ve-
rùm si arcus $BI \square, =, \rightrightarrows FP$,^c erit similiter
ang. $BDI \square, =, \rightrightarrows FHP$. ergo arc. $BC.FG^d ::$
c 27. 3. ang. $BDC.FHG^e :: BDC.FHG^f :: A.E.$
d 6. def. 5.
e 15. 5.
f 20. 3.

Q. E. D.

g 27. 3. Rursus ang. $BMC = CNI$; b atque idcirco
h 14. 3. segm. $BCM = CIN$. b item triang. $BDC =$
k 4. 1. CDI . ergo sector $BDCM = CDIN$. Simili
l 2. ax. ratione sectores FHG, GHL, LHP æquantur.
Quum igitur prout arcus $BI \square, =, \rightrightarrows FGP$, ita
similiter sector $BDI \square, =, \rightrightarrows FHP$. m erit sect.
m 6. def. 5. $BDC.FHG :: arc. BC.FG$. Q. E. D.

Coroll.

n 5. Hinc 1. Ut sector ad sectorem, sic angulus ad
angulum.

2. Ang. BDC in centro est ad 4 rectos, ut ar-
cus BC cui insistit ad totam circumferentiam.

Nam ut ang. BDC ad rectum; sic arcus BC
ad quadrantem. ergo BDC est ad 4 Rectos, ut
arcus BC ad 4 quadrantes, id est ad totam cir-
cumferentiam. item ang. A. 2 Recti :: arc. BC.
periph.

Hinc 3. Inæqualium circulorum arcus IL, BC,
qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, ut
IAL & BAC, sive ad peripheriam, sunt si-
miles.

Nam IL. periph. :: ang. IAL, (BAC.).
4 Recti. item arc. BC. periph :: ang. BAC.
4 Recti.

4. Rect. ergò IL. periph. :: BC. periph. probin-
de arcus IL, & BC sunt similes. Unde



4. Duae semidiametri AB, AC & contenti flus
peripheris arcus auferuntur similes IL, BC.

FOUO INFORMATION

1. The first part of the document is a letter from the President of the United States to the Senate, dated January 1, 1865. The letter is signed by Abraham Lincoln and is addressed to the Senate. The letter is a copy of the original letter and is not a reproduction. The letter is a copy of the original letter and is not a reproduction. The letter is a copy of the original letter and is not a reproduction.

1. Reg. from sec. 800 (BAC) - 1000
2. Reg. from sec. 800 (BAC) - 1000

LIB. VII.

Definitiones.

I.  Nitas est, secundum quam unumquodque eorum quæ sunt, unum dicitur.

II. Numerus autem est, ex unitatibus composita multitudo.

III. Pars est numerus numeri, minor majoris, quum minor metitur majorem.

Omnis pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius est pars, metitur; ut 4 dicitur tertia pars numeri 12; quia metitur 12 per 3.

IV. Partes autem, cum non metitur.

Partes quæcunque nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos maxima communis duorum numerorum mensura utrumque eorum metitur. ut 10 dicitur $\frac{2}{3}$ numeri 12, eo quod maxima communis mensura, nempe 2, metitur 10 per 2, & 12 per 3.

V. Multiplex verò major minoris, cum majorem metitur minor.

VI. Par numerus est, qui bifariam dividitur.

VII. Impar verò numerus, qui bifariam non dividitur, vel qui unitate differt à pari.

VIII. Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

IX. Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

X. Impariter verò impar numerus est; quem impar numerus metitur per numerum imparem.

XI. Primus numerus est, quem sola unitas metitur.

XII. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura metitur.

XIII. Com-

XIII. Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

XIV. Compositi autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

In hac definitione & precedenti unitas non est numerus.

XV. Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

Hinc, in omni multiplicatione unitas est ad multiplicatorem ut multiplicatus ad productum.

Nota, quod saepe cum multiplicandi sunt quivis numeri, puta A in B, litterarum conjunctio productum denotat. Sic AB = A in B. item CDE = C in D in E.

XVI. Cum autem duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri sese mutuo multiplicaverint, latera illius dicentur. Sic 2 (C) in 3 (D) = 6 = CD, est numerus planus.

XVII. Cum vero tres numeri mutuo sese multiplicantes fecerint aliquem, qui procreatus erit, solidus appellabitur; qui autem numeri mutuo sese multiplicaverint, latera illius dicentur. Sic, 2 (C) in 3 (D) in 5 (E) = 30 = CDE est numerus solidus.

XVIII. Quadratus numerus est, qui aequaliter aequalis, vel qui sub duobus aequalibus numeris continetur. Sit A latus quadrati; quadratus sic notatur, AA, vel Aq.

XIX. Cubus vero, qui aequaliter aequalis aequaliter, vel qui sub tribus aequalibus numeris continetur. Sit A latus cubi, cubus notatur sic, AAA, vel AC.

In hac definitione, & tribus precedentibus, unitas est numerus.

XX. Nu-

XX. Numeri proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æquemultiplex est, vel eadem pars; vel deniq; cum pars primi secundum, & eadem pars tertii æquè metitur quartum, vel vice versâ. $A. B :: C. D.$ hoc est $3. 9 :: 5. 15.$

XXI. Similes plani, & solidi numeri sunt, qui proportionalia habent latera,

Latera nempe non qualibet, sed quadam

XXII. Perfectus numerus est, qui suis ipsis partibus est æqualis.

Ut 6. & 28. Numerus vero qui suis ipsis partibus minor est, abundans appellatur, qui vero maior, diminutus. ut 12 est abundans, 15 est diminutus.

XXIII. Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

In divisione, unitas est ad quotientem, ut dividens ad divisum. Nota, quod numerus alteri lateri interjectâ subscriptus divisionem denotat, sic

$\frac{A}{B} = A$ divis per B. item $\frac{CA}{B} = CA$ divis per B.

Termini, sive radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportionem numeri sumi nequeunt.

Postulata.

1. **P**ostuletur, cuilibet numero, quolibet sumi posse æquales, vel multiplices.

2. Quolibet numero sumi posse maiorem.

3. Additio, subtractio, multiplicatio, divisio, extractionesque radicum, seu laterum numerorum quadratorum, & cuborum conceduntur etiam, tanquam possibilia.

Axiomata

Axiomata.

1. **Q**uicquid convenit uni æqualium numerorum, convenit & reliquis æqualibus numeris.

2. Partes eidem parti, vel iisdem partibus ædem, sunt quoque inter se eadem.

3. Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem, eadem partes fuerint, æquales inter se sunt.

4. Quorum idem numerus, vel æquales, eadem partes fuerint, æquales inter se sunt.

5. Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum metitur.

6. Omnis numerus seipsum metitur per unitatem.

7. Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Hinc nullus numerus primus planus est, sed solidus, quadratus, vel cubus.

8. Si numerus numerum metiatur, & ille per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates, hoc est per ipsum numerum metientem.

9. Si numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, ipsum quem metitur, producit.

10. Numerus quocunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

11. Numerus quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

12. Numerus metiens totum, & ablatum, metitur & reliquum.

PROP.

gas, sit major quæpiam G ergò G metiens CD,
 a metitur AE, e & reliquum EB, d ipsúmque
 CF, e proinde & reliquum FD, e major mino- e *suppos.*
 rem. a Q. E. A. h 9. ax. 1.

Coroll.

Hinc, numerus metiens duos numeros, me-
 titur quoque maximam eorum communem men-
 suram.

PROP. III.

A 12 Tribus numeris datis A, B, C
 B 8 non primis inter se, maximam
 D 4 eorum communem mensuram E
 C 6 reperire.

E .. 2 Inveni D maximam com-
 F . . . munem mensuram duorú A, B.
 Si D metitur tertium C; liquet

D maximam esse trium communem mensuram.
 Si D non metitur C, erunt saltem D, & C com-
 positi inter se, ex coroll. præcedentis. Sit igitur
 ipsorum D, & C maxima communis men-
 sura E. erit E is, quem quæris.

Nam E a metitur C, & D; a ac D ipsos A, & a *constr.*
 B metitur; b ergò E metitur singulos A, B, C; b 11. ax. 7.
 nec major aliquis (F) eos metietur; nam si hoc
 affirmas, c ergò F metiens A, & B, eorum ma- c *cor. 1. 7.*
 ximam comunem mensuram D metitur. Eo-
 dem modo, F metiens D, & C, e eorum maxi-
 mam communem mensuram E, d major mi- d *suppos.*
 norem, metitur. e Q. E. A. e 9. ax. 1.

Coroll.

Hinc, numerus metiens tres numeros, maxi-
 mam quoque eorum communem mensuram me-
 titur.

PROP. IV.

A..... 6 *Omnis numerus A, omnis*
 B..... 7 *numeri B, minor majoris, aut*
 B..... 18 *pars est, aut partes.*
 B..... 9. *Si A, & B primi sint*
 inter se, ^aerit A tot par-
 tes numeri B, quot sunt in A unitates. (ut
 a 4. d. f. 7. 6 = $\frac{2}{3}$ 7.) Sin A metiatur B, ^bliquet A esse par-
 b 3. def. 7. tem ipsius B. (ut 6 = $\frac{1}{3}$ 18.) denique si A, &
 c 4. def. 7. B aliter composiri inter se fuerint, ^cmaxima
 communis mensura determinabit, quot partes A
 conficiat ipsius B; ut 6 = $\frac{2}{3}$ 9.

PROP. V.

A..... 6 D... 4
 6 6 4 4
 B..... G..... C 12. E... H... F 8

Si numerus A numeri BC pars fuerit, & alter
 D alterius EF eadem pars; & simul uterque
 (A+D) utriusque simul (BC+EF) eadem
 pars erit, quæ unus A unius BC.

Nam si BC in suas partes BG, GC ipsi A
 æquales; atque EF in suas partes FH, HF ipsi
 D æquales resolvantur; ^aerit numerus partium
 in BC æqualis numero partium in EF. Quam
 igitur A+D ^b=BG+EH=GC+HF, crit
 A+D toties in BC+EF, quoties A in BC.
 Q. E. D.

Vel sic brevius. Sit $a = \frac{x}{2}$ & $b = \frac{y}{2}$. ^cergo

$$a+b = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2}. \text{ Q. E. D.}$$

PROP. VI.

$\begin{matrix} 3 & 3 & & 4 & 4 \\ A \dots G \dots B & 6 & D \dots H \dots E & 8 \end{matrix}$ Si nu-
 $\begin{matrix} C \dots 9 & F \dots 12 \end{matrix}$ merus AB
 partes fuerit; & alter DE alterius F eadem partes
 & simul uterq; (AB+DE) utriusq; simul (C+F)
 eadem partes erit, quæ unus AB unius C.

Divide AB in suas partes AG, GB; &
 DE in suas DH, HE. Partium in utroque
 AB, DE æqualis est multitudo, ex hypoth.
 Quum igitur AG^a sit eadem pars numeri C, a hyp.
 quæ DH numeri F, b erit AG+DH eadem b 5. 7.
 pars compositi C+F, quæ unus AG unius C.
 Eodem modo GB+HE eadem pars est ejus-
 dem C+F, quæ unus GB unius C; c ergò c 2. ax. 7.
 AB+DE eadem partes est ipsius C+F, quæ
 AB ipsius C. Q. E. D.

Vel sic. Sit $a = \frac{2}{3}x$. & $b = \frac{2}{3}y$. d ergò $a+b = a$ 2. ax. 1.
 $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}y + x$. Q. E. D.

PROP. VII.

$\begin{matrix} 5 & 3 \\ A \dots E \dots B & 8 \end{matrix}$ Si numerus
 $\begin{matrix} 6 & 10 & 6 \\ G \dots C \dots F \dots D & 16 \end{matrix}$ AB numeri
 CD pars fue-
 rit, qualis ab-
 latus AE ab-
 lati CF; & reliquis EB reliqui FD eadem pars
 erit, qualis totus AB totius CD.

a Sit EB eadem pars numeri GC, quæ AB a 1. post. 7.
 ipsius CD, vel AE ipsius CF. b ergò AE + EB b 5. 7.
 eadem est pars ipsius CF + GC, quæ AE ipsius
 CF, vel AB ipsius CD. c ergò GF = CD. au- c 6. ax. 1.
 fer communem CF, d manet GC = FD. e ergò d 3. ax. 1.
 EB eadem est pars reliqui FD (GC) quæ totus e 2. ax. 7.
 AB totius CB. Q. E. D.

Vel sic. Sit $a + b = x$; & $c + d = y$; atque
 tam $x = 3y$, quam $a = 3c$; dico $b = 3d$. Nam
 $3c + 3d = 3y = x = a + b$. aufer utrinq; f 1. 2.
 $3c = a$ & b remanet $3d = b$. Q. E. D. g hyp.

Ponitur $A \sqsupset D$. Sint igitur $BG, GC, \& EH, HF$ partes numerorum BC, EF , hæ ipsi A , illi ipsi D pares. Utrinque multitudo partium æqualis ponitur. Liquet verò BG eandem esse partem, aut easdem partes ipsius EH , quæ GC ipsius HF ; quare $BC (BG + GC)$ ipsius $EF (EH + HF)$ eadem pars est aut partes; quæ unus $BG (A)$ unius $EH (D)$ Q. E. D.
Vel sic; Sit $a = \frac{b}{3}$ & $c = \frac{d}{3}$. dico $a = c$. *a. 1. ax. 7.*

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \text{ Nam } \frac{c}{a} = \frac{\frac{d}{3}}{\frac{b}{3}} = \frac{d}{b}$$

PROP. X.

$A..G..B$ 4
 $C.....$ 6
 $D.....$ 10
 $E.....$ 15
 $F.....$ 15
Si numerus AB numeri C partes fuerit, & alter DE alterius F eadem partes: Et vicissim quæ partes est primus AB tertii DE, aut pars: Eadem partes erit & secundus C quarti F, aut pars.

Ponitur $AB \sqsupset DE$, & $C \sqsupset F$. Sint $AG, GB, \& DH, HE$ partes numerorum $C, \& F$, tot nempe in AB , quot in DE . Constat AG ipsius C eandem esse partem, quæ DH ipsius F . quare vicissim AG ipsius DH , pariterque GB ipsius HE , & proinde conjunctim AB ipsius DE eadem pars erit, aut partes, quæ C ipsius F . Q. E. D. *a. 9. 7. b. 5. & 9. 7.*

Applicare potes secundam præcedentis demonstrationem etiam huic.

PROP. XI.

$A....$ 4
 $E....$ 3
 $B....$ 7
 $C.....$ 8
 $F.....$ 6
 $D....$ 14
Si fuerit, ut totus AB ad totum CD, ita ablatum AE ad ablatam CF; & reliquus EB ad reliquum FD
O 3

FD erit, ut totus AB ad totum CD.

- a 4. 7. Sit primò AB $\supset$ CD, ^a ergò AB vel pars
 b 10. def. est, vel partes numeri CD; ^b eademque pars est,
 c 7. vel 8. 7. vel partes ipse AE ipsius CF; ^c ergò reliquus EB
 reliqui FD eadem pars est, aut partes, quæ totus
 AB totius CD. ^b ergò AB. CD :: EB. FD.
 Sin fuerit AB $\sqsubset$ CD; eodem modo erit juxta
 modò ostensa, CD. AB :: FD. EB, ergò in-
 vertendo AB. CD :: EB. FD.

PROP. XII.

A, 4. C, 2. E, 3. Si sint quotcunq; nu-
 B, 8. D, 4. F, 6. meri proportionales (A.
 B :: C. D :: E. F) e-

rit quemadmodum unus antecedentium A ad unum
 consequentium B, ita omnes antecedentes (A +
 C + E) ad omnes consequentes (B + D + F).

- Sint primò, A, C, E minores, quàm B, D, F.
 a 20. def. 7. ergò (propter easdem rationes) ^a erit A eadem
 b 5. & 6. 7. pars aut partes ipsius B, quæ C ipsius D, ^b ergò
 conjunctim A + C eadem erit pars aut partes
 ipsius B + D; quæ namus A unius B. Similiter
 A + C + E eadem pars est, aut partes ipsius
 c 20. def. 7. B + D + F, quæ A ipsius B. ^c ergò A + C +
 E. B + D + F :: A. B. Q. E. D. Sin A, C, E,
 ipsius B, D, F majores ponantur, idem ostende-
 tur invertendo.

PROP. XIII.

Si quatuor numeri proporti-
 A, 3. C, 4. onales sint (A. B :: C. D.
 B, 5. D, 12. & vicissim proportionales e-
 runt (A. C :: B. D.)

- Sint primò A, & C ipsius B, & D minores,
 a 20. def. 7. atque A $\supset$ C. Ob eandem proportionem, ^a erit
 b 9. & 10. 7. A eadem pars, aut partes ipsius B, quæ C ipsius
 D, ^b ergò vicissim A ipsius C eadem pars est, aut
 partes, quæ B ipsius D. ergò A. C :: B. D. Sin
 A $\sqsubset$

A $\square$ C; atque A, & C majores statuantur, quàm B, & D, eadem res erit, proportionem invertendo.

PROP. XIV.

A, 9. D, 6. Si sint quoscunque numeri
B, 6. E, 4. A, B, C, & alii totidem D, E, F
C, 3. F, 2. illis æquales multitudine, qui bini
sumantur, & in eadem ratione
(A. B :: D. E. & B. C :: E. F) etiam ex æ-
qualitate in eadem ratione erunt. (A. C :: D. F).

Nam quia A. B :: D. E, ¹ erit vicissim, A. D :: a 13. 7.
B. E :: ² C. F. ² ergò iterum permutando
A. C :: D. F. Q. E. D.

PROP. XV.

1. D.. Si unitas numerum quem-
B... 3. E 6. piam B metiatur; æque autem
alter numerus D alterum
quendam numerum E metiatur; & vicissim æque
unitas tertium numerum D metietur, & secundus B
quartum E.

Nam quia 1 est eadem pars ipsius B, quæ D
ipsius E, ¹ erit vicissim 1 eadem pars ipsius D, a 9. 7.
quæ B ipsius E. Q. E. D.

PROP. XVI.

Si duo numeri A, B sese
mutuò multiplicantes fece-
rint aliquos AB, BA, geni-
ti ex ipsis AB, BA æquales
inter se erunt.

Nam quia A. B = A in B, ¹ erit 1 in A toti- a 15. def. 7.
es quoties B in AB. ^b ergò vicissim 1 in B toties b 15. 7.
erit, quoties A in AB. atqui quoniam BA = B c 4. ax. 7.
in A, ² erit 1 in B toties, quoties A in BA. er-
gò quoties 1 in AB, toties 1 in BA; & c pro-
inde AB = BA. Q. E. D.

PROP. XVII.

A, 3. Si numerus A duos nu-
 B, 2. C, 4. meros B, C multiplicans fe-
 AB, 6. AC, 12. cerit aliquos AB, AC; ge-
 niti ex ipsis eandem ratio-
 nem habebunt, quam multiplicati. (AB. AC ::
 B. C.)

- a 15. def. 7. Nam quia $AB = A$ in B, ^{2} erit 1 toties, in
 A, quoties B in AB. ^{2} item quia $AC = A$ in C.
 erit 1 toties in A, quoties C in AC. ergo quo-
 b 20. def. 7. ties B in AB, toties C in AC. quare B. AB ::
 c 13. 7. C. AC. ^{c} ergo vicissim, B. C :: AB. AC.
 Q. E. D.

PROP. XVIII.

C, 5. C, 5. Si duo numeri A, B,
 A, 3. B, 9. numerum quempiam C
 AC, 15. BC, 45. multiplicantes fecerint a-
 liquos AC, BC; geniti
 ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multipli-
 cantes. (A. B :: AC. BC.)

- a 16. 7. Nam $AC^2 = CA$; & $BC^2 = CB$; sic idem
 C multiplicans A, & B. producit AC, & BC.
 b 17. 7. ^{b} ergo A. B :: AC. BC. Q. E. D.

Schol.

Ex his pendet modus vulgaris reducendi fra-
 ctiones ($\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$) ad eandem denominationem.
 Nam duc 9 tam in 3, quam in 5, proveniunt
 $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ quoniam ex his, 3. 5 :: 27. 45. item
 duc 5 in 7, & 9, prodeunt $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, quia 7. 9 ::
 35. 45.

PROP. XIX.

A, 4. B, 6. C, 8. D, 12. Si quatuor nu-
 A D, 48. BC, 48. meri proportiona-
 les fuerint, (A B ::
 C. D); qui ex primo & quarto fit numerus AD,
 aequalis est ei, qui ex secundo & tertio fit, numero
 BC.

BC. Et si qui ex primo & quarto sit numerus AD, equalis sit ei, qui ex secundo & tertio sit, numero BC, ipsi quatuor numeri proportionales erunt. (A. B :: C. D.)

1. Hyp. Nam A C. AD^a :: C. D^b :: A. B^{byp.}
B^c :: AC. BC. ^d ergò AD = BC. Q. E. D. ^c 18. 7.]
2. Hyp. Quoniam ^e AD = BC, erit AC. ^e AD^f :: AC. BC. Sed AC. AD^f :: C. D. & ^f 7. 5.
AC. BC^h :: A. B. ^h ergò C. D :: A. B. Q. E. D. ^g 17. 7.
^h 18. 7.
^k 11. 5.

PROP. XX.

A. B. C. Si tres numeri proportionales
4. 6. 9. les fuerint A. B :: B. C.)
AC, 36. BB, 36. qui sub extremis continetur
D, 6. (AC), equalis est ei, qui
à medio efficitur (BB). Et si
qui sub extremis continetur (AC) equalis fuerit ei
(Bq), qui sub medio, ipsi tres numeri proportionales erunt ($\frac{A}{B} :: \frac{B}{C}$).

1. Hyp. Nam sume D = B. ^a ergò A. B :: B^b 19. 7.
D (B). C. ^b quare AC = BD, ^a vel BB.
Q. E. D.
2. Hyp. Quia AC = BD, ^c erit A. B :: D^d 12. 7.
(B). C. Q. E. D.

PROP. XXI.

A...G. B 5. E 10. Numeri AB,
C...H. D 3. F 6. CD minimi omnium eandem cum
eius rationem habentium (E, F) metiuntur aequè numeros E, F eandem cum eis rationem habentes, maior quidem AB majorem E, minor verò CD minorem F.

Nam AB. CD^a :: E. F. ^b ergò vicissim ^a byp.
AB. E :: CD. F. ^c ergò AB eadem pars est, ^b 13. 7.
vel partes ipsius E, quæ CD ipsius F. Non partes, nam si ita, sint AG, GB partes numeri E;
& CH, HD partes numeri F. ^c ergò AG. E :: CH.
Q 5

d 13. 7.
e hyp.

CH. F; & permutando AG. CH^a :: E. F^e ::
AB. CD. ergò AB, CD non sunt minimi in
suâ ratione, contra hypoth. ergò, &c.

PROP. XXII.

A, 4. D, 12. Si fuerint tres numeri A, B,
B, 3. E, 8. C; & alii ipsis multitudine æ
C, 2. F, 6. quales D, E, F; qui bini su-
mantur, & in eadem ratione,
fuerit autem perturbata eorum proportio (A.B :: E.F
& B.C :: D.E); etiam ex æqualitate in eadem ratio-
ne erunt (A. C :: D. F.)

a hyp.
b 19. 7.
c 1. ax. 1.
d 12. 7.

Nam quia A. B^a :: E. F, erit AF = BE; &
quia B. C ::^a D. E, ^berit BE = CD. ^cergò
AF = CD. ^dquare A. C :: D. F. Q. E. D.

PROP. XXIII.

A, 9. B, 4. Primi inter se numeri A, B,
C ---- D --- minimi sunt omnium eandem
E - - - - - rationem habentium.

a 21. 7.

Si fieri potest, sint C, & D
minores, quàm A, & B, atque in eadem ratio-
ne. ^aergò C metitur A æquè, ac D metitur B,
putà per eundem numerum E: quoties igitur
1. in E, ^btoties erit C in A. ^cquare vicissim quo-
ties 1. in C toties E in A. simili discursu quoties
1. in D, toties E in B. ergò E utrumque A, & B
metitur; qui proinde inter se primi non sunt,
contra Hypoth.

b 23. def. 7.
c 15. 7.

PROP. XXIV.

A, 9. B, 4. Numeri A, B, minimi omni-
um eandem cum eis rationem
C --- D --- E --- habentium, primi inter se sunt.

a 9. ax. 7.
b 17. 7.

Si fieri potest habeant A,
& B communem mensuram C; is metiatur A
per D, & B per E; ^aergò CD = A, ^b& CE = B.
^cquare:

^a quare $A. B :: D. E.$ Sed $D, \& E$ minores sunt, ^b 17. 7.
quàm $A, \& B$, utpote eorum partes. Ergò $A,$
& B non sunt minimi in sua ratione, contra
hypoth.

PROP. XXV.

*Si duo numeri A, B primi inter
se fuerint, qui unum eorum A
 C 3. D - metitur numerus C , ad reliquum
 B primus erit.*

Nam si affirmes aliquem D numeros $B, \& C$
metiri, ^a ergò D metiens C , metitur A . ergò ^a 11. ax. 7.
 $A \& B$ non sunt primi inter se, contra Hypoth.

PROP. XXVI.

$A, 5.$ $C, 8.$ *Si duo numeri A, B ad
 $B, 3.$ ^a C quempiam C primi fuerint,
 $AB, 15.$ E ---- etiam ex illis genitus AB
 F ---- ad eundem C primus erit.*

Si fieri potest, sit ipso-
rum $AB, \& C$ communis mensura, numerus E .

sitque $\frac{AB}{E} = F$; ^a ergò $AB = EF$; ^b quare E . ^a 9. ax. 7.
^b 19. 7.

$A :: B. F$ Quia verò A primus est ad C quem
 E metitur, ^c erunt $E \& A$ primi inter se, ^d ade- ^c 25. 7.
oque in sua proportionem minimi, & ^e proinde x - ^d 23. 7.
què metiuntur, $B, \& F$; nempe E ipsum $B, \& A$ ^e 21. 7.

ipsum F . Quum igitur E utrumque B, C . me-
tiatur, non erunt illi primi inter se, contra
Hypoth.

PROP. XXVII.

$A, 4.$ $B, 5.$ *Si duo numeri, A, B , primi
 $Aq, 16.$ inter se fuerint, etiam ex uno eo-
 $D, 4.$ rum genitus (Aq) ad reliquum
 B primus erit.*

Sume $D = A$; ergò ^a singuli $D, \& A$ primi ^a 11. ax. 7.
sunt ad B . ^b quare AD , vel Aq . ad B primus est. ^b 26. 7.

$Q. E. D.$

PROP.

PROP. XXVIII.

A, 5. C, 4. Si duo numeri A, B ad
 B, 3. D, 2. duos numeros C, D, u-
 AB, 15. CD 8. terque ad utrumque primi
 fuerint, & qui ex eis gi-
 gmentur AB, CD, primi inter se erunt.

a 26. 7.

b 26. 7.

Nam quia A & B ad C primi sunt, ^a erit AB
 ad C primus. Eadem ratione erit AB ad D
 primus. ^b ergo AB ad CD primus est. Q. E. D.

PROP. XXIX.

A, 3. B, 2. Si duo numeri A, B primi
 Aq, 9. Bq, 4. inter se fuerint, & multipli-
 Ac, 27. Ec, 8. cans uterque seipsum fecerit a-
 liquem (Aq, & Bq); & ge-
 niti ex ipsis (Aq, Bq) primi inter se erunt; & si
 qui in principio A, B genitos ipsos Aq, Bq multipli-
 cantes fecerint aliquos (Ac, Bc); & hi primi inter se
 erunt: & semper circa extremos hoc eveniet.

a 27. 7.

b 28. 7.

Nam quia A primus est ad B, ^a erit Aq ad B
 primus. & quia Aq primus ad B, ^a erit Aq ad
 Bq primus. Rursus quia tam A ad B, & Bq
 quam Aq ad eosdem B, & Bq primi sunt, ^b erit
 A x Aq, id est Ac, ad B x Bq, id est Bc, pri-
 mus. Et sic porro de reliquis.

PROP. XXX.

8 5 Si duo numeri
 A B C 13. D ---- AB, BC primi
 inter se fuerint,
 etiam uterque simul (AC) ad quemlibet illorum
 AB, BC primus erit. Et si uterque simul AC ad
 unum aliquem illorum AB primus fuerit, etiam qui
 in principio numeri AB, BC primi inter se erunt.

1. Hyp. Nam si AC, AB compositos velis,
 a 12. ax. 7. sit D communis mensura. ^a Is metietur reli-
 quum BC. ergo AB, BC non sunt primi inter
 se, contra Hypoth.

2. Hyp.

2. Hyp. Positis AC, AB inter se primis, vis
Dipforum AB, BC communem esse mensuram.

Is igitur totum AC metitur. quare AC, AB ^b 10. ax. 7.
non sunt primi inter se, contra Hypoth.

Coroll.

Hinc numerus, qui ex duobus compositus, ad
unum illorum primus est, ad reliquum quoque
primus est.

PROP. XXXI.

*Omnis primus numerus A ad omnem
A 5, B, 8. numerum B, quem non metitur,
primus est.*

Nam si communis aliqua mensura metiatur
utrumque A, B; ^a non erit A primus numerus, a 11. def. 7.
contra Hypoth.

PROP. XXXII.

A, 4. D, 3. Si duo numeri AB, se mu-
B, 6. E, 8. tuo multiplicantes fecerint ali-
AB, 24. quem AB; genitum autem ex
ipsis AB metiatur aliquis pri-
mus numerus D, is etiam unum eorum, qui à prin-
cipio, A, vel B metietur.

Pone numerum D non metiri A; sit verò

$\frac{AB}{D} = E$. ^a ergò $AB = DE$. ^b quare D. A :: ^a 9. ax. 7.
B. E. ^c est verò D ad A primus. ^a ergò D, & ^b 19. 7.
A minimi sunt in suâ ratione; ^c proinde D me- ^c hyp. 6.
tetur B, æquè ac A metitur E. liquet igitur pro- ^d 23. 7.
positum. ^e 21. 7.

PROP. XXXIII.

A, 12. *Omnem compositum numerum A, a i-*
B, 2. *quis primus numerus B metitur.*

Unus vel plures numeri ^a metian- a 13. def. 7.
tar A, quorum minimus sit B. is primus erit.

P

Q

PROP. VIII.

$\begin{array}{cccccc} 6 & 2 & 4 & 2 & 2 & \\ A \dots H \dots G \dots E \dots L \dots B & 16 & & & & \\ & 18 & & 6 & & \\ C \dots \dots \dots F \dots \dots D & 24 & & & & \end{array}$

Si numerus AB numeri CD partes fuerit, quales ablati AE ablati CF; & reliquus EB reliqui FD eadem partes erit, quales totus AB totius CD.

Seca AB in AG, GB partes numeri CD; item AE in AH, HE partes numeri CF; & sume $GL = AH = HE$; ^a quare $HG = EL$. & quia ^b $AG = GB$, ^c etiam $HG = LB$. Cum igitur totus AG eadem sit pars totius CD, quæ ablati AH ablati CF; ^d erit reliquus HG, vel EL eadem etiam pars reliqui FD, quæ AG ipsius CD. Eodem pacto, quia GB eadem pars est totius CD, quæ HE, vel GL ipsius CF, ^d erit reliquus LB eadem pars reliqui FD, quæ GB totius CD; ergo $EL + LB$ (EB) eadem est partes reliqui FD, quæ totus AB totius CD. Q. E. D.

Vel sic facilius. Sit $a + b = x$. & $c + d = y$. Item tam $y = \frac{2}{3}x$; quàm $c = \frac{2}{3}a$; vel ^e quod idem est, $3y = 2x$; & $3c = 2a$. Dico $d = \frac{2}{3}b$. Nam $3c + 3d = 3y = 2x = 2a + 2b$. ergo $3c + 3d = 2a + 2b$. aufer utrinque $3c = 2a$; & ^k manet $3d = 2b$. ^l ergo $d = \frac{2}{3}b$. Q. E. D.

PROP. IX.

$\begin{array}{cccc} A \dots 4 & & & \\ 4 & 4 & & \\ B \dots G \dots C & 8 & & \\ 5 & D \dots 5 & & \\ E \dots H \dots F & 10 & & \end{array}$

Si numerus A numeri BC pars fuerit, & alter D alterius EF eadem pars, & vicissim quæ pars est, aut partes primus A tertius D, eadem pars erit, vel eadem partes & secundus BC quarti EF.

Poni-

h 3. ax. 1.

a 3. ax. 1.

b c. n. fr.

c 3. ax. 1.

d 7. 7.

e 9. ax. 7.

f 1. 2.

g 1. ax. 1.

h hyp.

k 3. ax. 1.

l 8. ax. 7.

Ponitur $A \supset D$. Sint igitur BG, GC, & EH, HF partes numerorum BC, EF, hæ ipsi A, illæ ipsi D pares. Utrinque multitudo partium æqualis ponitur. Liquet verò BG ^a eandem esse partem, aut easdem partes ipsius EH, quæ GC ^a ipsius HF; ^b quare BC (BG + GC) ipsius EF (EH + HF) eadem pars est aut partes; quæ unus BG (A) unius EH (D) Q. E. D.

Vel sic; Sit $a = \frac{b}{3}$ & $c = \frac{d}{3}$. dico ^a 1. ax. 7.

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \text{ Nam } \frac{c}{a} = \frac{\frac{d}{3}}{\frac{b}{3}} = \frac{d}{b}$$

PROP. X.

A...G...B 4
C...6

D...H...E 10
F...15

Si numerus AB numeri C partes fuerit, & alter DE alterius F eadem partes: Et vicissim quæ partes est primus AB tertii DE, aut pars: Eadem partes erit & secundus C quarti F, aut pars.

Ponitur $AB \supset DE$, & $C \supset F$. Sint AG, GB, & DH, HE partes numerorum C, & F, tot nempe in AB, quot in DE. Constat AG ipsius C eandem esse partem, quæ DH ipsius F; quare vicissim AG ipsius DH, pariterque GB ipsius HE, & proinde conjunctim AB ipsius DE eadem pars erit, aut partes, quæ C ipsius F. Q. E. D.

Applicare potes secundam præcedentis demonstrationem etiam huic.

PROP. XI.

A...E...B 7
C...F...D 14

Si fuerit, ut totus AB ad totum CD, ita ablatus AE ad ablatam CF; & reliquus EB ad reliquum FD

O 3

FD erit, ut totus AB ad totum CD.

- a 4. 7. Sit primò AB $\sqsupset$ CD, ^a ergò AB vel pars
 b 20. def. est, vel partes numeri CD; eademque pars est,
 c 7, vel 8. 7. vel partes ipse AE ipsius CF; ^c ergò reliquus EB
 reliqui FD eadem pars est, aut partes, quæ totus
 AB totius CD. ^b ergò AB. CD :: EB. FD.
 Sin fuerit AB $\sqsubset$ CD; eadem modo perit juxta
 modò ostensa, CD. AB :: FD. EB, ergò in-
 vertendo AB. CD :: EB. FD.

PROP. XII.

A, 4. C, 2. E, 3. Si sint quotcunq; nu-
 B, 8. D, 4. F, 6. meri proportionales (A.
 B :: C. D :: E. F) e-

rit quemadmodum unus antecedentium A ad. unum
 consequentium B, ita omnes antecedentes (A +
 C + E) ad omnes consequentes (B + D + F).

- Sint primò, A, C, E minores, quàm B, D, F.
 a 20. def. 7. ergò (propter easdem rationes.) ^a erit A eadem
 b 5, & 6. 7. pars aut partes ipsius B, quæ C ipsius D, ^b ergò
 conjunctim A + C eadem erit pars aut partes
 ipsius B + D; quæ unus A unius B. Similiter
 A + C + E eadem pars est, aut partes ipsius
 c 20. def. 7. B + D + F, quæ A ipsius B. ^c ergò A + C +
 E. B + D + F :: A. B. Q. E. D. Sin A, C, E,
 ipsis B, D, F majores ponantur, idem ostende-
 tur invertendo.

PROP. XIII.

Si quatuor numeri proporti-
 A, 3. C, 4. onales sint (A. B :: C. D.
 B, 5. D, 12. & vicissim proportionales e-
 runt (A. C :: B. D.)

- Sint primò A, & C ipsi B, & D minores,
 a 20. def. 7. atque A $\sqsupset$ C. Ob eandem proportionem, ^a erit
 b 9. & 10. 7. A eadem pars, aut partes ipsius B, quæ C ipsius
 D, ^b ergò vicissim A ipsius C eadem pars est, aut
 partes, quæ B ipsius D. ergò A. C :: B. D. Sin
 A $\sqsubset$

A $\square$ C; atque A, & C majores statuantur, quàm B, & D, eadem res erit, proportionem invertendo.

PROP. XIV.

A, 9. D, 6. Si sint quocunque numeri
B, 6. E, 4. A, B, C, & alii totidem D, E, F
C, 3. F, 2. illis æquales multitudine, qui bini
sumantur, & in eadem ratione
(A. B :: D. E. & B. C :: E. F) etiam ex æ-
qualitate in eadem ratione erunt. (A. C :: D. F).

Nam quia A. B :: D. E, ^a erit vicissim, A. D :: a 13. 7.
B. E :: ^a C. F. ^a ergò iterum permutando
A. C :: D. F. Q. E. D.

PROP. XV.

1. D.. Si unitas numerum quem-
B... 3. E 6. pian B metiatur; æque autem
alter numerus D alterum
quendam numerum E metiatur; & vicissim æque
unitas tertium numerum D metietur, & secundus B
quantum E.

Nam quia 1 est eadem pars ipsius B, quæ D
ipsius E, ^a erit vicissim 1 eadem pars ipsius D, a 9. 7.
quæ B ipsius E. Q. E. D.

PROP. XVI.

Si duo numeri A, B sese
mutuò multiplicantes fece-
rint aliquos AB, BA, geni-
ti ex ipsis AB, BA æquales
inter se erunt.

Nam quia A. B = A in B, ^a erit 1 in A toti- a 15. def. 7.
es quoties B in AB. ^b ergò vicissim 1 in B toties b 15. 7.
erit, quoties A in AB. atqui quoniam BA = B c 4. ax. 7.
in A, ^a erit 1 in B toties, quoties A in BA. er-
gò quoties 1 in AB, toties 1 in BA; & c pro-
inde AB = BA. Q. E. D.

PROP. XVII.

A, 3. Si numerus A duos nu-
 B, 2. C, 4. meros B, C multiplicans fe-
 AB, 6. AC, 12. cerit aliquos AB, AC; ge-
 niti ex ipsis eandem ratio-
 nem habebunt, quam multiplicati. (AB. AC ::
 B. C.)

- a 15. def. 7. Nam quia $AB = A$ in B, ^{2} erit 1 toties, in
 A, quoties B in AB. ^{2} item quia $AC = A$ in C.
 erit 1 toties in A, quoties C in AC. ergo quo-
 b 20. def. 7. ties B in AB, toties C in AC. quare B. AB ::
 c 13. 7. C. AC. ^{c} ergo vicissim, B. C :: AB. AC.
 Q. E. D.

PROP. XVIII.

C, 5. C, 5. Si duo numeri A, B,
 A, 3. B, 9. numerum quempiam C
 AC, 15. BC, 45. multiplicantes fecerint a-
 liquos AC, BC; geniti
 ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multipli-
 cantes. (A. B :: AC. BC.)

- a 16. 7. Nam $AC^2 = CA$; & $BC^2 = CB$; sic idem
 C multiplicans A, & B producit AC, & BC.
 b 17. 7. ^{b} ergo A. B :: AC. BC. Q. E. D.

Schol.

Ex his pendet modus vulgaris reducendi fra-
 ctiones ($\frac{2}{3}, \frac{2}{5}$) ad eandem denominationem.
 Nam duc 9 tam in 3, quam in 5, proveniunt
 $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ quoniam ex his, 3. 5 :: 27. 45. item
 duc 5 in 7, & 9, prodeunt $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$. quia 7. 9 ::
 35. 45.

PROP. XIX.

A, 4. B, 6. C, 8. D, 12. Si quatuor nu-
 AD, 48. BC, 48. meri proportiona-
 les fuerint, (A B ::
 C. D); qui ex primo & quarto fit numerus AD,
 aequalis est ei, qui ex secundo & tertio fit, numero
 BC.

BC. Et si qui ex primo & quarto sit numerus AD, equalis sit ei, qui ex secundo & tertio sit, numero BC, ipsi quatuor numeri proportionales erunt. (A. B :: C. D.)

1. Hyp. Nam A C. AD ^a :: C. D ^b :: A. ^b hyp. ^a 17. 7.
B ^c :: AC. BC. ^d ergò AD = BC. Q. E. D. ^c 18. 7. }
2. Hyp. Quoniam ^e AD = BC, erit AC. ^e hyp. ^d 9. 5.
AD ^f :: AC. BC. Sed AC. AD ^g :: C. D. & ^f 7. 5.
AC. BC ^h :: A. B. ^k ergò C. D :: A. B. Q. E. D. ^g 17. 7.
^h 18. 7.
^k 11. 5.

PROP. XX.

A. B. C. Si tres numeri proportionales fuerint A. B :: B. C.)
4. 6. 9. qui sub extremis continetur
AC, 36. BB, 36. (AC), equalis est ei, qui
D, 6. à medio efficitur (BB). Et si
qui sub extremis continetur (AC) equalis fuerit ei
(Bq), qui sub medio, ipsi tres numeri proportionales erunt ($\frac{A}{B} :: \frac{B}{C}$).

1. Hyp. Nam sume D = B. ^a ergò A. B :: B ^a 19. 7.
D (B). C. ^b quare AC = BD, ^a vel EB.
Q. E. D.
2. Hyp. Quia AC = BD, ^c crit A. B :: D ^c hyp. ^d 12. 7.
(B). C. Q. E. D.

PROP. XXI.

A...G..B 5. E 10. Numeri AB,
C...H..D 3. F 6. CD minimi omnium eandem cum
eum rationem habentium (E, F) metiuntur aequè numeros E, F eandem cum eis rationem habentes, maior quidem AB majorem E, minor uerò CD minorem F.

Nam AB. CD ^a :: E. F. ^b ergò vicissim ^a hyp. ^b 13. 7.
AB. E :: CD. F. ^c ergò AB eadem pars est, ^c 20. def. 7.
vel partes ipsius E, quæ CD ipsius F. Non par-
tes, nam si ita, sint AG, GB partes numeri E;
& CH, HD partes numeri F. ^c ergò AG. E ::
CH.

d 13. 7.
c hyp.

CH. F; & permutando AG. CH^a :: E. F^e ::
AB. CD. ergò AB, CD non sunt minimi in
suâ ratione, contra hypoth. ergò, &c.

PROP. XXII.

A, 4. D, 12. Si fuerint tres numeri A, B,
B, 3. E, 8. C; & alii ipsis multitudines æ-
C, 2. F, 6. quales D, E, F; qui bini su-
mantur, & in eadem ratione,
fuerit autem perturbata eorum proportio (A.B :: E.F
& B.C :: D.E); etiam ex æqualitate in eadem ratio-
ne erunt (A.C :: D.F.)

a hyp.
b 19. 7.
c 1. ex. 1.
d 19. 7.

Nam quia A. B^a :: E: F, erit AF = BE; &
quia B. C ::^a D. E, ^b erit BE = CD. ^c ergò
AF = CD. ^d quare A. C :: D. F. Q. E. D.

PROP. XXIII.

A, 9. B, 4. Primi inter se numeri A, B,
C ---- D --- minimi sunt omnium eandem
E - - - - - tam eis rationem habentium.

a 21. 7.

Si fieri potest, sint C, & D
minores, quàm A, & B, atque in eadem ratio-
ne. ^a ergò C metitur A æquè, ac D metitur B,
putà per eundem numerum E: quoties igitur
1. in B, ^b toties erit C in A. ^c quare vicissim quo-
sies 1. in C toties E in A. simili discursu quoties
1. in D, toties E in B. ergò E utrumque A, & B
metitur; qui proinde inter se primi non sunt,
contra Hypoth.

b 23. def. 7.
c 15. 7.

PROP. XXIV.

A, 9. B, 4. Numeri A, B, minimi omni-
C --- um eandem cum eis rationem
D --- E --- habentium, primi inter se sunt.

Si fieri potest habeant A,
& B communem mensuram C; is metiatur A
per D, & B per E; ^a ergò CD = A, ^b & CE = B.
^c quare

a 9. ex. 7.
b 17. 7.

^b quare $A. B :: D. E.$ Sed $D, \& E$ minores sunt, ^b 17. 7.
quàm $A, \& B$, utpote eorum partes. Ergò $A,$
& B non sunt minimi in sua ratione, contra
hypothesis.

PROP. XXV.

*Si duo numeri A, B primi inter
se fuerint, qui unum eorum A
 $C 3.$ $D.$ metitur numerus C , ad reliquum
 B primus erit.*

Nam si affirmes aliquem D numeros $B, \& C$
metiri, ^a ergò D metiens C , metitur A . ergò ^a 11. ax. 7.
 $A \& B$ non sunt primi inter se, contra Hypothesis.

PROP. XXVI.

$A, 5.$ $C, 8.$ *Si duo numeri A, B ad
 $B, 3.$ quempiam C primi fuerint,
 $AB, 15.$ E ----- etiam ex illis genitus AB
 F ----- ad eundem C primus erit.*

Si fieri potest, sit ipso-
rum $AB, \& C$ communis mensura, numerus E .

sitque $\frac{AB}{E} = F$; ^a ergò $AB = EF$; ^b quare E . ^a 9. ax. 7.
^b 19. 7.

$A :: B. F$ Quia verò A primus est ad C quem
 E metitur, ^c erunt $E \& A$ primi inter se, ^d ade- ^c 25. 7.
oque in sua proportionem minimi, & ^e proinde x . ^d 23. 7.
quæ metiuntur, $B, \& F$; nempe E ipsum $B, \& A$. ^e 21. 7.
ipsum F . Quum igitur E utrumque B, C . me-
tiatur, non erunt illi primi inter se, contra
Hypothesis.

PROP. XXVII.

$A, 4.$ $B, 5.$ *Si duo numeri, A, B , primi
 $Aq, 16.$ inter se fuerint, etiam ex uno eo-
 $D, 4.$ rum genitus (Aq) ad reliquum
 B primus erit.*

Sume $D = A$; ergò ^a singuli $D, \& A$ primi ^a 11. ax. 7.
sunt ad B . ^b quare AD , vel Aq . ad B primus est. ^b 26. 7.
 $Q. E. D.$

PROP.

PROP. XXVIII.

A, 5. C, 4. Si duo numeri A, B ad
 B, 3. D, 2. duos numeros C, D, u-
 AB, 15. CD 8. terque ad utrumque primi
 fuerint, & qui ex eis gi-
 gnentur AB, CD, primi inter se erunt.

a 26. 7.

Nam quia A & B ad C primi sunt, ^a erit AB
 ad C primus. Eadem ratione erit AB ad D
 primus. ^b ergo AB ad CD primus est. Q. E. D.

b 26. 7.

PROP. XXIX.

A, 3. B, 2. Si duo numeri A, B primi
 Aq, 9. Bq, 4. inter se fuerint; & multipli-
 Ac, 27. Ec, 8. cans uterque seipsum fecerit a-
 liquem (Aq, & Bq); & ge-
 niti ex ipsis (Aq, Bq) primi inter se erunt; & si
 qui in principio A, B genitos ipsos Aq, Bq multipli-
 cantes fecerint aliquos (Ac, Bc); & hi primi inter se
 erunt: & semper circa extremos hoc eveniet.

a 27. 7.

Nam quia A primus est ad B, ^a erit Aq ad B
 primus. & quia Aq primus ad B, ^a erit Aq ad
 Bq primus. Rursus quia tam Aq ad B, & Bq
 quàm Aq ad eisdem B, & Bq primi sunt, ^b erit
 A x Aq, id est Ac, ad B x Bq, id est Bc, pri-
 mus. Et sic porro de reliquis.

b 28. 7.

PROP. XXX.

3 5 Si duo numeri
 A B C 13. D ---- AB, BC primi
 inter se fuerint,
 etiam uterque simul (AC) ad quemlibet illorum
 AB, BC primus erit. Et si uterque simul AC ad
 unum aliquem illorum AB primus fuerit, etiam qui
 in principio numeri AB, BC primi inter se erunt.

1. Hyp. Nam si AC, AB compositos velis,
 a 12. ax. 7. sit D communis mensura. ^a Is metietur reli-
 quum BC. ergo AB, BC non sunt primi inter
 se, contra Hypoth.

2. Hyp.

2. Hyp. Positis AC, AB inter se primis, vis
D ipforum AB, BC communem esse mensuram.

Is igitur totum AC metitur. quare AC, AB ^b 10. az. 7.
non sunt primi inter se, contra Hypoth.

Coroll.

Hinc numerus, qui ex duobus compositus, ad
unum illorum primus est, ad reliquum quoque
primus est.

PROP. XXXI.

*Omnis primus numerus A ad omnem
A 5, B, 8. numerum B, quem non metitur,
primus est.*

Nam si communis aliqua mensura metiatur
utrumque A, B; ^a non erit A primus numerus, ^a 11. def. 7.
contra Hypoth.

PROP. XXXII.

A, 4. D, 3. Si duo numeri AB, se mu-
B, 6. tuò multiplicantes fecerint ali-
AB, 24. E, 8. quem AB; genitum autem ex
ipsis AB metiatur aliquis pri-
mus numerus D, is etiam unum eorum, qui à prin-
cipio, A, vel B metietur.

Pone numerum D non metiri A; sit verò
 $\frac{AB}{D} = E$. ^a ergò $AB = DE$. ^b quare D. A :: ^a 9. az. 7.
B. E. ^c est verò D ad A primus. ^d ergò D, & ^b 19. 7-
A minimi sunt in suâ ratione; ^e proinde D me- ^c hyp. 6.
tetur B, æquè ac A metitur E. liquet igitur pro- ^d 31. 7.
positum. ^e 23. 7.
^e 21. 7.

PROP. XXXIII.

A, 12. *Omnem compositum numerum A, a'i-*
B, 2. *quis primus numerus B metitur.*

Unus vel plures numeri ^a metian- ^a 13. def. 7.
tar A, quorum minimus sit B. is primus erit.

a 13. def. 7. nam si dicetur compositus, ^a eum minor aliquis
 b 11. ax. 7. metietur, ^b qui proinde ipsum A metietur. quare
 B non est minimus eorum, qui A metiuntur;
 contra Hypoth.

PROP. XXXIV.

*Omnis numerus A aut primus est, aut
 A, 9. eum aliquis primus metitur.*

Nam A necessariò vel primus est,
 vel compositus. Si primus hoc est quod asseri-
 mus. Si compositus, ^a ergò eum aliquis primus
 a 33. 7. metitur. Q. E. D.

PROP. XXXV.

A, 6. B, 4. C, 8. H -- I -- K ---
 D, 2. L ---
 E, 3. F, 2. G, 4.

*Numeris datis quocunque A, B, C reperire mini-
 mos omnium E, F, G eandem rationem cum eis ha-
 bentium.*

Si A, B, C primi sint inter se, ipsi in sua ra-
 a 23. 7. tione minimi ^a erunt. Si compositi sint, ^b esto
 b 3. 7. eorum maxima communis mensura D, qui ipsos
 metiatur per E, F, G. Hi minimi erunt in ra-
 tione A, B, C.

Nam D ductus in E, F, G ^c producit ABC,
 d 17. 7. ^d ergò hi & illi in eadem sunt ratione. Jam puta
 e 21. 7. alios H, I, K minimos esse in eadem; ^e qui pro-
 pterea æquè metientur A, B, C, nempe per nu-
 f 9. ax. 7. merum L. ^f ergò L in H, I, K ipsos A, B, C
 g 1. ax. 1. procreabit. ^g ergò ED = A = HL. ^h unde B.
 h 19. 7. H :: L. D. Sed E ^k ⊢ H; ⁱ ergò L ⊢ D. ergò
 k suppos. D non est maxima communis mensura ipsorum
 l 20. def. 7. A, B, C; contra Hypoth..

Coroll.

Hinc maxima communis mensura quotlibet
 numerorum

numerorum metitur ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem rationem cum ipsis habentium. Ex quo patet methodus vulgaris reducendi fractiones ad minimos terminos.

PROP. XXXVI.

Duobus numeris datis A, B; reperire quem illi minimum metiuntur, numerum.

A, 5. B, 4. *1. Cas.* Si A, & B primi
AB, 20. sint inter se, est AB quæsitus.
D----- Nam liquet A, & B metiri
E---F--- AB. Si fieri potest, metian-
tur A & B aliquem D—AB;

puta per E, & F. ^a ergo AE=D=BF. ^b quare a 9. ax. 7.
A. B :: F. E. Quia verò A, & B ^c primi sunt ^d 1. ax. 1.
inter se, ^e adeoque in sua ratione minimi, ^f æquæ b 19. 7.
metientur A ipsum E, ac B ipsum F. Atqui c hyp.
B. E :: AB. AE (D). ^g ergo AB etiam me- d 23. 7.
tietur D, seipso minorem. Q. E. A. e 21. 7.
f 17. 7.
g 20. def. 7.

A, 6. B, 4. F----- *2. Cas.* Sin
C, 3. D, 2. G-----H----- A, & B inter se
AD, 12. compositi fue-
rint, ^h reperian-

tur C, & D minimi in eadem ratione. ^k ergo k 35. 7.
AD=BC. Erit AD, vel BC quæsitus. k 19. 7.

Nam ^l liquet B, & A ipsum AD, vel BC l 7. ax. 7.
metiri. Puta A, & B metiri F — AD, nempe m 9. ax. 7.
A per G, & B per H. ⁿ ergo AG=F=BH. n 19. 7.
^o unde A. B :: H. G :: C. D. ^p proinde æquæ o constr.
metitur C ipsam H, ac D ipsum G. atqui D. G p 21. 7.
^q :: AD. AG (F). ergo AD ^r metitur F, major q 17. 7.
minorem. Q. E. A. r 20. def. 7.

Coroll.

Hinc, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, major minorem, & minor majorem, producetur numerus minimus, quem illi metiuntur.

PROP. XXXVII.

A, 2. B, 3.

E, ... 6.

C ---- F --- D

Si duo numeri A, B numerum quempiam CD metiantur; etiam minimus E, quem illi metiantur, eundem CD metietur.

Si negas, aufer E ex CD, quoties fieri potest, & relinquatur FD. $\neg$ E. quum igitur A & B^a metiantur E, & E ipsum CF, ^c etiam A, & B metiuntur CF; ^a metiuntur autem totum CD; ^d ergo etiam reliquum FD metiuntur. ergo E non est minimus, quem A, & B metiuntur, contra hyp.

^a hyp.^b const.^c 11. ax. 7.^d 12. ax. 7.

PROP. XXXVIII.

A, 3, B, 4, C, 6.

D, 12.

Tribus numeris datis A, B, C reperire minimum, quem illi metiuntur.

^a 36. 7.

^a Reperi D minimum, quem duo A, & B metiuntur, quem si tertius C metiatur, patet D esse quæsitum. Quod si C non metiatur D, sit E minimus, quem C, & D metiuntur. Erit E requisitus.

A, 2. B, 3. C, 4.

D, 6. E, 12.

F ---

Nam singulos A, B, C metiri E constat ex 11. ax.

7. Quod verò nullum ali-
um F minorem metiantur,

^b 37. 7.

facile ostenditur. Nam si affirmas, ^b ergo D metitur F; ^b proinde E eundem F metitur, major minorem, Quod est absurdum.

Coroll.

Hinc, si tres numeri numerum quempiam metiantur, etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

PROP. XXXIX.

A, 12. Si numerum A quispian numerus
B, 4, C, 3. B metiatur, ille A quem B meti-
tur, partem habebit C, à metiente B
denominatam.

Nam quia $A^a = C,^b$ erit $A = BC.$ *ergò* a hyp.
b 9. ax. 7.
 $A = B.$ Q. E. D. c 7. ax. 7.

PROP. XL.

A, 15. Si numerus A partem habuerit
B, 3. C, 5. quamlibet B, metietur illam nume-
rus C, à quo ipsa pars B denomi-
natur.

Nam quia $BC^a = A,^b$ erit $A = B.$ Q. E. D. a hyp.
b 9. ax. 7.
c 7. ax. 7.

PROP. XLI.

$\frac{1}{2}$ G, 12. Numerum reperire G, qui mini-
 $\frac{1}{3}$ H --- mus cum sit, habeat datas partes,
 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}.$

^aInveniatur G minimus, quem denominato-
res 2, 3, 4 metiuntur. ^bLiquet G habere partes, a 38. 7.
 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}.$ Si fieri potest H $\rightarrow$ G habeat eadẽ b 39. 7.
partes; ^cergò 2, 3, 4 metiuntur H, & proinde c 40. 7.
G non est minimus, quem 2, 3, 4 metiuntur.
contra conftr.

LIB. VIII.

PROP. I.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E - F - - G - - - H - - -



I fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D extremi verò ipsorum A, D primi inter se fuerint, ipsi A, B, C, D minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

Nam, si fieri potest, sint alii totidem E, F, G, H minores in illa ratione. ^a ergò ex æquali A.D. : E. H. ergò A, & D primi numeri, ^b adeoque in sua ratione minimi ^c æquè metiuntur E, & H seipsis minores. Q. E. A.

^a 14. 7.

^b 23. 7.

^c 21. 7.

PROP. II.

I.

A, 2. B, 3.

Aq, 4. AB, 6. Bq, 9.

Ac, 8. AqB, 12. ABq, 18. Bc, 27.

Numeros reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione A ad B.

Sint A, & B minimi in data ratione. Erunt Aq, AB, Bq tres minimi deinceps in ratione A ad B.

Nam AA. AB ^a :: A. B ^a :: AB. BB. item quia A, & B ^b primi sunt inter se, cerunt Aq, Bq inter se primi; ^c proinde Aq, AB, Bq sunt :: minimi in ratione A ad B.

Dico porro, Ac, AqB, ABq, Bc in ratione A ad B quatuor esse minimos. Nam AqA, AqB ^c :: A.B ^c :: ABA (AqB) ABB. ^c arq; A.B :: ABq. BBq. (Bc) Quum igitur Ac, & Bc

^a 17. 7.

^b 24. 7.

^c 29. 7.

^d 1. 8.

^c 17. 7.

& Bc f inter se primi sint, & erunt Ac, AqB, f 29. 7.
ABq, Bc quatuor :: minimi in ratione A ad B.
Eodem modo quotvis proportionales investiga- g 1. 8.
bis. Q. E. F.

Coroll.

1. Hinc, si tres numeri minimi sunt proporti-
onales, extremi quadrati erunt; si quatuor,
cubi.

2. Extremi quocunque proportionales per
hanc propof. inventi in data ratione minimi, in-
ter se primi sunt.

3. Duo numeri, minimi in data ratione, me-
tiuntur omnes medios quocunque minimorum
in eadem ratione, quia scilicet producantur ex
illorum multiplicatione, in alios quosdam nu-
meros.

4. Hinc etiam liquet ex constructione, series
numerorum 1, A, Aq, Ac; 1, B, Bq, Bc; Ac,
AqB, ABq, Bc. constare æquali multitudine
numerorum, ac proinde extremos numeros
quocunque minimorum continuè proportiona-
lium, esse ultimos totidem continuè proportio-
nalianum ab unitate. ut extremi Ac, Bc continuè
proportionalium Ac, AqB; ABq, Bc sunt ultimi
totidem proportionalium ab unitate 1, A, Aq,
Ac, & 1, B, Bq, Bc.

5. 1, A, Aq, Ac; & B, BA, BAq; ac Bq, ABq
sunt :: in ratione 1 ad A. item, B, Bq, Bc; &
A, AB, ABq; ac Aq, AqB sunt :: in ratio-
ne 1 ad B.

PROP. III.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 28.

Si sint quot-
cunque numeri

A, B, C, D deinceps proportionales, minimi omni-
um eandem cum eis rationem habentium; illorum ex-
tremi A, D sunt inter se primi.

Nam.

a 2. 8.

Nam si^a inveniantur totidem numeri minimi in ratione A ad B, illi non alii erunt, quam A, B, C, D; ergo juxta 2. coroll. præcedentis extremi A & D primi sunt inter se. Q. E. D.

PROP. IV.

A, 6, B, 5, C, 4, D, 3.

H, 4, F, 24, E, 20, G, 15.

I --- K --- L ---

Rationibus da-

tis quocumq; in

minimis terminis,

(A ad B, & C ad

D) reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

a 36. 7.

b 3. post. 7.

c 9. ex. 7.

d 18. 7.

e 7. 5.

f 21. 7.

g 37. 7.

^a Reperi E minimum, quem B, & C metiuntur; & B ipsum E ^b æquè metiatur, ac A alterum F, puta per eundem H. ^b item C ipsum E, ac D alterum G æquè metiuntur, erunt F, E, G minimi in datis rationibus. Nam $AH^c = F$; & $BH^c = E$. ^d ergo $A : B :: AH : BH^c :: F : E$. Similiter $C : D :: E : G$. sunt igitur F, E, G deinceps proportionales in datis rationibus. Imò minimi sunt in iisdem: nam puta alios I, K, L minimos esse. ^f ergo A, & B ipsos I, & K, ^f pariterque C & D ipsos K & L æquè metiuntur. ergo B, & C eundem K metiuntur. Quare etiam E eundem K metitur, seipso minorem. Q. E. A.

A, 6, B, 5, C, 4, D, 3, E, 5, F, 7.

H, 24, G, 20, I, 15, K, 21.

Datis verò tribus rationibus A ad B, & C ad D; ac E ad F. Reperi, ut priùs, tres H, G, I minimos deinceps in rationibus A ad B, & C ad D. tunc si E numerum I metiatur,

h 3. post. 7.

^a Sume alterum K, quem F æquè metiatur; erunt quatuor H, G, I, K deinceps minimi, in datis rationibus, quod non aliter probabimus, quam in priori parte.

A, 6.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.

H, 24. G, 29. I, 15.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

S in E non metiatur I, sit K minimus, quem E, & I metiuntur; & quoties ipsum K, toties G ipsum L, & H ipsum M metiatur. quoties verò E ipsum K, toties F ipsum N metiatur, Erunt M, L, K, N minimi deinceps in datis rationibus, quod demonstrabimus, ut prius.

PROP. V.

Plani numeri

C, 4. E, 3.
D, 6. F, 16.
 $\frac{CD}{EF} = \frac{C}{E} + \frac{D}{F}$.

ED, 18.

CD, EF rationem habent ex lateribus compositam.

$$\left(\frac{CD}{EF} = \frac{C}{E} + \frac{D}{F} \right)$$

Nam quia $CD:ED :: C:E$; & $ED:EF ::$

D:F. atque $\frac{CD}{EF} = \frac{CD}{ED} + \frac{ED}{EF}$, erit ratio

$$\frac{CD}{EF} = \frac{C}{E} + \frac{D}{F}. \quad Q. E. D.$$

PROP. VI.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

F, 4. G, 6. H, 9.

Si sint quocunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E: primus autem A secundum B non metiatur, neque alius quispiam ullum metietur.

Quoniam A non metitur B, neque quilibet proximè sequentem metietur; quia $A:B :: B:C :: C:D$, &c. Accipe tres F, G, H minimos in ratione A ad B. quoniam igitur A non metitur B, neque F metietur G. ergò F non est unitas. sed F, & H inter se primi sunt; ergò quum sit ex æquo $A:C :: F:H$, & F non metiatur H, neque A ipsum C metietur; proinde nec B ipsum D, nec C ipsum E, &c. quia $A:C :: B:D :: C:E$, &c. Eodem modo sumptis

sumptis quatuor vel quinque minimis in ratione A ad B, ostendetur A ipsos D, & E; ac B ipsos E, & F non metiri, &c. Quare nullus alium metietur. Q. E. D.

PROP. VII.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E; primus autem A extremum E metiatur, is etiam metietur secundum B.

a 6. 7.

Si negas A metiri B, ^a ergo nec ipsum E metietur, contra Hypoth.

PROP. VIII.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81. Si inter duos
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27. numeros A, B
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108. medii continuâ
proportione ce-
ciderint numeri C, D; quot inter eos medii con-
tinuâ proportionem cadunt numeri; tot & inter alios
E, F eandem cum illis habentes rationem medii
continua proportionem cadent. (L, M.)

a 35. 7.

b 14. 7.

c byp.

d 3. 8.

e 21. 7.

f conftr.

^a Sume G, H, I, K. minimos in ratione A ad C; ^b erit ex æquali, G. K :: A. B :: E. F. Atqui G, & K ^d primi sunt inter se; ^e quare G æquè metitur E, ac K ipsum F. per eundem numerum metiatur H ipsum L, & I ipsum M. ^f itaque E, L, M, F ita se habent ut G, H, I, K; hoc est ut A, B, C, D. Q. E. D.

PROP. IX.

1.

E, 2. F, 3.

G, 4. H, 6. I, 9.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.

Si duo numeri A, B sint inter se primi, & inter eos medii continua proportionem ceciderint numeri, C, D; quot inter eos medii con-
tinuâ

inua proportione ceciderint numeri, totidem (E, G; & F, I) & inter utrumque eorum ac unitatem medii continuâ proportione cadent.

Constat 1, E, G, A; & 1, F, I, B esse $\therefore$; & totidem quot A, C, D, B, nimirum ex 4 coroll. 2. 8. Q. E. D.

PROP. X.

A, 8. I, 12. K, 18. B, 27.

E, 4. DF, 6. G, 9.

D, 2. F, 3.

1.

Si inter duas numeros A, B, & unitatem continuâ proportionales ceciderint numeri (E,

B, & F, G,) quot inter utrumque ipsorum, & unitatem deinceps medii continuâ proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medii continuâ proportione cadent, I, K.

Nam E, DF, G; & A, DqF (I), DG (K), B sunt $\therefore$, per 2. 8. ergo, &c.

PROP. XI.

A, 2. B, 3.

Aq, 4. AB, 6. Bq, 9.

Duorum quadratorum

numerosum Aq, Bq unus

medius proportionalis est

numerus AB. & quadratum Aq ad quadratum

Bq, duplicatam habet lateris A ad latus B ra-

tionem.

^a Liquet Aq, AB, Bq. esse $\therefore$. ^b proinde ^a 17. 7.

ciam $\frac{Aq}{Bq} = \frac{A}{B}$ bis. Q. E. D.

^b 10. def. 5.

PROP.

PROP. XII.

Ac, 27. AqB, 36. ABq, 48. Bc, 64.

A, 3. B, 4.

Aq, 9. AB, 12. Bq, 16.

*Quorum
cuborum nu-
merorum Ac,
Bc duo me-*

*di proportionales sunt numeri AqB, ABq. Et cubus
Ac ad cubum Bc triplicatam habet lateris A ad
latus B rationem.*

a 2. 8.

b 10. def. 5.

*Nam Ac, AqB, ABq, Bc sunt $\therefore$ in ratio-
ne A ad B. proinde $\frac{Ac}{Bc} = \frac{A}{B}$ ter. Q. E. D.*

PROP. XIII.

A, 2. B, 4. C, 8.

Aq, 4. AB, 8. Bq, 16. BC, 32. Cq, 64.

Ac, 8. AqB, 16. ABq, 32. Bc, 64. BqC, 128. BCq, 256. Cc, 512.

*Si sint quotlibet numeri deinceps proportionales,
A, B, C; & multiplicans quisque seipsum faciat
aliquos; qui ab illis producti fuerint Aq, Bq, Cq
proportionales erunt; & si numeri primum positi A,
B, C multiplicantes jam factos Aq, Bq, Cq, secun-
dum aliquos Ac, Bc, Cc; ipsi quoque proportionales
erunt. & semper circa extremos hoc eveniet.*

a 2. 8.

b 14. 7.

*Nam Aq, AB, Bq, BC, Cq sunt $\therefore$. ergo
ex æquo Aq. Bq :: Bq. Cq. Q. E. D.*

*Item Ac, AqB, ABq, Bc, BqC, BCq, Cc
sunt $\therefore$, ergo iterum ex æquo, Ac. Bc :: Bc.
Cc. Q. E. D.*

PROP. XIV.

Aq, 4. AB, 12. Bq, 36.

A, 2.

B, 6.

*Si quadratus nu-
merus Aq quadra-
tum numerum Bq*

*metiatur, & latus unius (A) metietur latus alterius
(B): & si unius quadrati latus A metietur latus al-
terius B, & quadratus Aq quadratum Bq metietur.*

a 2 & 11. 8.

*1. Hyp. Nam Aq. AB² :: Aq. Bq; cum
igitur ex hyp. Aq n. metiatur Bq; idem Aq se-
cundum*

cundum AB ^b metietur, atqui Aq AB :: A. ^b 7. 8.
B. ^c ergò etiam A, metitur B. Q. E. D. ^c 20. def. 7.

2. Hyp. A metitur B. ^c ergò tam Aq ipsum
AB, ^c quàm AB ipsum Bq metitur; ^d & proinde ^d 11. ax. 7.
Aq metitur Bq. Q. E. D.

PROP. XV.

A, 2. B, 6. Si cubus nu-
Ac, 8. AqB, 24. ABq, 72. Bc, 216. merus Ac, cu-
bium numerum
Bc metitur, & latus unius (A) metietur latus
alterius (B): Et si latus A unius cubi Ac latus B
alterius Bc metiatur; & cubus Ac cubum Bc
metietur.

1. Hyp. Nam Ac, AqB, ABq, Bc ^a sunt :: ^a 2. & 12. 8.
ergò Ac, ^b metiens extremum Bc, ^c etiam se- ^b hyp.
cundum AqB metietur. atqui Ac, AqB :: A. B. ^c 7. 8.
^c ergò etiam A metietur B. Q. E. D. ^d 20. def. 7.

2. Hyp. A metitur B; ^d ergò Ac metitur AqB,
isque ABq, & hic Bc; ^c ergò Ac metietur Bc. ^c 11. ax. 7.
Q. E. D.

PROP. XVI.

A, 4. B, 9. Si quadratus numerus Aq
Aq, 16. Bq, 81. quadratum numerum Bq non
metiatur, neq; A latus unius
alterius latus B metietur; & si A latus unius qua-
drati Aq non metiatur B latus alterius Bq, neq;
quadratus Aq quadratum Bq metietur.

1. Hyp. Nam si affirmes A metiri B, ^a etiam
Aq ipsum Bq metietur, contra hyp. ^a 14. 8.

2. Hyp. Vis Aq metiri Bq.; ^a ergò A ipsum
B metietur, contra Hyp.

PROP. XVII.

A, 2. B, 3. Si cubus numerus Ac cu-
 Ac, 8. Bc, 27. bum numerum Bc non metia-
 tur, neque A latus unius lateris
 B alterius metietur. Et si latus A unius cubi Ac
 latus B alterius Bc non metiatur, neque cubus Ac
 cubum Bc metietur.

a 15. 8.

1. Hyp. Dic A metiri B; ^a ergò Ac metietur
 Bc. contra Hypoth.

2. Hyp. Dic Ac metiri Bc; ^a ergò A ipsum B
 metietur. contra Hyp.

PROP. XVIII.

C, 6. D, 2. Duorū similitum pla-
 CD, 12. norum numerorum CD,
 E, 9. F, 3. DE, 18. EF, unus medius pro-
 EF, 27. portionalis est numerus
 DE : & planus CB

ad planum EF duplicatam habet lateris C ad latus
 homologum E rationem.

* 21. def. 7.

Quoniam * ex hyp. C. D :: E. F; permutando erit C. E :: D. F. atque C. E ^a :: CD.

a 17. 7.

b 11. 5.

DE; ^a & D. F :: DE. EF. ^b ergò CD. DE :: DE. EF. Q. E. D.

c 10. def 5.

Ergò ratio CD ad EF duplicata est rationis
 CD ad DE; hoc est rationis C ad E, vel D
 ad F.

Coroll.

Hinc perspicuum est, inter duos similes pla-
 nos cadere unum medium proportionalem, in
 ratione laterum homologorum.

PROP.

PROP. XIX.

CDE, 30. DFE, 60. FGE, 120. FGH, 240.

CD, 6. DF, 12. FG, 24.

C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

Duorum similium solidorum CDE, FGH, duo medii proportionales sunt numeri DFE, FGE. Et solidus CDE ad solidum FGH triplicatam rationem habet lateris homologum C ad latus homologum F.

Quoniam ex * hyp. $C.D :: F.G$; & D. * 21. def. 7.

$E :: G.H$; erit ^a permutando $C.F :: D.G$ ^a 13. 7.

E. H. atqui $CD.DF^b :: C.F$; & $DF.FG^b :: b$ 17. 7.

D. G. ^c quare $CD.DF :: DF.FG :: E.H.$ ^c 11. 5.

^d ergo $CDE.DFE :: DFE.FGE :: E.H :: d$ 17. 7.

$FGE.FGH.$ ergo inter CDE. FGH cadunt duo medii proportionales, DFE, FGE. Q. E. D. ^e 10. def. 3.

^e liquet igitur rationem CDE ad FGH triplicatam esse rationis CDE ad DFE, vel C ad F.

Q. E. D.

Coroll.

Hinc, inter duos similes solidos cadunt duo medii proportionales, in ratione laterum homologorum.

PROP. XX.

A, 12. C, 18. B, 27. Si inter duos nu-

D, 2. E, 3. F, 6. G, 9. meros A, B, unus me-

dus proportionalis ca-

dat numerus C, similes plani erunt illi numeri, A, B.

^a Accipe D, & E minimos in ratione A ad ^a 35. 7.

C, vel C ad B. ^b ergo D æquè metitur A, ac E ^b 21. 7.

ipsum C, puta per eundem F. ^b item D æquè me-

titur C ac E ipsum B, puta per eundem G. ^c er- ^c 9. ex. 7.

go $DF = A$, & $EG = B$. ^d quare A, & B plani ^d 16. def. 7.

sunt numeri. Quia verò $EF^e = C^e = DG$;

^e erit $D.E :: F.G$, & vicissim $D.F :: E.G.$ ^e 12. 7.

^f ergo plani numeri A, & B etiam similes sunt. ^f 21. def. 7.

Q. E. D.)

Q 2

PROP.

PROP. XXI.

A, 16. C, 24. D, 36. B, 54. Si inter
E, 4. F, 6. G, 9. duos nume-
H, 2. P, 2. M, 4. K, 3. L, 3. N, 6. ros A, B duo
medii pro-
portionales cadant numeri C, D; similes solidi erunt
illi numeri, A, B.

a 2. 8. ^a Sume E, F, G minimos $\therefore$ in ratione A ad
b 20. 8. C. ^b ergò E, & G sunt numeri plani similes;
c 21. def. 7. hujus latera sint H & P; illius K, & L: ^c ergò H.
d cor. 18. 8. K :: P. L :: ^d E. F. Atqui E, F, G ipsos A, C,
e 21. 7. D ^e æquè metiuntur; puta per eundem M; i-
démque ipsos, C, D, B æquè metiuntur, puta
f 9. ax. 7. per eundem N. ^f ergò A = EM = HPM ^f &
g 17. def. 7. B = GN = KLN; ^g quare A & B solidi sunt
numeri. Quoniam verò C ^g = FM; & D ^g =
h 17. 7. FN, erit M. N ^h :: FM. FN ^h :: C. D ^h :: E.
k 7. 5. F :: H. K :: P. L. ^m ergò A, & B sunt numeri
l const.
m 21. def. 7. solidi similes. Q. E. D.

PROP. XXII.

A, 4. B, 6. C, 9. Si tres numeri A, B,
C deinceps sint proporti-
onales, primus autem A sit quadratus, & tertius C
quadratus erit.

Inter A, & C cadit medius proportionalis.
a 20. 8. ^a ergò A, & C sunt similes plani; quare ^b cum A
b hyp. quadratus sit, erit C etiam quadratus. Q. E. D.

PROP. XXIII.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. Si quatuor numeri
A, B, C, D deinceps
sint proportionales; primus autem A sit cubus,
& quartus D cubus erit.

a 21. 8. Nam A, & D ^a similes solidi sunt; ergò
b hyp. cum A cubus sit, erit D cubus. Q. E. D.

PROP. XXIV.

A, 16. 24. B, 36. Si duo numeri A, B rationem habeant inter se, quam quadratus numerus C ad quadratum numerum D, primus autem A sit quadratus, & secundus B quadratus erit.

Inter C, & D numeros quadratos, * adeoque * 8. 8. inter A, & B eandem rationem habentes * cadit a 11 8. unus medius proportionalis. Ergo ^b cum A ^b hyp. quadratus sit, ^c etiam B quadratus erit. Q. E. D. c 22. 8.

Coroll.

Liquet ex his, proportionem cujusvis numeri quadrati ad quemlibet non quadratum, exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. unde non erit, Q. Q. :: 1. 2. nec 1. 5 :: Q. Q. &c.

PROP. XXV.

C, 64. 96. 144. D, 216. Si duo numeri A, 8. 12. 18. B, 27. A, B rationem inter se habeant, quam cubus numerus C ad cubum numerum D, primus autem A sit cubus, & secundus B cubus erit.

* Inter C, & D cubos, ^b adeoque inter A & ^a 12. 8. B eandem rationem habentes, cadunt duo medii proportionales. ergo propter A ^c cubum, ^c hyp. ^d 23. 8. etiam B cubus erit. Q. E. D.

Coroll.

Patet etiam ex his proportionem cujusvis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum non posse reperiri in duobus numeris cubis.

PROP. XXVI.

A, 20. C, 30. B, 45. *Similes plani numeri*
 D, 4. E, 6. F, 9. A, B *rationem inter se*
habent, quam quadratus

numerus ad quadratum numerum.

a 18. 8.

b 2. 8.

c 14. 7.

Inter A, & B^a cadit unus medius proportio-
 nalis C, ^b sume tres D, E, F minimos $\therefore$ in ra-
 tione A ad C. Extremi D, F ^b quadrati erunt.
 atqui ex æquali A. B $\epsilon ::$ D. F. ergò A. B $::$
 Q. Q. E. D.

PROP. XXVII.

A, 16. C, 24. D, 36. B, 54. *Similes soli-*
 E, 8. F, 12. G, 18. H, 27. *di numeri A,*
B, rationem ha-
bent inter se, quam cubus numerus ad cubum nume-
rum.

a 19. 8.

b 2. 8.

c 14. 7.

^a Inter A, & B cadunt duo medii proportio-
 nales, puta C & D : ^b sume quatuor E, F, G, H
 minimos $\therefore$ in ratione A ad C. ^b Extremi E,
 H cubi sunt. At A. B $\epsilon ::$ E. H $::$ C. C.
 Q. E. D.

Schol.

Vide Clavium.

1. Ex his infertur, nullos numeros habentes
 proportionem superparticularem, vel superbi-
 partientem, vel duplam, aut aliam quamcunque
 multiplam non denominatam à numero qua-
 drato esse similes planos.

2. Nec duo quivis primi numeri, neque duo
 quicunque inter se primi, qui quadrati non sint,
 similes esse possunt.

LIB. IX.

PROP. I.

A, 6. B, 54.

Aq, 36. 108. AB, 324.



Si duo similes plani numeri A, B multiplicantes se mutuò faciant quendam AB, productus AB quadratus erit.

Nam $A \cdot B^2 :: Aq \cdot AB$; cum a 17. 7. igitur inter A, & B^b cadat unus b 18. 8. medius proportionalis, ^c etiam inter Aq, & B^c 8. 8. cadet unus med. proport. ergò cum primus Aq sit quadratus, ^d etiam tertius AB quadratus d 22. 8. erit. Q. E. D.

Vel sic. Sint ab, cd similes plani, nempe $a \cdot b :: c \cdot d$. ergò $a \cdot d = b \cdot c$. quare $abed$, vel $adbc = adad$ kl 19. 7. y 1. ax. 7. $= Q : ad$.

PROP. II.

Si duo numeri A, B se mutuò multiplicantes faciant AB quadratum, similes plani erunt, A, B.

Nam $A \cdot B^2 :: Aq \cdot AB$; quare cum inter Aq, a 17. 7. AB^b cadat unus medius proportionalis, ^c etiam b 11. 8. ^c 8. 8. unus inter A, & B medius cadet. ^d ergò A, & B d 20. 8. sunt similes plani. Q. E. D.

PROP. III.

A, 2. Ac, 8. Acc, 64. *Si cubus numerus Ac seipsum multiplicans procreet aliquem Acc, productus Acc cubus erit.*

Nam $1 \cdot A^2 :: A \cdot Aq^b :: Aq \cdot Ac$. ergò inter 1, & a 15. def. 7. Ac cadunt duo medii proportionales. Sed $1 \cdot Ac^2 :: b$ 17. 7. $Ac \cdot Acc$. ergò inter Ac, & Acc cadunt etiam duo ^c 8. 8. medii.

Q4

d 23. 8. medii proportionales. Proinde cum Ac sit cubus, ^d erit Acc cubus. Q. E. D.

Vel sic; aaa (Ac) in se ductus facit aaaaaa. (Acc); hic cubus est, cujus latus aa.

PROP. IV.

Ac, 8. Bc, 27. Si cubus numerus Ac
Acc, 64. Ac Bc, 216. cubum numerum Bc multiplicans, faciat aliquem
AcBc, factus AcBc cubus erit.

a 17. 7. Nam Ac. Bc ² :: Acc. AcBc. sed inter Ac,
b 12. 8. & Bc ^b cadunt duo medii proportionales; ergo
c 8. 8. inter Acc, & AcBc totidem cadunt. itaque cum
d 23. 8. Acc sit cubus, ^d erit AcBc etiam cubus. Q. E. D.
Vel sic. AcBc = aaabbb (ababab) = C: ab.

PROP. V.

Ac, 8. B, 27. Si cubus numerus Ac
Acc, 64. AcB, 216. numerum quendam B multiplicans, faciat cubum
AcB; & multiplicatus B cubus erit.

a 17. 7. Nam Acc. AcB ² :: Ac. B. Sed inter Acc, &
b 12. 8. AcB ^b cadunt duo medii proportionales. ergo
c 8. 8. totidem cadent inter Ac, & B. quare cum Ac cubus sit, ^d etiam B cubus erit. Q. E. D.
d 23. 8.

PROP. VI.

A, 8. Aq, 64. Ac, 512. Si numerus A se
ipsum multiplicans faciat Aq cubum; & ipsa A cubus erit.

a byp. Nam quia Aq ² cubus, & AqA (Ac) ^b cubus,
b 19. def. 7. c erit A cubus. Q. E. D.
c 5. 9.

PROP. VII.

A, 6. B, 11. AB, 66. Si compositus numerus
D, 2. E, 3. A numerum quempiam B multiplicans quempiam
faciat AB, factus AB solidus erit.

Quoniam

Quoniam A compositus est, ^a metitur cum a ^a 13. def 7.
 liquis D, puta per E. ^b ergò $A = DE$; ^c quare ^b 9. def 7.
 $DEB = AB$ solidus est. Q. E. D. ^c 17. def 7.

PROP. VIII.

1. a, 3. a², 9. a³, 27. a⁴, 81. a⁵, 243. a⁶, 729.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps propor-
 tionales fuerint (1, a, a², a³, a⁴, &c.): tertius
 quidem ab unitate a² quadratus est; & unum inter-
 mittentes omnes (a⁴, a⁶, a⁸, &c.): quartus autem
 a³ est cubus, & duos intermittentes omnes (a⁶, a⁹,
 &c.) septimus verò a⁶ cubus simul & quadratus, &
 quinque intermittentes omnes (a¹², a¹⁸, &c.)

Nam 1. a² = Q. a. & a⁴ = aaaa = Q. aa.
 & a⁶ = aaaaaa = Q. aaa, &c.

2. a³ = aaa = C. a. & a⁶ = aaaaaa = C.
 aa. & aaaaaaaa = C. aaa, &c.

3. a⁶ = aaaaaa = C. aa = Q. aaa, ergò, &c. a hyp.

Vel juxta Euclidem; quia 1. a⁴ :: a. a², ^b erit ^b 10. 7.

a² = Q: a. ergò cum a², a³, a⁴ sint :: ^c erit ^c 11. 8.

tertius a⁴ etiam quadratus, paritèrque a⁶, a⁸, &c.

Item quia 1. a² :: a². a³. erit a³ = a² in a = d 13. 8.

C: a. ^d ergò quartus ab a³, nempe a⁶, etiam cu-
 bus erit, &c. ergò a⁶ cubus simul & quadratus
 existit, &c.

PROP. IX.

1. a, 4. a², 16. a³, 64. a⁴, 256, &c.

1. a, 8. a², 64. a³, 512. a⁴, 4096.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps pro-
 portiones fuerint (1, a, a², a³, &c.); qui verò
 (a) post unitatem sit quadratus, & reliqui omnes,
 a², a³, a⁴, &c. quadrati erunt. At si a, qui post
 unitatem sit cubus, & reliqui omnes a², a³, a⁴, &c.
 cubi erunt.

1. Hyp. Nam a², a⁴, a⁶; &c. quadrati sunt:
 ex præc. item quia a ponitur quadratus, ^a erit ^a 11. 8.
 tertius a³ quadratus, paritèrque a⁵, a⁷, &c. ergò
 omnes. Q. E. D. ^{2. Hyp.}

b 23. 8.
c 20. 7.
d 3. 9.
e 23. 8.

2. Hyp. a cubus ponitur, b ergo a⁴, a⁷, a¹⁰ cubi sunt: atqui ex præced. a³, a⁶, a⁹, &c. cubi sunt. denique quia 1. a¹ :: a. aa^c, erit a² = Q: a, cubus autem in se^d facit cubum; ergo a² cubus est, & e proinde ab eo quartus a⁵, pariterq; a⁸, a¹¹, &c. cubi sunt, ergo omnes. Q. E. D.

Clarius forsitan sic; Sit quadrati a latus b. ergo series a, a², a³, a⁴, &c. aliter exprimerur sic, bb, b⁴, b⁶, b⁸, &c. liquet verò hos omnes quadratos esse; & sic etiam exprimi posse; Q: b, Q: bb, Q: bbb, Q: bbbb, &c.

Eodem modo, si b latus fuerit cubi a. series ita nominari potest: b³, b⁶, b⁹, b¹², &c. vel C: b, C: b², C: b³, C: b⁴, &c.

PROP. X:

1, a, a², a³, a⁴, a⁵, a⁶. Si ab unitate quot-
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. cunque numeri desceps
proportionales fuerint (1, a, a², a³, &c.); qui verò post unitatem (a) non sit quadratus, neque alius ullus quadratus erit, præter a² tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes (a⁴, a⁶, a⁸, &c.) At si a, qui post unitatem non sit cubus, neque ullus alius cubus erit præter a³ quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes, a⁶, a⁹, a¹², &c.

a hyp.
b i. suppos. &
8 & 9.
c 24. 8.

1. Hyp. Nam si fieri potest, sit a⁵ quadratus numerus. quoniam igitur a. a² :: a⁴. a⁵, atq; inversè a⁵. a⁴ :: a². a; sintque a⁵, & a⁴ quadrati, primusque a² quadratus, e erit a etiam quadratus, contra Hyp.

d 14. 7.

2. Hyp. Si fieri potest, sit a⁴ cubus. quoniam igitur ex æquo a⁴. a⁶ :: a. a³, atque inversè a⁶. a⁴ :: a³. a; sintque a⁶, & a⁴ cubi, & primus a³ cubus, e etiam a cubus erit, contra Hypoth.

e 25. 8.

PROP. XI.

Si a, a², a³, a⁴, a⁵, a⁶. Si ab unitate quocumq; numeri deinceps proportionales fuerint (1, a, a², a³, &c.). minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

Quoniam 1. a :: a. aa. ² erit $\frac{aa}{a} = a = \frac{aaa}{aa}$ & 20. def. 7.7.

Item quia 1. aa^b :: a. aaa. ² erit $\frac{aaa}{a} = aa = b$ 14. 7.7

$\frac{a^4}{aa} = \frac{a^5}{a^3}$ &c. denique quia 1. a³ b :: a. a⁴,

² erit $\frac{a^4}{a} = a^3 = \frac{a^6}{a^2}$ &c.

Coroll.

Hinc, si numerus qui metitur aliquem ex proportionalibus, non sit unus proportionalium, neque numerus per quem metitur, erit aliquis ex proportionalibus.

PROP. XII.

1, a, a², a³, a⁴. Si ab unitate quocumq; numeri deinceps proportionales fuerint (1, a, a², a³, a⁴); quicunque primorum numerorum B ultimum a⁴ metiuntur, idem (B) & cum (a) qui unitati proximus est, metientur.

Dic B non metiri a, ² ergo B ad a primus est; ² ergo B ad a² primus est; & c. proinde ad a⁴, b² 26. 7.7. quem metiri ponitur Q. E. A.

Coroll.

1. Itaq; omnis numerus primus ultimum metiens, metitur quoq; omnes alios ultimum praecedentes.

2. Si aliquis numerus non metiens proximum unitati, metiatur ultimum, erit numerus compositus.

3. Si proximus unitati sit primus numerus, nullus alius primus numerus ultimum metietur.

PROP. XIII.

1. a, a^2, a^3, a^4, a^5 Si ab unitate
 2. $5, 25, 125, 625$ quotcumque numeri
 H -- G -- E -- E -- deinceps proportionales fuerint ($a, a^2, a^3, &c.$), qui vero post unitatem (a) primus sit, maximum nullus alius metietur, prater eos qui sunt in numeris proportionalibus.

Si fieri potest, alius quispiam E metiatur a^4 , nempe per F; a erit F alius extra a, a^2, a^3 . Quia vero E metiens a^4 non metitur a , a^2 erit E numerus compositus; a ergo eum aliquis primus metitur, a qui proinde ipsum a^4 metitur; a ideoque alius non est, quam a . ergo a metitur E. Eodem modo ostendetur F compositus, numerus, metiens a^4 , adeoque a ipsum F metiri. itaque quum $EF^f = a^4 = a$ in a^3 , erit $a : E :: F : a^3$. ergo cum a metiatur E, a æque F metietur a^3 ; puta per eundem G. a Nec G erit a , vel a^2 ; ergo, ut prius, G est numerus compositus, & a eum metitur. quum igitur $FG^f = a^3 = a^2$ in a , erit $a : F :: G : a^2$; & proinde, quia A metitur F, a æque G metietur a^2 , scilicet per eundem H; a qui non est a . ergo quum $GH^x = a^2 = aa$. a erit H. $a :: a : G$. ergo quia a metitur G (ut prius); a etiam H metietur a , numerum primum. Q. F. N.

Sic Euclides satis prolixè; brevius sic; Nam quia a primus est numerus, nullus alius primus ultimum a^4 metietur; proinde nec compositus; & quia omnem compositum aliquis primus metitur. ergo, &c.

PROP. XIV.

A, 30. Si minimum numerum A
B, 2. C, 3. D, 5. primi numeri B, C, D me-
E -- F -- tiantur; nullus alius numerus
primus E illum metietur, pra-
ter eos, qui à principio metiebantur.

Si fieri potest, sit $\frac{A}{E} = E$. ^a Ergò $A = EF$. a 9. ax. 7.

^b Ergò singuli primi numeri B, C, D ipsorum b 32. 7.
E, F unum metiuntur; non E, qui primus po-
nitur, ergò E, minorem scilicet ipso A; contra
Hypoth.

PROP. XV.

A, 9. B, 12. C, 16. Si tres numeri A, B, C
D, 3. E, 4. deinceps proportionales, fu-
erint minimi omnium ean-

dem cum ipsis rationem habentium; duo quilibet
compositi, ad reliquum primi erunt.

^a Sume, D, & E minimos in ratione A ad B. a 35. 7.
^b ergò $A = Dq$; ^b & $C = Eq$; ^b & $B = DE$. Quia b 2. 8.
verò D ad E ^c primus est, ^d erit D + E primus ad c 24. 7.
singulos D, & E. ^e ergò D in D + E ^e $= Dq +$ d 30. 7.
DE (^f A + B) ad E primus est, ideoque ad C e 3. 2.
vel Eq. Q. E. D. Pari pacto DE + Eq (B + C) f primus.
ad D primus est, & proinde ad A = Dq. Q. E. D. g 27. 7.
Denique quia B ad D + E ^h primus est, is ad h 26. 7.
hujus quadratum ^k Dq + 2 DE + Eq (A + 2 k 4. 2.
B + C) primus erit; quare idem B ad A + B + C; l 30. 7.
^l adeoque ad A + C primus erit, Q. E. D.

In hac demonstratione nonnulla in numeris
assumpsimus, quæ in secundo libro de lineis de-
monstrata sunt; id quod brevitatis studio feci-
mus, cum alioqui eadem in numeris demon-
strata habeas apud Clavium, &c.

PROP. XVI.

A, 3. B, 5. C --- Si duo numeri A, B primi inter se fuerint; non erit ut primus A ad secundum B, ita secundus B ad alium quempiam C.

a 23. 7.

b 24. 7.

c 6. ex. 7.

Dic A. B :: B. C. ergo quum A, & B in sua ratione ^a minimi sint, A ^b metietur B æque ac B ipsum C; sed A ^c seipsum etiam metitur; ergo A, & B non sunt primi inter se, contra Hypoth.

PROP. XVII.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E ---

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, extremi autem ipsorum A, D primi inter se sint; non erit ut primus A ad secundum B, ita ultimus D ad alium quempiam E.

a 23. 7.

b 21. 7.

c 20. def. 7.

d 12. ex. 7.

Dic A. B :: D. E. ergo vicissim A. D :: B. E. ergo quum A, & D in sua ratione ^a minimi sint, ^b metietur A ipsum B; ^c quare B ipsum C, & C sequentem D, ^d adeoque A eundem D metietur. Ergo A, & D non sunt primi inter se, contra Hypoth.

PROP. XVIII.

A, 4. B, 6. C, 9. Bq, 16. Duobus numeris datis A, B; considerare an possit ipsis tertius proportionalis C inveniri.

a 9. ex. 7.

b per 20. 7.

Si A metiatur Bq per aliquem C, ^a erit AC = Bq. unde ^b liquet esse A. B :: B. C. Q. E. F. A, 6. B, 4. Bq, 16. Sin A non metiatur Bq, non erit aliquis tertius proportionalis:

c 7. ex. 7.

Nam dic A. B :: B. C. ^a ergo AC = Bq. ^c proinde Bq = C. Scilicet A metitur Bq, contra Hypoth.

PROP.

PROP. XIX.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. Tribus numeris datis A, B, C, considerare an

possit ipsis quartus proportionalis D inveniri.

Si A metiatur BC per aliquem D, ^a ergò a 9. ax. 7. AD=BC; ^b constat igitur esse A. B :: C. D. b ex 19. 7. Q. E. F.

Sin A non metiatur BC, non datur quartus proportionalis, quod ostendetur, prout in præcedenti.

PROP. XX.

Primi numeri plures sunt

A, 2. B, 3. C, 5. omni propositâ multitudine primorum numerorum D, 30. G. --- A, B, C.

^a Sit D minimus, quem A, B, C metiuntur, a 38. 7.

si D+1 primus sit, res patet; si compositus, ergò aliquis primus, puta G, metitur D+x; b 33. 7.

qui non est aliquis trium A, B, C; nam si ita, quum is totum D+1, & ablatum D metiatur, c suppos.

idem reliquam unitatem metietur. Q. E. A. d const. c 12. ax. 7.

Ergò propositorum primorum numerorum multitudo aucta est per D+1; vel saltem per G.

PROP. XXI.

5 5 3 3 2 2
A..... E..... B... F... C.. G.. D 20

Si pares numeri quotcunque AB, BC, CD commutantur, totus AD par erit.

^a Sume EB= $\frac{1}{2}$ AB, & FC= $\frac{1}{2}$ BC, & GD= $\frac{1}{2}$ CD. b 12. 7. c 6. def. 7.
liquet EB+FC+GD= $\frac{1}{2}$ AD. c ergò c 6. def. 7.
AD est par numerus. Q. E. D.

PROP. XXII.

A.....F.B.....G^I.C....H^I.D..L^I.E.22.
 2 7 5 3

PROP. XXV.

$\overset{6}{A} \dots \overset{1}{D}, \overset{3}{C} \dots \overset{10}{B}$ II. Si à pari numero AB
 impar AC detrahatur,
 & reliquus CB impar
 erit.

Nam AC—1 (AD) est par. ergo DB a 7. def. 7.
 est par. ergo CB (DB—1) est impar. Q.E.D. b 24. 9.
 c 7. def. 7.

PROP. XXVI.

$\overset{4}{A} \dots \overset{6}{C} \dots \overset{1}{D}, \overset{11}{B}$ II. Si ab impari numero
 AB impar CB detra-
 hatur; reliquus AC
 par erit.

Nam AB—1 (AD) & CB—1 (CD)
 sunt pares. ergo AD—CD (AC) est par. a 7. def. 7.
 Q.E.D. b 24. 9.

PROP. XXVII.

$\overset{1}{A}, \overset{4}{D} \dots \overset{6}{C} \dots \overset{11}{B}$ II. Si ab impari numero
 AB par detrahatur CB,
 reliquus AC impar erit.

Nam AB—1 (DB)
 est par; & CB ponitur par. ergo reliquus a 7. def. 7.
 CD par est. ergo CD+1 (CA) est impar. b 24. 9.
 Q.E.D. c 7. def. 7.

PROP. XXVIII.

A, 3. Si impar numerus A parem nume-
 B, 4. rum B multiplicans fecerit aliquem
 AB, 12. AB, factus AB par erit.

Nam AB a componitur ex im- a hyp. &
 pari A toties accepto, quoties unitas continetur 15. def. 7.
 in B pari. ergo AB est par numerus. b 21. 9.

Schol.

Eodem modo, si A sit numerus par, erit AB
 par.

PROP. XXIX.

A, 3.

B, 5.

 $\frac{B}{A}, 15.$

Si impar numerus A, imparem numerum B multiplicans, fecerit aliquem AB; factus AB impar erit.

a 15. def. 7.

b 43. 9.

Nam AB^2 componitur ex B impari numero toties accepto, quoties unitas includitur in A etiam impari. $\therefore$ ergo AB est impar. Q. E. D.

Scholium.

B, 12 (C, 4.
A, 3

1. Numerus A impar numerum B parem metiens, per numerum parem C eum metitur.

a 9. ax. 7.

b 29. 9. ;

Nam si C impar dicatur, quoniam $B=AC$, erit B impar; contra Hypoth.

B, 15 (C, 5.
A, 3

2. Numerus A impar numerum B imparem metiens, per numerum C imparem eum metitur.

a 28. 9.

Nam si C dicatur par; ^{2} erit AC, vel B par, contra Hypoth.

B, 15 (C, 5.
A, 3

3. Omnis numerus (A & C) metiens imparem numerum B est impar.

a 28. 9.

Nam si utervis A, vel C dicatur par, ^{2} erit B numerus par, contra Hypoth.

PROP. XXX.

B, 24
A, 3

(C, 8.

D, 12
A, 3

(E, 4.

Si impar numerus A parem numerum B metitur, $\&$ illius dimidium D metietur.

^{2} Sit $\frac{B}{A} = C.$

b ergo C est numerus par.

Sit igitur $E = \frac{1}{2}C$, erit $B^c = CA^d = 2EA^e = 2D.$

f ergo $EA = D$; & ^{s} proinde $\frac{D}{A} = E.$ Q. E. D.

PROP.

a hyp.

b 1. Schol.

29 9.

c 9. ax. 7.

d 1. 2.

e hyp.

f 7. ax. 1.

g 7. ax. 7.

PROP. XXXI.

A, 5. B, 8. C, 16. D --- Si impar numerus A ad aliquem numerum B primus sit, & ad illius duplum C primus erit.

Si fieri potest, aliquis D metiatur A, & C, ergo D metiens imparem A impar erit, & idem a 3. schol. 29. 9. 30. 9. ideo ipsum B paris C semissem metietur. ergo A, & B non sunt primi inter se, contra Hypoth.

Coroll.

Sequitur hinc, numerum imparem qui ad aliquem numerum progressionis duplæ primus est, primum quoque esse ad omnes numeros illius progressionis.

PROP. XXXII.

1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. Numerorum A, B, C, D, &c. a binario duplorum unusquisque pariter par est tantum.

Constat omnes 1, A, B, C, D pares esse; a 6. def. 7. b 20. def. 7. c 11. 9. d 8. def. 7. e 13. 9. atque b ÷ nimirum in ratione dupla, & c proinde quemque minorem metiri majorem per aliquem ex illis. Omnes igitur sunt pariter pares. Sed quoniam A primus est, e nullus extra eos eorum aliquem metietur. Ergo pariter pares sunt tantum. Q. E. D.

PROP. XXXIII.

A, 30. B, 15. Si numerus A dimidium B D --- E --- habeat imparem, A pariter impar est tantum.

Quoniam impar numerus B a metitur A per 2 a hyp. b 9. def. 7. c 8. def. 7. d 9. ax. 7. e 19. 7. parem, b est B pariter impar; Dic etiam pariter parem. c ergo cum par aliquis D per parem B metitur, unde $2B = A = DB$. e quare 2. 19. 7.

R 4

E ::

f 6. def. 7. E :: D. B. ergò ut 2^e metitur parem E, sic D
 g 20. def. 7. par imparem B metitur. Q. F. N.

PROP. XXXIV.

A, 24. Si par numerus A, neque à binario
 duplus sit, neque dimidium habeat impa-
 rem; pariter par est, & pariter impar.

Liquet A esse pariter parem, quia dimidium
 imparem non habet. Quia verò si A bifarietur,
 & rursus ejus dimidium, & hoc semper fiat, tan-
 dem incidemus in aliquem^a imparem, (quia
 non in binarium, quoniam A à binario duplus
 non ponitur) is metietur A per parem nume-
 rum (nam^b aliàs ipse A impar esset, contra Hy-
 poth.) ergò A est etiam pariter impar. Q. B. D.

PROP. XXXV.

A 8.

4 8

B F G 12.

C 18.

9 6 4 8

D H L K N 27.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales
 A, BG, C, DN, detrahantur autem FG à se-
 cundo, & KN ab ultimo aequales ipsi primo A, erit
 ut secundi excessus BF ad primum A, ità ultimi
 excessus DK ad omnes A, BG, C ipsum antecedentes
 Ex DN deme NL = BG; & NH = C.

a hyp.

b 17. 5.

c 12. 5.

d 3. ax. 1.

e 18. 5.

Quoniam DN. C. (HN)^a :: HN. BG.
 (LN)^a :: LN. (BG) A. (KN.)^b erit di-
 videndo ubique, DH. HN :: HL. LN :: LK.
 KN.^c quare DK. C + BG + A :: LK (^d BF.)
 KN. (A.) Q. E. D.

Coroll.

Hinc componendo, DN + BG + C. A +
 EG + C :: BG. A.

PROP.

PROP. XXXVI.

1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

E, 31. G, 62. H, 124. L, 248. F, 496.

M, 31.

N, 465.

P----

Q---

Si ab unitate quocunque numeri 1, A, B, C, D deinceps exponantur in dupla proportionē, quoad totus compositus E fiat primus, & totus hic E in ultimum D multiplicatus faciat aliquem F; factus F erit perfectus.

Sume totidem, E, G, H, L etiam in proportionē dupla continuē; ergo ^a ex æquo A. D :: 2 ^{14. 7.}

E. L. ^b ergo AL = DE ^c = F. ^d ergo L = $\frac{F}{2}$ ^{b 19. 7.}

quare E, G, H, L, F sunt :: in ratione dupla. ^{d 7. ax. 7.}

Sit G - E = M, & F - E = N. ^e ideo M. E :: ^{e 35. 9.}

N. E + G + H + L. ^f at M = E. ^g ergo N = ^{f 3. ax. 1.}

E + G + H + L. ergo F = 1 + B + ^{h 14. 5.}

C + D + E + G + H + L = E + N. ^{h 2. ax. 1.}

Quinetiam quia D ^k metitur DE (F), ^l etiam ^{k 7. ax. 7.}

singuli 1, A, B, C ^m metientes D, ^m nec non E, ^{l 11. ax. 7.}

G, H, L metiuntur F. Porro nullus alius eundem F metitur. Nam si aliquis, sit P; qui meti- ^{m 11. 9.}

atur F per Q. ⁿ ergo P Q = F = DE. ^{n 9. ax. 7.}

E. Q :: P. D. ergo cum A primus numerus ^{o 19. 7.}

metiatur D, & P proinde nullus alius P eundem ^{p 13. 9.}

metiatur, & consequenter E non metitur Q. quia ^{q 20. def. 7.}

re cum E primus ponatur, ^r idem ad Q primus ^{r 31. 7.}

erit. ^s ergo E, & Q in sua ratione minimi sunt, ^{s 23. 7.}

& ^t propterea E ipsum P, ac Q ipsum D æquē ^{t 21. 7.}

metiuntur. ^u ergo Q est aliquis ipsorum A, B, C. ^{u 13. 7.}

Sit igitur B; ergo cum ex æquo sit B. D :: E. H;

^x ideoque B H = DE = F = PQ. ^{x 19. 7.}

Q. B :: H. P. ^y erit H = P. ergo P est etiam ^{y 14. 5.}

aliquis ipsorum A, B, C, &c. contra Hypoth.

ergo nullus alius præter numeros prædictos eundem F metietur: ^{z 22. def. 7.}

proinde F est numerus perfectus. Q. E. D.

LIB. X.

Definitiones.



Commensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

Commensurabilitatis nota est $\square$, ut



D

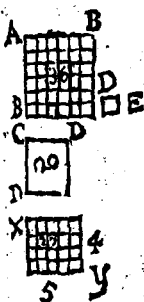
A $\square$ **B**; hoc est linea **A** 8 pedum commensurabilis est linea **B** 13 pedum, quia **D** linea unius pedis singulas **A**, & **B** metitur. Item $\sqrt{18} \square \sqrt{50}$; quia $\sqrt{2}$ singulas $\sqrt{18}$, & $\sqrt{50}$ metitur. Nam $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2} = \sqrt{9} = 3$. & $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2} = \sqrt{25} = 5$. quare $\sqrt{18} \square \sqrt{50} :: 3. 5$.

II. Incommensurabiles autem sunt, quorum nullam communem mensuram contingit reperiri.

Incommensurabilitas significatur notâ $\square$. ut $\sqrt{6} \square \sqrt{25}$ (5) hoc est $\sqrt{6}$ incommensurabilis est numero 5; vel magnitudini hoc numero designata; quia harum nulla est communis mensura, ut postea patebit.

III. Rectæ lineæ potentiâ commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

Huiusce



Hujusce commensurabilitatis nota est Γ ut AB Γ CD; b. e. linea AB sex pedū potentia commensurabilis est lineæ CD, quæ exprimitur per $\sqrt{20}$. quia spatium E unius pedis quadrati metitur tam ABq (36) quàm rectangulum XY (20), cui æquale est quadratum lineæ CD ($\sqrt{20}$) Eadem nota Γ nonnunquam valet potentia tantum commensurabilis;

IV. Incommensurabiles verò potentia, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

Hujusmodi incommensurabilitas denotatur sic δ Γ $\sqrt{25}$ δ $\sqrt{8}$; hoc est numeri vel lineæ 5, & $\sqrt{8}$ sunt incommensurabiles potentia, quia harum quadrata 25, & 8 sunt incommensurabilia.

V. Quæ cum ita sint, manifestum est cuiusque rectæ propositæ, rectas lineas multitudinis infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias verò potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea Rationalis.

Hujus nota est ρ .

VI. Et huic commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales, ρ .

VII. Huic verò incommensurabiles Irrationales vocentur.

Hæ sic denotantur σ .

VIII. Et quadratum, quod à proposita recta sit, dicatur Rationale, $\rho\rho$.

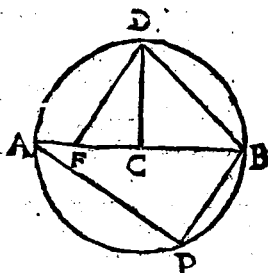
IX. Et huic commensurabilia quidem Rationalia $\rho\rho$.

X. Huic

X. Huic verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur; *pæ.*

XI. Et rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales, *p.*

Schol.



Ut postrema 7 definitiones exemplo aliquo illustrentur, sit circulus ADBP, cujus semidiameter CB; huic inscribantur latera figurarum ordinatarum, Hexagoni quidem BP, Trianguli AP,

quadrati BD, pentagoni FD. Itaque si juxta 5 defin. semidiameter CB sit Rationalis exposita, numero 2. expressa, cui reliquæ BP, AP, BD, FD comparanda sunt^a; erit $BP^2 = BC = 2$. quare BP est $\sqrt{2}$ BC, juxta 6. def. Item $AP^2 = \sqrt{12}$ (nam $AB^2 (16) - BP^2 (4) = 12$) quare AP est $\sqrt{3}$ BC, etiam juxta 6. def. atque $AP^2 (12)$ est $\sqrt{v}$, per def. 9. Porro $BD^2 = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{8}$; unde BD est $\sqrt{2}$ BC; & BD^2 pr. Demque, $FD^2 = 10 - \sqrt{20}$. (ut patebit ex praxi ad 10. 13. tradendâ) erit pr. juxta 10 def. & proinde $FD = \sqrt{10 - \sqrt{20}}$ est pr. juxta 13 defin.

Postulatum.

Postuletur, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

Axiomata.

Axiomata.

1. Magnitudo quocunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

2. Magnitudo quaecunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem quam illa metitur.

3. Magnitudo metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.

PROP. I.

Diagram: A horizontal line segment AB is shown. Point C lies on AB. Point D lies on AC, and point E lies on CB. A vertical line segment DE is drawn from D to E. Point F lies on AC, and point G lies on CB. A vertical line segment FG is drawn from F to G. Point H lies on AC, and point I lies on CB. A vertical line segment HI is drawn from H to I. The segments DE, FG, and HI are parallel to each other and perpendicular to AB. The text describes the construction of these segments and the resulting magnitudes.

Duabus magnitudinibus inaequalibus AB, C propositis, si à maiore AB auferatur majus quàm dimidium, (AH) & ab eo (HB), quod reliquum est, rursus detrahatur majus quàm dimidium (HI), & hoc semper fiat; relinquetur tandem quaedam magnitudo IB, quæ minor erit propositâ minore magnitudine C.

Accipe C toties, donec ejus multiplex DE proximè excedat AB; sintque $DF = FG = GE = C$. Dem. ex AB plusquam dimidium AH, & à reliquo HB plusquam dimidium HI, & sic deinceps, donec partes AH, HI, IB æquè multæ sint partibus DF, FG, GE. Jam liquet FE, quæ non minor est quàm $\frac{1}{2}$ DE, majorem esse, quàm HB, quæ minor est, quàm $\frac{1}{2}$ AB $\neg$ DE. Paritèrque GE quæ non minor est quàm $\frac{1}{2}$ FE, major est quàm IB $\neg$ $\frac{1}{2}$ HB. ergo C, vel GE $\sqsubset$ IB. Q. E. D.

Idem demonstrabitur, si ex AB auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB rursus dimidium HI, & ita deinceps.

PROP. XXII.

$\overset{\text{I}}{\text{A}} \dots \overset{\text{I}}{\text{F}} \cdot \overset{\text{I}}{\text{B}} \dots \overset{\text{I}}{\text{G}} \cdot \overset{\text{I}}{\text{C}} \dots \overset{\text{I}}{\text{H}} \cdot \overset{\text{I}}{\text{D}} \dots \overset{\text{I}}{\text{L}} \cdot \overset{\text{I}}{\text{E}} \cdot 22.$
 $\quad \quad \quad 9 \quad \quad \quad 7 \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad 3$

Si impares numeri quocunque AB, BC, CD, DE componantur, multitudo autem ipsorum sit par, totus AE par erit.

a. 7. def. 7. *Detractâ unitate ex singulis imparibus,^a manebunt AF, BG, CH, DL numeri pares, &*
 b. 21. 9. *b proinde compositus ex ipsis par erit; adde his*
 c. hyp. *c parem numerum conflatum ex residuis unitati-*
 d. 21. 9. *bis, totus idcirco AE par erit. Q. E. D.*

PROP. XXIII.

$\overset{7}{\text{A}} \dots \overset{5}{\text{B}} \dots \overset{1}{\text{C}} \cdot \overset{1}{\text{E}} \cdot \overset{1}{\text{D}} \cdot 15.$
 $\quad \quad \quad 3$

Si impares numeri quocunque AB, BC, CD componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus AD impar erit.

Nam dempto CD uno imparium, reliquorum aggregatus AC^a est par numerus. huic adde
 a. 22. 9. *CD—1; b totus AE est etiam par; quare resti-*
 b. 21. 3. *tutâ unitate totus AD^c impar erit. Q. E. D.*
 c. 7. def. 7.

PROP. XXIV.

$\overset{4}{\text{A}} \dots \overset{5}{\text{B}} \dots \overset{1}{\text{D}} \cdot \overset{1}{\text{C}} \cdot 10.$
 $\quad \quad \quad 6$

Si à pari numero AC par AB detrahatur, & reliquus BC par erit.

Nam si BD (BC—1) impar fuerit, erit BC (BD+1) par. Q. E. D.
 a. 7. def. 7. *Sin BD parem dicas, propter AB^b parem, c erit*
 b. hyp. *AD par, idcirco AC (AD+1) impar, contra Hypoth., ergo BC est par. Q. E. D.*
 c. 21. 9.

PROP. XXV.

$\overset{6}{A} \dots \overset{1}{D} \dots \overset{3}{C} \dots B$ 10. Si à pari numero AB
 impar AC detrahatur;
 & reliquus CB impar
 erit.

Nam $AC - 1$ (AD) est par. ergo DB a 7. def. 7.
 est par. ergo CB (DB - 1) est impar. Q.E.D. b 24. 9.
 c 7. def. 7.

PROP. XXVI.

$\overset{4}{A} \dots \overset{6}{C} \dots \overset{1}{D} \dots B$ 11. Si ab impari numero
 AB impar CB detra-
 hatur; reliquus AC
 par erit.

Nam $AB - 1$ (AD) & $CB - 1$ (CD)
 sunt pares. ergo $AD - CD$ (AC) est par. a 7. def. 7.
 Q.E.D. b 24. 9.

PROP. XXVII.

$\overset{1}{A} \dots \overset{4}{D} \dots \overset{6}{C} \dots B$ 11. Si ab impari numero
 AB par detrahatur CB,
 reliquus AC impar erit.

Nam $AB - 1$ (DB)
 est par; & CB ponitur par. ergo reliquus a 7. def. 7.
 CD par est. ergo $CD + 1$ (CA) est impar. b 24. 9.
 Q.E.D. c 7. def. 7.

PROP. XXVIII.

A, 3. Si impar numerus A parem nume-
 B, 4. rum B multiplicans fecerit aliquem
 AB, 12. AB, factus AB par erit.

Nam AB a componitur ex im- a hyp. &
 pari A toties accepto, quoties unitas continetur 15. def. 7.
 in B pari. ergo AB est par numerus. b 21. 9.

Schol.

Eodem modo, si A sit numerus par, erit AB
 par.

PROP. XXIX.

A, 3.

B, 5.

 $\frac{B}{A}, 15.$

Si impar numerus A, imparem numerum B multiplicans, fecerit aliquem AB; factus AB impar erit.

a 15. def. 7.

b 33. 9.

Nam AB^2 componitur ex B impari numero toties accepto, quoties unitas includitur in A etiam impari. $\therefore$ ergo AB est impar. Q. E. D.

Scholium.

$\frac{B}{A}, 12$ (C, 4.
A, 3

1. Numerus A impar numerum B parem metiens, per numerum parem C eum metitur.

a 9. ax. 7.

b 29. 9. ;

Nam si C impar dicatur, quoniam $B=AC$, erit B impar; contra Hypoth.

$\frac{B}{A}, 15$ (C, 5.
A, 3

2. Numerus A impar numerum B imparem metiens, per numerum C imparem eum metitur.

a 28. 9.

Nam si C dicatur par; ^{2} erit AC, vel B par, contra Hypoth.

$\frac{B}{A}, 15$ (C, 5.
A, 3

3. Omnis numerus (A & C) metiens imparem numerum B est impar.

a 28. 9.

Nam si uterque A, vel C dicatur par, ^{2} erit B numerus par, contra Hypoth.

PROP. XXX.

$\frac{B}{A}, 24$
A, 3

(C, 8.

$\frac{D}{A}, 12$
A, 3

(E, 4.

Si impar numerus A parem numerum B metitur, & illius dimidium D metietur.

^{a} Sit $\frac{B}{A} = C$. ^{b} ergo C est numerus par.

Sit igitur $E = \frac{1}{2}C$, erit $B^c = CA^d = 2EA^e = 2D$.

^{f} ergo $EA = D$; & ^{g} proinde $\frac{D}{A} = E$. Q. E. D.

PROP.

a hyp.

b 1. Schol.

29. 9.

c 9. ax. 7.

d 1. 2.

e hyp.

f 7. ax. 1.

g 7. ax. 7.

PROP. XXXI.

A, 5. B, 8. C, 16. D --- Si impar numerus A ad aliquem numerum B primus sit; & ad illius duplum C primus erit.

Si fieri potest, aliquis D metiatur A, & C, ergo D metiens imparem A impar erit, ^{a 3. schol.} idemque ipsum B paris C semissem metietur. ergo ^{29. 9.} A, & B non sunt primi inter se, contra Hypoth. ^{b 30. 9.}

Coroll.

Sequitur hinc, numerum imparem qui ad aliquem numerum progressionis duplæ primus est, primum quoque esse ad omnes numeros illius progressionis.

PROP. XXXII.

1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. Numerorum A, B, C, D, &c. à binario duplorum unusquisque pariter par est tantum.

Constat omnes, 1. A, B, C, D pares esse; ^{a 6. def. 7.} atque ^{b 20. def. 7.} nimirum in ratione dupla, & ^{c 11. 9.} proinde quemque minorem metiri majorem per aliquem ex illis. ^{d 8. def. 7.} Omnes igitur sunt pariter pares. ^{e 13. 9.} Sed quoniam A primus est, nullus extra eos eorum aliquem metietur. Ergo pariter pares sunt tantum. Q. E. D.

PROP. XXXIII.

A, 30. B, 15. Si numerus A dimidium B D --- E --- habeat imparem, A pariter impar est tantum.

Quoniam impar numerus B metitur A per 2 ^{a hyp.} parem, ^{b 9. def. 7.} est B pariter impar; Dic etiam pariter ^{c 8. def. 7.} parem. ^{d 9. ax. 7.} ergo cum par aliquis D per parem B metitur, unde ^{e 19. 7.} $2B = A = DB$. quare 2. E ::

R 4

E ::

f 6. def. 7. E :: D. B. ergò ut 2^a metitur parem E, sic D
 g 20. def. 7. par imparem B metitur. Q. F. N.

PROP. XXXIV.

A, 24. Si par numerus A, neque à binario
 duplus sit, neque dimidium habeat impa-
 rem; pariter par est, & pariter impar.

Liquet A esse pariter parem, quia dimidium
 imparem non habet. Quia verò si A bifarietur,
 & rursus ejus dimidium, & hoc semper fiat, tan-
 dem incidemus in aliquem^a imparem, (quia
 non in binarium, quoniam A à binario duplus
 non ponitur) is metietur A per parem nume-
 rum (nam^b aliàs ipse A impar esset, contra Hy-
 poth.) ergò A est etiam pariter impar. Q. E. D.

PROP. XXXV.

A 8.

4 8

B F G 12.

C 18.

9 6 4 8

D H L K N 27.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales
 A, BG, C, DN, detrahantur autem FG à se-
 cundo, & KN ab ultimo aequales ipsi primo A, erit
 ut secundi excessus BF ad primum A, ita ultimi
 excessus DK ad omnes A, BG, C ipsum antecedentes
 Ex DN deme NL = BG; & NH = C.

a hyp.

b 17. 5.

c 12. 5.

d 3. ax. 1.

e 18. 5.

Quoniam DN. C. (HN)^a :: HN. BG.
 (LN)^a :: LN. (BG) A. (KN.)^b erit di-
 videndo ubique, DH. HN :: HL. LN :: LK.
 KN.^c quare DK. C + BG + A :: LK (^d BF.)
 KN. (A.) Q. E. D.

Coroll.

Hinc^e componendo, DN + BG + C. A +
 EG + C :: BG. A.

PROP.

PROP. XXXVI.

1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

E, 31. G, 62. H, 124. L, 248. F, 496.

M, 31.

N, 465.

P----

Q---

Si ab unitate quocunque numeri 1, A, B, C, D deinceps exponantur in dupla proportionē, quoad totus compositus E fiat primus, & totus hic E in ultimum D multiplicatus faciat aliquem F; factus F erit perfectus.

Sume totidem, E, G, H, L etiam in proportionē dupla continuē; ergo ^a ex æquo A. D :: 2 ^{14. 7.}

E. L. ^b ergo AL = DE = F. ^d ergo L = $\frac{F}{2}$ ^{19. 7.}

quare E, G, H, L, F sunt :: in ratione dupla. ^d 7. ax. 7.

Sit G - E = M, & F - E = N. ^e ideo M. E :: 35. 9.

N. E + G + H + L. ^f at M = E. ^g ergo N = $\frac{F}{2}$ ^{3. ax. 1.}

E + G + H + L. ergo F = 1 + B + ^h 2. ax. 1.

C + D + E + G + H + L = E + N.

Quinetiam quia D ^k metitur DE (F), ^l etiam ^k 7. ax. 7.

singuli 1, A, B, C ^m metientes D, ^m nec non E, ^l 11. ax. 7.

G, H, L metiuntur F. Porro nullus alius eundem F metitur. Nam si aliquis, sit P; qui meri-

atur F per Q. ⁿ ergo P Q = F = DE. ^o ergo ⁿ 9. ax. 7.

E. Q :: P. D. ergo cum A primus numerus

metiatur D, & P proinde nullus alius P eundem

metiatur, ^p consequenter E non metitur Q. qua- ^q 20. def. 7.

re cum E primus ponatur, ^r idem ad Q primus ^r 31. 7.

erit. ^s ergo E, & Q in sua ratione minimi sunt, ^s 23. 7.

& ^t propterea E ipsum P, ac Q ipsum D æquē ^t 21. 7.

metiuntur. ^u ergo Q est aliquis ipsorum A, B, C. ^u 13. 7.

Sit igitur B; ergo cum ex æquo sit B. D :: E. H;

^x ideoque B H = DE = F = PQ. ^x adeoque ^x 19. 7.

Q. B :: H. P. ^y erit H = P. ergo P est etiam ^y 14. 5.

aliquis ipsorum A, B, C, &c. contra Hypoth.

ergo nullus alius præter numeros prædictos eun-

dem F metietur: ^z proinde F est numerus perfe-

ctus. Q. E. D.

LIB. X.

Definitiones.



Commensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

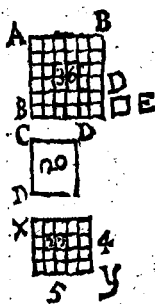
I. Commensurabilitatis nota est $\sqsubset$, ut
 $\sqsubset A \sqsubset B$; hoc est linea A 8 pedum.
 commensurabilis est linea B 13 pedum;
 quia **D** linea unius pedis singulas A, &
 B metitur. Item $\sqrt{18} \sqsubset \sqrt{50}$; quia
 $\sqrt{2}$ singulas $\sqrt{18}$, & $\sqrt{50}$ metitur.
 Nam $\sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$. & $\sqrt{\frac{50}{2}}$
 $= \sqrt{25} = 5$. quare $\sqrt{18} \sqsubset \sqrt{50}$
 $\therefore 3 : 5$.

II. Incommensurabiles autem sunt, quorum nullam communem mensuram contingit reperiri.

Incommensurabilitas significatur notâ $\sqsubset$. ut $\sqrt{6} \sqsubset \sqrt{25}$ (5) hoc est $\sqrt{6}$ incommensurabilis est numero 5; vel magnitudini hoc numero designata; quia harum nulla est communis mensura, ut postea patebit.

III. Rectæ lineæ potentiâ commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

Hujusce



Hujusce commensurabilitatis nota est $\sqrt{\quad}$ ut AB $\sqrt{\quad}$ CD; b. e. linea AB sex pedū potentia commensurabilis est lineæ CD, quæ exprimitur per $\sqrt{20}$. quia spatium E unius pedis quadrati metitur tam ABq (36) quam rectangulum XY (20), cui æquale est quadratum lineæ CD ($\sqrt{20}$) Eadem nota $\sqrt{\quad}$ nonnunquam valet potentia tantum commensurabilis;

IV. Incommensurabiles verò potentia, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

Hujusmodi incommensurabilitas denotatur sic $\sqrt{3}$ $\sqrt{\quad}$ $\sqrt{8}$; hoc est numeri vel lineæ 3, & $\sqrt{8}$ sunt incommensurabiles potentia, quia harum quadrata 25, & $\sqrt{8}$ sunt incommensurabilia.

V. Quæ cum ita sint, manifestum est cuiusque rectæ propositæ, rectas lineas multitudine infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias verò potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea Rationalis.

Hujus nota est $\sqrt{\quad}$.

VI. Et huic commensurabiles, sive longitudine & potentia, sive potentia tantum, Rationales, p.

VII. Huic verò incommensurabiles Irrationales vocentur.

Hæ sic denotantur $\sqrt{\quad}$.

VIII. Et quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale, p.

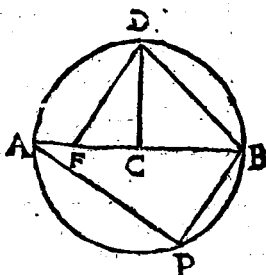
IX. Et huic commensurabilia quidem Rationalia p.

X. Huic

X. Huic verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur; p^a.

XI. Et rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales, p^a.

Schol.



Ut postrema 7 definitiones exemplo aliquo illustrentur, sit circulus ADBP, cujus semidiameter CB; huic inscribantur latera figurarum ordinatarum, Hexagoni quidem BP, Trianguli AP,

quadrati BD, pentagoni FD. Itaque si juxta 5 defin. semidiameter CB sit Rationalis exposita, numero 2. expressa, cui reliqua BP, AP, BD, FD compa-

a cor. 15. 4.
b 67. 1.

anda sunt^a; erit $BP^2 = BC = 2$. quare BP est $\sqrt{2}$ BC, juxta 6. def. Item $AP^2 = 12$ (nam $AB^2 (16) - BP^2 (4) = 12$) quare AP est $\sqrt{3}$ BC, etiam juxta 6. def. atque $AP^2 (12)$ est $\sqrt{3}$ per def. 9. Porro $BD^2 = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{8}$; unde BD est $\sqrt{2}$ BC; & BD^2 p^r. Demque, $FD^2 = 10 - \sqrt{20}$. (ut patebit ex praxi ad 10. 13. tradendâ) erit p^r, juxta 10 def. & proinde $FD = \sqrt{10 - \sqrt{20}}$ est p^r, juxta 13 defin.

Postulatum.

Postuletur, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

Axiomata.

Axiomata.

1. **M**agnitudo quotcunque magnitudines metiens, eompositam quoque ex ipsis metitur.

2. Magnitudo quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem quam illa metitur.

3. Magnitudo metiens totam magnitudinem
& ablatam, metitur & reliquam.

PROP. I.

B **E** Duabus magnitudinibus inaequalibus
A **B**, **C** propositis, si à maiore **AB** auferatur majus quàm dimidium, (**AH**) &
I **G** ab eo (**HB**), quod reliquum est, rursus detrahatur majus quàm dimidium. (**HI**),
H **F** & hoc semper fiat; relinquetur tandem quaedam magnitudo **IB**, quæ minor erit propositâ minore magnitudine **C**.

ACCIPES C^opties, donec ejus multi-
 plex DE proximè excedat AB; sintque
 DF = FG = GE = IC. Dem. ex AB plus-
 quam dimidium AH, & à reliquo HB plusquam
 dimidium HI, & sic deinceps, donec partes AH,
 HI, IB æquè multæ sint partibus DF, FG, GE.
 Jam liquet FE, quæ non minor est quàm $\frac{1}{2}$ DE,
 majorem esse, quàm HB, quæ minor est, quàm
 $\frac{1}{2}$ AB $\neg$ DE. Paritèrque GE quæ non minor
 est quàm $\frac{1}{2}$ FE, major est quàm IB. $\neg$ $\frac{1}{2}$ HB. er-
 go C, vel GE $\sqsubset$ IB. Q. E. D.

Idem demonstrabitur, si ex AB auferatur dimidium AH , & ex reliquo HB rursus dimidium HI , & ita deinceps.

PROP. II.



Si duabus magnitudinibus inaequalibus propositis (AB, CD) detrahatur semper minor AB de maiore CD, alternâ quâdam detractiōe, & reliqua minimè præcedentem metiatur; incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

Si fieri potest, sit aliqua E communis mensura. Quoniam igitur AB detracta ex CD, quoties fieri potest, relinquit aliquam FD se minorem, & FD ex AB relinquit GB, & sic deinceps, ^a tandem relinquetur aliqua GB $\perp$ E. ergo E ^b metiens AB ^c, ideôq; CF, ^b & totam CD; ^d etiam reliquam FD metietur, ^e proinde & AG; ^d ergo & reliquam GB, seipsâ minorera. Q. E. A.

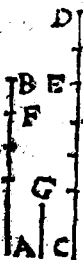
^a 1. 10.

^b hyp.

^c 2. ax. 10.

^d 3. ax. 10.

PROP. III.



Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, ^a AB, CD, maximam eorum communem mensuram FB repetere.

Deme AB ex CD, & reliquam ED ex AB, & FB ex ED, donec FB metiatur ED; (quod tandem fiet, ^a quia per Hyp. AB $\perp$ CD) erit FB quæsitâ.

Nam FB ^b metitur ED, ^c ideôque ipsam AF; sed & seipsam, ^d ergo etiam AB, & ^e propterea CE, ^d adeôque & totam CD. Proinde FB communis est mensura ipsarum AB, CD. Dic G communem quoq; esse mensuram, hâc maiorem; ergo G metiens AB, & CD ^e metitur CE, & ^f reliquam ED, ^e ideôque AF, & ^f proinde reliquam FB, major minorem. Q. E. A.

^a 2. 20.

^b constr.

^c 2. ax. 10.

^d 1. ax. 10.

^e 2. ax. 10.

^f 3. ax. 10.

Coroll.

Coroll.

Hinc, magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

PROP. IV.



Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis A, B, C; maximam earum mensuram communem invenire.

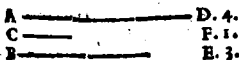
^a Inveni D maximam communem mensuram duarum quorumcunque A, B, ^a item E ipsarum D, & C maximam communem mensuram; erit E quæsitæ.

Nam perspicuum est E metiens D, & C ^b b. conftr. & metiri tres A, B, C. Puta aliam F hanc majorem easdem metiri. ^c ergo F metitur D; ^c proinde & E, ipsorum D, C maximam communem mensuram, major minorem. Q. E. A.

Coroll.

Hinc quoque Magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum communem mensuram.

PROP. V.



Commensurabiles magnitudines A, B inter

se rationem habent, quàm numerus ad numerum.

^a Inventâ C ipsarum A, B maximâ communem mensurâ; quoties C in A, & B, toties 1 contineatur in numeris D & E. ^b ergo C. A :: 1. D; ^b atque etiam C. quare inversè A. C :: D. 1. ^b S 2 B ::

c 22. 5.

B :: 1. E. ergo ex æquali A. B :: D. E ::
N. N. Q. E. D.

PROP. VI.

E —————

A —————

B —————

F. 1.

C. 4.

D. 3.

Si duæ ma-
gnitudines A, B
inter se propor-

tionem habeant, quàm numerus C ad numerum D;
commensurabiles erunt magnitudines A, B.

a sch. 10. 6.

b constr.

c hyp.

d 22. 5.

e 5. ax. 7.

f 10. def. 4.

g constr.

h 1. def. 10.

Qualis pars est 1 numeri C, ^a talis fiat E ip-
sius A. Quoniam igitur E. A ^b :: 1. C. atque
A. B ^c :: C. D; ^d ex æquo erit E. B :: 1. D.
ergo quum 1 ^e metiatur numerum D, ^f etiam
E metitur B. sed & ipsum A ^g metitur. ^h ergo
A $\square$ B. Q. E. D.

PROP. VII.

A —————

B —————

Incommensurabiles
magnitudines A, B in-

ter se proportionem non habent, quàm numerus ad
numerum.

a 6. 10.

Dic A. B :: N. N. ^a ergo A $\square$ B.
contra Hypoth.

PROP. VIII.

A —————

B —————

Si duæ magnitudines

A, B inter se proportio-

nem non habeant, quàm numerus ad numerum, in-
commensurabiles erunt magnitudines.

a 5. 10.

Putā A $\square$ B. ^a ergo A. B :: N. N, con-
tra Hypoth.

PROP.

PROP. IX.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neq; latera habebunt longitudine commensurabilia.

1. Hyp. A. $\square$ B. Dico Aq. Bq :: Q. Q.

Nam ^a sit A. B :: num. E. num. F. ergò a per. 5. 10.

Aq. Bq $\left(\frac{A}{B} \text{ bis.}\right) = \frac{E}{F} \text{ bis.} = \frac{Eq}{Fq}$ ergò Aq. Bq :: Eq. Fq :: Q. Q. Q. E. D. b 20. 6.
c sch. 23. 5.
d 11. 8.
e 11. 5.

2. Hyp. Aq. Bq :: Eq. Fq :: Q. Q. Dico A.

$\square$ B. Nam $\frac{A}{B} \text{ bis.} \left(\frac{Aq}{Bq}\right) = \frac{Eq}{Fq} = \frac{E}{F}$ f 20. 6.
bis. i ergò A. B :: E. F :: N. N. ^gquare A $\square$ B. g hyp.
h 11. 8.
i sch. 23. 5.
k 6. 10.

3. Hyp. A $\square$ B. Nego esse Aq. Bq :: Q. Q.
Nam dic Aq. Bq :: Q. Q. Ergò A $\square$ B, ut
modò ostensum est, contra Hypoth.

4. Hyp. Non Aq. Bq :: Q. Q. Dico A $\square$ B.
Nam puta A $\square$ B; ergò Aq. Bq :: Q. Q. ut
modò diximus, contra Hypoth.

Coroll.

Lineæ $\square$ sunt etiam $\square$; at non contra. Sed
lineæ $\square$ non sunt idcirco $\square$. lineæ verò $\square$
sunt etiam $\square$.

PROP. X.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint ($C. A :: B. D$); prima verò C secunda A fuerit commensurabilis; & tertia B quarta D commensurabilis erit. Et si prima C secunda A fuerit incommensurabilis; & tertia B quarta D incommensurabilis erit.



C A B D

Si $C \nmid A$,^a ideo erit $C. A :: N.$

$N^b :: B. D.$ ergò $B \nmid D$. Sin C

$\nmid A$, ergò non erit $C. A :: N. N :: B. D.$

quare $B \nmid D$. Q. E. D.

a 3. 10.

b 6. 10.

c 7. 10.

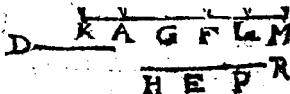
d 8. 10.

LEMMA 1.

Duos numeros planos invenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus unius ad quadratum numerum.

Huic Lemmati satisfaciunt duo quilibet numeri plani non similes, quales sunt numeri habentes proportionem superparticularem, vel superbipartientem, vel duplam, vel etiam duo quilibet numeri primi. vid. Schol. 17. 9.

LEMMA 2.



B, 5, C, 3.

Invenire lineam HR , ad quam data recta linea

KM sit in ratione datorum numerorum B, C .

Divide KM in partes æquales æquè multas unitatibus numeri B . harum tot, quot unitates sunt in numero C , componant rectam HR , liquet esse, $KM. HR :: B. C$.

a sch. 10. 6.

b 3. 1.

LEMMA 3.

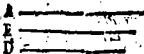
Invenire lineam D , ad cuius quadratum data recta KM quadratum sit in ratione datorum numerorum B, C .

Fac

Fac B. C² :: KM. HR. ac inter KM ; & HR^b inveni mediam proportionalem D. Erit KMq. Dq^c :: KM. HR^d :: B. C.

a 2. lem. 10.
b 13. 6.
c 20. 6.
d conftr.

PROP. XI.

 B. 20. C. 16. *Propositæ rectæ lineæ A inveniæ duæ rectas lineas incommensurabiles ; alteram quidem D longitudinis tantum, alteram verò E etiam potentiâ.*

1. Sume numeros B, C, ita ut non sit B. C² :: Q. Q.^b fiatque B. C² :: Aq. Dq. liquet A^c D. Sed Aq^d Dq. Q. E. F.

a 1. lem. 10.
b 3. lem. 10.
c 2. 10.
d 6. 10.
e 13. 6.
f 10. 10.

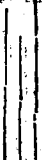
2. Fac A. E :: E. D. Dico Aq^e Eq. Nam A. D^e :: Aq. Eq. ergò cum A^f D, ut prius, erit Aq^g Eq. Q. E. F.

PROP. XII.

Quæ (A, B) eidem magnitudini C sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

Quia A^a C, & C^b B, sit A^c 5. 10.

D, 18. E, 8. C :: N. N :: D. E.
F, 2. G, 3. atq C. B :: N. N :: P.
H, 5. I, 4. K, 6. G^b sumantur tres numeri H, I, K minimi ::

 A B C in rationibus D ad E, & F ad G. Jam quia A. C^e :: D. E^e :: H. I. ac C. B^e :: F. G^e :: I. K. erit ex æquali A. B :: H. K :: N. N^e ergò A^f B. Q. E. D.

Schol.

Hinc, omnis recta linea rationali lineæ commensurabilis, est quoque p^o rationalis. Et omnes rectæ rationales inter se commensurabiles sunt, saltem potentiâ. Item, omne spatium rationali spatio commensurabile, est quoque rationale; & omnia spatia rationalia inter se commensurabilia.

def. 7. & 10. mensurabilia sunt. Magnitudines verò, quatum altera est rationalis, altera irrationalis, sunt inter se incommensurabiles.

PROP. XIII.

A  Si sint duæ magnitudines A,
C  B; & altera quidem A eidem
B  C sit commensurabilis, altera
verò B incommensurabilis, incommensurabiles erunt
magnitudines A, B.

a hyp.

b 12. 10.

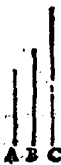
Dic B $\perp$ A, ergò cum C $\perp$ A, b erit C
 $\perp$ B, contra Hypoth.

PROP. XIV.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles A, B; altera autem ipsarum A magnitudini cuiuspiam C incommensurabilis fuerit, & reliqua B eidem C incommensurabilis erit.

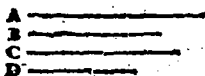
a hyp.

b 12. 10.



Put a B $\perp$ C. ergò cum A $\perp$ E,
b erit A $\perp$ C, contra Hyp.

PROP. XV.



Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint (A: B :: C: D); prima verò A tanto plus

possit quàm secunda B, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: & tertia C tanto plus poterit, quàm quarta D, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si prima A, tanto plus possit quàm secunda B, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; & tertia C tanto plus poterit, quàm quarta D, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

a hyp.

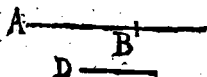
b 22. 6.

c 17. 5.

Nam quia A. B $\perp$ C. D. b erit Aq. Bq ::
Cq. Dq. c ergò dividendo Aq. Bq. Bq :: Cq.
Dq.

Dq. Dq. ^a quare $\sqrt{Aq - Bq} : B :: \sqrt{Cq - Dq}$ d 22. 6.
 D. ^e invertendo igitur $B. \sqrt{Aq - Bq} :: D. \sqrt{Cq - Dq}$ e cor. 4. 5.
 Cq - Dq. ^f ergo ex æquali $A. \sqrt{Aq - Bq} :: B. \sqrt{Cq - Dq}$ f 22. 5.
 C. $\sqrt{Aq - Bq} : Cq - Dq$ proinde si $A \square$, vel $\square \sqrt{Aq - Bq}$
 Aq - Bq, ^g erit similiter $C \square$, vel $\square \sqrt{Cq - Dq}$ g 10. 10.
 Cq - Dq. Q. E. D.

PROP. XVI.



Si duæ magnitudi-
 nes commensurabiles
 AB, BC componan-
 tur, & tota magni-
 tudo AC utriq; ipsarum AB, BC commensurabilis
 erit: quod si tota magnitudo AC uni ipsarum AB,
 vel BC commensurabilis fuerit, & quæ à princi-
 pio magnitudines AB, BC commensurabiles erunt.

1. Hyp. ^a Sit D ipsarum AB, BC communis a 3: 100
 mensura. ^b ergo D metitur AC. ^c ergo AC $\square$ b 1: ax. 100
 AB, & BC. Q. E. D. c 1: def. 10.
2. Hyp. ^a Sit D communis mensura ipsarum
 AC, AB; ^d ergo D metitur AC - AB (BC); d 3: ax. 100.
 proinde AB $\square$ BC. Q. E. D.

Coroll.

Hinc etiam, si tota magnitudo ex duabus
 composita commensurabilis sit alteri ipsarum,
 eadem & reliquæ commensurabilis erit.

PROP. XVII.



Si duæ magnitudines in-
 commensurabiles AB, BC
 componentur, & tota magni-
 tudo AC utrique ipsarum AB, BC incommensura-
 bilis erit: Quod si tota magnitudo AC uni ipsa-
 rum AB incommensurabilis fuerit, & quæ à princi-
 pio magnitudines AB, BC incommensurabiles
 erunt.

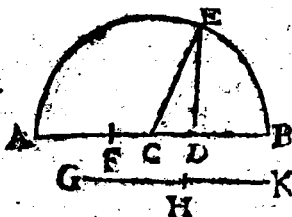
1. Hyp. Si fieri potest, sit D ipsarum AC, AB communis mensura. 2. ergo D metitur AC — AB (BC). 3. ergo AB $\perp$ BC, contra Hypoth.

2. Hyp. Dic AB $\perp$ BC. 4. ergo AC $\perp$ AB, contra Hypoth.

Coroll.

Hinc etiam, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eadem & reliquæ incommensurabilis erit.

PROP. XVII.



Si fuerint
duæ rectæ li-
neæ inæquales
AB, GK;
quarta autem
parti quadra-
ti, quod sit à
minori GK,
æquale paral-
lelogrammum

ADB ad maiorem AB applicetur, deficiens figurâ quadratâ, & in partes AD, DB longitudine com-
mensurabiles ipsam dividat, major AB tanto plus
poterit quàm minor GK, 1. quantum est quadratum
rectæ lineæ FD sibi longitudine commensurabilis:
Quod si major AB tanto plus possit, quàm minor
GK, quantum est quadratum rectæ lineæ ED sibi
longitudine commensurabilis; quarta autem parti
quadrati, quod sit à minori GK, æquale paral-
lelogrammum ADB ad maiorem AB applicetur,
deficiens figurâ quadratâ, in partes AD, DB lon-
gitudine commensurabiles ipsam dividet.

2. Biseca GK in H, & 3. fac rectang. ADB =
GHq: abseinde AF = DB. Estque ABq =
4. ADB + (4 GHq, vel HKq) + FDq. Jam
Primo

a. 10. 7.

b. 28. 6.

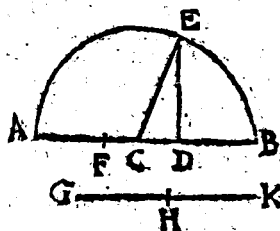
c. 8. 2.

d. constr. 2.

4. 2.

primò, Si $AD \perp DB$, erit $AB^2 \perp DB^2 \perp$ e 16. 18.
 $2 DB^2$ ($AF + DB$, vel $AB - FD$) $\therefore$ ergò f constr.
 $AB \perp FD$. Q. E. D. Sin secundò, $AB \perp$ g. cor. 16. 10.
 FD , $\therefore$ erit ideò $AB \perp AB - FD$ ($2 DB$) k 12. 10.
 $\therefore$ ergò $AB \perp DB$. $\therefore$ quare $AD \perp DB$. l 16. 10.
 Q. E. D.

PROP. XIX



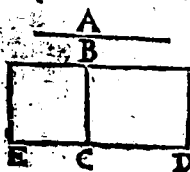
Si fuerint
 dua recta
 linea ina-
 quales, AB,
 GK, quarta
 autem par-
 ti quadrati,
 quod fit à
 minore GK,
 aequale par-
 allelogram-

num ADB ad maiorem AB applicetur deficiens fi-
 gurà quadratà ; & in partes incommensurabiles
 longitudine AD, DB, ipsam AB dividat ; ma-
 AB tanto plus poterit, quàm minor GK, quantum
 est quadratum recta linea FD, sibi longitudine in-
 commensurabilis : Quod si major AB tanto plus
 possit, quàm minor GK, quantum est quadratum re-
 cta linea FD sibi longitudine incommensurabilis ;
 quarta autem parti quadrati, quod fit à minore
 GK, aequale parallelogrammum ADB ad maiorem
 AB applicetur, deficiens figurà quadratà, in partes
 longitudine incommensurabiles AD, DB ipsam AB
 dividet.

Facta puta, & dicta eadem, quæ in præce- a 17. 10.
 denti. Itaq; primò, Si $AD \perp DB$, $\therefore$ erit pro- b 13. 10.
 pterea $AB \perp DB$; $\therefore$ quare $AB \perp 2 DB$
 ($AB - FD$) $\therefore$ ergò $AB \perp FD$. Q. E. D. c cor. 17. 1

Secundò, Si $AB \perp FD$; $\therefore$ ergò $AF \perp$ d 13. 10.
 $AB - ED$ ($2 DB$) ; $\therefore$ quare $AB \perp DB$, & e 17. 10.
 $\therefore$ proinde $AD \perp DB$. Q. E. D. PROP.

PROP. XX.



Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis BC, CD, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum BD, rationale est.

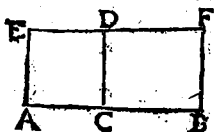
a 46. 1.
b 1. 6.
c hyp.
d 10. 10.
e hyp. & 9.
def. 10.
f 12. 10.

Exponatur A, p. & describatur BE quadratum ex BC. Quoniam DC. CE (BC) $\therefore$ BD. BE. & DC $\propto$ BC; $\therefore$ erit rectang. BD $\propto$ quad. BE, ergo quum quad. BE $\propto$ Aq; $\therefore$ erit BD $\propto$ Aq. præinde rectang. BD est p. Q. E. D.

Not. Tria sunt genera linearum rationalium inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum rationalium longitudine inter se commensurabilium altera aequalis est expositæ rationali, aut neutra rationali exposita aequalis est, longitudine tamen eutraque est commensurabilis; aut denique utraque exposita rationali commensurabilis est solum potentia. Hi sunt modi illi, quos innuit præsens theorema.

In numeris, sit BC, $\sqrt{8}$ ($2\sqrt{2}$) & CD, $\sqrt{18}$ ($3\sqrt{2}$); erit rectang. BD $= \sqrt{144} = 12$.

PROP. XXI.



Si rationale DB ad rationalem DC applicetur, latitudinem CB efficit rationalem, & ei DC ad quam applicatum

est DB, longitudine commensurabilem.

Exponatur G, p. & describatur DA quadratum ex BC. quoniam BD. DA $\therefore$ BC. CA; atque BD. DA sunt pa, $\therefore$ ideoque $\propto$; $\therefore$ erit

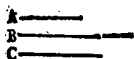
BC

a 1. 6.
b hyp.
c sch. 12. 10.
d 10. 10.

BC $\perp$ CA. at CD (CA) $\perp$ est p. $\therefore$ ergo BC e sch. 12. 10. est p. Q. E. D..

In numeris, sit rectang. DB, 12; & DC, $\sqrt{8}$.
erit CB, $\sqrt{18}$. atqui $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. & $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

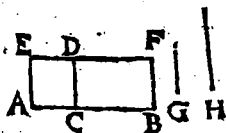
LEMMA.



Duas rectas rationales potentiâ solum commensurabiles invenire.

Sit A exposita p. $\therefore$ Sume B $\perp$ A. $\therefore$ & C $\perp$ B. a 11. 10. $\therefore$
b liquet B, & C esse quæsitæ. b sch. 12. 10.

PROP. XXII.



Quod sub rationalibus DC, CB potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum DB, ir-

rationale est; & recta linea H ipsum potens, irrationalis; vocetur autem Media.

Sit G exposita p. & describatur DA quadratum ex DC; sitque Hq = DB. Quoniam AC. CB $\therefore$:: DA, DB. $\therefore$ atque AC $\perp$ CB, $\therefore$ erit a 1. 6. b hyp. c 10. 10. d hyp. & 9. def. 10. e 13. 10. f 11. 10.
DA $\perp$ DB (Hq). $\therefore$ atqui Gq $\perp$ DA. $\therefore$ ergo Hq $\perp$ Gq. $\therefore$ ergo H est p. Q. E. D. vo-
cetur autem Media, quia AC. H :: H. CB.

In numeris, sit DC, 3; & CB, $\sqrt{6}$. erit re-
ctangulum DB (Hq) $\sqrt{54}$. quare H est $\sqrt{54}$.

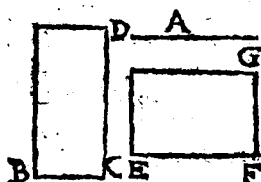
Mediæ nota est μ ; Medii verò $\mu\gamma$; pluraliter $\mu\alpha$.

SCHOL.

Omne rectangulum, quod potest contineri sub duabus rectis rationalibus potentiâ solum commensurabilibus, est Medium; quamvis contineatur sub duabus rectis irrationalibus; atque omne.

omne Medium potest contineri sub duabus rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus. ut exemp. gr. $\sqrt{24}$ est μ . quia continetur sub $\sqrt{3}$, & $\sqrt{8}$, qui sunt ρ , τ . etsi possit contineri sub $\sqrt{6}$, & $\sqrt{96}$ irrationalibus. nam $\sqrt{24} = \sqrt{576} = \sqrt{6}$ in $\sqrt{96}$.

PROP. XXIII.



Quod (BD) a media A fit, ad rationalem BC applicatum, latitudinem CD rationalem efficit, & ei BC, ad quam applicatum

est BD, longitudine incommensurabilem.

a. sch. 22. 10.

b. 1. ax. 1.

c. 14. 6.

d. 22. 6.

e. hyp.

f. sch. 12. 10.

g. 10. 10.

h. sch. 12. 10.

k. 1. 6.

l. 10. 10.

m. sch. 12. 10.

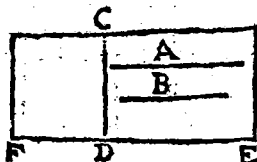
n. 13. 10.

o. 1. 6.

p. 10. 10.

Quoniam A est μ ,^a erit Aq rectangulo alicui (EG) æquale, contento sub EF, & FG ρ τ .^b ergo $BD = EG$.^c quare BC. EF :: FG. CD.^d ergo BCq. EFq :: FGq. CDq. sed BCq. & EFq.^e sunt ρ ,^f ideoque τ .^g ergo FGq τ . CDq. Ergo quum FG sit ρ ,^h erit CD ρ . Porro, quia EF. FG :: EFq. EG (BD); ob EF τ FG,ⁱ erit EFq τ BD. verum EFq = τ CDq.^j ergo rectang. BD τ CDq. quum igitur CDq. BD :: CD. BC.^k erit CD τ BC. ergo, &c.

PROP. XXIV.



Mediæ A commensurabilis B, mediæ est.

Ad CD, ρ ^a fac rectang. GE = Aq;^b & rectang. CF = Bq. Quoniam

a. 11. 6.

b. hyp.

c. 23. 10.

Aq (CE) est μ ,^b & CD ρ ,^c erit latitudo

DE

DE ρ $\perp$ CD. quoniam verò CE. CF $\perp$ d 1. 6.
ED. DF, & CE $\perp$ CF, $\therefore$ erit ED $\perp$ DF. e hyp.
ergò DE est ρ $\perp$ CD. $\therefore$ ergò rectang. CF f 10. 10.
(B) est μ , & proinde B est μ . Q. E. D. g 12. & 13.
Nota quòd signum $\perp$ plerumque valet poten- h 12. 10.

tia tantum commensurabile, ut in hac demonstratio-
ne, & in preced. &c. quod intellige, ut ex appa-
ret, & juxta citationes.

Coroll.

Hinc liquet spatium medio spatio commensu-
rabile medium esse.

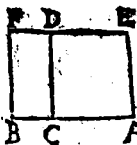
LEMMA.

A ————— Duas rectas medias A,
B ————— B longitudine commensura-
C ————— biles; item duas A, C po-
tentia tantum commensurabiles invenire.

$\therefore$ Sit A μ quævis; $\therefore$ sume B $\perp$ A; $\therefore$ & C $\perp$ A.
 $\therefore$ Factum esse liquet.

a lem. 21. 10.
& 13. 6.
b 2. lem. 10.
10.
c 3. lem. 10.
10.

PROP. XXV.

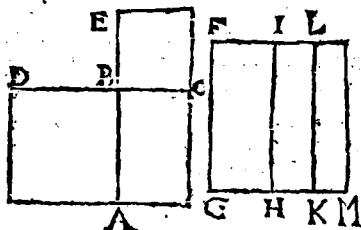


Quod sub DE, CB me-
diis longitudine commensura-
bilibus rectis lineis continetur
rectangulum DB, medium
est.

Super DC construatur
quadratum DA. Quoniam

AC. (DC) CB $\therefore$ DA. DB & DC $\perp$ CB;
 $\therefore$ erit DA $\perp$ DB. $\therefore$ ergò DB est μ . Q. E. D.

a 1. 6.
b 10. 10.
c 24. 10.

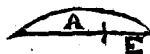


Quod sub mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis AB, BC continetur rectangulum AC, vel rationale est, vel medium.

Super rectas AB, BC^a describe quadrata AD, CE, atque ad FG^b,^c fac rectangula FH=AD,^b & IK=AC,^b & LM=CE.

Quadrata AD, CE, hoc est rectangula FH, LM^c sunt $\mu\alpha$, & $\square$; ergo eandem habentes rationem GH, KM sunt $\delta\rho$, & $\square$.^f ergo GH $\times$ KM est $\rho\nu$. atqui quia AD, AC, CE, hoc est FH, IK, LM sunt $\div$; & ^hproinde GH, HK, KM etiam $\div$,^h erit HK $\times$ GH=KM¹; ergo HK est ρ ; vel $\square$, vel $\square$ IH (GF); si $\square$,^m ergo rectang. IK, vel AC est $\rho\nu$. Sin $\square$,ⁿ ergo AC est $\mu\nu$. Q. E. D.

LEMMA.



Si A, & E sint $\square$ tantum;

^a hyp. & 16. 10.

^b 1. 6.

^c hyp.

^d 10. 10.

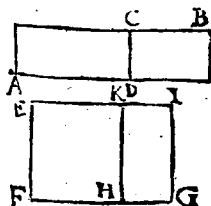
^e 14. 10.

Erunt primò, Aq, Eq, Aq+Bq, Aq-Eq¹ $\square$
 Erunt secundò, Aq, Eq, Aq+Eq, Aq-Eq¹ $\square$
 AE, & 2 AE. Nam A. E^b :: Aq. AE^b :: AE. Eq. ergo cum A^c $\square$ E,^d erit Aq $\square$ AE,^e & 2 AE. item Eq^d $\square$ AE,^e & 2 AE. quare cum Aq+Eq $\square$ Aq, & Eq; & Aq-Eq $\square$ Aq, & Eq;

Eq, ^ferunt Aq+Eq, ^f & Aq-Eq $\perp$ AB, & ^f 14. 10.
2 AE.

Hinc erunt tertio, Aq, Eq, Aq+Eq, Aq-Eq,
2 AE: $\perp$ Aq+Eq+2 AE; & Aq+Eq-2 AE. ^g 14. 16. &
^g & Aq+Eq+2 AE $\perp$ Aq+Eq-2 AE. ^h 17. 10.
^h (Q. A-E.) ^h cor. 7. 2.

PROP. XXVII.

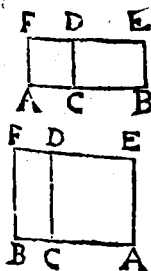


Medium AB non
superat medium AC
rationali DB.

Ad EF $\hat{p}$, ^a fac ^a cor. 16. 6.
EG=AB, ^a & EH
=AC. Rectan-
gula AB, AC, hoc
est EG, EH ^b sunt ^b hyp.
^{ma}, ^c ergo FG, & ^c 23. 10.
FH sunt $\hat{p}$ $\perp$ EF.

itaque si KG, ^d id est DB sit $\hat{p}$, ^e erit HG $\perp$ ^d 3. ax. 1.
HK; ^f quare HG $\perp$ FH. ^e ergo FG $\perp$ FH. ^f 21. 10.
sed FH est $\hat{p}$. ^g ergo FG est $\hat{p}$. verum prius ^f 13. 10.
erat FG $\hat{p}$. Quae repugnant. ^g lem. 26. 10.
^h sch. 12. 10.

SCHOL.



1. Rationale AE superat
rationale AD rationali CE. ^a hyp.
Nam AE $\perp$ AD; ^b cor. 16. 10.
^b ergo AE $\perp$ CE. ^c quare ^c sch. 12. 10.
CE est $\hat{p}$. Q. E. D.

2. Rationale AD cum ra-
tionali CF facit rationale
AF. ^a sch. 12. 10.
Nam AD $\perp$ CF; ^b 16. 10.
^b quare AF $\perp$ AD, & ^c sch. 12. 10.
CF, ^c proinde AF est $\hat{p}$.
Q. E. D.

PROP. XXVIII.

Medias invenire (C, & D), quæ rationale CD contineant.

a lem. 8 & 10.

b 13. 6.

c 12. 6.

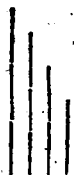
d 22. 10.

e const.

f 10. 10.

g 24. 10.

h 17. 6.



A C B D

h sch. 12. 10.

atqui Bq est $\rho\gamma$. ^h ergo CD est $\rho\gamma$. Q. E. E.

In numeris, sit A, $\sqrt{2}$; & B, $\sqrt{6}$. ergo C, est $\sqrt{12}$. fac $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} :: \sqrt{12}$. D. vel $\sqrt{4} \sqrt{36} :: \sqrt{12}$. D. erit D, $\sqrt{108}$. atqui $\sqrt{12}$ in $\sqrt{108} = \sqrt{1296} = \sqrt{36} = 6$. ergo CD. est 6. item C. D :: 1. $\sqrt{3}$. quare C $\propto$ D.

PROP. XXIX.

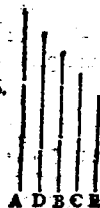
Medias invenire potentia tantum commensurabiles D, & E, quæ median DE contineant.

^a Sume A, B, C $\propto$ $\propto$. Fac A. D :: D. B. & B. C :: D. E. Dico factum.

Nam AB $\propto$ Dq & AB est $\mu\nu$ ergo D est μ . & B $\propto$ C, ergo D $\propto$ E. ^h ergo E est μ . porro,

B. C $\propto$ D. E, & permutando B. D :: C. E ^k hoc est D. A :: C. E. ^l ergo DE = AC. Sed AC = est $\mu\nu$. ergo DE est $\mu\nu$. Q. E. D.

In numeris, sit A, 20; & B, $\sqrt{200}$, & C, $\sqrt{80}$. Ergo D, est $\sqrt{\sqrt{80000}}$; & E $\sqrt{12800}$. Ergo DE = $\sqrt{\sqrt{1024000000}} = \sqrt{32000}$. & D. E :: $\sqrt{10}$. 2. quare D $\propto$ E.



A D B C E

a lem. 21. 10.

b 13. 6.

c 12. 6.

d 17. 6.

e 22. 10.

f const.

g 10. 10.

h 24. 10.

i const. &

cor. 4. 5.

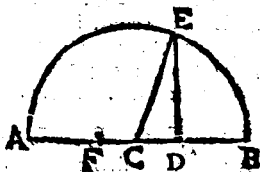
l 16. 6.

m 22. 6.

SCHOL.

A, 6. C, 12. Invenire duos numeros pla-
 B, 4. D, 8. nos similes vel dissimiles.
 AB, 24. CD, 96. Sume quoscunque quatu-
 or numeros proportionales,
 A, 6. C, 5. A. B :: C. D. liquet AB, &
 B, 4. D, 8. CD esse similes planos. Sin
 AB, 24. CD, 50. latera ipsorum AB, CD non
 proportionalia accipias, erunt
 AB, CD numeri plani dissimiles.

LEMMA.



1. Duos numeros quadratos (DEq, & CDq) invenire, ita ut compositus ex ipsis (CEq) quadratus etiam sit.

Sume AD, DB numeros planos similes (quorum ambo pares sint, vel ambo impares) nimirum AD, 24, & DB, 6. Horum summa, (AB) est 30; differentia (FD) 18, cujus semissis (CD) est 9. Habent vero plani similes AD, a 18. 8. DB unum medium numerum proportionalem, nempe DE. patet igitur singulos numeros CE, CD, DE rationales esse; proinde CEq (b CDq b 47. 1. + DEq) est numerus quadratus requisitus.

Facile itaque invenientur duo numeri quadrati, quorum excessus sit quadratus, vel non quadratus numerus. nempe ex eadem constructione, erit CEq - CDq = DEq.

Quod si AD, DB sint numeri plani dissimiles,

les, non erit media proportionalis (DE) numerus rationalis, proinde quadratorum CEq, CDq excessus (DEq) non erit numerus quadratus.

LEMMA. 2.

2. Duos numeros quadratos B, C invenire, ita ut compositus ex ipsis D, non sit quadratus. item quadratum numerum A dividere in duos numeros B, C non quadratos.

A, 3. B, 9. C, 36. D, 45.

1. Sume numerum quemlibet quadratum B, sitq; $C=4B$; & $D=B+C$. Dico factum.

a 24. 8.

b cor. 24. 8.

Nam B est Q. ex constr. item quia B. C :: 1. 4 :: Q. Q. ^a erit C etiam quadratus. Sed quoniam $B+C$ (D) C :: 5. 4 :: non Q. Q. ^b non erit D numerus quadratus. Q. E. F.

A, 36. B, 24. C, 12. D, 3. E, 2. F, 1.

2. Sit A numerus quivis quadratus. Accipe D, E, F numeros planos dissimiles, sitque $D=E+F$. fac D. E :: A. B. & D. F :: A. C. Dico factum.

a 14. 5.

b 21. def. 7.

c 26. 8.

Nam quia $D.E+F :: A.B+C$. & $D=E+F$, ^a erit $A=B+C$. Jam dic B quadratum esse. ^b ergo A & B; & c proinde D & E sunt numeri plani similes, contra Hypoth. idem absurdum sequetur, si C dicatur quadratus. ergo, &c.

PROP.

PROP. XXX.



C... E... D

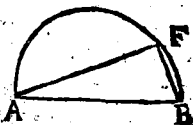
Invenire duas racionales AB, AF potentia tantum commensurabiles, ita ut major AB plus possit, quam minor AF, quadrato recte lineae BF longitudine sibi commensurabilis.

Exponatur AB, ρ .² Sume CD, CB numeros a 1. lem. 29. quadratos, ita ut CD — CE (ED) sit non Q. 10.
 Fiaturque CD. ED :: ABq. AFq. In circulo b 3. lem. 10. super AB diametrum descripto c aptetur AF; 10. ducaturq; BF. Sunt AB, AF, quas petis. c 1. 4.

Nam ABq. AFq d :: CD. ED. e ergo ABq d constr. AFq. verum AB est ρ . f ergo AF est ρ . sed e 6. 10. quia CD est Q: at ED non Q: g erit AB $\perp$ f sch. 12. 10. AF. porro, ob ang. h rectum AFB, est ABq h 31. 3. = AFq + BFq; cum igitur ABq. AFq :: k 47. 1. CD. ED. per conversionem rationis erit ABq. l 9. 10. BFq :: CD. CE :: Q. Q. ergo AB $\perp$ BF. Q. E. F.

In numeris; sit AB, 6; CD, 9; CE, 4; quare ED, 5. Fac 9. 5 :: 36. (Q: 6) AFq. erit AFq 20. proinde AF $\sqrt{20}$. ergo BFq = 36 — 20 = 16. quare BF est 4.

PROP. XXXI.



C..... E... D

Invenire duas racionales AB, AF potentia tantum commensurabiles, ita ut major AB plus possit, quam minor AF quadrato recte lineae BF sibi longitudine incommensurabilis.

Exponatur AB, ρ .² accipe numeros CB, ED a 2. lem. 29. quadratos, ita ut CD = CE + ED sit non Q. 10.
 & in reliquis imitare constructionem precedentis. Dico factum. Nam,

Nam, ut ibi, AB, AF sunt ρ $\square$. item ABq. BFq :: CD. ED. ergò cum CD sit non Q. erunt AB, BF $\square$. Q. E. F.

b 9. 10.

In numeris, sit AB, 5. CD, 45. CE = 36; ED = 9. Fac 45. 9 :: 25 (ABq). 5 (AFq). ergò AF = $\sqrt{5}$. proinde BFq = 45 - 25 = 20. quare BF = $\sqrt{20}$.

PROP. XXXII.

A —————
B —————
C —————
D —————
Invenire duas medias
C, D potentia tantum
commensurabiles, que
rationale CD contine-
ant, ita ut major C plus possit, quam minor D,
quadrato recta linea sibi longitudine commensura-
bilis.

^a Accipe A, & B ρ $\square$; ita ut $\sqrt{Aq - Bq}$ $\square$.
A. ^b Fiatque A. C :: C. B. ^c atque A. B :: C.
D. Dico factum.

Nam quia A, & ^d B sunt ρ $\square$, ^e erit C (^f $\sqrt{AB}$) μ . item ^g ideo C $\square$ D. ^h ergò D etiam
 μ . porro quia A. B ^d :: C. D; & permutatim A.
C :: B. D :: C. B; & Bq ^d est ρ , erit CD
^h (Bq) ρ . Denique quia $\sqrt{Aq - Bq}$ $\square$
A, ⁱ erit $\sqrt{Cq - Dq}$ $\square$ C. ergò, &c. Sin $\sqrt{Aq - Bq}$ $\square$ Aq, erit $\sqrt{Cq - Dq}$ $\square$ C.

In numeris, sit A, 8; B, $\sqrt{48}$ ($\sqrt{64 - 16}$)
ergò C = $\sqrt{AB} = \sqrt{3072}$. & D = $\sqrt{1728}$.
quare CD = $\sqrt{5308416} = \sqrt{2304}$.

PROP. XXXIII.

A —————
D —————
B —————
C —————
E —————
Invenire duas medias
D, E potentia solum com-
mensurabiles, que medium
DE contineant, ita ut ma-
ior D plus possit, quam
minor E, quadrato recta linea sibi longitudine com-
mensurabilis.

^a Sume

a 30. 10.

b 13. 6.

c 12. 6.

d const.

e 22. 10.

f 17. 6.

g 10. 10.

h 24. 10.

i 17. 6.

l 15. 10.

Sume A, & C ρ , ita ut $\sqrt{Aq - Cq} \sqsupseteq$ a 30. 10.
 A. b sume etiam B $\sqsupseteq$ A, & C; & fac A. D $\epsilon ::$ b lem. 21.
 D. B $\delta ::$ C. E. Erunt D, & E quæsitæ.
 Nam quoniam A, & C ϵ sunt ρ , & B $\sqsupseteq$ d 13. 6.
 A, & C, ϵ erit B ρ & D ($\sqrt{AB}$) ϵ erit μ . e 12. 6.
 Quia verò A. D $::$ C. E. erit permutando A. e constr.
 C $::$ D. E. ergò cum A $\sqsupseteq$ C, ϵ erit D $\sqsupseteq$ E. f sch. 12. 10.
 ergò B est μ . porro, ϵ quia D. B $::$ C. E; ϵ & g 22. 10.
 BC est $\mu\nu$, etiam DE ei ϵ æquale est $\mu\nu$. deniq; h 10. 10.
 propter A. C $::$ D. E. ϵ quia $\sqrt{Aq - Cq} \sqsupseteq$ k 24. 10. d
 A, ϵ erit $\sqrt{Dq - Eq} \sqsupseteq$ D. ergò, &c. Sin $\sqrt{}$ l 22. 10.
 $\sqrt{Aq - Cq} \sqsupseteq$ A. erit $\sqrt{Dq - Eq} \sqsupseteq$ Eq. m 16. 6.
 In numeris, sit A, ϵ C, $\sqrt{48}$; B, $\sqrt{28}$. erit n 15. 10.
 D $\sqrt{3072}$; & E $\sqrt{588}$. quare D. E $::$ 2. $\sqrt{3}$.
 & DE $= \sqrt{1344}$.

PROP. XXXIV.

Invenire duas re-
 ctas lineas AF, BF
 potentiâ incommen-
 surabiles, quæ faci-
 ant compositum qui-
 dem ex ipsarum qua-
 dratis rationales; re-



ctangulum verò sub ipsis contentum, medium.

Reperiuntur AB, CD ρ ita ut $\sqrt{ABq -}$ a 31. 10.
 CDq $\sqsupseteq$ AB. ϵ biseca CD in G. ϵ fac rectang. b 10. 1.
 AEB $=$ GCq. Super AB diametrum duc se- c 28. 6.
 micirculum AFB. erige perpendicularem EF. d 1. 6.
 duc AF, BF. Hæ sunt quæ indagandæ erant. e cor. 8. 6. &
 Nam AE. BE $\delta ::$ BA $\times$ AE. AB $\times$ BE. Sed f 7. 5.
 BA $\times$ AE $\epsilon =$ AFq; ϵ & AB $\times$ BE $=$ FBq. ϵ ergò g 19. 10.
 AE. BE $::$ AFq. FBq. ergò cum AE ϵ $\sqsupseteq$ h 10. 10.
 EB, ϵ erit AFq $\sqsupseteq$ FBq. Quinetiam ABq i 31. 3. &
 (ϵ AFq + FBq) ϵ est $\rho\nu$. denique EFq ϵ $\sqsupseteq$ 47. 1.
 AEB ϵ CGq. ϵ ergò EF $=$ CG. ergò CD $\times$ l constr.
 AB $=$ 2 EF $\times$ AB. atqui CD $\times$ AB ϵ est $\mu\nu$. m 1. cor. 1.
 ergò AB $\times$ EF, ϵ vel AF $\times$ FB est $\mu\nu$. Q. E. D. n 22. 10.
 o 24. 10.
 p sch. 22. 6.

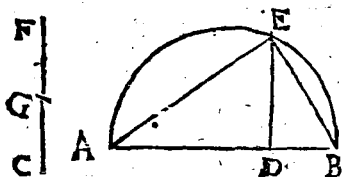
Explicatio

Explicatio per numeros.

Sit $AB, 6$. $CD, \sqrt{12}$, quare $CG = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Est verò $AE = 3 + \sqrt{6}$. & $EB = 3 - \sqrt{6}$. & unde AF erit $\sqrt{18 + 216}$. Et $FB, \sqrt{18 - 216}$. item $AFq + FBq$ est 36 , & $AF \times FB = \sqrt{108}$.

Cæterum AE invenitur sic. Quia $BA (6)$. $AF :: AF. AE$; erit $6 AE = AFq = AEq + 3 (EFq)$ ergò $6 AE - AEq = 3$. pone $3 + e = AE$. ergò $18 + 6e - 9 - 6e - ee$, hoc est $9 - ee = 3$. vel $ee = 6$. quare $e = \sqrt{6}$. proinde $AE = 3 + \sqrt{6}$.

PROP. XXXV.



Invenire duas rectas lineas AE, EB potentiâ incommensurabiles; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, rationale.

a 32. 10.]

Sume AB , & $CF \mu \sqcup$, ità ut $AB \times CF$ sit pr , atque $\sqrt{ABq - CFq} \sqcup AB$. & reliqua fiant, ut in præcedenti. erunt AE, EB quas petis.

Nam, ut isthic ostensum est, $AEq \sqcup EBq$; item $ABq (AEq + EBq)$ est μv . & denique $AB \times CF^b$ est pr , idcirco & $AB \times DE^d$, hoc est, $AE \times EB$, est pr . ergò &c. :

^b constr.

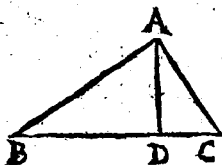
^c schol. 12. 10

^d schol. 22. 6.

PROP.

PROP. XXXVI.

F
G
E

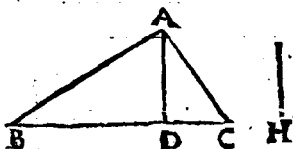


Invenire duas rectas lineas BA, AC potentia incommensurabiles; quae faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium; & rectangulum sub ipsis comprehensum medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

Accipe BC & EF μ $\square$; ita ut BC $\times$ EF sit a 33. 10. $\mu\nu$. & $\sqrt{BCq - EFq}$ $\square$ BC. & reliqua fiant, ut in praecedentibus. Erunt BA, AC exoptata. Nam, ut prius, BAq $\square$ ACq; item BAq + ACq est $\mu\nu$. & BA $\times$ AC est $\mu\nu$. Denique BC b $\square$ EF, atque ideo BC $\square$ EG; est μ BC, c 13. 10. EG d $:: BCq$. BC $\times$ EG, (BC $\times$ AD, vel BA $\times$ AC), e ergo BCq (BAq + ACq) $\square$ c 14. 10. BA $\times$ AC. ergo &c.

Schol.

F
G
E



Invenire duas medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

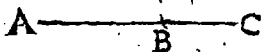
Sume BC μ . sitque BA $\times$ AC $\mu\nu$; & $\square$ a 36. 10. BCq (BAq + ACq). b Fac BA. H $:: H$. b 13. 6. AC. Sunt BC, & H μ $\square$. Nam BC est μ . & BA $\times$ AC (e Hq) est $\mu\nu$. quare H est etiam c 17. 6. μ .

ad. 14. 10.

$\mu.$ ^a Item $BA \times AC = BC^2$; ergo Hq $AC = BC^2$; ergo &c.

Principium senariorum per compositionē.

PROP. XXXVII.



Si due rationales AB, BC potentia tantum

commensurabiles componantur, tota AC irrationalis est; vocetur autem ex binis nominibus.

^a hyp.

^b lem. 26. 10. $AB^2 = BC^2$. Sed AB^2 est p. ^c ergo AC est p. Q.E.D.

^c 11. def. 10.

PROP. XXXVIII.

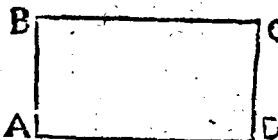
Si due media AB, BC potentia tantum commensurabiles componantur, que rationale contineant, tota AC irrationalis est; vocetur autem ex binis mediis prima.

^a hyp.

^b lem. 26. 10. $AB \times BC$; p. ^c ergo AC est p. Q.E.D.

^c 11. def. 10.

LEMMATA.



Quod sub linea rationali AB, & irrationali BC continetur rectangulum AC, irrationalis est.

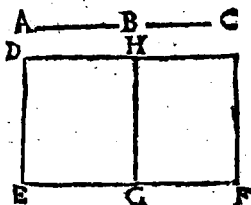
^a hyp.

^b 21. 10.

Nam si rectang. AC dicatur p.; quum AB^2 sit p.; ^b erit latitudo BC etiam p. contra Hyp.

PROP.

PROP. XXXIX.



Si duae mediae
AB, BC poten-
tiâ tantum com-
mensurabiles cõ-
ponantur, quæ
medium contine-
ant, tota AC ir-
rationalis erit;
vocetur autem ex
binis mediis se-
cunda.

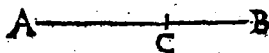
Ad expositam DE, ρ^a fac rectang. DF = a cor. 16. 6.
ACq; b & DG =, ABq + BCq. b 47.1. &
Quoniam ABq c $\sqsubset$ BCq, d crit ABQ + 11. 6.
BCq, hoc est DG $\sqsubset$ ABq; sed ABq e est $\mu\nu$. c hyp.
ergo DG est $\mu\nu$. verum rectang. ABC poni- d 16. 10.
tur $\mu\nu$; ideoque 2 ABC (f HF) est $\mu\nu$; g er- e 24. 10.
gò EG, & GF sunt ρ . quia verò DG h $\sqsubset$ HF; f 4. 2.
arque DG. HF :: EG. GF i erit EG $\sqsubset$ GF. g 23. 10.
ergo tota EF est ρ . n quare rectang. DF h lem. 26. 10.
est $\rho\nu$. o ergo $\sqrt{DF}$, id est AC, est ρ . Q. E. D. k 1. 6.
l 10. 10.
m 37. 10.
n lem. 38. 10.
o 11. def. 10.

PROP. XL.

Si duae rectae lineae
AB, BC potentiâ
tantum commensura-
biles componantur, quæ faciant compositum quidem
ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis
continetur, medium; tota recta linea AC, irrationalis
erit: vocetur autem major.

Nam quia ABq + BCq a est $\rho\nu$, & b $\sqsubset$ 2 a hyp.
ABC c $\mu\nu$, & proinde ACq (d ABq + BCq + c scb. 12. 10.
 2 ABC) e $\sqsubset$ ABq + BCq $\rho\nu$, f crit AC ρ . c hyp. & 24.
Q. E. D. d 4. 2.
e 17. 10.
f 11. def. 10.

PROP. XLI.



Si dua rectae lineae AC, CB potentia

incommensurabiles componantur; quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur, rationale; tota recta linea AB irrationalis erit: vocetur autem rationale ac medium potens.

a hyp. &

sch. 12. 10.

b sch. 12. 10.

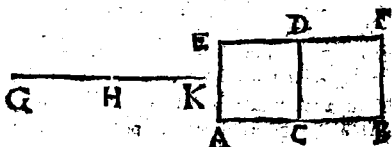
c hyp.

d 17. 10.

e 11. def. 10.

Nam 2 rectang. ACB, $\propto$ μ $\propto$ ACq + CBq $\propto$ μ . $\therefore$ ergo 2 ACB $\propto$ ABq. quare AB est ρ . Q. E. D.

PROP. XLII.



Si dua rectae lineae GH, HK potentia incommensurabiles componantur, quae faciant compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod sub ipsis continetur medium, incommensurabilisq; composito ex quadratis ipsarum; tota recta linea GK irrationalis erit: vocetur autem bina media potens.

a hyp.

b 23. 10.

c 4. 2.

d 2. 6.

e 10. 10.

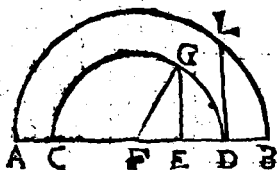
f 37. 10.

g lem. 38. 10.

h 11. def. 10.

Ad expositam FB ρ , fiant rectang. AF = GKq, & CF = GHq + HKq. Quoniam GHq + HKq (CF) $\propto$ μ ; latitudo CB berit ρ . Item quia 2 rectang. GHK ($\propto$ AD) $\propto$ μ , etiam AC berit ρ . Porro quia rectang. AD $\propto$ CF, $\therefore$ atque AD. CF :: AC. CB, erit AC $\propto$ CB. Quare AB est ρ . ergo rectang. AF, id est, GKq est ρ . $\therefore$ proinde GK est ρ . Q. E. D.

PROP.

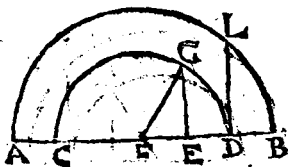


Quæ ex binis nominibus AB ad unum duntaxat punctum D dividitur in nomina AD, DB.

Si fieri potest, binomium AB alibi in E secetur in alia nomina AE, EB. Liqueat AB secari utrobique inæqualiter, quia AD $\neq$ DB, & AE $\neq$ EB.

Quoniam rectangula ADB, AEB ^a sunt $\mu\alpha$; ^a 37. 10.
^a & singula ADq, DBq; AEq, EBq sunt $\rho\alpha$; ^b a - b ^b fib. 27. 10.
 deoque ADq + DBq, ^b & AEq + EBq etiam
^a $\rho\alpha$, ^b idcirco ADq + DBq = AEq + EBq.
^c hoc est, 2 AEB - 2 ADB est $\rho\gamma$. ^d ergo AEB ^c sch. 5. 2.
 - ADB $\rho\gamma$ ergo $\mu\alpha$ superat $\mu\alpha$ per $\rho\gamma$. ^e Q.E.A. ^d sch. 12. 10.
^e 27. 10.

PROP. XLIV.



Quæ ex binis mediis primæ AB ad unum duntaxat punctum D dividitur in nomina AD, DB.

Puta AB dividi in alia nomina AE, EB. quo
 posito, singula ADq, DBq, EBq, ^a sunt $\mu\alpha$; ^a & ^a 38. 10.
 rectangula ADB, AEB, eorumque dupla, sunt ^c sch. 27. 10.
^a $\rho\alpha$. ^b ergo 2 AEB - 2 ADB, ^c hoc est ADq ^d sch. 5. 2.
 + DBq = AEq + EBq est $\rho\gamma$. ^e Q.E.A. ^d 27. 10.
 V. 3. PROP.

PROP. XLVII.

Rationale ac

medium potens

AB, ad unum

duntaxat punctum D dividitur in nomina AD, DB

Dic alia nomina AE, EB. ^a ergò tam AEq ^a 41. 10.

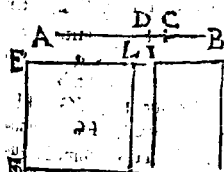
+ EBq; quàm ADq + DBq sunt ^{μa}. ^a & re-

ctangula AEB, ADB, sunt ^{pa}. ^b ergò 2 AEB ^b sch. 27. 10.

— 2 ADB, ^c hoc est, ADq + DBq: — AEq + ^c sch. 5. 2.

EBq est ^d pr. Q. E. A. ^d 27. 10.

PROP. XLVIII.



Bina ^a media po-
tens AB ad unum
duntaxat punctum
C dividitur in no-
mina AC, CB.

Vis AB dividi in
alia nomina AD,

DB. Ad exposi-

tam EF ^p, fiant rectang. EG = ABq, & EH =

ACq + CBq, & EK = ADq + DBq. Quo-

nam ACq + CBq, nempe EH ^a est ^{μv}, ^b crit ^a 42. 10.

latitudo FH ^p. Item quia 2 ACB, ^c hoc est, ^b 23. 10.

IG, est ^a ^{μv}, ^b crit HG etiam ^p. Ergò cum EH ^c 4. 2.

^a ^{μv}, sitque EH, IG ^d : : FH, HG, ^e crit ^d 1. 6.

FH ^e HG. ^f ergò FG est bin. ^f 10. 10.

na FH, HG. Eodem modo ejusdem nomina e-

runt FK, KG; contra ^g hujus.

Definitiones secunda.

Exposita rationali, & quæ ex binis no-
minibus, divisa in nomina; cujus majus
nomen plus possit quàm minus, quadrato rectæ
lineæ sibi longitudine commensurabilis;

1. Si quidem majus nomen expositæ rationali

commensurabile sit longitudine; vocetur tota ex binis nominibus prima.

II. Si verò minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, vocetur ex binis nominibus secunda.

III. Quòd si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

Rursus, si majus nomen plus possit quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis;

IV. Si quidem majus nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine; vocetur ex binis nominibus quarta.

V. Si verò minus nomen; vocetur quinta.

VI. Quòd si neutrum ipsorum nominum, vocetur sexta.

PROP. XLIX.

A 4 C 5 B

D —————

E ————— G

F

H —————

Invenire ex binis nominibus primam, E G.

* Sume AB, AC numeros quadra-

tos, quorum excessus CB non Q, exponatur D^p.

b accipe quamvis EF $\perp$ D. fac AB. CB :: EFq. FGq. erit EG bin. 1.

Nam EF $\perp$ D. e ergò EF $\hat{p}$. ² item

EFq $\perp$ FGq. s ergò FG est etiam $\hat{p}$. item

d quia EFq. FGq :: AB. CB :: Q. non Q, ^h erit

EF $\perp$ FG. denique quia per conversionem

rationis EFq. EFq — FGq :: AB. AC :: Q. Q

* erit EF $\perp$ $\sqrt{EFq - FGq}$. ¹ ergò EG est

bin. 1. Q. E. F.

Explicatio per numeros.

Sit D, 8. EF, 6. AB, 9. CB, 5. quare cum

9. 5

a sch. 29. 10.

b 2. lem. 10.

10.

c 3. lem. 10.

10.

d const.

c 6. def. 10.

f 6. 10.

g sch. 12. 10.

h 9. 10.

k 9. 10.

l 1. def. 48.

10.

9. 5 :: 36. 20. erit FG, $\sqrt{20}$. proinde EG est
6 + $\sqrt{20}$.

PROP. L.

A 4 C 5 B
D _____
E _____ G
F _____
H _____

*Invenire ex binis nomi-
nibus secundam, EG.*

Accipe AB, & AC
numeros quadratos, quo-
rum excessus CB sit

non Q. Sit D exposita p. sume FG $\square$ D. Fac *Proba ut præ-
ceden: em.*

CB. AB :: FGq. EFq. Erit EG quaesita.

Nam FG $\square$ D, quare FG est p. item EFq
 $\square$ FGq. ergo EF est etiam p. item quia FGq.
EFq :: CB. AB :: non Q. Q. est FG $\square$ EF.
denique quia CB. AB :: FGq. EFq, inversèque
AB. CB :: EFq. FGq, erit ut in præcedenti,
EF $\square$ $\sqrt{EFq - FGq}$. ^a è quibus EG est ^{a 2 def. 48.}
bin. 2. Q. E. F. ^{10.}

In numeris, sit D, 8. FG, 10. AB, 9. CB, 5.
erit EF, $\sqrt{180}$. quare EG est 10. + $\sqrt{180}$.

PROP. LI.

A 4 C 5 B
L 6

G _____
D _____ F
E _____
H _____

*Invenire ex binis
nominibus tertiā, DF.*

^a Sume numeros ^{a sch. 29. 10.}
AB, AC quadratos,
quorum excessus CB.

non Q. Sitque L numerus non Q, proximè ma-
jor quàm CB, nempe unitate, vel binario. sit G
exposita p. ^b Fac L. AB :: Gq. DEq. ^{b 3 lem 10.}
CB :: DEq. EFq. erit DF bin. 3. ^{10.}

Nam quia DEq. $\square$ Gq, ^c est DE p, item ^{c i constr. 6.}
Gq. DEq :: L. AB :: non Q. Q. ^{10.} ergo G $\square$ L
DE. item quia DEq. $\square$ EFq, ^d etiam EF ^{d sch. 12 10.}
est p. quinetiam quia DEq. EFq :: AB. CB ::
Q. non Q. ^e est DE $\square$ EF. porro, quia per ^{e 9. 10.}

Y 5

constr.

h. sch. 27. 8. constt. & ex æquali $Gq \cdot EFq :: L \cdot CB ::$ non Q .
h. 9. 10. Q . (nam L , & CB non sunt similes plani numeri) $\therefore$ erit G etiam $\perp EF$, denique ut in
k. 3 def. 48. $\perp DEq - EFq \perp DE$, $\therefore$ ergo DF
12. est bin. 3. $Q \cdot E \cdot F$.

In numericis, sit AB , 9; CB , 5; L , 6. G , 8. erit
 BE , $\sqrt{96}$ & EF , $\sqrt{\frac{410}{9}}$ quare $DF = \sqrt{96}$
 $\rightarrow \sqrt{\frac{410}{9}}$.

PROP. LII.

$A \dots 3 \ C \dots 6 \ B$

$G \text{-----}$

$D \text{-----} F$

$H \text{-----} E$

Invenire ex binis nominibus quartam DF .

$\therefore$ Sume quemvis numerum quadratum AB , quem divide in AC , CB non

quadratos. sit G exposita p . $\therefore$ accipe $DE \perp$

G . $\therefore$ Fac $AB \cdot CB :: DEq \cdot EFq$. erit DF bin. 4.

Nam ut in 49. hujus, DF ostendetur bin. item, quia per constr. & conversionem rationis $DEq \cdot DEq - EFq :: AB \cdot AC :: Q$. nbn Q .

$\therefore$ erit $DE \perp \sqrt{DEq - EFq}$. $\therefore$ ergo DF est bin. 4. $Q \cdot E \cdot F$.

In numericis, sit G , 8. DE , 6. erit $EF \sqrt{24}$. ergo DF est $6 \rightarrow \sqrt{24}$.

PROP. LIII.

$A \dots 3 \ C \dots 6 \ B$

$G \text{-----}$

$D \text{-----} F$

$H \text{-----} E$

Invenire ex binis nominibus quintam, DF .

Accipe quemvis numerum quadratum AB , cujus segmenta AC , CB

fiat non Q . sit G exposita p . sume $EF \perp G$. fac $CB \cdot AB :: EFq \cdot DEq$. erit DF bin. 5.

Nam ut in 50 hujus, erit DF bin. & quia per constr. & invertendo $DEq \cdot EFq :: AB \cdot CB$, ideoque per conversionem rationis $DEq \cdot DEq - EFq :: AB \cdot AC :: Q$ non Q . $\therefore$ erit DE

a. 9. 10.

b. 5. def.

48. 10.

DE $\sqrt{DEq - EFq}$. Ergo DF est bin.

4. Q. E. F.

In numeris sit G, 7. EF, 6. erit DE $\sqrt{54}$.
quare DF est $6 + \sqrt{54}$.

PROP. LIV.

A.....5 C.....7 B

L.....9

G.....

D.....

E

H.....

Invenire ex binis nomi-
nibus sextam.

Accipe AC, CB pri-
mos numeros utcumque, sic
ut AC + CB (AB) sit a 3. lem. 10.
non Q. sume etiam quem-

vis L num. Q. sit G expol. p^2 fiatque L. AB ::
Gq. DEq. atque AB. CB :: DEq. EFq. erit
DF. bin. 6.

Nam, ut in 51. hujus, DF ostendetur bin.
item quod DE, & EF $\sqrt{L}$ G. denique igitur

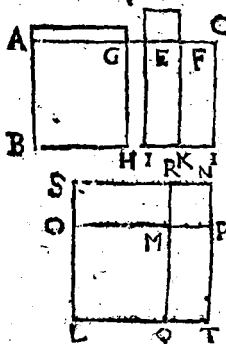
quia per constr. & conversionem rationis DEq. b sch. 27. 8.3.
DEq - EFq :: AB. AC :: non Q. Q. (Nam c 9. 10.
AB primus est ad AC, b ideoque ei dissimilis) c 6. def. 3.
ergo DE $\sqrt{DEq - EFq}$. ergo DF est 48. 10.

bin. 6. Q. E. F.

In numeris sit G, 6. DE $\sqrt{48}$. erit EF $\sqrt{28}$.
quare DF est $\sqrt{48} + \sqrt{28}$.

LEMMATA

LEMMA.



Sit AD rectangulum, cuius latus AC secetur inaequaliter in E; bisectumque sit segmentum minus EC in F; atque ad AE, ^a fiat rectang. AGE = EFq. perq. G, E, F ^b ducantur ad AB. parallela GH, EI, EK. ^c Fiat autem quadratum LM = rectang. AH, atq. ad OMP productam ^c fiat quadratum MN = GI; rectaeque LOS,

LQT, NRS, NPT producantur.

Dico 1. MS, MT sunt rectangula. Nam ob quadratorum angulos OMQ, RMR rectos, ^a erit QMR recta linea. ^b ergo anguli RMO, QMP recti sunt. quare pgra MS, MT sunt rectangula.

2. Hinc patet LS ^c = LT; & proinde LN esse quadratum.

3. Rectangula SM, MT, EK, FD aequalia sunt. Nam quia rectang. AGE ^d = EFq. ^e erit AE. EF :: EF. GE. ^f ideoque AH. EK :: EK. GI. hoc est per constr. LM. EK :: EK. MN. & verum LM. SM :: SM. MN. ergo EK ^h = SM ^k = FD ^l = MT.

4. Hinc LN ^m = AD.

5. Quia EC bisecta est in F, ^a patet EF, EC, EC ^q esse.

6. Si AE ^q EC; & AE ^q AEq. ^o erunt AG, GE, AE ^q item, quia AG,

AG,

a 28. 6.

b 31. 1.

c 14. 2.

a. sch. 13. 1.

b. 13. 1.

a 2. ax. 1.

d hyp.

e 17. 6.

f 1. 6.

g sch. 22. 6.

h 9. 5.

k 36. 1.

l 43. 1.

m 2. ax. 1.

n 16. 10.

o 18. &

16. 10.

AG, GE :: AH. GI $\therefore$ erunt AH, GI; hoc est P 10. 10.
LM, MN $\square$. item iisdem positis.

7. OM $\square$ MP. Nam per Hyp. AE. $\square$
EC, $\therefore$ ergo EC $\square$ GE. $\therefore$ quare EF $\square$ GE. q 14. 10.
sed EF. GE :: BK. GI. $\therefore$ ergo EK $\square$ GI, r 10. 10.
hoc est SM $\square$ MN. atqui SM. MN :: OM,
MP. $\therefore$ ergo OM $\square$ MP.

8. Sin ponatur AE $\square$ $\sqrt{AEq - ECq}$,
patet AG, GE, AE esse $\square$. unde LM $\square$ MN. 19. & 17.
MN. nam AG. GE :: AH. GI :: LM. MN. 10.

*His bene perspectis, facile sex sequentes Proposi-
tiones expediemus.*

PROP. LV.

Si spatium AD contineatur sub rationali AB,
& ex binis nominibus prima AC, (AE + EC)
recta linea OP spatium potens irrationalis est; quæ
ex binis nominibus appellatur.

Suppositis iis, quæ in lemmate proximè præ-
cedenti descripta, & demonstrata sunt, liquet re-
ctam OP posse spatium AD. $\therefore$ item AG, GE, a hyp. & lem.
AE sunt $\square$ ergo cum AE $\square$ sit $\square$ AB, 14. 10.
 $\therefore$ erunt AG, & GE, $\square$ AB. $\therefore$ ergo rectan- b hyp.
gula AH, GI, hoc est quadrata LM, MN sunt c sch. 12. 10.
ergo OM, MP sunt $\square$ $\square$. $\therefore$ proinde OP d 20. 10.
est bin. Q. E. D. e lem. 54. 10. f 37. 10.

In numeris sit AB, 5. AC, $4 + \sqrt{12}$ quare
rectang. AD = $20 + \sqrt{300}$ = quadr. LN, er-
go OP est $\sqrt{15} + \sqrt{5}$; nempe bin. 6.

PROP. LVI.

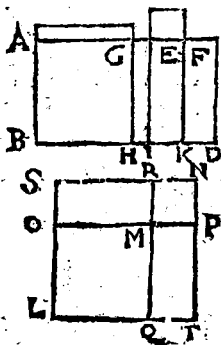
Si spatium AD contineatur sub rationali AB, & ex binis nominibus secunda AC ($AE + EC$); recta linea OP spatium AD potens, irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellatur.

Rursus adhibito lemmate ad 54 hujus, erit
 $OP = \sqrt{AD}$, ^a item AE, AG, GE sunt $\perp$
 ergo quum AE ^b sit ρ , $\perp$ AB, ^c erunt AG, GE
^d etiam ρ $\perp$ AB, ergo rectangula AH, GI;
 hoc est OMq. MPq ^e sunt $\mu a.$ ^e quinetiam
 OM $\perp$ MP. denique EF $\perp$ EC, & EC
^f $\perp$ AB, & quare EF est ρ $\perp$ AB. & ergo
^g EK; hoc est SM, vel OMP est $\rho r.$ ^h Proinde
 OP est 2μ prima. Q. E. D.

In numeris, sit AB, 5. & AC, $\sqrt{48} : + 6$. er-
 go rectang. $AD = \sqrt{1200} + 30 = OPq$,
 ergo OP est $\sqrt{675} + \sqrt{75}$; nempe bimed. 1.

Vid. Schem. 57.

PROP. LVII.



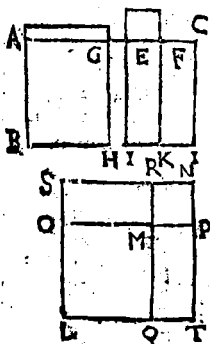
Si spatium AD contineatur sub rationali AB, & ex binis nominibus tertia AC ($AE + EC$); recta linea OP spatium AD potens, irrationalis est, quæ ex binis mediis secunda dicitur.

Ut prius, $OPq = AD$, item rectangula AH, GI, hoc est OMP, MPq sunt $\mu a.$ ^a item EK, vel OMP est $\mu r.$ ^b ergo OP est bimed. 2.

^a hyp. & 22.
^{10.}
^b 39, 10.

In numeris, sit AB, 5. AC, $\sqrt{32} + \sqrt{34}$. quare AD est $\sqrt{800} + \sqrt{600} = \text{OPq}$. proinde OP est $\sqrt{450} + \sqrt{50}$; hoc est binod. 2.

PROP. LVIII.



Si spatium AD continueatur sub rationali AB, & ex binis nominibus quarta AC; (AE + EC); recta linea OP spatium potens, irrationalis est, quæ vocatur major.

Nam iterum, OMq + MPq. aqlem. 54. 10. rectang. verò AI, hoc est OMq + MPq b est pv, c item EK, b hyp. & 10. 10. vel OMP est pv. c hyp. & 22. 10. ergò OP ($\sqrt{AD}$) est major. Q. E. D d 40. 10.

In numeris sit AB, 5. & AC, $4 + \sqrt{8}$. ergò rectang. AD est $20 + \sqrt{200}$. quare OP est $\sqrt{20} + \sqrt{200}$.

PROP. LIX.

Si spatium AD continueatur sub rationali AB, & ex binis nominibus quinta AC; recta linea OP spatium AD potens, irrationalis est, quæ rationale, & medium potens appellatur.

Rursus OMP + MPq: rectang. verò AI, vel OMq + MPq est pv. a item rectang. EK, a ut in præc. vel OMP est pv. b ergò OP ($\sqrt{AD}$) est po- b 41. 10. tens pv, & pv. Q. E. D.

In numeris, sit AB, 5. & AC, $2 + \sqrt{8}$. ergò rectang. AD = $10 + \sqrt{200} = \text{OPq}$. quare OP est $\sqrt{10} + \sqrt{200}$.

LN :: LN. IK. ^aquare DI. LM :: LM. IL.
^bergò DI x IL = LMq. ^cergò cum ACq ^k $\square$ ^h 17. 6.
 CBq. hoc est DH $\square$ IK, & ^l proinde DI $\square$ ^k hyp. ^l 10. 10.
 IL, ^merit DL $\square$ $\sqrt{DLq - LGq}$. Q. E. D. ^m 18. 10.
 6. Sin ponatur ACq $\square$ CBq, ⁿerit DL $\square$ ⁿ 19. 10.
 $\sqrt{DLq - LGq}$.

Hoc lemma præparationis vicem subeat pro 6 sequentibus propositionibus.

PROP. LXI.

Quadratum ejus, quæ ex binis nominibus (AC + CB) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus primam.

Suppositis iis, quæ in lemmate proximè antecedenti descripta & demonstrata sunt, Quoniam AC, CB ^a sunt $\square$, ^berit rectang. DK ^a hyp. ^b lem. 60. 10.
 $\square$ ACq; ^cergò DK est $\sqrt{p}$. ^dergò DL $\square$ ^c sch. 12. 10.
 DE $\square$. rectang. verò ACB, ideò que 2 ACB ^d 21. 10.
 (LF) ^e est $\sqrt{p}$. ^fergò latitudo LG est $\sqrt{p}$ ^e 22. 8.
 DE. ^gergò etiam DL $\square$ LG. ^hitem DL $\square$ ^f 24. 10.
 $\sqrt{DLq - LGq}$. ex quibus, ^k sequitur DG ^g 23. 10.
 esse bin. 1. Q. E. D. ^h lem. 60. 10.
^k 1. def. ^{48. 10.}

PROP. LXII.

Quadratum ejus, quæ ex binis mediis primæ (AC + CB) ad rationalem DE applicatum facit latitudinem DG ex binis nominibus secundam.

Rursus adhibito lemmate proximè præcedenti; Rectang. DK $\square$ ACq. ^aergò DK est ^a 24. 10.
 $\sqrt{p}$. ^bergò latitudo DK est $\sqrt{p}$ $\square$ DE. Quia verò rectang. ACB, ideòque LF (2 ACB) ^b 23. 10.
^c est $\sqrt{p}$, ^derit LG $\sqrt{p}$ $\square$ DE. ^cergò DL, ^c hyp. & ^{sch. 12. 10.}
 LG sunt $\square$. ^ditem DL $\square$ $\sqrt{DLq - LGq}$ ^d 21. 10.
 LGq. ^e ex quibus patet DG esse bin. 2. Q. ^e 13. 10.
 E. D. ^f lem. 60. 10. ^g 2 def. ^{48. 10.}
 X 3 PROP.

PROP. LXIII.

Quadratum ejus, quæ ex binis mediis secunda (AC + CB), ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus tertiam.

Ut in præced. DL est $\rho \sqcap$ DE. porro quia

a hyp. & 24. rectang. ACB, ideoque LF (2 ACB) ρ est
10.
b 23. 10. $\mu\nu$, ρ erit LG $\rho \sqcap$ DE. ρ quinetiam DL $\sqcap$
c lem. 60. 10. LG. ρ itemque DL $\sqcap \sqrt{DLq - LGq}$. ρ er-
d 3. def.
48. 10. go DG est bin. 3. Q. E. D.

PROP. LXIV.

Quadratum Majoris (AC + CB) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus quartam.

a hyp. & sch. Rursus ACq + CBq, hoc est DK ρ est ρ .
12. 10.
b 21. 10. ρ ergo DL est $\rho \sqcap$ DE. item ACB, ideoque
c hyp. & LF (2 ACB) ρ est $\mu\nu$. ρ ergo LG est $\rho \sqcap$
24. 10. DE. ρ proinde etiam DL $\sqcap$ LG. denique
d 23. 10. quia AC $\sqcap$ BC, ρ erit DL $\sqcap$ DLq -
e 13. 10. LGq. ρ unde DG. est bin. 4. Q. E. D.
f lem. 60. 10.
g 4. def.
48. 10.

PROP. LXV.

Quadratum ejus, quæ rationale ac medium potest, (AC + CB), ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus quintam.

a 23. 10. Iterum, DK est $\mu\nu$. ρ ergo DL est $\rho \sqcap$
b 21. 10. DE. item LF est ρ . ρ ergo LG est $\rho \sqcap$ DE
c 13. 10. ρ ergo DL $\sqcap$ LG. ρ item DL $\sqcap \sqrt{DLq -$
d lem. 60. 10. LGq. ρ proinde DG est bin. 5.
e 5. def.
48. 10.

PROP. LXVI.

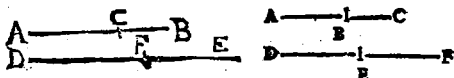
Quadratum ejus, quæ bina media potest (AC + CB), ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG ex binis nominibus sextam.

Ut

Ut prius, DL, & LG sunt $\perp$ DE.

Quia verò ACq + CBq (DK) = $\perp$ ACB, ^{a hyp.}
 ideoque DK $\perp$ LF (2 ACB) estque DK. ^{b 14. 10.}
 LF = :: DL. LG. ^{c 1. 6.} erit DL $\perp$ LG. ^{d 10. 10.} denique
 DL $\perp$ $\sqrt{DLq - LGq}$. ^{e lem. 60. 10.} ex quibus liquet
 DG esse bin. 6. Q. E. D. ^{f 6. def. 48. 10.}

LEMMA



Sint AB, DE $\perp$; fiatque AB. DE :: AC. DF.

Dico 1. AC $\perp$ DF. ut patet ex 10. 10.

item CB $\perp$ FE. = quia AB. DE :: CB. FE. ^{a 19. 3.}

2. AC. CB :: DF. FE. Nam AC. DF :: AB. DE :: CB. FE. ergo permutando AC. CB :: DF. FE.

3. Rectang. ACB $\perp$ DFE. Nam ACq. ACB^b :: AC. CB^c :: DF. EF :: DFq. DFE. ^{b 1. 6.} quare permutando ACq. DFq :: ACB. DFE. ^{c prius.} ergo cum ACq $\perp$ DFq. ^{d 10. 10.} erit ACB $\perp$ DFE.

4. ACq + CBq $\perp$ DFq + FEq. Nam quia ACq. CBq^e :: DFq. FEq. erit componendo ACq + CBq CBq :: DFq + FEq. FEq er- ^{e 22. 6.} go cum CBq $\perp$ FEq, ^{f 10. 10.} erit ACq + CBq $\perp$ DFq + FEq.

5. Hinc, si AC $\perp$, vel $\perp$ CB, ^{g 10. 10.} erit pa-
 riter DE $\perp$, vel $\perp$ EF.

PROP. LXVII.



Ei, quæ ex
binis nominibus
(AC + CB),
longitudine com-

mensurabilis DE, & ipsa ex binis nominibus est,
atque ordine eadem.

Fac AB. DE :: AC. DF. ^a sunt AC, DF

^a lem. 66. 10. $\square$; ^a & CB, FE $\square$. quare cum AC, & CB

^b hyp. ^b sint ρ $\square$, ^c erunt DF, FE ρ $\square$, ergo DE

^c lem. 66. 10. est etiam bin. Quia verò AC. CB ^a :: DF.

^d & sch. 12. 10. FE. Si AC $\square$, vel $\square \sqrt{ACq - BCq}$.

^d 15. 10. ^d etiam similiter DF $\square$, vel $\square \sqrt{DFq -$

^e 12. 10. & FEq. item si AC $\square$, vel $\square \rho$ expol. ^e erit si-

^f 14. 10. militer DF $\square$, vel $\square \rho$ expol. at si CB $\square$

vel $\square \rho$ ^e erit pariter FE $\square$ vel $\square \rho$. Sin

verò utraque AC, CB $\square \rho$, ^f erit utraq; etiam

^g Per def. DF, FE $\square \rho$. ^g Hoc est quodcumque bino-

^h 48. 10. mium fuerit AB, erit DE ejusdem ordinis.

Q. E. D.

PROP. LXVIII.

Ei, quæ ex binis mediis (AC + CB), longi-
tudine commensurabilis DE, & ipsa ex binis mediis
est, atq; ordine eadem.

^a Fiat AB. DE :: AC. DF. ^b ergo AC $\square$

^c DF. & CB $\square$ FE. ergo cum AC & CB

^d sint μ . ^d etiam DF, & FE erunt μ . & cum

^e AC $\square$ CB, ^e erit FD $\square$ FE. ^f ergo DE

^f 38. 10. est 2μ . Si igitur rectang. ACB sit $\rho\gamma$, quia

^g sch. 12. 10. DFE ^b $\square$ ACB, ^g etiam DFE est $\rho\gamma$; et si

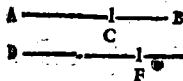
^h 24. 10. illud $\mu\nu$, ^h hoc etiam erit $\mu\nu$. ^k Id est, si AB

^k 38, vel sit bimed. 1. si bimed. 2. erit DE ejusdem or-

^l 39. 10. dinis. Q. E. D.

PROP.

PROP. LXIX.



Majori (AC
+ CB) commen-
surabilis DE, &
ipsa Major est.

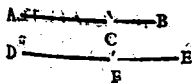
Fac AB. DE :: AC. DF. Quoniam AC
+ CB, ^a crit DF + FE. item ACq + ^a hyp.
CBq ^a est ^b $\mu\nu$; proinde cum DFq + FEq ^b $\mu\nu$ ^b lem. 66. 10.
ACq + CBq, ^c etiam DFq + FEq est ^c $\mu\nu$. de- ^c sch. 12. 10.
nique rectang. ACB ^a est $\mu\nu$. ^d ergo rectang. ^d 24. 10.
DFE est $\mu\nu$. (quia DFE ^b $\mu\nu$ ACB) ^c Quare ^c 40. 10.
DE est major Q. E. D.

PROP. LXX.

Rationale ac medium potenti (AC + CB)
commensurabilis DE. & ipsa rationale ac medium
potens est.

Iterum fac AB. DE :: AC. DF. Quia AC
+ CB; ^b etiam DF + FE. item quia ^a hyp.
ACq + CBq ^a est $\mu\nu$, ^c erit DFq + FEq $\mu\nu$. ^b lem. 66. 10.
denique quia rectang. ACB ^a est $\mu\nu$. ^c 24. 10.
DFE est $\mu\nu$. ^d etiam ^d sch. 12. 10.
^e ergo DE est potens $\mu\nu$, ac $\mu\nu$. ^e 41. 10.
Q. E. D.

PROP. LXXI.



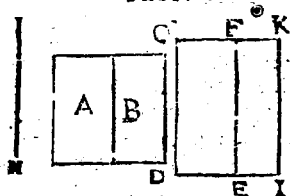
Bina media potenti
(AC + CB) com-
mensurabilis DE, &
ipsa bina media potens
est.

Divide DE, ut in præced. Quia ACq + ^a hyp.
CBq, ^b erit DFq + FEq. item quia ACq ^b lem. 66. 10.
+ CBq ^a est $\mu\nu$; ^c erit DFq + FEq etiam $\mu\nu$. ^c 24. 10.
pariterque quia ACB ^a est $\mu\nu$, ^d etiam DFE est ^d 24. 10.
 $\mu\nu$. denique quia ACq + CBq $\mu\nu$ ACB,
^e crit

e 14. 10.
f 42. 10.

e erit $DFq + FEq = DFE$.^e è quibus sequitur
DE esse potentem 2μ . Q. E. D.

PROP. LXXII.



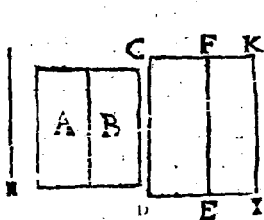
Si rationale
A, & medium
B componatur,
quatuor
irracionales fi-
unt; vel ea qua
ex binis nomi-
nibus; vel que
ex binis mediis

prima, vel major, vel rationale ac medium potens.

Nimirum si $Hq = A + B$, erit H una & line-
arum, quas theorema designat. Nam ad CD
expositam ^a ρ , ^a fiat rectang. $CE = A$; item FI
 $= B$; ^b ideoque $CI = Hq$. Quoniam igitur A
est ^c $\rho\gamma$, etiam CE est ^c $\rho\gamma$, ^e ergo latitudo CF
est ^d ρ $\perp$ CD. & quia B est $\mu\nu$, erit FI μ .
^d ergo FK est ^d ρ $\perp$ CD. ^e ergo CF, FK sunt
^d ρ $\perp$. Tota igitur CK ^e est bin. Si igitur A
 $\perp$ B, hoc est CE $\perp$ FI, ^e erit CF $\perp$ FK. er-
gò si CF $\perp$ $\sqrt{CFq - FKq}$, ^h erit CK bin.
1. & proinde $H = \sqrt{CI}$ ^k est bin. Si ponatur
CF $\perp$, $\sqrt{CFq - FKq}$, ^l erit CK bin. 4.
quare H ($\sqrt{CI}$) ^m est major. Sin A $\perp$ B;
^e erit CF $\perp$ FK; proinde si FK $\perp$ $\sqrt{FKq -$
CFq, ⁿ erit CK bin. 2. ^o quare H est 2μ pri-
ma. denique si FK $\perp$ $\sqrt{FKq - CFq}$, ^p erit
CK bin. 5. ^q unde H erit potens ^q $\rho\gamma$, ac $\mu\nu$.
Q. E. D.

PROP.

PROP. LXXIII.



Si dua me-
dia A, B inter
se incommensu-
rabilia compo-
nantur, dua re-
liqua irrationa-
les fiunt, vel ex
binis mediis se-
cunda, vel binam
media potens.

Nempe H potens $A + B$ est una dictarum
irrationalium. Nam ad CD expof. ρ , fac re-
ctang. $CE = A$, & $FI = B$. unde $Hq = CI$.
Quoniam igitur CE , & FI $\propto$ sunt $\mu\alpha$, β erunt
latitudines CF , FK ρ $\perp$ CD. item quia CE
 $\propto$ FI ; estque CE . FI $\propto$ CF . FK , α erit
 CF $\perp$ FK . ϵ ergo CK est bin 3. nempe, si
 CF $\perp$ $\sqrt{CFq - FKq}$. unde $H = \sqrt{CI}$
 $\propto$ $\mu\alpha$ β . Sin verò CF $\perp$ $\sqrt{CFq - FKq}$,
erit CK bin. 6. & β proinde H est potens $2 \mu\alpha$
Q. E. D.

Principium Senariorum per
detractionem.

PROP. LXXIV.

Si à rationali DF rationa-
lis DE auferatur potentia tan-
tum commensurabilis existens toti DF: reliqua EF
irrationalis est; vocetur autem apotome.

Nam $EFq \propto DEq$; sed DEq β est ρv .
 ϵ ergo EF . est ρ . Q. E. D.

In numeris, fit DF, 2. DE, $\sqrt{3}$. EF erit $2 - \sqrt{3}$.

PROP.

PROP. LXXV.

D E F Si à media DF media DE
 auferatur, potentia tantum
 commensurabilis existens toti DF, quæ cum tota
 DF rationale contineat; reliqua EF irrationalis est;
 vocetur autem media apotome prima.

a sch. 26. 10. Nam EFq^a = $\square$ rectang. FDE. ergo cum
 b hyp. 1
 c 20. & 11. FDB^b sit 'pv, c erit EF 'p. Q. E. D.
 def. 10. In numeris, sit DF $\sqrt{54}$. & DE $\sqrt{24}$. ergo
 EF est $\sqrt{54} - \sqrt{24}$.

PROP. LXXVI.

D E F Si à media DF media DE
 auferatur, potentia tantum
 commensurabilis existens toti DF, quæ cum tota
 DF medium contineat; reliqua EF irrationalis est:
 vocetur autem media apotome secunda.

a hyp.
 b 16. 10. Quia DFq, & DEq^a sunt $\mu\alpha$ $\square$,
 c 24. 10. b erit DFq + DEq $\square$ DEq. c quare DFq
 + DEq est $\mu\nu$. item rectang. FDE, c ideoque
 d cor. 7. 2. 2 FDE^a est $\mu\nu$. ergo EFq (d DFq + DEq -
 c 27. 10. 2 FDE) c est 'pv. quare EF est 'p. Q. E. D.
 In numeris, sit DF, $\sqrt{18}$; & DE, $\sqrt{8}$. erit
 EF $\sqrt{18} - \sqrt{8}$.

PROP. LXXVII.

A B C Si à recta linea AC recta
 auferatur AB potentia incom-
 mensurabilis existens toti BC, quæ cum tota AC
 faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis ra-
 tionale, quod autem sub ipsis continetur medium, re-
 liqua BC irrationalis est; vocetur autem minor.

a hyp. Nam ACq + ABq^a est 'pv. at rectang. ACB
 b sch. 12. 10. a est $\mu\nu$. b ergo 2 CAB $\square$ ACq + ABq
 c 7. 2. (2^c CAB + BCq); d ergo ACq + ABq $\square$
 d 17. 10. BCq. c ergo BC est 'p. Q. E. D.
 e 11. def. 10.

In numeris, sit AC, $\sqrt{18} + \sqrt{108}$. AB $\sqrt{18 - \sqrt{108}}$. ergo BC est $\sqrt{18 + \sqrt{108}}$.
 $-\sqrt{18 - \sqrt{108}}$.

PROP. LXXVIII.

 Si à rectalinea DF re-
 cta auferatur DE potentia
 incommensurabilis existens toti DF, quæ cum tota
 DF faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis
 medium, quod autem sub ipsis continetur, rationale;
 reliqua EF irrationalis est: vocetur autem cum rati-
 onali medium totum efficiens.

Nam $2 FDE$ est μ . α & $DFq + DEq$ est α hyp. & sch. 12. 10.
 μ . α ergo $2 FDE$ $\square$ $DFq + DEq$ d ($2 FDE$ b hyp.
 $+ EFq$) α ergo EF est ρ . Q. E. D. c sch. 12. 10.

In numeris sit DF, $\sqrt{216} + \sqrt{72}$. DE, $\sqrt{216 - \sqrt{72}}$. ergo EF est $\sqrt{216 + \sqrt{72}}$.
 $\sqrt{72} - \sqrt{216 - \sqrt{72}}$. d 7. 2. e sch. 12. 10.
 $\sqrt{72} - \sqrt{216 - \sqrt{72}}$. & 11. def. 10.

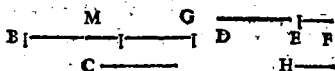
PROP. LXXIX.

 Si à recta DF recta au-
 feratur DE, potentia incommensurabilis existens toti DF,
 quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum qua-
 dratis, medium; & quod sub ipsis continetur, me-
 dium, incommensurableque compositio ex quadratis
 ipsarum, reliqua irrationalis est: vocetur autem cum
 medio medium totum efficiens.

Nam $2 FDE$, & $DFq + DEq$ sunt μ ; a hyp. & 24.
 b ergo EFq (α $DFq + DEq - 2 FDE$) est ρ . b 27. 10.
 α proinde EF est ρ . Q. E. D. c cor. 7. 2.

Exempl. gr. sit DF, $\sqrt{180} + \sqrt{60}$. DE, $\sqrt{180 - \sqrt{60}}$. t. F erit $\sqrt{180 + \sqrt{60}}$.
 $-\sqrt{180 - \sqrt{60}}$. d 11. def. 10.

LEMMA.



Si idem sit excessus inter primam magnitudinem BG, & secundam C (MG) qui inter tertiam magnitudinem DF, & quartam H (EF); erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem BG, & tertiam DF; qui inter secundam C, & quartam H.

a byp.

b 15. ex. 1.

Nam quia ^a æqualibus BM, DE adjectæ sunt MG, EF, ^a hoc est C, H; erit excessus totorum BG, DF, ^b æqualis excessui adjectorum C, H. Q. E. D.

Coroll.

Hinc, quatuor magnitudines Arithmetice proportionales, vicissim erunt Arithmetice proportionales.

PROP. LXXX.

Apotome AB una tantum congruat recta lineæ rationalis BC potentiâ, tantum commensurabilis existens toti AB.

a 22. 10.

b 24. 10.

c cor. 7. 2.

d lem. 79. 10.

e byp. &

27. 10.

f sch. 12. 10.

g 27. 10.

Si fieri potest, alia BD congruat. ^a ergo rectangula ACB, ADB; ^b ideôq; eorum dupla sunt $\mu\alpha$. cum igitur $ACq + BCq = 2 ACB^c = ABq$, $c = ADq + DBq = 2 ADB$, ergo vicissim $ACq + BCq = ADq + BDq^d = 2 ACB$. $\therefore 2 ADB$. Sed $ACq + BCq = ADq + BDq^e$ est $pv.$ f ergo $2 ACB = 2 ADB$ est $pv.$ Q. E. A.

PROP.

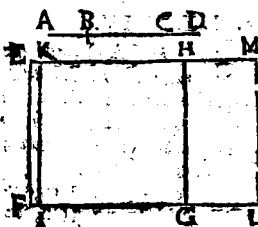
PROP. LXXXI.

Media Apotoma prima AB una tantum congruit recta linea media BC, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota rationale continens.

Die etiam BD congruere, igitur quoniam a hyp. tam ACq, & BCq; quam ADq, & BDq sunt b 16 & 24. $\mu\alpha$ $\square$. b etiam ACq $\rightarrow$ BCq, & ADq $\rightarrow$ BDq c hyp. erunt $\mu\alpha$. sed rectangula ACB, ADB; d adeoq; d sch. 12.10. 2 ACB, & 2 ADB sunt $\rho\alpha$. e ergo 2 ACB e sch. 27.10. = 2 ADB; f hoc est ACq $\rightarrow$ BCq = ADq f 7.2. & $\rightarrow$ BDq est $\rho\alpha$. g Q. E. A. g 27.10.

PROP. LXXXII.

Media Apotoma secunda AB una tantum congruit recta linea media BC, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota medium continens.



Si fieri potest, congruat alia BD. Ad EF ρ sunt rectang. EG = ACq + BCq; item rectang. EL = ADq + BDq. Item EI = ABq. Jam 2 ACB + ABq = ACq + BCq = EG, ergo cum EI = ABq; a erit KG = 2 a 4.2. & ACB. porro ACq, & BCq b sunt $\mu\alpha$ $\square$. ax.1. b hyp. c 24.10. Ergo EG (ACq + BCq) est $\mu\alpha$. d ergo latitudo EH ρ $\square$ EF. e Quinetiam rectang. d 23.10. ACB; f ideoque 2 ACB (KG) est $\mu\alpha$. e ergo c hyp. KH est etiam ρ $\square$ EF. denique quia ACq + f 24.10. BCq, id est, EG = $\square$ 2 ACB (KG) estque. l. m. 26.10. EG.

h 1. 6.
k 10. 10.
l 74. 10.

EG. KG ::^b EH, KH^k erit EH $\square$ KH.
ergo EK est aptome, cuius congruens KH. si-
mili argumento erit KM ejusdem EK congru-
ens; contra 80 hujus.

PROP. LXX XIII.

————— Minor AB, una tantum
A B D C congruit recta linea (BC)
potentiâ incommensurabilis existens toti, & cum tota
faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis ra-
tionale; quod autem sub ipsis continetur medium.

Puta alium BD congruere. Cum igitur ACq
^a hyp. + BCq, & ADq + BDq^a sint pz, eorum ex-
^b lem 97. 10. ceilus (² ACB —: ² ADB) ^c est py, ^d Q. E. A;
^c sch. 27. 10. quia ACB, & ADB sunt pz per hypoth.

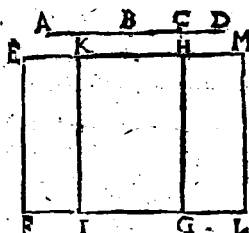
PROP. LXX XIV.

————— Ei (AB), que cum
A B D C rationali medium totum
facit, una tantum congruit recta linea BC, potentiâ
incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens
compositum quidem ex ipsarum quadratis medium,
quod autem sub ipsis continetur, rationale.

Dic aliam BD etiam congruere. ^a ergo re-
^b sch. 12. 10. ctangula A B, ADB. ^b ideoque ² ACB, & ²
^c lem. 79. 10. AD sunt pz. ergo ² ACB —: ² ADB; ^c hoc
^d scho. 27. 10. est, ACq + BCq —: ADq + BDq ^d est py.
Q. E. A: quum ACq + BCq, & ADq +
BDq sint pz per hypoth.

PROP.

PROP. LXXXV.



Et (AB), quæ
cum medio medi-
um totum facit
una tantum con-
gruit recta linea
BC potentia in-
commensurabilis
existens toti, &
cum tota faciens

& compositum ex
ipsum quadratis medium, & quod sub ipsis conti-
netur, medium, incommensurabileque composito ex
ipsum quadratis.

Suppositis iis quæ facta & ostensa sunt in 8 &
hujus; liquet EH, & KH esse $\square$ EF. Porro
igitur quia ACq + CBq, hoc est, rectang. EG
 $\square$ ACB, ^b idèque EG $\square$ 2 ACB (KG) ^{a hyp.}
estque EG. KG :: EH. KH; erit EH $\square$ ^{b 14. 10.}
KH. ergo EK est apotome, cujus congruens ^{c 1. 6.}
KH. Haud aliter KM eidem apotomæ EK
congruere ostendetur; contra 8o hujus-

Definitiones tertia.

Exposita rationali, & apotomâ, si tota plus
possit quàm congruens quadrato rectæ li-
næ sibi longitudine commensurabilis;

I. Si quidem tota expositæ rationali longitu-
dine sit commensurabilis, vocetur apotome pri-
ma.

II. Si verò congruens expositæ rationali lon-
gitudine sit commensurabilis, vocetur apotome
secunda.

III. Quòd si neque tota, neque congruens
expositæ rationali sit longitudine commensura-
bilis, vocetur apotome tertia.

Rursus si tota plus possit quam congruens quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis;

IV. Si quidem tota expositæ rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur apotome quarta.

V. Si verò congruens expositæ rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur apotome quinta.

VI. Quod si neque tota neque congruens expositæ rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur apotome sexta.

PROP. LXXXVI, 87, 88, 89, 90, 91.

A ... 4 C ... 5 B

D —————

E ————— F

G

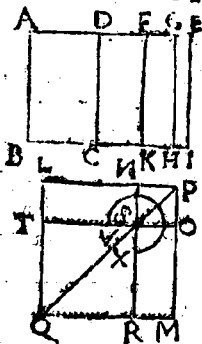
H —————

Invenire apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, sextam.

Apotomæ inveniuntur, subductis minoribus binomiorum nominibus ex majoribus. Exemp.

gr. Sit $6 + \sqrt{20}$ bin. i. erit $6 - \sqrt{20}$ apot. i. &c. Quare de earum inventione plura repetere nihil est necesse.

LEMMA.



Sit rectangulum AC sub rectis AB, AD. producat AD ad E, & bisectetur DE in F. sitq; rectang. AGE = FEQ & compleantur rectangula AI, DK, FH. Fiant verò quadratum LM = AH; & quadratum NO = GI, producanturque NSR, OST.

Dico primò rectangul. AI = LM + NO = TOq + SOq. ut

patet ex constr.

Secun-

Secundò, *Rectang.* $DK = LO$. Nam quia
 rectang. $AGE^a = FEq^b$ sunt AG, FE, GE a constr.
 $\therefore$, c adeoque AH, FI, GI $\therefore$; a hoc est, LM , b 17. 6.
 FI, NO $\therefore$; atqui LM, LO, NO d sunt $\therefore$; c 1. 6.
 ergò $FI = e LO = DK = f NM$. d fib. 22. 6.

Tertiò, *Hinc*, $AC = AI - DK - FI =$ e 9. 5.
 $LM + NO - LO - NM = TR$. f 36. 1.

Quartò, $Liquet$ DF, FE, DE esse $\perp$. g 43. 1.

Quintò, *Si* $AE \perp DE$, & $AE \perp \sqrt{AEq - DEq}$, h 16. 10.
 $erunt AG, GE, AE \perp$. k 18. rot.

Sextò, *Item*, quia $AE^l \perp DE$, $erunt AE, FE \perp$. l hyp.
 $ideoque AI, FI$; hoc est, $LM + NO$ m 13. 10.
 & LO sunt $\perp$.

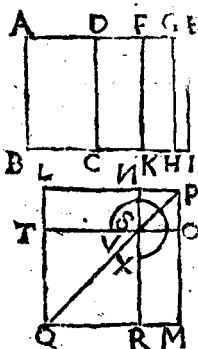
Septimò, *Item* quia $AG^* \perp GE^*$ $erunt AH, GI$; hoc est, $LM, NO \perp$. n 1. 6. & 10. 10.

Octavò, *Sed* quia $AE^l \perp DE$, $erunt FE, GE \perp$, $ideoque$ rectang. $FI \perp GI$, hoc est
 $LO \perp NO$. quare cum LO, NO $p :: TS$. p 2. 6.
 SO . $erunt TS, SO \perp$. q 10. 10.

Nonò, *Si* ponatur $AE \perp \sqrt{AEq - DEq}$, r 19. 10.
 $erunt AG, GE, AE \perp$. & 17. 10.

Decimo, $Quare$ rectang. AH, GI , hoc est
 TOq, SOq $erunt \perp$. s 1. 6. & 10. 10.

PROP. XCII.



Si spatium AC contineatur sub rationali AB, & Apotoma prima AD (AE — DE); recta linea TS spatium AC potens, apotome est.

Adhibe lemma proximè antecedens pro præparatione ad demonstrationem hujus. Igitur $TS = \sqrt{AC}$. item AG, GE, AB sunt $\square$; ergò cum AE $\square$ AB; berunt AG, & GE $\square$

AB. ^c ergò rectangula AH & GI, hoc est TOq & SOq sunt μ . ^d item TO, SO sunt ρ $\square$, ^e proinde TS est apotome. Q. E. D.

PROP. XCIII.

Vide Schem. præced.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB, & apotoma secunda AD (AE — DE); recta linea TS spatium AC potens; media est apotome prima.

Rursus juxta lemma antecedens, AG, GE, AE sunt $\square$. cum igitur AE $\square$ sit ρ $\square$ AB berunt AE, GE etiam ρ $\square$ AB. ^c ergò rectangula AH, GI, hoc est TOq, SOq, sunt μ ; ^d item TO $\square$ SO. Denique quia DE $\square$ AB ρ . ^e erit rectang. DI, ejusque semissis DK, vel LO, hoc est TOS ρ $\square$ & e quibus sequitur TS ($\sqrt{AC}$) esse medix apor. 1. Q. E. D.

PROP.

PROP. XCIV.

Vide idem.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB, & apotoma tertia AD (AE — DE); recta linea TS spatium AC potens, media est apotome secunda.

Ut in præcedenti TO, & SO sunt μ . Quoniam igitur DE ^a est ρ $\square$ AB, ^b erit rectang.

DI, ^c ideoque DK; vel TOS $\mu\nu$. ^d ergo TS = $\sqrt{AC}$ est medix apot. 2. Q. E. D.

a hyp.
b 22. 10.
c 24. 10.
d 76. 10.

PROP. XCV.

Vide idem.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB, & apotoma quarta AD (AE — DE) recta linea TS spatium AC potens, minor est.

Rursus TO ^a $\square$ SO. Quoniam igitur AE

^b est ρ $\square$ AB, ^c erit AI, (TOq + SOq) ^d $\mu\nu$.

atque ut prius rectang. TOS est $\mu\nu$. ^d ergo TS = $\sqrt{AC}$ est minor. Q. E. D.

a lem, 91. 10.
b hyp.
c 20. 10.
d 77. 10.

PROP. XCVI.

Vide idem.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB, & apotoma quinta AD (AE — DE); recta linea TS spatium AC potens, est quæ cum rationali medium totum efficit.

Rursus enim TO $\square$ SO. itaque cum AE

^a sit ρ $\square$ AB, ^b erit AI, hoc est TOq + SOq

$\mu\nu$. Sed prout in 93 rectang. TOS est $\mu\nu$. ^c pro-

inde TS = $\sqrt{AC}$ est quæ cum $\rho\nu$ facit totum

$\mu\nu$. Q. E. D.

a hyp.
b 22. 10.
c 78. 10.

MK :: MK. IK, ^e erit DI. ML :: ML. IL.

^f ergo DIL = MLq.

f 17. 6.

Quarto, Si ponatur AC $\perp$ BC, erit DK $\perp$.

ACq. Nam ACq + BCq (DK) = $\perp$ g 16. 10.

ACq.

Quinto, Item, DL $\perp$ $\sqrt{DLq - GLq}$.

Nam quia DH (ACq) $\perp$ IK (BCq) ^h erit h 10. 10.

DI $\perp$ IL. ^k ergo $\sqrt{DLq - GLq} \perp$ DL. k 18. 10.

Sexto, Item DL $\perp$ GL. Nam ACq +

BCq $\perp$ ^l 2 ACB; hoc est DK $\perp$ GK. ^m er- l lem. 26 100.

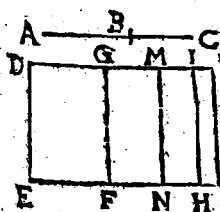
m 10. 10.

go DL $\perp$ GL.

Septimo, Si ponatur AC $\perp$ BC, ⁿ erit DL n 19. 100.

$\perp$ $\sqrt{DLq - GLq}$.

PROP. XCVIII.



Quadrati apo-
tome AB (AC
EC) ad ratione-
lem DE applica-
tum, facit latitu-
dinem DG apo-
tomen primam.

Fac ut in

lemmate proxime
precedenti:

Quoniam igitur AC, EC ^a sunt $\perp$ ^b $\perp$ ^c $\perp$ ^d $\perp$ ^e $\perp$ ^f $\perp$ ^g $\perp$ ^h $\perp$ ⁱ $\perp$ ^j $\perp$ ^k $\perp$ ^l $\perp$ ^m $\perp$ ⁿ $\perp$ ^o $\perp$ ^p $\perp$ ^q $\perp$ ^r $\perp$ ^s $\perp$ ^t $\perp$ ^u $\perp$ ^v $\perp$ ^w $\perp$ ^x $\perp$ ^y $\perp$ ^z $\perp$ ^{aa} $\perp$ ^{ab} $\perp$ ^{ac} $\perp$ ^{ad} $\perp$ ^{ae} $\perp$ ^{af} $\perp$ ^{ag} $\perp$ ^{ah} $\perp$ ^{ai} $\perp$ ^{aj} $\perp$ ^{ak} $\perp$ ^{al} $\perp$ ^{am} $\perp$ ^{an} $\perp$ ^{ao} $\perp$ ^{ap} $\perp$ ^{aq} $\perp$ ^{ar} $\perp$ ^{as} $\perp$ ^{at} $\perp$ ^{au} $\perp$ ^{av} $\perp$ ^{aw} $\perp$ ^{ax} $\perp$ ^{ay} $\perp$ ^{az} $\perp$ ^{ba} $\perp$ ^{bb} $\perp$ ^{bc} $\perp$ ^{bd} $\perp$ ^{be} $\perp$ ^{bf} $\perp$ ^{bg} $\perp$ ^{bh} $\perp$ ^{bi} $\perp$ ^{bj} $\perp$ ^{bk} $\perp$ ^{bl} $\perp$ ^{bm} $\perp$ ^{bn} $\perp$ ^{bo} $\perp$ ^{bp} $\perp$ ^{bq} $\perp$ ^{br} $\perp$ ^{bs} $\perp$ ^{bt} $\perp$ ^{bu} $\perp$ ^{bv} $\perp$ ^{bw} $\perp$ ^{bx} $\perp$ ^{by} $\perp$ ^{bz} $\perp$ ^{ca} $\perp$ ^{cb} $\perp$ ^{cc} $\perp$ ^{cd} $\perp$ ^{ce} $\perp$ ^{cf} $\perp$ ^{cg} $\perp$ ^{ch} $\perp$ ^{ci} $\perp$ ^{cj} $\perp$ ^{ck} $\perp$ ^{cl} $\perp$ ^{cm} $\perp$ ^{cn} $\perp$ ^{co} $\perp$ ^{cp} $\perp$ ^{cq} $\perp$ ^{cr} $\perp$ ^{cs} $\perp$ ^{ct} $\perp$ ^{cu} $\perp$ ^{cv} $\perp$ ^{cw} $\perp$ ^{cx} $\perp$ ^{cy} $\perp$ ^{cz} $\perp$ ^{da} $\perp$ ^{db} $\perp$ ^{dc} $\perp$ ^{dd} $\perp$ ^{de} $\perp$ ^{df} $\perp$ ^{dg} $\perp$ ^{dh} $\perp$ ^{di} $\perp$ ^{dj} $\perp$ ^{dk} $\perp$ ^{dl} $\perp$ ^{dm} $\perp$ ^{dn} $\perp$ ^{do} $\perp$ ^{dp} $\perp$ ^{dq} $\perp$ ^{dr} $\perp$ ^{ds} $\perp$ ^{dt} $\perp$ ^{du} $\perp$ ^{dv} $\perp$ ^{dw} $\perp$ ^{dx} $\perp$ ^{dy} $\perp$ ^{dz} $\perp$ ^{ea} $\perp$ ^{eb} $\perp$ ^{ec} $\perp$ ^{ed} $\perp$ ^{ee} $\perp$ ^{ef} $\perp$ ^{eg} $\perp$ ^{eh} $\perp$ ^{ei} $\perp$ ^{ej} $\perp$ ^{ek} $\perp$ ^{el} $\perp$ ^{em} $\perp$ ^{en} $\perp$ ^{eo} $\perp$ ^{ep} $\perp$ ^{eq} $\perp$ ^{er} $\perp$ ^{es} $\perp$ ^{et} $\perp$ ^{eu} $\perp$ ^{ev} $\perp$ ^{ew} $\perp$ ^{ex} $\perp$ ^{ey} $\perp$ ^{ez} $\perp$ ^{fa} $\perp$ ^{fb} $\perp$ ^{fc} $\perp$ ^{fd} $\perp$ ^{fe} $\perp$ ^{ff} $\perp$ ^{fg} $\perp$ ^{fh} $\perp$ ^{fi} $\perp$ ^{fj} $\perp$ ^{fk} $\perp$ ^{fl} $\perp$ ^{fm} $\perp$ ^{fn} $\perp$ ^{fo} $\perp$ ^{fp} $\perp$ ^{fq} $\perp$ ^{fr} $\perp$ ^{fs} $\perp$ ^{ft} $\perp$ ^{fu} $\perp$ ^{fv} $\perp$ ^{fw} $\perp$ ^{fx} $\perp$ ^{fy} $\perp$ ^{fz} $\perp$ ^{ga} $\perp$ ^{gb} $\perp$ ^{gc} $\perp$ ^{gd} $\perp$ ^{ge} $\perp$ ^{gf} $\perp$ ^{gh} $\perp$ ^{gi} $\perp$ ^{gj} $\perp$ ^{gk} $\perp$ ^{gl} $\perp$ ^{gm} $\perp$ ^{gn} $\perp$ ^{go} $\perp$ ^{gp} $\perp$ ^{gq} $\perp$ ^{gr} $\perp$ ^{gs} $\perp$ ^{gt} $\perp$ ^{gu} $\perp$ ^{gv} $\perp$ ^{gw} $\perp$ ^{gx} $\perp$ ^{gy} $\perp$ ^{gz} $\perp$ ^{ha} $\perp$ ^{hb} $\perp$ ^{hc} $\perp$ ^{hd} $\perp$ ^{he} $\perp$ ^{hf} $\perp$ ^{hg} $\perp$ ^{hi} $\perp$ ^{hj} $\perp$ ^{hk} $\perp$ ^{hl} $\perp$ ^{hm} $\perp$ ^{hn} $\perp$ ^{ho} $\perp$ ^{hp} $\perp$ ^{hq} $\perp$ ^{hr} $\perp$ ^{hs} $\perp$ ^{ht} $\perp$ ^{hu} $\perp$ ^{hv} $\perp$ ^{hw} $\perp$ ^{hx} $\perp$ ^{hy} $\perp$ ^{hz} $\perp$ ^{ia} $\perp$ ^{ib} $\perp$ ^{ic} $\perp$ ^{id} $\perp$ ^{ie} $\perp$ ^{if} $\perp$ ^{ig} $\perp$ ^{ih} $\perp$ ⁱⁱ $\perp$ ^{ij} $\perp$ ^{ik} $\perp$ ^{il} $\perp$ ^{im} $\perp$ ⁱⁿ $\perp$ ^{io} $\perp$ ^{ip} $\perp$ ^{iq} $\perp$ ^{ir} $\perp$ ^{is} $\perp$ ^{it} $\perp$ ^{iu} $\perp$ ^{iv} $\perp$ ^{iw} $\perp$ ^{ix} $\perp$ ^{iy} $\perp$ ^{iz} $\perp$ ^{ja} $\perp$ ^{jb} $\perp$ ^{jc} $\perp$ ^{jd} $\perp$ ^{je} $\perp$ ^{jf} $\perp$ ^{jh} $\perp$ ^{ji} $\perp$ ^{jj} $\perp$ ^{jk} $\perp$ ^{jl} $\perp$ ^{jm} $\perp$ ^{jn} $\perp$ ^{jo} $\perp$ ^{jp} $\perp$ ^{jq} $\perp$ ^{jr} $\perp$ ^{js} $\perp$ ^{jt} $\perp$ ^{ju} $\perp$ ^{jv} $\perp$ ^{jw} $\perp$ ^{jx} $\perp$ ^{ky} $\perp$ ^{kz} $\perp$ ^{la} $\perp$ ^{lb} $\perp$ ^{lc} $\perp$ ^{ld} $\perp$ ^{le} $\perp$ ^{lf} $\perp$ ^{lg} $\perp$ ^{lh} $\perp$ ^{li} $\perp$ ^{lj} $\perp$ ^{lk} $\perp$ ^{ll} $\perp$ ^{lm} $\perp$ ^{ln} $\perp$ ^{lo} $\perp$ ^{lp} $\perp$ ^{lq} $\perp$ ^{lr} $\perp$ ^{ls} $\perp$ ^{lt} $\perp$ ^{lu} $\perp$ ^{lv} $\perp$ ^{lw} $\perp$ ^{lx} $\perp$ ^{ly} $\perp$ ^{lz} $\perp$ ^{ma} $\perp$ ^{mb} $\perp$ ^{mc} $\perp$ ^{md} $\perp$ ^{me} $\perp$ ^{mf} $\perp$ ^{mg} $\perp$ ^{mh} $\perp$ ^{mi} $\perp$ ^{mj} $\perp$ ^{mk} $\perp$ ^{ml} $\perp$ ^{mn} $\perp$ ^{mo} $\perp$ ^{mp} $\perp$ ^{mq} $\perp$ ^{mr} $\perp$ ^{ms} $\perp$ ^{mt} $\perp$ ^{mu} $\perp$ ^{mv} $\perp$ ^{mw} $\perp$ ^{mx} $\perp$ ^{my} $\perp$ ^{mz} $\perp$ ^{na} $\perp$ ^{nb} $\perp$ ^{nc} $\perp$ nd $\perp$ ^{ne} $\perp$ ^{nf} $\perp$ ^{ng} $\perp$ ^{nh} $\perp$ ⁿⁱ $\perp$ ^{nj} $\perp$ ^{nk} $\perp$ ^{nl} $\perp$ ^{nm} $\perp$ ⁿⁿ $\perp$ ^{no} $\perp$ ^{np} $\perp$ ^{nq} $\perp$ ^{nr} $\perp$ ^{ns} $\perp$ ^{nt} $\perp$ ^{nu} $\perp$ ^{nv} $\perp$ ^{nw} $\perp$ ^{nx} $\perp$ ^{ny} $\perp$ ^{nz} $\perp$ ^{oa} $\perp$ ^{ob} $\perp$ ^{oc} $\perp$ ^{od} $\perp$ ^{oe} $\perp$ ^{of} $\perp$ ^{og} $\perp$ ^{oh} $\perp$ ^{oi} $\perp$ ^{oj} $\perp$ ^{ok} $\perp$ ^{ol} $\perp$ ^{om} $\perp$ ^{on} $\perp$ ^{oo} $\perp$ ^{op} $\perp$ ^{oq} $\perp$ ^{or} $\perp$ ^{os} $\perp$ ^{ot} $\perp$ ^{ou} $\perp$ ^{ov} $\perp$ ^{ow} $\perp$ ^{ox} $\perp$ ^{oy} $\perp$ ^{oz} $\perp$ ^{pa} $\perp$ ^{pb} $\perp$ ^{pc} $\perp$ ^{pd} $\perp$ ^{pe} $\perp$ ^{pf} $\perp$ ^{pg} $\perp$ ^{ph} $\perp$ ^{pi} $\perp$ ^{pj} $\perp$ ^{pk} $\perp$ ^{pl} $\perp$ ^{pm} $\perp$ ^{pn} $\perp$ ^{po} $\perp$ ^{pp} $\perp$ ^{pq} $\perp$ ^{pr} $\perp$ ^{ps} $\perp$ ^{pt} $\perp$ ^{pu} $\perp$ ^{pv} $\perp$ ^{pw} $\perp$ ^{px} $\perp$ ^{py} $\perp$ ^{pz} $\perp$ ^{qa} $\perp$ ^{qb} $\perp$ ^{qc} $\perp$ ^{qd} $\perp$ ^{qe} $\perp$ ^{qf} $\perp$ ^{qg} $\perp$ ^{qh} $\perp$ ^{qi} $\perp$ ^{qj} $\perp$ ^{qk} $\perp$ ^{ql} $\perp$ ^{qm} $\perp$ ^{qn} $\perp$ ^{qo} $\perp$ ^{qp} $\perp$ ^{qq} $\perp$ ^{qr} $\perp$ ^{qs} $\perp$ ^{qt} $\perp$ ^{qu} $\perp$ ^{qv} $\perp$ ^{qw} $\perp$ ^{qx} $\perp$ ^{qy} $\perp$ ^{qz} $\perp$ ^{ra} $\perp$ ^{rb} $\perp$ ^{rc} $\perp$ rd $\perp$ ^{re} $\perp$ ^{rf} $\perp$ ^{rg} $\perp$ ^{rh} $\perp$ ^{ri} $\perp$ ^{rj} $\perp$ ^{rk} $\perp$ ^{rl} $\perp$ ^{rm} $\perp$ ^{rn} $\perp$ ^{ro} $\perp$ ^{rp} $\perp$ ^{rq} $\perp$ ^{rr} $\perp$ ^{rs} $\perp$ ^{rt} $\perp$ ^{ru} $\perp$ ^{rv} $\perp$ ^{rw} $\perp$ ^{rx} $\perp$ ^{ry} $\perp$ ^{rz} $\perp$ ^{sa} $\perp$ ^{sb} $\perp$ ^{sc} $\perp$ ^{sd} $\perp$ ^{se} $\perp$ ^{sf} $\perp$ ^{sg} $\perp$ ^{sh} $\perp$ ^{si} $\perp$ ^{sj} $\perp$ ^{sk} $\perp$ ^{sl} $\perp$ sm $\perp$ ^{sn} $\perp$ ^{so} $\perp$ ^{sp} $\perp$ ^{sq} $\perp$ ^{sr} $\perp$ ^{ss} $\perp$ st $\perp$ ^{su} $\perp$ ^{sv} $\perp$ ^{sw} $\perp$ ^{sx} $\perp$ ^{sy} $\perp$ ^{sz} $\perp$ ^{ta} $\perp$ ^{tb} $\perp$ ^{tc} $\perp$ ^{td} $\perp$ ^{te} $\perp$ ^{tf} $\perp$ ^{tg} $\perp$ th $\perp$ ^{ti} $\perp$ ^{tj} $\perp$ ^{tk} $\perp$ ^{tl} $\perp$ tm $\perp$ ^{tn} $\perp$ ^{to} $\perp$ ^{tp} $\perp$ ^{tq} $\perp$ ^{tr} $\perp$ ^{ts} $\perp$ ^{tt} $\perp$ ^{tu} $\perp$ ^{tv} $\perp$ ^{tw} $\perp$ ^{tx} $\perp$ ^{ty} $\perp$ ^{tz} $\perp$ ^{ua} $\perp$ ^{ub} $\perp$ ^{uc} $\perp$ ^{ud} $\perp$ ^{ue} $\perp$ ^{uf} $\perp$ ^{ug} $\perp$ ^{uh} $\perp$ ^{ui} $\perp$ ^{uj} $\perp$ ^{uk} $\perp$ ^{ul} $\perp$ ^{um} $\perp$ ^{un} $\perp$ ^{uo} $\perp$ ^{up} $\perp$ ^{uq} $\perp$ ^{ur} $\perp$ ^{us} $\perp$ ^{ut} $\perp$ ^{uu} $\perp$ ^{uv} $\perp$ ^{uw} $\perp$ ^{ux} $\perp$ ^{uy} $\perp$ ^{uz} $\perp$ ^{va} $\perp$ ^{vb} $\perp$ ^{vc} $\perp$ ^{vd} $\perp$ ^{ve} $\perp$ ^{vf} $\perp$ ^{vg} $\perp$ ^{vh} $\perp$ ^{vi} $\perp$ ^{vj} $\perp$ ^{vk} $\perp$ ^{vl} $\perp$ ^{vm} $\perp$ ^{vn} $\perp$ ^{vo} $\perp$ ^{vp} $\perp$ ^{vq} $\perp$ ^{vr} $\perp$ ^{vs} $\perp$ ^{vt} $\perp$ ^{vu} $\perp$ ^{vv} $\perp$ ^{vw} $\perp$ ^{vx} $\perp$ ^{vy} $\perp$ ^{vz} $\perp$ ^{wa} $\perp$ ^{wb} $\perp$ ^{wc} $\perp$ ^{wd} $\perp$ ^{we} $\perp$ ^{wf} $\perp$ ^{wg} $\perp$ ^{wh} $\perp$ ^{wi} $\perp$ ^{wj} $\perp$ ^{wk} $\perp$ ^{wl} $\perp$ ^{wm} $\perp$ ^{wn} $\perp$ ^{wo} $\perp$ ^{wp} $\perp$ ^{wq} $\perp$ ^{wr} $\perp$ ^{ws} $\perp$ ^{wt} $\perp$ ^{wu} $\perp$ ^{wv} $\perp$ ^{ww} $\perp$ ^{wx} $\perp$ ^{wy} $\perp$ ^{wz} $\perp$ ^{xa} $\perp$ ^{xb} $\perp$ ^{xc} $\perp$ ^{xd} $\perp$ ^{xe} $\perp$ ^{xf} $\perp$ ^{xg} $\perp$ ^{xh} $\perp$ ^{xi} $\perp$ ^{xj} $\perp$ ^{xk} $\perp$ ^{xl} $\perp$ ^{xm} $\perp$ ^{xn} $\perp$ ^{xo} $\perp$ ^{xp} $\perp$ ^{xq} $\perp$ ^{xr} $\perp$ ^{xs} $\perp$ ^{xt} $\perp$ ^{xu} $\perp$ ^{xv} $\perp$ ^{xw} $\perp$ ^{xx} $\perp$ ^{xy} $\perp$ ^{xz} $\perp$ ^{ya} $\perp$ ^{yb} $\perp$ ^{yc} $\perp$ ^{yd} $\perp$ ^{ye} $\perp$ ^{yf} $\perp$ ^{yg} $\perp$ ^{yh} $\perp$ ^{yi} $\perp$ ^{yj} $\perp$ ^{yk} $\perp$ ^{yl} $\perp$ ^{ym} $\perp$ ^{yn} $\perp$ ^{yo} $\perp$ ^{yp} $\perp$ ^{yq} $\perp$ ^{yr} $\perp$ ^{ys} $\perp$ ^{yt} $\perp$ ^{yu} $\perp$ ^{yv} $\perp$ ^{yw} $\perp$ ^{yx} $\perp$ ^{yy} $\perp$ ^{yz} $\perp$ ^{za} $\perp$ ^{zb} $\perp$ ^{zc} $\perp$ ^{zd} $\perp$ ^{ze} $\perp$ ^{zf} $\perp$ ^{zg} $\perp$ ^{zh} $\perp$ ^{zi} $\perp$ ^{zj} $\perp$ ^{zk} $\perp$ ^{zl} $\perp$ ^{zm} $\perp$ ^{zn} $\perp$ ^{zo} $\perp$ ^{zp} $\perp$ ^{zq} $\perp$ ^{zr} $\perp$ ^{zs} $\perp$ ^{zt} $\perp$ ^{zu} $\perp$ ^{zv} $\perp$ ^{zw} $\perp$ ^{zx} $\perp$ ^{zy} $\perp$ ^{zz} $\perp$

a bypo
b 11. 57 100
c feb. 12. 100.
d 21. 10.
e 22. 8.
f 24. 10.
g 23. 100.
h 13. 100.
i feb. 12. 100.
k 74. 10.
l 1. def. 85.
m 10.
n lem. 27. 100.

PROP.

PROP. XCIX.

Vide Schema subsequens.

Quadratum mediæ apotomæ primæ AB (AC — EC) ad rationalem DB applicatum, facit latitudinem DG apotomen secundam.

a hyp.

b lem. 97. 10.

c 24. 10.

d 23. 10.

e hyp. & sch.

12. 10.

f 21. 10.

g 13. 10.

h sch. 12. 10.

i 74. 10.

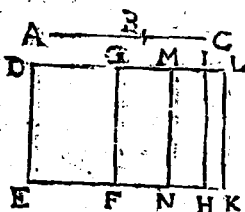
l lem. 97. 10.

m 2. def.

85. 10.

Rursus. (supposito lenimate præcedenti) quia AC, & BC^a sunt μ τ ^b, erit DK (ACq + BCq) τ ACq; ^c quare DK est $\mu\nu$. ^d ergò DL est ρ τ DE. ^e item GK (2 ACB) est $\rho\nu$. ^f ergò GL est ρ τ DE; ^g quare DL τ GL. ^h Sed DLq τ GLq. ⁱ ergò DG est apotome. quia verò DL ^l τ $\sqrt{DLq - GLq}$, ^m erit DG apotome secunda. Q. E. D.

PROP. C.



Quadrati mediæ apotomæ secundæ AB (AC — BC) ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG apotomen tertiam.

Iterum DK est $\mu\nu$. ^a quare DL est ρ τ DE. item GK est $\mu\nu$. ^a unde GL est ρ τ DE; ^b item DK τ GK, ^c quare DL τ GL; ^d at DLq τ GLq. ^e ergò DG est apor. & quidem ^f 3^a. ^g quia DL τ $\sqrt{DLq - GLq}$. Q. E. D.

PROP. CI.

Vide Schema præced.

Quadratum minoris AB (AC — BC) ad rationalem

tionalem DE applicatum, facit latitudinem DG apotomen quartam.

Ut prius, ACq + BCq, hoc est DK est p; ^{a 21. 10.}
 ergo DL est p. DE. at rectang. ACB, ide- ^{* hyp.}
 oque GK (z ACB) * est $\mu\nu$, b quare GL est p ^{b 23. 10.}
 DE. c ergo DL DE. GL. d at DLq DE. ^{c 13. 10.}
 GLq. quia verò ACq DE. BCq, e erit DL DE. ^{d sch. 12. 10.}
 DLq — GLq: f ergo DG conditiones habet ^{e lem. 97. 10.}
 apotomæ quartæ. Q. E. D. ^{f 4. def. 85. 10.}

PROP. CII.

Vide Schem. praced.

Quadratum ejus AB (AC — BC), quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG apotomen quintam.

Rursus enim, DK est $\mu\nu$, a quare DL est p ^{a 23. 10.}
 DE. item GK est p, b unde GL est p. DE. ^{b 21. 10.}
 DE. c ergo DL DE. GL. d sed DLq DE. GLq. ^{c 13. 10.}
 porro, DL e DE. DLq — GLq. ex quibus, ^{d sch. 12. 10.}
 DG f est apot. quinta. Q. E. D. ^{e lem. 97. 10.}
^{f 5. def. 85. 10.}

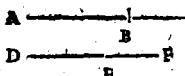
PROP. CIII.

Vide Schema idem.

Quadratum ejus AB (AC — BC), quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem DE applicatum, facit latitudinem DG apotomen sextam.

Haud aliter, quàm antea, DK; & GK sunt ^{a 23. 10.}
 $\mu\nu$; a quare DL & GL sunt p. DE. item b hyp. & lem. ^{b 97. 10.}
 DK b DE. GK, c quare DL DE. GL. d ergo ^{c 10. 10.}
 DG est apot. b cum igitur ACq DE. BCq, ide- ^{d 74. 10.}
 oq; DL DE. DLq — GLq, e erit DG. ^{e 6. def. 85. 10.}
 apot. sexta. Q. E. D.

PROP. CIV.


 Recta linea DE apotomae AB ($AC - BC$) longitudine commensurabilis; & ipsa apotome est, atque ordine eadem.

LEMMA

Sit $AB : DE :: AC : DF$. & $AB \perp DE$.

Dico $AC + BC \perp DF + EF$.

Nam $AC : BC :: DF : EF$. ergo componendo $AC + BC : BC :: DF + EF : EF$. ergo permutando $AC + BC : DF + EF :: BC : EF$.
^a at $BC \perp EF$. ^b ergo $AC + BC \perp DF + EF$; Q. E. D.

^a lem. 66. 10.

^b 10. 10.

^a 12. 6.

^b lem. 103.

10.

^c hyp.

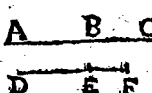
^d 67. 10.

^e Per definitiones ad 85.

10.

^a Fac $AB : DE :: AC : DF$. ^b igitur $AC + BC \perp DF + EF$. ergo cum $AC + BC$ binomium sit, ^d erit $DF + EF$ ejusdem ordinis binomium: ^e quare $DF - EF$ ejusdem ordinis apotome est, cujus $AC - BC$. Q. E. D.

PROP. CV.


 Recta linea DE media apotomae AB ($AC - BC$) commensurabilis; & ipsa media apotome est, atque ordine eadem.

^a 12. 6.

^b lem. 103.

10.

^c 68. 10.

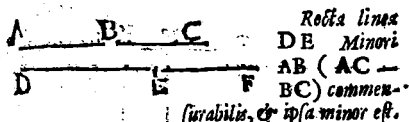
^d 73. &c.

75. 10.

Iterum ^a fac $AB : DE :: AC : DF$. ^b quare $AC + BC \perp DF + EF$. ^c ergo $DF + EF$ est bimed. ejusdem ordinis; cujus $AC + BC$.
^d proinde & $DF - EF$ mediae apotome erit ejusdem classis, cujus $AC - BC$. Q. E. D.

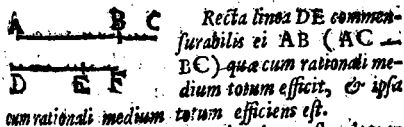
PROP.

PROP. CVI.



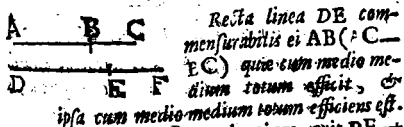
Fiat AB. DE :: AC. DF, ^a estq; AC + BC ^a lem. 103.
 $\perp$ DF + EF. atq; AC + BC ^b est Major, ^b hyp.
 ergo DF + EF quoq; Major est. ^c & proinde. ^c 69. 10.
 DF - EF est Minor. Q. E. D. ^d 77. 10.

PROP. CVII.



Nam ad modum praecedentium ostendimus
 DF + EF esse potentem ^a pv, & ^b pv. ^a ergo DF - EF est ut dicitur. ^a 78. 10.

PROP. CVIII.



Nam, ad normam praecedentium, erit DF + EF potens ^a 2px. ^a ergo DF - EF erit ut in ^a 79. 10.
 propol.

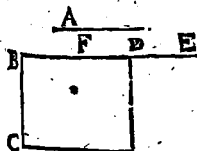
PROP. CXI.

Vide Schema idem.

Medio B à medio A + B detracto, quod sit incommensurabile toti A + B; reliqua due irrationales sunt, vel media apotome secunda; vel cum medio medium totum efficiens.

Ad CD p̄ fiant rectang. CI = A + B, & FI = B, a quare CE = A = Hq. Quoniam a 3. ar. 1. igitur CI est μ. b e. it CK p̄ ⊥ CD. eodem b 23. 10. modo erit FK c ⊥ CD. item quia CI c ⊥ c hyp. FI, d erit CK ⊥ FK; e quare CF est apotome, f tertia scilicet, si CK ⊥ √CKq - FKq, d 10. 10. unde H (√CE) erit medię apot. secunda. e 74. 10. verum si CK ⊥ √CKq - FKq, h erit CF h 6. def. apot. sexta. k quare H erit faciens p̄-cum μ. k 85. 10. Q. E. D. k 97. 10.

PROP. CXII.



Apotome A non est eadem, quæ ex binis nominibus.

Ad expol. BC p̄, fiat rectang. CD = Aq. Ergo cum A sit apotome, a erit BD a 98. 10.

apot. prima; ejus congruens sit DE. b quare BE, b 74. 10. DE sunt p̄ ⊥. c & BE ⊥ BC. Vis A esse c 1. def. bin. ergo BD est bin. 1. ejus nomina sint BF, 85. 10. FD; sitque BF ⊥ FD; d ergo BF, FD sunt p̄ d 37. 10. ⊥; & BF e ⊥ BC. ergo cum BC ⊥ BE, e 1 def. f erit BE ⊥ BF & ergo BE ⊥ FE. h ergo f 12. 10. FF est p̄. item quia BE ⊥ DE, k erit FE ⊥ g cor. 16. 10. DE. l quare FD est apotome, l adeoque FD est h sch. 12. 10. p̄. sed ostensa est p̄. quæ repugnant. ergo A malè k 14. 10. dicitur binomium. l 74. 10. Q. E. D.

Z 3

Nomina

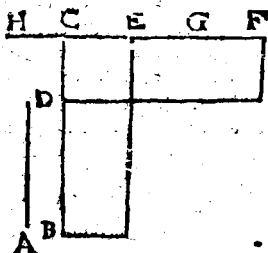
Nomina 13. linearum irrationalium inter
se differentium.

1. Media
2. Ex binis nominibus, cujus 6 species
3. Ex binis mediis prima.
4. Ex binis mediis secunda.
5. Major.
6. Rationale ac medium potens.
7. Bina media potens.
8. Apotome, cujus etiam 6 species.
9. Medix apotome prima.
10. Medix apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum rationali medium totum efficiens.

13. Cum medio medium totum efficiens.

Cum latitudinum differentia arguant differentias rectorum, quarum quadrata sunt applicata ad aliquam rationalem, sitque demonstratum in precedentibus, latitudines quæ oriuntur ex applicationibus quadratorum harum 13 linearum inter se differre, perspicue sequitur has 13 lineas inter se differre.

PROP. CXIII.



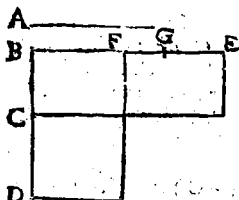
Quadratum
rationalis A ad
eam, quæ ex
binis nominibus
BC (BD +
DC) applica-
tum, latitudi-
nem facit apo-
tomen EC, cu-
jus nomina EH,
CH commen-
surabilia sunt
nominibus BD, DC
ejus, quæ ex binis nominibus

et

in eadem proportionē (EH. BD :: CH. DC);
 & adhas, apotome EC quæ sit, eundem habet or-
 dinem, quem ea BC, quæ ex binis nominibus.

Ad DC minus nomen^a fac rectang. DF = a cor. 16. 6.
 Aq = BE. quare^a EC. CD^b :: FC. CE. ergo b 14. 6.
 dividendo BD. DC :: FE. EC. cum igitur BD
 = DC, erit FE = EC. sume EG = EC; c hyp.
 siatque FG. GE :: EC. CH. Erunt EH, CH d 14. 5.
 nomina apotomæ EC; quibus conveniunt ea,
 quæ in theoremate proposita sunt. Nam com-
 ponendo FE. GE. (EC) :: EH. CH. ergo
 FH. EH^e :: EH. CH^f :: FE. EC^g :: BD. e 12. 5.
 DC. quare cum BD = DC, erit EH = CH f Prius.
 CH; h & FHq = EHq. ergo, quia FHq. h 10. 10.
 EHq^k :: FH. CH. erit FH = CH, l Neoc. k cor. 20. 6.
 FC = CH. Porro CD est p, & DF (Aq) l 16. 10.
 est q, ergo FC est p, CD. quare etia CH m 21. 10.
 est p. igitur EH CH sunt p, ac ut
 prius. ergo EC est apotome, cui congruit CH.
 porro EH. CHⁿ :: BD. DC, ideo permutando n sch. 12. 10.
 EH. BD :: CH. DC. unde quia CH = CH o 74. 10.
 DC, erit EH = BD. quinimo pone BD =
 BDq = DCq; erit ideo EH = EHq =
 CHq. item si BD = p expos. erit EH = ei p 10. 10.
 dem p; hoc est si BC sit bin. 1. erit EC apot. q 15. 10.
 prima. Similiter si DC = p expos. erit CH
 = eidem p. u hoc est si BC sit bin. 2. x erit r 12. 10.
 EC apot. 2. & si hac bin. 3. illa erit apot. 3. f 1. def.
 &c. Sin BD = BDq = DCq, erit EH = CH t 1. def.
 = EHq = CHq; si igitur BC sit bin. 4, vel 5, 85. 10.
 vel 6. erit EC similiter apot. 4, vel 5, vel 6. u 2 def.
 Q. E. D. x 2 def.
 85. 10.
 y 15. 10.

PROP. CXIV.



Quadratum ra-
tionalis A ad apo-
tomen BC (BD,
DC) applicatum,
facit latitudinem
BE eam, quæ ex
binis nominibus; cu-
jus nomina BE,
GE commensura-
bilis sint apotome

BC nominibus BD DC, & in eadem proportionem;
& adhuc, quæ ex binis nominibus fit (BE), eun-
dem habet ordinem, quem ipsa apotome BC.

a cor. 16. 6.

b 12. 6.

c 14. 6.

d 19. 5.

e hyp.

f 10. 10.

g cor. 20. 6.

h 10. 10.

k cor. 16. 10.

l 21. 10.

m 12. 10.

n feb. 12. 10.

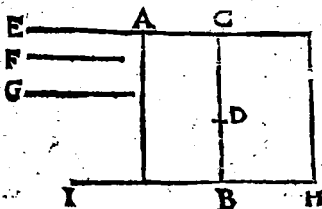
o 37. 10.

p 10. 10.

* Fac rectang. DF = Aq; & BE. FE^b ::
EG. GF. Quoniam igitur DF = Aq = CE,
erit BD. BC :: BE. BF. ergo per conv.
nem rationis BD. CD :: BE. FE :: EG. GF.
BG. EG. sed BD = GF. ergo BG = GF.
GE, ergo quia BGq. GFq :: BG. GF. erit
BG GF GF² ideoque BG GF BF. porro
BD = GF, & rectang. DF (Aq) = GF². er-
gò BF est p GF BD. ergo etiam BG est p GF
BD. ergo BG, GE sunt p GF. quare BE
est bin. denique igitur quia BD. CD :: BG.
GE; & permutando BD. BG :: CD. GE; sitq;
BD GF BG, erit CD GF GE. ergo si CB sit
apot. prima; erit BE bin. 1. &c. ut in antec-
edenti. ergo, &c.

PROP.

PROP. CXV.



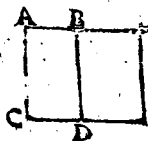
Si spatium AB contineatur sub apotoma AC (CE — AE), & ea, quæ ex binis nominibus CB, cuius nomina CD, DB commensurabilia sint apotoma nominibus CE, AE; & in eadem proportione (CE. AE :: CD. DB.) ; recta linea F spatium AB potens, est rationalis.

Sit G quævis ^p; & fiat rectang. CH = Gq. ¹erit igitur BH (HI — IB) apotome; & HI a ^{113. 12.}
²CD ^bCE. ²& BI ^cDB; ²atque
 HI. BI :: CD. DB ^b :: CE. EA. ergo permutando HI. CE :: BI. EA. ^cergo BH. AC :: c ^{19. 5.}
 HI. CE :: BI. EA. ergo cum HI ^dCE, ^d ^{12. 10.}
^eerit BH ^eAC. ^fergo rectang. HC ^f ^c10. 10.
 BA. Sed HC (Gq) ^best ^pv. ^gergo BA (Fq) ^{10. 10.}
 est ^pv. proinde F est ^gg. Q. E. D. ^gsch. 12. 10.

Coroll.

Hinc, fieri potest, ut spatium rationale contineatur sub duabus rectis irrationalibus.

PROP. CXVI.



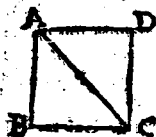
A media AB sunt infinita irrationales BE, BF, &c. & nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit AC expof.
^p. sitque

a lem. 38. 10.
b 11. 10.

ρ . sitque AD spatium sub AC, AB. $\therefore$ ergo AD est ρ . Sume BE = $\sqrt{AD}$. $\therefore$ ergo BE est ρ , nulli priorum eadem. nullum enim quadratum alicujus priorum applicatum ad ρ , latitudinem efficit mediam. compleatur rectang. DE; $\therefore$ erit DE ρ ; & $\therefore$ proinde EF ($\sqrt{DE}$) erit ρ ; & nulli priorum eadem. nullum enim priorum quadratum ad ρ applicatum, latitudinem efficit ipsam BE. ergo, &c.

PROP. CXVII.



Propositum sit nobis ostendere, in quadratis figuris BD, diametrum AC lateri AB incommensurabilem esse.

Nam ACq. ABq. $\therefore$ 1 : 2.
1 $\therefore$ non Q. Q. $\therefore$ ergo AC
AB. Q. E. D.

Celebratissimum est hoc theorema apud veteres philosophos, adeo ut qui hoc nesciret, cum Plato non hominem esse, sed pecudem diceret.

LIB. XI.

Definitiones.

I.  Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

II. Solidi autem extremum est superficies.

III. Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plana, rectos angulos efficit.

IV. Planum ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

V. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquam, angulus acutus insistentæ lineæ, & adjunctæ comprehensus.

VI. Planum ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

VII. Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

VIII. Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

IX. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X. Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ

quæ similibus planis multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

X I. Solidus angulus est plurium quàm duarum linearum, quæ se mutuò contingunt, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio.

Aliter.

Solidus angulus est, qui pluribus quàm duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis continetur.

X I I. Pyramis est figura solida, planis comprehensa, quæ ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

X I I I. Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia verò parallelogramma.

X I V. Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus revolvitur unde moveri cœperat, circumassumpta figura.

Coroll.

Hinc radii omnes à centro ad superficiem sphære inter se sunt æquales.

X V. Axis autem sphære, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

X V I. Centrum sphære est idem quod & semicirculi.

X V I I. Diameter autem sphære, est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphære superficie terminata.

X V I I I. Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur, unde moveri cœperat, circumassumpta figura. Atque si quiescens recta linea

linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: si verò minor, amblygonius: si verò major, oxigonius.

XIX. Axis autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX. Basis veri coni est circulus qui à circumducta recta linea describitur.

XXI. Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde coeperat moveri, circumassumpta figura.

XXII. Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII. Bases verò cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

XXIV. Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

XXV. Cubus est, figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI. Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII. Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII. Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX. Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXX. Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverso parallelæ sunt, contenta.

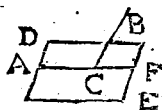
A a

XXXI. Sp-

XXXI. Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII. Solida figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

PROP. I.

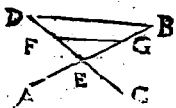


Recta linea pars quædam AC non est in subiecto plano, quædam verò CB in sublimi.

Producatur AC in subiecto plano usque ad F, vis CB esse in directum ipsi AC; ergo duæ rectæ AB, AF habent commune segmentum AC.

2. 10. ax. I. 2. Q. F. N.

PROP. II.



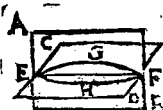
Si duæ rectæ lineæ AB, CD se mutuo secant, in uno sunt plano: atque triangulum omne DEB in uno est plano.

Putæ enim trianguli DEB partem EFG esse in uno plano, partem verò FDGB in altero. ergo rectæ ED pars EF est in subiecto plano, pars verò FD in sublimi, 2. Q. E. A. ergo triangulum EDB in uno est plano, proinde & rectæ ED, EB; 2. quare & totæ AB, DC in uno plano existunt. Q. E. D.

2. 11. ax. I.

PROP.

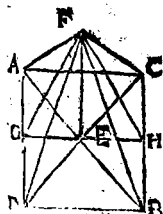
PROP. III.



Si duo plana AB, CD se mutuò secant, communis eorum sectio EF est recta linea.

Si EF communis sectio non est recta linea, ^a ducatur in plano AB recta a 1. post. 1. EGF, & in plano CD recta EHF. duæ igitur rectæ EGF, EHF claudunt spatium. ^b Q. E. A. b 14. ax. 1.

PROP. IV.



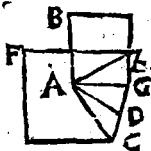
Si recta linea EF rectis duabus lineis AB, CD se mutuò secantibus in communi sectione E ad rectos angulos insistat: illa ducto etiam per ipsas plano ACBD ad angulos rectos erit.

Accipe EA, EC, EB, ED æquales, & junge rectas AC, CB, BD, AD.

per E ducatur quævis recta GH; junganturque FA, FC, FD, FB, FG, FH. Quoniam AE = EB; & DE = EC; & ang. AED = ^a CEB, ^b erit AD = CB. ^c pariterque AC = DB. ^d ergò AD. parall. CB. ^e & AC parall. DB. ^f quare ang. GAE = EBH. ^g & ang. AGE = EHB. sed & AE = EB; ergò GE = EH, & AG = BH. quare ob angulos rectos, ex hyp. & proinde pares ad E, ^h bases FA, FC, FB, FD æquantur. Triangula igitur ADF, FBC sibi mutuò æquilatera sunt, ⁱ quare ang. DAF = CBF. ergò in triangulis AGF, FBH latera FG, FH æquantur; & proinde etiam triangula FEG, FEH sibi mutuò æquilatera sunt. ^m ergò anguli FEG, FEH æquales ac ⁿ propterea recti sunt. Eodem modo FE cum ^o omnibus

omnibus in plano ADBC per E ductis rectis
 3. def. 11. lineis rectos angulos constituit^o, ideoque eidem
 plano recta est. Q. E. D.

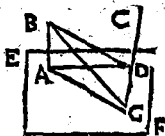
PROP. V.



Si recta linea AB rectis tri-
 bus lineis AC, AD, AE
 mutuo tangentibus in communi
 sectione ad rectos angulos infi-
 stat; ille tres recta in uno sunt
 plano.

Nam AC, AD^a sunt in
 2. 11. uno plano FC. ^a item AB, AE sunt in uno pla-
 no BE. vis diversa esse hæc plana; sit igitur eo-
 rum intersectio^b recta AG. Quoniam igitur
 BA ex hypoth. perpendicularis est rectis AC,
 AD, eadem^c plano FC; ^d ideoq; rectæ AG per-
 pendicularis est. ergo (siquidem & ^a AB est in eo-
 dem cum AG, AE plano) anguli BAG, BAE re-
 cti, & proinde pares sunt, pars & totum. Q. E. A.

PROP. VI.



Si duæ rectæ lineæ AB,
 DC eidem plano EF ad re-
 ctos sint angulos; parallele
 erunt illæ rectæ lineæ AB,
 DC.

Ducatur AD, cui in pla-
 no EF perpendicularis sit DG = AB; jungan-
 turq; BD, BG, AG. Quia in triangulis BAD,
 ADG anguli DAB, ADG^a recti sunt; atque
 AB^b = DG; & AD communis est, ^c erit BD
 = AG; quare in triangulis AGB, BGD sibi
 mutuo æquilateris ang. BAG^d = BDG; quo-
 rum BAG rectus cum sit, erit BDG etiam re-
 ctus. atqui ang. GDC rectus ponitur; ergo re-
 ctæ GD tribus DA, DB, CD recta est; ^e quæ
 ideo in uno sunt plano; ^f in quo AB existit;
 cum

a hyp.

b conste.

c 4. 1.

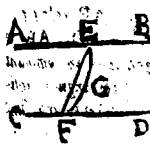
d 8. 1.

e 5. 11.

f 2. 11.

cum igitur AB, & CD sint in uno plano, & anguli interni BAD, CDA recti sint, & erunt AB, g 28. 11. CD parallelæ. Q. E. D.

PROP. VII.

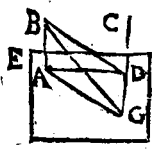


Si dua sint parallelæ rectæ lineæ AB, CD, in quarum utraque sumpta sint qualibet puncta E, F, illa lineæ EF, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelæ

in plano ABCD.

Planum in quo AB, CD secet aliud planum per puncta E, F, si jam EF non est in plano ABCD, illa communis sectio non erit. Sit ergo EGF. hæc igitur recta est linea. duæ ergo a 3. 11. rectæ EF, EGF spatium cludunt b. Q. E. A. b 14. ax. 11.

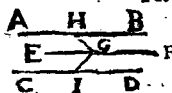
PROP. VIII.



Si dua sint parallelæ rectæ lineæ AB, CD, quarum altera AB ad rectos cuiusdam plano EF sit angulos; & reliqua CD eidem plano EF ad rectos angulos erit.

Adscitâ præparatione & demonstratione sectæ hujus; anguli GDA, & GDB recti sunt, a 4. 11. ergo GD recta est plano per AD, DB (in quo b 7. 11. etiam AB, CD existunt). c ergo GD ipsi CD c 3. def. 11. est perpendicularis; atqui ang. CDA etiam d 29. 1. ctus est. e ergo CD plano EF recta est. Q. E. D. e 4. 11.

PROP. IX.



Qua (AB, CD) eidem
rectæ lineæ EF sunt paralle-
la, sed non in eodem cum
illa plano, hæ quoq; sunt in-

ter, se parallela.

In plano parallelarum AB, EF duc HG per-
pendicularem ad EF. item in plano parallelarum
EF, CD duc IG perpendiculararem ad EF. ^a er-
gò EG recta est plano per HG, GI; eidemque
plano ^b rectæ sunt AH, & CI. ^c ergò AH, &
CI parallelæ sunt. Q.E.D.

^a 4. II.

^b 8. II.

^c 6. II.

PROP. X.



Si due rectæ lineæ AB, AC se
mutuò tangentes ad duas rectas ED,
DF se mutuò tangentes sint paralle-
la, non autem in eodem plano, illa an-
gulos æquales (BAC, EDF) com-
prehendent.

Sint AB, AC, DE, DF æqua-
les inter se, & ducantur AD, BC,
EF, BE, CF. Cum AB, DE
^a sint parallelæ & æquales, ^b etiam BE, AD
parallelæ sunt, & æquales. Eodem modo CF,
AD parallelæ sunt, & æquales. ^c ergò etiam BE,
FC sunt parallelæ & æquales. Æquantur ergò
BC, EF. Cum igitur triangula BAC, EDF
sibi mutuò æquilatera sint, anguli BAC, EDF
^e æquales erunt. Q. E. D.

^a hyp. &
constr.

^b 33. I.

^c 1. ax. I.

& 30. I.

^d 33. I.

^e 8. I.

PROP. XI.



A dato puncto A in sub-
limi ad subiectum planum
BC perpendicularem re-
ctam lineam AI ducere.

In plano BC duc
quamvis DE, ad quam
ex A ^a duc perpendicularem AF. ad eandem per
F in

Fin plano BC^b duc normalem FH. tum ad FH a 12. 1.
 demitte perpendicularem AI. erit AI recta b 11. 1.
 plano BC.

Nam per I^c duc KIL parall. DE. Quia DE c 31. 1.
 recta est ad AF, & FH, e^c erit DE recta plano d constr.
 IFA; adeoque & KL eidem plano. f recta est. e 4. 11.
 ergo ang. KIA rectus est: atqui ang. AIF f 8. 11.
 etiam rectus est. i ergo AI plano BC recta g 3. def. 11.
 est. Q. E. D. h constr.
 l 4. 11.

PROP. XII.

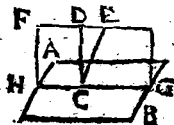


Dato plano BC à puncto
 A, quod in illo datum est, ad
 rectos angulos rectam lineam
 AF excitare.

A quovis extra planum
 puncto D^a duc DE rectam plano BC; & junctâ a 11. 11.
 EA^b duc AF parall. DE. c perspicuum est AF b 31. 11.
 plano BC rectam esse. Q. E. F. c 8. 11.

Practicè perficiuntur hoc, & præcedens pro-
 blema, si duæ normæ ad datum punctum appli-
 centur, ut patet. ex 4. 11.

PROP. XIII.



Dato plano AB, à pun-
 cto D, quod in illo datum
 est, duc recta lineæ CD,
 CE ad rectos angulos
 non excitabuntur; ab ea-
 dem parte.

Nam utraque CD, CE plano AB^a recta es- a 6. 11.
 set, eadèmque adeò parallelæ forent, quod pa-
 rallelarum definitioni repugnat.

PROP. XIV.

valet hæc
conversa.



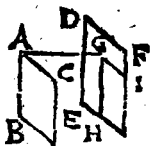
Ad quæ plana CD, FE,
eadem recta linea AB recta
est; illa sunt parallelæ. ^a

Si negas, planæ OD, FE
concurrant, ita ut commu-
nis sectio sit recta GH;
sume in hac quodvis pun-
ctum I, ad quod in propo-
sitis planis ducantur rectæ

a hyp. & 3. IA, IB, unde in triangulo IAB, duo anguli
def. 11. IAB, IBA^a recti sunt. ^b Q. E. A.

b 17. 1.

PROP. XV.



Si due rectæ lineæ AB,
AC se mutuo tangentes ad
duas rectas ~~DE, DF~~ se
mutuo tangentes sint paralle-
læ, non in eodem consistentes
plano, parallelæ sunt, quæ per
illa ducuntur, plana BAC,
EDF.

a 11. 11.

b 31. 1.

c 30. 1.

d 3. def. 11.

e 29. 1.

f 4. 11.

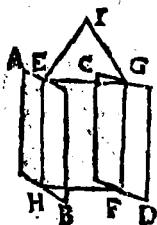
g constr.

h 14. 11.

Ex A^a duc AG rectam plano EF. ^b Siqui;
GH, GI parallelæ ad DE, DF. ^c erunt hæ pa-
rallæ etiam ad AB, AC. Cum igitur anguli
IGA, HGA^d sint recti, ^e erunt etiam CAG,
BAG recti. ^f ergo GA recta est plano BC;
atqui eadem recta est, plano EF. ^g ergo plana
BC, EF sunt parallelæ. Q. E. D.

PROP.

PROP. XVI.



Si duo plana parallela
AB, CD plano quopiam
HEIGF secantur, com-
munes illorum sectiones
EH, FI sunt parallelae.

Nam si dicantur non
esse parallelae, cum sint
in eodem plano secanti,
convenient alicubi, puta
in I. quare cum totae

HEI, FGI sint in planis AB, CD productis, a 1. 11.
etiam haec convenient, contra hypoth.

PROP. XVII.

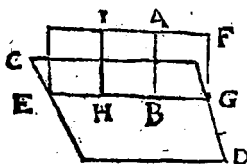


Si dua rectae lineae ALB,
CMD parallelis planis EF,
GH, IK secantur, in easdem
rationes secabuntur (AL. LB
:: CM. MD).

Ducantur in planis EF, IK
rectae AC, BD. item AD
occurrentes plano GH in N;
junganturque NL, NM. Pl-

na triangulorum ADC, ADB faciunt sectio-
nes BD, LN; & AC, NM parallelas. ergo a 16. 11.
AL. LB :: AN. ND :: CM. MD. Q.E.D. b 2. 6.

PROP. XVIII.

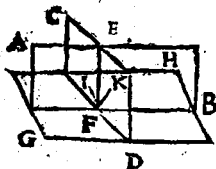


Si recta linea AB plano cuiuspiam CD ad rectos sit angulos; & omnia, quae per ipsam AB plana (EF &c), eidem plano CD ad rectos angulos erunt.

Ductum sit per AB planum aliquod EF, faciens cum plano CD sectionem EG; è cuius aliquo puncto H, in plano EF^a ducatur HI parall. AB.^b erit HI recta plano CD; pariterque aliae quævis ad EG perpendiculares. ^cergò planum EF plano CD rectum est; eademque ratione quævis alia plana per AB ducta plano EF recta erunt. Q. E. D.

a. 31. I.
b. 8. II.
c. 4. def. II.

PROP. XIX.



Si duo plana AB, CD se mutuò secantia plano cuiusdam GH ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio EF ad rectos eidem plano (GH) angulos erit.

Quoniam plana AB, CD ponuntur recta plano GH, patet ex 4. def. II. quòd ex puncto F in utroque plano AB, CD duci possit perpendicularis plano GH; quæ^a unica erit, & propterea eorundem planorum communis sectio. Q. E. D.

a. 13. II.

PROP.

PROP. XX.



Si solidus angulus ABCD tribus angulis planis BAD, DAC, BAC contineatur, ex his duo quilibet, utut assumpti, tertio sunt majores.

Si tres anguli sunt æquales, patet assertio; si inæquales, maximus esto BAC. ex quo ^a aufer a 23. 1. BAE=BAD; & fac AD=AE; ducanturque BEC, BD, DC.

Quoniam latus BA commune est, & AD^b=AE; & ang. BAE^b=BAD; ^c erit BE=BD. ^c 4. 1. sed BD+DC^d < BC. ^e ergo DC < EC cum ^d 20. 1. igitur AD^b=AE, & latus AC commune est, ^e 5. ax. 1. ac DC < EC, erit ang. CAD < EAC. ^f 25. 1. ergo ang. BAD+CAD < BAC. Q. E. D. ^g 4. ax. 1.

PROP. XXI.



Omnis solidus angulus sibi minoribus, quam quatuor rectis angulis planis, continetur.

Est solidus angulus A; planis angulis illum componentibus subtendantur rectæ BC, CD, DE, EF, FB in uno plano existentes. Quo facto constituitur pyramis, cujus basis est polygonum BCDEF; vertex A, tórque cincta triangulis, quot plani anguli componunt solidum A. Jam vero quia duo anguli ABF, ABC^a majores sunt uno FBC, ^a 20. 1. & duo ACB, ACD majores uno BCD, & sic deinceps, erunt triangulorum G, H, I, K, L. circa basim anguli simul sumpti omnibus simul angulis basis B, C, D, E, F majores. ^b sed anguli ^b scilicet 3. 1. li baseos unà cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos, quot sunt latera, sive quot triangula. ^c Er. ^c 4. ax. 1. ergo omnes triangulorum circa basim anguli unà cum

cum 4 rectis faciunt amplius, quàm bis tot rectos, quot sunt triangula. sed iidem anguli circa basim unà cum angulis, qui component solidum, component ^a bis tot rectos quot sunt triangula. liquet ergò angulos solidum angulum A componentes quatuor rectis esse minores. Q. E. D.

PROP. XXII.



Si fuerint tres anguli plani A, B, HCI, quorum dus ullibet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos recta lineæ æquales AD, AE, FB &c. fieri potest, ut ex rectis lineis DE, FG, HI æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

Ex iis ^a constitui potest triangulum, si duæ quælibet reliquæ majores existant; sed ita se res habet. Nam ^b fac ang. HCK = B, & CK = CH, ducanturque HK, IK. ^c ergò KH = FG. & quia ang. KCI ^d = A; erit KI = DE. sed KI = HI + KH (FG); ergò DE = HI + FG. Simili argumento quævis duæ reliquæ majores ostendentur, & proinde ex iis triangulum ^a constitui potest. Q. E. D.

PROP.

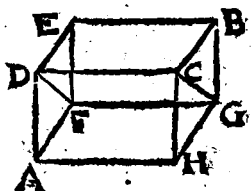
PROP. XXIII.



Ex tribus angulis planis A, B, C quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt majores, solidum angulum MHIK constituere. * Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse. * 21. 11.

Fac AD, AE, BE, BF, CF, CG æquales inter se. Ex subtenfis DE, EF, FG. (hoc est ex æqualibus HI, IK, KH) ^a 22. 11. & ^b 22. 11. fac triang. HKI. circa quod ^b describatur circulus LHKI. * Quoniam verò AD = HL; ^c sit ADq = HLq + LMq. ^d sitque LM recta plano circuli HKI; & ducantur HM, KM, IM. Quoniam igitur ang. HLM = rectus est, ^e erit MHq = HLq + LMq = ADq. ergò MH = AD. simili argumento MK, MI, AD (id est AE, EB &c.) æquantur, ergò cum HM = AD, & MI = AE; & DE = HI, ^k erit ang. A = HMI; ^k similiter ang. IMK = B. & ang. HMK = C. Factus est igitur angulus solidus ad M ex tribus planis datis. Q. E. F. Brevitatis causâ assumptum est, esse AD = HL, id quod in variis casibus demonstratum vide apud Clavium. ^{vid. Clavium.} ^{sch. 47. 1.} ^{12. 11.} ^{3. def. 11.} ^{47. 1.} ^{constr.} ^{constr.} ^{8. 1.}

PROP. XXIV.



Si solidum AB
parallelis planis con-
tineatur, adversa
illius plana (AG,
DB &c.) paralle-
logramma sunt si-
milis & æqualia.

Planum AC se-
cans plana paral-

a. 16. 11.

lela AG, DB facit sectiones AH, DC paral-
las. Eadem ratione AD, HC parallelæ sunt.
Ergo ADCH est parallelogrammum. Simili

b. 35. def. 1.

c. 10. 11.

d. 34. 1.

e. 7. 5.

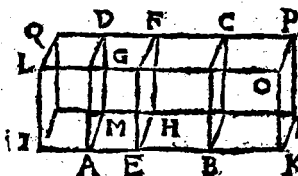
g. 6. 6.

h. 4. 1.

k. 6. ax. 1.

parallelum. Quum igitur AF ad HG, &
AD ad HC parallelæ sint, ^cerit ang. FAD =
CHG; ergo ob AF ^d= HG, & AD ^d= HC,
ac ^epropterea AF. AD :: HG. HC, triangula
FAD, GAH ^gsimilia sunt & ^hæqualia; proinde
& parallelogramma AE, HB similia sunt, &
^kæqualia, idemque de reliquis oppositis planis
ostendetur. ergo &c.

PROP. XXV.



Si solidum
parallelepipe-
dum APCD
plano EF se-
cetur adversis
planis AD,
BC parallelis,
erit quemad-

modum basis AH ad basim BH, ita solidum
AHD ad solidum BHC.

Concipe Ppp. ABCD produci utrinque. ac-
cipe AI=AE, & BK=EB, & pone plana
IQ, KP planis AD, BC parallelis, parallelo-
gramma.

gramma IM, AH; & DL, DG, & IQ, a 36. 1 &
AD, EF, &c. ² similia ac æqualia sunt; ^c quare
Ppp. AQ = AF; atque eadem ratione Ppp.
BP = BF. ergò solida IF, EP solidorum AF,
EC æquemultiplicia sunt, ac bases IH, KH ba-
sium AH, BH. Quòd si basis TH $\square$, =, $\square$ KH,
⁴ erit similiter solidum IF $\square$, =, $\square$ EP. ^c pro-
inde AH. BH:: AF. EC. Q E. D.

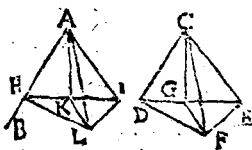
d 24. 11. &
9. def. 11.
c 6. def. 5.

Hec eadem omni prismati accommodari possunt;
unde

Coroll.

Si prisma quodcumque secetur plano oppositis
planis parallelo, sectio erit figura æqualis, & si-
milis planis oppositis.

PROP. XXVI.



Ad datam
rectam lineam
AB, ejusq; pun-
ctum A constitu-
ere angulum so-
lidum AHIL,
æqualem solido
angulo dato CDEF.

A puncto quovis F ¹ demitte FG plano a 11. 11.
DCE rectam; ducanturque rectæ DF, FE, EG,
GD, CG. Fac AH = CD, & ang. HAI =
DCE. & AI = CE; atque in plano HAI, fac
ang. HAK = DCG, & AK = CG. Tum
erige KL rectam plano HAI, & sit KL = GF.
ducanturque AL. erit angulus solidus AHIL
par dato CDEF. Nam hujus constructio illius
constitutionem penitus æmulator, et facile pa-
rebit examinanti. ergò factum.

Ed. 22

Prop.



A data re-
cta linea AB,
dato solido par-
allelepipedo
CD simile &
similiter pos-
itum parallele-
pipedum AK describere.

Ex angulis planis BAH, HAI, BAI, qui æ-
quales sint ipsis FCE, ECG, FCG, ^a fac angu-
lum solidum A solido C parem. item ^b fac FC.
CE :: BA. AH. ^b ac CE. CG :: AH, AI (^c un-
de erit ex æquali FC. CG :: BA. AI); & per-
ficiatur Ppp. AK. erit hoc simile dato.

a 26. 11.

b 12. 6.

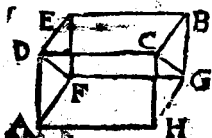
c 22. 5.

d 1. def. 6.

e 24. 11.

f 9. def. 11.

Nam per constr. pgr^a. ^d BH, FE; ^d & HI,
EG; & ^d BI, FG similia sunt, & ^e horum ideo
opposita illorum oppositis. ergo sex plana solidi
AK similia sunt sex planis solidi CD, ^f proinde
AK, CD similia solida existunt. Q. E. F.



Si solidum paralle-
lepipedum AB plano
FGCD secetur per di-
agonios DF, CG ad-
versorum planorum AE,
HB, bifariam secabi-
tur solidum AB ab ipso
plano FGCD.

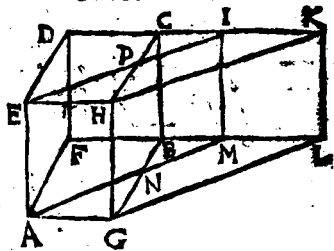
a 24. 11.

b 34. 1.

Nam quia DC, EG ^a æquales & parallele
sunt, ^b planum FGCD est pgr: & propter
^a pgr^a AE, HB æqualia & similia, ^b etiam tri-
angula AFD, HGC, CGH, DFE æqualia &
similia sunt. Atque pgr^a AC, AG ipsis FB, FD
^a etiam æqualia & similia sunt. ergo prismatis
FGCDAH omnia plana æqualia sunt, & simi-
lia planis omnibus prismatis FGCDHB, & pro-
inde hoc prisma illi æquatur. Q. E. D. PROP.

c 9. def. 11.

PROP. XXIX.

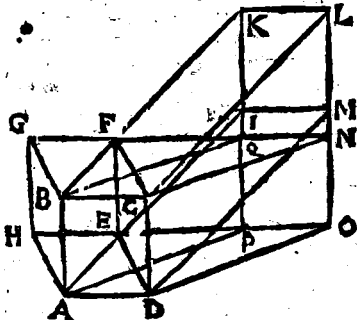


Solida parallelepipeda AGHEFBCK, AGHEMLKI super eandem basim AGHE constituta, & * in eadem altitudine, quorum insistentes lineae AF, AM in iisdem collocantur rectis lineis AG, FL, sunt inter se aequalia.

Nam si ex^a aequalibus prismatis AFMED, GBLHCK commune auferatur prisma NBMPCI, addaturque utrinque solidum AGNEHP; b erit Ppp. AGHEFBCK = AGHEMLKI. Q. E. D.

* Id est, inter parallela plana AGHE, FLKD, & sic intellige in sequent. a 10. def. 11. & 35. 1. b 3, & 2, ax. 1.

PROP. XXX.

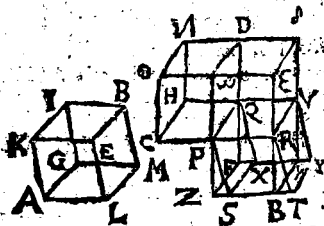


Solida parallelepipeda ADBCHEFG, AD-
Bb 3

ADCBIMLK super eandem basim ADCB constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ AH, AI non in iisdem collocantur rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Nam produc rectas HEO, GFN; & LMO, KIP; & duc AP, DO, BQ, CN. ^a erunt tam DC, AB, HG, EF, PQ, ON; quàm AD, HE, GF, BC, KL, IM, QN, PO æquales inter se, & parallelæ. ^b Quare Ppp. ADCBPONQ utrique Ppp^o. ADOBHEFG, ADCBIMLK æquale est; & ^c proinde hæc ipsa inter se æqualia sunt. Q. E. D.

PROP. XXXI.



Solida parallelepipeda ALEKGMBI, CPWOHODN super æquales bases ALEK, CPWO constituta, & ^a in eadem altitudine, æqualia sunt inter se.

^a Altitudo, est perpendicularis à plano basis ad planum oppositum.

a 18. 6.

b 27. 11. & 10. def. 11.

Habeant primò parallelepipeda AB, CD latera ad bases recta; & ad latus CP productum ^a fiat pgr. PRTS æq. & simile pgr^o KELA; ^b adeoque Ppp. PRTSQVYX æq. & sim. Ppp^o AB. Producantur OE, ND, & PZ, DQF, ERB, & VY, TSZ, YXF; & duc ES, BY, ZF.

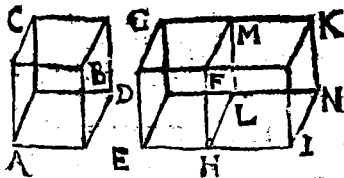
c 30. def. 11. d hyp. & 35. 1.

Plana OEN, CRVH, ZTYF ^c parallela sunt inter se; ^d & pgr^a ALEK, CPWO, PRTS, PRBZ æqualia sunt. Cum igitur Ppp. CD.

CD.PV $\delta\omega$,^e :: pgr. C ω (PRBZ).Pe^e :: Ppp. e 25. 11.
 PRBZQV γ F. PV $\delta\omega$,^f erit Ppp. CD^f = f 9. 5.
 PRBZQV γ F = PRVQSTYX^h = AB. g 29. 11.
 Q. E. D. h conftr.

Sin Ppp^a AB, CD latera basibus obliqua habeant; super easdem bases, & in eadem altitudine ponantur parallelepipeda, quorum latera basibus sint recta. ^k Ea inter se, & obliquis æqualia k 29. 11.
 erunt; ^m proinde & obliqua AB, CD æquantur. m 1. 42. 4.
 Q. E. D.

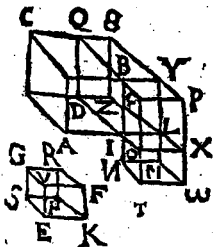
PROP. XXXII.



Solida parallelepipeda ABCD, EFGH sub eadem altitudine, inter se sunt ut bases AB, EF.

Producta EHI,^a fac pgr. FI=AB, & ^b comple a 45. 1.
 Ppp. FINM. Liqueat esse Ppp. FINM. b 31. 1.
 (ABCD). EFGH^d :: FI. (AB) EF. Q. E. D. c 31. 11. d 25. 12.

PROP. XXXIII.



Similia solida parallelepipeda, ABCD, EFGH, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum AI, EK.

Producantur rectæ AIL, DIO, BIN. & ^a fiant IL, IO, a 3. 3.
 IN ipsis EK. KH, KF æquales, b adeoq; b 27. 11.
 B b 4 &

c 31. 1.

d hyp.

e 1. 6.

f 32. 11.

g constr.

h 10. def. 5.

k 1. 6.

& Ppp. (XMT æq. & sim. Ppp. EFGH.
 c Perficiantur Ppp. IXPB, DLYQ. Itaque
 rit AI. IL. (EK) :: DI. IO (HK) :: BI. IN.
 (KF); e hoc est pgr. AD. DL :: DL. IX ::
 BO. IT; f id est Ppp. ABCD. DLQY ::
 DLQY. IXPB :: IXPB. IXMT. (g EFGH).
 h ergo ratio ABCD ad EFGH triplicata est
 rationis ABCD ad DLQY, k vel AI ad EK.
 Q. E. D.

Coroll.

Hinc si fuerint quatuor lineæ rectæ continuæ
 proportionales, ut est prima ad quartam, ita est
 parallelepipedum super primam descriptum ad
 parallelepipedum simile, similiterque descriptum
 super secundam.

PROP. XXXIV.



Aequalium so-
 lidorū parallele-
 pipedorū ADCB
 EHGF bases,
 & altitudines re-
 ciprocantur (AD.
 EH :: EG.
 AC): Et quo-

rum solidorum parallelepipedorum ADCB, EHGF
 bases, & altitudines reciprocantur, illa sunt æ-
 qualia.

Sint primò latera CA, GE ad bases recta, si
 jam solidorum altitudines sint pares, etiam
 bases æquales erunt, & res clara est. Sin altit-
 udines inæquales sint, à majori EG a detrahe EI
 = AC. & per I b duc planum IK parallelum
 basi EH, itaque

1. Hyp. AD.EH c :: Ppp. ADCB.EHIK d ::
 Ppp. EHGF. EHIK c :: GL. IL e :: GE. IE.
 (f AC) g liquet igitur esse AD.EH :: GE.AC.
 Q. E. D.

2. Hyp.

a 3. 1.

b 31. 1.

c 32. 11.

d 17. 5.

e 1. 6.

f constr.

g 11. 5.

Hyp. ADCB. EHIK^k :: AD. EH^k :: h 32. 11.
EG. EI^k :: GL. IL^m :: Ppp. EHGF. EHIK, k hyp.
quare Ppp. ADCB = EHGF. Q. E. D. l 1. 6.

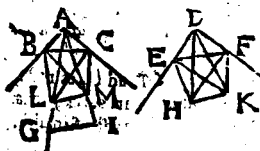
Sint deinde latera ad bases obliqua. Erigan-
tur super iisdem basibus, in altitudine eadem pa-
rallelepipedata recta. Erunt obliqua parallelepi-
pedata his æqualia. Quare cum hæc per 1. partem
reciprocant bases & altitudines, etiam illa reci-
procabunt. Q. E. D. m 32. 11.
n 9. 5.

Coroll.

Quæ de parallelepipedis demonstrata sunt Prop.
29, 30, 31, 32, 33, 34. etiam conveniunt prismati-
bus triangularibus, quæ sunt dimidia parallelepipedata,
ut patet ex Pr. 28. Igitur.

1. Prismata triangularia æque alta sunt ut bases.
2. Si eandem vel æquales habeant bases, & eandem altitudinem, æqualia sunt.
3. Si similia fuerint, eorum proportio triplicata est proportionis homologorum laterum.
4. Si æqualia sunt, reciprocant bases, & altitudines; & si reciprocant bases & altitudines, æqualia erunt.

PROP. XXXV.



Si fuerint duo
plani anguli
BAC, EDF
æquales, quorum
verticibus A, D
sublimis recta
linea AG, DH

insistant, quæ cum lineis primò positis angulos conti-
neant æquales, utrumq; utriq; (ang. GAB = HDB;
& GAC = HDF) in sublimibus autem lineis
AG, DH qualibet sumpta fuerint puncta G, H;
&

Ex ab his ad plana BAC, EDF, in quibus consistunt anguli primò positi BAC, EDF, ductæ fuerint perpendiculares GI, HK; à punctis verò I, K quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primò positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ AI, DK, hæc cum sublimibus AG, DH æquales angulos GAM, HDK comprehendunt.

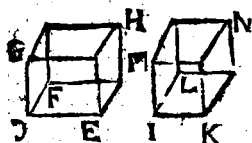
Fiant DH, AL æquales, & GI, LM parallelæ; & MC ad AC, MB ad AB, KF ad DF, KE ad DE perpendiculares, ducanturque rectæ BC, LB, LC, atq; EF, HF, HE; æstq; LM recta plano BAC; quare anguli LMC, LMA, LMB; eadèmq; ratione anguli HKF, HKD, HKE recti sunt. Ergò $ALq^c = LMq + AMq^c = LMq + CMq + ACq^c = LCq + ACq^c$; ergò ang. ACL rectus est. Rursus $ALq^c = LMq + MAq^c = LMq + BMq + BAq^c = BLq + BAq^c$ ergò ang. ABL etiam rectus est. Simili discursu anguli DFH, DEH recti sunt; ergò $AB = DE$; & $BL = EH$; & $AC = DF$; & $CL = FH$. quare etiam $BC = EF$. & ang. ABC = DEF, & ang. ACB = DFE. unde reliqui rectis anguli CBM, BCM reliquis FEK, EFK æquantur. ergò $CM = FK$, ideoque & $AM = DK$. ergò si ex $LAq^m = HDq$. auferatur $AMq = DKq$, remanet $LMq = HKq$. quare trigona LAM, HDK sibi mutuo æquilatera sunt. ergò ang. LAM = HDK. Q. E. D.

Coroll.

Itaque si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales, utrumque utriusque erunt à punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primò positorum demissæ perpendiculares inter se æquales; nempe $LM = HK$.

PROP.

PROP. XXXVI.

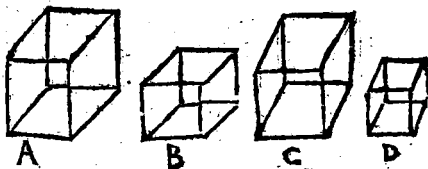


Si tres rectæ
lineæ DE, DG,
DF proportiona-
les fuerint; quod
ex his tribus fit so-
lidum parallelepi-
pedum DH, æqua-

le est descripto à media lineâ DG (IL) solido pa-
rallelepipedo IN, quod æquilaterum quidem sit, æ-
quiangulum verò prædicto DH.

Quoniam DE. IK² :: IL. DF, ^b erit pgr. a hyp.
LK = FE. & propter angulorum planorum ad b 14. 6.
E, & I, ac linearum GD, IM æqualitatem,
etiam altitudines parallelepipedorum æquales
sunt, ex coroll. præced. ^b ergo ipsa inter se æqua- b 31. 11;
lia sunt. Q. E. D.

PROP. XXXVII.



Si quatuor rectæ lineæ A, B, C, D proportiona-
les fuerint, & solida parallelepipeda A, B, C, D
quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur,
proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ
& similia, & similiter describuntur, fuerint pro-
portionalia (A.B :: C.D.) & ipsa rectæ lineæ
A, B, C, D proportionales erunt.

Nam rationes parallelepipedorum^a triplicatæ^{a 7 33. 11.}
sunt rationum, quas habent lineæ. ergo si A. B^b sch. 23. 5.
:: C. D. ^b erit Ppp. A. Ppp. B. :: Ppp. C. Ppp.
D. & vice versa.

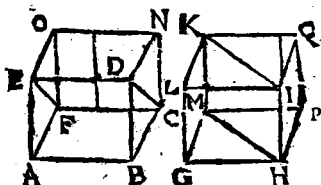
PROP.

*quare AB, & ST in eodem plano ABCD ex. h 7. 11. situnt. Itaque cum anguli AVS, BVT ad verticem, & alterni ASV, BTV æquantur; ^k & AS ^k 7. ax. 1. = BT; erit AV = BV, ^l & SV = VT. ^l 26. 1. Q. E. D.

Coroll.

Hinc, In omni parallelepipedo diametri omnes se mutuò bisequant in uno puncto, V.

PROP. XL.



Si fuerint duo prismata ABCFED, GHMLIK æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basim ABCF parallelogrammum; illud vero GHM triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum ABCF trianguli GHM, æqualia erunt ipsa prismata ABCFED, GHMLIK.

Nam si perficiantur parallelepipeda AN, GQ, ^a erunt hæc æqualia ob ^b basium AC, GP, & ^c altitudinum æqualitatem. ^e ergò etiam prismata, ^d horum dimidia, æqualia erunt. Q. E. D.

a 31. 11.
b 34. 1.
& 7. ax.
c hyp.
d 28. 11.
e 7. ax. 1.

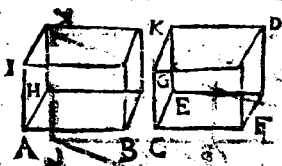
Schol.

Ex hætenus demonstratis habetur dimensio prismatum triangularium, & quadrangularium, seu parallelepipedorum, si nimirum altitudo ducatur in basim.

Ut si altitudo sit 10 pedum, basis verò pedum quadratorum 100 (mensurabitur autem basis per sch. 35. 1. vel per 41. 1.) multiplica 100 per 10;

C

pre-



A data re-
cta linea AB,
dato solido pa-
rallelepipedo
CD simile &
similiter pos-
itum parallele-
pipedum AK describere.

Ex angulis planis BAH, HAI, BAI, qui æ-
quales sint ipsis FCE, ECG, FCG, ^a fac angu-
lum solidum A solido C parem. item ^b fac FC.
CB :: BA. AH. ^b ac CE. CG :: AH, AI (c un-
de erit ex æquali FC. CG :: BA. AI); & per-
ficiatur Ppp. AK. erit hoc simile dato.

a 26. 11.

b 12. 6.

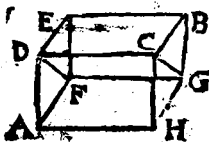
c 22. 5.

d 1. def. 6.

e 24. 11.

f 9. def. 11.

Nam per constr. pgr^a. ^d BH, FE; ^d & HI,
EG; & ^d BI, FG similia sunt, & ^e horum ideo
opposita illorum oppositis. ergo sex plana solidi
AK similia sunt sex planis solidi CD, ^f proinde
AK, CD similia solida existunt. Q. E. F.



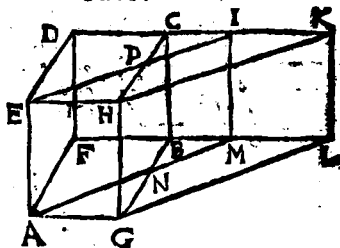
Si solidum paralle-
lepipedum AB plano
FGCD secetur per di-
agonios DF, CG ad-
versorum planorum AE,
HB, bifariam secabi-
tur solidum AB ab ipso
plano FGCD.

Nam quia DC, EG ^a æquales & parallelæ
sunt, ^b planum FGCD est pgr: & propter
^a pgr^a AE, HB æqualia & similia, ^b etiam tri-
angula AFD, HGC, CGH, DFE æqualia &
similia sunt. Atque pgr^a AC, AG ipsis FB, FD
^a etiam æqualia & similia sunt. ergo prismatis
FGCDAH omnia plana æqualia sunt, & simi-
lia planis omnibus prismatis FGCDDB, & pro-
inde hoc prisma illi æquatur. Q. E. D. PROP.

a 24. 11.

b 34. 1.

c 9. def. 11.

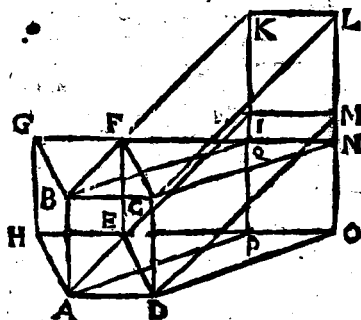


*Solida parallelepipedæ AGHEFB CD, AGHEMLKI super eandem basim AGHE constituta, & * in eadem altitudine; quorum insistentes lineæ AF, AM in iisdem collocantur rectis lineis AG, FL, sunt inter se æqualia.*

Nam si ex^a æqualibus prismatis AFMEDI,
GBLHCK commune auferatur prisma
NBMP CI, addaturque utrinque solidum
AGNEHP; ^b erit Ppp. AGHEFBCD =
AGHEMLKI. Q. E. D.

* *Id est, inter
parallelas pla-
nas* AGHE,
FLKD, &
*sic intellige
in sequent.*
a 10. def. 11.
& 35. 1.
b 3, & 2.
ar. 1.

PROP. XXX.

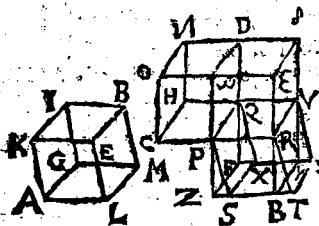


Solida parallelepiped A D B C H E F G,
B b 3 AD-

ADCBIMLK super eandem basim ADCB constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ AH, AI non in iisdem collocantur rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Nam produc rectas HEO, GFN; & LMO, KIP; & duc AP, DO, BQ, CN. ^a erunt tam DC, AB, HG, EF, PQ, ON; quàm AD, HE, GF, BC, KL, IM, QN, PO æquales inter se, & parallelæ. ^b Quare Ppp. ADCBPONQ utrique Ppp^o. ADOBHEFG, ADCBIMLK æquale est; & ^c proinde hæc ipsa inter se æqualia sunt. Q.E.D.

PROP. XXXI.



Solida parallelepipedæ ALEKGMBI, CPWOHODN super æquales bases ALEK, CPWO constituta, & ^a in eadem altitudine, æqualia sunt inter se.

^a Altitudo, est perpendicularis à plano basis ad planum oppositum.

^a 18. 6.

^b 27. 11. & 10. def. 11.

Habeant primò parallelepipedæ AB, CD latera ad bases recta; & ad latus CP productum ^a fiat pgr. PRTS æq. & simile pgr^o KELA; ^b adeoque Ppp. PRTSQVYX æq. & sim. Ppp^o AB. Producantur OWE, NDS, WPZ, DQE, ERB, SVZ, TSZ, YXF; & duc ES, BZ, ZF.

^c 30. def. 11.

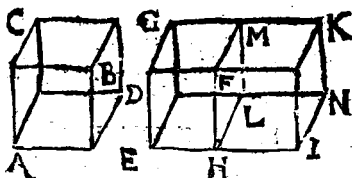
^d hyp. & 35. 1.

Plana OWE, N, CRVH, ZTYF ^c parallela sunt inter se; ^d & pgr^a ALEK, CPWO, PRTS, PRBZ æqualia sunt. Cum igitur Ppp. CD.

CD.PV $\delta\omega$,^e :: pgr. C ω (PRBZ).P ϵ ^e :: Ppp. ^e 25. 11.
 PRBZQV γ F. PV $\delta\omega$,^f erit Ppp. CD ϵ = ^f 9. 5.
 PRBZQV γ F ϵ = PRVQSTYX ϵ = AB. ^g 29. 11.
 Q. E. D. ^h constr.

Sin Ppp² AB, CD latera basibus obliqua habéant; super easdem bases, & in eadem altitudine ponantur parallelepipeda, quorum latera basibus sint recta. * Ea inter se, & obliquis æqualia ^k 29. 11.
 erunt; ^m proinde & obliqua AB, CD æquan- ^m 1. 42. 2.
 tur. Q. E. D.

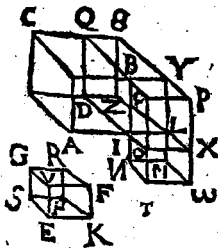
PROP. XXXII.



Solida parallelepipeda ABCD, EFGH sub eadē altitudine, inter se sunt ut bases AB, EF.

Producta EHI, ^a fac pgr. FI=AB, & ^b comple a 45. 1.
 Ppp. FINM. Liqueat esse Ppp. FINM. ^b 31. 1.
 (ABCD).EFGH ^d :: FI. (AB) EF.Q.E.D. ^c 31. 11. ^d 25. 11.

PROP. XXXIII.



Similia solida parallelepipeda, ABCD, EFGH, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum AI, EK.

Producantur rectæ AIL, DIO, BIN. & ^a fiant IL, IO, a 3. 1.
 IN ipsis EK. KH, KF æquales, ^b adeoq; ^b 27. 11.
 B b 4 &

c 31. 1.

d hyp.

e 1. 6.

f 32. 11.

g constr.

h 10. def. 5.

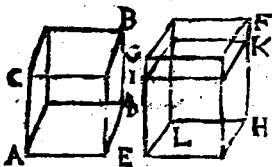
k 1. 6.

& Ppp. IXMT æq. & sim. Ppp. EFGH.
 c Perficiantur Ppp. IXPB, DLYQ. Itaque d e-
 rit AI. IL. (EK) :: DI. IO (HK) :: BI. IN.
 (KF); e hoc est pgr. AD. DL :: DL. IX ::
 BO. IT; f id est Ppp. ABCD. DLQY ::
 DLQY. IXPB :: IXPB. IXMT. (g EFGH).
 h ergo ratio ABCD ad EFGH triplicata est
 rationis ABCD ad DLQY, i vel AI ad EK.
 Q. E. D.

Coroll.

Hinc si fuerint quatuor lineæ rectæ continuæ
 proportionales, ut est prima ad quartam, ita est
 parallelepipedum super primam descriptum ad
 parallelepipedum simile, similiterque descriptum
 super secundam.

PROP. XXXIV.



Aequalium so-
 lidorū parallele-
 pipedorū ADCB
 EHGF bases,
 & altitudines re-
 ciprocantur (AD.
 EH :: EG.
 AC) : Et quo-

rum solidorum parallelepipedorum ADCB, EHGF
 bases, & altitudines reciprocantur, illa sunt æ-
 qualia.

Sint primò latera CA, GE ad bases recta, si
 jam solidorum altitudines sint pares, etiam
 bases æquales erunt, & res clara est. Sin altit-
 udines inæquales sint, à majori EG a detrahe EI
 = AC. & per I b duc planum IK parallelum
 basi EH, itaque

1. Hyp. AD.EH c :: Ppp. ADCB.EHIK d ::
 Ppp. EHGF. EHIK c :: GL. IL e :: GE. IE.
 (f AC) g liquet igitur esse AD.EH :: GE.AC.
 Q. E. D.

2. Hyp.

a 3. 1.

b 31. 1.

c 32. 11.

d 17. 5.

e 1. 6.

f constr.

g 11. 5.

2. Hyp. ADCB. EHIK :: AD. EH :: h 32. 11.
 EG. EI :: GL. IL :: Ppp. EHGF. EHIK, k hyp.
 Square Ppp. ADCB = EHGF. Q. E. D. l 1. 6.
 m 32. 11.
 n 9. 5.

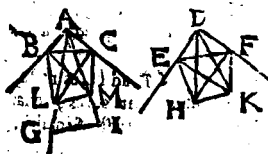
Sint deinde latera ad bases obliqua. Erigan-
 tur super iisdem basibus, in altitudine eadem pa-
 rallelepipedum recta. Erunt obliqua parallelepi-
 peda his æqualia. Quare cum hæc per 1. partem
 reciprocant bases & altitudines, etiam illa reci-
 procabunt. Q. E. D.

Coroll.

Quæ de parallelepipedis demonstrata sunt Prop.
 29, 30, 31, 32, 33, 34. etiam conveniunt prismati-
 bus triangularibus, quæ sunt dimidia parallelepipedum,
 ut patet ex Pr. 28. Igitur.

1. Prismata triangularia æque alta sunt ut
 bases.
2. Si eandem vel æquales habeant bases, &
 eandem altitudinem, æqualia sunt.
3. Si similia fuerint, eorum proportio tripli-
 cata est proportionis homologorum laterum.
4. Si æqualia sunt, reciprocant bases, & alti-
 tudines; & si reciprocant bases & altitudines,
 æqualia erunt.

PROP. XXXV.



Si fuerint duo
 plani anguli
 BAC, EDF
 æquales, quorum
 verticibus A, D
 sublimis recta
 lineæ AG, DH

insistant, quæ cum lineis primò positis angulos conti-
 neant æquales, utrumq; utriq; (ang. GAB = HDE;
 & GAC = HDE) in sublimibus autem lineis
 AG, DH qualibet sumpta fuerint puncta G, H;

Et ab his ad plana BAC, EDF, in quibus consistunt anguli primò positi BAC, EDF, ductæ fuerint perpendiculares GI, HK; à punctis verò I, K quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primò positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ AI, DK, hæc cum sublimibus AG, DH æquales angulos GAM, HDK comprehendunt.

Fiant DH, AL æquales, & GI, LM parallelæ; & MC ad AC, MB ad AB, KF ad DF, KE ad DE perpendiculares, ducanturque rectæ BC, LB, LC, atq; EF, HF, HE; æstq; LM recta plano BAC; quare anguli LMC, LMA, LMB; eadèmq; ratione anguli HKF, HKD, HKE recti sunt. Ergò $ALq = LMq + AMq = LMq + CMq + ACq = LCq + ACq$; ergò ang. ACL rectus est. Rursus $ALq = LMq + MAq = LMq + BMq + BAq = BLq + BAq$; ergò ang. ABL etiam rectus est. Simili discursu anguli DFH, DEH recti sunt; ergò $AB = DE$; & $BL = EH$; & $AC = DF$; & $CL = FH$. quare etiam $BC = EF$. & ang. ABC = DEF, & ang. ACB = DFE. unde reliqui è rectis anguli CBM, BCM reliquis FBK, EFK æquantur. ergò $CM = FK$, ideoque & $AM = DK$. ergò si ex LAq = HDq. auferatur AMq = DKq, remanet LMq = HKq. quare trigona LAM, HDK sibi mutuo æquilatera sunt. ergò ang. LAM = HDK. Q. E. D.

Coroll.

Itaque si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales, utrumque utrique erunt à punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primò positorum demissæ perpendiculares inter se æquales; nempe $LM = HK$.

PROP.



E

descripto à n
supra IN,
angulo verò
Quoniam DE
= FE. & p
& L æ line
æ altitudin
æ ex coroll. p
funt. Q. E. D.

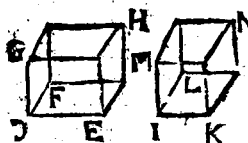
PRO



A

si quatuor ve
sunt, &
à ipsis co
rationalia e
finita, &
mensura (A
B, C, D p
Nam ratio
rationum
C. D. & e
& vice v

PROP. XXXVI.

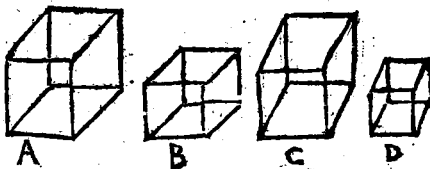


Si tres rectæ
lineæ DE, DG,
DF proportiona-
les fuerint; quod
ex his tribus fit so-
lidum parallelepi-
pedum DH, æqua-

le est descripto à media lineâ DG (IL) solido pa-
rallelepipedo IN, quod æquilaterum quidem fit, æ-
quiangulum verò prædicto DH.

Quoniam DE. IK^a :: IL. DF, ^b erit pgr. a hyp.
LK = FE. & propter angulorum planorum ad b 14. 6.
E, & I, ac linearum GD, IM æqualitatem,
etiam altitudines parallelepipedorum æquales
sunt, ex coroll. præced. ^b ergo ipsa inter se æqua- b 31. 11.
lia sunt. Q. E. D.

PROP. XXXVII.

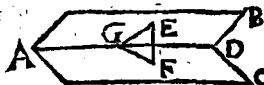


Si quatuor rectæ lineæ A, B, C, D proportiona-
les fuerint, & solida parallelepipeda A, B, C, D
quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur,
proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ
& similia, & similiter describuntur, fuerint pro-
portionalia (A. B. :: C. D.) & ipsa rectæ lineæ
A, B, C, D proportionales erunt.

Nam rationes parallelepipedorum^a triplicatæ^{a 7 33. 11.}
sunt rationum, quas habent lineæ. ergo si A. B. b sch. 3. 5.
:: C. D. ^b erit Ppp. A. Ppp. B. :: Ppp. C. Ppp.
D. & vice versa.

PROP.

PROP. XXXVIII.



Si planum AB
ad planum AC
rectum fuerit, &
ab aliquo puncto
E eorum, quæ

sunt in uno planorum (AB) ad alterum planum
AC perpendicularis EF ducta fuerit, in planorum
communem sectionem AD cadet ducta perpendicula-
ris EF.

a 12. I.

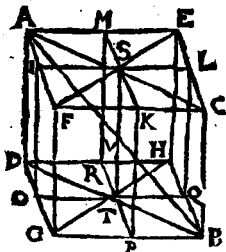
b 4. & 3.

def. 11.

c 17. I.

Si fieri potest, cadat F extra intersectionem
AD. In plano AC^a ducatur FG perpendicularis
ad AD, jungaturque EG. Angulus FGE
^b rectus est; & EFG rectus ponitur, ergo in tri-
angulo EFG sunt duo anguli recti. Q. E. A.

PROP. XXXIX.



Si solidi parallele-
pipedī AB, eorum
quæ ex adverso plano-
rum AC, DB latera
(AE, FC, AF, EC.
& DH, GB, DG,
HB) bifariam secta
sint; per sectiones au-
tem plana ILQO,
PKMR sint extensa,

planorum communis sectio ST, & solidi parallelepi-
pedī diameter AB, bifariam se mutuo secabunt.

a 34. I.

b 29. I.

c 4. II.

d sch. 15. I.

e 34. I.

f 9. II. & 1. ax

g 33. I.

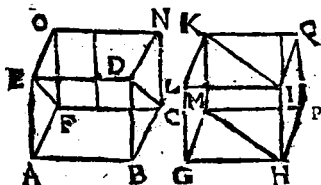
Ducantur rectæ SA, SC, TD, TB. Propter
^a latera DO, OT lateribus BQ, QT, ^b angu-
lósque alternos TOD, TQB æquales, ^c etiam
bases DT, TB, & anguli DTO, BTQ æquan-
tur. ^d ergo DTB est recta linea. eodem modo
ASC recta est linea. Porro ^e tam AD ad FG,
^e quàm FG ad CB; ^f idè quæ AD ad CB, & ac
proinde AC ad DB parallelæ, & æquales sunt,
^h quare

*quare AB, & ST in eodem plano ABCD ex- h 7. 11.
sunt. Itaque cum anguli AVS, BVT ad ver-
ticem, & alterni ASV, BTV æquantur; ^k & AS ^k 7. ax. 1.
= BT; erit AV = BV, ^l & SV = VT. ^l 26. 1.
Q. E. D.

Coroll.

Hinc, In omni parallelepipedo diametri om-
nes se mutuò bisequant in uno puncto, V.

PROP. XL.



Si fuerint duo prismata ABCFED, GHMLIK
æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basim
ABCF parallelogrammum; illud vero GHM tri-
angulum; duplum autem fuerit parallelogrammum
ABCF trianguli GHM, æqualia erunt ipsa pi-
smata ABCFED, GHMLIK.

Nam si perficiantur parallelepipeda AN, GQ,
^a erunt hæc æqualia ob ^b basium AC, GP, &
^c altitudinum æqualitatem. ^e ergo etiam prisma-
ta, ^d horum dimidia, æqualia erunt. Q. E. D.

a 31. 11.

b 34. 1.

& 7. ax.

c hyp.

d 28. 11.

e 7. ax. 1.

Schol.

Ex hætenus demonstratis habetur dimensio pri-
smatum triangularium, & quadrangulorum, seu
parallelepipedorum, si nimirum altitudo ducatur in
basim.

Andr. Tacq

Ut si altitudo sit 10 pedum, basis verò pedum
quadratorum 100 (mensurabitur autem basis per
sch. 35. 1. vel per 41. 1.) multiplica 100 per 10;

C

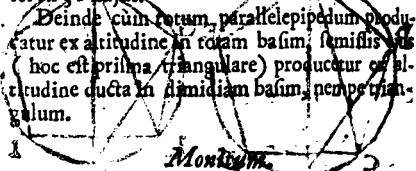
pro-

proveniunt 1000 pedes cubici pro soliditate primatis dati.

Vide schol.
35. 1.

Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in basim. Ergo quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in basim ducta, ut patet ex 31. hujus.

Deinde cum totum parallelepipedum producatur ex altitudine in totam basim, semisus vis (hoc est prisma triangulare) producitur ex altitudine ducta in dimidiam basim, nempe triangulum.



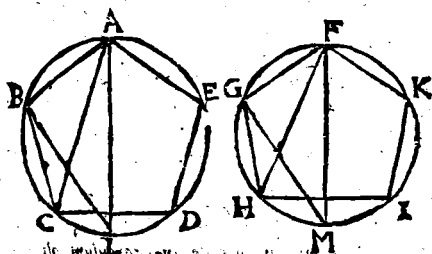
Nota, litterarum quæ designant angulum solidum primam esse semper ad punctum, in quo est angulus. Litterarum vero quæ denotant pyramidem solidam esse ad verticem pyramidis.

Ex. gr. Angulus solidus ABCD est ad punctum A, pyramidis quoque BCDA est ad punctum A, & basim triangulum BCD.

LIB.

LIB. XII.

PROP. I.



Quæ sunt in circulis ABD, FGI polygona similia ABCDE, FGHIK inter se sunt, ut quadrata à diametris AL, FM.

Ducantur AC, BL, FH, GM.

Quoniam $\angle ABC = \angle FGH$, 1. def. 6;

atque $AB : BC :: FG : GH$, $\angle ACB = \angle FGH$, 6. 6.

$(\angle ALB) = \angle FHG$ ($\angle FMG$). anguli autem 21. 3.

$\angle ABL, \angle FGM$ recti, ac proinde æquales sunt. d 31. 3.

ergo triangula ABL, FGM æquiangula sunt. e 32. 3.

quare $AB : FG :: AL : FM$. $\angle ABC = \angle FGH$, f cor. 4. 6.

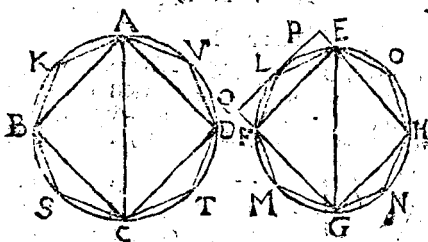
$FGHIK :: ALq. FMq.$ g 22. 6.

Coroll.

Hinc, quia $(AB : FG :: AL : FM :: BC : GH$
&c.) polygonorum similium circulo inscripto-
rum ambitus sunt ut diametri.

h 1. 12. &c.
12. 5.

PROP. II.



Circuli ABT, EFN inter se sunt, quemadmodum quadrata à diametris AC, EG.

Ponatur ACq. EGq. :: circ. ABT. I. Dico I = circ. EFN.



Nam primò, si fieri potest, sit I = circ. EFN, sitque excessus K. Circulo EFN inscribatur quadratum EFGH, ^a quod dimidium est circumscripti quadrati, adeoque semicirculo majus. ^b Biseca arcus EF, FG, GH, HE, & ad puncta bisectionum junge rectas EL, LF &c. per L duc tangentem PQ (^c quæ ad EF parallela est), & produc HEP, GFQ; estque triangulum ELF ^d dimidium parallelogrammi EPQF, adeoque majus dimidio segmenti ELF; pariterque reliqua triangula ejusmodi reliquorum segmentorum dimidia superant. Et si iterum bisecentur arcus EL, LF, FM &c. rectæque adjungantur, eodem modo triangula segmentorum semis- ses excedent. Quare si quadratum EFGH è circulo EFN, & è reliquis segmentis triangula detrahantur, & hoc fiat continuò, tandem ^e restabit magnitudo aliqua minor quàm K. Eo- usque perventum sit, nempe ad segmenta EL, LF, FM &c. minora quàm K, simul sum- pra.

^a *lib. 7. 4.*

^b *3. 3.*

^c *sch. 27. 3.*

^d *41. 1.*

^e *1. 10.*

pta. ergo I ($\circ$ circ. EFN — K) $\rightarrow$ polyg. f hyp. & 3. ar.
 ELMGNHO (circ. EFN — segm. EL + LF 3. ar.
 &c.) Circulo ABT inscriptum & puta simile po- g 30. 3. &
 lygonum AKBSC TDV. itaque quum 1. post. 1.
 AKBSC TDV. ELMGNHO $\cdot$ $\therefore$ ACq. h 1. 12.
 EG $\cdot$ $\therefore$ circ. ABT. I. ac polyg. AKBSC TDV k hyp.
 $\rightarrow$ circ. ABT. $\therefore$ erit polyg. ELMGNHO l 9. ar. 1.
 $\rightarrow$ I. sed prius erat I $\rightarrow$ ELMGNHO. quæ m 14. 5.
 repugnant.

Rursus, si fieri potest, sit I $\circ$ circ. EFN.
 Quoniam igitur ACq. EG $\cdot$ $\therefore$ circ. ABT. I; n hyp.
 inversæque L circ. ABT $\therefore$ EGq. ACq. pone l.
 circ. ABT $\therefore$ circ. EFN. K. $\circ$ ergo circ. ABT o 14. 5.
 $\circ$ K. $\therefore$ atque BGq. ACq. $\therefore$ circ. EFN. K. Quæ p 11. 5.
 repugnare modo ostensum est.

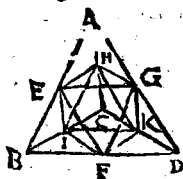
Ergo concludendum est, quod I = circ. EFN.

Q. E. D.

Coroll.

Hinc, ut circulus est ad circulum, ita polygo-
 num in illo descriptum ad simile polygonum in
 hoc descriptum.

Prop. III.



Omnis pyramis ABDC
 triangularem habens ba-
 sim, dividitur in duas py-
 ramides AEGH, HIKC
 æquales & similes inter
 se, triangulares habentes
 bases, & similes toti
 ABDC; & in duo pris-
 mata æqualia BFGEIH, EGD $\cdot$ HK; quæ duo
 prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis
 ABDC.

Latera pyramidis bisecentur in punctis B, F,
 G, H, I, K; junganturque rectæ EF, FG, GE,
 EI, IF, FK, KG, GH, HE. Quoniam latera

a 2. 6.

pyramidis proportionaliter secta sunt, ^aerunt HI, AB; & GF, AB; & IF, DC, atque HG, DO &c. parallelæ; proinde & HI, FG, & GH, FI parallelæ sunt. liquet igitur triangula ABD, AEG, EBF, FDG, HIK ^b æquiangularia esse; &

b 29. 1.

c 26. 1.

quatuor ultima ^c æquari; eodem modo triangula ACB, AHE, EIB, HIC, FGK æquiangularia sunt, & quatuor postrema inter se æqualia; similiter triangula BFI, FDK, IKC, EGH; & deinde triangula AHG, GDK, HKC, EFI, similia sunt & æqualia. Quinetiam triang. HIK ad ADB, & EGH ad BDC, & EFI ad ADC, & FGK ad ABC ^d parallelæ sunt. Ex quibus

d 15. 11.

perspicue sequitur primò, pyramides AEGH, HIKC æquales esse; totique ABDC, & inter

e 10. def. 11.

se ^e similes. deinde solida BFGEIH, FGDIHK prismata esse, & quidem æquè alta, nempe sita inter parallela plana ABD, HIK. verum basis

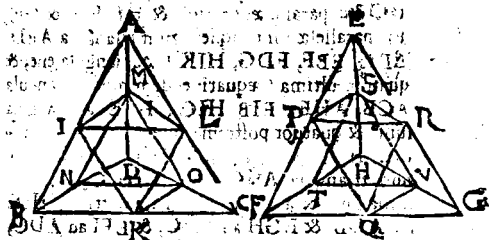
f 2. ex. 1.

g 40. 11.

BFGE basis FDG ^f duplex est. quare dicta prismata æqualia sunt. quorū alterum BFGEIH pyramide BEFI, hoc est AEGH majus est, totum suâ parte; proinde duo prismata majora sunt duabus pyramidibus, totiusque adeo pyramidis ABDC dimidium excedunt. Q. E. D.

PROP.

PROP. IV.



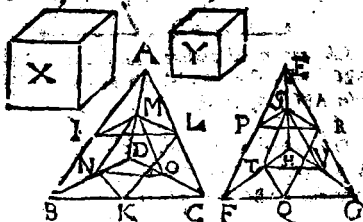
Si fuerint duae pyramides ABCD, EFGH
eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases
ABC, EFG; sit autem illarum utraque divisa
in duas pyramides (AILM, MNOD; & EPRS,
STVH) aequales inter se, & similes toti; & in
duo prismata aequalia (IBKLMN, KLCNMO;
& PQIRST, QRGTSV); ac eodem modo di-
visa sit utraque pyramidum, quae ex superiore di-
visione natae sunt, idque semper fiat; erit ut unus
pyramidis basis ad alterius pyramidis basin; ita
& omnia, quae in una pyramide, prismata ad omnia,
quae in altera pyramide prismata, multitudine æ-
qualia.

Nam (adhibendo constructionem præceden-
tis) BC. KC^a :: FG. QG.^b ergo triang. ABC
est ad. simile triang. LKC, ut EFG ad.^c simile
RQG. ergo permutando ABC. EFG^d :: LKC.
RQG^e :: Prism. KLCNMO. QRGTSV (nam
hæc æquæ alta sunt)^f :: IPKLMN. PFQRST.
quare triang. ABC, EFG :: Prism. KLCNMO
+ IBKLMN. Prism. QRGTSV + PFQRST.
Q. E. D.

Sin ulteriùs simili pacto dividantur pyrami-
des MNOD, AILM; & EPRS, STVH, erunt
quatuor nova prismata hic effecta ad quatuor

isthic producta, ut bases MNO, & AIL ad bases STV, & EPR, hoc est ut LKE ad RQG, vel ut ABC ad EFG. ^a quare omnia prismata pyramidis ABCD ad omnia ipsius EFGH se habent; ut basis ABC ad basim EFG. Q. E. D.

PROP. V.



Sub eadem altitudine existentes pyramides ABCD, EFGH triangulares habentes bases ABC, EFG, inter se sunt ut bases ABC, EFG.

Sit triang. ABC. EFG :: ABCD. X. Dico $X = \text{pyr. EFGH}$. Nam, si possibile est, sit $X \sqsupset \text{EFGH}$; sitque Y excessus. Dividatur pyramis EFGH in prismata & pyramides, & reliquæ pyramides similiter, ^a donec reliquæ pyramides EPRS, STVH minores evadant solido Y. Quum igitur $\text{pyr. EFGH} = X + Y$; liquet reliqua prismata PFQRST, QRGTSV solido X majora esse. Pyramidem ABCD similiter divisam concipe; ^b Erigq; prism. IBKLMN + KLCNMO. PFQRST + QRGTSV :: ALC. EFG. ^c :: pyr. ABCD. X. ^d ergo $X \sqsubset \text{prism. PFQRST} + \text{QRGTSV}$; quod repugnat prius affirmatis.

Rursus, dic $X \sqsubset \text{pyr. EFGH}$. pone pyr. EFGH. Y :: X. pyr. ABCD ^e :: EFG. ABC. quia EFGH ^f $\sqsupset X$, ^g erit Y $\sqsupset \text{pyr. ABCD}$, quod fieri nequit, ex jam dictis. Concludo igitur, quod $X = \text{pyr. EFGH}$. Q. E. D.

A. 12. 5.

a 1. 10.

b 4. 12.

c hyp.

d 14. 5.

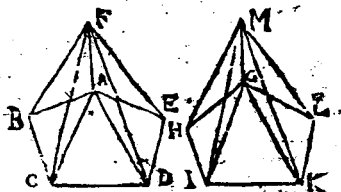
e hyp. &

eur. 4. 5.

f suppos.

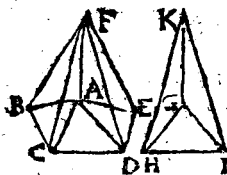
g 14. 5.

PROP. VI.



Sub eadem altitudine existentes pyramides
ABCDEF, GHIKLM, & polygonas habentis
bases ABCDE, GHIKL, inter se sunt ut bas. s.
ABCDE, GHIKL.

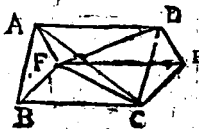
Duc rectas AC, AD, GI, GK. Est bas.
AEC. ACD^a :: pyr. ABCF. ACDF. ^b ergo
compositè ABCD. ACD :: pyr. ABCDF.
ACDF. ^a atqui etiā ACD. ADE :: pyr.
ACDF. ADEF. ^c ergo ex æquali ACD.
ADE :: ABCDF. ADEF. ^b ergo componendo
ABCDE. ADE :: pyr. ABCDEF. ADEF. ^a 5. 12.
porro ADE. GKL^d :: pyr. ADEF. GKLM;
ac, ut prius, atque inversè GKL. GHIKL :: pyr.
GKLM. GHIKLM. ^c ergo iterum ex æquali- ^c 22. 5.
bus, ABCDE. GHIKL :: Pyr. ABCDEF.
GHIKLM. Q. E. D.



Si bases non ha- ^d 5. 12.
bent latera æquē
multa, demonstratio sic procedet.
Bas. ABC. GHI
^e :: pyr. ABCE.
GHIK: ^e atque
ACD. GHI :: pyr. ^e 5. 12.
ACDF. GHIK. ^f 24. 5.

ergo bas. ABCD. GHI :: pyr. ABCDEF. GHIK.
^e Quinetiam bas. ADE. GHI :: pyr. ADEF.
GHIK. ^f ergo bas. ABCDE. GHI :: pyr.
ABCDEF. GHIK.

PROP. VII.



Omne prisma ABC
DEF triangularem
bens basim, dividitur
tres pyramides ACB
ACDF, CDFE equ
les inter se, triangular
bases habentes.

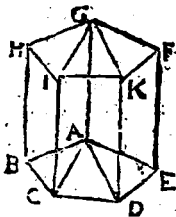
a. 34. 1.

b. 5. 12.

c. 1. 22. 1.

Ducantur parallelogrammorum diametri AC
CF, ED. Triang. ACB = ACD. ^a ergo 2
quæ altæ pyramides ACBF, ACDF æquantur
eodem modo pyr. DFAC = pyr. DFEC. at
qui ACDF & DFAC una eademque sunt py
ramis. ^c ergo tres pyramides ACBF, ACDF
DFEC, in quos divisum est prisma, inter se æ
quales sunt. Q. B. D.

Coroll.



a. 7. 12.

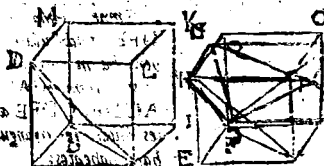
b. 1. 5.

Hinc, quælibet pyra
mis tertia est pars prisma
tis eandem cum illa ha
bentis & basim & altitu
dinem: sive prisma quod
libet triplum est pyrami
dis, eandem cum ipsi
habentis basim & altitu
dinem.

Nam resolve prisma po
lygonum ABCDEGHIKF in trigona prisma
ta; & pyramidem ABCDEH in trigonas py
ramides. ^a Erunt singulæ partes prismatis tri
plæ singularum partium pyramidis. ^b proinde
totum prisma ABCDEGHIKF totius pyrami
dis ABCDEH triplum est Q. E. D.

Prop.

PROP. VIII.

[illegible]

Coroll.

Hinc, etiam similes polygonæ pyramides rationem habent iterum homologorum triplicatam; ut facile probabitur resolvendo has in triangulas pyramides.

PROP. IX.

Vide Schema præced.

Aequalium pyramidum ACD , $EFGH$, & triangulares bases ABC , EFG habentium, recipiuntur bases, & altitudines. & quarum pyramidum triangulares bases habentium recipiuntur bases & altitudines, illæ sunt æquales.

i. Hyp. Perfecta parallelepipedā $ABICD-$
 MKL , $EFNGHQOP$ æqualium pyramidum
 $ABCD$, $EFGH$ (utrumque utriusque) ¹ sexu- a: 28. 11. 8.
 pla sunt, ac æqualia ideo inter se, ergo alt. (11.) 7. 12.
 alt.

b 34. 11.
c 15. 5.

alt. (D) ^b :: ABIC. EFNG ^c :: ABC. EFG.
Q. E. D.

d hyp.
e 15. 5.
f 34. 11.
g. 6. ax. 1.

2. Hyp. Alt. (H) alt. (D) ^d :: ABC. EFG ^e ::
ABIC. EFNG. ^f ergo parallelepipedum ABIC-
DMKL, EFNGHQOP æquantur; ^g proinde
& pyramides ABCD, EFGH horum subsex-
tuplæ pares sunt. Q. E. D.

Eadem polygonis pyramidibus conveniunt: nam hæc
ad trigonas reduci possunt.

Coroll.

Quæ de pyramidibus demonstrata sunt, Prop. 6;
& 9. etiam conveniunt quibuscunque prismatis, cum
hæc tripla sint pyramidum eandem basim & alti-
tudinem habentium. itaque 1. prismaticum æquæ al-
torum eadem est proportio, quæ basium.

2. Similium prismaticum proportio triplicata
est proportionis laterum homologorum.

3. Æqualia prismata reciprocant bases & al-
titudines, & quæ reciprocant, sunt æquales.

Schol.

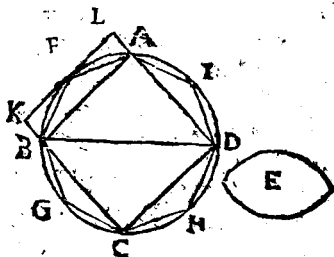
Ex hæcenus demonstratis elicitur dimensio
quorumcunque prismatum & pyramidum.

^a Prismatis soliditas producitur ex altitudine
in basim ducta; ^b itaq; & pyramidis ex tertia al-
titudinis parte ducta in basim.

a cor. 1. bk-
jw; & sch.
40. 11.
b. 7. 12.

PROP.

PROP. X.



Omnis conus tertia pars est cylindri habentis eandem cum ipso basin ABCD, & altitudinem aequalem.

Si negas, primò Cylindrus triplum conì superet excessu E. Prisma super quadratum circulo ABCD inscriptum ^a subduplum est prismatis super quadratum eidem circulo circumscriptum sibi & cylindro æquè alti. ergò prisma super quadratum ABCD superat cylindri semissem. eodem modo prisma super basin AFB cylindro æquè altum segmenti cylindrici AFB ^b dimidio majus est. Continuetur bisectio arcuum, & detrahantur prismata, donec segmenta cylindri relicta, nempe ad AF, FB, &c. minora evadant solido E. Itaque cylind. — segment. AF, FB, &c. (prisma ad basin AFBGCHDI.) ^c majus est, quàm cylind. — E (^d triplum conì). ergò pyramis dicti prismatis ^e pars tertia (ad eandem basin sita, ejusdemque altitudinis) cono æquè alto ad basin ABCD circulum major est, pars toto. Q. E. A.

Si conus tertiâ parte cylindri major dicatur, sit itide n excessus E. Ex cono detrahe pyramides, ut in priori parte prismata ex cylindro, donec restent conì segmenta aliqua, puta ad AF, FB,

D. d.

FB,

Vide fig. 21
hujus.
a sch. 7. 4.
& cor. 9. 12.

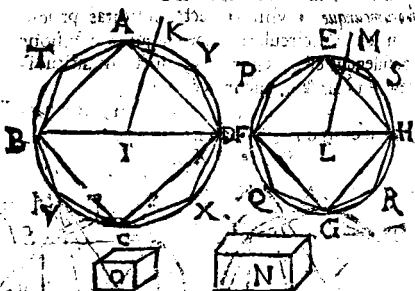
b sch. 27. 3.
& cor. 9. 12.

c 5. ax. 10
d hyp.
e cor 7. 12.

f hyp.

EB, EG, &c. minora solido E. ergo con. — E.
 (f $\frac{1}{3}$ cylindr.) $\rightarrow$ pyr. AFBGCHDI (con.) —
 segment. AF, EB, &c.) ergo prisma pyramidis
 triplum (æquidatum scilicet atque ad eandem
 basim) cylindro ad basim ABCD majus est,
 pars toto. Q. E. A. Quare fatendum est, quod
 cylindrus triplo cono æquatur. Q. E. D.

PROP. XI.



Sub eadem altitudine existentem cylindri, & coni
 ABCDK, EFGHM inter se sunt ut bases
 ABCD, EFGH.

Sic est ABCD. circ. EFGH :: con. ABCDK. N. Dico N = con. EFGHM.

Nam si fieri potest, sit N $\rightarrow$ con. EFGHM,
 atque excessus O. Supposita præparatione, &
 argumentatione præcedentis; erit O majus se-
 gmentis conicis EP, PF, FQ, &c. ideoque so-
 lidum N $\rightarrow$ pyr. EPFQGRHSM. ^a Fiat in cir-
 culo ABCD simile polygonum ATBVXYDY.

Quia pyr. ABVYK. pyr. EFQSM ^b :: polyg.
 ATBVY. polyg. EPFQS ^c :: circ. ABCD. circ.
 EFGH ^d :: con. ABCDK. N. ^e erit pyr.
 EPFQGRHSM $\rightarrow$ N. contra modo dicta.

Rursum dic N $\leftarrow$ con. EFGHM. pone con.
 EFGHM. O :: N. con. ABCDK ^f :: circ.
 EFGH. ABCD, & ergo O $\rightarrow$ con. ABCDK

q. d.

a. 30. 3, &c.

1. post.

b. 6. 12.

c. cor. 2. 12.

d. hyp.

e. 14. 5.

quod absurdum est, ex ostensis in priori parte.

Itaque potius dic, $ABCD. EFGH :: con. ABCDK. EFGHM. Q. E. D.$

Idem demonstrabitur de cylindris, si conorum, & pyramidum loco concipiantur cylindri & prismata, ergo, &c.

SCHOL.

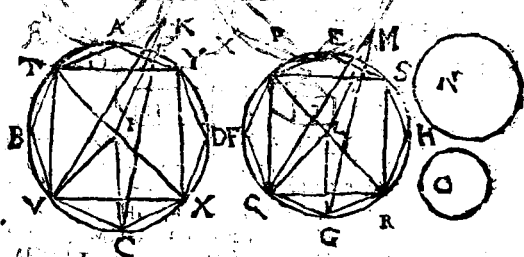
Ex his habetur dimensio cylindrorum, & conorum quorumcunque. Cylindri rectæ soliditas producitur ex base circulari (^a pro cuius dimensione consulendus est Archimedes) ductâ in altitudinem, ^b igitur & cuiuscunque cylindri.

Itaq; con soliditas producitur ex tertia parte altitudinis ducta in basim.

f hyp. & in-
veriendo.
g 14. 5.

a 1. Prop.
de dimens.
circ.
b 11. 12.
c 10. 12.

PROP. XII.



Similes conus & cylindri $ABCDK, EFGHM$ in triplicata ratione sunt diametrorum TX, PR , quæ in basibus $ABCD, EFGH$.

Habeat conus A ad aliquod N rationem triplicatam TX ad PR . dico $N = con. EFGHM$: Nam si fieri potest, sit $N > EFGHM$; sitque excessus O . ergo ut in Prioribus, $N > pyr. EPFQGRHSM$. Sint axes conorum IK, LM , ad ducanturque rectæ VK, CK, VI, CI ; & QM, GM, QL, GL . Quoniam conus similes sunt, ^a est $VI. IK :: QL. LM$. anguli verò VIK, QLM recti sunt. ^c ergo trigona VIK, QLM .

a 24. def. 11.
b 18. def. 10.
c 6. 6.

D. d. 2.

Q. L. M.

d 4. 6.

e 7. 5.

f 5. 6.

g 9. def. 11.

h cor. 8. 12.

k 4. 6.

l 15. 5.

m hyp. &

11. 5.

n 14. 5.

QLM æquiangula sunt; unde VC. VI :: QG. QL. item VI. VK :: QL. QM. ergo ex æquali VC. VK :: QG. QM. quinetiam VK CK :: QM. MG. ergo rursus ex æquo VC CK :: QG. GM. ergo triangula VKC QMG similia sunt; similique argumento reliqua hujus pyramidis triangula reliquis illius. & quant pyramides ipsæ similes sunt. sunt verò hæc triplicata ratione VC ad QG, hoc est VI ac RL, vel TX ad PR. ergo Pyr. AIBVC. XDYK. pyr. EPFQGRHSM :: con. ABCDK. N. unde pyr. EPFQGRHSM ∇ N; quod repugnat prius dictis.

o. Prius & inversè.

p cor. 8. 12.

q 4. 6.

r 14. 5.

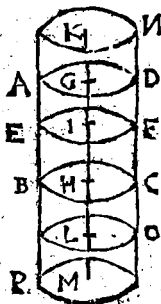
Rursus, dic N con. EFGHM, sit con. EFGHM. O :: N. con. ABCDK o :: pyr. EPRM. ATCK P :: GQ. VC ter :: q. PR. TX ter. verum O ∇ ABCDK. quod modo repugnare ostensum est. Proinde N = con. EFGHM. Q. E. D.

Quoniam verò quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli, habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basib; triplicatam.

PROP. XIII.

Si cylindrus ABCD plano EF secetur adversis planis BC, AD parallelo: erit ut cylindrus AEFD ad cylindrum EBCF, ita axis GI ad axem IH.

Pro ducto axe, a sume GK = GI, & HL = IH = LM. & concipe per puncta K, L, M plana duci circulis AD, EC parallela. b ergo cylind. ED = cyl. AN. & cyl. EC = BO = OP. itaque cylindrus

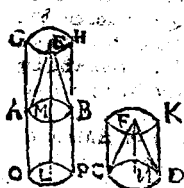


a 3. 1.

b 11. 12.

drus EN cylindri ED æquæ multiplex est, ac
axis IK axis IG. pariterq; cylindrus FP æquæ
multiplex est cylindri BF, ac axis IM axis IH.
prout verò $IK = \frac{1}{2} IM$, sic cylindr. $EN = \frac{1}{2} FP$.
ergo cyl. AEFD. cyl. EBCF :: GI. IH. Q. E. D.

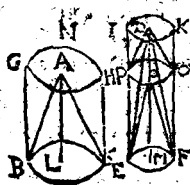
PROP. XIV.



Super aequalibus basi-
bus AB, CD existentes
coni AEB, CFD, & cy-
lindri AH, CK, inter
se sunt ut altitudines ME,
NF.

Productis cylindro
HA, & axe EM, sume
 $ML = FN$; & per
punctum L ducatur planum basi AB paralle-
lum. erit cyl. $AP = CK$. atqui cyl. AH.
 $AP. (CK) :: ME. ML (NF) Q. E. D.$
Idem de conis cylindrorum subtriplicis dictum
puta. imò de prismatis & pyramidibus.

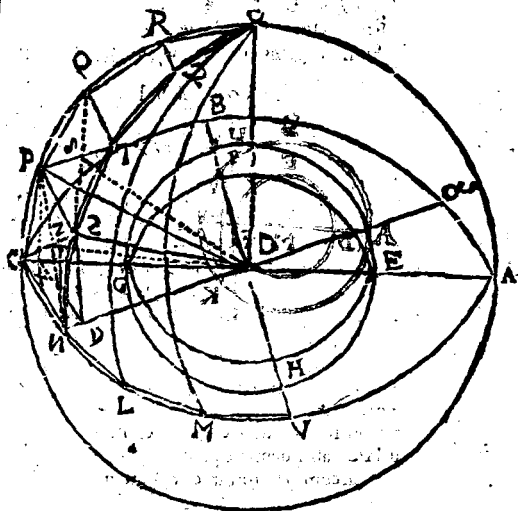
PROP. XV.



Equalium conorū BAC,
EDF, & cylindrorum
BH, EK reciprocantur ba-
ses, & altitudines (BC.
EF :: MD. LA): &
quorum conorum, & cylin-
dorum reciprocantur bases
& altitudines, illi sunt
æquales.

Si altitudines pares sint, etiam bases pares
erunt, & res clara est. Si altitudines sint im-
pares, aufer $MO = LA$.

1. Hyp. Estque $MD. MO (LA) :: cyl. EK (BH) EQ :: circ. BC. EF. Q. E. D.$
2. Hyp.



Duabus sphaeris ABCV, EFGH circa idem centrum D existentibus, in majori sphaera ABCV solidum polyedrum inscribere, quod non tangat superficiem minoris sphaera EFGH.

Secentur ambæ sphaeræ plano per centrum faciente circulos EFGH, ABCV, ducanturque diametri AC, BV secantes perpendiculariter. Circulo ABCV^a inscribatur polygonum æquilaterum VMLNC, &c. circulum EFGH minime tangens. ductâ diametro Na, erectâque DQ rectâ ad planum ABC. per DO, p^a diametros AC, Na erigi concipiantur plana DOC, DON, quæ ad circulum ABCV^b recta^b erunt, ideoque in superficie sphaeræ^c quadrantes effici-

a 16. 12.

b 18. 11.

c cor. 33. 6.

d 4. 1.

efficient DOC, DON. in quibus aptentur rectæ CP, PQ, QR, RO, NS, ST, T γ , γ O ipsi CN, NL &c. pares, & æquæ multæ. In reliquis quadrantibus OL, OM, &c. inque tota sphaera eadem constructio fiat. Dico factum.

e 38. 11.

f 12. 4x.

g 27. 3.

h 32. 1.

k constr.

l 26. 1.

m 3. 4x. 1.

n 7. 5.

o 2. 6.

p 6. 11.

q 33. 1.

r 9. 11.

f 7. 11.

t 2. 11.

A punctis P, S ad planum ABCV demitte perpendiculares PX, SY, e quæ in sectiones AC Na cadent. Quoniam igitur tam anguli recti PXC, SYN, s quàm PCX SNY^a æqualibus peripheriis insistentes, f pares sunt, triangula PCX, SNY^a æquiangula sunt. Cum igitur PC^a = SN, l etiam PX = SY, l & XC = YN; m quare DX = DY. n ergo DX. XC :: DY. YN. o ergo parallelæ sunt YX, NC, quia verò PX. SY pares, & cum eadem plano ABCV rectæ, etiam P parallelæ sunt, q erunt YX, SP etiam pares & parallelæ. r ergo, SP, NC inter se parallelæ sunt. ergo t quadrilaterum NCPS, eademque ratione SPQT, TQRG, sed & u triangulum γ RO toticè sunt plana. Eodem modo tota sphaera ejusmodi quadrilateris & triangulis repleta ostendetur. quare inscriptum est polyedrum.

u 11. 11.

x 4. 6.

y 14. 5.

z 3. def. 11.

a 15. def. 1.

b 47. 1.

c 15. def. 1.

d constr.

e 28. 3.

f 33. 6.

g 12. 2.

h 32. 1.

k 9. 4x. 1.

l 5. 1.

A centro D u duc DZ rectum plano NCPS; & junge ZN, ZC, ZS, ZP. Quoniam DN. NC x :: DY. YX; est NC γ $\sqsubset$ YX (SP); pariterque SP $\sqsubset$ TQ, & TQ $\sqsubset$ γ R. Et quia anguli DZC, DZN, DZS, DZP, z recti sunt, latera verò DC, DN, DS, DP a æqualia, & b commune, b erunt ZC, ZN, ZS, ZP a quales inter se; proinde circa quadrilaterum NC PS c describi potest circulus, in quo (ob NS, NC, CP d æquales, & NC $\sqsubset$ SP) NC e plusquam quadrantem subrendit. f ergo ang. NZC ad centrum obtusus est. s ergo NCq^t γ ZCq (ZCq + ZNq). Sit NI ad AC normalis. ergo cum ang. ADN (h DNC + DCN) sit k obtusus, l erit semissis ejus DCN recti

recti semisse major; proptereaque eo minor est
 reliquus è recto ang. CNI. ^a unde IN $\square$ IC.
 ergo NCq (NIq + ICq) ^o $\rightarrow$ 2 INq. itaq; ⁿ 19. 1.
 IN $\square$ ZC. & consequenter DZ ^p $\square$ DI. atqui ^o 47. 1.
 punctum I est ^q extra sphæram EFGH. ergo ^p 47. 1.
 punctum Z potiori jure est extra ipsam. adeoq;
 planum NCPS (cujus proximum centro pun- ^r 47. 1.
 ctum est Z) sphæram EFGH non contingit. Et
 si ad planum SPQT demittatur perpendicularis
 DP, punctum S, adeoque & planum SPQT
 adhuc ulteriùs à centro elongatur, idemque est
 de reliquis polyedri planis. ergo polyedrum
 ORQPCN &c. majori sphære inscriptum, mi-
 norem non contingit. Q. E. F.

Coroll.

Hinc sequitur, Si in quavis alia sphæra descri-
 batur solidum polyedrum simile prædicto solido poly-
 edro, proportionem polyedri in una sphæra ad poly-
 edrum in altera esse triplicatam ejus, quam habent
 sphærarum diametri.

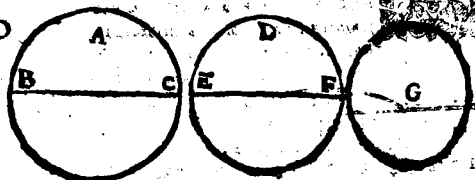
Nam si ex centris sphærarum ad omnes angu-
 los basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ
 ducantur, distribuentur polyedra in pyramides
 numero æquales & similes, quarum homologa
 latera sunt semidiametri sphærarum, ut constet,
 si intelligatur harum sphærarum minor intra
 majorem circa idem centrum descripta. congru-
 ent enim sibi mutuò lineæ rectæ ductæ à centro
 sphære ad basium angulos, ob similitudinem ba-
 sium, ac propterea pyramides efficiuntur similes.
 Quare cum singulæ pyramides in una sphæra, ad
 singulas pyramides illis similes in altera sphæra
^a habeant proportionem triplicatam laterum ho- ^a cor. 8. 12.
 mologorum, hoc est, semidiametrorum sphæra-
 rum: sint autem ^b ut una pyramis ad unam pyra- ^b 12. 5.
 midem. Quia omnes pyramides, hoc est, solidum
 polyedrum ex his compositum, ad omnes pyra-
 mides,

c 15. 5.

mides, id est, ad solidum polyedrum ex illis constitutum; habebit quoque polyedrum unius sphaerae ad polyedrum alterius sphaerae proportionem triplicatam semidiametrorum, ^c atque adeo diametrorum.

PROP. XVIII.

H O



Sphaera BAC, EDF sunt in triplicata ratione suarum diametrorum BC, EF.

a 17. 12.

b cor. 17. 12.

c hyp.

d 14. 5.

Sit sphaera BAC ad sphaeram G in triplicata ratione diametri BC ad diametrum EF. Dico $G = EDF$. Nam si fieri potest sit $G < EDF$. & cogita sphaeram G concentricam esse ipsi EDF. Sphaera EDF ^a polyedrum sphaeram G non tangens, sphaeraeque BAC simile polyedrum inscribatur. ^b Haec polyedra sunt in triplicata ratione diametrorum BC, EF, ^c id est, sphaera BAC ad G. ^d Proinde sphaera G major est polyedro sphaerae EDF inscripto, pars toto.

e hyp. invers.

f 14. 5.

Rursus, si fieri potest, sit sphaera $G < EDF$. Sitque ut sphaera EDF ad aliam sphaeram H, ita G ad BAC, ^e hoc est in triplicata ratione diametri EF ad BC; cum igitur BAC ^f $< H$, incurrimus absurditatem prioris partis. Quin potius sphaera $G = EDF$, Q. B. D.

Coroll.

Hinc, ut sphaera ad sphaeram, ita est polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum.

L I B.

LIB. XIII.

PROP. I.

*Si recta linea z secundum extremam
& mediam rationem secetur (z. a
:: a. e), majus segmentum a assu-
mens dimidium totius z, quatu-
plum potest ejus, quod à dimidia to-
tius z describitur, quadrati.*



Dico Q. a

$$\frac{1}{2} z = 5 Q: a$$

$$\frac{1}{2} z. a \text{ hoc est } a 4. 2.$$

$$aa + \frac{1}{4} zz = c 2. 1.$$

$$za = zz. \text{ Nam } d \text{ hyp. \& } b \text{ vel } aa. \text{ } za = zz.$$

$$ze + za = zz. \& \text{ } ze = aa. \text{ } \text{ergò } aa + za = 16. 6.$$

$$zz. Q. E. D.$$

$$c 2. ax. \& 1. ax.$$

PROP. II.

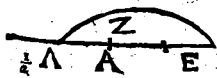
*Si recta linea $\frac{1}{2} z + a$ sui ipsius segmenti $\frac{1}{2} z$
quintuplum possit, dupla prædicti segmenti (z)
extremâ ac mediâ ratione seceta majus segmentum
est a, reliqua pars ejus quæ à principio rectæ $\frac{1}{2} z + a$.*

Dico z. a :: a. e. Nam quia per hyp. * aa + * 4. 2.
 $\frac{1}{2} zz + aa = zz + \frac{1}{4} zz$; vel aa + za = zz a 2. 2.
ze + za = b 3. ax. 1.
erit aa = ze. c 17. 6.
quare z. a :: a. e. c
Q. E. D.

Via. fig. præced.

PROP. III.

*Si recta linea z secundum extremam ac mediam
rationem secetur (z. a :: a. e); minus segmentum
e assumens dimidiam majoris segmenti a, quatu-
plum potest ejus, quod à dimidia majoris segmenti a
describitur, quadrati.*

Dico Q: e + $\frac{1}{2} a$

$$= 5 Q: \frac{1}{2} a. a \text{ hoc est } a 4. 2.$$

$$ee + \frac{1}{4} aa + ea = aa b 3. ax.$$

$$+ \frac{1}{4} aa. b \text{ vel } ee + ea c 3. 2.$$

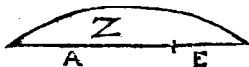
$$= aa. Nam ee + ea = ze d hyp. \&$$

$$ze = aa. Q. E. D. 17. 6.$$

PROP.

PROP. IV.

Si recta linea z secundum extremam ac mediam rationem secetur ($z.a :: a.e$), quod à tota z , quodque à minori segmento e utraque simul quadrata, tripla sunt ejus, quod à majori segmento a describitur, quadrati.



Dico $z^2 + e^2 = 3 a^2$.
 $3 a^2$ vel $aa + 2ae + ee = 3aa$.
 Nam $ae + ce =$

$ze = az$. d ergò $aa + 2ae + ee = 3aa$.
 Q. E. D.

PROP. V.

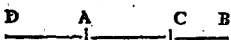


Si recta linea AB secundum extremam & mediam rationem

secetur in C, apponaturque ei AD aequalis majori segmento AC; tota recta linea DB secundum extremam ac mediam rationem secatur, & majus segmentum est quae à principio recta linea AB.

Nam quia $AB.AD :: AC.CB$, invertendoque $AD.AB :: CB.AC$, erit componendo $DB.AB :: AB.AC.(AD)$. Q. E. D.

PROP. VI.



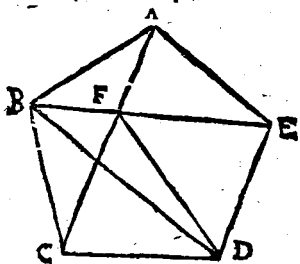
Si recta linea rationalis AB extrema ac mediam ratione se-

cutur in C; utrumque segmentorum (AC, CB) irrationalis est linea, quae vocatur apotome.

Majori segmento AC^a adde AD = $\frac{1}{2}$ AB;
 b ergò DCq = 5 DAq. c ergò DCq $\perp$ DAq.
 proinde cum AB, e ideoque ejus semissis DA
 sint ρ . etiam DC est ρ . Quia verò 5. 1 :: non
 Q. Q. f est DC $\perp$ DA. g ergò DC—AD, id
 est AC est apotome. Insuper quia ACq^h = AB
 $\times$ BC. & AB est ρ , k etiam BC est apotome.
 Q. E. D.

PROP.

PROP. VII.



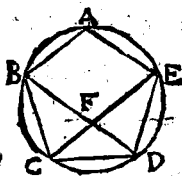
Si pentagoni æquilateri $ABCDE$ tres anguli, sive qui deinceps EAB, ABC, BCD , sive EAB, BCD, CDE qui non deinceps sint, æquales fuerint, æquiangulum erit ipsum pentagonum $ABCDE$.

Paribus deinceps angulis subtendantur rectæ BE, AC, BD .

Quoniam latera EA, AB, BC, CD , angulique inclusi ^a æquantur, ^b erunt bases BE, AC, BD , ^c angulique AEB, ABE, BAC, BCA pares. ^d quare $BF=FA$, & ^e proinde $FC=FE$. ergo triangula FCD, FED sibi mutuò æquilatera sunt; ^f unde ang. $FCD=FED$, & proinde ang. $AED=BCD$. Eodem pacto ang. CDE reliquis æquatur. quare pentagonum æquiangulum est. Q. E. D.

Sin anguli EAB, BCD, CDE , qui non deinceps, statuuntur pares, ^h erit ang. $AEB=BDC$. & $BE=BD$, ^k ideoque ang. $BED=BDE$; ^l totus proinde ang. $AED=CDE$. ergo propter angulos A, E, D deinceps æquales, ut prius, pentagonum æquiangulum erit. Q. E. D.

PROP. VIII

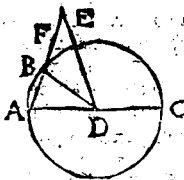


Si pentagoni æquilateri
& æquianguli ABCDE
duos angulos BCD, CDE,
qui deinceps sint, subtendant
rectæ lineæ BD, CE: hæ
extremâ ac mediâ ratione
se mutuo secant, & majora
ipsarum segmenta BF, vel

EF æqualia sunt pentagoni lateri BC.

Circa pentagonum describere circum AB.
b Arcus $ED = BC$, c ergo ang. $FCD = FDC$.
d ergo ang. $BFC = 2 FCD$ ($FCD + FDC$).
Atqui arcus $BAE = 2 ED$, proinde ang.
 $BCF = 2 FCD = BFC$. f quare $BF = BC$.
Q. E. D. Porro quia triangula BCD, FCD
æquiangula sunt, h erit $BD : DC :: (BF) : CD$.
(BF) FD. pariterque EC. EF :: EF. FC
Q. E. D.

PROP. IX.



Si hexagoni latus BE, &
decagoni AB in eodem cir-
culo ABC descriptorum com-
ponentur, tota recta linea
AE extremâ ac mediâ rati-
one secatur; ($AE : BE :: BE : AB$) & majus ejus segmen-
tum est hexagoni latus BE.

Duc diametrum ADC,
& junge rectas DB, DE. Quoniam ang. BDC
 $= 4 BDA$, estque ang. $BDC = 2 DBA$
($DAB + DBA$), erit $DBA = BDE + BED$
 $= 2 BDA = 2 BDE$, proinde ang. DBA , vel
 $DAB = ADE$. Itaque trigona ADE, ADB
æquiangula sunt, f quare $AE : AD :: (BE) : AB$.
Q. E. D.

Coroll.

Hæ, G. latus
u. circuli a
quodam circulo



Si in circulo
ABCDE descri-
bitur hexagoni
latus BE, &
decagoni latus
AB, & junc-
tæ lineæ AE
duæ diamet-
ræ AD, EC
ducantur, &
semicirculi
ADE, CDE
describantur,
erit ang. ADE
æqualis ang.
CDE, & tri-
angula ADE,
CDE æqui-
angula erunt,
ergo AE : AD
:: BE : AB.

a hyp. &

27. 3.

b 32. 1.

c 7. ax. 1.

d 5. 1.

e 1. ax. 1.

f 4. 6.

g cor. 15. 4.

¶ 17. 6.

¶ 2. 2.

¶ 2. ax.

re $AB \cdot AH :: AH \cdot AM$, ergo $AB \times AM = AHq$. Quum igitur $ABq = AB \times BM + AB \times AM$, erit $ABq = BFq + AHq$. Q. E. D.

Coroll.

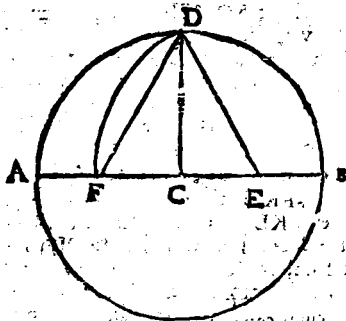
1. Hinc, linea recta, (EK), quæ ex centro (E) arcum quempiam (HA) bifecat, etiam rectam (HA) illi arcui subtensam bifecat, ad angulos rectos.

2. Diameter circuli (AG) ex angulo quovis (A) pentagoni ducta bifecat & arcum (CD), quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum (CD) oppositum, idque ad angulos rectos.

Scho.

Hic, ut promisimus, proxime trademus expeditum problematis 11. 4.

Problema.



Invenire latus pentagoni circulo ADB inscribendi.

Duc diametrum AB , cui perpendicularem

CD ,

AB potentia sit. sesquialtera lateris EF ipsius pyramidis EFGI.

Circa AB describe semicirculum ADB. a sitque AC = 2 CB. ex puncto C erige perpendicularem CD; & iunge AD. Tum radio HE = CD describe circulum HEFG; cui b inscribe triangulum æquilaterum EFG. b cor. 15. 4. ex H c erige IH = CA rectum plano EFG. c 12. 11. produc IH ad K; d ita ut IK = AB rectasque d 3. 1. adiunge IE, IF, IG. erit EFGI pyramis expectata.

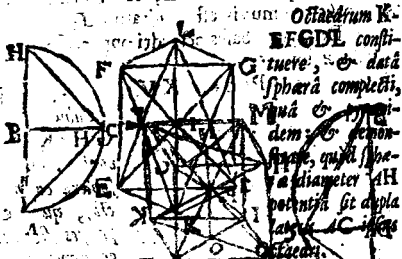
Nam quia anguli ACD, IHE, IHF, IHG æqui sunt; & CD, HE, HF, HG e pares; e atq; e const. IH = AC; f erunt AD, IE, IF, IG æquales inter se. Quia verò AC. (2 CB) CB :: ACq. g 20. 6. CDq. erit ACq = 2. CDq. itaque ADq f = ACq + CDq h = 3 CDq = 3 HEq k = EFq. h 2. ax. ergo AD, EF, IE, IF, IG pares sunt, adeo k 13. 13. omneque pyramis EFGI est æquilatera. Quod si l 1. ax. 1. punctum C super H collocetur, & AC super HI, rectæ AB, IH m congruent, utpote æquales. quare semicirculus ADB axi AB, vel IK circumductus n transibit per puncta, E, F, G, n 15. def 1. * adeoque pyramis EFGI sphaeræ inscripta erit. * 31. def. 11. Q. E. F.

liquet verò esse BAq. ADq o :: BA. AC p :: o cor. 8. 6. 3. 2. Q. E. D. p const.

Corollaria.

1. ABq. HEq :: 9. 2. Nam si ABq ponatur 9, erit ACq (EFq) 6. q proinde HEq erit 2. q 12. 13.
2. AB. LC :: 6. 1. Nam si AB ponatur 6, erit AL, 3; ideoque AC 4; quare LC erit 1. r const.
- Hinc
3. AB. HI :: 6. 4 :: 3. 2. unde
4. ABq. HIq :: 9. 4.

PROPO. XIV.



Circa AH describere semicirculum ACH , ex centro B erige perpendicularem BC . duc AC , HC . Super $ED = AC^2$ fac quadratum $EFGD$, cujus diametri DF , EG secantes in centro I . ex I duc $IL = AB$, rectam plano $EFGD$ producis IL , donec $IK = IL$. Connexis KE , KF , KG , KD , LE , LF , LG , LD , erit $K EFGDL$ octaedrum quæsitum.

Nam AB , BH , FI , IB , &c. æqualium quadratorum semidiametri æquales sunt inter se. quare triangulorum rectangulorum LIE , LIF , FIE , &c. bases LE , LF , FE , &c. æquatur. proinde octo triangu- la LFE , LFG , LGD , LDE , KEE , KFG , KGD , KDE æquales sunt, & atque octaedrum constituent, quod sphæ- ræ cujus centrum I , radius IL , vel AB inscribi potest. (quoniam AB , IL , IF , IK , &c. æqua- les sunt) Q. E. D. porro, liquet AH quæ (EK) $= 2 AC$ quæ $(2 LD)$. Q. E. D.

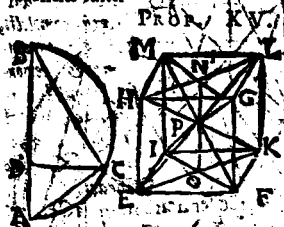
Corollaria.

1. Hinc manifestum est, in Octaedro tres diametros EG , FD , LK se mutuò ad angulos rectos secare in centro sphæræ.
2. Item, tria plana $EFGD$, $LEKG$, $EFKD$ esse quadrata, se mutuò ad angulos rectos se- cutia.

3. Octa-

3. Octaedrum dividitur in duas pyramides
similes & æquales $EFGDL$, & $EFGDK$, qua-
rum basis communis est quadratum $EFGD$.

4. Denique, bases octaedri oppositæ inter se 15. 11;
parallelae sunt.



Cubum $EFGHIKLM$
constituere, &
sphaerâ comple-
ti, quâ &
prioris figura;
& demonstrare,
quod sphaerâ
diametrum AB .

potentia sit triplicata lateris EF ipsius cubi.

Super AB describe semicirculum ACB ; &
fac $AB = 3 DA$. ex D erige perpendicularem a 16. 6.
 DC , & iunge BC ac AC . Tum super $EF =$
 AC construe quadratum $EFGH$, cuius plano b 46. 11.
rectæ insistant EL , FK , HM , GL ipsi EF pa-
res, quas connecte rectis IK , KL , LM , IM . So-
lidum $EFGHIKLM$ cubus est, ut satis constat
ex constructione.

In quadratis oppositis $EFKI$, $HGLM$ duc
diametros EK , FI , HL , MG , per quas ducta
plana $EKLH$, $FIMG$ se intersectent in recta
 NQ . Hæc diametros cubi EL , FM , GI , HK
bisecabit in P , centro cubi. ergo P centrum
erit sphaeræ per puncta cubi angularia transeunt-
is. Porro $ELq = EKq + KLq = 3 KLq$, e 47. 1.
vel $3 ACq$. atqui $ABq. ACq :: BA. DA$ f consti:
:: 3. 1. ergo $AB = EL$. Quare cubum feci-
mus, &c. Q. E. F. g cor. 8. 65.
h. 14. 50.

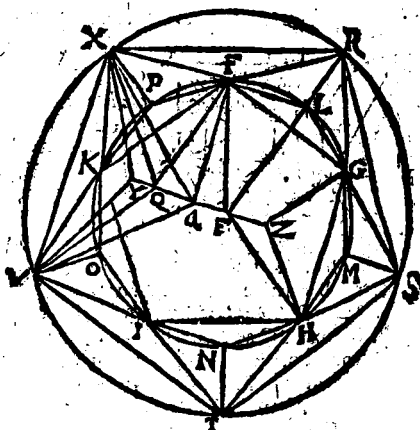
Coroll.

1. Hinc, omnes diametri cubi inter se æqua-
les sunt, seseque mutuo in centro sphaeræ bise-
cant. Eademque ratione rectæ quæ quadrato-
rum oppositorum centra coniungunt, bisecantur
in eodem centro. E c 5 2. Dia-

k 47. 1.
l 13. 15.
m 15. 13.

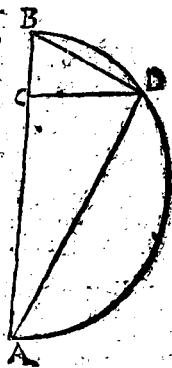
2. Diameter sphæræ potest latus tetraedri, & cubi. nempe $ABq^k = {}^1BCq + {}^2ACq$.

PROP. XVI.



Icosædram ZGHIKF-
YVXRST constituere,
& sphærâ completti, quâ
& antedictas figuras, &
demonstrare, quod icosæ-
dri latus EG irrationalis
est linea, quæ vocatur mi-
nor.

Super AB diametrum
sphæræ describe semicir-
culum ADB; & fac AB
= 5 BC, ex C erige
normalem CD, & duc
AD, ac BD. Ad inter-
vallum EF = BD de-
scribe circulû EEKNG;



hui inscribere pentagonum æquilatrum FKIHG b 11. 4.
 Biseca arcus EG, GH &c. ac connecte rectas
 FL, LG, &c. latera nempe decagoni. Tunc
 erige EQ, LR, MS, NT, OV, PX ipsi EF c 12. 11.
 æquales, rectasque plano FKNG. & connecte
 RS, ST, TV, VX, XR; item FX, FR, GR,
 GS, HT, HT, IT, IV, KV, KX. De-
 nique producta EF sume QY = FL; & EZ
 FL; & easque duci continue ZG, ZH, ZI,
 ZK, ZE ac XV, YX, YR, YS, YT. Dico fa-
 ctum.

¶ Quia ob EQ, LR, MS, NT, OV, PX d x d constr.
 quales & parallelæ; etiamque illas jungunt, c 6. 11.
 EL, OL, EM, OS, MN, OT, EO, OV, EP,
 QX pares & parallelæ sunt. Itaque idem LM f 33. 1.
 & EN, RS, MN, ST, &c. æquales sunt in-
 ter se. Ergo planum per EL, EM &c. plano g 15. 11. 2.
 per QR, RS, &c. æquidistant, h & circulus h 1. def. 3. 9.
 QXRSTV e centro Q, circulo EPLMNO æ-
 qualis est; atque RS, MN est pentagonum æqui-
 laterum. Duci vero intellectis EF, EG, EH,
 &c. ac QX, QR, RS, &c. quia FRQ h = f: 47. 1.
 FLq + LRq vel EFq = FGq, erunt FR, E constr.
 FG, adeoque omnes RS, FG, FR, RG, GS, m 13.
 GH, &c. æquales inter se. Proinde 10. triangu- n feb. 48. 1.
 la REX, RFG, RGS, &c. æquilatera sunt & 8a 1. ax.
 æqualia. Rursus ob ang. XQY rectum, erit o cor. 14. 11.
 XYq = QXq + QYq = VXq vel FGq. p 47. 1.
 quare XY, VX, hisque similiter YV, YT, YS, q 10. 13.
 YR, ZG, ZH, &c. æquantur: Ergo alia de-
 cem trigona constituta sunt æquilatera, & æ-
 qualia tam sibi mutuo, quam decem prioribus;
 ac proinde factum est Icosædron.

¶ Porro, bisecta EQ in a, duc rectus aF, aX,
 aV; & propter QX = QV, & commune latus r 15. def. 1.
 aQ, angulosq; EQX, EQV rectos; erit aX = f 4. 1.
 aV, similique argu- n to omnes, aX, aR, aS,
 aT, aV, aF, aG, aH, aI, aK æquantur.
 Quid.

t 9. 13.

u 3. 13.

x 4. 2.

y 47. 1.

Quoniam autem $ZQ, QE :: QE, ZE$, erit
 $Zxq = 5 Exq = EQq (EFq) + Bxq = EFq$.
 ergo $Zx = EF$ pari pacto $EF = Yx$ ergo
 sphaera, cujus Centrum E radius EF per 12 pun-
 cta icosaedri angularia transibit.

z 15. 5.

a 22. 6.

b 14. 5.

c cor. 8. 6.

d 1. ax. 1.

e sch. 12. 10.

f 11. 13.

Denique, quia $Zx : QE :: ZE : QE$, ideoq;
 $Zxq : EQq :: ZE : QE$. igitur $ZYq = 5$
 QEq , vel BDq . atqui $ABq : BDq :: AB$
 $BC :: 5. 1.$ ergo $ZY = AB. Q. E. F.$

Itaque si AB ponatur EF erit $EF = \sqrt{ABq}$
 etiam FG pentagoni, idemque Ico-
 saedri 5 lateris, est minor. Q. E. D.

Coroll.

1. Ex dictis inferitur, sphaerae diametrum esse
 potentia quintuplum semidiametri circuli quinq;
 latera icosaedri ambientis.

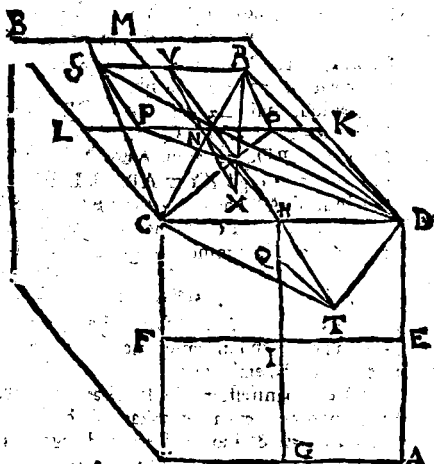
2. Item manifestum est, sphaerae diametrum
 esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex
 semidiametro, & duobus lateribus decagoni cir-
 culi ambientis quinque latera icosaedri.

3. Constat denique latera icosaedri opposita,
 qualia sunt RX, HI esse parallela. Nam RX pa-
 rall. LP . LP parall. HI .

a 33. 1.

b sch. 26. 3.

Pror.



Dodecaedrum constituere, & sphaera completi, quâ & praedictas figuras; & demonstrare, quod dodecaedri latus RS irrationalis est linea, quae vocatur apotome.

Sit ABCD cubus datæ sphaeræ inscriptus, cujus latera omnia bisecentur in punctis E, H, F, G, K, L, &c. rectæque adjungantur KL, MH, HG, EF. ^a Fac HI. IQ :: IQ. QH; & sume ^a 30. 6. NO, NP pares ipsi IQ. Erige OR, PS rectas plano DB, & QT plano AC, sintque OR, PS, QT ipsis IQ, NO, NP æquales. Connexis DR, RS, SC, CT, DT, erit DRSCCT pentagonum Dodecaedri expetiti. Nam duc NV parall. OR, & protractâ NV ad occursum cum cubi centro X, connecte rectas DS, DO, DP, CR, CP, ^a 47. 1. ^b 7. ax. 1. ^c 4. 13. ^d 47. 1. HV, HT, RX. Quia DO¹ = DKQ (^bKN¹) + KO¹ = 3. ON¹ (3 OR¹) ^d erit DR¹ =

e 4. 2.

 $= 4 \text{ OR}^e = \text{OP}^q$, vel RS^q . ergò $\text{DR} = \text{RS}$.

f constr. 9. 6.

res sunt. Quia verò $\text{OR}^f = \text{PS}^f$ & parall. PS ,

11.

g 33. 1.

h 9. 1.

k 7. 11.

k constr.

erunt RS , OP , & ^{b} consequenter RS , DC etiam parallelæ; ^{h} ergò hæc cum suis conjungentibus DK , CS , VH in uno sunt plano. quia etiam quia $\text{HL} : \text{IQ}^k :: \text{IQ} (\text{TQ}) : \text{QH}^k :: \text{HN} : \text{NV}$; & tam TQ , HN , quàm QH , NV^k rectæ eidem plano, ^{l} adeòq; & parallelæ existant,

l 6. 11.

m 32. 6.

n 1. & 2. 11.

 ^{m} erit THV recta linea. ^{n} ergò Trapezium DRSC , & triang. DTS in uno sunt plano per rectas DC , TV extenso. ergò DTCSR est

o 5. 13.

p 47. 1.

q 1. ax. 2.

& 4. 13.

r 4. 2.

f 8. 1.

pentagonum, & quidem æquilaterum ex antedictis. Porro, quia $\text{PK} : \text{KN} :: \text{KN} : \text{NP}$; & $\text{DS}^p = \text{DP}^q + \text{PS}^q (\text{PNQ}) = \text{DK}^q + \text{PK}^q$

t 15. 13.

u 1. ax. 1.

x 29. 1.

z 47. 1.

a 4. 13.

b 15. 13.

 $+ \text{NP}^q$, teritur $\text{DS}^q = \text{DK}^q + 3 \text{KN}^q = 4 \text{DK}^q (4 \text{DH}^q) = \text{DC}^q$. ergò $\text{DS} = \text{DC}$; unde trigona DRS , DCT sibi mutuò æquilatera sunt. ^{r} ergò ang. $\text{DRS} = \text{DTC}$; & eodem pacto ang. $\text{CSR} = \text{DCT}$. ergò pentagonum DTCSR etiam æquiangulum est. Ad hæc, quia AX , DX , CX &c. sunt cubi semidiametri, teritur $\text{XN} = \text{IH}$, vel KN , ^{s} adeòq; $\text{XV} = \text{KP}$, unde ob angulum rectum RVX , teritur $\text{RX}^q = \text{XV}^q + \text{RV}^q$. $(\text{NP}^q) = \text{KP}^q + \text{NP}^q = 3 \text{KN}^q = \text{AX}^q$, vel DX^q &c. ergò RX , AX , DX & eadem ratione XS , XT , AX æquales sunt inter se. Et si eadem methodo, quâ constructum est pentagonum DTCSR , fabricentur 12 similia pentagona tangentia duodecim cubi latera, ead. Do-decaedrum constituent; ac per eorum puncta angularia transiens sphaera, cujus radius AX , vel RX Dodecaedrum complectetur. Q. B. F.

e constr.

d 15. 5.

e 15. 13.

f sch. 12. 10.

g 6. 13.

Denique, quia $\text{KN} : \text{NO}^e :: \text{NO} : \text{OK}$, ^{d} erit $\text{KL} : \text{OP} :: \text{OP} : \text{OK} + \text{PL}$. Itaque sisphaeræ diameter AB ponatur ϕ , erit $\text{KL}^e = \sqrt{\text{AB}^f}$ etiam ϕ . ^{s} unde OP , vel RS latus dodeca-

edri ap. omne erit. Q. E. D.

l 4. 6.

m 14. 5.

n constr.

o 4. 2.

p 47. 1.

q 15. 5.

r cor. 16. 13.

s 10. 13.

t 16. 13.

u 1. 6.

x 4. ax. 1.

y 1. 2.

z 17. 6.

a 47. 1.

AO latus Dodecaedri. denique BG (2 BC).
 $BC^2 :: HI. IC.$ ^m ergò $HI = 2 CI^2 = K$.
 ergò $HIq^2 = 4 CIq$. proinde $CHq^2 = 5$
 CIq . ergò $ABq^2 = 5 KLq$. Atque KL, vel HI
 est radius circuli, circumscribentis pentagonum
 icosaedri, & AK, vel IB, est latus decagoni ei-
 dem circulo inscripti. unde AL erit latus pen-
 tagoni, idémque Icosaedri latus. Ex quibus li-
 quet BF, BE, AF esse $\sqrt{40}$, & AL, AO esse $\sqrt{30}$,
 atque BF $\sqsubset$ BE; & BE $\sqsubset$ AF; ac AF $\sqsubset$
 AO. Quia verò $3 AFq^2 = ABq^2 = 5 KLq$; ac
 $AF \times AO \sqsubset AF \times OF$, ideoque $AF \times AO$
 $+ AF \times OF = AF \times OP$; hoc est AFq
 $\sqsubset 2 AOq$. erit $3 AFq (5 KLq) \sqsubset 6 AOq$.
 proinde KL $\sqsubset$ AO; & fortius AL $\sqsubset$ AO.

Jam verò ut hæc latera numeris exprimamus,
 Si AB ponatur $\sqrt{60}$, erit ex jam dictis ad calcu-
 lum exactis. $BF = \sqrt{40}$. & $BE = \sqrt{30}$. & AF
 $= \sqrt{20}$. item $AL = \sqrt{30} - \sqrt{120}$ (nam
 $AK = \sqrt{15} - \sqrt{3}$. & $KL (HI) = \sqrt{12}$)
 denique $AO = \sqrt{30} - \sqrt{50}$ ($\sqrt{25} -$
 $\sqrt{5}$).

SCHOL.

SCHOL.

Præter jam dictas figuras nullam dari posse figuram solidam regularem (nempe quæ figuris planis ordinatis & equalibus contineatur) admodum perspicuum est. Nam ad anguli solidi constitutionem requiruntur ad minimum tres anguli plani; ^a hiq; ^a 21. 11. omnes simul & rectis minores esse debent. ^b At- ^b Vid. schol. qui 6 anguli trigoni æquilateri, 4 quadratici, & 32. 1. 3 hexagonici sigillatim 4 rectos exæquant; quatuor vero pentagonici, 3 heptagonici, 3 octagonici, & 4 rectos excedunt. ergo solummodo ex 3, 4, vel 5 triangulis æquilateris, ex 3 quadratis, vel 3 pentagonis effici potest angulus solidus. Præinde præter quinque prædicta, nulla existere possunt corpora regularia.

Ex P. Herigonio.

Proportiones sphaeræ, & 5 figurarum regularium eidem inscriptarum.

Sit diameter sphaeræ 2, Erunt

Area circuli majoris, 6. $\lfloor 28318.$

Superficies circuli majoris, 3 $\lfloor 14159.$

Superficies sphaeræ, 12 $\lfloor 56637.$

Soliditas sphaeræ, 4 $\lfloor 1879.$

Latus tetraedri, 1 $\lfloor 62299.$

F f 3

Latus

Superficies tetraedri, 4 $\lfloor 6188$.

Soliditas tetraedri, 0 $\lfloor 15132$.

Latus hexaedri, 1 $\lfloor 1547$.

Superficies hexaedri, 8

Soliditas hexaedri, 1 $\lfloor 5396$.

Latus octaedri, 1 $\lfloor 41421$.

Superficies octaedri, 6 $\lfloor 9282$.

Soliditas octaedri, 1 $\lfloor 33333$.

Latus dodecaedri, 0 $\lfloor 71364$.

Superficies dodecaedri, 10 $\lfloor 51462$.

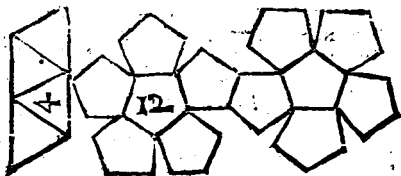
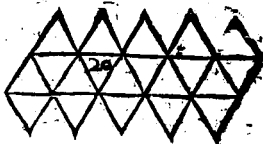
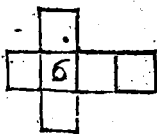
Soliditas dodecaedri, 2 $\lfloor 78516$.

Latus Icosaedri, 1 $\lfloor 05146$.

Superficies Icosaedri, 9 $\lfloor 57454$.

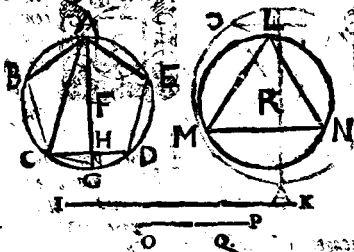
Soliditas Icosaedri, 2 $\lfloor 53615$.

Quod si ex charta conficiantur quinque figura
aquilatera & equiangulara similes his, que sunt in
subjecta figura, componentur quinque figura soli-
da, si rite complicantur.



DH. hoc est 2 AB. AG :: 2 DE. DH. e pro e 22. 5.
inde AB. AG :: DE. DH. unde f dividendo f 17. 5.
AG. GB :: DH. HE. Q. E. D.

Prop. III.



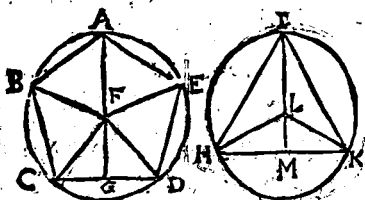
Idem circulus ABD comprehendit & Dodecaedri pentagonum ABCDE, & Icosaedri triangulum LMN, eidem sphaera inscriptorum.

Duc diametrum AG, rectasque AC, CG. Sitque IK diameter sphaerae, & IKq = 5 OPq. fiatque OP. OQ :: OQ. QP. Quia ACq + CGq = AGq = 4 FGq; & ABq = FGq + CGq. erit ACq + ABq = 5 FGq. porro, quia CA. AB :: AB. CA - AB; ac OP. OQ :: OQ. QP. ideoque CA. OP :: AB. OQ. erit 3 ACq (1 IKq) 5 OPq (1 IKq) :: 3 ABq. 5 OQq. ergo 3 ABq = 5 OQq. Verum ob ML, a latus pentagoni circulo inscripti, cujus radius OP, erunt 15 RMq = 5 MLq = 5 OPq + 5 OQq = 3 ACq + 3 ABq = 15 FGq. ergo RM = FG. proinde circ. ABD = circ. LMN. Q. E. D.

a sch. 47. 1.
b 30. 6.
c 47. 1.
d 4. 2.
e 10. 13.
f 2. & 3. ax.
g 8. 13.
h 2. 13. &
i 16. 5.
k 22. 6. & 4. 5.
l 15. 13.
m constr.
n cor. 16. 13.
o 12. 13.
p 10. 13.
q 15. 5.
r 1. ax. 1.
& sch. 48. 1.
s 1. def. 3.

Prop.

PROP. IV.



Si ex F centro circuli pentagonum dodecaedri ABCDE circumscribentis ducatur perpendicularis FG ad pentagoni unum latus CD, Erit quod sub dicto latere CD, & perpendiculari FG comprehenditur rectangulum trigesies sumptum, icosaedri superficiei aequale. item,

Si ex centro L circuli triangulum icosaedri HIK circumscribentis, perpendicularis LM ducatur ad trianguli unum latus HK, erit quod sub dicto latere HK, & perpendiculari LM comprehenditur rectangulum trigesies sumptum, icosaedri superficiei aequale.

a 8. 1.

b 41. 1.

c 15. 5.

d 6. ax.

e 17. 3.

f 41. 1.

g 15. 5.

h 16. 13.

Duc FA, FB, FC, FD, FE. ^a Erant triangu-
la CFD, DFE, EFA, AFB, BFC æqualia.
atqui $CD \times FG^b = 2$ triang. CFD. ergo 30
 $CD \times GF^c = 60$ CFD $= 12$ pentag. ABCDE $=$
superf. dodecaedri. Q. E. D.

Duc LI, LH, LK. estque $HK \times LM^e = 2$
triang. LHK. ergo 30 $HK \times LM^f = 60$ HLK
 $= 20$ HIK $=$ superfic. icosaedri. Q. E. D.

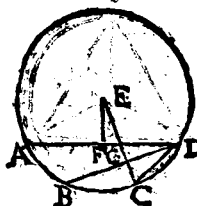
Coroll.

k 15. 5.

$CD \times FG \cdot HK \times LM^k ::$ superfic. dodecaed. ad
superf. icosaedri.

PROP.]

PROP. V.



Superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri in eadem sphaera descripti eandem proportionem habet, quam H latus cubi ad AD latus icosaedri.

Circulus ABCD

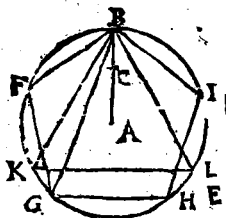
^a circumscribat tam a 3. 14. dodecaedri pentagonum,

quam icosaedri triangulum; quorum latera BD, AD; ad quæ demittantur ex E centro perpendiculares EF, EGC. & connectantur CD.

Quoniam $EC + CD. EC^b :: EC.CD.$ erit ^b 9. 13.
 $EG (c \frac{1}{2} EC + CD). EF. (d \frac{1}{2} EC)^e :: EF.$ ^c 1. 14.
 $EG - EF (\frac{1}{2} CD).$ atqui $H. BD^f :: BD.H.$ ^d cor. 12. 13.
 $BD.$ ergo $H. BD :: EG. EF.$ proinde $H \times EF$ ^e 15. 5.
 $= BD \times EG.$ quum igitur $H. AD^h :: H \times EF.$ ^f cor. 17. 13.
 $AD \times EF.$ erit $H. AD :: BD \times EG.$ ^g 2. 14.
 $AD \times EF.$ ^h 1. 6.
 $::$ ¹ superfic. dodecaedri ad superfic. icosaedri. ^k 7. 5.
 $Q. E. D.$ ^l cor. 4. 14.

PROP.

PROP. VI.



Si recta linea AB
secetur extrema ac
mediâ ratione; erit
ut recta BF potens
id, quod à tota AB,
& id quod à majore
segmento AC ad re-
ctam E, potentem id
quod à tota AB, &
id quod à minori
segmento BC; ita

latus cubi BG ad latus icosaedri BK eadem spha-
ra cum cubo inscripti.

Circulo, cujus semidiameter AB, inscribantur
dodecaedri pentagonum BFGHI, & icosaedri
triangulum BKL. ^a quare BG latus cubi erit ei-
dem sphaerae inscripti. igitur BKq ^b = 3 ABq;
& Eq ^c = 3 ACq. ergo BKq. Eq ^d :: ABq. ACq
^e :: BGq. BFq. permutando igitur BGq. BKq ::
BFq. Eq. ^f unde BG. BK :: BF. E. Q. E. D.

^a cor. 17. 13.

^b 12. 13.

^c 4. 13.

^d 15. 5.

^e 2. 14.

^f 22. 6.

PROP. VII.

Dodecaedrum est ad Icosaedrum, ut cubi latus ad
latus Icosaedri, in una eademque sphaera inscripti.

Quoniam ^a idem circulus comprehendit & do-
decaedri pentagonum & icosaedri triangulum,
^b erunt perpendiculares à centro sphaerae ad pla-
na pentagoni & trianguli ductae inter se aequa-
les. itaque si dodecaedrum & icosaedrum intel-
ligantur esse divisa in pyramides, ductis rectis
à centro sphaerae ad omnes angulos, omnium
pyramidum altitudines erunt inter se aequales.
^c Cum igitur pyramides aequè altæ ^c sint ut bases,
& superficies dodecaedri sit aequalis 12 penta-
gonis, superficies verò icosaedri 20 triangulis;
erit

^a 3. 14.

^b 47. 1.

^c 5. & 6. 12.

erit dodecaedrum ad icosaedrum, ut superficies
dodecaedri ad superficiem icosaedri, hoc est, ut d. 5. 14.
latus cubi ad latus icosaedri.

PROP. VIII.

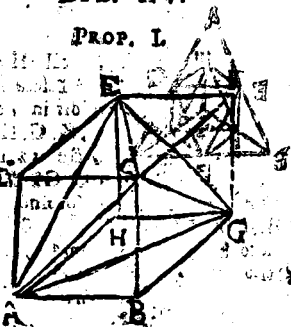


Idem circulus
BCDE
comprehendit
et cubi qua-
dratū BCDE
et octaedri tri-
angulū FGH,
ejusdem sphaera.

Sit A diamēter sphaeræ. Quoniam $Aq^a = 3$ a 15. 13.
 $BCq^b = 6$ BIq; itēque $Aq^c = 2$ GFq. b 47. 1.
 $d = 6$ KFq; erit $BI = KF$. c 14. 13.
 $CBED = GFH$. Q. E. D. d 12. 13.
c 2. def. 3.

LIB. XV.

PROP. I.



In dato cubo ABGHDCFE pyramidem AGE C describere.

Ab angulo C duc diametros CA, CE, CG; easque connecte diametris AG, GE, EA. Hæ omnes inter se æquales sunt, ut-

pote æqualium quadratorum diametri. ergo tri-
angula CAG, CGE, CBA, BAG æquilatera
sunt, ac æqualia: proinde AGE C est pyramis,
quæ cubi angulis insistit, eique in circo^b inscri-
bitur. Q. E. F.

a 47. 1.

b 31. def. 11.

PROP.

PROP. II.

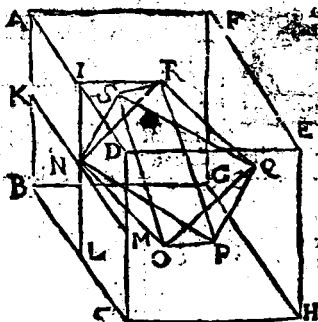
In data pyramide
ABDC octaedrum
EGKIFH describere.

* Biseca latera pyramidis in punctis E, I, F, K, G, H. quæ connecte 12 rectis EF, FG, GE & L Hz omnes

æquales sunt inter se. proinde 8 triangula EHI, IHK, &c. æquilatera sunt & æqualia, adeoque constituent octaedrum In data pyramide descriptum. Q. E. F.

a 10. 1.
b 4. 1.
c 27. def. 11.
d 31. def. 11.

PROP. III.



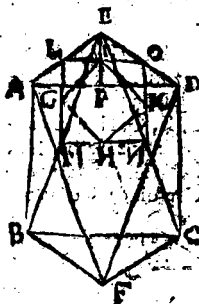
In dato cubo CHGBDEFA octaedrum
NPQSOR describere.

Connecte quadratorum centra N, P, Q, S, O, R, 12 rectis NP, PQ, QS &c. quæ æqualia sunt inter se, ideoque 8 triangula efficiunt æquilatera & æqualia: proinde inscriptum est cubo Octaedrum NPQSOR. Q. E. F.

G. 2.

PROP. 1.

PROP. I.V.



In dato Octaedro AB-
CDEF cubum inscribere.

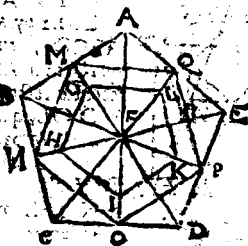
Latera pyramidis E-
ABCD, cujus basis
quadratum ABCD, bi-
secantur rectis LM, MN
NO, OL, quæ æqua-
les sunt, & parallelæ la-
teribus quadrati ABCD
ergo quadrilaterum L-
MNO, est quadratum.

Eodem modo, si latera
quadrati LMNO bise-

centur in punctis G, H, K, I, & connectantur
GH, HK, KI, IG, erit GHKI quadratum. Quod
si eadem arte in reliquis 5 pyramidibus octaedri
centra triangulorum rectis jungantur, descri-
bentur quadrata similia & æqualia quadrato
GHKI. quare sex hujusmodi quadrata cubum
constituent, qui quidem intra octaedrum descri-
ptus erit, & cum octo ejus anguli tangant octo
octaedri bases in earum centris. Q. E. D.

PROP.

PROP. V.



In dato Icoſaedro Octaedrum inſcribere.

Sit $ABCDE$ pyramis Icoſaedri, cujus
 baſis pentagonum $ABCDE$; centra autem tri-
 angulorum G, H, I, K, L ; quæ con-
 nectantur rectis GH, HI, IK, KL, LG .
 Erit $GHIKL$ pentagonum dodecaedri inſcri-
 bendi.

Nam rectæ FM, FN, FO, FP, FQ
 per centra triangulorum tranſeuntēs^a biſe-
 cant baſes. ^b ergo rectæ MN, NO, OP, PQ, QM
 æquales ſunt inter ſe. quinetiam FM, FN, FO, FP, FQ
 æquales ſunt. ^c parēs ſunt. ^d ergo anguli MFN, NEO, OFP, PFQ, QFM
 æquantur. pentagonum igitur $GHIKL$ æqui-
 angulum eſt; ^e proinde & æquilaterum, cum FG, FH, FI, FK, FL
 pares ſint. ^f Quod ſi eadem arte in reliquis undecim
 pyramidibus icofaedri, centra triangulorum re-
 ctis lineis connectantur, deſcribentur pentagona
 æqualia & ſimilia pentagono $GHIKL$. quam-
 obrem 12. huiusmodi pentagona dodecaedrum
 conſti-

constituent; quod quidem in icosaedro erit descriptum, cum viginti anguli dodecaedri in centris viginti basium icosaedri consistent. Quapropter in dato icosaedro dodecaedrum describimus. Q. E. F.

FINIS.

