ELEMENTORUM EUCLIDIS LIBRI OCTO,

Ad faciliorem captum accommodati.

AUTHORE

P. CLAUDIO FRANCISCO MILLIET DECHALES, Camberiensi, Societ. JESU.

TERTIA EDITIO

Cæteris facilior & Correctior.

LUGDUNI,
Sumptib. VIDUÆ BENEDICTI CORAL, in vico Mercatorio sub signo Victoriæ.

M. DC. LXXV.
Cum Superiorum Permissu.

PRÆFATIO
AD
LECTOREM.

HVNC ex cursu meo mathematico depromptum elementarem tractatum, matheseos Candidatis propono; vt ad manum huius scientiæ principia, & elementa habeant. Mihi quidem in animo non est, elogium texere: cùm satis perspectum sit, genuinam scientiæ ideam in eo contineri; quippe qui à principiis per se notis exorsus, nexu mirabili, mentem ad sublimia quæque & abstrusa sensim inducat. A sim-

plicioribus enim initium ducit, primô quidem librô, angulorum mensuras considerat: tum proprietates linearum perpendicularium & parallelarum; hinc triangulorũ comparationem instituit. Exinde quadrilateras inducit figuras secundô librô. Circulares tertiô. Rectilineas circulo inscribit, & circumscribit quartô. Quintô nouam proponit logicam, proportionalem scilicet argumentandi methodum. Sextô varias proportionalium linearum proprietates enucleat, regulam quam vocant auream demonstrat, totiúsque Geodesiæ principia proponit.

Septimum, octauum, nonum de numeris, & decimum de incommensurabilibus de industriâ omisimus; eò quòd hi libri peculiarem tantùm materiam, & ad cæteras inutilem spectent: clarum est enim hos numerorum *libros ad incommensurabilium doctrinam, in quâ cognoscendâ, vix quidquam est emolumenti, ab Euclide referri. Cùm igitur experientiâ compererim, in his evolvendis tempus initiô à Tyronibus malè collocari, sex prioribus undecimum, & duodecimum, ut omninò necessarios adjeci. decimum tertium, ut non elementarem, sed peculiari addictum materiæ, reliquos ut spurios, non ipsius Euclidis, & minimè necessarios, prætermisi.*

PERMISSION.

JE consens pour le Roy, qu'il soit permis à la Vefve de BENOIT Coral defaire r'imprimer; le liure intitulé *Euclidis Elementorum, & Auctore P. Claudio Francisco* MILLIET DECHALES, & que les deffences ordinaires luy soient accordées pour deux années. Fait à Lyon le 11. Fevrier 1675.

VAGINAY.

SOit fait suiuant les Conclusions du Procureur du Roy. Ce 11. Fevrier 1675.

DESEVE.

Registré sur le livre de la Communauté des Marchands Libraires, conforme à la Sentence de la Senechaussée & Siege Presidial de cette ville, en datte du 12. Ianvier 1675. Fait à Lyon le 12. Fevrier 1675.

COMBA Scindic.

ELEMENTORVM EVCLIDIS

LIBRI OCTO,

Ad faciliorem captum accommodati.

LIBER PRIMVS.

DEFINITIONES.

1. Punctum cuius pars nulla.

HÆC Definitio ita intelligatur. Vt illa quantitas vocetur punctum, quam sic concipimus, vt ab eius partibus abstrahamus, siue re vera sit indiuisibilis, siue non. Neque enim puncta *mathematica, eadem ſunt, ac Zenonica, de quorum poſſibilitate jure dubitatur à multis; cùm tamen de noſtris probè intellectis, nemo dubitare poſſit.*

2. Linea eſt longitudo cujus nulla latitudo.

Hæc definitio eundem ſenſum habet, ac ſuperior, nempè vt illa longitudo, cuius nec latitudo, nec craſſities conſideratur, dicatur linea, ſiue re vera latitudinem & craſſitiem habeat, ſiue non.

Linea dicitur fluxus puncti, quæ conſideratio eſt magni momenti, cùm omnem quantitatem per motum generari intelligere poſſimus. Cogitetur igitur punctum moueri, & ſui in ſpatio veſtigia relinquere; hôc motu, ſeu quaſi fluxu generabitur linea.

3. Lineę extrema ſunt pnncta.

4. Linea recta eſt quæ ex æquo ſua interjacet puncta.

Vel eſt minima linearum eoſdem terminos habentium. Vel eſt ea, cuius extrema obumbrant omnia media.

5. Superficies eſt quantitas longitudinem, & latitudinem habens, ſine pro-

funditate. Hæc definitio eôdem modô intelligatur, ac superiores.

6. Superficiei extrema sunt lineæ.

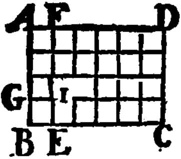
7. Superficies plana, ea est, quæ ex æquo suas interjacet lineas.

Vel est ea, cuius omnibus partibus accommodari potest linea recta.

Iam dixi suprà quantitatem omnem posse quasi generari per motum; cùm per motum aliquod spatium percurratur, aut quasi designetur. Et hæc est quantitatis productio, & compositio. Analysis autem est quantitatis in sua elementa resolutio. Vt si corpus solidum in suas superficies, superficies in lineas, linea in sua puncta resolueretur. Sicut punctum motu suo lineam producit, sic linea superficiem, superficies solidum. Potest igitur linea considerari vt constans punctis, superficies ad modum telæ, lineis quasi filis inuicem parallelis, contexta: Corpus vt constans superficiebus. Hòc modô quantitatem considerant nonnulli recentiores, facilitatemque demonstrationibus afferunt.

Si linea in lineam ducatur, generat planum, seu superficiem. Hic motus respon-

det multiplicationi Arithmetica, intelligatur enim linea A B, ita insistere linea BC, qua eundem situm obseruet, dum mouetur per BC, punctum eius A percurret li-



neam AD, punctum B lineam BC, cateraq; intermedia lineas intermedias designabunt, atq; ita exurget superficies AB C D, contexta lineis parallelis. Hic motus, seu ductus linea in lineam respōdet Arithmetica multiplicationi, nam si scirem numerum punctorum linearum AB, BC, per multiplicationem haberetur numerus punctorum totius superficiei ABCD. Vt si essent in AB 4. puncta, & in BC 6. ducendo quater 6. faciunt 24. exurgeret numerus punctorum superficiei A B C D. Possum autem pro puncto sumere quamcunque quantitatem: Vt si AB sit 4. pedum, & BC 6. sumo pro puncto pedem, & sumo lineam AB quasi latam vno pede, qualis est figura ABEF, eritque mihi punctum Mathematicum paruum quadratum BEIG, & similiter per multiplicatio *tionem 4. per 6. exurgunt in ſuperficie ABCD 24. pedes quadrati.*

8 Planus angulus eſt duarum linearum ſe tangentium, & non in directum poſitarum inclinatio, ſeu apertura.

Vt apertura duarum linearum AB, BC, quæ non jacent in directum, id eſt non conſtituunt vnam lineam rectam, eſt angulus.

9 Angulus rectilineus eſt apertura duarum linearum rectarum.

De hoc potiſſimùm hic agimus; & quia in hunc lapidem vt plurimum Tyrones impingunt, qui angulorum quantitatem ex linearum longitudine metiuntur, ideò aliquid explicationis adhibendum cenſui.

Angulus cenſetur aliô major, cuius eſt major linearum apertura, ſeu cuius lineæ magis ab inuicem recedunt, in eadem ſcilicet diſtantia ab apice anguli. Vt angulus A minor eſt angulo B, licèt lineis conſtet *longioribus, quia ſi ſumantur in vtriuſque lineis, puncta æqualiter diſtantia à punctis A, & B apicibus angulorum, verbi gratiâ C, D, E, F. Hoc eſt linea AC, AD; BE, BF fiant æquales: puncta F, E magis diſtant ab inuicem quam C & D. Quãuis autem continuarentur BE, BF idem tamen eſſet angulus, quia puncta E & F eandem haberent inter ſe diſtantiam. Poteſt item dici ille angulus minor cuius apex acutior eſt; ille major cuius apex eſt obtuſior. Communiter in deſignando angulo tres lineas adhibemus, angulique apex in littera media poſitus eſt, vt angulus CAD, ille eſt quem linea CA, & DA in puncto A efficiunt.*

Angulorum menſura circulus eſt, vt ſi ſit exploranda quantitas anguli CAD, ex puncto A quaſi centro, circulum deſcribimus, & quò plures partes illius circuli inter lineas AC, AD comprehendentur, eò major erit angulus. Parùm autem intereſt vtrum circulus major ſit, an minor. Nam ſi ex eodem puncto A plures deſcriberentur circuli vt GH, CD, arcus GH tot partes majoris circuli contineret, quot arcus

CD minoris. Quia autem vſu receptum eſt, vt quilibet circulus in 360. partes æquales diuidatur, quas gradus nominamus, dicimus angulum vnius, duorum, 20 graduum, quando arcus inter lineas anguli comprehenſus, vnum, duos, 20. gradus ſeu partes continebit. Ille igitur angulus major erit, cuius lineæ arcum plurium graduum abſcindent. Vt angulus EBF, major eſt angulo GAH; quia arcus EF, plures partes ſui circuli continet, quã arcus GH ſui. Linea IB angulum EBF diuidit, bifariam quidem, ſi arcus EI, IF fuerint æquales. Ita angulus EBI eſt pars anguli EBF, quia arcus EI eius menſura eſt pars arcus EF menſura anguli EBF.

10. Quando recta ſupra rectam conſiſtens æquales vtrinque angulos fecerit; rectus eſt vterque angulus, & linea perpendicularis.

Vt ſi linea AB conſiſtens ſupra lineam CD faciat hincinde angulos ABC, ABD æquales, hoc eſt facto circulo, ex puncto B vt centro; ſi arcus AC, AD æquales fuerint, tunc anguli ABC, ABD æquales *erunt, & dicentur recti, & linea AB perpendicularis. Et quia totus arcus CAD est semicirculus, Arcus AC, AD erunt quadrantes circuli, continentes singuli quartam partem 360. graduum, seu 90. gradus. Ille igitur angulus rectus est cuius arcus continet gradus 90.*

11. Angulus obtusus est qui major recto.

Vt angulus ABD obtusus est, quia eius arcus AD plures gradus quàm 90. continet.

12 Angulus acutus est, qui minor recto.

Vt angulus ABC est acutus, quia eius arcus AC est pauciorum quàm 90. graduum.

13. Terminus est quod alicuius extremum est.

14. Figura est quantitas quæ sub vno, aut pluribus terminis continetur.

Debet autem esse vndique clausa vt figura vocetur.

15. Circulus est figura plana, vnius lineæ circuitu comprehensa, quæ circumferentia dicitur, à qua omnes lineæ re-

ctæ, ad vnum punctum intra positum ductæ, sunt æquales.

16. Hoc verò punctum centrum vocatur.

17. Diameter circuli est linea quæcumque per centrum ducta, & in circumferentia circuli vtrinque terminata, circulum & peripheriam bifariàm secans.

Vt linea AB per centrum C transiens & terminata vtrinque in punctis A & B, est circuli diameter.

Quia tamen dubitare quis posset, vtrum diameter diuidat circulum bifariàm, ita ostendemus partem ADB, æqualem esse parti AEB. Intelligatur enim ei superponi, ita vt linea ACB vtrique sit communis. Dico quod in tali casu circũferentia AEB, Coïncidet præcisè cum circũferentia ADB. Si enim non congrueret, caderet intra, aut extra; & si cadat intra, ducatur linea CG. Quia per definitionem circuli, lineæ ductæ à centro ad circumferentiam sunt æquales, sequeretur lineas CF, CG esse æ-

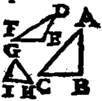
quales. Idem absurdum sequeretur, si caderet extrà; igitur circumferentia AEB congruit cum ADB; Ergo illi æqualis est: & diameter circulum bifariam diuidit.

18 Semicirculus est figura sub diametro, & circumferentia circuli contenta.

19. Rectilineæ figuræ, sunt quæ rectis lineis continentur, trilateræ quæ tribus, quadrilateræ quæ quatuor, multilateræ quæ pluribus.

Duplicem hic tradit Euclides triangulorum diuisionem, vnam per latera, aliam per angulos.

20 Triangulum æquilaterum est, quod tria latera habet æqualia.



21 Isosceles, seu æquicrurum, illud est quod duo latera habet æqualia.

22. Scalenum quod omnia latera habet inæqualia.

23. Triangulum rectangulum est, quod habet vnum angulum rectum.

Vt ABC *cuius angulus B rectus est.*

24. Amblygonium, seu obtusangulũ, cuius vnus angulus est obtusus, *vt* DEF.

25. Oxygonium, seu Acutangulum cuius omnes anguli sunt acuti *vt GHI.*

26. Rectangulum est figura quadrilatera cuius omnes anguli sunt recti.

27. Inter quadrilateras, quadratum est quod æquilaterum est, & rectangulum, id est cuius omnia latera æqualia sunt, & anguli recti, vt ABCD.

28. Alterâ parte longior est figura rectangula, sed non æquilatera vt DEFG.

29. Rhombus est qui æquilaterus est, sed non rectangulus, vt HIKL.

30. Rhomboïdes est figura quæ aduersa latera, & angulos habens æquales, nec est æquilatera, nec æquiangula, *vt MNPO.*

31. Aliæ verò figuræ quadrilateræ, quæ irregulares sunt, vocantur trapezia, *vt RSTV.*

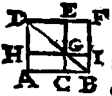
32. Parallelæ lineæ ſunt, quæ in eodem plano exiſtentes, quantumvis in vtramque partem producantur, nunquam concurrunt, ſed pari vbique ſpatio inter ſe diſtant.

Vt ſi proponantur lineæ AB, CD, quæ ita ſe habeant, vt puncta quæcumque lineæ AB, nempè E & G æqualiter diſtent à linea CD, eaque diſtantia ſumantur per lineas perpendiculares FE, HG quæ ſint æquales; lineæ AB, CD parallelæ, ſeu æquidiſtantes erunt. Quod vt melius concipiatur, ſupponatur linea FE perpendicularis ad CD, ita moueri vt eidem CD ſemper inſiſtat perpendiculariter, eius puncta F, & E deſcribent parallelas AB, CD. Addidimus igitur definitioni Euclidis hanc particulam (vt æquali interuallo inter ſe diſtent) quia dantur nonnullæ lineæ, non quidem rectæ, quæ licet ſemper accedant ad inuicem, non concurrunt, non ſunt tamen parallelæ.

33. Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cuius aduerſa latera ſunt parallela vt ABFD, cuius latera AB, FD,

A D, B F ſunt paralella.

34. Diameter parallelogrammi, eſt linea oppoſitos angulos conjungens vt B D.



35. Complementa ſunt duo parallelogramma minora, intra majus contenta, per quæ diameter non tranſit, vt ductis lineis CE, IH in puncto G ſe interſecantibus, parallelogramma EFGI, HG CA per quæ non tranſit diameter BD vocantur complementa.

POSTVLATA.

Poſtulatur concedi.

1. A quovis puncto, ad quodvis punctum duci poſſe lineam rectam.

2. Rectam lineam poſſe continuari, quantum libuerit.

3. Quôvis centrô, ad quodlibet intervallum, circulum deſcribi poſſe.

AXIOMATA.

1. Quæ eidem ſunt æqualia, inter ſe ſunt æqualia, & quod vno æqualium majus, aut minus eſt, altero quoque majus, aut minus erit.

2. Si æqualibus æqualia addas, fient tota æqualia.

3. Si ab æqualibus æqualia auferas, reſidua erunt æqualia.

4. Si inæqualibus æqualia addas, fient tota inæqualia.

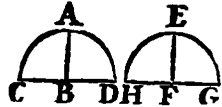
5. Si ab inæqualibus æqualia auferas, fient reſidua inæqualia.

6. Quæ eiuſdem, aut æqualium, dupla ſunt, tripla, quadrupla, dimidia, inter ſe ſunt ęqualia.

7. Quę mutuò ſibi congruunt, ęqualia ſunt.

8. Si rectę aut anguli, ęquales fuerint congruere poterunt.

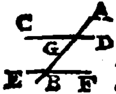
9. Totum ſua parte majus eſt.



10. Omnes anguli recti inter se sunt æquales.

Sint anguli recti ABC, EFH, ex cẽtris B & F, eôdem interuallô semicirculi describantur, qui æquales erunt, eorũq; medietates, seu quadrantes AG, EH pariter ęquales erunt. Sed *per defin.* 10. illi sunt mensuræ angulorum ABC, EFH, ergo prædicti anguli habentes mensuras æquales, etiam æquales erunt.

Euclidis axioma 11. si in duas rectas, recta incidens, angulos internos ad easdẽ partes, minores fecerit duobus rectis; illæ lineæ si producantur concurrent ad eam partem, in qua sunt illi anguli.



Vt si Recta AB *incidens in duas rectas* CD, EF, *faciat angulos internos* CGB, EBG, *ex eadem parte, minores duobus rectis; dicit esse lumine naturali notum, fore vt lineæ* CD, EF, *productæ ad partes* C, *&* E *concurrant. Quod licèt verum sit, non est tamen ita clarum, vt axiomatis locum mereatur,* *ideoque eius loco, aliud notius substitui-mus.*

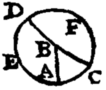
11. Si duæ lineæ parallelæ fuerint, omnes perpendiculares inter eas intercep-tæ æquales erunt

Vt si lineæ AB, CI paral-lelæ fuerint; ducanturque perpendiculares DF, EH, illæ æquales inter se erunt. Quod in ipsa parallelarũ definitione includitur, in qua dicitur (vt æquali vbi-que interuallô inter se distent,) interual-la autem metiri debemus per lineas per-pendiculares, vtpote determinatas, & breuissimas.

12. Duæ lineæ rectæ spatium non comprehendunt.

Hoc est, spatium non claudunt vndique, sed opus est saltem tribus.

13. Duæ rectæ lineæ non habent seg-mentum commune.



Hoc est, duæ rectæ sibi occur-rentes, non coalescunt in vnam, eandemque lineam. Vt si lineæ AB, CB *sibi occurrentes in pun-cto* B, *producantur; non coales-*

cent in eandem lineam BD ; *sed se secabunt. Si enim dicantur producta coïncidere cum lineâ BD , factô circulô , ex punctô* B *vt centro , sequeretur* DFC *esse semicirculum, cum linea* CBD *diuidat circulum bifariàm ; item cum linea* ABD *idem præstet , esset* AFD *semicirculus : ergo* DFC, DFA *essent æquales; pars , & totum quod est absurdum.*

MONITVM.

Propositionum aliæ proponunt faciendum,dicunturque problemata;aliæ in sola contemplatione sistunt , dicunturque theoremata.

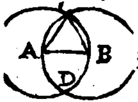
In citationibus primus numerus propositionem designat , secundus verò librum vt (*per* 4. 2.) significat per quartam propositionem libri secundi. Vbi verò vnus tantùm numerus apponitur,designat propositionem illius libri in quo versamur.

PROPOSITIO I.

Problema.

Super datâ lineâ rectâ terminatâ triangulum æquilaterum describere.

Sit data recta AB, terminata, (id est determinatæ longitudinis) ſupra quam conſtruendum ſit triangulum æquilaterum. Ex puncto A vt centro, interuallô AB, deſcribatur circulus C BD. item ex B vt centro, interuallô BA fiat circulus CAD priorem ſecans in puncto C, tum ducantur



lineæ AC, BC: dico factum eſſe triangulum ABC æquilaterum.

Demonſtratio lineæ AB, AC, ex eodem centro A, ad circumferentiam circuli CBD ductæ, (*per definitionem circuli*) æquales ſunt; ſimiliter lineæ BA, BC, ex eodem centro B, ad circumferentiam circuli CAD ductæ, sunt æquales: denique lineæ AC, BC, eidem AB, ostensæ æquales, inter se æquales erunt; fecimus ergo triangulum ABC, tribus constans lateribus æqualibus, quod faciendum erat.

PROPOSITIO II.

Problema.

Ad datum punctum, ducere lineam, æqualem propositæ lineæ.

Sit datum punctum A, per quod ducenda est linea recta æqualis lineæ BC. Sume circinô interuallum BC, eôque interuallô describe circulum. Duc ex punctô A quocumq; lineam AD, manifestum est hanc æqualem esse lineæ BC. *Licèt alius vulgò assignetur modus, in praxi tamen hôc semper vtimur, videturque æquè facilè sumptô interuallô* BC *describere circulum ex punctô A,* *ac illum deſcribere ex puncto* B.

PROPOSITIO III.

Problema.

Propoſitis duabus lineis rectis inæqualibus, ex majore, lineam minori æqualem abſcindere.

Proponantur lineæ, AB minor, CD major, ex qua vltima abſcindenda eſt linea æqualis minori AB, ſume circinô interuallum AB, ad quod ex puncto C, deſcribes circulum, aut partem eius ſecantem lineam CD, in puncto E, clarum eſt lineam CE, eſſe æqualem lineæ AB.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si duo triangula, duo latera ſingillatim æqualia habuerint, cum angulo ab iis comprehenſo; etiam baſin baſi æqualem, ſinguloſque angulos ſingulis æquales habebunt: eruntque triangula inter ſe æqualia.

Triangula A B C, D E F, habeant angulos A & D æquales & latera A B, D E, A C, DF, ſingula ſingulis æqualia: dico baſin BC, baſi EF æqualem eſſe.

Demonſtratio tam diſtat punctum B à puncto C, quam E ab F, ratio enim çur B diſtet à puncto C, aut E ab F, eſt quantitas angulorum A & D, & distantia punctorum E & F ab apice D; sed tam anguli A & D sunt æquales, quàm lineæ AB, DE; AC, DF, ergo tam distabit A à puncto C, quam E ab F, ergo lineæ BC, EF sunt æquales. *Quia tam.n hac d.monstratio non videtur conuincere, communem afferam.*

Si per intellectum cogitem triangulum ABC. ita superponi triangulo DEF, vt lineæ AB,DE æquales congruant, erit punctum D in A & E in B, tunc linea DF cadet supra AC: si enim caderet intra, aut extra triangulum ABC, angulus D major, aut minor esset angulo A, cùm tamen supponatur æqualis. Ergo linea DF, lineæ AC insistit, & cùm sit illi æqualis, congruet, quare punctum F cadet in C, & tota EF, toti BC congruet, alioquin se haberent vt BHC, & BC, & duæ lineæ rectæ spatium clauderent; ergo tota triangula congruunt, & sunt æqualia; reliquique anguli ABC, DEF oppositi æqualibus lateribus AC, DF æquales sunt, sicut & ACB, DFE, quod erat demonstrandum. *Hanc vltimam demon-*

ſtrationem reprehendunt nonnulli, quaſi mechanicam, eò quod ſuperpoſitione vtatur: quod de ſuperpoſitione reali concederem, non autem de ea, quæ per mentem tantum peragitur.

PROPOSITIO V.

Theorema. *Euclidis* 8.

Si duo triangula duo latera ſingillatim æqualia, ſicut & baſes æquales habeant: Angulos etiam ſingulos, ſingulis æquales habebunt.

Hæc propoſitio eſt ſuperioris conuerſa, & ex æqualitate tã laterum, quàm baſis, æqualitatem angulis comprehenſi concludit.

Proponãtur triangula ABC DEF quorum latera AB, DE; AC, DF & baſes BC, EF ſint æquales: dico tàm angulum

BAC angulo D, quàm reliquos reliquis esse æquales. Sit enim, si fieri potest, alteruter angulorum major; nempè BAC sit major quàm D. Fiat ex puncto A vt centro arcus IC, vt mensura anguli BAC, & cùm angulus D dicatur minor, erit etiam eius mensura minor, sit hæc, arcus IG, ductâque lineâ AG erit angulus BAG æqualis angulo D, ducatur BG, item ex B vt centro interuallô BC fiat arcus CH.

Demonstratio. Cum triangula ABG DEF habeant latera AB, DE; item DF AG æqualia (sunt enim AG, AC ex eodem centro A ductæ ad circumferentiam circuli CGI æquales) & AC, DF supponebantur æquales, ergo AG. DF æquales erunt. Dicitur item angulus BAG angulo D æqualis: ergo (*per* 4) bases BG, EF æquales erunt, sed BG minor est quã BH, quæ æqualis est ipsi BC, vt pote ducta ab eodem centro B ad circumferentiam circuli CH, ergo EF minor est quàm BC, quod est absurdum, cùm supposita sit æqualis. Ergo angulus BAC angulo D major non est.

Quia autem quodlibet latus assumi

potest pro basi, idem de aliis concluditur: igitur singuli anguli vnius trianguli singulis alterius æquales sunt; quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO VI.

Theorema. *Euclidis* 5.

Isoscelium triangulorum, anguli infra, & supra basin sunt æquales.

Triangulum ABC sit Isosceles, hoc est latera AB, AC sint inter se æqualia, dico angulos ABC, ACB supra basin æquales esse, & productis lateribus in E & F, angulos EBC, FCB infra basin esse æquales; Intelligatur basis BC bifariàm diuisa in D & ducta linea AD.

Demonstratio. Triangula ADC, ADB, habent latera AB, AC, BD, DC æqualia & basin AD communem: ergo (*per præ-*

cedentem) anguli ABD, ACD æquales erunt. Quod erat primum.

Secundò ex punctis B & C æquali interuallô fiant arcus GIE. KOF. vt habes in figura sequenti.

Demonstr. Cùm anguli ABG, ACB sint æquales, erunt arcus GI, KO eorum mensuræ æquales, quæ ablatæ ex semicirculis æqualibus GIE,KOF relinquunt arcus EI, OF, æquales : sed EI, OF sunt mensuræ angulorum EBC, FCB, ergo anguli EBC,FCB sunt ęquales. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Triangulum æquilaterum æquiangulum est.

PROPOSITIO VII.

Theorema. *Euclidis 6.*

Si in triangulo, duo anguli supra, aut infra basin aquales fuerint; etiam latera iis opposita aequalia erunt.

Trianguli ABC, primò anguli ABC, ACB ſint æquales: dico latera AB, AC iis oppoſita eſſe æqualia, ſeu triangulum ABC eſſe Iſoſceles, ſi enim eſſent inæqualia, ſit AB majus, fiatque BD æquale ipſi AC.

Demonſtratio. Triangula ACB, DBC habent latera DB, AC æqualia, & latus BC commune, item angulos DBC, ACB æquales, ergo (*per* 4.) ſunt æqualia, quod eſt abſurdum, cùm vnum ſit pars alterius.

Secundò anguli EBC, FCB infra baſin

ſint æquales. Factis æquali interuallo circulis EIG, KOF, ex punctis B & C vt centris.

Demonſtratio. Cum anguli EBC, FCB ſint æquales, erunt eorum menſuræ arcus EI, FO æquales, qui ſubtracti ex ſemicirculis EIG, & FOK relinquunt arcus IG, OK æquales menſuras angulorum ABC, ACB, qui conſequenter ſunt æquales: ergo per partem præcedentem latera AB, AC ſunt æqualia, quod demonſtrandum erat.

Coroll. triangulum æquiangulum æquilaterum eſt.

PROPOSITIO VIII.

Eucl. 7. omittatur.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Datum angulum rectilineum bifariàm secare.

Proponatur angulus BAC diuidendus bifariàm, seu in angulos æquales. Abscindantur lineæ æquales AB, AC, tum supra BC, fiat triãgulum æquilaterum BCD (*per* 1.) ducaturque linea AD. Dico BAD, CAD esse æquales.

Demonstratio. Triangula ABD, ACD habent latera AB, AC, æqualia, latus AD commune; item bases BD, CD æquales, cùm triangulum BDC sit æquilaterum: ergo (*per* 8.) anguli BAD, DAC, sunt æquales quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO X.

Problema.

Datam lineam bifariàm diuidere.

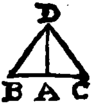
Diuidenda ſit bifariàm linea AB. ſupra lineam AB deſcribatur triangulumæquilaterum, nempè ABC, diuidatur bifariàm angulum ACB lineâ CD : dico, lineam CD diuidere lineam AB.

Demonſtratio. In triãgulis ACD, BCD, cùm latera AC, BC ſint æqualia. CD ſit commune, & anguli BCD, ACD æquales, erunt (*per* 4. 1.) baſes AD, DB æquales. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XI.

Problema.

In puncto, in linea dato, perpendicularem excitare.



Excitanda sit perpendicularis ad lineam BC, & per punctum A: abſcindantur hinc inde æquales lineæ AB, AC, & ſuper BC deſcribatur triangulum æquilaterum BCD, dico ductam lineam AD eſſe perpendicularem.

Demonſtratio. Triangula BAD, CAD habent latera AB, AC, æqualia, latus AD commune, & baſes BD, CD æquales, eò quòd triangulum BDC ſit æquiangulum: ergo (*per* 8.) anguli BAD, DAC ſunt æquales, & (*per def.* 10.) linea AD perpendicularis.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Ex puncto extra lineam dato, ad illam perpendicularem ducere.

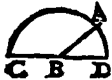
Ex puncto A extra lineam BC posito, ducenda sit perpendicularis ad eandem BC. ex puncto A vt centro describatur circulus BC, secans lineam BC, in punctis B, & C; diuidatur linea BC bifariam in D, & ducatur AD. Dico hanc esse perpendicularem ad BC, ducantur AB, AC.

Dem. In triangulis ABD ACD, cũ latera BD, DC æqualia sint, latus AD commune & bases AB, AC æquales; erunt (*per* 8.) anguli ADB, ADC æquales: ergo recti. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Recta supra rectam consistens, aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales.



Recta AB consistat supra rectam CD, faciatque cum illa duos angulos ABC, ABD; dico illos aut rectos esse, aut duobus rectis æquales, seu æquiualere duobus rectis, ex puncto B vt centrô describatur semicirculus CAD. Demõstratio. Vel anguli ABC, ABD sunt æquales, vel inæquales. Si primùm, recti erunt (*per def.* 10.) si secundùm, dico illos æquiualere duobus rectis, quia eorum mensuræ, nempè arcus CA, AD, simul æquales sunt semicirculo, seu mensuræ duorum rectorum, nam angulus rectus habet pro mensura quadrantem circuli. Est autem CAD semicirculus *per* 17. *def.*) cùm linea CD ſit diameter, ſeu per centrum B tranſeat. Ergo anguli ABC, ABD æquiualent duobus rectis.

Coroll. 1. Si linea in lineam incidens vnum angulum rectum efficiat: alium item rectum efficiet: vt ſi angulus ABD rectus foret, eſſet item angulus ABC rectus.

Coroll. 2. Si vnus fuerit acutus vt ABD, alter ABC erit obtuſus. Vt ſi ABD eſſet 80. graduum. ABC foret 100. nam duo recti 180. efficiunt.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si duæ lineæ in idem punctum alterius coëuntes, angulos vicinos, duobus rectis æquales efficiunt; illæ vnam lineam component.

In idem punctum A lineæ AB, concurrant duæ rectæ AD, AC, & cùm illa angulos deinceps, ſeu vicinos nempè

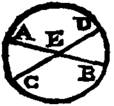
BAC, BAD, duobus rectis æquales efficiant: dico lineas CA, AD effiecere vnam lineam rectam. Id eſt lineam CA continuatam congruere cum AD, ſi enim continuata cum illa non congruit, cadet aut ſupra, aut infra AD, ita vt CAE ſit linea recta. Ex puncto A vt centro deſcribatur circulus

Demonſtratio, cum CAE dicatur linea recta, erit arcus CBE ſemicirculus; ſed ſupponuntur anguli CAB, BAD æquales duobus rectis: ergo pariter arcus CBD erit ſemicirculus: ergo arcus CBE, CBD ſunt æquales, quod eſt abſurdum, cùm vnus ſit pars alterius. Idem concluderem ſi CA continuata cadere diceretur infra AD.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si duæ lineæ se inuicem secuerint; angulos ad verticem oppositos, æquales efficient.



Lineæ AB, CD se inuicem secent in puncto E; dico angulos AED, CEB oppositos ad verticem, seu ad apicem angulorum, esse æquales. Ex puncto E vt centrô describatur circulus.

Demonstratio. Cum linea AEB, per centrum E transeat, erit (*per def.* 17.) ADB semicirculus; pariter cum CD per centrum E transeat, erit CBD semicirculus; ergo arcus ACB, DBC sunt æquales, ex quibus si arcum communem DB auferas: restabunt arcus AD, BC æquales, qui cùm sint mensuræ angulorum AED, CEB, illi inter se æquales erunt.

Coroll. 1.

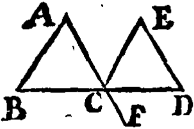
Coroll. 1. Si ad punctum E lineæ AB, duæ rectæ CE, ED concurrant, angulosque oppositos ad verticem nempe AED, CEB æquales efficiant, CE, ED vnam lineam component.

Demonstr. ADB est semicirculus, cùm AB per centrum E transeat; & cùm anguli AED, CEB supponantur æquales, arcus AD, CB etiam æquales erunt; & addito communi DB, erunt arcus ADB, DBC æquales; sed ADB est semicirculus: ergo & DBC. Ergo CE producta cadet in ED. Si enim caderet infrà, aut suprà ED; arcus DBC non esset semicirculus.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Cuiuscumque Trianguli vno latere producto, angulus externus quolibet interno opposito major est.



Proponatur triangulum ABC, cuius latus BC, producatur in D: Dico angulum externum ACD, angulo interno opposito B, aut A majorem esse. Intelligatur triangulum ABC moueri, ita vt eius basis BC insistat semper lineæ BD quantum opus erit productæ, sitque translatum in CED, ita vt ECD idem sit angulus ac ABC.

Demonstratio. Clarum est non posse hoc modo moueri triangulum, quin punctum A motum sit, vt in E; Sed manifestum est, si motum sit in E, angulum

ECD, seu ABC, minorem esse angulo ACD, cùm sit eius pars: ergo angulus externus ACD angulo B major est.

Eodem modo probabo angulum A, eodem ACD minorem esse: producatur enim latus AC in F, eruntque anguli BCF, ACD oppositi ad verticem, æquales: sed facilè probatur angulum A minorem esse angulo BCF, si moueatur triangulum secundùm lineam ACF.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Cuiuscumque trianguli, duo anguli simul sumpti, minores sunt duobus rectis.

Sit triangulum ABC; Dico duos eius angulos simul sumptos, verbi gratiâ A, & ACB, esse minores duobus rectis. Producatur latus BC, in D.

Demonstratio. Angulus A internus,

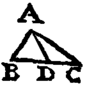
minor eſt angulo externo ACD (*per* 16.) quare ſi vtrique addas angulum ACB, erunt anguli A & ACB minores angulis ACB, ACD, ſed vltimi ſunt æquales duobus rectis (*per* 13.) ergo anguli A & ACB minores ſunt duobus rectis. Eôdem modô probares angulos B, & ACB minores eſſe duobus rectis, ſicut A, & B productô alio latere.

Coroll. in triangulo ſi vnus angulus obtuſus aut rectus ſit, alij erunt acuti.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

In omni triangulo, majus latus majori angulo opponitur.



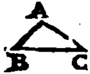
In triangulo ABC, latus BC majus ſit latere AB Dico angulum BAC oppoſitum majori lateri BC, majorem eſſe angulo C oppoſito minori lateri AB. Abſcindatur BD, æqualis lateri AB, ducaturque AD.

Demonſtratio. In triangulo BAD, latera BA, BD facta ſunt æqualia, quare (*per* 5.) anguli BAD, BDA ſunt æquales: ſed angulus ADB externus reſpectu triãguli ADC, major eſt interno oppoſito C. (*per* 16.) igitur angulus BAD, eodem C major eſt : ergo totus BAC multò magis angulo C major erit : quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

In omni triangulo, major angulus, majori lateri opponitur.



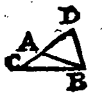
In triangulo ABC angulus A ſit major angulo C. Dico latus BC oppoſitum angulo A majori, majus eſſe latere AB, oppoſito angulo C minori.

Demonſtratio. Si enim latus BC non eſſet majus latere AB, foret vel illi æquale vel minus: non æquale, quia (*per* 5.) anguli A & C eſſent æquales, cùm tamen A ſupponatur major. Nec etiam latus BC, poteſt dici minus latere AB, quia (*per* 18.) angulus C major eſſet angulo A; cùm tamen A ſupponatur major; reſtat ergo vt latus BC, ſit majus latere AB.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Cuiuſcumque trianguli, duo latera ſimul ſumpta reliquo ſunt majora.



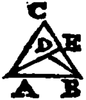
Sit triangulum ABC. Dico duo eius latera AB, AC ſimul ſumpta reliquo BC eſſe majora. Producatur latus CA, ita vt linea AD æqualis ſit lateri AB, jungaturque BD.

Demonſtratio. Lineæ AB, AD ſunt æquales: ergo (*per* 5.) anguli D & ABD ſunt æquales : ſed angulus ABD minor eſt angulo CBD : ergo angulus D eodem CBD minor eſt : ergo (*per* 19.) latus D C majus eſt latere CB. Sed latus CD æquale eſt lateribus AC, AB ; ergo latera AB, AC reliquo BC ſunt majora. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Si ſupra trianguli baſin, intra illud, aliud conſtituatur ; minoris latera majoris lateribus minora erunt ; continebunt autem angulum majorem.



Supra baſin AB intra triangulum ABC fiat triangulum ABD. Dico primò latera AD, DB, lateribus AC, CB minora eſſe : Producatur latus AD, in E.

Demonſtratio (*per præcedentem*) latera AC, CE, reliquo AE majora ſunt, ergo addito communi EB, erunt latera AC, CE, EB, lateribus AE, EB majora: rursus cum latera EB, ED, reliquo DB sint majora, addito communi AD, erunt latera AD, DE, EB majora lateribus AD DB; ergo latera AC, CB, lateribus AD, DB majora sunt.

Secundò dico angulum ADB esse majorem angulo C.

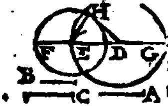
Demonstratio. Angulus ADB major est angulo DEB (*per* 16.) cùm sit externus respectu trianguli DEB: sed angulus DEB major est angulo C, cùm sit externus respectu trianguli ACE: igitur angulus ADB angulo C major est.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Ex tribus datis lineis, quarum duæ, reliquâ sint majores, triangulum construere.

Sint tres lineæ A, B, C, cum hac conditione, vt duæ quælibet aliâ sint majores; sit propositum ex his tribus lineis construendum triangulum. Sit linea ED æqualis lineæ A, & DG ipsi B, sicut EF ipsi C: tum ex D, vt centro interuallo DG, fiat circulus GH; & ex E interuallô EF, alius circulus FH priorem secans in H. Ducantur lineæ DH, EH. Dico triangulum EHD habere latera singula æqualineis ABC.



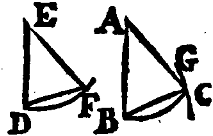
Demonstratio, linea ED facta est æqualis lineæ A, latus DH æquale est lineæ DG (*per defin. circuli*) sed DG sumpta est æqualis lineæ B: ergo DH æqualis est lineæ B: similiter EH æqualis lineæ FE, æqualis erit lineæ C. Igitur latera ED, DH, EF, trianguli EDH, æqualia sunt lineis A, B, C.

Quod si circuli non se intersecarent, ostenderem lineam DE, seu B, esse majorem duabus EF, DG, simul sumptis: hoc est duabus A, & C, contra suppositionem. Nam linea DE cõtinet lineã DH æqualem ipsi DG; & EI æqualem lineæ EF

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

In Dato puncto lineæ rectæ, Proposito angulo, æqualem constituere.



Sit lineæ AB propositum punctum A, in quo, angulo DEF, æqualis angulus constituendus est. Ex puncto E interuallo quocumque, describatur arcus DF, & eodem interuallo ex puncto A describatur arcus BC, ducatur linea DF, tum interuallô DF, ex puncto B, fiat arcus GC priorem secans, in C, & ducatur linea AC. Dico angulum BAC æqualem esse angulo DEF.

Demonst. Triangula DEF, BAC, habent latera DE, AB, EF, AC æqualia; cùm arcus DF, BC sint descripti eâdem apertura circini; bases item DF, BC sunt factæ æquales: ergo (*per* 8.(anguli DEF, BAC sunt æquales quòd demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si duorum triangulorum, habentium duo latera singillatim æqualia, alterum habeat angulum comprehensum majorem; basin quoque majorem habebit.

Triangulorum ABC, DEF habentium latera AB, DE, AC, DF æqualia; alterum, nempe ABC habeat angulum BAC comprehensum, majorem angulo D. Dico basin BC, basi EF majorem esse. Facto ex A vt centro arcu IC, tanquam mensurâ anguli BAC: cùm angulus D supponatur minor, mensuram etiam minorem habebit : Sit hæc, arcus IG,ducanturque lineæ AG, BG, & ex puncto B, ut centro, interuallô BC,describatur arcus CH.

Demonstratio. cum triangula BAG, DEF, latera AB, DE, AG, DF æqualia habeant;& angulos BAG, & EDF comprehensos æquales:erunt (*per 4.*) bases EF & BG æquales ; sed BG minor est quam BH, seu BC ; ergo basis EF basi BC minor erit:quod erat demonstrandũ.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si Triangulum duo latera habeat æqualia, duobus lateribus alterius trianguli, habeat & basin basi maiorem, angulum quoque basi oppositum maiorem habebit.

Sit trianguli ABC latus AB, æquale lateri DE trianguli DEF, & latus AC lateri DF,sitque basis BC maior basi EF.

Dico angulum A maiorem esse angulo D.

Demonstratio. Si angulus A non esset maior angulo D, esset vel æqualis, & sic bases BC, EF essent æquales (*per* 4) contra suppositionem, vel A esset minor quàm D, & consequentur *per precedentem* basis EF maior esset quàm BC: quod etiam esset contra hypothesin.

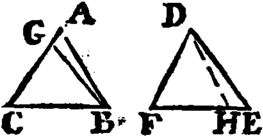
PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si duo triangula, habeant duos angulos singillatim æquales, cum uno latere, erunt omnimodè æqualia.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duos angulo C & F: ABC, & DEF æquales singillatim: item unum latus, nempe quod inter æquales angulos interiacet ſeu BC, EF. Dico reliqua latera eſſe æqualia & totum triangulum toti triangulo eſſe æquale. Sit enim, ſi fieri poteſt, latus CA, maius quam DF; abſcindatur CG, æquale ipſi DF, ducaturque BG.

Demonſtr. cum triangula GCB, DFE, habeant latera CG, DF, CB, FE æqualia; & angulos C & F æquales; erunt omnimodo æqualia (*per* 4.) & angulus GBC angulo E æqualis erit: ſed angulus ABC eidem E æqualis ſupponebatur: ergo pars, & totum, quod eſt abſurdum.



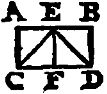
Secundò latera AC, DF ſupponantur æqualia cum iiſdem angulis ACB, DFE, ABC, DEF. Dico reliqua omnia eſſe æqualia: verbi gratia baſin CB, baſi FE. Sit enim, ſi fieri poteſt, baſis FE, maior baſi BC, abſcindatur FH, baſi BC æqualis.

Demonſtratio. Triangula ACB, DFH (*per* 4.) eſſent æqualia, & anguli ABC, DHF essent æquales: sed (*per* 16.) angulus DHF maior est angulo E : ergo angulus ABC maior esset angulo E, contra suppositionem.

Quia sequentes propositiones, ut demonstrantur ab Euclide supponunt XI. axioma, quod tamen ita lumine naturali notum non est, ut nomen axiomatis mereatur: ideo paulò aliter easdem propositiones, sine illo demonstrabimus : quare sequens lemma præmittimus.

LEMMA.

Perpendicularis ad unam parallelarum, ad aliam perpendicularis est.



Sint lineæ AB, CD descriptæ, scilicèt motu lineæ perpendicularis CA, quæ in toto cursu sit semper perpendicularis ad CD, hoc est sint CA, EF, DB perpendiculares ad CD, & inter se æquales. Dico eas perpendiculares esse ad AB. Sint CF, FD, æquales, junganturque CE, DE, *Demonstr. In triangulis CFE, DFE, cùm anguli CFE, DFE æquales sint, ut pote recti, & latera CF, DF æqualia, & EF commune, erunt reliqua æqualia* (per 4.) *nempe CE, DE, & anguli CEF, DEF, item anguli ECF, EDF, qui ablati ex rectis ACF, BDF, relinquunt angulos æquales ACE, BDE. Pariter triangula ECA DBE* (per 4.) *sunt æqualia, & anguli CEA, DEB sunt æquales, qui additi æqualibus CEF, DEF efficiunt angulos AEF, BEF æquales: ergo EF perpendicularis est ad AB. quod erat demonstrandum.*

Coroll. 1. *linea coniungens duas æquales, & ad aliam perpendiculares, illi parallela est; ut si linea EA coniungat duas lineas CA, EF æquales, & ad eandem CD perpendiculares; erit linea EA, parallela lineæ CD: nam parallela lineæ CD transiens per A, debet etiam transire per E. & cum duæ lineæ non possint habere segmentum commune, linea EA, cum tota parallela congruit. Vicissim in parallelis perpendiculares ad eamdem, debent esse æquales.*

PROPO

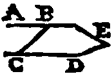
PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si in duas lineas alia incidens, angulos alternos æquales fecerit; illæ parallelæ erunt.

In lineas AB, CD, incidens linea BC, faciat angulos alternos ABC, BCD æquales. Dico AB, BC quantumlibet productas, non convenire (*hoc enim tantùm demonstravit Euclides*) conveniant enim, si fieri potest, in E.

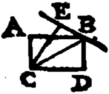
Demonstratio. In triangulo BEC, angulus externus ABC, maior esset interno opposito BCE, (*per* 16.) cum tamen supponantur æquales.



Quia tamen posset quis concedere lineas AB, CD non convenire, negare tamen esse parallelas, hoc est, æquali semper intervallô distare, ut accidit in conchoide, & asymptotis hyperbolicis.

probo absolutè eas esse parallelas.

In lineas AB,CD, incidens BC, angulos alternos ABC, DCB æquales faciat. Dico AB,CD parallelas esse. Ducatur ad AB perpendicularis CA, sitque CD æqualis AB, iungaturque BD.



Demonstratio. In triangulis ABC,BCD, cùm anguli ABC, BCD sint æquales, latera AB, CD æqualia, & BC commune: erunt CA, BD æquales, & anguli A & D æquales, & cùm A rectus sit, erit etiam D rectus: si ergo AB non est parallela, per punctum B transeat alia parallela, quæ sit EB, ad quam ducatur perpendicularis CE, quæ maior erit quàm CA: cùm enim angulus A rectus sit, alij erunt acuti, (*per* 17.) latus illi oppositum maius erit quam AC (*per* 18.) ergo CE maior erit quam CA, & quam BD. Item cùm CE, sit perpendicularis ad EB unam parallelarum, perpendicularis erit ad CD; & cùm BD sit etiam ad eandem perpendicularis; erunt per coroll. lemmatis CE, BD æquales, quod est absurdum, cùm iam CE ostensa sit maior.

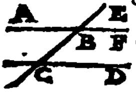
PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si in duas lineas, alia incidens, fecerit angulum externum, æqualem interno opposito; aut internos ex eâdem parte æquales duobus rectis, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas lineas AB, CD, incidens linea BC, faciat primò angulum externum EBF, æqualem angulo BCD interno opposito ex eâdem parte, parallelæ erunt lineæ AB, CD.

Dem. Anguli EBF, BCD supponuntur æquales; sed EBF, ABC oppositi ad verticem (*per* 15.) sunt æquales; ergo alterni ABC, BCD sunt æquales, & *per præcedentem* lineæ AB, CD sunt parallelæ.



Secundò, interni FBC, BCD, ex eâdem

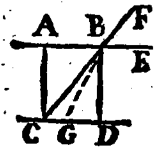
parte æquales sint duobus rectis. Dico lineas AB, CD esse parallelas.

Demonstratio. Anguli FBC,BCD supponuntur æquales duobus rectis; sed (*per* 13) anguli FBC, ABC sunt æquales duobus rectis; ergo FBC & BCD, æquales sunt angulis FBC, ABC, & ablatô communi FBC, erunt alterni ABC,BCD æquales, & (*per præcedentem*) lineæ AB, CD parallelæ; quod erat demonstr.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Linea in parallelas incidens, angulos alternos facit æquales, & externum interno opposito ex eâdem parte; item duos internos æquales duobus rectis.



Sint parallelæ AB,CD, in quas incidat linea BC. Dico primò angulos alternos ABC,BCD ęquales esse. Ducantur per C & B lineæ CA, BD perpendiculares ad AB, quæ æquales erunt, (*ex defin. parallelarum*)&(*per lemma superius*)erunt perpendiculares ad *CD*.

Demonstratio. In triangulis ABC, BDC lineæ AC, BD sunt æquales, & BC communis & anguli A& D recti. Dico reliqua latera esse æqualia; si enim latus

CD maius esset latere AB; abscindatur DG æqualis AB, & iungatur BG: essent (*per* 4.) bases BG, BC æquales, quod est absurdum, nam; cùm angulus D rectus sit, angulus BGD acutus erit, (*per coroll.* 17.) & BGC obtusus ergo (*per* 18,) latus BC maius est latere BG; sunt igitur latera AB, DC æqualia: vnde cum triangula habeant latera AB, CD; BD, AC æqualia, & angulos D & A æquales, vt pote rectos; erunt (*per* 4.) anguli alterni ABC, BCD; oppositi æqualibus lateribus AC, BD æquales: quod erat primum.

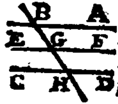
Secundò, dico in eâdem suppositione, angulum externum EBF, interno opposito BCD esse æqualem: cùm enim alterni ABC, BCD sint iam ostensi æquales, & EBF, ABC oppositi ad verticem (*per* 15.) sint æquales: erunt EBF, BCD æquales.

Tertiò. dico angulos EBC, BCD, internos ex eâdem parte esse æquales duobus rectis; cùm enim alterni ABC, BCD sint ostensi æquales; addito communi EBC; erunt ABC, EBC, duobus EBC, BCD æquales; sed duo primi (*per* 13.) sunt duobus rectis æquales : ergo, EBC, BCD interni ex eâdem parte sunt duobus rectis æquales. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXX.

Thoerema.

Quæ eidem sunt parallelæ, inter se sunt parallelæ.



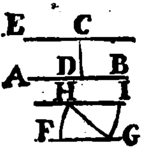
Lineæ AB, CD, eidem EF parallelæ sint. Dico eas inter se parallelas esse. Linea BH in eas incidat.

Demonstr. lineæ AB, EF supponuntur parallelæ: erũt ergo (*per* 29.) anguli alterni ABG, BGE æquales. Item quia EF, CD sunt parallelæ, erit (*per eandem*) angulus externus EGB, interno opposito GHC æqualis: ergo alterni ABH, BHC sunt æquales, & lineæ AB, CD parallelæ. (*per* 27.)

PROPOSITIO XXXI.

Problema,

Per datum punctum lineæ propositæ ducere parallelam.



Proponatur per punctum C ducenda parallela lineæ AB. Ex puncto C ad AB ducatur perpendicularis CD, & per C ad CD ducatur perpendicularis EC (*per* 11. *&* 12.)Dico EC esse datæ parallelam ; sunt enim anguli alterni ECD, CDB æquales,vt pote recti.

Aliô, modô sit lineæ FG per punctum H ducenda parallela, ducatur linea HG vtcumque,tùm ex G , interuallô GH,fiat arcus HF , & ex H eodem interuallo arcus GI , sintque arcus FH, GI æquales : ducatur HI. Dico eam esse parallelam lineæ FG.

Demonstr. Arcus HF , GI , mensuræ angulorum

angulorum alternorum IHG,HGF facti) ſunt æquales; ergo anguli alterni IHG, HGF ſunt æquales,&(*per* 29.)lineæ HI, FG, ſunt parallelæ.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Cuiuſcumque trianguli uno latere producto, externus angulus duobus internis oppoſitis ſimul ſumptis æqualis eſt. Item trianguli tres anguli, duobus rectis æquales ſunt.

Trianguli ABC producatur latus BC, in D. Dico angulum externum ACD,duobus internis oppoſitis, nempè A, & B ſimul ſumptis,æqualem eſſe. Per punctum C, lateri AB, ducatur parallela CE (*per præcedentem.*)

Demonſtr. Cum AB, CE, ſint parallelæ, erunt (*per* 29.) anguli alterni ECA, CAB æquales ; item angulus externus ECD opposito B æqualis, *per eandem*: sed angulus ACD, angulis ACE, ECD omnibus scilicet suis partibus æqualis est ; ergo angulus ACD duobus A & B est æqualis.

Secundò.cum anguli ACD, ACB (*per* 13.) æquales sint duobus rectis, & ACD ostensus sit æqualis duobus A & B,erunt tres A,B, & ACB æquales duobus rectis.

Coroll. 1. Tres simul anguli vnius trianguli, tribus alterius trianguli æquales sunt, nempe æquivalent 180. gradibus.

Coroll. 2. Si unius trianguli, duo anguli æquales sint duobus angulis alterius trianguli, reliquus reliquo erit æqualis.

Coroll. 3. Si in triangulo unus rectus sit, alij duo sunt acuti, æquiualentque simul uni recto.

Coroll. 4. Ex puncto extra lineam, unica perpendicularis duci potest, ne in triangulo sint duo anguli recti.

Coroll. 5. Perpendicularis est breuissima quæ à puncto in lineam duci potest.

Coroll. 6. In triangulo rectangulo maximus angulus est rectus, & latus illi oppositum maximum.

Coroll. 7. In triangulo æquilatero angulus quilibet est 60. graduum.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Si duas parallelas, & æquales, coniungant duæ lineæ ex eâdem parte; illæ æquales, & parallelæ erunt.

Duas parallelas, & æquales AB, DC, coniungant lineæ AC, BD ex eadem parte. Dico AC BD parallelas, & æquales esse. Ducatur linea AD.

Demonstratio. Cùm lineæ AB, CD sint parallelæ, erunt (*per* 29.) anguli alterni BAD, ADC æquales: quare cùm triangula BAD, ADC habeant latera AB, CD æqualia, & AD commune, & angulos

BAD ADC æquales, erunt (*per* 4.) baſes AC, BD æquales; item anguli CAD, ADB, qui cum ſint alterni, erunt etiam AC, BD parallelæ (*per* 29.) quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

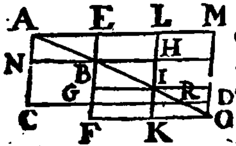
In parallelogrammo, oppoſita latera, æqualia ſunt, ſicut & anguli, illudque diameter biſariàm dividit.

Proponatur parallelogrammum ABDC. Dico adverſa eius latera AC, BD; AB, CD eſſe æqualia, angulos item oppoſitos B & C, BAC, CDB, æquales eſſe &c.

I

Demonſtratio. Cùm lineæ AB, CD ſint parallelæ; erunt anguli alterni BAD, ADC æquales (*per* 29.) pariter cum AC, BD ſint parallelæ, erunt anguli alterni CAD, ADB æquales, Quia autem triãgula ACD,ABD,habent latus AD cõmune, & duos angulos CAD,ADB , BAD,ADC æquales ; erunt omni ſenſu æqualia (*per* 26)eruntque latera AB, CD oppoſita angulis æqualibus DAC , ADB æqualia ; ſicut & latera AC. BD , erunt item anguli B & C æquales.Quod erat demonſtrandum.

Poteſt hic facilè demonſtrari axioma 11. Si in duas lineas linea incidens , angulos internos ex eâdem parte duobus rectis minores faciat ; concurrent ex ea parte illæ duæ lineæ.



In lineas AB, CD,incidens linea AC,efficiat angulos internos ACD, C A B , minores duobus rectis.Dico lineas AB,CD concurrere. Per A ducatur AM parallela CD,eruntque(per 29.) *an-*

guli ACD , CAM æquales duobus rectis, maiores quam ACD, CAB & ablatô communi ACD , erit CAM, maior quàm CAB. Ducatur EBF parallela AC. sumantúrque in EF, lineæ EB, BG, GF æquales, donec perueniatur infra CD , per quæ puncta ducantur BH , GI , FK ipsis AM, CD, parallelæ ; sint item EL , LM æquales lineæ AE : ducanturque LK , MO parallelæ AC , iunganturque BI , IO. Hæc IO necessariò secabit lineam CD, cùm eius punctum I sit supra , & punctum O infra lineam CD: restat ostendendum lineam AB IO esse rectam.

Demonstratio. In triangulis ABE, BHI ; lineæ AE, BH, sunt æquales ; cum AE, EL accepta sint æquales & EL, BH (per præcedentem) *sint æquales ; sunt item EB, HI æquales, cum EB, BG facta sint æquales. Angulus item AEB æqualis eidē ELH* (per 29.) *ergo anguli EAB, HBI æquales sunt, sed*(per 29.) *alterni EAB, ABH sunt æquales, ergo oppositi ABN, HBI sunt æquales : ergo* (per 14.) *lineæ AB, BI unam lineam constituunt. Similī modo ostendam BI, IO iacēre in directum ; ergo AB produ-*

Ita transit per O & secat CD in R; quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

Parallelogramma super eâdem basi, & inter easdem parallelas, constituta, sunt æqualia.

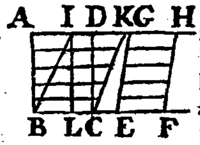
Super eâdem basi AB, & inter easdem parallelas AB, CD, sint constituta parallelogramma ABEC ABDF. Dico illa esse æqualia.

Demonstratio. In parallelogrammo AB EC, latera AB, EC sunt æqualia (*per* 34.) sicut in parallelogrammo ABDF latera AB, DF; ergo lineæ CE, FD sunt æquales: & additâ cõmuni EF, lineæ CF, ED æquales erunt: quare triangula ACF, EBD, habentia latera CF, ED; AC BE, æqualia, & angulos, ACF, BED æquales (*per* 29), sunt (*per* 4.) æqualia.

Ex quibus si auferas commune triangulum EGF, erunt Trapezia AGEC, FGBD æqualia; & additô communi triangulô AGB, fiunt parallelogramma ABEC, ABDF æqualia. quod demonstrandum erat.

Potest demonstrari hæc propositio, sicut & nonnullæ sequentes, methodô indiuisibilium, cuius, vt aliquod specimen praberem; hanc demonstrationem adhibui.

Parallelogramma super eâdem, aut æquali basi, inter easdem parallelas constituta, sunt æqualia.



Sint parallelogrāma ABCD, IBCK, EFHG super eâdem basi BC, aut super æquali EF constituta, & inter easdem parallelas AH, BF. Dico illa esse æqualia.

Demonstratio. Intelligatur parallelogrammum componi quotcumque lineis basi BC parallelis, non quidem carentibus omni latitudine, sed habentibus latitudinem quantùm libuerit paruam, ita vt illæ lineæ totum illud occupent. Quæ omnes & singulæ erunt (*per* 34) æquales basi BC: producantur illæ lineæ, ita vt totum etiam occupent parallelogrammum IBK, aut EFHG; singulæ lineæ in quolibet parallelogrammo æquales sunt basi; bases autem supponuntur æquales; sunt autem tot in vno, quot in alio, & æqualiter latæ; & hoc semper accidet in qualibet suppositione, hoc est, quantulacunque ponetur esse latitudo singularum linearum: ergo parallelogramma sunt æqualia.

Coroll. In parallelogrammo rectangulo, si basin per altitudinem multiplices, exurget eius area, seu capacitas; vt si parallelográmi rectanguli ABCD, latus AB, seu altitudo, seu distantia parallelarum AH, BC, multiplicetur per basin BC, habebitur area parallelogrammi ABCD. Nam tunc cognoscitur eius area, quando cognoscitur numerus punctorum, quæ in eo inueniuntur; sed per multiplicationem id perficitur: ſupponamus enim me diuiſiſſe lineam AB in 7. puncta, erunt in parallelogrammo 7. lineæ, ſingulæ æquales baſi BC: ſupponantur item in BC eſſe 5. puncta, erunt in ABCD 35. puncta: poſſum autem aſſumere pro puncto, vel exapedam quadratam, vel pedem, digitum, granum hordei, provt maior, aut minor requiretur præciſio. Notandum autem me locutum eſſe de parallelogrammo rectangulo, quia perpendicularis AB, eſt diſtantia propriè dicta parallelarũ AD, BC, oſtenditq; quot lineæ baſi parallelæ duci poſſint; vnde aliæ lineæ obliquæ, vt BI, non aſſumuntur tanquam menſuræ, neque indicant quot lineæ interiiciantur inter lineas AD, BC: unde ad metiendum parallelogrammum BCKI, vtimur perpendiculari IL aut AB, quam vocamus altitudinem: quare parallelogramma habentia æquales baſes, & altitudinem, quod idem eſt, ac eſſe inter eaſdem parallelas, ſunt æqualia; quia, multiplicando baſes per altitudines, idem numerus producitur. Hæc notatio eſt ad praxim vtiliſſima.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & inter eaſdem parallelas conſtituta, ſunt æqualia.

Parallelogramma ABCD, EFGH, habeant baſes AB, EF æquales, ſintque conſtituta inter eaſdem parallelas AF, DG. Dico illa eſſe æqualia. Ducãtur lineæ DE, FC quæ cum coniungant lineas DC, EF æquales, & parallelas; æquales, & parallelæ erunt (*per* 34.) Eritque parallelogrammum DEFC.

Demonſtr. Parallelogramma ABCD, EFCD ſunt æqualia (*per* 35.) cum eandem baſin habeant, nempe CD, & ſint inter eaſdem parallelas. Sunt item æqualia EFGH & EFCD, cum eandem baſin habeant, nempe EF; ergo ABCD, EFGH æqualia ſunt. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Triangula super eâdem basi, & inter easdem parallelas constituta, sunt æqualia.

Super basi AB, & inter easdem parallelas, constitura sint duo triangula ABC, ABD. Dico illa esse ęqualia lateribus AC, AD, ducantur parallelæ BE, BF (*per* 31.) eruntque ABEC, ABFD parallelogramma.

Demonstr. Parallelogramma ABEC, ABFD (per 35.) æqualia sunt; triangula ABC, ABD (*per* 34.) eorum sunt dimidia: ergo æqualia sunt.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Triangula super æqualibus basibus, & inter easdem parallelas constituta, sunt æqualia.

Super æqualibus basibus AB, CD, & inter easdem parallelas AD, EH, constituta sint triangula ABG, CDH: Dico illa æqualia esse: lateribus BG, DH ducantur parallelæ AE, CF, eruntque ABGE CDHF parallelogramma.

Demonstr. Parallelogramma ABGE, CDHF sunt æqualia (*per* 36.) sed triangula ABG, CDH eorum sunt dimidia (*per* 34.) ergo sunt inter se æqualia.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Triangula æqualia, super eâdem basi constituta, sunt inter easdem parallelas.

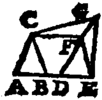
Triangula ABC, ABD sint æqualia, & super eâdem basi AB. Dico lineam CD parallelam esse lineæ AB: Si enim non sit parallela, sit CE parallela AB, producaturque AD donec concurrat cum CE, & iungatur BE.

Demonstr. Dicuntur triangula ABD, ABC esse æqualia: sed ABC, ABE super eâdem basi AB & inter easdem parallelas AB, CE (*per* 37.) sunt æqualia. Ergo triangula ABD, ABE inter se sunt æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Igitur nulla alia parallela AB, duci potest, quam CD.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Triangula æqualia, super æqualibus basibus in eâdem linea constituta, sunt inter easdem parallelas.



Sint trangula æqualia ABC, DEF super basibus æqualibus AB, DE, in eâdem linea AE constituta. Dico AE, CF parallelas esse; si enim non sunt, per C ducatur CG parallela AE, producaturque DF, & iungatur EG.

Demonstratio. Triangula ABC, DEF supponuntur æqualia; sed ABC, DEG inter parallelas CG constituta (*per* 38.) sunt æqualia; ergo triangula DEF, DEG sunt æqualia, pars & totum, quod est absurdum, Non igitur alia duci poterit parallela lineæ AE, quam CF.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Parallelogrammum eandem , aut æqualem cum triangulo basin habens , & inter easdem parallelas constitutum , illius est duplum.

Parallelogrammum A E F C, eandem basin aut æqualem habeat cum triangulo GBD , sitque constitutum inter easdem parallelas. Dico parallelogrammum AEFC, trianguli GBD esse duplum; ducatur EC.

Demonstr. Parallelogrammum AEFC duplum est trianguli AEC, *(per 34.)* sed triangula AEC , GBD *(per 38.)* sunt æqualia : ergo parallelogrammum AEFC trianguli GBD est duplum ; quod erat demonstrandum.

Coroll. Cùm habeatur area parallelogrammi multiplicando basin AE, per lineam perpendicularem ad parallelas, (*vt ostendimus propositione* 35.)habebitur area trianguli, si multiplices basin per dimidiam perpendicularem, vel dimidiam basin per totam perpendicularem; quare metiri possumus quodlibet triangulum, si multiplicemus basin GB per dimidiam perpendicularem ductam ab angulo opposito basi ad basin.

PROPOSITIO XLII.

Problema.

Dato triangulo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectinco.

Proponatur triangulum ABC, cui æquale parallelogrammum construendum est, quod habeat vnum angulum æqualẽ dato E. Ex puncto C, duc CH parallelam AB (*per* 31.) diuisâque AB bifariàm, in F, fiat angulus AFG, æqualis angulo E, (*per* 23.) & lineæ FG ducatur parallela AH. Dico parallelogrammum AFGH, æquale esse triangulo ABC. Ducatur FC.

Demonstratio. Triangula BFC, FAC, super basibus æqualibus BF, FA, sunt æqualia (*per* 38.) ergo triangulum ABC, trianguli AFC est duplum; sed parallelogrammum AFGH, ejusdem trianguli AFC, duplum est (*per* 41.) Ergo parallelogrammum AFGH, & triangulum ABC, sunt æqualia; habet item angulum GFA æqualem angulo E, quod propositum erat.

PROPOSITIO XLIII.

Theoréma.

Cuiuſlibet parallelogrammi duo complementa inter ſe ſunt æqualia.

Proponatur parallelogrammũ ABCD. Dico complementa EF, GH, eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtr. Triangula ACD, ACB, (*per* 33.) ſunt æqualia: ergo, ſi ex iis auferas triangula FCI, ICH, KIA, AIG, quæ per eamdem ſunt æqualia, reſtabunt parallelogramma EF, GH, æqualia, quæ *ex def.* 35. ſunt complementa. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Problema.

Super datâ lineâ, parallelogrammum constituere, æquale triangulo proposito, in dato angulo.

Proponatur triangulum ABC, cui æquale parallelogrammum constituendum sit, super datâ lineâ D, in dato angulo E, hoc est, cuius unũ latus æquale sit lineæ D, & vnus angulus æqualis angulo E. (*Per* 42. triangulo ABC fiat æquale parallelogrãmum FCGH, habens angulum CFH æqualem angulo E. Sit GI æqualis lineæ D, ductâque lineâ IC, donec secet lineam HF in K; ducantur parallelæ suis oppositis IL, LK, CM. Dico parallelogrammum LNCM esse id quod quæritur.

Demonstratio, Primò (*per* 43.) LNCM æquale est parallegramo CFHG, seu triangulo ABC. Linea LN æqualis eſt lineæ IG,ſeu lineæ D. Anguli HFC, GCM, CNL, (*per* 29.) ſunt æquales inter ſe : ergo & angulo E ; habet ergo omnes conditiones requiſitas.

PROPOSITIO XLV.

Problema.

Dato Rectilineo, æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo.

Sit datum rectilineum ABCD, cui æquale parallelogrammum conſtruendum eſt ; habens unum angulum æqualem angulo E ; reſolue rectilineum in triangula, ductâ lineâ BD; tum (*per* 42.) triangulo ABD, faç æquale parallelogrammum FGHI, cuius angulus C æqualis ſit angulo E. Item (*per* 44.) in lineâ IH, æquale fiat parallelogrammum IHKL, habens angulum KHI, æqualem angulo G, seu E.

Demonstratio. Primò patet parallelogramma FGHI, IHKL esse simul æqualia rectilineo ABCD; quod verò vnicum parallelogrammum constituant, ostendo: cùm enim angulli FGH, GHI, sint duobus rectis æquales, (*per* 29.) & angulus KHI factus sit æqualis angulo E seu G: erunt KHI, GHI duobus rectis æquales; ergo GHK est vnica linea recta (*per* 14.) atque adeò unicum est parallelogrammum GKLF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVI.

Problema.

Super datâ rectâ, quadratum construere.

A D

B C

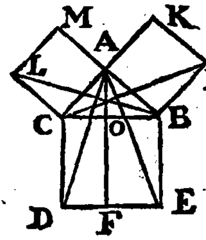
Sit construendum quadratum supra lineam BC in punctis B & C excitentur (*per* 11.) duæ perpendiculares BA, CD æquales lineæ BC, ducaturque linea AD. Dico factum esse quadratum.

Demonstratio. Cùm enim lineæ CD, BA, sint æquales, & parallelæ (*per* 29.) eò quòd anguli B & C sint recti, lineæ BC, AD eas coniungentes sunt parallelæ, & æquales (*per* 33.) sunt igitur 4, lineæ æquales, & anguli B. & C, & illis oppositi A & D (*per* 34.) erunt recti. Igitur ABCD est quadratum. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XLVII.

Theorema.

In triangulo rectangulo, quadratum lateris oppositi recto angulo, aequale est quadratis reliquorum laterum simul sumptis.



Sit triangulum ABC, cuius angulus A sit rectus. Dico quadratum CDEB, lateris BC oppositi angulo recto A, ęquale esse quadratis CAML, ABIK reliquorum laterum AC, AB, simul sumptis. Ducatur AF parallela lineis CD, BE; ducantur item AD AE, LB, IC. Ostendere volo quadratum CAML, & rectangulum CDFO esse aequalia; sicut & quadratum

ABIK, rectangulo BEFO.

Demonſtratio. Primò triangula LCB, ACD, (*per* 4.) ſunt æqualia; habent enim latera LC, CA, CB, CD æqualia (*per definitionem quadrati*,) & cum anguli recti LCA, DCB ſint æquales, additô communi angulô ACB, erunt anguli LCB, ACD æquales; ergo triangula LCB, ACD (*per* 4.) ſunt æqualia: ſed (*per* 41) quadratum ACLM, eſt duplum trianguli LCB, cum habeant eandem baſin LC, & ſint inter eaſdem parallelas, LC, MB; & pariter parallelogrammum CDFO, eſt duplum trianguli ACB; cùm habeant eandem baſin CD, & ſint inter eaſdem parallelas; quæ ſunt autem æqualium, dupla ſunt æqualia: ergo quadratum, ACLM, & rectangulum CDFO ſunt æqualia. Eodem modo oſtendam quadratum ABIK, & rectangulum BEFO eſſe æqualia, quia ſunt dupla triangulorum æqualium IBC, ABE: ſed quadratũ CDEB, æquale eſt rectangulis CDFO, BEFO, omnibus ſcilicet ſuis partibus: ergo quadratum CDEB æquale eſt quadratis ACLM, ABIK: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVIII.

Theorema.

In Triangulo si quadratum vnius lateris æquale est quadratis reliquorum laterum, angulus illi oppositus rectus est.

Supponatur in triangulo ADC, quadratum lateris DC æquale esse quadratis laterum AD, AC simul sumptis. Dico angulum DAC rectum esse. Ducatur AB perpendicularis ad AD, & æqualis lineæ AC, iungaturque BD.

Demonstratio. In triangulo DAB, cùm angulus DAB sit rectus, erit (*per* 47.) quadratum lateris BD, æquale quadratis ex DA, AB; & cùm AC, AB, sint æquales, quadratum ex BD æquale erit quadratis ex AD, AC; quibus supponebatur æquale quadratum ex DC: ergo quadrata ex CD, & ex BD sunt æqualia, & lineæ æquales: quare in triangulis DAC, BAD, cum latera AC, AB facta sint æqualia, AD sit commune, & bases DC, DB æquales, erunt (*per* 8.) anguli DAC, BAD æquales; sed BAD rectus est; ergo DAC rectus erit; quod erat demonstrandum.

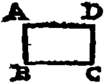
ELEMENTORVM EVCLIDIS

LIBER SECVNDVS.

DEFINITIONES.

1. Parallelogrammum rectangulum cótineri dicitur duabus lineis angulum rectũ comprehendentibus.

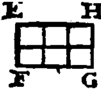
N*OTANDVM primò nos deinceps per hanc vocem* (rectangulũ) *intellecturos parallelogrammum; cuius omnes anguli sunt recti; sufficienter autem illud determinamus, cum longitudinem eius, & latitudinem assignamus, appellantes duas lineas vicinas, ut in rectangulo*



AB,

ABCD lineas AB, BC, quia aliæ istis sunt æquales.

Intelligitur autem generari rectangulum ABCD, si linea AB, linea BC perpendiculariter insistens, eam percurrat; qui ductus respondet multiplicationi arithmeticæ; ita ut, sicut ducendo lineam AB, supra BC, producitur rectangulum ABCD; ita multiplicando latus BA, per BC, idem rectangulum producitur. quod ita explico.

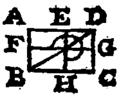


Sicut ad determinandam, seu metiendam longitudinem alicuius lineæ, utimur mensurâ nobis notâ, ut cùm dicimus lineam 4, aut 5 pedum; ita dum aream, aut capacitatem alicuius superficiei determinare volumus, eam metimur per aliquam superficiem nobis notam: nulla autem occurrit aptior, quàm quadratum; quia cum eius longitudo, sit latitudini æqualis, faciliùs exhibetur, eò quòd sufficiat eius unam dimensionem assignare. Proponatur ergo rectangulum EFGH, *cuius latus* FE *sit duorum pedum, &* FG *trium. Dico si multiplices* EF, *per* FG, *& dicas bis tria, sunt 6, exurget numerus quadra-*

torum pedalium. quæ in rectangulo EFGH inueniuntur; Nam si rectangulum cum longitudine trium pedum, haberet tantum latitudinem vnius, fieret solum vnus ordo quadratorum pedalium; sed EF est duorum pedũ; fiunt ergo duo ordines trium quadratorum: quare multiplicando vnum latus per aliud, exurgit area rectanguli: cùm ergo per multiplicationem fiant rectangula, aliqua ex propositionibus sequentibus in numeris exhibentur.

Pariter cognita areâ rectanguli, & datô vnô latere, per diuisionem innotescit aliud: vt si sciam rectangulum EFGH esse 6 quadratorum pedalium, & detur latus EF duorum, si per diuisionem innotescat binarium esse ter in numero 6, veniet pro quotiente latus EH trium pedum.

2. In rectangulô ductâ diametrô, vnum rectangulorum, per quæ diameter transit, cum duobus vicinis complemétis vocatur Gnomon. *Vt in rectangulo ABCD, rectangulum EG, vnà cum cóplementis EF, GH: hæc* (inquam) *tria dicuntur Gnomon, quia figuram Gnomonis, seu quadrâ exhibent.*



PROPOSITIO I.

Theorema.

Si fuerint duæ lineæ, quarum vna insecta sit, altera verò diuidatur in quotcumque segmenta, erit rectangulum sub ijs lineis contentum, æquale omnibus simul rectangulis, quæ sub insectâ, & partibus sectæ continentur.

Proponantur lineæ AE, AB, quarum AE non diuidatur, AB verò diuidatur in quotcumque segmenta AC, CD, DB. Dico rectangulum AF, comprehensum sub AB, AE, æquale esse omnibus rectangulis, quæ sub AE, & segmentis AC, CD, DB comprehenduntur.

Demonstr. Rectangulum AG comprehenditur sub AE, & segmento AC: rectangulum CH comprehenditur sub AE, aut ſub CG illi æquali,& ſegmento CD: rectangulum DF comprehenditur ſub AE, aut DH illi æquali, & ſub ſegmento BD: clarum eſt autem rectangulum AF æquale eſſe rectangulis AG,CH,DF omnibus ſcilicet ſuis partibus ſimul ſumptis. ergo ſi fuerint duæ lineæ &c.

Idem in numeris conſtat. Sit linea AB 9. pedum: nempe AC duorum, CD quatuor, BD trium, ſit AE 5. Multiplica AB 9. per AE 5, fiet rectangulum AF 45. multiplica AE 5, per AC 2, fient 10. multiplica AE 5, per CD 4, fient 20. multiplica AE 5, per BD 3, fient 15. Clarum eſt 10,15 & 20 efficere 45.

Hæc propoſitio demonſtrat praxin communẽ multiplicationis arithmeticæ.

A	6	3	
B		4	
C		1	2
D	2	4	0
E	2	5	2

Sit enim multiplicandus numerus A per B. intelligatur numerus A tanquam linea diuiſa in 63: numerus B multiplicet 3, & faciant numerum C; idem B multiplicet 60 & producat numerum D. Dico ſi numerus B multiplicet A, hoc eſt, ſi fiat rectangulum contentum sub A & B, dico inquam illud esse æqualẽ rectangulis contentis sub B & 3, sub B & 60, id est, numeris C & D, Simul sumptis, scilicet E.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si Recta secetur in quotcumque segmenta, Rectangula comprehensa sub totâ, & singulis segmentis æqualia erunt quadrato totius.

Recta AB secetur vtcumque in C & D; Dico rectangula contenta sub totâ AB, & singulis segmentis AC, CD. DB, simul, æqualia esse quadrato totius AB; sit Ab æqualis AB.

Demonstr. (*Per superiorem*) rectangulum contentum sub Ab, AB seu quadratum lineæ AB, æquale est rectangulis contentis ſub Ab, ſeu AB, cum vtraque ſit æqualis ſegmẽtis AC, CD, DB ſimul ſũptis. Ergo quadratum lineæ AB, æquale eſt rectangulis contentis ſub totâ AB, & omnibus ſegmentis AC, CD, DB. Quod erat demonſtrandum.

In numeris idem oſtenditur. Sit linea AB pedum 9. eritque eius quadratum 81. Sit AC 3, CD 4, DB 2. Cum ter 9 efficiant 27, quater 9 36, bis 9 18. Patet 27, 36, & 18 efficere 81.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si Recta ſecetur vtcumque, erit rectangulum comprehenſum ſub totâ, & vno ſegmento; æquale quadrato illius ſegmenti, & rectangulo ſub ſegmentis.

Recta AB ſecetur vtcumque in C: Dico rectangulum comprehenſum ſub totâ AB, & ſegmento AC, æquale eſſe quadrato ſegmenti AC, & rectangulo comprehenso sub segmentis. Sit AE æqualis AC.

Demonstratio. Rectangulum comprehensum sub totâ AB, & lineâ AE, seu segmento AC; æquale est rectangulo sub AE, AC seu quadrato; cum AE, AC sint æquales: & rectangulo comprehenso sub AE, seu AC, CB, quod erat demonstrandũ.

In numeris sit AB 7. AC 4. CB 3. Dico quadratum AC seu 16. & rectangulum sub segmentis AC 4, & CB 3. seu 12, æqualia esse rectangulo comprehenso sub totâ AB 7, & AC seu AE 4, nempe 28 æqualia esse numero 12, & quadrato 16.

Ne deterreantur tyrones licèt huius libri propositiones initiò minus benè intelligant; fundantur autem in principio, omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si Recta secetur vtcumque, erit quadratum totius, æquale quadratis segmentorum, & rectangulo comprehenso sub segmentis bis sumpto.

Linea AB secta sit in C. Dico quadratum totius AB, æquale esse, quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB bis sumpto. Fiat quadratum lineæ AB, (*per* 46) nempe ABFD, ductâque diagonali DB, ducatur per C parallela lineis AD, BF, nempe CE, quæ secabit diagonalem in G: ducatur per G linea IH parallela AB. Primò ostendere debeo HE esse quadratum segmenti AC: cùm enim lineæ AD, AB, sint æquales, erunt (*per* 5.1.) anguli ADB, ABD æquales; Sed HGD æqualis est opposito ABD (*per*

(*per* 29.1.) ergo anguli HDG, HGD æquales sunt, & lineæ HD, HG æquales (*per* 26. 1.) est ergo HE quadratum lineæ HG, seu AC. Pariter CI, est quadratum segmenti CB; rectangulum AG, comprehenditur sub segmentis AC, & CG seu CB; item rectangulum EI, comprehenditur sub GI, seu CB, & sub EG, seu HG, hoc est, AC.

Demonstratio. Quadratum AF, æquale est omnibus suis partibus simul sumptis; sed eius partes sunt quadratum HE, segmenti AC; quadratum CI, segmenti CB; & duo rectangula AG, GF, comprehensa sub segmentis: ergo quadratum AB æquale est quadratis ex AC, & CB, & duobus rectangulis sub segmentis AC, CB, quod erat demonstrandum.

In numeris: sit AB 5. AC 3. CB 2. Erit 25. æquale quadratis 4 & 9. cum duobus rectangulis comprehensis sub 3 & 2. nempe 6. hoc est 25 æquale est 9. 4. 6. & 6.

Coroll. In quadrato ductâ diagonali, rectangula, per quæ transit diagonalis sunt quadrata.

Propositio praced. demonstrat praxin Arithmeticam extrahendi radicem quadratam, vt ostendimus, in Arithmetica.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si linea secetur æqualiter, & inæqualiter, erit rectangulum comprehensum sub inæqualibus segmentis, vnà cum quadrato intermedij segmenti, æquale quadrato dimidiæ.

Linea AB diuidatur bifariàm in C, & inæqualiter in D. Dico rectangulum AH, comprehensum sub segmẽtis AD, DB (sunt enim DH, DB æquales,) vnà cum quadrato LG, intermedij segmenti CD, æquari CE quadrato dimidiæ AB.

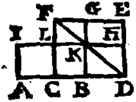
Demonstrat. Rectangulum AL æquatur rectangulo CI, (*per* 36. 1.) eò quòd bases AC, CB supponantur æquales: CI autem æquatur rectangulo DE; ergo AL, DE æqualia sunt; adde commune CH, fiet AH, æquale Gnomoni GIDL: adde quadratum LG, fiet AH cum quadrato LG æquale Gnomoni GIDL, cum eodem quadrato; hoc est, toti quadrato CE. quod erat demonstrandum.

In numeris: sit AB 10, AC 5, DB 2, & CD 3. Erit rectangulum AH comprehensum sub AD 8, & DB 2, seu 16, vnà cum quadrato ex CD 3, hoc est numero 9; æquale quadrato ex AC 5, seu 25. nam 16 & 9 efficiunt 25.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si lineæ bifariàm diuisæ adiiciatur alia linea, erit rectangulum contentum sub compositâ ex totâ lineâ & adjectâ, & sub adjectâ, unà cum quadratô dimidiæ; æquale quadrato compositæ ex dimidiâ, & adjectâ.



Lineæ AB diuisæ bifariàm in C, addatur linea BD, Dico rectangulum AH, contentum sub lineâ AD, quæ componitur ex totâ lineâ AB, & adjectâ BD, & sub-adjectâ BD, seu illi æquali DH, unà cum quadrato LG, æquale esse quadrato CE, lineæ CD compositæ ex dimidiâ CB, & adjectâ BD. Probauimus autem (*in* 4.) LG & BH esse quadrata.

Demonstratio. Rectangula AL, CK super basibus æqualibus æqualia sunt; complementa item CK, KE sunt æqualia (*per* 33.1.) Ergo rectangula AL, KE sunt æqualia: his adde commune CH, erit rectangulum AH, Gnomoni GHBL æquale: adde vtrobique quadratum LG, fiet Gnomon GHBL, & quadratum LG, seu pro illis quadratum CE, æquale AH simul cum quadrato LG. quod erat demonstrandum.

In numeris: sit AB 6, AC 3, BD 4. Erit rectangulum AH 40, quadratum LG 9, quadratum CE 49; clarum autem est 40, & 9, æquari 49.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si linea secetur vtcumque; erunt quadrata totius, & vnius segmenti, æqualia duobus rectangulis comprehensis sub totâ, & sub eo segmento, vnà cum quadrato alterius segmenti.

Linea AB diuidatur vtcumque in C. Dico eius quadratum, nempe quadratum AD, vnà cum quadrato CF segmenti CB, æqualia esse duobus rectangulis comprehensis sub totâ AB, & segmento BC, vnà cum quadrato CH segmenti AC.

Demonstrat. Hæc duo quadrata AD, CF, æqualia sunt rectangulis IB, HD, (vtrumque enim comprehenditur sub totâ AB & segmento BC, vt patet) &

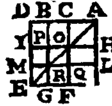
quadrato CH, nempe alterius segmenti CA. Ergo quadrata totius AB, & segmenti BC, æqualia sunt duobus rectangulis comprehensis sub totâ AB, & segmento BC, & quadrato alterius segmenti AC. quod erat demonstrandum.

In numeris, Sit AB 5, AC 3, BC 2; erunt quadrata 25 & 4, æqualia duobus rectangulis comprehensis sub AB & BC, idest 10 & 10 cum quadrato segmẽti AC, seu 9: nam 25 & 5 efficiunt 29; sicut 10, 10 & 9 efficiunt etiam 29.

PROPOSITIO VIII.
Theorema.

Si linea seceтur vtcumque, erunt quatuor rectangula comprehensa sub totâ, & vno segmento, vnà cum quadrato alterius lineæ, æqualia quadrato lineæ compositæ ex totâ, & dicto segmento.

Sit linea AB diuisa bifariàm in C, cui adjiciatur DB æqualis BC. Dico quatuor rectangula comprehensa sub AB & segmento BC, vnà cum quadrato CH alterius segmenti AC, æqualia esse quadrato AE, lineæ AD compositæ ex AB, & BD, seu segmento CB.



Demonstratio. Quadratum AE æquale est omnibus suis partibus, nempe rectangulo BQ, DR, GL; item rectangulo composito ex OL, & quadrato MG; quæ omnia rectangula comprehenduntur sub AB & BC., aut lineis illis æqualibus; quadratum AE continet item CH quadratum alterius segmenti AC. Ergo si linea diuidatur, quatuor rectangula comprehensa sub uno segmento, & totâ, vnà cum quadrato alterius segmenti, æqualia sunt quadrato lineæ compositæ ex totâ, & segmento. quod erat demonstrandum.

In numeris idem ostenditur. Sit AB 7 BC 3, AC 4. Erunt quatuor rectangula comprehensa sub 6 & 3, seu 21, 21, 21, 21, vnà cum quadrato AC 4, hoc est, 16; æqualia numero 100, scilicet quadrato lineæ AD compositæ ex AB 7, BD

3, nempe 10. nam 21,21,21, 21, & 16, efficiunt 100.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si linea secetur bifariàm, & non bifariàm; quadrata partium inaequalium, dupla erunt quadrati dimidiae, & quadrati intermedij segmenti.


A C D B

Linea AB diuidatur bifariàm in C, & non bifariàm in D. Dico quadrata partium inæqualium AD, DB, esse dupla quadrati dimidiæ, nempe AC; & quadrati CD intermedij segmenti. Excitetur in C perpendicularis CE, æqualis AC, aut CB; ducanturque EA, EB; excitetur item perpendicularis DF, tum ducatur AF, & FG, parallela CD.

Demonstratio. Cum AC, CE sint æquales, erunt anguli CAE, CEA æquales; & cùm angulus C sit rectus, erunt EAC, AEC semirecti. Idem ostendo de angulis CEB, CBE, & cum in parallelis DF, CE, anguli DFB, CEF sint æquales, (*per* 29.1.) erit DFB semirectus; quare anguli DFB, DBF erunt æquales; & (*per* 6.1) lineæ DF, DB. Item anguli GEF, GFE sunt semirecti, & lineæ GF, GE æquales inter se; est autem GF æqualis CD; denique angulus AEF compositus ex duobus semirectis rectus est. Iam verò quadratum ex AE duplum est quadrati ex AC, cum (*per* 47.1) æquale sit quadratis æqualibus ex AC, CE. Item quadratum ex EF, duplum est quadrati ex GF, aut CD: sed quadratum ex AF, æquale est quadratis ex AE, EF, (*per* 47.1) Ergo quadratum ex AF, duplum est quadratorum ex AC, & CD; sed quadrata ex AD, DF, seu DB, æqualia sunt quadrato ex AF; ergo quadrata ex AD, DB dupla sunt quadratorum ex AC, CD, quod erat demonstrandum.

In numeris. Sit linea AB 16, AC 8, AD 8, DB 2. Erunt quadrata ex AD 8, seu 64.

& DB 2, seu 4, dupla quadratorum AC 5, seu 25 & CD 3, seu 9, nam 25 & 9, seu 34, est dimidia pars numeri 68.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si linea bifariàm diuidatur, & alia addatur; erit quadratum composita ex totâ, & adjunctâ, simul cum quadrato adjunctæ, duplum quadrati dimidiæ, & quadrati compositæ ex adjunctâ, & dimidiâ.

Linea AB bifariàm secetur in C, eique addatur BD. Dico quadratum ex AD compositæ ex totâ AB & adjunctâ BD, simul cum quadrato adjunctæ BD, duplum esse quadrati dimidiæ AC, & quadrati ex CD, compositæ ex dimidiâ, & adjunctâ.

Excitetur in C perpendicularis CE, æqualis AC, itē perpendicularis DF, æqualis CE, ducantur AE, & EB, quæ occurret FD productæ in G, iunganturque EF, AG. Primo ostendam angulos CAE, AEC esse æquales (*per* 5 1) sicut CEB, CBE; atque adeo semirectos esse, sicut & DBG. Sunt ergo DB, DG æquales, sicut & EF, FG.

Demonstratio. Quadratum ex AE, æquale est quadratis æqualibus ex AC, CF (*per* 47.1) ergo est duplum quadrati AC. Quadratum ex EG, æquale est quadratis æqualibus ex EF, FG; ergo duplū quadrati ex EF seu CD; ergo quadrata ex AE, EG, seu solum quadratum ex AG iis æquale; (cum angulus AEG rectus sit) duplum erit quadratorum ex AC, CD: sed quadrato ex AG æqualia sunt quadrata ex AD, DG (*per eandem* 47.) ergo quadrata ex AD, DG, seu BD, dupla sunt quadratorum AC, CD. quod erat demonstrandum.

In numeris idem ostendimus. AB sit 6, AC 3, BD 4, AD erit 10. Erunt quadratum ex AB seu 100, & quadratum ex BD seu 16, dupla quadratorum AC 9.

&

& CD 49 : nam 49 & 9 sunt 58, dimidia pars numeri 116.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Datam lineam ita secare, vt rectangulum comprehensum sub illâ, & minori segmento, æquale sit quadrato alterius segmenti.

Sit linea AB ita diuidenda, vt rectangulum comprehensum sub totâ AB, & minori segmento, æquale sit quadrato maioris segmenti. Fiat lineæ AB quadratum AC, diuidatur AD bifariàm in E, ducaturque EB, fiatque EF æqualis EB; tum supra AF fiat quadratum AG. Dico lineæ AB sectam esse in H vt desideratur. Producatur GH in I. Ostendere debeo rectangulum HC comprehensum sub totâ AB, aut illi æquali BC, & ſub minori ſegmento HB; æquale eſſe quadrato ex AH, ſeu quadrato AG.

Demonſtr. Cùm linea DA ſit diuiſa bifariàm in E, eique ſit addita AF, erit (*per 6.huius*) rectangulũ DG comprehenſum ſub compoſitâ ex totâ AB, ſeu AD, & adjunctâ AF, & ſub-adjunctâ AF, aut illi æquali FG, vna cum quadrato EA, æquale quadrato EF, ſeu EB; ſed quadratum EB æquale eſt quadratis EA, AB (*per* 47.1) ergo rectangulũ DG cum quadrato ex AE, æquale eſt quadrato ex AB, & quadrato ex AE: auferatur vtrimque quadratum AE, erit rectangulum DG, æquale quadrato ex AB, nempe quadrato AC, & auferendo rectangulum commune DH, erit rectangulum HC, æquale quadrato ex AH. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

In triangulo obtusangulo. quadratum lateris oppositi angulo obtuso, erit æquale quadratis reliquorum laterum; & insuper duobus rectangulis, comprehensis sub illo latere, in quod demissa est perpendicularis, & sub lineâ quæ restat ad perpendicularem vsque.


A D C B

Sit triangulum ABC obtusangulum in C, & ex angulo A demittatur perpendicularis AD. Dico quadratum ex AB, æquale esse quadratis AC, CB & duobus rectangulis comprehensis sub BC, CD.

Demonstratio. Quadratum ex AB, æquale est quadratis AD, DB, (*per* 47.1.)

quadratum ex DB, æquale est quadratis DC, CB & duobus rectangulis comprehensis sub BC, CD: (*per* 4. *huius*) ergo quadrarum ex AB, æquale est quadratis AD, DC, CB, & duobus rectangulis BC, CD; pro quadratis AD, DC, substituatur quadratum AC illis æquale(*per* 47.1) erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AC, CB, & duobus rectangulis sub BC, CD. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

In triangulo quôcumque, quadratum lateris oppositi angulo acuto, simul cum duobus rectangulis comprehensis sub illo latere, in quod cadit perdendicularis, & sub lineâ interjecta inter angulum acutum, & perpendicularem; æquale est quadratis reliquorum laterum.

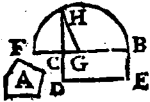
Proponatur triangulum ABC cuius angulus C acutus. Dico quadratum lateris AB oppositi angulo acuto C, vnà cũ duobus rectangulis comprehensis sub latere BC, in quod cadit perpendicularis, & sub DC interjectâ inter perpendicularem, & angulum acutum C, esse æquale quadratis ex AC, BC.

Demonstratio. Cum BC sit diuisa in D, erunt (*per* 7. *huius*) quadrata totius BC, & segmenti DC æqualia duobus rectangulis, sub BC, DC, & quadrato BD: addatur vtrinque quadratũ AD; erunt quadrata BC, DC, AD æqualia duobus rectangulis sub BC, BD, & quadratis BD, DA. Ponatur pro quadratis DC, AD, quadratum AC illis æquale (*per* 47.1) & pro quadratis BD, DA, quadratum AB illis etiam æquale: erunt igitur quadrata ex BC, AC, ęqualia quadrato AB, & rectangulo bis comprehenso sub BC, DC. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Dato rectilineo æquale quadratum construere.



Sit datum rectilineum A, cui æquale quadratum construendum est. Fiat (*per* 45.1) rectilineo A, æquale parallelogrammum rectangulum BCDE, cuius si latera BC, CD essent æqualia, habemus intentum. Si verô sint inæqualia, producatur BC, ita vt linea CF æqualis sit lateri CD: linea BF diuidatur bifariàm in G. tùm ex G vt centrô interuallô GF, aut BG, fiat semicirculus FHB, producatur DC, in H. Dico quadratum lineæ CH, æquale esse rectangulo BCDE, seu rectilineo A; ducatur HG.

Demonstratio. Quoniam BF diuisa est bifariàm in G, & non bifariàm in C, erit (*per* 5. *huius*) rectangulum comprehensum sub BC, CF, seu CD, hoc est, rectangulum BD, vnà cum quadrato CG, æquale quadrato GF, aut GH; sed quadratum GH (*per* 47.1) æquale est quadratis CG, CH; ergo rectangulum BD, vnà cum quadrato CG æquale est quadratis *CG*, *CH*; auferatur vtrinque quadratum *CG*, erit rectangulum BD æquale quadrato *CH*; ergo quadratum *CH*, æquale est rectilineo A.

ELEMENTORVM EVCLIDIS

LIBER TERTIVS.

DEFINITIONES.

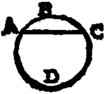
1. Æquales circuli ſunt, quorum diametri, aut ſemidiametri ſunt æquales.

2. Linea circulum tangens eſt, quæ ei occurrit, nec tamen vlterius producta eum ſecat. *vt linea AB.*

3. Circuli ſe tangunt ſiue interiùs, ſiue exteriùs, qui ſibi occurrunt, nec tamen ſe ſecant. *tales ſunt AB, AC.*

4. 

Lineæ in circulo æqualiter à centro distant, cum perpendiculares ad ipsas ex centro ductæ, sunt æquales; *vt linea AB*, CD: *nam perpendiculares EF, EG sunt æquales.*

5. 

Segmentum circuli est figura comprehensa peripheriâ circuli, & lineâ rectâ. *vt figura ABC, aut ADC.*

6. Angulus segmenti, est angulus mixtus, quem peripheria circuli cum lineâ rectâ comprehendit, *vt Angulus BAC, aut DAC.*

7. 

Angulus in segmento esse dicitur, in quo lineæ eum comprehendentes continentur, *vt Angulus FGH, dicitur esse in segmento FGH.*

8. Angulus dicitur peripheriæ, aut arcui insistere, cui opponitur, *vt angulus* FGH *insistit peripheria FIH.*

9. 

Sector est figura comprehensa duabus semidiametris, & arcu inter illas intercepto. *talis est figura LKM*.

PROPOSITIO I.

Problema.

Dati circuli centrum reperire.

Sit inueniendum centrum circuli ACB, ducatur vtcumque linea AB, quæ diuidatur bifariàm in D, exciteturque in D perpendicularis EC, quæ diuidatur bifariàm in F. Dico punctum F esse centrum circuli.

Demonstr. Si centrum est in linea EF, non potest esse aliud, quam F, diuidens EC bifariàm; alioquin non omnes lineæ ductæ à centro ad peripheriam essent æquales. Quod verò centrum sit in lineâ EC, ita ostēdo. Sit enim, si fieri potest, in G, ducantur GA,GD,GB.In triangulis ADG, GDB, cum latera GA, GB, (*per definitionem circuli*) sint æqualia : item AD, DB, facta sint æqualia & DG sit commune ; erunt anguli GDB,ADG ęquales(*per* 8.1.) quod est absurdum, cum iam FDA, FDB facti sint æquales.

Coroll. In circulo linea diuidens aliam bifariàm , & perpendiculariter , continet çentrum circuli.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Linea recta coniungens duo puncta circumferentiæ circuli,tota intra circulum est.

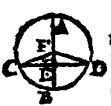
Linea AB coniungat duo puncta A & B circumferentiæ circuli Dico illam totam intra circulum cadere:ostendo enim omnia ejus puncta esse intra circulum : vt si assumatur punctum C, & ducantur ex centro D, lineæ DA, DB, CD.

Demonstratio. In triangulô ADB latera DA, DB sunt æqualia; ergo (*per* 5.1.) anguli A & B sunt æquales; sed angulus DCB maior est angulo A (*per* 16.1.) ergo angulus DCB maior est angulo B; ergo in triangulô DCB, latus DB oppositum maiori angulo (*per* 19.1.) maius erit latere DC; ergo peripheria magis distat à centro D quam punctum C. idem de aliis omnibus punctis lineæ AB demonstrari potest.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si diameter, lineam non per centrum ductam, bifariàm secet; erit perpendicularis ad illam: & vicissim si fuerit perpendicularis, eam bifariàm secabit.



Diameter AB lineam CD, non transeuntem per centrum, bifariàm secet in E. Dico AB esse perpendicularem ad CD: ducantur FC, FD.

Demonstrat. In triangulis CEF, EFD, omnia latera sunt æqualia; ergo (*per* 8.1.) anguli ad E sunt æquales: ergo AB perpendicularis est ad CD.

Vicissim si diameter AB, fuerit perpendicularis ad CD. Dico CD diuisam esse bifariàm in E.

Demonstratio. Cum anguli in E sint

recti, erit quadratũ ex FD æquale quadratis ex FE, ED (*per* 47. 1.) pariter quadratũ ex FC æquale est quadratis, ex CE, EF: & cum lineæ CF, FD sint æquales, erunt quadrata ex CE, EF æqualia quadratis ex EF, ED; & ablatô communi EF, erunt quadrata ex CE, ED æqualia, & consequenter lineæ. Quod erat demonstrandũ.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

In circulo duæ lineæ extra centrum, se innicem bifariàm non secant.

Duæ lineæ AB, CD, se secent in puncto F, extra centrum. Dico eas se inuicem bifariàm non secare. Et primò si vnà per centrum transiret, clarum est quod hæc bifariàm non secaretur extra centrum: si verò neutra per centrum transeat vt AB, CD; ducatur ex centrô E ad concursum F, linea EF.

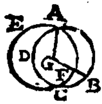
Demonstratio.

Demonstratio. Si linea CD bifariàm secatur, erunt anguli EFC, EFD recti (*per præcedentem*) pariter si linea AB bifariàm secatur, EF ad eam perpendicularis erit, eruntque anguli AFE, EFB recti; igitur anguli EFA, EFC recti erunt, & consequenter æquales, pars & totum, quod est absurdum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Duo circuli se mutuò secantes non habent idem centrum.



Duo circuli ABCD, AFCE se secent in A. Dico eorum non esse idem centrum. Sit enim, si fieri potest, eorum idem centrum G, ducanturque lineæ GA, GB, hæ (*per definitionem circuli*) essent æquales; æquales ité essent GA, GF; ergo GB, GF essent æquales, pars & totum, quod est absurdum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Duo circuli interiùs se tangentes, non habent idem centrum.

Circuli BD, BC interiùs se tangant in B. Dico eorum non esse idem centrum. Sit enim, si fieri potest, eorum idem centrum A, ducantur AB, AC.

Demonstr. *per definitionem circuli*, essent lineæ AB, AC æquales; essent item lineæ AB, AD æquales: ergo essent AD, & AC æquales, pars & totum, quod est absurdum.

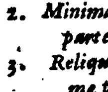
PAOPO

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si intra circulum ex alio puncto quàm centro ducantur plurimæ lineæ ad circumferentiam.

1. *Maxima omnium erit, quæ per centrum transit.*
2. *Minima erit eiusdem reliqua, ex aliâ parte.*
3. *Reliquarum ea maior erit, quæ maximæ propinquior.*
4. *Duæ tantum possunt duci æquales.*



Ex puncto A, quod non sit centrum, ducantur plurimæ lineæ usque ad circumferentiam circuli, nempe AF, AE, & AC, quæ per centrum B transeat.

Dico primò, AC omnium esse maximam: ostendo eam maiorem esse lineâ AF: ducatur BF.

Demonstr. In triangulo ABF, latera AB, BF maiora sunt reliquo AF; (*per* 20.1.) sed cum BF, BC sint æquales, additâ communi AB, erunt ABC, ABF æquales; ergo ABC maior est, quam AF. Idem ostendam de BE.

Dico 2. Reliquam AD, minimam esse quàm alia quælibet EA.

Demonstratio. In triangulo EAB, latera EA, AB maiora sunt reliquo EB, seu BD illi æquali, & ablato vtrinque latere BA, erit AE maior, quam DA. Idem dicendum de aliis.

Dico 3. AF propinquiorem maximæ AC, maiorem esse quam AE remotiorem.

Demonstr. In triangulis FBA, EBA, cum latera BF, BE sint æqualia, latus AB commune, & angulus ABF maior, quàm ABE, erit (*per* 24.1.) basis AF, maior quàm AE.

Dico 4 Duas tantum posse duci æquales, ex puncto A: Fiat angulus ABG, æqualis ABE, ducanturque AG, AE.

Demonstr. In triangulis ABE, ABG (*per* 4. 1.) bases AE, AG sunt æquales.

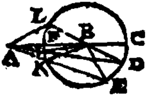
Quæcumque autem alia ducatur ex parte G, aut magis, aut minùs accedet ad maximam quam AG; ergo illâ aut maior, aut minor erit: idem dicendum, si ducatur ad partes E.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si ex puncto extra circulum ad eius circumferentiam ducantur plurima lineæ.

1. *Earum, quæ in cauam peripheriam cadunt, maxima est, quæ per centrum transit.*
2. *Reliquarum ea maior est, quæ maximæ propior.*
3. *In convexam peripheriam cadentium, ea minima est, quæ producta per centrum transit.*
4. *Quæ minimæ propior, ea minor est.*
5. *Non plures quam duæ æquales, siue in cauam, siue in conuexam duci possunt.*



Ex puncto A, in concavam peripheriam CDE, cadant plurimæ lineæ, AC per centrum B transiens, AD, AE.

Dico primò. AC omnium esse maximam; ducatur BD.

Demonstratio. In triangulo ABD, latera AB, BD, reliquo AD maiora sunt (*per* 20.1.) & cum BC, BD sint æquales, erit ABC æqualis lateribus AB, BD; ergo ABC maior est, quam AD.

Dico 2. AD propinquiorem maximæ AC, quàm sit AE, maiorem esse AE.

Demonstratio. Cum triangula ABD, ABE habeant latera BD, BE æqualia, AB sit commune, & angulus ABD, angulo ABE sit maior; erit basis AD maior basi AE (*per* 24.1.)

Dico 3. In conuexam peripheriam cadentium, AF minimam esse: ducatur BI.

Demonstrat. In triangulo AIB, latera AI IB, reliquo AB sunt maiora; auferantur BF, BI æquales, erit AF minor, quam AI.

Dico 4. AI minorem esse, quam AK: ducatur BK.

Demonstrat. In triangulis AIB, AKB, (*per* 21.1.) latera AI,IB minora sunt lateribus AK, KB; & subtrahendo æqualia latera BI, BK, erit AI, minor quam AK.

Dico 5. Duas tantùm duci posse æquales: fiant anguli ABL, ABK æquales, ducanturque AL, AK.

Demonstr. In triangulis ABL, ABK (*per* 4.1.) bases AK, AL sunt æquales, nec alia duci potest, quæ non accedat ad AB, aut recedat ab eâ, magis quàm AK, AL; ergo quæ non sit maior, aut minor.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Punctum intra circulum, à quo in circumferentiam ducuntur tres lineæ æquales, centrum est.

Si enim illud punctum esset aliud à centro, ab eo in circumferentiam duæ tantùm duci possent lineæ æquales (*per* 7.*huius*) contra suppositionem.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Duo circuli non se secant in pluribus, quam duobus punctis.

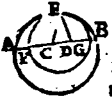
Si enim fieri potest circuli AFBDC, ABEDC, se secent in tribus punctis A, B, C. Inuentô centrô circuli AFBD, quod sit G, ducantur lineæ GA,GC,GB, quæ æquales erunt.

Demonstrat, Tres lineæ æquales GA, GB,GC cadunt ex puncto G, in circumferentiam vtriusque circuli : ergo (*per precedentem*) G est vtriusque centrum (*contra prop. 5. huius.*)

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si duo circuli interius se tangant, linea ducta per eorum centra per contactum transit.



Sit enim, si fieri potest, linea AB, quæ ducatur per circulorum centra C, D, nec tamen transeat per contactum E: Sit centrum minoris circuli C, & maioris D, ducantur CE, DE.

Demonstratio. Lineæ CF, CE, essent æquales; ergo additâ communi CD, tota DF æqualis erit duabus CE, CD, quæ (*per* 20. 1.) reliquâ ED sunt maiores; ergo linea DF maior est quàm DE: sed cum punctum D sit etiam centrum circuli maioris, erunt DA, DE æquales: sed DF minor est quam DA: ergo DF minor erit, quam DE, quod est absurdum, cum iam ſit oſtenſa maior.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si duo circuli ſe exteriùs tangant, linea, centra eorum coniungens, per contactum tranſit.

Linea AB non tranſiens per contactum, ſi fieri poteſt, centra A, & B coniungat: ducantur AC, BC.

Demonſtratio. Sequeretur in triangulo ACB, duo latera AC, CB, reliquô AB eſſe minora (*contra prop.* 20.1.) eſſent enim AC, AD; BC, BE æquales: ergo AB, maior eſſet quam AC, AD.

PROPO

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Circuli se tangunt in vno tantum puncto.

Primò. Si duo circuli se interiùs tangant; dico eos se tangere in vno tantum puncto. Ducatur enim linea BA, per eorum centra A & B, quæ per contactum C transibit: si dicantur se tangere adhuc in puncto D. Ducantur lineæ *AD*, BD.

Demonstrat. Lineæ AD, AC ex eodem centro A ductæ, essent æquales; & additâ communi AB, essent BA, AD, æquales lineæ BC; sed BA, AD, (*per* 20.1.) maiores sunt quam BD: ergo BC maior esset quam BD; quod est absurdum, cùm ex eodem centro B, ducantur ad circumferentiam eiusdem circuli.

Iam verò circuli ſe tangant exteriùs, linea AB coniungens centra, tranſibit per contactum (*per præcedentem*) ſi dicantur circuli ſe tangere in puncto D. Ducantur lineæ AD, DB; ſequeretur lineas AD, BD æquales eſſe lineæ AB, cùm tamen (*per* 20. 1.) illâ ſint maiores.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

In circulo æquales rectæ, æqualiter à centro diſtant; & viciſſim æqualiter à centro diſtantes, æquales ſunt.

Sint lineæ AB, CD æquales, ad quas ex centro E, ducantur perpendiculares EG, EF, earum nempe diſtantiæ à centro E. Dico EG, EF æquales eſſe, ducantur EA, EC.

Demonſtratio. Perpendiculares EG,

EF, ex centro E ductæ (*per 3. huius*) diuidunt bifariàm lineas AB, CD : ergo AG, CF æquales sunt. Quare in triangulis rectãgulis EGA, EFC, erunt quadrata ex EG, GA æqualia quadrato ex EA ; & quadrata ex EF, FC, æqualia quadrato ex EG; (*per* 47. 1.) & cũ quadrata ex EA, EC sint æqualia; erunt quadrata ex EG, GA æqualia quadratis ex EF, FC; & subductis equalibus quadratis GA, FC, restabunt quadrata æqualia GE, FE : ergo lineæ EG, EF sunt æquales.

Pariter si supponantur lineæ perpendiculares EG, EF æquales, earum quadrata erunt æqualia, ostendamque vt priùs, quadrata ex EG, GA æqualia quadratis ex EF, FC ; & subductis æqualibus quadratis ex EG, EF, restabunt quadrata AG, FC æqualia : & consequenter dimidiæ AG, FC æquales sunt : ergo totæ AB, BD.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Linearum circulo inscriptarum maxima est diameter: cæterarum, quæ est centro propior, ea maior est.

Inscribantur circulo plurimæ lineæ. Dico primò, diametrum AB esse omnium maximam; sit enim alia quæcumque CD: ducantur EC, ED,

Demonstr. In triangulo CED, latera CE, ED, reliquo CD maiora sunt (*per* 20. 1.) sed diameter AB æqualis, est lineis CE, ED; (sunt enim CE, AE, ED, EB æquales) ergo AB maior est, quam CD.

Secundò. Linea GI magis distet à centro E, quam CD, hoc est, ductis perpendicularibus EF, EH; sit EH, maior quam EF. Dico GI minorem esse quam CD.

Dem. Quadrata ex EF, FC (*per* 47. 1.) æqualia sunt quadrato ex CE, sicut quadrata EH, GH, æqualia sunt quadrato ex EG: sunt autẽ EC, EG æquales: ergo quadrata CF, FE, æqualia sunt quadratis EH, HG: & cum quadratum EH, sit maius quam EF, restabit quadratum CF, maius quàm GH; & consequenter tota CD, maior quam GI.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Perpendicularis ad extremitatem diametri, tota extra circulum cadit, eumque tangit; neque inter ipsam & circulum, alia recta ad contactum ducetur, quin circulum secet.

Ad diametrum AB, per extremitatem A, sit ducta perpendicularis AC. Dico primò totam lineam extra circulum cadere, ſeu omnia eius puncta, vt E, eſſe extra circulum. Ducatur DE.

Demonſtratio. In triangulo EAD, cùm angulus DAE rectus ſit, & DEA acutus; erit (*per* 19.1.) linea DE maior, quam DA: ergo DE vltra circumferentiam producitur.

Dico 2. Nullam infra AC, duci poſſe ad punctum A, quæ circulum non ſecet. Sit enim talis FA; quia angulus FAD acutus eſt, ſi ducatur ad FA perpendicularis, hæc cadet ad partes anguli acuti DAF. Alioquin ſi caderet ad partes anguli obtuſi, duo anguli eiuſdem trianguli maiores eſſent duobus rectis, (*cōtra* 17.1.) Sit igitur DG, cùm angulus DGA ſit rectus, & DAG acutus: erit AD maior quam DG: ergo DG ad circumferentiam non pertingit, eſtque punctum G intra circulum.

Reliqua quæ deducuntur ex hac propoſitione ſunt fallacia, & ſophiſtica: quale eſt iſtud; quod angulus contingentiæ, compoſitus ex circumferentiâ circuli EA, & tangente AC, ſit minor quocumque angulo *rectilineo; nam quantuluscumque accipiatur angulus CAF; semper circumferentia videtur comprehendere angulum minorem.* Dico *ergo angulum non esse quantitatem, cùm idem angulus maneat, etiamsi minuantur lineæ eum comprehendentes. Cùm igitur angulis tribuimus prædicata propria quantitatis, vt cum dicimus, vnum angulum, aliô maiorem, esse duplum, triplum; diuidi in duas, tres partes; id intelligendum potiùs est de eorum mensuris, quam de ipsis angulis, hoc sensu. Sit angulus BAC, quem volumus diuidi bifariàm, lineâ AD: intelligimus tantùm, quòd quicumque arcus fiet ex A, vt centrô, diuidetur bifariàm à linea AD.*

Cùm igitur mensura anguli contingentiæ nulla sit, ideò angulus contingentiæ, incomparabilis est cum angulo rectilineo: nam in figura propositionis, si ex A, vt centrô, fierent plurimi arcûs; essent aliqui intercepti, inter tangentem, & circumferentiam, maiores, quam intercepti inter eamdem tangentem, & lineam AF; alij minores; quare non potest concludi angulus contin-

gentia, esse minor, sed secundùm quid maior, secundùm quid minor. Idem dico de tactu globi, qui fit in punctô mathematico, intellecto, vt explicuimus initiô, quod monere volui, ne demonstrationes, mathematica tricis philosophicis implicentur.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

A dato puncto lineam ducere, quæ circulum tangat.

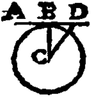
Ex punctô A ducenda sit linea, quæ tangat circulum DE; ducatur AB per centrum circuli: item ex B, interuallô BA, circulus AC; & per D ad BA ducatur perpendicularis DC; ducatur item CB; & iungatur EA. Dico eam circulum tangere.

Demonstr. Triangula AEB, CDB, habent angulum B communem, latera BE, BD; BA, BC æqualia: ergo (*per* 4.1.) habent angulos BDC, BEA, oppositos lateribus æqualibus CB, BA, æquales: sed BDC factus, est rectus, & CD circulum tangit. Ergo BEA rectus est: & AE circulum tanget (*per 16. huius*) quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si Recta circulum tangat; linea à centro ad contactum ducta, ad eam perpendicularis erit.



Linea AB circulum tangat in B. Dico lineam CB, ad eam esse perpendicularem: si enim non est, ducatur ad eam perpendicularis CD.

Demonstrat. Cùm angulus D rectus sit, erit CBD acutus; (*per 32. 1.*) ergo (*per 19. 1.*) linea CB opposita angulo maiori, maior erit quam CD; quod est absurdum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Perpendicularis ad tangentem ducta per punctum contactûs, transit per centrum.

Linea AB ducta per contactum A, sit perpendicularis ad tangentem AC. Dico eam per centrum transire; si enim centrum sit extra illam vt in D, ducatur DA ad contactum A.

Demonstratio. Linea DA (*per præcedentem*) esset perpendicularis ad AC; ergo angulus DAC rectus est: sed supponitur BAC esse rectus: ergo DAC, BAC essent æquales; pars & totum, quod est absurdum.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Angulus ad centrum, duplus est anguli ad peripheriam eidem arcui insistentis.

Anguli ABC, ADC, eidem arcui CA insistant. Dico angulum ABC in centro B positum, duplum esse anguli CDB in peripheriâ. Triplex potest esse casus, primus erit si ABD sit vna linea recta.

Demonstr. In triangulo BDC, angulus externus ABC, duobus internis C & D æqualis est, (*per* 32.1.) sed lineæ BD, BC æquales sunt: ergo (*per* 5.1.) anguli D & C sunt æquales: ergo angulus ABC, anguli D duplus est.

In ſecundo caſu latera non coincidunt. Ducatur linea DBE.

Demonſtr. (*Per partem præcedentem.*) angulus EBA, anguli ADB duplus eſt; item angulus CBE, anguli CDB duplus eſt: ergo totalis ABC, totius ADC duplus eſt.

In tertio caſu latera ſe ſecant. Ducatur linea DBE,

Demonſtrat. (*Per partem primam*) angulus CBE, anguli CDE duplus eſt, & (*per eandem*) angulus EBA, anguli BDA, eſt duplus; quibus ſublatis, reliquus ABC, reliqui ADC duplus erit.

PROPO

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

In circulo, qui in eôdem ſegmento ſunt anguli, æquales ſunt; ſicut & qui eidem arcui inſiſtunt.

Sint primò. Duo anguli ABC, ADC, in eodem ſegmento ABDC, quod ſuperet ſemicirculum. Dico eos eſſe æquales.

Demonſtr. Tam angulus B, quam D (*per præcedentem*) ſunt dimidia pars anguli AEC: ergo ſunt æquales.

Secundò. Sint anguli ABC, ADC in eodem ſegmento circuli ABDC, quod non ſuperet ſemicirculum. Dico illos eſſe æquales.

Demonſtratio. Omnes anguli trianguli AEB, æquales ſunt, omnibus trianguli EDC (*per* 32.1.) ſed anguli BEA, DEC oppositi ad verticem, sunt æquales, & (*per primam partem huius*) anguli BAD, BCD, in eodem segmento BACD superante semicirculum, sunt æquales: ergo reliqui ABE, ADC sunt æquales.

Vides angulos ABC, ADC insistere eidem arcui AC: ergo anguli eidem arcui insistentes sunt æquales.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Quadrilatera circulo inscripta, habent angulos oppositos æquales duobus rectis.

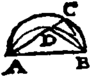
Proponatur quadrilaterum ABCD, inscriptum circulo. Dico eius angulos oppositos BAD, BCD æquiualere duobus rectis. Ducantur diagonales AC, BD.

Demonstr. Trianguli ABD omnes anguli, æquiualent duobus rectis (*per* 31.1.) igitur si loco anguli ABD, ponas angulum ACD illi æqualem (*per præcedentem*) & loco anguli ADB, angulum ACB, illi pariter æqualem; erit angulus BAD, cum duobus ACD ACB, id eſt, cum totali BCD, æqualis duobus rectis. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Super eâdem rectâ, conſtituta ad eaſdem partes duo ſegmenta circulorum ſimilia, æqualia ſunt.



Super rectâ AB conſtituantur ad eaſdem partes duo ſegmenta ſimilia, id eſt, quæ contineant angulos æquales. Dico illa congruere, & eſſe æqualia; ſi enim non congruunt; ducatur linea AC vtrumque ſecans in D & C; ducantur item lineæ BD, BC.

Demonſtratio. Angulus ADB externus, maior est angulo ACB ; (*per* 21. 1.) ergo hæc segmenta non continent angulos æquales, contra suppositionem.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Super æqualibus rectis, similia circulorum segmenta, æqualia sunt.

Super æqualibus lineis AB, CD, constituta sint similia circulorum segmenta AFB, CED. Dico illa esse æqualia.

Demonstratio. Intelligatur linea AB, superponi lineæ CD ; cùm æqualis sit, cum illâ congruet ; & segmentum AFB, congruet cum CED ; alioquin super eâdem lineâ AB constituerentur duo segmenta similia, & inæqualia. *contra præcedentem.*

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datô arcu circuli, totum circulum describere.

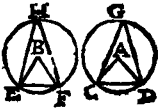
Proponatur arcus ABC, ſitque perficiendus totus circulus, inuento ſcilicèt eius centro. In eo arcu ſume tria puncta A,B,C: iunge lineas AB, BC, eaſque diuide bifariàm in D & F; & excita in punctis D, & F perpendiculares DE, FE. Dico punctum interſectionis E, eſſe centrum circuli.

Demonſtr. (*Per coroll. propoſ.* 1. *huius*) centrum circuli eſt in linea DE, item in linea FE: ergo eſt in puncto E.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

In circulis æqualibus, æquales anguli, siue ad centrum, siue ad peripheriam, æqualibus arcubus insistunt.



Sint primò. In circulis æqualibus, anguli æquales A, & B in centro. Dico arcus CD, EF, quibus insistunt, æquales esse: si enim arcus CD maior, aut minor esset, quam arcus EF (cùm arcus sint mensuræ angulorum) angulus etiam A, maior aut minor esset, quam B.

Quòd si anguli H & G ad peripheriam sint æquales, erunt eorum dupli B, & A æquales: ergo arcus CD, EF, erunt æquales.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

In circulis æqualibus, anguli, siue ad centrum, siue ad peripheriam, qui insistunt arcubus æqualibus, æquales sunt.

Primò. Anguli A & B, in circulis æqualibus insistant arcubus æqualibus CD, EF. *(Vt in præcedenti)* Dico angulos A & B esse æquales; cùm eorum mensuræ, nempe arcus CD, EF supponantur æquales. Quod si anguli A, & B fuerint æquales, erunt eorum dimidij, nempe H & G etiam æquales.

PROPOSITIO XXVIII

Theorema.

In circulis æqualibus, æquales lineæ auferunt & relinquunt æquales arcus.

In circulis æqualibus sint lineæ AB, CD æquales. Dico arcus CID, AHB, esse æquales; item arcus AKB, CLD.

Demonstratio. Cum circuli sint æquales, erunt semidiametri CF, AE æquales; quare in triangulis AEB, CFD, cùm latera CF, FD; AE, EB sint æqualia, & lineæ AB, CD supponantur æquales: erunt (*per* 8.1.) anguli F & E æquales, & (*per* 26.) arcus AHB, CID, sunt æquales; qui subtracti ex æqualibus circumferentiis, relinquunt arcus AKB, CLD æquales.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

In circulis æqualibus, lineæ, quæ subtendunt arcus æquales, sunt æquales.

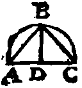
In circulis æqualibus, sint æquales arcus AHB, CID (*vt in præcedenti.*) Dico lineas AB, CD æquales esse.

Demonstratio. Cùm enim arcus AHB, CID sint æquales, erunt (*per* 27.) anguli E & F æquales; quare in triangulis AEB, CFD, cum latera AE, CF, EB, FD sint æqualia, & anguli E & F æquales, erunt (*per* 4. 1.) bases AB, CD æquales.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Datum arcum bifariàm secare.



Sit datus arcus ABC bifariàm dividendus, ducatur AC, quæ bifariàm dividatur in D, ducaturque perpendicularis BD. Dico arcus AB, BC esse æquales; junganture AB, BC.

Demonstr. In triangulis ADB, BDC, cùm latera AD, DC facta sint æqualia, & DB commune. Item anguli in D æquales: erunt (*per* 4.1.) lineæ AB, BC æquales, & (*per præcedentem*) arcus AB, BC æquales.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Angulus in ſemicirculo, rectus eſt; in ſegmento ſuperante ſemicirculum, acutus; in ſegmento minore, obtuſus.

Angulus ABC ſit in ſemicirculo. Dico illum rectum eſſe.

Demonſtr. In triangulo ABD, latera AD, DB ſunt æqualia: ergo & anguli DAB, DBA æquales erunt (*per* 5.1.) pariter anguli DBC, DCB ſunt æquales: ergo anguli A & DCB, æquales ſunt duobus ABD, DBC, ſeu angulo totali ABC: quare angulus ABC, erit media pars omnium angulorum trianguli ABC; qui cùm ſint æquales duobus rectis (*per* 32. 1.) erit ABC rectus.

Secundò. Angulus BEC sit in segmento minori BEC. Dico illum esse obtusum.

Demonstr. In quadrilatero BACE, anguli oppositi A & E æquiualent duobus rectis (*per 22. huius*) sed angulus A est minor recto, cùm BDC rectus sit: ergo angulus E erit obtusus.

Tertiò Patet angulum A in segmento maiori BAC esse acutum.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Linea ducta per contactum, secans circulum, cum tangente angulos comprehendit æquales iis, qui in alternis segmentis fiunt.

Linea BD per contactum B ducta, circulum secet. Dico quod angulus ABD, quem cum tangente ABC comprehendit æqualis erit angulo E, qui fit in alterno ſegmento BFD, & quod angulus CBD, eſt æqualis angulo BFD, alterni nempe ſegmenti.

Primò quidem, ſi BD per centrum tranſiret, eſſet perpendicularis ad tangentem CA, & duo ſegmenta forent ſemicirculi, & conſequenter anguli in iis recti.

Si verò BD non tranſeat per centrum; ducatur BE per centrum, junganturque DE, DF, BF.

Demonſtratio. Linea BE perpendicularis eſt ad CA; igitur angulus EBA, ſeu anguli EBD, ABD æquiualent vni recto; ſed in triangulo BDE, cùm angulus BDE ſit rectus, anguli EBD & E æquiualent vni recto: quare ſubtractô communi EBD, erunt anguli ABD & E æquales. quod erat demonſtrandum.

Secundò. Cum ABD, CBD æquiualeant duobus rectis, (*per* 15.1.) ſicut in quadrilatero BFDE, oppoſiti E & F æquiualent etiam duobus rectis (*per* 22.*huius*) & anguli ABD, & E, ſint oſtenſi æquales; erunt CBD & F æquales.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Super datâ lineâ, segmentum circuli describere, capiens angulum dato æqualem.

Proponatur linea AB, supra quam describendum sit segmentum circuli, capiens angulum æqualem dato angulo CED; fiat angulus BAF æqualis angulo CDE; tum in puncto A ad AF, ducatur perpendicularis AG, & in puncto B fiat angulus ABH, æqualis angulo BAH. Dico quod si ex H, vt centro, interuallô HA, describatur circulus, illius segmentum BIA, capiet angulum BIA, æqualem angulo CDE.

Demonstrat. Cùm anguli HBA, HAB sint æquales; erunt (*per* 6.1.) lineæ HB, HA æquales; ideoque circulus descriptus ex centro H, interuallô HA, transit per B.

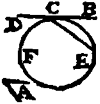
Secundò, linea FA (*per* 16.) tanget circulum: ergo (*per præcedentem*) angulus BAF, seu CDE illi æqualis, æquabitur angulo segmenti alterni BIA; quod faciendum erat.

Si daretur angulus obtusus LDE, operandum esset quasi pro acuto CDE; nam angulus, qui fieret in segmento AKB, æqualis esset angulo MAB.

Denique si angulus propositus esset rectus, supra AB describendus esset semicirculus.

PROPOSITIO XXXIV.
Problema.

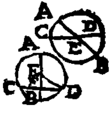
Ex dato circulo, abscindere segmentum capiens angulum dato æqualem.



Proponatur circulus CEF, è quo abscindendum est segmentum capiens angulum æqualem angulo dato A. Ducatur tangens BD (*per* 17.) fiatque angulus BCE æqualis angulo A: segmentum alternum CFE, capiet angulum æqualem angulo BCE, seu angulo A. Si angulus propositus rectus esset, ducenda esset diameter circuli.

PROPOSITIO XXXV.
Theorema.

Si in circulo duæ lineæ se secuerint, erit rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale comprehenso sub segmentis alterius.

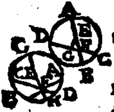


Primò. Se secent hæ lineæ per centrum E, cùm quatuor lineæ AE, EB, CE, ED æquales sint: clarum est rectangulum AE, EB æquari comprehenso, sub CE, ED.

Secundò. AB transeat per centrum E, diuidatque CD bifariàm in F, & consequenter perpendiculariter. Dico rectangulum AFB, æquari rectangulo CED, seu quadrato FD.

Demonstr.

Demonstr. Cùm linea AB diuisa sit bifariàm in E, & non bifariàm in F, erit (*per* 5.2.) rectangulum AFB, vnà cum quadrato EF, æquale quadrato EB, seu ED: sed quadratum ED, (*per* 47.1.) æquale est quadratis EF, FD: ergo rectangulum AFB, vnà cum quadrato EF, æquatur quadratis EF, FD: & ablatô communi quadrato EF, rectangulum AFB æquabitur quadrato FD, seu rectangulo CFD.



Tertiò. Linea AB per centrum E transeat; sed diuidat inæqualiter lineam CD. Dico rectangulum AFB, æquari rectangulo CFD. Ducatur EG perpendicularis ad CD, quæ (*per* 3.) eam bifariàm diuidet in G, eruntque GD, GC æquales.

Demonstrat. Cùm AB diuisa sit bifariàm in E, & non bifariàm in F, erit (*per* 5.2.) rectangulum AFB cum quadrato EF, æquale quadrato EB, seu DE. Pro EF repone quadrata EG, GF illi æqualia (*per* 47.1.) & pro quadrato DE quadrata EG, GC illi æqualia; eritque rectangulum AFB cum quadratis EG, GF ; æquale quadratis EG, GC ; & ablato GE, erit rectangulum AFB cum quadrato GF, æquale quadrato GC : sed pariter cùm linea CD, sit diuisa bifariàm in G, & non bifariàm in F, erit rectangulum CFD, cum quadrato GF ; æquale, quadrato CG ; (*per 5. 2.*) ergo rectangulum AFB, cum quadrato GF ; æquale est rectangulo CFD, cum quadrato GF ; quô ablatô restat rectangulum AFB, æquari rectangulo CFD.

Denique duæ AB, CD secent se vtcumque. Dico rectangulum CFD, æquari rectangulo AFB : ducatur per centrum E, linea EFH.

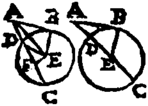
Demonstr. Tam rectangulum AFB, quam CFD (*per partem præcedentem*) æquantur rectangulo GFH : ergo æquantur inter se, quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si à puncto extra circulum, ducantur tangens, & secans; erit quadratum tangentis, æquale rectangulo comprehenso sub totâ secante, & exteriori lineâ.

Ex puncto A ducatur linea AB tangens circulum, & AC secans, quæ primò transeat per centrum E. Dico quadratum lineæ AB, æquale esse rectangulo comprehenso sub AC, AD: ducatur linea BE.



Demonstr. Cùm linea DC bifariàm diuidatur in E, eique adiiciatur AD, erit (*per* 6.2.) rectangulum sub AC, AD, vnà cum quadrato DE, aut EB, æquale quadrato AE; seu quadratis AB, BE illi æqualibus (*per* 47.1.) ergo rectangulum CAD, vnà cum quadrato BE, æquatur quadratis AB, BE; & ablatô communi quadratô EB, restat rectangulum CAD, æquari quadrato AB.

Secundò. Secans AC non transeat per centrum E: ducatur AE, ED, & EF perpendicularis ad AC, eritque (*per* 3.) DC diuisa bifariàm in F. Dico quadratum AB, æquari rectangulo CAD.

Demonstr. Cùm linea CD diuisa sit bifariàm in F, eique addita sit AD; erit (*per* 6.2.) rectangulum CAD vnà cum quadrato DF, æquale quadrato FA. Addatur vtrinque quadratum FE, eritque rectangulum CAD, cum quadratis DF, FE; aut cum quadrato ED seu EB illis æquali (*per* 47.1.) æquale quadratis AF, FE, seu quadrato AE illis æquali, aut quadratis AB, BE, illi æqualibus, (*per* 47.1.) ergo rectangulum CAD, cum quadrato EB, æquale est quadratis AB, BE; & ablatô BE restat rectangulum CAD, æquale quadrato AB; quod erat demonstrandum.

Coroll. 1. Si plures ab eodem puncto A ducantur secantes, rectangula compre-

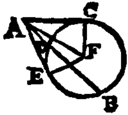
Kenſa ſub ſecantibus, & exterioribus lineis, erunt æqualia, quia ſunt æqualia quadrato tangentis.

Coroll. 2. Si duæ ducantur tangentes ab eodem puncto, illæ æquales erunt.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si Rectangulum comprehenſum ſub ſecante, & exteriori lineâ, fuerit æquale quadrato lineæ in circulum incidentis; hæc linea erit tangens.



Sit ducta ſecans AB, & ex puncto A alia AC, quæ in circulum incidat; ſitque rectangulum BAD æquale quadrato AC. Dico AC eſſe tangentem, ex puncto A ex aliâ parte, ducatur tangens AE (*per* 17.) iunganturque FE, FC.

Demonſtr. Cùm AE ſit tangens, erit

(*per præcedentem*) rectangulum B A D æquale quadrato AE; ſed dicitur eſſe æquale quadrato AC; ergo quadrata AC, AE æqualia ſunt, & conſequenter lineæ æquales: quare in triangulis AEF, ACF, cùm omnia latera ſint æqualia, erunt (*per* 8.1.) anguli C & E æquales; ſed angulus E rectus eſt (cùm linea AE ſit tangens) ergo & C rectus erit, & (*per* 16.) AC erit tangens. quod erat demonſtrandum.

ELEMENTORVM EVCLIDIS

LIBER QVARTVS.

DEFINITIONES

1. 

Figura rectilinea circulo inscribi, & circulus figuræ circumscribi dicitur, cùm singuli figuræ anguli in circuli peripheriâ fuerint.

Vt triangulum ABC inscriptum est circulo, & circulus triangulo ABC circumscriptus, non autem triangulo DEF.

2. 

Figura rectilinea circulo circumscripta est, & circulus figuræ inscriptus, cùm singula figuræ latera circulum tangunt.

Vt triangulum GHI, cuius latera tangunt circulum in punctis M, K, L, dicitur circumscriptum circulo, & circulus ei inscriptus.

3. 

Linea circulo aptari dicitur, aut accommodari, cuius extrema sunt in circuli peripheriâ, vt linea NO, non autem PR.

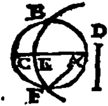
PROPOSITIO I.

Problema.

Circulo lineam diametro non maiorem aptare.

In circulo ABCF, sit aptanda linea D, non maior diametro AC: ex AC, abscinde AE, æqualem lineæ D; & ex A, vt centro

centro, interuallo AE, deſcribatur circulus BEF, ducaturque AF; quam dico æqualem eſſe lineæ D.



Demonſtratio. AE facta eſt æqualis lineæ D: ſed AE, AF (*per def. circuli*) ſunt æquales: ergo AF & D ſunt æquales.

PROPOSITIO II.

Problema.

Circulo triangulum inſcribere, dato triangulo æquiangulum.

Circulo EGH ſit inſcribendum triangulum æquiangulum triangulo ABC. Ducatur (*per* 17.3.(tangens FED, fiatque ad contactum angulus DEH, æqualis angulo B; & angulus FEG æqualis angulo C; iunganturque GH. Dico triangulum EGH, eſſe triangulo ABC æquiangulum.

Demonstr. Angulus EHG est angulo FEG, seu angulo C æqualis (*per* 32.3.) pariter angulus G est angulo DEH, seu B æqualis : ergo anguli G & H sunt æquales angulis B & C, & (*per coroll.* 32.1.) erit angulus A, reliquo GEH æqualis : ergo triangula sunt æquiangula.

PROPOSITIO III.

Problema.

Circulo circumscribere triangulum dato triangulo æquiangulum.

Sit circulo circumscribendum triangulum, dato ABC æquiangulum ; producatur vtrinque latus BC, in F, & D; fiatq; angulus GIH ad centrū, angulo ABD æqualis ; item HIK angulo ACF æqualis : ducanturque per GHK tres trangentes LM, MN, NL, quæ necessariò concurrent ; cùm enim anguli IGM, IHM sint recti, si duceretur linea

HG, essent anguli MGH. MHG duobus rectis minores : ergo (*per axioma* 11.) lineæ GM, HH convenient.

Demonstr. Omnes anguli quadrilateri MGIH æquiaualent quatuor rectis, cùm in duo triangula dividi possit ; sed anguli G & H sunt recti; ergo anguli M & GIH æquiualent duobus rectis ; sicut anguli DBA, & ABC : sed DBA æqualis factus est angulo GIH ; ergo angulus ABC, angulo M est æqualis. Eôdem modô ostendam angulos ACB, & N esse æquales : & (*per coroll.* 32.1.) erunt anguli A & NLM æquales : ergo triangula ABC, LMN sunt æquiangula. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Triangulo, circulum inscribere.

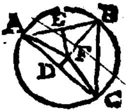
Triangulo ABC sit inscribendus circulus, diuidantur bifariàm anguli B & C, tùm ex puncto concursûs D duc lineas DE, DF, DG perpendiculares ad latera AB, AC, CB; quas dico esse æquales, atque adeò circulum descriptum ex D, vt centrô, interuallô DE, transire per F, & G.

Demonstratio. Triangula GCD, CFD habentia latus CD commune, & angulos F, & G æquales, vt pote rectos; & angulos GCD, FCD æquales, cùm angulus D sit diuisus bifariàm (*per* 26.1.) erunt omnimodè æqualia: ergo latera GD, DF æqualia sunt: pariter ostendam latera DF, DE esse æqualia; & cùm DG, DF, DE sint perpendiculares ad latera AC, CB, AB, ea circulum tangent.

PROPOSITIO V.

Problema.

Triangulo circulum circumſcribere.



Sit triangulo ABC circumſcribendus circulus: diuidantur bifariàm latera AB, AC, in E & D, ducanturque perpendiculares EF, DF, concurrentes in F. Dico lineas FA, FB, FC æquales eſſe; atque adeò circulum deſcriptum ex centro F, interuallô FA, tranſire per B & C.

Demonſtr. In triangulis AEF, BEF, latera AE, EB ſunt æqualia, latus EF commune; anguli in E æquales, vt pote recti: ergo (*per* 4. 1.) baſes AF, FB æquales ſunt. Ita oſtendam AF, FC eſſe æquales.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Circulo quadratum inscribere.

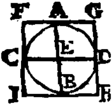
In dato circulo duc duas diametros AB, CD, se intersecantes perpendiculariter; cùm iungantur AC, CB, BD, AD. Dico figuram ACBD esse quadratum.

Demonstr. Cùm in triangulis AEC, CEB latera sint æqualia, & anguli in E æquales; erunt (*per* 4.1.) bases AC, CB æquales. Idem probare possum de lineis DB, AD. Deinde cùm AE, EC sint æquales; erunt anguli EAC, & ECA æquales; & cùm angulus E rectus sit, erunt hi anguli semirecti. Idem probabo de aliis; quare angulus DAC, compositus ex duobus semirectis DAB, BAC, rectus erit. Et similiter alij.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Circa circulum, quadratum describere.



Ductis pariter duabus diametris AB, CD, sese intersecantibus perpendiculariter; ducantur per puncta A,C,B,D tangentes FG,GH,HI,IF. Dico factum esse quadratum circa circulum.

Demonstr. Cùm anguli A & E sint recti, erunt AG, ED parallelæ (*per* 31.1.) pariter erunt EA, DG parallelæ. Idem probare possum de aliis: quare FAG æqualis est diametro CD, sicut & HI: pariter GH, FI sunt æquales diametro AB: sunt ergo latera æqualia. Item in parallelogrammo AEDG, anguli oppositi E & G æquales sunt, (*per* 34.1.) sed E rectus est: ergo & G. Idem probabo de aliis.

PROPO

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Quadrato circulum inscribere.

Diuidantur bifariàm latera AB, BD, DC CA, in punctis E,F,G, H; ducanturque lineæ EG,HF; ostendo lineas IE, IH, IF, IG æquales esse; atque adeò si ex I, vt centro, interuallô IE, describatur circulus, hic transibit per EFGH.

Demonstr. Cùm lineæ BD, EG, coniungant æquales EB, GD, & parallelas; erunt etiam parallelæ, & æquales (*per* 34. 1.) est igitur parallelogrammum EBFI: quare IE, IF æquales sunt sibi oppositis: sunt hæ autem æquales, vt pote dimidiæ laterum æqualium. Idem ostendam de lineis IF, IG, HI: sunt ergo omnes æquales. Sunt item anguli in EF, GH recti; cùm enim EG, BD sint parallelæ,

& angulus B rectus sit; erit angulus E rectus (*per* 30.1.) quare (*per* 17.3.) lineæ AB, BD, DC, CA circulum tangunt.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Circa quadratum circulum describere.

Ducantur diametri AC,BD se intersecantes in E. Dico lineas AE, EB, EC, ED æquales esse; atque adeò circulum descriptum ex E centrô, interuallô EA, transire per B,C, D.

Demonstratio. Cùm latera AB, BC æqualia sint, erunt anguli BAC, BCA æquales; & cùm angulus ABC rectus sit, erunt BAC, BCA semirecti. Ita ostendam reliquos esse semirectos. Quare in triangulo AEB, cùm anguli EAB, EBA sint semirecti; erunt etiam æquales: ergo

EA, EB sunt æquales. Ita ostendam EB, EC æquales esse, &c,

PROPOSITIO X.

Problema.

Triangulum isosceles construere, cuius angulus quilibet ad basin, sit reliqui duplus.

Secetur ita linea AB in C, vt rectangulum sub AB, BC. æquale sit quadrato ex AC (*per* 11.2.) tùm ex A, vt centrô, intervallô AB circulum describe, in quo aptetur linea BD, æqualis AC, ducanturque AD. Dico trianguli isoscelis ABD, angulum ADB, duplum esse anguli A. Ducatur DC, tùm circa triangulum ACD circulus describatur (*per* 2.4.)

Demonstr. Cùm rectangulum sub AB, BC sit æquale quadrato AC, seu BD, illi æqualis: linea BD, tanget circulum minorem ACD in D (*per* 37.3.) & (*per* 32.3.) erunt anguli BDC, DAC æquales: sed angulus externus BCD æqualis est A, & ADC(*per* 32.1.) ergo angulus BCD, angulo ADB æqualis est: & cùm triangulum ABD sit isosceles, & anguli ADB, ABD sint æquales (*per* 5.1.) erunt anguli B, & DCB æquales; sunt ergo(*per* 6.1.) lineæ BD, DC æquales: & cùm AC, BD factæ sint æquales, erunt AC, CD æquales, & anguli A & ADC æquales (*per* 6.1.) sed iam anguli A & BDC erant æquales: ergo totus angulus ADB, anguli A duplus est.

PROPOSITIO XI.

Problema.

In circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

Fiat(*per præcedentem*)triangulum ABC isosceles, cuius angulus ad basin, duplus sit anguli A: tùm circulo dato, inscribatur triangulum DEF, triangulo ABC æquiangulum(*per 2.huius.*) cuius anguli E & F diuidantur bifariàm, lineis EG, FH (*per 9.1.*) vltimò ducantur EF, FG, GD, DH, HE. Dico factum esse pentagonum æquilaterum, & æquiangulum.

Demonstr. Anguli DEG, GEF, vt semisses anguli DEF, qui est duplus anguli EDF, sunt illi æquales; sicut & anguli DFH, HFE: quare quinque arcus quibus insistunt, nempe EF, FG, GD, DH, HE sunt inter se æquales(*per 26.3.*) ergo & lineæ, iis subtensæ: quare æquilaterum est pentagonum. Secundò. Anguli totales DGF, GFE, sunt æquales, cùm insistant arcubus DHF, GHE, qui sunt æquales; continet enim quilibet tres arcus æquales.

PROPO

PROPOSITIO XII.

Problema.

Dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circumscribere.

In dato circulo (*per præcedentem*) inscribatur pentagonum ABCDE æquilaterum; & in punctis A, B, C, D, E, ducantur tangentes. Dico factum esse quòd iubetur. Ducantur enim ex centro L lineæ LA; LG, LB, LH, LC,

Demonstratio. Lineæ GA, GB, ex eodem puncto G tangentes circulum æquales sunt. (*Per coroll.* 33.3.) sicut & HB, HC: item FA, FE, &c. Quare (*per* 8.1.) triangula ALG, BLG, sunt æqualia, & anguli ad L, æquales: Ergo quilibet est media pars anguli ALB. Similiter anguli BLH, CLH sunt æquales & semisses anguli BLG. Sunt etiam anguli totales

ALB BLC (*per* 17.3.) æquales; ergo & eorum dimidij BLG, BLH, æquales erunt, &(*per* 26.1.) latera BG, BH. In triangulis BLH, BLG æqualia, ac consequenter (*per* 1. *axioma* 1.) BH æqualis erit GA ipsi BG æquali. Ostendam pari modo AF, AG æquales, adeoque ipsi BG; ergo totalia latera GF, GH, sunt æqualia: quod & de aliis similiter demonstrabitur. Item in triãgulis AGB, BHC, anguli ad G & H, sunt æquales, dupli scilicet æqualium, quod & de aliis ad F, K, I similiter ostenditur. Est ergo pentagonum circumscriptum æquilaterum & æquiangulum. quod erat dem.

PROPOSITIO XIII.
Problema.

Pantagono regulari circulum inscribere.

Pentagoni regularis ABCDE, duos angulos A, & B diuide bifariàm, lineis AF, BF, concurrentibus in F: tum ductâ ad

AB perpendiculari ad FG: ex F vt centro, interuallô FG, describatur circulus. Dico illum tangere singula latera: seu perpendiculares FH, FG æquales esse.

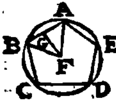
Demonstr. Cùm anguli æquales A & B sint diuisi bifariàm, erunt anguli GAF, GBF eorum semisses inter se æquales: anguli item in G recti sunt,

quare (*per* 26.1.) triangula AFG, BFG, quæ habent præterea latus GF commune, omnino æqualia erunt: eruntque AG, GB æquales: ita ostendam BH, HC æquales esse: & cùm latera AB, BC, supponantur æqualia; erunt BG, BH, eorum semisses, æquales. Quare in triangulis BFG, BFH, erit quadratum BF æquale, tam quadratis BG, FG, quàm BF, BH (*per* 47.1.) quare ablatis quadratis æqualibus BG, BH, restabunt quadrata FG, FH æqualia, & consequenter lineæ. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Circa pentagonum regulare, circulum describere.



Anguli A & B bifariàm diuidantur, lineis A & B, concurrentibus in F. Dico lineas AF, BF, æquales esse; atque adeò circulum descriptum, ex F, vt centro, interuallo FA, transire per B, &c. Ducatur FG perpendicularis ad AB.

Demonstratio. Cùm anguli in G recti sint, & FAG, FBG sint æquales, vt pote dimidij angulorum A, & B æqualium, & latus FG, in triangulis FBG, FAG, sit commune (*per* 26.1.) erunt FA, FB æquales, simili modo si ducerentur FE, FD, FC, ostenderentur æquales.

Coroll. Ita diuisis angulis, polygono regulari circulum inscribes, aut circumscribes; & inscriptô regulari prolygoano, ductis tangentibus, similem circumscribes.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Exagonum regulare ci culo inscribere.

Ducatur diameter BAC, & ex C, vt centro, interuallô CA, describatur circulus DAE, ductisque diametris DAF, EAG, iungantur rectæ CE, CD, BF, BG, EF, DG. Dico factum esse exagonum regulare.

Demonstratio. Primò clarum est triangula ADC, ACE esse æquilatera, cùm latera AC, CD sint æqualia, vt pote ducta ex centro C, ad circumferentiam circuli DAE; quare anguli DAC, CAE, & illis oppositi ad verticem GAB, BAF; sunt quilibet tertia pars duorum rectorum seu graduum 60. anguli autem omnes, qui fiunt circa punctum A, æquiualent 4 rectis (*per* 13.1.) seu gradibus 360. subtrahendo igitur quatuor angulos, 60 graduum, seu gradus 240, restant anguli FAE, GAD oppositi ad verticem, quarum quilibet erit graduum 60. sunt igitur circa punctum A, 6 anguli æquales 60 graduum: ergo arcus DC, CE, &c. sunt æquales (*per* 27.3.) ergo & latera.

Secundò. Quia angulus DAC est 60 graduum, reliqui ADC, ACE, qui sunt æquales, conficient summam graduum 120: ergo quilibet erit graduum 60: quare angulus totalis DCE est graduum 120. Ita ostendam angulum CEF esse graduum 120: ergo exagonum est æquilaterum, & æquiangulum.

Coroll. Latus exagoni æquale est semidiametro.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

In dato circulo pentedecagonum regulare describere.

In dato circulo inscribatur (*per* 2.) triangulum æquilaterum ABC, & (*per* 11.) pentagonum regulare ADFGH, ita vt vtriusque vnus angulus cadat in idem punctum A, diuidatur DC bifariam. Dico lineas DI, IC, CF; si ducerentur, esse tria latera pentedecagoni : ita vt si in reliquis arcubus pentagoni , lineæ illis æquales aptentur, perfectum sit pentedecagonum.

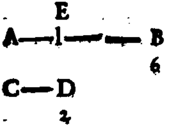
Demonstratio. Quia linea AC est latus trianguli æquilateri arcus ADC, erit tertia pars totius circuli , nempe continebit quinque decimas quintas :

ſed arcus AD continet tres huiuſmodi decimas quintas : ergo arcus DC continet duas:ergo ſi bifariàm diuidatur, erit DI, aut IC, vna decimaquinta.quod erat demonſtrandum.

ELEMENTORVM EVCLIDIS

LIBER QVINTVS.

DEFINITIONES.



Pars est minor magnitudo, comparata cum maiore; *Vt linea CD duorum pedum, est pars magnitudinis AB 6 pedum: quamvis enim CD, non sit verè in AB; dicetur tamen eius pars, modò linea AE, aequalis lineae CD, inueniatur in AB.*

Parti respondet totum, estque maior quantitas, comparata cum minori; siue eam contineat verè, siue non, modò *contineat qantitatem minori æqualem.*

Diuiditur autem pars hoc modo genericè sumpta in aliquotam, & aliquantam.

1. Pars aliquota (*quam solùm hic definiuit Euclides*) est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cùm minor metitur maiorem. *Seu est minor magnitudo comparata cum maiore, quam, aliquoties repetita, præcisè adæquat; vt linea duorum pedum, est pars aliquota lineæ 6. pedũ.*

2. Multiplex est magnitudo magnitudinis, maior minoris, cùm minor metitur maiorem. *Seu est maior quantitas comparata cum minore; à quâ præcisè adæquatur; vt linea 6. pedem, est multiplex lineæ duorum pedum, est enim eius tripla.*

Pars aliquanta est minor quantitas, comparata cum maiore, quam aliquoties repetita non adæquat præcisè; vt linea 4 pedum est pars aliquanta lineæ 6 pedum.

Æquemultiplices sunt, quæ suas partes aliquotas æqualiter continent, vt si A ter contineat B, & pariter C ter contineat quantitatem D; A, & C, æque-

6 . 2 . 3 1
A B, C D

multiplices erunt quantitatum B & D; vtraque enim dicetur tripla.

3. Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis, ſecundùm quantitatem habitudo; *dixi*, ejuſdem generis *ſubiungit enim Euclides.*

4. Rationem dicuntur habere magnitudines, quæ multiplicatæ ſe mutuò ſuperare poſſunt. *Ad quod requiritur vt ſint eiuſdem generis: linea enim nullam ad ſuperficiem (vt cum quadrato) rationẽ habet, quia quantumlibet multiplicetur linea, quadratum non adæquabit: cum enim linea mathematicè conſiderata, non habeat latitudinem, quantumlibet multiplicetur, nullam habebit latitudinem quam quadratũ habet. Si intelligeretur autem linea cum aliqua latitudine, vt in methodo indiuiſibilium, aliter ſe res haberet.*

Quandoquidem Ratio *eſt ſpecies relationis, neceſſariò duos terminos requirit; quorum primus (qui à Philoſophis diceretur fundamentum) à mathematicis* Antecedens *nuncupatur; terminus verò dicitur* Conſequens, *vt rationis quæ eſt A, ad B; A dicitur* Antecedens, *&* B Conſequens: *rationis verò quæ est B, ad A;* B *est* Antecedens, *&* A Consequens.

Diuiditur ratio, in rationem rationalem & rationem irrationalem. Ratio rationalis est inter magnitudines, quæ communē habēt mensuram, seu communem partem aliquotam; vt linea 4 pedum ratio, ad lineam 6 pedum, est rationalis: hæc ratio semper numeris exprimi potest; cum enim datur communis mensura, inter duas quantitates, hæc aliquoties inuenitur in vtráque magnitudine. Ponamus in vnâ esse quinquies, in aliâ septies; hæ quantitates se habebunt vt 5 ad 7: sicut enim numerus 5 quinquies continet vnitatem & 7 septies; ita etiam huius quantitatis, vna quinquies, alia septies communem mensuram continet.

Ratio irrationalis est inter duas quantitates incommensurabiles, seu quæ nullam habent communem mensuram; vt ratio quæ est lateris quadrati ad diametrum eiusdem, nulla enim potest assignari quantumuis parua linea, quæ vtramque præcisè adæquet, atque adeò hæc ratio numeris exprimi non potest.

In eâdem ratione erunt 4 magnitudines, hoc est, eamdem rationem habebit prima ad secundam, quam habet tertia ad quartam, quando habebunt similem rationem secundùm quantitatem. Quid sit autem (habere similem rationem,) non ita facilè explicatur; Et in eo explicando tota difficultas huius libri posita est. Euclides enim non dedit definitionem similitudinis rationum, quæ eius naturam explicaret; sed tantùm assignavit aliquod signum, quô possemus dignoscere, vtrum quatuor quantitates in eâdem essent ratione; quod quidem signum, licèt sit infallibile, non tamen ita clarum est, vt locum axiomatis obtinere possit; immò ferè nulla est propositio in toto hoc libro, quæ hoc axiomate, non sit clarior; ideoq; quæ potiori iure tanquam axioma proponi non possit: quod dedit occasionem nonnullis, eas proponendi sine demonstratione; Ego mediam viam inire tentabo, & relictô æque multiplicium circuitu, propositiones huius libri aliô modo demonstrabo.

5. Vult igitur Euclides quatuor magnitudines in eâdem esse ratione, quoties

auctis eâdem multiplicatione primâ, & tertiâ (*quæ sunt antecedentes*) auctis etiam aliâ quâcumque multiplicatione, secundâ & quartâ, id est (*consequentibus*) semper accidit, vt si multiplex primæ, est maius multiplice secundæ; multiplex tertiæ, sit etiam maius multiplice quartæ: si est æquale, aliud sit etiam æquale: & si est minus, aliud sit etiam minus.

A	B	C	D
2	4	3	6
8	8	12	12
E	F	G	H

Vt si sint quatuor magnitudines A, B, C, D, sumantur autem æquemultiplices primæ A, & tertiæ C; nempe E & G: item sumantur æquemultiplices, secundæ B, & quartæ D, nempe F & H. Si quoties E, est æquale ipsi F; G etiam est æquale ipsi H: & quoties E, est maius, aut minus quam F; G similiter est maius, aut minus, quam H: ita vt hoc non accidat tantum semel, sed in omni multiplicatione, eô modô factâ, id semper eueniat: tunc eadem est ratio A, ad B, quæ est C ad B.

Debuerat autem id probare Euclides, ne-

que enim ita clarum est, vt probatione non egeat. Quare vt melius intelligatur, quid sit quatuor magnitudines proportionales esse, seu in eâdem esse rationę; quamvis in genere dici possit, quoties prima, est simile totum, vel similis pars, secunda; ac tertia quartę; id est, quoties prima secundam æqualiter continet, aut in eâ continetur, ac tertia quartam: quia tamen hæc definitio, nec rationi æqualitatis, nec irrationalibus conuenire videtur; aliam vniuersaliorem tradem: ad quam intelligendam, sciendum est, quid sit similis pars aliquota.

Similes partes aliquotæ duorum totorum sunt, quarum vna toties continetur in suo toto) quoties alia, in suo: vt binarius senarij, est similis pars aliquota, ac ternarius novenarij; quia toties binarius in senario, quoties in nouenario ternarius continetur.

A B C D *Prima ad secundam eandem rationem habebit, ac tertia ad quartam; si prima toties contineat secundæ partes aliquotas quascumque; quoties tertia, quartæ similes partes aliquotas conti-*

net : vt si magnitudo A, toties continet magnitudinis B partes centesimas, millesimas, centies millesimas, & alias quascumque ; quoties C continet magnitudinis D partes centesimas, millesimas, centies millesimas, & quascumque alias partes aliquotas similes ; ita vt nulla sit pars magnitudinis B, qua pluries contineatur in A, quam similis pars aliquota magnitudinis D, contineatur in C : tunc erit A, ad B ; vt C, ad D.

Demonstranda nobis est hac definitio, qua duo membra continere videtur.

Primum si fuerint quantitates proportionales, nempe si fuerit A, ad B, vt C ad D : quod A toties continebit partes aliquotas magnitudinis B, quoties C continet magnitudinis D similes partes aliquotas : hoc mihi penetratis terminis manifestum videtur.

Si enim A continet centies & semel, decimam partem magnitudinis B ; & C continet centies tantùm, decimam partem magnitudinis D : magnitudo A, erit maius totum, respectu magnitudinis B, quam C respectu D ; nec eodem modo comparari poterit,

terit, nec consequenter eandem rationem habebit: sunt enim voces synonimæ.

Secundum verò punctum probatur, nempe quòd si hæc adsit proprietas, scilicet quòd si AB *toties continet partes aliquotas quascumque magnitudinis* C, *quoties* E *continet similes partes aliquotas magnitudinis* F: *quod erit eadem ratio* AB *ad* CD, *quæ* E *ad* F: *ostendam enim, si dicatur non esse eadem ratio,* AB *pluries continere aliquam partem aliquotã magnitudinis* CD, *quã* E *contineat similẽ partem aliquotam magnitudinis* F; *contra suppositionem. Sit enim, si fieri potest, maior ratio magnitudinis* AB, *ad* CD, *quam* E *ad* F, *hoc est,* AB *maior sit quàm requiritur, vt ita sit* AB *ad* CD; *sicut* E *ad* F; *igitur aliqua quantitas minor quam* AB, *eandem rationem habebit ad* CD, *ac* E, *ad* F. *Sit hæc quantitas* AG, *diuidatur bifariàm* CD *in* H; *&* *reliqua* HD *bifariàm in* I; *reliqua* ID *bifariàm in* K; *si hôc modô continuetur hæc diuisio, tandem occurret pars aliquota ipsius*

CD, minor quam GB: sit hac KD.

Demonstratio. Cùm eadem sit ratio AG, ad CD; quæ E, ad F; toties AG continebit quamcumque partem aliquotam magnitudinis CD, quoties E continet similem partem aliquotam magnitudinis F, (per partẽ præced.) *sed AB, præter partes quas continet AG, continet etiam GB, maiorem quam KB; ergo continet pluries KD, partem aliquotam magnitudinis CD, quam E contineat similem partem aliquotam magnitudinis F: quod erit contra suppositionem: igitur si toties AB, continet partem aliquotam magnitudinis CD; quoties E continet similem partem magnitudinis F; eadem erit ratio AB, ad CD; quæ E, ad F. quod erat demonstrandum.*

6. Maiorem autem rationem habebit prima ad secundam, quam tertia ad quartam, si prima secundæ, aliquam partem aliquotam pluries contineat, quàm tertia contineat similem partem aliquotam quartæ: *ut* 101 *ad* 10, *maiorem rationem habet, quàm* 200 *ad* 20: *quia* 101 *continet centies & semel decimam partem numeri* 10, *&* 200 *tantùm centies conti-*

net decimam partem numeri 20.

7. Quæ ſunt in eâdem ratione magnitudines, proportionales vocentur.

8. *Nam* Analogia,ſeu proportio eſt rationum ſimilitudo.

9. Proportio in tribus ad minimum terminis conſiſtit. *Hoc eſt, vt ſit proportio, ſeu ſimilitudo rationum, debent eſſe duæ rationes, qualibet autem ratio, cùm ſit relatio, debet habere duos terminos; ideoque, in duabus rationibus deberent eſſe quatuor termini; vt cùm dicitur, ita eſt A ad B, vt C ad D; vnus tamen poteſt eſſe antecedens & conſequens, vt ſi ſit A ad B, vt B ad C.*

10. Magnitudines continuè proportionales ſunt, quarum quæ mediæ ſunt, bis ſumuntur, ſemel vt antecedentes, & ſemel vt conſequentes. *vt ſi ſit A ad B, vt B ad C; & C ad D.*

11. Tunc autem dicitur A ad C duplicatam habere rationem, illius quam habet A ad B: item A ad D triplicatam eiuſdem rationis, quæ eſt A ad B.

A	B	C	D
3	6	12	24

Est maxima differentia, inter rationem duplam, & rationem duplicatam: cùm dicimus rationem 4 ad 2 esse duplam, intelligimus esse 4 ad 2, vt 2 ad vnitatẽ; ita vt binarius sit denominator huius rationis: ita dicimus rationem triplam, quadruplam, quæ sunt denominationes petitæ ab his numeris 3.4.5. non quidem absolutè sumptis, sed comparatiuè ad unitatem: vt enim vnius quantitatis habitudinem ad aliam indicemus, eam exhibemus in minimis terminis; ideoque si vnus sit vnitas, facilius eam explicamus, & in hoc sensu dicimus esse rationem duplam, triplam, &c.. quando verò dicimus rationem aliquam esse duplicatam, intelligimus rationem aliquam bis sumi: vt si sit 2 ad 4, vt 4 ad 8; ratio 2 ad 8, erit duplicata rationis 2 ad 4: quia opus est, vt repetatur ea ratio. Sic 3 ad 27 est ratio duplicata rationis 3 ad 9: ratio 2 ad 4, est subdupla; & 2 ad 8, est bis subdupla; ratio 3 ad 9, est subtripla, 3 ad 27, bis subtripla, seu duplicata tripla. Si fuerint quatuor termini continuè proportionales, nempe 2, 4, 8, 16; ratio 2, ad 16, est triplicata rationis 2, ad 4; quia vt *perueniatur ad* 16 *, per tres rationes procedendum est.*

12. Magnitudines dicuntur homologæ; antecedentes antecedentibus , & consequentes consequentibus. *Vt si prima ad secundam, eamdem rationem habeat, ac tertia ad quartam : prima & secunda dicuntur homologæ; sicut secunda & quarta.*

Sequentes definitiones sunt modi argumentandi , ad quorum præcipuè probationem institutus est hic liber.

13. Alterna , seu permutata ratio , est comparatio antecedentium cum antecedentibus , & consequentium cum consequentibus , *vt si ex eo quod sit A ad B ; vt C ad D :* Ego *concludam; ergo ita est A, ad C : vt B , ad D : qui modus argumentandi valet tantum , quando quatuor quantitates sunt eiusdem speciei ; si enim A & B essent lineæ, & C & D superficies v. g. quadratæ , non benè concluderetur , ita esse A ad C , sicut B ad D; quia linea A ad superficiem C, nullam habet rationem. Vide prop.* 16.

A, B, C, D

16. Conuersa ratio est comparatio con-

sequentis cum antecedente. *Vt si ex eo quod, sit A ad B, Sicut C, ad D: ego concludam; ergo ita est B, ad A; sicut D, ad C. vide coroll. prop. 16.*

15. Compositio rationis est comparatio Antecedentis & consequentis, per modum vnius ad consequens. *Vt si ex eo quod sit A, ad B; sicut C, ad D: concludam, ergo ita est AB, ad B; sicut CD, ad D, prop. 18.*

16. Diuisio rationis est comparatio excessus antecedentis supra consequens, ad ipsum consequens. *Vt si ex eo quod sit AB ad B, vt CD ad D: concludam; ergo ita est A, ad B; vt C, ad D. prop. 17.*

17. Conuersio rationis est comparatio antecedentis, ad differentiam terminorum, velut ad consequens. *Vt si ex eo quod sit AB, ad B; vt CD, ad D: concludum: ergo est AB ad A; sicut CD ad C. propos. 18.*

18. Proportio ex æquo, est comparatio magnitudinum extremarum, subtrahendo intermedias. *Vt si ex eo quod sit vt A, ad B; ita*

A B C D

E F G H

E, ad F; & vt B, ad C; ita F, ad G; & vt C, ad D; ita G, ad H: Ego concludam, ergo ita est A ad D, vt E ad H.

19. Proportio ex æquo ordinata est, cùm eôdem ordine comparantur quantitates in vtráque serie. *Vt in allato exemplo. prop. 22.*

20. Proportio ex æquo perturbata est, cùm diuerso ordine comparantur quantitates in vtrâque serie. *Vt si ex eo quod sit vt A, ad B; ita C, ad D; & vt B, ad E; ita F ad C: ego concludam, ergo ita est A, ad E; sicut F, ad D. prop. 23.*

A, B, E,
F, C, D.

Hic subjicio omnes modos argumentandi. *quia ita est A, ad B; vt C, ad D.*

A, B, C, D.
9. 3. 6. 2.

Alterna ratio.

Ergo est A ad C; vt B, ad D.

Conuersa ratio.

Ergo ita est B ad A, sicut D ad C.

Compositio rationis.

Ergo ita est AB, ad B; vt CD, ad D,

Diuisio rationis.

Si sit vt 12, ad 3; ita 8, ad 2: erit vt 6, ad 3: ita 4, ad 2.

Conuersio rationis.

Ergo ita erit 9, ad 6; vt 6, ad 4.

Ex æquo ordinata.

Si sit vt 12, 6, 3; ita 8, 4, 2: ita erit 12 ad 3; vt 8 ad 2.

Ex æquo perturbata.

Si sit vt 12 ad 6, ita 8 ad 4; & vt 6 ad 2, ita 24 ad 8: ergo ita erit 12 ad 2; vt 24 ad 4.

Hic Liber continet Euclidis propositiones 25. quibus accesserunt alia 10, iam apud Mathematicos recepta: 6 prima huius libri sunt tantùm vsui, ad probandas reliquas methodô æquemultiplicium: quam methodum cum non sequamur, à septima ordiemur, immutato propositionum ordine.

Petitio.

Datis tribus quantitatibus A,B,C: petitur concedi, darì posse quartàm quantitatem D; ad quam C eandem rationem habeat, quam habet A ad B.

PROPO

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Æquales ad eandem magnitudinem, eandem habent rationem, sicut & eadem ad æquales.

A 8.		Magnitudines A & B sint æquales. Dico illas eandem
	C 4.	habere rationem ad magni-
B 8.		tudinem C.

Demonstratio. Si enim alterutra v. g. A, haberet maiorem rationem ad C, quam B; (*per defin. 6.*) A contineret pluries aliquam partem aliquotam magnitudinis C quàm B illam contineat: ergo A maior esset, contra suppositionem.

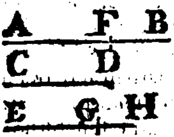
Secundò. Dico magnitudinem C habere eandem rationem ad A, ac ad B.

Demonstratio. Cùm enim A & B sint æquales, earum partes aliquotæ similes, æquales erunt; ergo C eas æqualiter continebit : ergo (*per defin. 5.*) eadem erit ratio C ad A, quæ C ad B.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

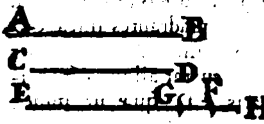
Maior, ad eandem magnitudinem, maiorem rationem habet : & eadem, ad maiorem magnitudinem, minorem rationem habet.



Sit AB maior quam CD. Dico quod AB ad EH, maiorem rationẽ habeat, quàm CD ad eandem EH; fiant enim AF, & CD æquales? diuidatur EH bifariàm, & eius media pars bifariàm, & ita deinceps : tandem relinquetur 4 pars GH, minor quàm FB.

Demonstratio. AF & CD (*per præcedentem*) eandem rationem habent ad EH:

ergo contineat æqualiter partem GH : sed AB continet adhuc semel partem GH: ergo pluries eam continet quàm CD : ergo est maior ratio AB ad EH, quam CD ad EH.



Secundò. Dico EH, maiorem habere rationem ad minorẽ CD, quam ad maiorem AB.

Demonstr. Assumatur quæcumque pars aliquota minoris CD v.g. quadrans, qui auferatur ex EH, quoties potest: vel aliquid relinquet, vel nihil: Si primum, ponatur in EH inueniri quinquies; cum quadrans lineæ AB, maior sit quadrante lineæ CD, inueniri non poterit quinquies in EH; quia quinquies sumptus lineam facit maiorem: ergo EH pluries continet partem aliquotam lineæ CD, quàm lineæ AB: ergo maiorem habet rationem ad CD, quàm ad AB (*per def. 6.*)

Si quadrans lineæ CD, non metitur exactè lineam EH, sed aliquid relinquit,

v. g. GH ; cùm quadrans AB sit major, æqualiter sumptus lineam majorem faciet, vt EF : atque adeo EF toties continebit quadrantem AB, quoties EG continet quadrantem CD ; & (*per def. 5.*) eadem erit ratio EF ad AB, quæ EG ad CD. Subdiuidantur quadrantes lineæ CD per medium, & hæc medietas iterum per medium, donec occurrat aliqua pars aliquota quantitatis CD, quæ sit minor quam GF.

Demonstr. Cùm sit vt EF, ad AB ; ita EG, ad CD : toties EG continebit hanc vltimam partem aliquotam lineæ CD, quoties EF continet similem partem aliquotam lineæ AB : sed GF major est eâ parte aliquotâ lineæ CD : ergo EF pluries continet hanc partem aliquotam lineæ CD, quam contineat similem partem aliquotam lineæ AB : sed FH toties saltem continet partem aliquotam lineæ CD minorem, quoties continet similem partem aliquotam AB majorem ; ergo EH pluries continet partem aliquotam CD, quàm contineat similem partem aliquotam lineæ AB : ergo (*per defin. 6.*)

est major ratio lineæ EH ad CD, quàm ad AB. Quod erat demonstrandum.

PROPOISTIO IX.

Theorema.

Quæ ad eandem magnitudinem eandem habent rationem, illa æquales sunt; & ad quas eadem habet eandem rationem.

Magnitudines A & B ad eandem C, habeant eandem rationem. Dico eas æquales esse: si enim non sunt æquales, alterutra vt A, sit major.

A, B, C,

Demonstr. Major A ad eandem C (per 8.) majorem habebit rationem, quàm minor C; quod est contra suppositionem.

Secundò, si magnitudo C, ad A & B, eandem habeat rationem. Dico A & B æquales esse: si enim non sunt æquales, sit A major.

Demonstr. Cùm A dicatur esse major quam B, eadem C, ad A majorem, minorem habebit rationem quàm ad B: quod est contra suppositionem.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Quæ majorem habet rationem ad eandem, ea major est; & ad quam eadem habet majorem rationem, ea minor est.

A, B, C, Magnitudo A, majorem habeat rationem ad C, quàm B habeat ad eandem C. Dico A majorem esse quàm B.

Si enim A non sit major quàm B, erit illi æqualis, aut minor.

Demonstr. Si A dicatur æqualis ipsi B; A & B ad eandem C, eandem habebunt rationem, (*per* 7.) contra suppositionem. Si A sit minor quam B; major B ad eandem C, majorem habebit rationem (*per* 8.) quod item est contra suppositionem.

Secundò. Si C habet minorem rationem ad A, quam ad B. Dico A majorem esse quàm B.

Demonstr. Si A non est major quàm B, illi aut æqualis esset; & (*per* 9.) C ad eas, eandem haberet rationem, (quod est contra suppositionem:) aut minor esset; atque ita C ad minorem A, majorem haberet rationem (*per* 8.) quod etiam est contra suppositionem.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Quæ eidem, eadem sunt rationes; inter sunt eadem.

A. B.	C. D.	E. F.
4, 2.	8. 4.	6. 3.

Sit ratio A ad B, vt C ad D: sit etiam vt C ad D, ita E ad F. Dico ita esse A ad B, vt E ad F.

Demonstr. Cùm sit A ad B, vt C ad D (*per def. 5.*) A toties continebit partem aliquotam magnitudinis B, quoties C similem partem magnitudinis D continet: sed pariter E toties continebit magnitudinis F partem aliquotam, quoties C ipsius D: ergo quoties A continet partem magnitudinis B, toties E continet partem aliquotam magnitudinis F: ergo ita est A ad B, vt E ad F.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si fuerint quotcumque magnitudines proportionales; erit vt vna antecedentium, ad vnam consequentium; ita omnes antecedentes, ad omnes consequentes.

Sit A ad B, vt C ad D. Dico,
3 12 ita esse A & C simul, ad B &
A B D simul; vt A sola est ad B
C D solam.
2. 8. Demonstr. Cùm sit A ad B,
vt C ad D (*per def.* 5.) toties A continebit partem quamcunque aliquotam magnitudinis B, quoties C continet partem aliquotam similem magnitudinis D, v.g. quadrantem; sed quadrans magnitudinis B, cum quadrante magnitudinis D, efficit quadrantem magnitudinum B & D; ergo A & C to-

ties continent quadrantem magnitudinum B & D, quoties A continet quadrantem magnitudinis B: ergo (*per def.* 5.) ita erit A ad B, ſicut AC ad BD.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si duarum rationum æqualium, vna maior fuerit, tertiâ ratione; & alia eâdem maior erit.

A, B; C, D; E, F.

Ratio A ad B, æqualis ſit rationi C ad D; & maior ratione E ad F. Dico rationem C ad D, eâdem ratione E ad F maiorem eſſe.

Demonſtratio. Cùm A ad B æqualem rationem habeat ac C ad D; toties A continebit partem aliquotam magnitudinis B, quoties C continet ſimilem partem magnitudinis D, (*per defin.* 5.) & (*per defin.* 6.) pluries quàm E, contineat ſimilem partem aliquotam magnitudinis F: ergo etiam C pluries continebit partem aliquotam magnitudinis D, quàm E similem contineat ipsius F: ergo (*per defin.* 6.) maior erit ratio C ad D, quám E ad F.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si prima ad secundam, eandem rationem habeat; quam tertia ad quartam: & prima maior, æqualis, aut minor fuerit tertiâ; secunda quoque maior æqualis, aut minor erit quartâ.

A, B; C, D.

Sit A ad B, sicut C ad D. Dico primò, si A maior sit quàm C, erit quoque B maior quàm D.

Demonstratio. Quia A maior est quam C, erit (*per* 9.) maior ratio A ad B; quam C ad B: sed vt A ad B, ita supponitur esse C ad D : ergo C ad B minorem habet rationem, quàm ad D : quare (*per* 10.)B,quam D maior erit.

A,B,C,D Secundò Si A æqualis fuerit ipsi C. Dico B & D fore æquales.

Demonstratio. Cùm A & C sint æquales, erit(*per* 7.) vt A ad B, ita C ad D:sed vt A ad B,ita supponitur esse C ad D : ergo ita erit C ad B, sicut C ad D. Ergo (*per* 9.) B & D sunt æquales.

Tertiò. Si A minor sit quàm C. Dico B minorem esse quàm D.

Demonstr. Cùm A sit minor quàm C, erit (*per* 8.) maior ratio C ad B, quàm A ad B : sed vt A ad B , ita supponitur esse C ad D : ergo etiam maior est ratio C ad B, quàm C ad D : ergo (*per* 10.) B minor est quàm D,

PROPO

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Æquemultiplices in eâdem sunt ratione, ac magnitudines quarum sunt multiplices.

2	3	6	9
A	B	C	D
		E2.	H3
		F2.	I3
		G2.	K3

Sint C & D æquemultiplices quantitatum A & B. Dico ita esse C ad D, vt A ad B. Diuidatur C in partes ipsi A æquales ? quod fieri potest, cùm sit illius multiplex; sint E,F,G, quæ simul erunt æquales ipsi C : & cùm D sit æquemultiplex, poterit diuidi in totidem partes ipsi B æquales quæ sint H,I,K.

Demonstr. Erit E ad H sicut A ad B; cùm sint æquales: pariter ita erit F ad I, & G ad K, sicut A ad B; igitur ita erunt omnes E, F, G seu C; ad omnes H,I,K, ſeu D, ſicut A ad B.

Coroll. totidem partes aliquotæ duorum totorum, in eâdem ſunt ratione, ac tota. Oſtendemus enim ita eſſe E ad H, ſicut A ad B, & pariter F ad I: ergo licet concludere, ita eſſe F & E, ad I & H, ſicut A ad B: ſed vt A ad B, ita C ad D: ergo vt F, E ad I, H, ita C ad D.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & eiuſdem rationis: etiam alternatim proportionales erunt.

12	8	9	6
A	B	G	D

Sit A ad B, vt C ad D; ſintque magnitudines eiuſdem ſpeciei, hoc eſt, vel omnes lineæ, vel omnes ſuperficies, vel omnes ſint ſolida. Dico ita eſſe A ad G, ſicut B ad D: Sit enim ſi fieri poteſt major ratio

A ad C, quàm B ad D.

Demonstratio. Cùm dicatur esse major ratio A ad C, quam B ad D: A pluries continebit partem aliquotam ipsius C, quam B ipsius D. Ponamus esse trientem ipsius C; qui quater sit in A: & triens D, sit tantùm ter in B. Si triens C sit quater in A, diuisâ A in quatuor quadrantes, triens C in singulis erit: & diuisâ B in quatuor, triens D non erit in singulis quadrantibus ipsius B: quare tres quadrantes A continebunt tres trientes ipsius C, seu ipsam C: & tres quadrantes B non continebunt tres trientes ipsius D, seu ipsam D. Aliunde cùm sit vt A ad B, ita C ad D, ita erunt (*per coroll. præcedentis*) tres quadrantes ipsius A ad B, sicut tres quadrantes ipsius C, ad D: & (*per* 14.) Si tres quadrantes A, majores fuerint tertiâ C, tres quadrantes B, majores erunt ipsâ B; quod est absurdum, cùm ostensi sint minores.

Lemma.

Si prima ad ſecundam fuerit, vt tertia ad quartam: etiam qualibet pars aliquota primæ ad ſecundam, erit vt ſimilis pars aliquota tertiæ ad quartam.

16.	3.	32.	6.
A	B,	C	D,
E		F	
4		8	

Sit A ad B, vt C ad D; ſitque E pars aliquota A, v.g. quadrans; & F quadrans magnitudinis C. Dico ita eſſe E ad B, ſicut F ad D.

Demonſtratio. Si dicatur eſſe major ratio E ad B, quàm F ad D; E pluries continebit partem aliquotam magnitudinis B, quàm F contineat ſimilem partem aliquotam ipſius D: ergo E bis, ter, & quater ſumpta, pluries continebit partem aliquotam ipſius B, quam F bis, ter, & quater ſumpta, contineat ſimilem partem aliquotam D: ſed E quater ſumpta, eſt æqualis A; & F quater ſumpta, eſt æqualis ipſi C: ergo A ad B majorem rationem haberet, ac C ad D: quod eſt contra ſuppoſitionem.

Corollarium.

Quod in Euclide eſt poſt quartam propoſitionem.

Conuerſa ratio.

Si prima ad ſecundam fuerit, vt tertia ad quartam; erit ſecunda ad primam, vt quarta ad tertiam.

Sit A ad B, vt C ad D. Dico ita eſſe B ad A, ſicut D ad C: cùm enim ſit A ad B, vt C ad D; ita erit alternando B ad D, ſicut A ad C (*per* 15.) & iterùm alternando B ad A, ſicut D ad C. Quod erat demonſtrandum.

Quia tamen hic modus argumentandi, valet tantum quando quatuor quanti-

tates sunt eiusdem rationis, & hoc corollarium vniuersale esse debet; aliô modô demonstratur.

Sit igitur A ad B, sicut C ad D. Dico ita esse B ad A, sicut D ad C.

4.	8.	6.	12.
A	B	C	D
E		F	$\frac{1}{2}$
1.		1.	

Demonstr. Sit enim, major ratio B ad A, quam D ad C: ergo B continebit pluries aliquam partem aliquotam ipsius A, v. g. quadrantem E; quam D contineat quadrantem F, ipsius C: B igitur contineat octies quadrantem E, & D contineat tantùm septies quadrantem F: Cùm ergo sit A ad B, vt C ad D, etiam (*per lemma superius*,) ita erit quadrans E, ad B, sicut quadrans F ad D; & (*per idem lemma*) quadrans E octies sumptus ad B; sicut quadrans F octies sumptus ad D: sed quadrans E octies sumptus, non superat B, cùm in eâ contineatur: ergo quadrans F octies sumptus non superaret D, & in eâ contineretur: quod absurdum est, cùm in D tantùm septies ostensus sit contineri. Non ergo est major ratio B ad A, quàm D ad C.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Diuiſio rationis.

Si compoſitæ quantitates proportionales fuerint, etiam diuiſæ proportionales erunt.

A	B	C	D
9	3	10	6

Sit AB ad B, ſicut CD ad D. Dico ita eſſe A ad B, ſicut C ad D.

Demonſtratio. Quia ſupponitur eſſe AB ad B, ſicut CD ad D: AB toties continebit partes aliquotas magnitudinis B, quoties CD continet ſimiles partes aliquotas magnitudinis D: tot autem ſunt in B partes aliquotæ ipſius B, quot ſunt in D partes aliquotæ ſimiles magnitudinis D. Auferatur ex AB, ipſum B; &

ex CD, ipſum D; tot reſtabunt in A, partes aliquotæ magnitudinis B; quot in C, magnitudinis D: ergo (*per def.* 5.) ita erit A ad B, vt C ad D.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si diuiſa magnitudines, proportionales fuerint; compoſita, proportionales erunt.

A	B	C	D.
5.	3.	10.	6.

Sit A ad B; vt C ad D. Dico ita eſſe AB ad B; vt CD ad D.

Demonſtratio. Cùm ſupponatur A ad B, vt C ad D; toties A continebit partes quaſcumque aliquotas magnitudinis B, quoties C continet ſimiles ipſius D: ſed B toties continet ſuas partes aliquotas, quoties D ſuas: ergo ſi B addatur ipſi A, & D ipſi C, toties AB continebit partes aliquotas ipſius

B ; quoties CD continet ſimiles ipſius D: ergo ita eſt AB ad B, ſicut CD ad D.

Corollarium.

Conuerſio rationis.

Sit AB ad B, vt CD ad D. Dico ita eſſe AB ad A, ſicut CD ad C : ergo (*per præcedentem*) ita eſt A ad B, vt C ad D; & (*per coroll.* 16.) ita erit B ad A, vt D ad C: & componendo, ita erit AB ad A, vt CD ad C.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Si fuerit vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; erit reliquum ad reliquum, vt totum ad totum.

B 4	D 2
A 12.	C 6.

Supponatur esse AB ad CD, vt ablatum B ad ablatum D. Dico ita esse reliquum A, ad reliquum C, vt totum AB, ad totum CD.

Demonstratio. Quia est vt AB ad CD, ita B ad D: erit permutando (*per* 16.) vt AB ad B, ita CD ad D: & per conuersionem rationis, vt AB ad A, ita CD ad C: & rursus permutando, vt AB ad CD, ita A ad C.

Propositiones 20. & 21. non sunt necessariæ.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Ordinata ratio.

Si sint quotque magnitudines, & alia totidem qua bina, & bina in eâdem ordinatâ ratione sumantur; ex aequo extrema in eadem ratione erunt.

12	6	2	6	3	1
A	B	C	D	E	F

Tres magnitudines ABC, & aliæ totidem DEF, sint binæ & binæ in eâdem ratione ordinatâ, hoc est, sit A ad B, vt D ad E; & B ad C, vt E ad F. Dico ita esse A ad C, vt D ad F.

Demonstr. Si enim fieri potest, sit maior ratio A ad C, quam D ad F; igitur (*per defin.* 6.) A continebit pluries partes aliquotas ipſius C, v.g. ſemiſſem, quàm D contineat ſemiſſem ipſius F. Ponamus in A ſemiſſem C eſſe duodecies; & in D ſemiſſem F eſſe vndecies; quia autem eſt vt B ad C, ita E ad F; B toties continebit ſemiſſem C, quoties E continet ſemiſſem ipſius F. Ponamus vtrobique eſſe 6; quare A continens duodecim ſemiſſes ipſius C, ad B continentem tantùm 6, maiorem habebit rationem, quàm D continens tantùm vndecim ſemiſſes magnitudinis F ad E continentem ſex; ergo erit maior ratio A ad B, quàm D ad E, contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXIII.
Theorema.

Si sint tres magnitudines, & alia totidem in eâdem ratione perturbatâ; etiam extrema in eâdem ratione erunt.

A B C,	D E F.	G	
12 6 3,	8 4 2.	1	

Tres magnitudines ABC, & aliæ totidem DEF: sint in eâdem ratione perturbatâ; hoc est, ita sit A ad B; vt E ad F; & B ad C, vt D ad E. Dico ita esse A ad C, vt D ad F; ita sit F ad G, vt B ad C.

Demonstr. Quia ita est A ad B, vt E ad F; & B ad C, vt F ad G; ita erit (*per* 22.) A ad C, vt E ad G: rursùs quia ita est B ad C, vt D ad E, & F ad G; ita erit (*per* 11.) D ad E, vt F ad G: & permutando (*per* 16.) ita erit D ad F, vt E ad G: sed vt E ad G, ita ostendimus esse A ad C: ergo ita est A ad C, vt D ad F.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si prima ad secundam, eandem rationem habeat, ac tertia ad quartam; sit autem quinta, ad secundam, vt sexta, ad quartam: erit prima cum quintâ, ad secundam; vt tertia cum sextâ, ad quartam.

E	F		
4	6		
6	2	9	3
A	B	C	D

Sit A ad B, vt C ad D: sit item E ad B, vt F ad D. Dico ita esse A & E ad B, vt C & F ad D.

Demonstr. Quia est vt A ad B, ita C ad D (*per defin.6.*) toties A, continebit quascumque partes aliquotas ipsius B, quoties C continet similes partes aliquotas ipsius D: & pariter E, toties continet eas partes aliquotas B, quoties F continet partes aliquotas D: ergo A & F simul, toties continent partes aliquotas B, quoties C & E continent similes partes aliquotas D: ergo ita est AE ad B, vt CF ad D.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

B D
8 6
4 3 , 4 3
A C , E F

Sint quatuor magnitudines AB, CD, EF, proportionales, sitque AB maxima, & F minima. Dico duas AB & F, duabus CD & F, maiores esse; cùm sit AB ad CD, vt E ad F: & AB supponatur maior, quàm E; CD quoque maior erit quàm F, (*per* 14.) abscindatur ergo ex AB linea A, ipsi E æqualis; & ex CD linea C, ipsi F æqualis.

Demonſtratio. Eſt vt AB ad CD, ita A ad C: ergo (*per* 19.) ita erit reliqua B ad reliquam D, vt tota AB ad totam CD: ſed AB maior eſt quàm CD: ergo B maior erit, quam D. Cùm ergo A & E ſint æquales, ſi illis addantur F & C æquales, erunt A & F æquales duabus C & E: & additis B maiore, & D minore; erunt AB & F maiores, quàm CD & E. quod erat demonſtrandum.

Reliquæ 9. propoſitiones huius libri, non ſunt Euclidis; quia tamen à pleriſque auctoribus citantur, quaſi eſſent Euclidis; ideò illas non prætermittendas cenſui.

PROPO

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si prima ad ſecundam maiorem rationem habeat, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo quarta ad tertiam maiorem rationem, quàm ſecunda ad primam.

9	4	6	3
A	B	C	D
E			
8			

Sit maior ratio A ad B, quàm C ad D. Dico eſſe maiorem rationem D ad C, quàm B ad A. Ponatur eſſe E ad B, vt C ad D; eritque A maior quam E (*per* 10.)

Demonſtr. Cùm ſit E ad B, vt C ad D, erit conuertendo (*per Coroll.* 10.) vt C ad D, ita B ad E: ſed minor eſt ratio B, ad A maiorem, quàm ad E minorem (*per* 8.) igitur maior eſt ratio C ad D quàm B ad A. quod erat demonſtrandum.

V

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si prima ad ſecundam maiorem rationem habeat, quàm tertia ad quartam: permutando, prima ad tertiam maiorem rationem habebit, quàm ſecunda ad quartam.

9	4	6	3
A	B	C	D
E			
8			

Sit maior ratio A ad B, quàm C ad D. Dico maiorem eſſe rationem A ad C, quàm B ad D. Ponatur enim eſſe E ad B, vt C ad D; eritque vt priùs, E minor quam A.

Demonſtratio. Cùm ſit vt E ad B, ita C ad D: erit (*per* 16.) vt E ad C, ita B ad D: ſed maior eſt ratio maioris A ad C, quàm minoris E, (*per* 9.) igitur maior eſt ratio A ad C, quàm B ad D. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si prima ad ſecundam, maiorem rationem habeat; quàm tertia, ad quartam: prima quoque cum ſecundâ, ad ſecundam maiorem rationem habebit, quàm tertia cum quartâ, ad quartam.

9	4	6	3
A,	B,	C,	D,
E			
8			

Sit maior ratio A ad B, quam C ad D. Dico maiorem eſſe rationem AB ad B, quam CD ad D. Sit pariter vt E ad B, ita C ad D eritque, vt prius, E minor quàm A.

Demonſtratio. Cùm ſit vt E ad B, ita C ad D, erit componendo (*per* 18.) vt EB ad B, ita CD ad D: & cùm A ſit maior quam E, erit AB maior quam EB: quare (*per* 7.) maior erit ratio AB ad B, quàm

EB ad B: ergo maior eſt ratio AB ad B; quàm CD ad D. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Si prima cùm ſecundâ, ad ſecundam, maiorem rationem habeat; quàm tertia cum quartâ, ad quartam: diuidendô, prima ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quàm tertia ad quartam.

9	4	6	3
A	B	C	D
E			
8			

Sit maior ratio AB ad B, quàm CD ad D. Dico eſſe maiorem rationem A ad B, quàm C ad D: ſit enim vt CD ad D, ita EB ad B; eritque pariter EB, minor quàm AB, & E minor quàm A.

Demonſtr. Cùm ſit vt EB ad B, ita

CD ad D, erit diuidendô (*per* 17.) vt E ad B, ita C ad D; & cùm A sit maior quàm E, erit (*per* 8.) maior ratio A ad B, quàm E ad B: ergo maior erit ratio A ad B, quàm C ad D. quod erat demonstrandum,

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si prima cum secundâ ad secundam, maiorem rationem habeat, quàm tertia cum quartâ ad quartam: habebit, per conuersionem rationis, prima cum secundâ, ad primam, minorem rationem, quàm tertia cum quarta, ad tertiam.

9	4	6	3
A	B	C	D

Sit maior ratio AB ad B, quam CD ad D. Dico minorem esse rationem AB ad A, quam CD ad C.

Demonstr. Cùm sit major ratio AB ad B, quàm CD ad D; erit diuidendo (*per* 29.) major ratio A ad B, quàm C ad D; & conuertendo (*per* 26.) erit major ratio D ad C, quàm B ad A: & (*per* 28.) erit, componendo, major ratio CD ad C, quam AB ad A. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Si sint tres magnitudines, quæ in majori sint ratione ordinatá, quam aliæ tres: major erit ratio primæ priorum, ad tertiam; quàm primæ posteriorum, ad suam tertiam

16	10	3	9	6	2
A	B	C	D	E	F

Sit major ratio A ad B, quàm D ad E: sit item major ratio B ad C, quàm E ad F. Dico majorem esse rationem A ad C, quàm D ad F.

Demonstr. Quia est major ratio A ad B, quàm D ad E; erit, permutando, major ratio A ad D, quàm B ad E: & quia major est ratio B ad C, quam E ad F; major quoque ratio erit B ad E, quàm C ad F: ergo multò major erit ratio A ad D, quàm C ad F: igitur permutando (*per 27.*) erit major ratio A ad C, quàm D ad F.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si sint tres magnitudines, in majori ratione perturbatâ, quàm aliæ
1. *tres; erit major ratio primæ*
priorum, ad tertiam, quàm primæ posteriorum, ad suam tertiam.

B		F			
12		3			
13	6	2	4	2	1
A	C	E	H	I	K

Sit major ratio A ad C, quam I ad K: sit itē major ratio C ad E, quam H ad I. Dico majorem esse rationem A ad E, quam H ad K. Sit enim B, quæ ad C eandem rationem habeat, ac I ad K; eritque B minor quam A. Sit item F, ad quam C eandem rationem habeat ac H ad I; & cùm C majorem rationem habeat ad E, quam ad F; erit F major, quam E (*per 10.*)

Demonstr. Cùm sit vt B ad C, ita I ad K : & vt C ad F, ita H ad I; erit(*per* 23.) vt B ad F , ita H ad K : sed A major ad F majorem habet rationem quàm B (*per* 8.) Igitur major est ratio A ad F ; quàm H ad K : sed ahhuc major est ratio A ad E minorem , quàm ad F majorem (*per* 8.) ergo multò major est ratio A ad E , quàm H ad K. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Si Sit major ratio totius ad totum , quam ablati ad ablatum : erit etiam reliqui ad reliquum major ratio , quàm totius ad totum.

1 3 4 ,	6 2.
A B ,	C D.

Sit major ratio totius AB, ad totum CD; quam ablati B, ad ablatum D. Dico esse majorem rationem reliqui A, ad reliquum C, quàm totius AB, ad totum CD.

Demonſtratio. Quia major eſt ratio AB ad CD, quàm B ad D; erit conuertendo (*per* 26.) major ratio AB ad B, quàm CD ad D: & (*per* 30.) per conuerſionem rationis, minor erit ratio AB ad CD, quàm A ad C.

PROPOSITIO XXXIV.

Si ſint duæ ſeries magnitudinum, ſitque major ratio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecunda ad ſecundam; & hac maior quam tertia ad tertiam, & ita deinceps: maior erit ratio omnium priorum, ad omnes poſteriores, quàm omnium priorum, relictâ primâ, ad poſteriores, relictâ primâ: minor tamen quàm ſit ratio primæ priorum, ad primam poſteriorum: major denique, quàm ſit *ratio vltima priorum, ad vltimam posteriorum.*

12	6	4	4	3	2
A	B	C	E	F	G

Sit maior ratio A ad E, quam B ad F; & hæc maior quam C ad G: & ita consequenter, si essent plures.

Dico primò. Rationem omnium ABC ad omnes EFG, maiorem esse ratione C ad G.

Demonstratio. Cùm sit maior ratio A ad E, quàm B ad F; erit permutando (*per* 28.) maior ratio A ad B, quàm E ad F, (*per* 26.) & componendo (*per* 28.) erit maior ratio AB ad B, quàm EF ad F: & permutando (*per* 26.) maior erit ratio AB ad EF, quàm B ad F: sed ratio C ad G, minor est ratione B ad F: igitur ratio AB ad EF, maior est ratione C ad G: & componendo (*per* 28.) maior est ratio ABC ad EFG, quàm C ad G. quod erat primum.

Dico secundò, Rationem ABC ad EFG, maiorem esse ratione BC ad FG.

Demonstratiò. Quia est maior ratio A ad E, quàm B ad F: erit permutando, maior ratio A ad B, quàm E ad F: & componendo, maior erit ratio AB ad B, quàm EF ad F: & permutando maior ratio AB ad EF, quam B ad F. Quia igitur maior est ratio totius AB, ad totam EF, quam ablatæ B ad ablatam F, maior erit ratio reliquæ A ad reliquã E, quam totius AB ad totã EF, & (*per eandem*,) maior erit ratio B ad F, quam BC ad FG: & permutãdo, maior est ratio A ad BC, quam E ad FG: & componendo, maior erit ratio ABC ad EFG, quam BC ad FG. quod erat secundum.

Dico tertio, Maiorem esse rationem A ad E, quam ABC ad EFG.

Demonstratio. Quia maior est ratio (vt ostendimus,) totius ABC, ad totam EFG, quàm ablatæ BC, ad ablatam FG; erit (*per* 33.) maior ratio reliquæ A, ad reliquam E, quàm totius ABC, ad totam EFG. quod erat demonstrandum.

ELEMENTORVM EVCLIDIS

LIBER SEXTVS.

DEFINITIONES

Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos, singulis æquales habent, & latera circa æquales angulos, proportionalia.

Vt triangula ABC, DEF, erunt similia; si angulus A, fuerit angulo D æqualis; & angulus B, angulo E; & consequenter angulus F, angulo C: sitque vt AB ad BC.

ita DE ad EF; & vt EF ad FD, ita BC ad CA.

Secunda. Reciprocæ figuræ, sunt illæ, quæ ita se habent, vt in vtráque, & antecedentes termini rationum fuerint, & consequentes. *Hoc est, tunc figuræ sunt*

reciprocæ, cùm in vna figura est antecedens rationis, cuius consequens est in alia; & vicissim in secundâ est antecedens rationis similis, cuius consequens est in primâ: seu dum comparatio incipit, & desinit in eâdem figura: vt in parallelogrammis EDC, ABF: si ita esset ED ad FB, sicut AB ad CD, ea essent reciproca.

Tertia. Linea secta est extremâ & mediâ ratione; cùm eadem est ratio totius lineæ, ad maius segmentum; quæ maioris segmenti ad minus. Vt si linea AB, ita secetur in C, vt sit eadem ratio AB ad AC, quæ est AC ad CB.

Quarta. Altitudo figuræ est linea perpendicularis ducta à vertice figuræ ad eius basin. *Vt in triangulis ABC, linea AD, siue cadat intra figuram, siue extra.* triangula autem & parallelogramma, æquales habentia altitudines, inter easdem parallelas collocari possunt: collocatis enim basibus AB in eâdem linea, si perpendiculares AD, AD, fuerint æquales, lineæ AA, BC parallelæ erunt (*per* 33.1.)

Quinta. Ratio ex rationibus componi dicitur; cùm rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam rationem fecerint.

Sciendum est quamcumque rationem vnius quantitatis ad aliam (saltem rationalem) habere suum nomen desumptum ab aliquo numero indicante, quomodo se habeat antecedens rationis, ad consequens: vt si proponantur duæ quantitates, vna 12 pedum, altera 6 pedum. Dicimus esse rationem duplam prima ad secundam, ita vt binarius comparatus cum vnitate, indicet quam rationem prima habeat ad secundam.

Pariter si proponerentur 4 *&* 12, *diceremus esse rationem subtriplam, & trientem esse denominatorem huius rationis, indicantem ita se habere* 4 *ad* 12, *vt* 1 *ad* 3. (*dicitur autem hic denominator, quantitas huius rationis*) *proponantur tres termini* 12, 6, 2, *prima ratio* 12 *ad* 6 *est dupla; secunda* 6 *ad* 2 *est tripla: si velis habere rationem* 12 *ad* 2 *compositam, ex vtraque multiplica denominatores* 2 *&* 3; *fientque* 6: *igitur ratio* 12 *ad* 2 *erit sextupla, composita ex rationibus & tripla dupla, hoc enim intelligunt communiter Mathematici per compositionem rationis; quamvis si strictè loquamur, debeat potius dici multiplicatio rationum, vt diximus in Arithmetica.*

PROPOSITIO I.

Theorema.

Parallelogramma & triangula æqualis altitudinis, se habent vt bases.

Parallelogramma ABCD, EFGH, habeant altitudines DE, FE æquales. Dico eandem esse rationem basis BC ad basin GF, quæ parallelogrammi ABCD, ad parallelogrammum EFGH. Ita constituantur parallelogramma, vt bases GF, BC sint in eâdem linea, eruntque (*per defin.4.*) inter easdem parallelas: intelligantur altitudines DE, EF diuisæ, in quot voluerimus puncta quantùmlibet parua, per quæ ducantur lineæ basibus parallelæ, ita vt totum interuallum inter parallelas, huiusmodi lineis occupetur: cùm altitudines EF, DE æquales sint, tot erunt lineæ in vno parallelogrammo, quot in alio.

Demonstratio. Lineæ in vtróque parallelogrammô, basi parallelæ, illi sunt æquales (*per* 34.1.) ergo singulæ lineæ parallelogrammi ABCD, ad singulas parallelogrãmi EFGH, se habent vt basis BC, ad basin GF, & sunt tot in vno, quot in alio: ergo (*per* 12.5.) vt vna antecedentium, ad vnam consequentium, (nempe vt basis BC, ad basin GF) ita omnes lineæ parallelogrammi ABCD, ad omnes parallelogrammi EFGH: sed parallelogramma æqualia sunt, singula omnibus suis lineis: ergo ita est basis BC, ad basin GF, vt parallelogrammum ABCD, ad EFGH.

Quia autem triangula GEF, BDC sunt dimidia parallogrammorum, erunt (*per* 15.5.) in eâdem ratione ac parallelogramma: ergo etiam vt bases.

Hæc demonstratio secundùm methodum indiuisibilium, optimè concludit.

PROPOSITIO II.

Theorema.

In triangulo, linea parallela basi, latera secat proportionaliter : vicissim linea diuidens latera proportionaliter, parallela est basi.

In triangulo ABC, linea DE sit parallela basi BC. Dico latera AB, AC esse diuisa proportionaliter ; nempe ita esse AD ad DB ; vt AE ad AC.

Demonstratio. Triangula DBE, DEC, eandẽ basin DE habentia,& inter easdem parallelas(*per* 38.1.) sunt æqualia : igitur (*per* 7.5.) ita erit triangulum ADE ad triangulum DCE, vt triangulum ADE, ad EDB : sed vt triangulum ADE, ad DEB; ita basis AD, ad DB (*per* 1.*huius*) cùm eundem habeant verticem E ; & consequenter vna eademque sit vtrique altitudo, nempe perpendicularis EF. Pariter vt triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita basis AE ad EC: ergo ita est AD ad DB, sicut AE ad EC.

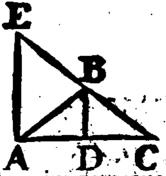
Secundò. Si sit vt AD ad DB, ita AE ad EC. Dico DE, BC parallelas esse.

Demonstratio. Est enim, sicut prius, vt AE ad EC, ita triangulum ADE ad triangulum DEC; & vt AD ad DB, ita triangulum ADE ad DBE; (*per* 1.*huius*) igitur idem triangulum ADE eandem habet rationem ad triangula EDB, DEC: ergo (*per* 9.5.) triangula DEB, DEC sunt æqualia: quæ, cùm habeant eandem basin DE, erunt (*per* 39.1.) inter easdem parallelas. quod erat demonstrandum.

PROPO

PROPOSITIO III.
Theorema.

Linea, angulum trianguli bifariàm diuidens, basin dividit in segmenta lateribus proportionalia: si linea diuidat basin in segmenta lateribus proportionalia, angulum oppositum bifariàm diuidet.



Trianguli ABC, angulus ABC, bifariàm diuidatur lineâ BD. Dico ita esse AD ad DC, sicut AB ad BC. Producatur linea CB; Sintque AB, BE æquales, iungaturque AE.

Demonstratio. In triangulo Isoscele ABE, sunt (*per* 5.) anguli BAE, BEA æquales: & cùm angulus externus ABC, iis sit æqualis (*per* 32. 1.), sitque diuisus bifariàm; erunt anguli alterni DBA, BAE æquales; & (*per* 29. 1.) lineæ AE, BD parallelæ : ergo (*per 2. huius*) erit vt AD ad DC, ita AB, seu EB, ad BC. quod erat primum.

Secundò. Sit vt *AD* ad DC, ita AB, seu EB, ad BC. Dico angulum ABC diuisum esse bifariàm.

Demonstratio. (*per 2. huius.*) lineæ AE, BD sunt parallelæ : ergo anguli alterni EAB, ABD sunt æquales (*per* 29.1.) sicut externus DBC, & internus E ex eâdem parte : & cùm anguli BAE, BEA sint æquales (*per* 5. 1.) erunt ABD, DBC æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Triangula æquiangula, habent latera circa æquales angulos proportionalia, & opposita æqualibus angulis, homologa.

Triangula ABC, DEF sint æquiangula, id est, sint anguli A,D : C,F : B,E, æquales. Dico ita esse AB ad BC, vt DE ad EF; & BC ad CA, vt EF ad FD; ita vt AB & DE oppositæ angulis C & F æqualibus, sint antecedentes in suâ ratione; quod est homologum. Abscindatur ex majori AB æqualis DE; & ex BC æqualis EF, ducaturque FD; erit (*per* 4. 1.) triangulum EDF omnino æquale triangulo separato EDF.

Demonstratio. Anguli C & F sunt æquales: ergo (*per* 29. 1.) lineæ DF, AC ſunt parallelæ: ergo (*per* 3.) ita eſt CF ad FB, vt AD ad DE: & componendo, vt CB ad FE, ita AE ad DE: & permutando, vt CB ad BA ita FE ad ED. Eôdem modô, ſi abſcinderem ex A lineas æquales lateribus DF, DE, idem oſtenderem de AC, AB, DF, DE.

Coroll. Clarum eſt, quod ſi in triangulo, ducatur linea vni lateri parallela, fient duo triangula æquiangula.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si triangula habeant latera proportionalia, erunt æquiangula.

In triangulis ABC, DEF, ſit vt AB ad BC, ita DE ad EF. Dico angulos A, D: B, E: C, F æquales eſſe. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B: item EFG, æqualis angulo C; eritque reliquus G, reliquo

A æqualis (*per cor.* 32. 1.)

Demonstr. Cùm triangula ABC,FEG sint æquiangula ; erit (*per* 4.) vt EF ad EG, ita BC ad BA : sed vt BC ad BA, ita supponebatur esse EF ad ED : ergo ita est FE ad EG, sicut EF ad ED : ergo (*per* 3. 5.) ED , EG , sunt æquales. Sic ostendam FG, FD, æquales esse : & (*per* 8. 1.) triangula DFE, FEG esse æquiangula : sed FEG erat æquiangulum triangulo ABC : ergo DEF eidem æquiangulum est.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Triangula , habentia latera circa angulum æqualem proportionalia , sunt æquiangula.

Triangula ABC , DEF habeant angulos B & E æquales ; sitque vt AB ad BC, ita DE ad DF. Dico triangula ABC, DEF esse æquiangula, sit BC major quàm EF; erit etiam AB major quàm DE: abscindatur BF, æqualis EF; & DB, æqualis DE; ducaturque DF: erunt (*per* 4. 1.) triangula DFE, BFD omninò æqualia.

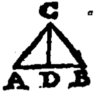
Demonstr. Cùm sit vt AB ad BC, ita DE ad FE; erit etiam vt AB ad BC, ita DB ad BF: & alternando, vt AB ad BD; ita BC, ad BF: & diuidendo, vt AD ad DB, ita CF ad FB: ergo latera AB, BC sunt diuisa proportionaliter in D & F. Quare (*per* 2.) AC, DF sunt parallelæ, & anguli F & C sunt æquales; sicut D & A: ergo triangula DFE, ABC sunt æquiangula.

PROP. VII. relinquatur.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

In triangulo rectangulo, perpendicularis ducta ab angulo recto, ad latus oppositum, diuidit triangulum in duo triangula, toti triangulo similia.



Trianguli ABC, angulus ABC rectus sit; à quo ad latus oppositum AB, ducatur perpendicularis CD. Dico facta esse duo triangula BCD, ACD similia toti triangulo ABC, hoc est, illi æquiangula: nàm (*per* 4.) si sint æquiangula, habebunt latera proportionalia.

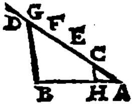
Demonstr. Triangula BDC, ABC, habent angulum B communem; item & alium angulum rectum: ergo (*per* 32.1.) reliqui BCD, & A æquales erunt. Eôdem modô ostendam triangulum ADC, triangulo ABC æquiangulum esse.

Coroll. Linea CD est media proportionalis inter BD & DA : cùm enim triangula ADC, DBC sint æquiangula; erit vt AD latus oppositum angulo C, ad CD oppositum angulo B in triangulo DBC; ita DC latus oppositum angulo A in triangulo CAD, ad DB quod opponitur angulo DCB.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Proposita linea imperatam partem auferre.



Sit auferenda quarta pars lineæ AB, ducatur linea AD; cum AB angulum comprehendens, in quâ abscindâtur cõtinuè quatuor lineæ æquales, AC, CE, EF, FG: ducatúrque GB, ipsiq; parallela CH. Dico AH esse quartam partem lineæ AB.

Demonstr. Cùm CH sit parallela basi BG, erit (*per* 4.) vt AC ad CG, ita AH ad HB : & componendo (*per* 18.) vt AG ad AC, ita AB ad AH : sed AG continet quater lineam AC : ergo AB, lineam AH quater continebit.

PROPOSITIO X.

Problema.

Datam lineam ita secare, vt alia recta secta fuerit.

Sit linea AB ita secanda, sicut recta AC secta est in D & E : ducatur BC, & illi parallelæ EG, DF. Dico factum esse quod requiritur.

Demonstratio. Cùm basi EG, ducta sit parallela DF, ita erit (*per* 4.) AD, ad DE; sicut AF, ad FG : & componendo vt AE, ad AD; ita AG ad AF. Pariter quia basi BC, ducta est parallela EG, erit vt AE, ad EC; ita AG, ad GB : & componendo vt AB, ad AG, ita AC ad AE: ergo ita secta est AB, sicut AC.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Duabus datis lineis, tertiam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ AB, AC, quibus tertia proportionalis inuenienda est. Primò, ita disponantur vt angulum efficiant; absciudaturque BD æqualis BC, cui parallela ducatur DE. Dico CE esse tertiam proportionalem duabus AB, AC.

Demonstratio. Cum basi DE ducta sit parallella CB, ita erit (*per* 4.) AB ad AC, sicut DB, seu illi æqualis BC, ad CE, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Tribus datis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Tribus lineis AB, BC, AD sit inuenienda quarta proportionalis: AD angulum faciat cum AB, ducatur BD, eique parallela CE. Dico DE esse quartam proportionalem.

Demonstratio. Cùm BD sit parallela basi EC, erit vt AB ad BC; ita AD, ad DE (*per* 4.) ergo DE est quarta proportionalis.

Coroll. Hæ proportiones sunt fundamentum regularum proportionalium.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Duabus datis lineis, mediam propor-tionalem inuenire.

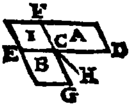
Duabus lineis AB, BC media proportionalis sit inuenienda. Diuidatur tota AC bifariàm in puncto D, tum ex centro D, interuallô DC, aut DA, describatur semicirculus AEC, ducaturque perpendicularis BE. Dico ita esse AB ad BE, vt BE ad BC. ducantur AE, CE.

Demonstratio. Angulus AEC in semicirculo rectus est, (*per* 31.3.) & (*per corol*.8) perpendicularis BE, est media proportionalis inter AB, BC.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Parallelogrammorum æquiangulorum, & æqualium latera circa angulos æquales reciprocantur. Et quorum latera circa æquales angulos reciprocantur, illa æqualia sunt.



Parallelogramma A & B sint æquiangula, sic enim ita coniungi poterunt, vt latera EC, CD, sicut GC, CF, circa angulos æquales vnam lineam efficiant (*per* 15.1.) Dico latera circa angulos æquales EBG, FCD, esse reciproca; nempe ita esse EC, ad CD; sicut FC, ad CG. Producantur latera, ita vt perficiatur parallelogrammum I.

Demonstr. Parallelogrammum I ad A & B æqualia, eandem habet rationem (*per* 5.7.) sed vt I ad A, ita basis EC ad CD,

(*per* 1. *huius.*) & vt parallelogrammum I ad B, ita basis FC, ad CG (*per eandem.*) ergo eadem est ratio EC ad CD, quæ FC ad CG. quod erat demonstrandum.

Secundò. Si latera reciprocentur. Dico parallelogramma A & B esse æqualia.

Demonstratio Ita supponitur esse EC, ad CD; sicut FC ad CG; sed vt EC, ad CD, ita est I ad A: & vt FC ad CG; ita est I ad B (*per* 1.*huius*:) ergo eadem est ratio I ad B, & I ad A: ergo (*per* 7.5.) A & B sunt æqualia.

PROPOISTIO XV.

Theorema.

Triangula æqualia, & vnum angulum æqualem habentia, habent latera circa æqualem angulum reciproca. Item triangula, quæ habent latera circa æqualem angulum reciproca, sunt æqualia.

Triangula A & B sint æqualia, sint item anguli in D æquales. Dico ita esse ED ad DC, sicut GD ad DF. Coniungantur anguli æquales, ita vt sint oppositi ad verticem, sitque vna linea EDC, sicut & FDG (*per* 15.1.) ducaturque GE.

Demonstratio. Cùm triangula A & B sint æqualia, ita erit (*per* 7.5.) triangulum A ad triangulum H, vt B ad idem H: & cùm A & H habeant eundem verticem G, erit vt A ad H, ita DC ad DE. Pariter cùm triangula B & H habeant eundem verticem E, ita erit B ad H ſicut FD ad DG (*per* 1.*huius*:) ergo ita eſt DC ad ED; ſicut FD ad DG. quod erat demonſtrandum.

Secundò. In eâdem ſuppoſitione, dico ſi latera reciprocentur, triangula A & B eſſe æqualia.

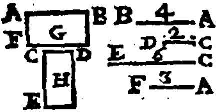
Dem. Supponitur eſſe DC ad DE, vt FD ad DG: ſed (*per* 1.*huius*) vt CD ad DE, ita eſt A ad H: & vt FD ad DG, ita eſt B ad H: ergo ita eſt A ad H, ſicut B ad H: ergo A & B ſunt æqualia. (*per* 7. 5.)

PROPO

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint, rectangulum contentum ſub extremis, æquale eſt rectangulo contento ſub mediis: viciſſim ſi rectangula ſub mediis, & ſub extremis æqualia ſint, lineæ proportionales erunt.



Sit vt AB, ad CD, ita CE ad AF: fiátque rectangulum G, ſub extremis AB, & AF: fiat item rectangulum H ſub mediis DC, EC. Dico rectangula G & H æqualia eſſe.

Demonſtrat. Rectangula G & H ſunt æquiangula, & habent latera reciproca, nempe vt AB ad CD; ita EC ad AF; er-

Z

go(*per* 14.) G & H erunt æqualia.

Secundò. Si G & H æqualia sint (*per eandem*) erit vt AB ad CD ; ita CE ad AF.

Coroll. Hac propositione demonstratur regula trium, vt vocant, in quâ datis tribus numeris quæritur quartus proportionalis. Si enim dentur tres numeri 4. 2. 6. ignoretur quartus ; multiplico 6 per 2, producitur 12, rectangulum scilicet H, quod cùm sit æquale ipsi G , habetur rectangulum G, estque 12 ; cuius latus AB est 4 : diuido 12 per 4 , & prouenit latus AF, nempe 3.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si tres lineæ proportionales fuerint, erit rectangulum sub extremis, æquale quadrato mediæ: & vicissim si quadratum mediæ æquetur rectangulo sub extremis; tres lineæ proportionales erunt.

Sit AB ad DE, vt DE ad BC, dico quadratum mediæ DE æquari rectangulo sub AB, BC: sumatur bis linea DE.

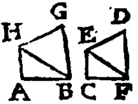
Demonstratio. Quia ita est AB, ad DE secundam; vt DE tertia, ad BC: rectangulum sub extremis AB, BC, æquabitur (*per* 16) rectangulo sub mediis DE, DE, quod est quadratum, cùm lineæ DE, DE sint æquales.

Vicissim si rectangulum sub extremis æquale sit quadrato mediæ DE, nempe rectangulo ſub mediis DE,DE ; erit (*per* 16.) vt AB ad DE ; ita DE ad BC. Ergo tres lineæ AB, DE, BC ſunt proportionales.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Super datâ rectâ, deſcribere rectilineum alteri dato ſimile.



Sit deſcribendum rectilineum, ſimile rectilineo CFDE ſupra lineam AB. Diuidatur rectilineum CFDE in triangula, fiantque anguli ABH, & BAH æquales angulis CFE, FCE. Quare (*per* 31. 1.) triangula ABH, CEF erunt æquiangula. Item fiant anguli HBG, EFD : BHG, FED æquales. Dico rectilineum AG, ſimile eſſe rectilineo CD.

Demonſtratio, cùm triangula partialia vtriúſque polygoni ſint æquiangula, patet tota polygona esse æquiangula. Item quia triangula ABH, CFE sunt æquiangula, erit (*per* 4. 6.) vt HA, ad AB; ita EC, ad CF; & vt AB, ad BH; ita CF, ad FE.

Pariter cùm triangula HBG, EFD sint æquiangula; erit vt HB, ad BG; ita EF ad FD: ergo ex æquo ordinatè, erit (*per* 22. 5.) vt AB, ad BG; ita CF, ad FD. Et ita de reliquis lateribus: igitur polygona habent, & angulos æquales, & latera circa illos proportionalia: ergo (*per def.* 1.) sunt similia.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Triangula similia, sunt in duplicatâ ratione laterum homologorum.

Triangula ABC, DEF sint similia, seu æquiangula. Dico rationem trianguli ABC, ad triangulum DEF, esse duplicatam rationis lateris BC, ad latus EF fiat vt BC ad FE, ita FE ad CG. Dico triangulum ABC, ad triangulum DEF, esse vt BC, ad CG, quod est habere rationem duplicatam.

Demonstr. Quia angulus C, æqualis est angulo F, & ita est (*per* 4.) AC ad DF, & vt BC ad FE; ita est FE, ad CG; ita erit AC, ad DF vt FE; ad CG; sunt ergo latera reciproca circa angulos æquales F & C: ergo (*per* 15. *huius*) triangula

DFE, ACG sunt æqualia: sed (*per 1. huius*) triangulum ABC ad triangulum ACG, se habet vt basis BC, ad basin CG: ergo triangulum ABC ad triangulum DEF se habet vt BC, ad GC. Quod erat demonstrandum. Ratio est, quia triangulum ABC, superat triangulum DFE, non solùm in altitudine, sed etiam in latitudine.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Similia polygona, in totidem similia triangula, totis homologa diuiduntur, & polygona similia duplicatam habent rationem laterum homologorum.

Polygona A & B sint similia. Dico ea posse diuidi in totidem triangula, quæ sint similes partes suorum totorum: ducantur enim lineæ CN, DN; HF, IF.

Demonstratio. Cum Polygona A & B sint similia: erunt anguli L & G æquales (*per def.* 8.) eritque vt NL ad LC; ita FG, ad GH; quare triangula LNC, FGH sunt similia. Ita ostendam triangula FKI, NED esse similia. Quia autem totus angulus DCL, toti IHG supponebatur æqualis & anguli LCN, GHF sunt æquales;erunt & reliqui NCD, FHI æquales. Idẽ ostẽdã de angu'i NDC, FIH: sunt ergo triãgula NDC, FHI æquiãgula.

Secundò, ostẽdo ea esse totis proportionalia. Nam ita est CL ad CD; vt HG ad HI: & permutãdo vt CL, ad HG; ita CD, ad HI; sed triangulum NLC, ad triangulum simile FGH, *(per 19.)* est in duplicatâ ratione LC, GH. Pariter triangulum NCD, ad triangulum simile FHI, est in duplicatâ ratione CD ad HI: ergo ita est triangulum NLC, ad triangulum FGH; vt triangulum NCD, ad triangulum FHI; & pariter ita erit triangulum DEN, ad triangulum IKF: ergo omnia triangula polygoni A, ad omnia polygoni B, seu polygonum ad polygonum, erunt, vt vnum triangulum ad aliud (*per* 12. 5.) & quia singula triangula ad sibi respondentia duplicatam habent rationem laterum homologorum; ipsa etiam polygona habebunt duplicatam rationem laterum homologorum.

Coroll. 1. Quæcumque rectilinea similia, duplicatam habent rationem late- t m homologorum.

Coroll. 2. Si tres lineæ continuè proportionales fuerint, erit vt prima ad tertiam; ita polygonum, supra primam descriptum, ad simile polygonum supra secundam d[illegible]riptum, nempe in ratione duplicatá.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Rectilinea eidem similia, inter se similia sunt.

Si primum & secundum polygonum tertio sint similia. Dico illa inter se similia.

Nam ostendam tam primum, quam secundum, diuidi in totidem triangula similia, ac tertium: ergo in totidem diuiditur primum ac secundum. Ostendam item angulos vtriusque æquales esse angulis tertij: ergo habere æquales angulos. Tertiò latera eandem habere rationem ac latera tertij : ergo habere eandem rationem. Neque aliud requiritur ad similitudinem rectilineorum.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si quatuor lineæ fuerint proportionales; polygona similia supra illas descripta, erunt porportionalia: & vicissim si polygona similia fuerint proportionalia, lineæ proportionales erunt.

Sit AB ad CD, vt GH ad KI. Dico si supra AB & CD describantur polygona similia E & F, & supra GH & KI, alia duo similia L & M, esse vt E ad F, ita L ad M.

Demonstr. E ad F est in duplicatâ rationis AB, ad CD, seu GH ad KI; sed L ad M est etiam in duplicatâ GH, ad

KI (*per* 21.*huius*:) ergo eadem eſt ratio E ad F, quæ L ad M.

Viciſſim, ſi ſit E ad F, vt L ad M. Dico eſſe AB, ad CD; vt GH, ad KI.

Demonſtr. Cùm enim ratio E ad F, ſit duplicata rationis AB ad CD, (*per* 21.) & pariter ratio L ad M ſit duplicata rationis GH, ad KI; ſitque ratio E ad F, eadem ac ratio L ad M; erit etiam ratio AB, ad CD eadem, ac GH, ad *KI*. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXIII.
Theorema.

Parallelogramma æquiangula habent rationem, ex laterum rationibus compoſitam.

Parallelogramma A & B ſint æquiangula. Dico rationem A ad B componi ex ratione lateris CD, ad ED: & ex ratione lateris DF ad DG: hoc eſt, ſi fiat vt CD ad DE; ita H ad I;

& vt FD ad DG, ita I ad K; ratio parallelogrammi A ad B, erit vt H ad I, coniungantur parallelogramma in angulis æqualibus; ita vt EDC, vnam lineam constituant, sicut & FDG; perficiaturque parallelogrammum L.

Demonstr. Quia (*per primam*) ita est A ad L, sicut CD ad DE, seu vt H ad I: pariter ita est L ad B, vt FD ad DG, seu vt I ad K; erit ex æquo ordinatè, (*per* 22.5.) A ad B, vt H ad K, ratio autem H ad K componitur ex ratione H ad I, seu CD ad DE, & ex ratione I ad K, seu FD ad DG: ergo ratio A ad B componitur ex ratione CD ad DE, & ex ratione FD ad DG. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.
Theorema.

In omni parallelogrammo, parallelogramma per quæ transit diameter, & toti & inter se sunt similia.

In parallelogrammo AC, diameter transeat per parallelogramma EF, GH. Dico ea & toti, & inter se esse similia.

Demonstratio. Parallelogramma EF, & AC, habent angulum B communem; & propter parallelas HE, DA; anguli BEI & A, externus & internus (*per* 29.1.) sunt æquales: sunt igitur æquiangula. Secundò. In triangulo BAD, ita (*per coroll.*4. *huius*) erit BE ad EI, vt BA ad AD: ergo latera sunt proportionalia, quare (*per defin.*8.) parallelogramma EF, AC sunt similia. Eôdem modô ostendam GH, AC esse similia: ergo EF, GH sunt similia.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Construere rectilineum æquale dato, & alteri simile.

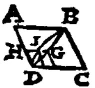
Sit construendum rectilineum æquale dato A, & simile alteri B: fiat (*per* 34. 1.) parallelogrammum CE, æquale rectilineo B; & supra DE in dato angulo N. fiat parallelogrammum DF, æquale rectilineo A (*per* 45. 1.) tum inter CD, DH, quæratur media proportionalis LK, (*per* 13. *huius*) denique (*per* 18.) fiat supra LK, rectilineum O, simile rectilineo B. Dico illud æquale esse rectilineo A.

Demonstratio. Cùm CD, LK, DH sint continuè proportionales; erit rectilineum supra primam CD, nempe B, ad simile rectilineum supra secundam, nempe O, vt prima CD ad tertiam DH, (*per coroll.* 2.

20.) ſed vt CD ad DH, ita CE ad DF, ſeu B ad A, cùm ſint æqualia : ergo vt B ad O, ita B ad A : ſunt ergo O & A æqualia (*per* 7. 5.) quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVI.
Theorema.

Si intra parallelogrammum aliud minus ſimile, & communem angulum habens conſtituatur; diameter maioris tranſit per angulos minoris.



Intra parallelogrammum AC, conſtituatur aliud ſimile DG, communem cum illo angulum habens D. Dico diametrum DB, tranſire per angulum G : ſi enim non tranſit per G tranſeat per I, ducaturque per I parallela ad HD.

Demonſtratio. (*Per* 24.) parallelogrammum DI ſimile eſt parallegrammo

AC : ergo ita est DA ad AB, sicut DH ad HI : sed supponitur DG esse eidem AC simile : ergo etiam erit vt DA, ad AB, ita DH, ad HG : ergo ita est DH , ad HI ; sicut DH, ad HG : ergo HI , & HG sunt æquales : pars & totum : quod est absurdum.

PROP.XXVII.XXVIII.&XXIX.

Reliquantur.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Datam lineam extremâ , & mediâ ratione secare.

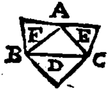
Recta AB sit secanda extremâ , ac mediâ ratione nempe,ita vt tota AB, ad maius segmentum AC , eandem rationem habeat, ac AC ad BC.

Ita secetur AB (*per* 11.2.) vt rectangulum sub tota AB , & minori segmento BC, æquale sit quadrato AC. Dico factum esse quod jubetur.

Demonstratio. Cùm rectangulum sub AB, CB æquale sit quadrato AC, erit (*per* 17.) vt AB, ad AC; ita AC, ad CB. quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXXI.
Theorema.

In triangulis rectangulis, rectilineum quodvis supra basin descriptum, æquale est rectilineis similibus, supra latera descriptis.



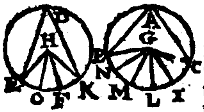
Sit trianguli ABC, angulus BAC rectus. Dico rectilineum D, descriptum supra basin BC, æquale esse rectilineis similibus E, & F, descriptis supra latera AB, AC.

Demonstratio. rectilinea similia F, E, D, sunt (*per* 20. *huius*) in duplicatâ ratione laterum AB, BC, CA. Si loco illorum describerentur quadrata, ea etiam haberent duplicatam rationem laterum: ergo hæc rectilinea se habent vt quadrata: sed (*per* 47.1.) quadratum ex BC, æqualę est quadratis ex AB, AC: ergo rectilineum D, æquale est rectilineis F & E.

PROPOSITIO XXXII.
Relinquatur.

PROPOSITIO XXXIII.
Theorema.

In circulis æqualibus, Anguli siue ad centra, siue ad peripheriam constituti, eandem habent rationem, ac arcus quibus insistunt. Sectores item eandem habent rationem.



Circuli ABC,DEK sint æquales; in quibus primò constituãtur anguli ad centra BGC,EHK. Dico ita esse arcum BC ad arcum EK, sicut angulus BGC, ad angulum EHK. Sint enim arcus EO,OF, FK, partes aliquotæ arcus EK ; & arcus EO quinquies contineatur in BC,ita vt ſint arcusBN,NM,ML,LI,IC æquales arcui EO:ducanturque EH, OH, FH,KH ; BG,MG,LG,IG,CG.

Demonſtratio. Quoties in arcu BC,invenitur pars aliquota arcus EK, toties in angulo BGC inuenitur angulus EHO, pars aliquota anguli EHK. Cùm (*per* 27.3.) omnes anguli EHO, OHF, FHK, BGN NGM,MGL,&c. ſint æquales:ergo (*per* 5.*defin.* 5.)ita erit arcus EK,ad arcum BC, vt angulus EHK, ad angulum BGC. quod erat primum.

Et cùm anguli A & D , in peripheria ſint medietates angulorum BGC, EHK; eandem rationẽ habebunt anguli A & D.

Idem dicendum de ſectoribus , nám ſi ducerentur lineæ FK , CI , illæ æquales eſſent (*per* 28.3.) fierentque triangula CGI , KHF æqualia (*per* 8.1.) item ſegmenta IC, FK, quæ lineæ CI , FK auferunt,eſſent æqualia : ergo ſectores HFK, CGI ſunt æquales,poteſtque fieri eadem demonſtratio.

ELEMEN

ELEMENTORVM EVCLIDIS

LIBER VNDECIMVS.

DEFINITIONES.

1. Solidum est quantitas, longitudinem, latitudinem, & crassitiem habens.

2. Solidi extrema sunt superficies.

3. Linea dicitur ad planum recta, quæ

est perpendicularis ad omnes lineas in eo plano ad ipsam ductas. *Vt linea AB dicetur recta ad planum CD; si ad omnes per punctum* B, *in plano CD ductas, fuerit perpendicularis; vt si fuerit perpendicularis, ad lineas GBH,* *FBE. sintque anguli ABF, ABE, ABG, ABH recti.*

4. Planum ad planum rectum est, cùm

lineæ in vno plano ductæ, perpendiculares ad communem planorum sectionem, ad alterum planum sunt rectæ.

Communem planorum sectionem, vocamus lineam, existentem in vtrôque plano, qualis est linea AB; quæ est tam in plano AE, quam in plano AC. Si igitur linea EF, ducta in plano AF, & perpendicularis ad AB, fuerit recta ad planum AC; planum AE ad planum AC, rectum est.

5. Si linea AB non fuerit recta ad planum DC, & ex eius puncto

sublimi A, ducatur AE, ad planum CD recta; ducatur item BE, angulus ABE, est inclinatio lineæ AB, cum plano CD.

6. Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus, quem comprehendunt duæ lineæ, perpendiculares ad communem planorum sectionem, in vtroque plano

ductæ. *Vt plani AB, ad planum DC inclinatio, est angulus acutus, quem comprehendunt lineæ EF, FG perpẽdiculares ad AH, ducta in vtroque plano.*

7. Planum ad planum similiter inclinatum est, cùm anguli inclinationum æquales fuerint.

8. Plana parallela sunt, quæ quantumvis producantur, æquali semper interuallo distant ab inuicem.

9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ totidem planis similibus continentur. *Vt duo cubi:tales autem figuræ angulos solidos æquales habent: hæc tamen definitio non conuenit sphæris, cylindris, & conis.*

10. Æquales, & similes figuræ solidæ, sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur. *Ita vt si concipiantur se penetrare, neutra aliam excedat; cùm angulos, & latera æqualia habeant.*

11. Angulus solidus, est plurium, quam duarum linearum in diuersis planis existentium mutua inclinatio. *Vt inclinatio*

linearum AB, AC, AD, existentium in diuersis planis.

12. Pyramis, est figura solida triangulis comprehensa, eundem verticem habentibus, & bases in eodem plano. *Vt figura ACBD.*

13. Prisma, est figura solida, cuius aduersa duo plana æqualia, similia, & parallela sunt; alia vero parallelogramma. *Vt ABCDEF: possunt autem aduersa plana esse quæcúmque polygona.*

14. Sphæra, est figura solida vnicâ superficie contenta, ad quam, ab vno puncto intra figuram posito, ductæ lineæ sunt æquales. *Alij sphæram definiunt per circumuolutionem semicirculi, circa diametrum quiescentem.*

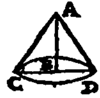
15. Axis, est quiescens illa linea, circa quam semicirculus circumuoluitur.

16. Centrum sphæræ, est idem ac centrum semicirculi. *Intellige illius semicirculi, cuius circumuolutione generatur sphæra.*

17. Diameter est quæcúmque li-

nea, per centrum ſphæræ tranſiens : & in eius ſuperficie vtrinque terminata.

18. Si ex puncto ſublimi, linea circumferentiam circuli decurrat, conum deſcribet.



Vt ſi linea AC, immobilis in puncto A, decurrat circumferentiam circuli CD, conum deſcribet : cuius vertex, eſt punctum A in ſublimi poſitum, baſis ſubiectus circulus.

19. Axis eſt linea ducta à vertice ad centrum baſis, *vt A B.*

20. Si circa duos circulos parallelos, & æquales moueatur linea; ita vt ſit ſemper parallela lineæ connectenti centra circulorum, deſcribet cylindrum. Linea circulorum centra connectens, dicitur axis.

Vt AB.

21. Similes coni recti (voco autem rectos, cùm axis eſt perpendicularis ad baſin) ſunt quorum axes, & diametri baſium, ſunt proportionales. In obliquis, ſeu inclinatis, addendum eſt, vt axes ſint ad baſes ſimiliter inclinati.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Recta linea, pars non est in plano, alia in sublimi.

Sit in plano AB, lineæ pars aliqua DC. Dico totam lineam esse in eodem plano, nec aliquam eius partem esse in sublimi, seu extra illud planum, sit enim, si fieri potest, pars eius aliqua DE in sublimi.

Demonstratio. Certum est lineam DC, in plano AB produci posse: possumus etiam ducere lineam DG & angulos GDC, GDF facere duobus rectis æquales; quare (*per* 14.1.) linea DF, vnam lineam constituit cum linea CD: ergo duæ rectæ lineæ CDE, CDF habent segmentum CD commune, quod est absurdum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Duæ lineæ se secantes, in eôdem sunt plano: & omne triangulum in eôdem est plano.

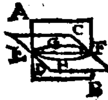
Duæ lineæ AB, CD, se mutuò secent in puncto E, & adiunctâ lineâ BC, fiat triangulum EBC. Dico totum trianlum EBC, & totas lineas AB, BC in eôdem esse plano.

Demonstratio. Si enim fieri potest pars BFGC, trianguli EBC, sit in vno plano; alia verò EGF in alio: igitur linearum AB,CD pars aliqua CG,BF,esset in vno plano, alia vero in sublimi(*contra præced.*) quare lineæ AB,CD, quæ in plano trianguli EBC existunt; totæ sunt in eodem plano.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio est linea recta.



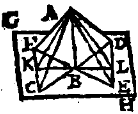
Plana AB, CD, se mutuò secent, sitque communis sectio linea EF. Dico eam esse lineam rectam. Si enim EF non est linea recta; ducatur in plano AB, linea recta à puncto E ad F, quæ sit EGF: & in plano CD, linea EHF: si enim hæ essent vna linea recta, hæc pertineret ad vtrúmque planum; atque adeo cõmunis sectio esset linea recta.

Demonstr. Duæ lineæ rectæ EGF, EHF spatium clauderent (*contra* 12. *pronunciatum*) si essent diuersæ: ergo lineæ rectæ in vtrôque plano ductæ, in vnam lineam coalescunt.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si linea fuerit perpendicularis duabus ſeſe mutuò ſecantibus; etiam ad planum per ipſas ductum, recta erit.



Linea AB, ſit perpendicularis ad duas lineas CD, FE, ſe ſe interſecantes in puncto B; ita vt anguli ABC, ABD, ABE, ABF, ſint recti. (*quod figura plana ſatis exprimere non poteſt.*) Dico lineam AB eſſe rectam ad planum GH, in quo ſunt lineæ CDEF, ſeu eſſe perpendicularem ad quamcumque lineam in eôdem plano per punctum B ductam. Ducatur enim KBL. Oſtendo AB, ad eam eſſe perpendicularem. Abſcindantur 4 lineæ BC, BD, BE, BF æquales, ducantúrque FC, DE. Item ducantur AC, AD, AE, AF, AK, AL.

Demonſtratio. In triangulis ABC, ABD, ABE, ABF, cùm latus AB ſit commune, & latera BC, BD, BE, BF facta ſint æqualia, & anguli in B ſint recti, erunt (*per* 4. 1.) baſes AC, AD, AE, AF æquales: & anguli ADE, AED, AFC, ACF æquales.

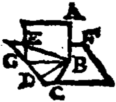
Secundò. In triangulis BDE, BCF, cùm latera ſint æqualia, & anguli CBF, DBE ad verticem oppoſiti æquales, (*per* 15. 1.) erunt reliqui anguli æquales, nempè BDE, BED, BCF, BFC.

Tertiò. In triangulis KBC, BDL, cùm latera CB, BD ſint æqualia, & anguli KBC, DBL oppoſiti ad verticem æquales, ſicut & anguli BCF, BDE: erunt (*per* 15. 1.) latera KC, DL, KB, BL æqualia. Quartò, cùm triangula ADL, AKC, habeant latera AC, AD: KC, DL æqualia, & anguli ADE, ACF ſint oſtenſi æquales: erunt (*per* 4. 1.) baſes AK, AL æquales. Denique in triangulis ABL, ABK, cùm latera KB, BL ſint æqualia; AB commune, & baſes AK, AL æquales : erunt anguli ABK, ABL (*per* 8. 1.) æquales : ergo recti, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si linea perpendicularis fuerit ad tres lineas, ſeſe in eôdem puncto interſecantes; illæ tres in eôdem plano erunt.



Linea AB ſit perpendicularis ad tres lineas BC, BD, BE, ſe interſecantes in puncto B. Dico lineas BC BD, BE in eôdem eſſe plano. Sit enim planum AG illud, in quo exiſtunt AB, BE; & planum in quo exiſtunt BD, BC ſit CF; ſi BE ſit communis ſectio illorum planorum, habemus intentum, nempè BE erit in eôdem plano FC, in quo exiſtunt BC, BD.

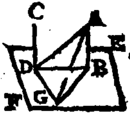
Si verò non sit communis sectio, sit hæc BG.

Demonstratio. Cùm AB sit perpendicularis ad BC, BD, recta erit ad planum FC (*per 4. huius*) ergo (*per def. 5.*) erit angulus ABG rectus: sed jam supponebatur ABE esse rectus: ergo anguli ABG, ABE essent æquales: pars & totum, quod est absurdum: ergo nulla alia potest esse planorum sectio nisi BE: ergo BE est in eôdem plano ac BC, BD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Duæ lineæ ad idem planum rectæ, parallelæ sunt.



Lineæ AB, CD, ad idem planum EF rectæ sint. Dico illas esse parallelas, nempe ductis lineis BD, AD. Clarum est angulos ABD, CDB esse duos rectos. Quare reſtat probandum lineas AB, CD in eôdem eſſe plano. Oſtendo autem lineam CD, eſſe in plano trianguli ABD: nempè tres lineas CD, AD, BD in eôdem eſſe plano. Duc[illegible] ad BD perpendicularis DG æqualis AB; junganturque AG, BG.

Demonſtrat. Triangula ABD, BDG habent latera AB, DG, æqualia, BD commune, angulos ABD, DBG æquales: ergo (*per* 4. 1.) baſes AD, BG ſunt æquales. Secundò, in triangulis ADG, ABG, latera AD, BG; AB, DG ſunt æqualia, AG commune: ergo (*per* 8. 1.) anguli ADG, ABG æquales ſunt: ſed ABG rectus eſt (*per def.* 5.) ergo ADG rectus erit. Tertiò, cùm linea CD recta ſit ad planum EF, angulus CDG, rectus eſt: ergo GD perpendicularis eſt ad DB, DA, DC: ergo hæ lineæ per præcedentem in eôdem ſunt plano. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Linea, quæ duo puncta parallelarum coniungit, in eôdem cum ipsis est plano.

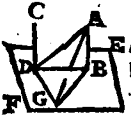
Recta AB, coniungat duo puncta A, & B parallelarum AC, DB. Dico lineam AB, esse in eôdem plano, in quo existunt lineæ AC, DB.

Demonstr. Parallelæ AC, DB in eôdem sunt plano, in eo ducatur recta à puncto A ad B; si coincidit cum priori; ergo AB in eôdem est plano: Si non coincidit, sit AEB; ergo duæ rectæ spatium clauderent. quod fieri non potest,

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si vna parallelarum ad planum recta sit, Alia ad idem recta erit.



Parallelarum AB,CD,ſit AB recta ad planum EF. Dico CD ad idem planum rectam eſſe. Ducatur DB : cùm angulus ABD rectus ſit,erit (*per* 30.1.) angulus CDB rectus; quare ſi probauero angulum CDG rectum eſſe, oſtendero (*per* 4.)lineam CD, rectam eſſe ad planum EF.

Fiat angulus BDG rectus , & linea DG ,æqualis AB , iunganturque AD, AG , BG.

Demonſtr. Primò in triangulis ABD, BDG, cùm latera AB , DG ſint æqualia ; latus BD commune , & anguli ABD, BDG, ſint recti ; (*per* 4.) baſes AD , BG erunt æquales. Secundò , in triangulis

ABD, ABG, cùm latera AB,DG; AD,BG ſint æqualia,& AG commune : erunt anguli ABG , ADG æquales : ſed ABG rectus eſt,cùm AB ſit recta ad planum EF: ergo & ADG rectus erit:quare *(per 4.huius)* linea CD recta eſt ad planum AD, DB, in quo etiam eſt CD : ergo angulus CDG rectus eſt : & cùm CDB ſit etiam oſtenſus rectus , CD perpendicularis erit ad planum EF *(per 4.)*

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Quæ eidem lineæ ſunt parallelæ, licèt non in eôdem cum illâ plano,inter ſe ſunt parallelæ.

Lineæ AB, CD,eidem lineæ EF ſint parallelæ ; quamvis tres lineæ non ſint in eôdem plano. Dico lineas AB,CD eſſe parallelas. Ducatur in plano linearum AB,EF ; linea GH

GH ad vtràmque perpendicularis : item in plano linearum EF, CD, linea HI, ad vtràmque perpendicularis.

Demonſtratio. Linea EH, perpendicularis ad lineas GH,HI ; recta eſt ad planum per illas ductum, (*per* 4. *huius* :)ergo (*per* 8.) lineæ AG, CI, eidem parallelæ, ad idem planum rectæ ſunt: ergo (*per* 5.) AB,CD ſunt perallelæ.

PROPOSITIO X.
Theorema.

Si duæ rectæ concurrentes, aliis duabus concurrentibus ſint parallelæ, quamvis non in eôdem plano, æqualem angulum comprehendent.

Sint AB,CD; AE,CF parallelæ. Dico angulum BAE, angulo DCF æqualem eſſe. Abſcindantur AB CD, AE,CF æquales : ducantûrque BE, DF, AC,BD,EF.

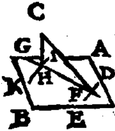
Demonſtratio. Cùm AB, DC, ſint parallelæ & æquales; erunt(*per* 33.1.)AC, BD parallelæ & æquales. Similiter erunt AC, EF parallelæ & æquales; quare BD, EF ſunt parallelæ & æquales; ſunt ergo BE, DF æquales: ergo triangula BAE, DCF, quorum omnia latera ſunt æqualia, habent(*per* 8.1.) angulos BAE, DCF æquales. quod erat demonſtrandum.

Coroll. Poſſunt aliquæ conuerſæ fieri, quæ non eſſent inutiles, vt hæc. Si in plano parallelo ducta ſit linea DC, alteri AB parallela, faciátque cum alia CF angulum alteri angulo BAE æqualem; erunt AE, CF parallelæ.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Ex puncto in sublimi, ad datum planum perpendicularem ducere.



Sit ducenda perpendicularis ex puncto C, ad planum AB. Ducatur linea DE, vtcumque; ad quam, ex puncto C, ducatur perpendicularis CF: tum per F, in plano AB, ad eandem ED, ducatur perpendicularis FG, ad quam ex puncto C demittatur perpendicularis CH: hanc dico esse rectam ad planum AB. Ducatur per H, KI parallela DE.

Demonstratio. EF perpendicularis est ad lineas CF, GF: ergo (*per* 4.) recta est ad planum trianguli HCF: & (*per* 8.) linea KH, ad idem recta est: ergo (*per defin.* 5.) angulus KHC rectus est: sed CHF est factus rectus: ergo CH est perpendicularis ad GH, & KI: ergo recta est ad planum AB, per ipsas ductum. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Per punctum in plano datum, ad illud perpendicularem ducere.

Per punctum C, ad planum AB, ducenda sit perpendicularis. Ex quocûmque puncto D, ad planum AB ducatur perpendicularis DE (*per* 11.) cui (*per* 30.1.) ducatur parallela CF. Dico CF rectam esse, ad planum AB.

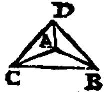
Demonstratio. Cùm enim linea CF parallela sit lineæ ED, quæ recta est ad planum AB, ipsa quoque ad idem planum recta erit (*per* 8.)

tera CD, DB, reliquo CB sunt maiora (*per* 20.1.) quare ablatis æqualibus CD, CE, restat latus BD, maius quam BE. Tertiò, in triangulis, BAD, BAE, cùm latera AD, AE sint æqualia, AB commune, & basis EB, minor quam BD; erit angulus BAE, minor quam BAD: (*per* 18.1.) ergo BAE, & CAE, seu BAC, minor est quam BAD, CAD simul. quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Omnes anguli componentes angulum solidum, minores sunt quatuor rectis.



Sit Angulus quilibet solidus A. Dico omnes angulos illum componentes quatuor rectis esse minores. Subtendantur, enim lineæ BC, DB, DC in eodem plano existentes. Fietq; py-

Demonstratio. Essent anguli GHF, GFH recti, in triangulo GHF (*contra* 17.1.)

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Plana, ad quæ eadem linea recta est, sunt parallela.

Linea EF recta sit ad plana AB, CD. Dico ea inter se parallela esse, seu vbique æqualiter distare. Per punctum quodcumque G, ducatur (*per* 30.1.) linea GH, parallela FE; iungantúrque GE, HF.

Demonstratio. Cùm FE recta supponatur ad vtrúmque planum, sitque GH illi parallela: erit etiam (*per* 8.) GH ad vtrúmque planum recta: quare (*per defin.*5.) anguli G, & H recti sunt: ergo GE, FH, (*per* 30 1.) sunt parallelæ: sicut GH, FE: est igitur parallelogrammum

FEHG: &(*per* 34.1.) lineæ EF,GH ſunt æquales: ergo plana in G, H, æque diſtant, ac in E,F: quod cùm de alio quocúmque puncto demonſtrari poſſit, parallela ſunt plana. Viciſſim ſi plana parallela ſint, linea ad vnum recta, ad aliud recta erit.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si duæ lineæ concurrentes, aliis duabus concurrentibus, non in eôdem plano, ſint parallelæ; plana per ipſas ducta, ſunt parallela.

Lineæ AB, AC, lineis DE, DF ſint parallelæ, ſed in alio plano. Dico planum AL per AC, AB ductum, parallelum eſſe plano DI, per DE, DF ducto. Ex puncto A ducatur AH recta ad planum DI (*per* 11.) & (*per*

31.1.) ducantur HI, HK, parallelæ lineis DF, DE; quæ (*per* 9.) lineis AC, AB erunt parallelæ.

Demonſtratio. Linea AH recta eſt ad planum DI: ergo anguli AHI, AHK, recti ſunt: ſed lineæ AC, HI ſunt parallelæ: ergo (*per* 30.1.) anguli interni IHA, CAH æquales ſunt duobus rectis: & cùm AHI rectus ſit; HAC rectus erit; ſimiliter HAB rectus erit: ergo HA recta eſt ad planum AL: & (*per* 14.) plana AL, DI ſunt parallela.

PROPOSITIO XVI.
Theorema.

Si duo plana parallela, eôdem plano ſecentur, communes ſectiones erunt parallelæ.

Plana parallela AB, CD, ſecentur plano EI. Dico communes ſectiones EF, GH parallelas eſſe: ſi enim non ſunt parallelæ, producta ctæ conueniant in puncto I.

Demonstrat. Cùm totæ lineæ EF, GH sint in suis planis, plana etiam conuenient in I; ergo parallela non sunt. contra hypothesin.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Duæ lineæ parallelis planis proportionaliter secantur.

Lineæ AB,CD parallelis planis EF,GH,IK, secentur. Dico eas proportionaliter secari,seu ita esse AL,ad LN;sicut AP ad PO. Ducatur linea AO, secans GH, in P, ducanturque LP,PM.

Demonstrat. Planum trianguli ANO, secat plana parallela IK, GH: ergo (*per præcedentem*) sectiones LP, NO sunt parallelæ: ergo(*per* 4.6.) ita est AL, ad LN, sicut AP ad PO, Pariter planum trianguli

AOC, facit in planis parallelis EF, GH, sectiones parallelas AC, PM: ergo ita est AP ad PO; sicut CM, ad MO: ergo ita est AL ad LN; sicut CM ad MO.

PROPOISTIO XVIII.

Theorema.

Si linea sit ad planum recta; omnia plana per ipsam ducta, ad idem planum recta sunt.

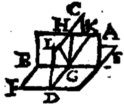
Linea AB recta sit ad planum CD. Dico omnia plana ducta per AB, hoc est, omnia plana, in quibus est linea AB, recta esse ad planum CD, sit enim planum AG ductum per lineam AB.

Demonstratio. In plano AG, ducatur quæcûmque HI, perpendicularis ad GF communem planorum sectionem: cùm anguli IHB, ABH recti sint, (*per* 29.1.) parallelæ erunt AB, IH: sed AB recta ſupponitur ad CD : ergo (*per* 8.) linea IH eidem plano recta erit : ſed (*per defin.*4.) hoc eſt planum AG eſſe rectum ad planum CD : ergo planum AG, ad planum CD rectum eſt.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Si duo plana, ſe invicem ſecantia, alicui plano recta ſint, communis eorum ſectio, eidem recta erit.



Plana AB, CD ſint recta ad planum EF. Dico communem eorum ſectionem HG eidem plano EF rectam eſſe. Si enim HG non ſit recta, ad planum EF ; ducatur in plano AB, perpendicularis GK, ad communem ſectionem BI : & in plano DC, linea GL perpendicularis, ad communem ſectionem DG.

Demonstr. Lineæ GL,GK, (*per defin.* 3.) sunt rectæ ad planum EF, quod est *contra propositionem* 13.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Si tres anguli plani, solidum angulum componant; duo quilibet simul, reliquô sunt maiores.

Tres anguli plani BAC, BAD, CAD angulum solidum A componant; sitque BAC maximus. Dico reliquos CAD, BAD illô maiores esse. Fiat angulus CAE æqualis angulo CAD; & lineæ AE, AD sint æquales, ducatúrque CEB; tum DC, DB.

Demonstratio. Triangula CAD, CAE habentia latera AD, AE æqualia, AC commune, & angulos CAD, CAE, æquales; habent (*per* 4.1.) bases CD, CE æquales. In triangulo autem BCD, duo latera CD, DB, reliquo CB sunt maiora (*per* 20.1.) quare ablatis æqualibus CD, CE, restat latus BD, maius quam BE. Tertiò, in triangulis, BAD, BAE, cùm latera AD, AE sint æqualia, AB commune, & basis EB, minor quam BD; erit angulus BAE, minor quam BAD: (*per* 18.1.) ergo BAE, & CAE, seu BAC, minor est quam BAD, CAD simul. quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Omnes anguli componentes angulum solidum, minores sunt quatuor rectis.

Sit Angulus quilibet solidus A. Dico omnes angulos illum componentes quatuor rectis esse minores. Subtendantur, enim lineæ BC, DB, DC in eodem plano existentes. Fietq; pyramis, cuius basis est polygonum BCD, vertex A.

Demonstr. In puncto A fit angulus solidus, cuius duo anguli ABD, ABC maiores sunt reliquo CBD. Idem dicito de reliquis punctis: quare anguli ABC, ABD, ADB, ADC, ACD, ACB, maiores sunt quam anguli trianguli CBD: sed anguli huius trianguli æquales sunt duobus rectis: ergo anguli recensiti maiores sunt duobus rectis: sed anguli omnes triangulorum BAC, CAD, BAD æquiualent sex rectis: ergo si ab illis subtrahas angulos recensitos restabunt anguli in A minores quatuor rectis: eôdemque modo procedendum, si angulus solidus, pluribus quàm tribus angulis planis constaret.

PROPOSITIO XXII.& XXIII.

Relinquantur.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si solidum parallelis planis contineatur; aduersa plana sunt parallelogramma similia, & aequalia.

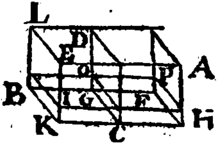
Solidum AH parallelis planis contineatur. Dico aduersa plana esse parallelogramma, similia, & æqualia.

Demonstr. Cùm enim plana parallela BG CE, planô AC secentur; erunt (*per* 15.) sectiones AB, CF parallelæ. Pariter cum plana parallela AE, BH, plano AC secentur; erunt sectiones BC, AF parallelæ: est ergo AC parallelogrammum. Eôdem modô ostendam DE, esse parallelogrammum. Idem de planis EC, AE, AD, FH. Probo autem aduersa esse similia: cùm enim (*per* 33.1.) AB, GD, sint parallelæ & æquales ob parallelogrammum AD; sicut AF, GE; erunt (*per* 15.) anguli BAF, EGD æquales. Quare parallelogramma sunt similia. quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si parallelepipedum secetur plano oppositis parallelo: erit vt basis, ad basin; ita solidum, ad solidum.



Parallelepipedum AB, secetur plano DC, oppositis planis AF, BE parallelo. Dico ita esse solidum KD, ad solidum AG; vt basis KG, ad basin CF. Intelligatur linea KE diuisa in quotcumque partes quantúmlibet paruas, per quas duci intelligantur superficies basi KF parallelæ; quarum vna sit IP; ita vt totum solidum AB, his superficiebus contextum sit. In tali casu, in solido KD, fient totidem parallelogramma basi KG, similia, & æqualia: & in solido AH. totidem erunt parallelogramma basi CF similia, & æqualia(*per præcedentem.*)

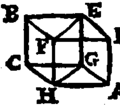
Demonstratio. Singulæ superficies solidi KD, sunt basi KG æquales: & singulæ solidi AG, sunt basi CF æquales: ergo se habent singulæ solidi KD, ad singulas solidi AG; vt basis KG ad basin CF: (sunt autem totidem numero, in quâcúmque suppositione:) ergo vt una antecedentium, ad vnam consequentium, nempe vt basis KG, ad basin CF; ita(*per* 12. 5.) omnes antecedentes, seu solidum KD, ad omnes consequentes, seu ad solidum AG. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio antecedens vt & sequentes nonnullæ procedunt secundùm methodum indiuisibilium.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Parallelepipedum ſecatur bifariàm, planô per diametros aduerſorum planorum ductô.



Parallelepipedum AB ſecetur planô FG ductô per diametros FE, GH, adverſorum planorum. Dico tale parallelepipedum prædictô plano bifariàm ſecari. Intelligatur linea AD, in quot voluerimus partes diuiſa; cùm per ſingulas ducantur plana baſi AC parallela: vnumquodque illorum (*per* 24.) erit parallelogrammum æquale, & ſimile baſi.

Demonſtratio. Omnia parallelogramma, quæ duci poſſunt baſi parallela, diuiduntur bifariàm planô EH, cùm (*per* 16.) ſectiones ſint parallelæ, & æquales : ſed parallelepipedum AB, conſtat tantùm huiuſmodi parallelogrammis, & in ea reſolui poteſt: ergo bifariàm ſecatur plano EH. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXVII. & XXVIII.

Relinquantur.

PROPOSITIONES XXIX. XXX. XXXI.

Theorema.

Parallelepipeda ſuper eâdem baſi, aut æquali, & in eâdem altitudine conſtituta, ſunt æqualia.

Super baſibusę, qualibus AB, CD, & in eâdem altitudine ſint conſtituta duo parallelepipeda AE, DF. Dico illa inter ſe eſſe æqualia. Sint à quibuſlibet punctis ſuperioris plani, demiſſæ perpendiculares ad plana baſium; ſintque EH GI, (quæ ex ſuppoſitione ſunt æquales) & conſequenter diuidi poſſunt in totidem partes æquales. Diuidantur igitur in totidem partes indiuiſi uiſibiliter ſumptas, & per ſingulas intelligantur plana baſibus parallela: tot erunt plana, ſeu ſuperficies, eiuſdémque, vt ita dicam, craſſitiei in vnâ perpendiculari, quot in aliâ, cùm ſint æquales; ſingula autem plana, in ſuis parallelepipedis, efficiunt parallelogramma ſimilia, & æqualia baſi (*per* 24.) vt ſi per punctum K intelligatur planum baſibus parallelum, illud in AE efficiet parallelogrammum MS; & in DF, producet PO: quare parallelepipedum AE, tot conſtat ſuperficiebus ſuæ baſi æqualibus; quot parallepipedum DF.

Demonſtr. vt baſis AB, ad baſin CD ita quodlibet parallelogrammum MS, ad parallelogrammum PO, (tot autem ſunt numero:) ergo(*per* 15.5.)ita erunt omnes antecedentes, nempè omnia parallelogramma AE, (hoc eſt, parallelepipedum AE)ad omnia parallelogramma DF (ſeu ad parallelepipedum DF) vt baſis AB, ad baſin CD: ſed baſis AB, æqualis ſupponitur baſi CD: ergo & parallelepipedum AE, parallelepipedo DF. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. Vt habeatur soliditas parallelepipedi, multiplicatur basis per altitudinem, sumptam in perpendiculari. Quia perpendicularis ad planum basis, ostendit quot superficies basi æquales duci possint. Vt si assumatur pes pro mensura, quasi indiuisibiliter sumptâ; sintque in basi AB 12 pedes quadrati, & altitudo sit 10 pedum; multiplicando 12 per 10, erunt 120 pedes cubici in parallelepipedo AE. Cùm enim diuidatur altitudo EH in 10 pedes, fieri poterunt 10 parallelogramma æqualia basi, habentia crassitiem vnius pedis: sed basis, cum altitudine vnius pedis, habet 12 pedes cubicos: ergo cum altitudine 10 pedum. Efficiuntur 120 pedes cubici.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Parallelepipeda eiusdem altitudinis se habent vt bases.

Parallelepipeda AE, DF, æquales habeant altitudines EH, GI. Dico ita esse AE, ad DF; vt basis AB, ad basin CD.

Hoc demonstrauimus in superiore propositione, vt ostenderemus parallelepipeda esse æqualia, quia bases erant æquales.

Coroll. Parallelepipeda æqualis basis, se habent vt altitudines: vt, sint parallelepipeda AS, DO, quorum bases æquales AB, CD; altitudines GI, EH. Dico

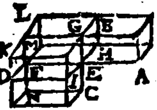
Ee 2

illa esse inter se vt altitudines. Intelligatur enim GI, continere quoteúmque partes aliquotas, lineæ EH, & per diuisiones duci plana basibus parallela; quot erunt in GI partes aliquotæ ipsius EH, tot erunt in DF superficies æquales illis, quæ fiunt in AS, quæ sunt partes aliquotæ ipsius: ergo (*per def.* 5. 5.) eadem est ratio parallelepipedi DF, ad AS, quæ altitudinis GI, ad EH.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Similia parallelepipeda, sunt in triplicatâ ratione laterum homologorum.



Parallelepipeda AB, CD sint similia, hoc est, singula plana vnius, sint similia singulis planis alterius: nempè primò, singuli anguli sint æquales, collocarique possint parallelepipeda, vt lineæ vnius jaceant in directum cum lineis alterius; nempè AE, EI; HE, EI; GE, EC vnam lineam constituant Requiritur item vt ita sit AF, ad EF; sicut HE, ad EI; & GE, ad EC. Quibus positis, ostendere debeo esse quatuor solida, in continuâ ratione, quæ est lateris AE, ad latus homologum, seu ipsi respondens EF, quorum primum sit AB, & quartum sit CD.

Demonstratio. Parallelepipedum AB ad AL, eiusdem altitudinis (*per praecedentem*) se habet, vt basis AH ad EM, seu (*per* 1. 6.) vt AE, ad EF. Pariter parallelepipedum EL, ad EK eiusdem altitudinis, se habet, vt basis EM ad ED, seu (*per* 1. 6.) vt HE, ad EI; hoc est, vt AE, ad EF. Tertiò parallelepipedum EK ad CD eiusdem altitudinis, se habet, vt basis GI, ad basin CI; seu vt GE, ad EC, hoc est, vt AE, ad EF. Quare sunt quatuor parallelepipeda AB EL, EK, CD in continuâ ratione AE, ad EF. Quare (*per def.* 11. 5.) AB ad CD, est in triplicatâ ratione AE ad EF. Quod demonstrandum erat.

Coroll. Si quatuor lineae continuè proportionales fuerint, parallelepipedum supra primam descriptum, ad simile supra secundam descriptum, se habet vt prima ad quartam. Nam ratio primae ad quartam, est triplicata rationis primae ad secundam; sicut ratio primi parallelepipedi ad secundum. Ex quibus vides celebre problema duplicationis cubi, nempè, vt dati cubi assignetur cubus duplus, consistere in inuentione duarum mediarum continuò proportionalium: nam si proponatur latus vnius cubi pro prima linea; & sumatur eius duplum pro quarta linea: si inuenirentur duæ mediæ proportionales, essent quatuor continuè proportionales; & cubus supra primam descriptus ad cubum supra secundam, se haberet vt prima ad quartam; nempè vt 1 ad 2.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Æqualium parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur: & ea quorum bases & altitudines reciprocantur, æqualia sunt.

Parallelepipeda AB, CD sint æqualia. Dico ita esse basin AE ad basin CF, vt altitudo FD ad altitudinem EB. Sit GF æqualis BE, sitque altitudo parallelepipedi CG, eruntque AB, CG eiusdem altitudinis. Sicut CG, CD æqualium basium.

Demonstratio. AB ad CG eiusdem altitudinis, se habet vt basis AE ad CF (*per 32.*) sed vt AB ad CG, ita CD illi æquale ad CG, seu (*per coroll. 32.*) ita altitudo FD ad GF seu BE: ergo ita eſt baſis AE ad CF, vt altitudo DF ad BE. quod erat primum.

Sit ſecundò, vt AE ad CF, ita FD ad BE. Dico AB & CD eſſe æqualia: fiat eadem conſtructio.

Demonſtratio. Ita eſt AB ad CG, vt baſis AE ad CF; ſeu ex ſuppoſitione, vt FD ad EB, ſeu FG: ſed vt FD ad FG, ita CD ad CG (*per* 32.) ergo ita eſt AB ad CG, ſicut CD ad CG: ergo AB, & CG ſunt æqualia. quod erat ſecundum.

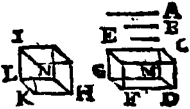
PROPOSITIO XXXV.

Relinquatur.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si tres lineæ, continuè proportionales fuerint: quod ex iis fit parallelepipedum, æquale est parallelepipedo facto à mediâ, & æquiangulo priori.



Tres lineæ A, B, C, sint proportionales. Dico parallelepipedum DE, ex iis factum (nempe cuius latus DF, æquale est lineæ A; latus EG, lineæ mediæ B; & latus GF, lineæ C) æquale esse parallepipedo HI, cuius latera HK, KL, LI sint æqualia lineæ mediæ B;

modò tamen ſint æquiangula.

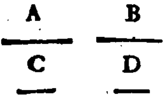
Ex punctis E & I demittantur ad plana ſubiecta, perpendiculares EG, IL quæ æquales erunt : cùm enim æquiangula ſupponãtur parallelepipeda;anguli ſolidi G & I æquales erunt : ita vt,ſi compenetrari intelligantur, non ſe excedant:quare perpendiculares GE, LI etiam æquales erunt.

Demonſtratio. Parallelogramma MF, HL ſupponuntur æquiangula , eſtque vt FD ad LK, ita KH ad DM , ſeu vt A ad B, ita B ad C (ſunt enim illis æquales) ergo(*per* 15.6.)baſes MF,HL ſunt æquales : ſed altitudines ſunt etiam æquales : ergo (*per* 31.)parallelepipeda ſunt æqualia : quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint : parallelepipeda ſimilia, ſupra illas deſcripta, erunt proportionalia : & viciſſim ſi hæc proportionalia fuerint, lineæ proportionales erunt.



Sit vt A ad B, ita C, ad D. Dico ſi ſupra A, B, C, D excitentur parallelepipeda ſimilia, ea fore proportionalia.

Demonſtrat. Parallelepipedum A, ad parallelepipedum B, eſt in triplicatâ ratione lineæ A ad B ; ſeu in triplicatâ C ad D : ſed parallelepipedum C, ad parallelepipedum D, eſt etiam in triplicatâ C ad D : ergo parallelepipeda ſunt proportionalia.

Pariter si supponantur parallelepipeda esse proportionalia, & lineæ sint in subtriplicatâ ratione, ita erit A ad B, vt C ad D. quod, explicatis terminis, difficultatem nullam patitur.

PROPOSITIO XXXVIII.
Theorema.

Si duo plana ad inuicem recta fuerint, à quolibet puncto vnius perpendicularis ad aliud, in communem sectionem cadet.

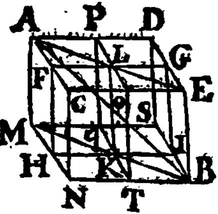
Plana AB, AC, sint ad inuicem recta. Dico, à quolibet puncto D plani AB, perpendicularem ad planum AC, cadere in communem sectionem AE. Ex puncto D, ad communem sectionem AE, ducatur perpendicularis DF.

Demonstratio. Linea DF perpendicularis ad AE communem sectionem (cùm plana sint ad inuicem recta *per defin. 3.*) recta est ad planum AC; & cùm duæ ex puncto D duci non possint rectæ, ad planun AC, (*per* 13) nulla alia duci poterit, quàm quæ cadit in AE.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Si per parallelepipedi latera aduersa, bifariàm diuisa, ducantur plana; horum communis sectio, & parallelepipedi diameter bifariàm se secant.



Parallelepipedi AB, latera aduersa AC, DE bifariàm diuidãtur in G,F; P,O; I, H; T, Q per quæ puncta ducantur plana TOPQ, HFGI; quorum communis sectio sit LK. Sit item diameter AB. Dicó vtrámque bifariàm diuidi in puncto O. Ducantur enim AL LE; MK, KB: quas primò probo iacêre in directum.

Demonstratio. In triangulis MKH, BKT; cùm latera TB, KH, æqualia sint; sicut & MH, TK (vtpote dimidia laterum æqualium) & angulus KTB, æqualis sit angulo MHK (*per* 15.) propter parallelas MN, QT; HK, TB: erunt lineæ MK, KB æquales, & anguli TKB, HMB æquales; sed alterni HMB, MKQ sunt æquales (*per* 29. 1.) ergo oppositi ad verticem MKQ, TKB sunt æquales: ergo (*per* 15. 1.) MB est linea recta, sicut & AE: & cùm AM, EB, sint parallelæ (vtpote parallelæ eidem DS) AM, BE vnicum erit planum, in quo erit tam LK, quam diameter AB. Sunt item parallelæ EB, LK, (*per* 16.) cùm planum AMBE, incidat in plana parallela PT, DB: quare (*per* 4. 6.) ita erit EL ad LA, vt BO ad OA: Sed primæ sunt æquales: ergo & secundæ.

Pariter ita erit AL ad AE, vt LO ad

EB: sed prima est dimidia secundæ : ergo & OL est dimidia lineæ BE , seu LK illi æqualis. Ergo LK, & AB bifariàm diuiduntur in puncto O. quod erat demonstrandum.

Coroll. 1. Omnes diametri bifariàm diuiduntur in eodem puncto O.

Coroll. 2. Prismata triangularia eiusdem altitudinis se habent vt bases : si enim perficiantur parallelepipeda , cùm (*per* 32.) ea se habeant vt bases , & prismata triangularia sint eorum dimidia, sicut bases sunt dimidiæ, etiam ea se habebunt vt bases.

Coroll. 3. Prismata quæcúmque ejusdem altitudinis , quorum bases sunt polygonæ, se habent vt bases; quia in triangularia diuidi possunt , quæ singula se habent vt bases partiales : & componendo, totalia se habent vt bases.

Coroll. 4. Pariter possunt applicari reliquæ propositiones parallelepipedorum : vt, ea prismata esse æqualia quorum bases , & altitudines reciprocantur.

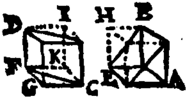
Coroll.

Coroll. 5. Similia Prismata sunt in triplicatâ ratione laterum homologorum, quia si perficiantur parallelepipeda, erunt etiam similia; ea autem sunt in triplicatâ ratione laterum homologorum (*per* 33.) ergo & prismata, quæ sunt eorum semisses; cùm habeant eadem latera ac parallelepipeda.

PROPOSITIO XXXX.

Theorema.

Duo prismata eiusdem altitudinis, quorum vnum basin triangularem habeat, aliud parallelogrammam duplam prioris, æqualia sunt.



Sint duo prismata ABE, CDG, triangularia, æqualis altitudinis; sitque basis CFG triangularis, & AE parallelogramma, sed dupla alterius. Dico priſmata ABE, CDG eſſe æqualia. Intelligantur parallelepipeda AH, GI eſſe perfecta.

Demonſtr. Cùm baſis AE, ſit dupla trianguli CFG; ſicut & parallelogrãmum GK (*per* 34. 1.) erunt AE, GK, æqualia: quare (*per* 31.) parallelepipeda GI, AH ſunt æqualia: ſed priſmata (*per* 28.) horum ſunt dimidia: ergo etiam æqualia erunt.

ELEMENTORVM EVCLIDIS

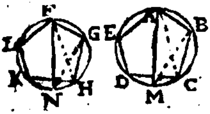
LIBER DVODECIMVS.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Polygona ſimilia circulis inſcripta, eandem rationem habent, ac quadrata diametrorum.

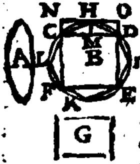
Sint poligona ſimilia ABCDE, FGHKL circulis inſcripta. Dico primum eandem rationem habere ad ſecundum, ac quadratum diametri AM ad quadratum diametri FN.



Demonſtratio. Cùm polygoma ſimilia ſupponantur, erunt anguli B & G æquales; eritque vt AB ad BC, ita FG ad GH: quare (*per* 6.6.) triangula ABC, FGH æquiangula ſunt: ergo & anguli ACB, FHG æquales: & conſequenter (*per* 21. 3.) anguli AMB, FNG illis æquales, inter ſe æquales erunt. Et cùm anguli ABM, FGN in ſemicirculo (*per* 31. 3.) recti ſint; triangula ABM, FGN æquiangula erunt: & (*per* 6.6.) erit vt AB ad AM, ita FG ad FN: ergo (*per* 22.6.) ſi ſupra primam & tertiam deſcribantur ſimilia polygona, & ſupra ſecundam & quartam alia ſimilia, nempe quadrata, erit polygonum ABCDE, ad polygonum FGHKL, vt quadratum ex AM, ad quadratū ex FN. quod erat demonſtrandum.

Lemma.

Si proponatur quantitas minor circulo, inscribi poterit circulo polygonum ordinatum maius illâ quantitate.



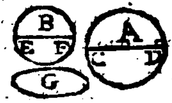
Sit magnitudo A, minor circulo B. Dico eidem circulo B inscribi posse polygonum ordinatum maius quãtitate A. Sit magnitudo G excessus circuli supra quãtitatem A; ita vt A cum G adæquent circulum. Inscribatur circulo quadratum CDEF, quod si maius esset quantitate A, haberemus intentum: si verò sit minus; diuidantur bifariàm arcus in H, I, K, L; ita vt fiat octogonum: quod si maius non esset; diuidantur latera octogoni, vt fiat polygonum 16 laterum, &c. Dico tandem describendum aliquod polygonum maius magnitudine A, hoc est, ita vt excessus circuli supra illud, minus sit *quam G excessus eiusdem circuli supra A. Producantur latera FC, ED, in N, O, ducatúrque tangens NHO.*

Demonstratio. *Cùm ex circulo auferatur plusquam dimidium, nempe quadratum inscriptum, quod dimidium est quadrati circumscripti; & ex reliquo, seu segmentis* CHD, DIE, EKF, CLF, *per inscriptionem octogoni, auferatur plusquam dimidium, nempe triangula* CHD, DIE, EKF, FLC: *clarum autem est triangulum* CHD, *esse semissin rectanguli* CO (per 34. 1.) *ergo plusquam semissis segmenti* CHD: *& ita de reliquis. Pariter dum sit polygonum 16 laterum, aufertur plusquam dimidium reliquis tandem relinquetur quantitas minor quam* G: *sed id quod relinquitur, est excessus circuli supra polygonum: ergo poterit tale polygonum inscribi, quod à circulo superetur minori excessu, quam sit* G: *ergo quod sit maius quam A. quod erat demonstrandum.*

PROPOSITIO II.

Theorema.

Circuli ſunt inter ſe, vt quadrata diametrorum.



Proponantur circuli A & B. Dico ita eſſe A ad B, vt quadratum diametri CD, ad quadratum diametri EF.

Si hoc ita non eſt, ſit maior ratio A ad B; quam quadrati CD ad quadratum EF: ergo aliqua quantitas minor quam A, quæ ſit G, eandem habebit rationem, ac quadratum ex CD, ad quadratum ex EF. Intelligatur per lemma ſuperius, inſcriptum circulo A, polygonum ordinatum maius quantitate G, & ſimile inſcriptum intelligatur circulo B.

Demonſtratio. Polygonum inſcriptum circulo A, ad ſimile inſcriptum circulo B, ſe habet, vt quadratum ex CD, ad quadratum ex EF : sed ita supponitur esse quantitas G ad circulum B : ergo ita est quantitas G ad Circulũ B, vt polygonum A ad polygonum B : sed quantitas G minor est polygono A : ergo (*per* 14.5.) circulus B minor esset polygono ipsi inscripto, totum parte: quod cùm fieri non possit, dicendum est quantitatem G, minorē circulo A, non eam habere rationem ad circulum B, quam habet quadratum ex CD, ad quadratum ex EF. Quare A ad B maiorem rationem non habet, quam quadratum ex CD ad quadratum EF.

Coroll. 1. Circuli sunt in duplicatâ ratione diametrorum, quia quadrata diametrorum, vt similes figuræ (*per* 20.6.) sunt in duplicatâ ratione suorum laterũ.

Cor. 2. Circuli sunt in eâdem ratione, ac similes polygoni, intra ipsos descripti.

Coroll. 3. Ex quibus colligere licet regulam generalem, nempe, Similes figuræ intra alias descriptæ, & ad illas magis, ac magis accedentes, hoc est, ita vt in illas desinant; semper eandem rationem servent: etiam figuræ continentes eandem rationem habebunt. Ita quia polygona

similia,

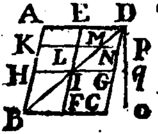
ſimilia, intra circulos deſcripta, ſemper eandem rationem habent, ac quadrata diametrorum; ipſi circuli eandem rationem habebunt: quæ eſt methodus metiendi omnia rotunda, vt cylindros, conos, ſphæram, & alia.

LEMMA.

Figura, cuius elementa decreſcunt in ratione duplicatâ, progreſſionis Arithmeticæ; eſt ſub tripla figuræ non decreſcentis eiuſdem altitudinis, & baſis.

Hoc lemma deſumitur ex methodo indiuiſibilium, eſtque vniuerſaliſſimum, & facile, & compendioſum ad probandas ſequentes propoſitiones, quæ longo circuitu ab Euclide probantur, quare cùm facilitatem in omnibus affectem, illô vtendum cenſui.

Proponatur igitur parallelogrammum quodcumque ABCD, & triangulum BCD,



eiusdem altitudinis, & basis: Sintque ducta quotquot volueris linea basi parallela, qua totum parallelogrammum, & triangulum repleant; ita vt vtraque figura his lineis quasi filis contexta sit. Hac erunt elementa vtriúsque figura; qua in triangulo decrescent, in ratione progressionis arithmetica vulgaris; hoc est, si altitudo DO, *intelligatur diuisa in partes aquales; & incipiendo à puncto* D, *deorsum versus, repræsentet progressionem arithmeticam vulgarem; crescent elementa trianguli iuxta illam proportionem. Nam* (per 4.6.) *ita est* DP *ad* DQ, *vt* MN, *ad* IG: *& à basi sursum ascendendo descrescent elementa trianguli. Iam verò, supra singula elementa, seu lineas trianguli, parallelas basi vt* BC, IG, MN, *& alias omnes; intelligantur figura similes v.g. triangula similia, vel quadrata, vel polygona quacúmque similia, vel etiam circuli: quia hac omnia sunt in ratione duplicatâ suorum laterum; figura, qua generabuntur, habebunt elementa decrescentia, in ra-*

tione duplicatâ progressionis Arithmeticæ: illæ autem figuræ erunt pyramides, vel coni. Quod si supra lineas parallelogrammi parallelas basi, similes figuræ intelligantur, exurgent prismata, aut cylindri. Dico ergo in hoc lemmate, figuram elementorum decrescentium in duplicatâ ratione progressionis Arithmeticæ, esse tertiam partem figuræ eiusdem basis, & altitudinis cuius elementa non decrescunt.

Hoc lemma potest primò proponi in numeris. Si enim dentur numeri crescentes in duplicatâ ratione seriei arithmeticæ, & totidem numeri æquales maximo: hi primi erũt paulo majores triente priorum

A 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

B 0. 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

excessu expresso fractione, cuius numerator est unitas, & denominator numerus sextuplus numeri terminorum. Hæc regula inductione patebit.

Sumantur primò quatuor termini 0. 1, 4. 9. *quorum summa* 14. *Hi figuram decrescentem repræsentent: sumantur totidem æquales maximo* 9. *fientque* 9. 9. 9. 9.

seu 36. *Dico* 14 *esse numerum majorem triente priorum; ita vt excessus sit* vna decima octaua *fractio expressâ vnitate & numero* 18. *qui est sextuplex numeri terminorum post* o. *sunt enim tantum tres termini post* o.

Secundò proponantur 5 *termini* o. 1. 4. 9. 16. *horum summa* 30. *totidem aquales maximo nempe* 16. 16. 16. 16. 16. *efficiunt* 80. *triens huius numeri* 80 *est* 26. cum duabus tertiis, *qui exceditur à numero* 30, *hoc numero* 3 cum vna tertia, *nempè* vna vigesima quarta, *hoc est numerus* 30, *est ad numerum* 80, vt vna tertia, plus vna vigesima quarta *ad vnitatē*.

Tertiò assumamus 6 terminos; erit excessus figuræ decrescentis, supra trientem figuræ integræ vnius trigesimæ.

Si essent 101 *termini, figura decrescens excederet trientem figuræ integræ, tantùm hac fractione* vnâ sexcentesimâ. *Si verò essent* 1001 *termini, figura decrescens superaret trientem vnâ tantùm* sexies millesimâ *parte. Ergo quò plura fuerint elementa, eò magis accedit ad trientem.*

Quia autem figura quaecunque in plu-

res & plures lineas diuidi potest, aut saltem intelligi esse diuisa, in tot diuidi poterit, vt excessus ille euanescat, seu sit minor, quâcúmque quantitate: ergo figura decrescens in ratione duplicatâ arithmetica progressionis, est triens figura integra.

Ita tamen demonstrari potest geometricè. In superiori figurâ, supponatur parallelogrammum AC, contextum esse lineis parallelis basi BC. *Duci autem duas tantùm* KN, HG; *sit etiam triangulum* BDC, *eamdem habens basin, & altitudinem: tum intelligantur supra singulas lineas parellelogrammi AC, singula quadrata, aut alia quacúmque figura similes. Idem intelligatur factum supra singulas lineas trianguli* BDC. *Dico omnia quadrata trianguli* BDC, *seu quadrata omnium linearum trianguli* BDC *parallelarum basi, esse trientem omnium quadratorum parallelogrammi.*

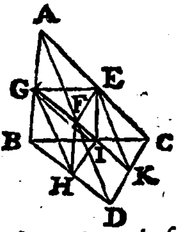
Demonstratio. Primò cùm triangula B G D, B F I *sint similia, erunt in duplicatâ ratione linea* BF, *ad* BG, (*per* 19. 6.) *hoc est, omnes linea trianguli* BFI, *ad omnes trianguli* BGD, *erunt* *in duplicatâ ratione lineæ BF ad BC. Eſt autem BF ad BC, vt 1 ad 2: & ratio duplicata rationis 1 ad 2, eſt vt 1 ad 4: ergo omnes lineæ trianguli BFI, ad omnes trianguli BCD, erunt vt 1 ad 4. Quia autem tam quadrata, quam ſimiles figuræ, ſunt in duplicatâ ratione laterum homologorum: (per 20. 6.) erunt omnia quadrata trianguli BIF, ad omnia trianguli BCD, in ratione duplicatâ 1 ad 4, ſeu vt 1 ad 8. Secundò, cùm linea KN, & alia quæcúmque parallelogrammi AC, ſit diuiſa bifariàm in L, & non bifariàm in M.* (juxta 10. 2. Eucl.) *erunt quadrata partium inæqualium KM, MN ſimul, duplicia quadratorum KL, LM. Ergo quadrata trapezij ADIH, ſeu illi æqualis BCGI; & quadrata trianguli DIG, hoc eſt, quadrata totius trianguli DBC, ſunt dupla, quadratorum parallelogrammi AI, & trianguli EID: quare ſi addantur quadrata parallelogrammi HF, & trianguli BFI; erit æqualitas inter quadrata trianguli BCD, & qadrata parallelogrammi AF, & triangulorum EID, BIF: ſed vidimus quadrata trianguli*

BCD, esse octupla quadratorum trianguli EID; & consequenter quadrupla quadratorum triangulorum EID, BIF; quibus sublatis, quadrata trianguli BCD, ad quadrata parallelogrammi AF, se habebunt ut 4 ad 3: sed quadrata parallelogrammi AC, sunt quadrupla quadratorum parallelogrammi AF (per 20. 6.) ergo; si hac sint 3, hac erunt 12. Ergo quadrata trianguli DBC, ad quadrata parallelogrammi AF, se habent ut 4 ad 12; nempe sunt illorum tertia pars. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Omnis pyramis triangularem habens basin, diuidi potest in duo prismata æqualia, quæ simul sumpta majora sint dimidio Pyramidis: & in duas æquales pyramides, similes toti.



Hæc propositio est tantùm vtilis, ad demonstrationem quintam, per inscriptionem prismatum: cùm autem quinta faciliùs demonstretur per lemma superius, inutilis redditur hæc propositio, sicut & sequens.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si duæ Pyramides diuidantur singulæ in duo prismata, & duas pyramides, & hæ similiter: erunt omnia prismata vnius, ad omnia prismata alterius, vt basis ad basin.

PROPOSITIO V.

Pyramides triangulares eiusdem altitudinis, se habent vt bases.

PROPOSITIO VI.

Pyramides quæcúmque eiusdem altitudinis, se habent vt bases.

Hæ propositiones faciliùs deducentur

ex ſeptimâ, quæ ſine illis demonſtratur ex noſtro lemmate.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Omnis Pyramis, eſt tertia pars priſmatis, æqualem baſin, & altitudinem habentis.

Sit Pyramis quæcúmque ABCD, cuius baſis BCD. Sit té priſma EF, ſintque baſes BCD, IKF æquales, ſit communis altitudo AL. Dico Pyramidem ABCD, eſſe tertiam partem priſmatis EF. Intelligatur enim altitudo AL, diuiſa in quotcúmque partes æquales ſumptas indiuiſibiliter, per quas ducantur ſuperficies parallelæ plano baſium: ſit autem una pro omnibus transiens per punctum M, faciensque in pyramide sectionem PNO, in prismate QRS.

Demonstrat. Cùm planum trianguli ADL, incidat in planum prædictum, & in planum basium; faciet sectiones PM, BL, parallelas (*per* 16. 11.) Ita ostendam ON, CD; PO, BC; PN, BD, parallelas esse. Quare (*per* 10. 11.) anguli PNO, BDC erunt æquales; sicut PON, BCD. Sunt ergo triangula BCD, PON similia: cùm linea LA sit diuisa in partes æquales, hæc repræsentat progressionem arithmeticam. Est autem in triangulo ALD, vt AL ad AM, ita AD ad AN; & ita CD ad ON (*per* 4. 6.) triangula autē similia PNO, BCD, sunt in duplicatâ ratione laterum homologorum CD, NO, seu AL ad AM. Idem dicendum de aliis omnibus triangulis, quæ sunt elementa Pyramidis. At vero elementa prismatis non decrescunt: cùm enim tam QI, RK; quam IK, QR sint parallelæ; erit QIKR parallelogrammum: quare (*per* 33. 1.) erunt QR, IK æquales: sicut KF, RS; IF, QS: quare (*per* 8. 1.) triangula IKF, QRS ſunt æqualia : ergo per lemma ſuperius Pyramis ABCD, eſt tertia pars priſmatis EF. quod erat demonſtrandum.

Hæc demonſtratio vim ſuam obtineret, etiamſi pyramis triangularis non eſſet polygona, & compararetur cum priſmate baſis triangularis, aut polygonæ : oſtenderem enim ſimiliter in pyramide generari polygona ſimilia, decreſcentia in ratione duplicatâ altitudinum, ſeu partium perpendicularis ; & in priſmate fieri polygona æqualia baſi.

Coroll. 1. Cùm autem priſmata æqualis altitudinis ſe habeant vt baſes, pyramides, quæ ſunt tertiæ eorum partes, ſe habebunt vt baſes. Similiter pyramides, quarum baſes, & altitudines reciprocantur, æquales ſunt, &c.

Coroll. 2. Habetur ſoliditas priſmatis, ſi eius baſis multiplicetur per altitudinem ; nam altitudo indicat, quot plana baſi parallela inueniuntur: habetur autem ſoliditas pyramidis, ſi baſis per tertiam partem altitudinis multiplicetur.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Similes pyramides sunt in triplicatâ ratione laterum homologorum.

Si enim sint triangulares pyramides, poterunt perfici prismata, quæ etiam erunt similia, cùm habeant aliqua plana communia cum pyramidibus: sed (*per coroll.* 39.11.) prismata similia habent rationem triplicatam, laterum homologorum: ergo pyramides, quæ sunt eorum subtriplæ (*per præcedentem*) habebunt rationem triplicatam laterum homologorum.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Æquales pyramides reciprocant bases & altitudines; & quæ reciprocant bases, & altitudines, æquales sunt.

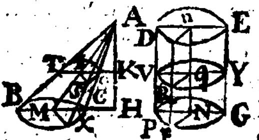
Hæc propositio jam demonstrata est in coroll. septimæ propositionis.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Conus est tertia pars cylindri æqualis altitudinis, & basis.

Sit conus ABC, & cylindrus DEGP, quorum bases BC, & PG sint æquales, & altitudo vtriusque eadem, nempe linea AH. Dico conum esse tertiam partem cylindri. Intelligatur enim linea AH diuisa in quotcumque partes æquales sumptas indiuisibiliter, per quas extendantur superficies parallelæ plano basium; sit pro omnibus sumpta quæ transit per K; ducantur item axes AM, Nn.



Demonstr. Cùm planum transiens per K, sit parallelum basibus, eruntOK,CH parallelæ: ita ostendam IS, MX; IO, MC; IT,BM esse parallelas: eodem modo ostendam in cylindro lineas VY, PG; RQ,FN parallelas esse. Secundò in triangulo AMX, ita est AI ad AM; sicut IS ad MX: pariter in triangulo AMC, aut AMB, ita est AI ad AM, sicut IO, ad MC. aut IT ad MB: ergo ita est IS ad MX, sicut IO ad MC, aut IT ad MB: sed MX. MC, MB sunt æquales: ergo IS, IO,IT sunt æquales; & cùm sit vt AK ad AH, ita AI ad AM; ita erit IO ad MC, sicut AK ad AH: quare TSO est circulus, cuius radius IO minor est radio

MC, in ratione AK ad AH; sed (*per* 2.) circuli sunt in duplicatâ radiorum: igitur circuli, qui sunt elementa coni, decrescunt in duplicatâ altitudinum. At in cylindro cùm DE, PG, sint parallelæ; DP, EG, nN parallelæ erunt & æquales: parallelæ etiam erunt VY; PG. Quare parallegogramma sunt PNQV, RPNQ NGYQ: sunt ergo (*per* 34. 1.) æquales VQ. RQ, YQ: est igitur circulus VRY, æqualis basi PFG: non igitur decrescunt elementa cylindri. quod erat demonstrandum.

Coroll, 1. Cylindri & coni secti plano basi parallelo, sectione circulum efficiunt, & cylindri quidem basi æqualem.

Coroll. 2. Habetur soliditas cylindri, si eius basis per altitudinem multiplicetur: & coni, si per tertiam partem eiusdem altitudinis.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Cylindri & coni eiusdem altitudinis se habent vt bases.

Cylindri ſint eiuſdem altitudinis. Dico illos ſe habere ad inuicem vt baſes. Sit enim communis altitudo quę intelligatur diuiſa,in quotcúmq; partes æquales quãtumlibet minutas, quæ indiuiſibiliter ſumantur, & per quas intelligantur duci ſuperficies baſibus parallelæ.

Demonſtratio. In illa hypotheſi tot fient circuli in vno cylindro, quot in alio, & æque craſſi: & cùm ſint baſibus æquales (*per coroll. præcedens*) erit vt baſis, ad baſin, ita omnes circuli vnius cylindri, ad omnes circulos alterius cylindri: & quia in quâcúmque diuiſione, tot ſemper producentur circuli in vno cylindro, quot in alio; ita erit baſis ad baſin (*per* 15.5.) vt omnes circuli vnius cylindri, ſeu vt vnus cylindrus ad omnes cylindri alterius, ſeu ad alterum cylindrum. quod erat demonſtrandum.

Secundò. Quia coni ſunt trientes ſuorum cylindrorum, ita erit conus ad conum, vt cylindrus ad cylindrum,& conſequenter vt baſis ad baſin.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Cylindri & coni, quorum baſes ſunt æquales, ſe habent vt altitudines.

Duo cylindri habeāt baſes ęquales. Dico ita eſſe vnum ad alium, vt eius altitudo ad altitudinem alterius: intelligatur enim vtráque altitudo diuiſa in quot libuerit partes æquales, & per ſingulas ducta eſſe plana baſibus parallela; fient in vtróque cylindro circuli æquales baſibus: quæ cùm ſint æquales, ij etiam circuli æquales erunt.

Dem. Quot in vnâ altitudine inueniūtur

partes aliquotæ alterius, tot in vno cylindro inueniuntur circuli seu partes aliquotæ alterius cylindri, & hoc in quâcúmque diuisione accidet: ergo (*per defin.* 5. 5.) ita erit cylindrus ad cylindrum, vt altitudo ad altitudinem.

Quia verò coni sunt tertia pars cylindrorum eiusdem altitudinis, ii etiam se habebunt, vt altitudo ad altitudinem.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si cylindrus secetur plano basibus Parallelo: ita erunt segmenta cylindri, vt segmenta axis.

Cylindrus IH, secetur plano NO, basi LK parallelo. Dico ita esse cylindrum LO ad NH: sicut segmentum axis IO ad OH.

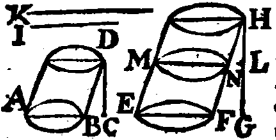
Demonstratio. Cùm planum trianguli HMI secet plana parallela LK, NO;

erit vt HN ad NM, ita HO ad OI : sed HN est altitudo cylindri OH & NM, cylindri LO &(*per præcedent.*)se habent, cylindri æqualis basis, vt altitudines : ergo ita est cylindrus LO, ad cylindrum NH, vt axis IO, ad OH, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Similes cylindri & coni sunt in triplicatâ ratione diametrorum suarum basium.



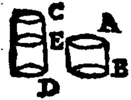
Similes voco cylindros qui tales sunt, vt eadem sit ratio diametri basium ad altitudinem : vt si sit eadem ratio AB ad CD, quæ EF ad GH. Dico cylindrum AD ad cylindrum EH, esse in in ratione triplicatâ rationis AB ad EF, hoc eſt, ſi fiat vt AB ad EF, ita EF ad I, & I ad K; ita eſſe cylindrum AD ad EH, ſicut AB ad K. Abſcindatur GL æqualis DC, eritque vt AB ad EF, ita GL ad GH. Intelligatur per L duci planum MN baſibus parallelum.

Demonſtratio. Cylindrus AD ad cylindrum EN eiuſdem altitudinis, ſe habet vt baſis AB ad baſin EF, (*per* 11.) ſed (*per* 2.) baſes ſunt in duplicatâ ratione diametrorum, nempe vt AB ad I; item cylindrus EN, ad cylindrum EH, ſe habet vt GL ad GH (*per* 13.) ſeu vt AB ad EF, aut I ad K: ergo ex æquo, ita eſt cylindrus AB ad EH, vt AB ad K: ſeu in triplicatâ diametrorum. Poterat etiam dici, in triplicatâ altitudinum. Quia autem coni ſunt tertia pars ſuorum cylindrorum, erunt etiam ad inuicem in triplicatâ diametrorum. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Æquales coni, & cylindri reciprocant bases, & altitudines: & vicissim.



Sint cylindri AB, CD æquales. Dico ita esse basin B, ad basin D, sicut altitudo CD, ad AB. Sit altitudo DE, æqualis altitudini AB.

Demonstratio. Cùm AB, DE sint æquales, erit cylindrus AB ad cylindrum DE, vt basis B ad basin D (*per* 11.) pariter cùm cylindri DC, DE habeant bases æquales, erit altitudo DC, ad altitudinem DE, seu AB; vt cylindrus CD ad cylindrum DE (*per* 13.) sed cylindri DC, AB, ad eundē DE, eandem habent rationem (*per* 7. 5.) cùm sint æquales: ergo vt basis B ad basin D, ita altitudo

C D ad altitudinem A B.

Viciſſim. Si ſit vt DC ad AB, ita baſis B ad baſin D; cylindri AB, & CD, eandem rationem habebunt ad cylindrum DE; ergo (*per 7.5.*) erunt æquales.

Cùm autem coni ſint tertiæ partes ſuorum cylindrorum, eôdem modô ſe habebunt.

PROPOSITIONES XVI. & XVII.

Locô istarum, quæ sunt difficiliores, & quæ tantùm propter XVIII. proponuntur; substituemus duo Lemmata faciliora, quibus eandem demonstrabimus. Euclides enim per inscriptionem polyedrorum, sphæræ dimensionem aggreditur; nos per inscriptionem cylindrorum, eam absoluemus.

LEMMA I.

Si detur quantitas minor sphærâ; tot cylindri inscribi poterunt sphæræ, ut omnes simul sumpti, eâ quantitate sint maiores.

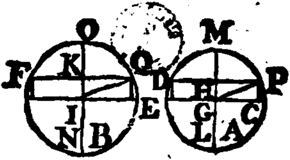
Sit sphæra, cuius maximus semicirculus ABC; *sitque quantitas* D *minor illâ sphærâ. Dico sphæræ inscribi posse cylindros, ita ut ij omnes simul sumpti, maiores sint*

quantitate D: *semidiameter* EB, *in quotcúmque partes æquales diuidatur; per quas agantur parallelæ diametro* AC, *productisque lateribus fiant parallelogramma tam inscripta, quam circumscripta circulo. Numerus circumscriptorum unitate, superabit numerum inscriptorum; ut patet ex figurâ.*

Demonstratio. *Parallelogramma inscripta, superantur à circumscriptis parallelogrammis, per quæ transit circumferentia, quæ simul sumpta, æqualia sunt parallelogrammo AL. Intelligatur volui semicirculus circa immotam semidiametrum EB; tunc singula parallelogramma describent cylindros, tam inscriptos, quam circumscriptos sphæræ; excessus autem cylindrorum circumscriptorum, supra inscriptos: æqualis est cylindro descripto à parallelogrammo AL: sed sphæra minus excedit cylindros inscriptos, quam circumscripti (cùm intra circumscriptos contineatur) igitur excessus sphæræ supra inscriptos, minor est cylindro AL. Supponamus excessum sphæræ supra quantitatem D, esse solidum H: quia semidiameter potest in plures & plures partes diuidi, & quò in plures diuiditur, eò cylindrus AL minor est, eo quod minorem habeat altitudinem, quare poterit in tot diuidi vt cylindrus AL, minor sit quantitate H; & tunc excessus sphæræ supra cylindros inscriptos, minor erit, quam excessus eiusdem sphæræ supra quantitatem D: ergo cylindri inscripti maiores sunt* *quantitate D. Et quod dixi de vno hemisphario de alia etiam intelligi potest. Ergo tota diameter potest ita subdiuidi, vt cylindri inscripti in totâ sphærâ maiores sint quantitate D. quod erat demonstrandum.*

LEMMA II.

Similes cylindri inscripti duabus sphæris, habent rationem diametrorum triplicatam.



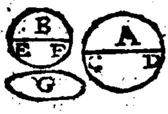
In duabus sphæris A, & B, sint duo cylindri recti similes, producti ex circumuolutione similium rectangulorum CD, EF, circa immotas diametros LM, NO. Dico cylindrum EF, ad CD esse in ratione triplicatâ diametri LM, ad diametrum NO.

Demonſtratio. Cùm rectangula CD, EF, ſint ſimilia, ita erit PD, ad PC, aut HG, ſicut FQ ad KI; & ita PH ad HG, ſicut KQ, ad KI: & cùm anguli K & H ſint recti; erunt (per 6.6.) *triangula KIQ, HGP ſimilia. Quare erit HP ad GP; ſicut KQ ad IQ: & eorum dupla ſimiliter, nempe PD ad ML, ſicut FQ ad ON; ſed FQ, DP, ſunt diametri baſium cylindrorum. &* (per 14.) *cylindri ſimiles ſunt in triplicatâ diametrorum ſuarum baſium: ergo cylindri CD, EF ſunt in triplicatâ ratione diametrorum ML, NO. quod erat demonſtrandum.*

PROPO

PROPOSITIO XVIII.

Sphæræ habent inter se rationem diametrorum triplicatam.



Sint sphærarum A & B diametri CD, EF. Dico sphæram A ad sphæram B, habere triplicatam rationem diametri CD, ad diametrum EF; si enim hoc ita non sit; alterutra verbi gratiâ A ad B, maiorem rationem habebit, quam triplicatam rationis CD ad EF: igitur dari potest G quantitas minor, quam sphæra A, quæ ad B, habeat triplicatam rationem illius, quæ est CD ad EF quare per (*lemma primum*) poterunt sphærę A inscribi cylindri, qui simul maiores erunt quantitate G. Intelligantur totidem, & similes inscripti sphæræ B quare (*per lemma.2.*) cylindri A ad cylindros B, habebunt rationem triplicatam CD ad EF.

Demonſtr. Cylindri A, ad cylindros B, rationem habent triplicatam CD ad EF : ſed quantitas G ad ſphæram B, habet etiam rationem triplicatam CD ad EF ; ergo ita eſt quantitas G ad ſphæram B, vt cylindri A ad cylindros B : ſed quantitas G minor eſt cylindris A :ergo (*per* 14.5.) ſphæra B, minor eſſet cylindris B, quod eſt abſurdum ; cùm in eâ ſint inſcripti.

Coroll. Sphæræ ſunt inter ſe, vt cubi ſuarum diametrorum : cùm enim cubi ſint parallelepideda ſimilia, habebunt (*per* 33.11.) rationem laterum triplicatã : ſed ſphæræ habent etiam rationem diametrorum triplicatam ; ergo ſphæræ ſunt inter ſe, vt cubi ſuarum diametrorum.

FINIS.

Facultas R. P. Prouincialis Societatis Iesu, in Prouincia Lugdunensi.

PAVLVS SVFFREN, Prouincialis Societatis IESV, in Prouincia Lugdunensi. Iuxta priuilegium, eidem Societati, à Regibus Christianissimis Henrico III. 20. Martij 1583. Henrico IV. 20. Decembris 1608. Ludouico XIII. 14. Februarij 1610. & Ludouico XIV. regnante 23. Decembris 1648. concessum, quo Bibliopolis omnibus prohibetur, ne libros, ab eiusdem Societatis hominibus compositos, absque Superiorum permissione imprimant; Permittit *Benedicto Coral*, Bibliopolæ Lugdunensi librum, qui inſcribitur *Euclidis Elementa authore Patre Claudio Franciſco Milliet Dechales eiuſdem Societatis*, imprimere & diuendere ad decem proximos annos. Cum prohibitionibus, in prædicto priuilegio expreſſis. Datum Lugduni 7. Octobris 1671.

PAVLVS SVFFREN.