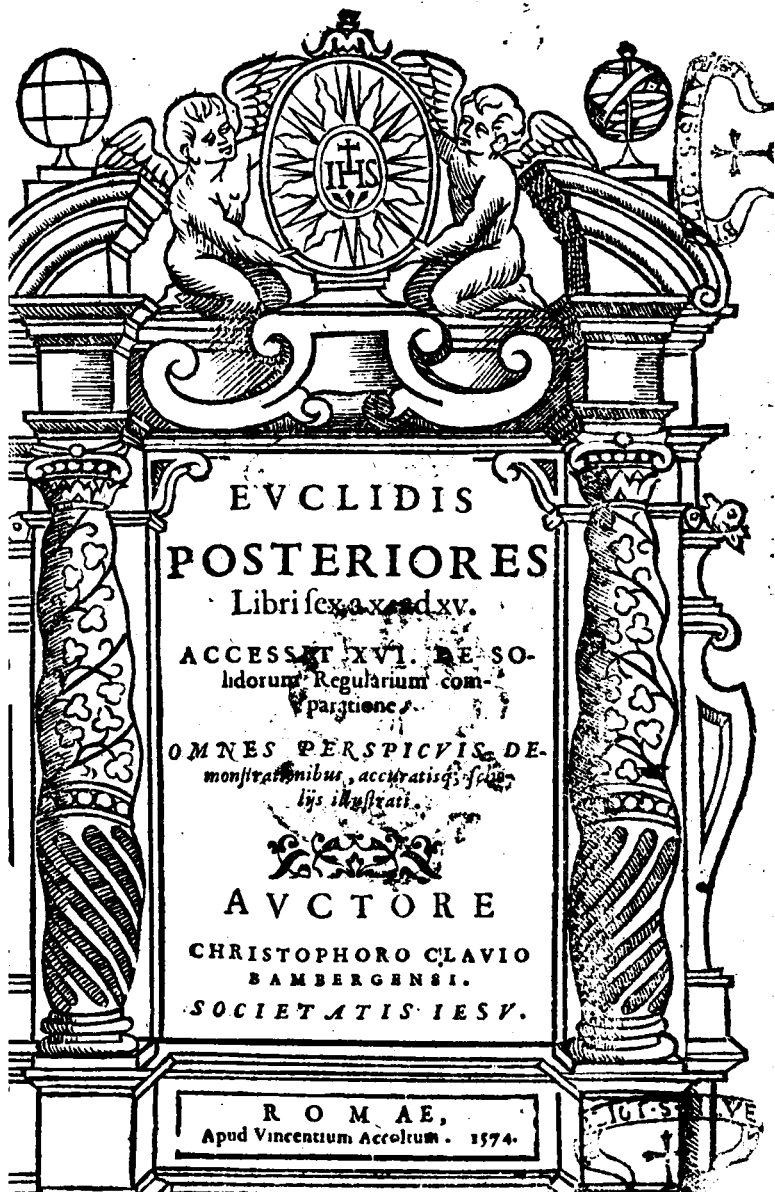


# Notes du mont Royal

[www.notesdumontroyal.com](http://www.notesdumontroyal.com)

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES  
Google Livres



EVCLIDIS  
POSTERIORES

Libri sex a xv.

ACCESSIT XVI. DE SO-  
lidorum Regularium com-  
paratione.

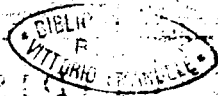
OMNES PERSPICUIS DE-  
monstrationibus, accuratisq; sc-  
lis illustrati.

AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO  
BAMBERGENSI.

SOCIETATIS IESV.

R O M A E,  
Apud Vincentium Accoltum. 1574.



POSTAL TELEGRAPH



ITALIA

TELEGRAPHIC CODE

# EVCLIDIS

ELEMENTVM X.



## DEFINITIONES

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

BIBLIOTHECA  
ROMANA  
VITTORIO EMANUELE



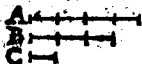
**BSOLVIT** Euclides in antecedenti  
bus tribus libris ea, quae ad numeros spe  
ctant, quantum satis possum est ad res Geo  
metricas intelligendas. Nunc in hoc de  
cimo libro agitur ad dissertationem  
linearum, commensurabilium, & inco  
mensurabilium, quarum causa numero  
rum tractationem ab eo susceptam esse

superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum coplures  
magnitudines cum solida, cum plana, neque perfecte intelligi possunt,  
neque cum res tuleris, in opus atque usum transferri, propterea quod  
plerumque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod et de pla  
nis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum et haec incommensu  
rabilia saepe numero existant, ut ad finem illius libri demonstrabi  
mus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultati  
bus, ob linearum, de quibus differis, obscuritatem, & omnes necesse indu  
stria mea in eo contendam, ut ex his, quae habemus ab Euclide sunt  
demonstrata, ita planius reddatur, ac facilis, ut sine ulla labo  
re a quovis, qui praecedentium eamque librorum demonstrationes recte  
intelleverit, possit percipere. Neque enim in eorum possum sententiam ire,  
qui putant ad eius intelligentiam esse necessarium, cum prae Aristote



metices, quæ de radicibus numerorū, tam rationalibus quam irrationalibus, ut vocat, sermone instituit. Immo contra persuasum mihi profus habeo, cognitionē pfectā illius partis Arithmetices pcedere ex hoc volūtatū q̄est, ut existimē tractationē illam radicū requiri, ut facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum qui rationem radicū atq; calculū tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quā qui illūrum omnino sit ignarus, propter ea quod ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic vero nullo modo. Itaq; enim de causa q̄ nōs prius decem theoremas a secundi lib. numeris accommodauimus, ut oblectationem animi maiorem ex eo studio caperet, ac fructum; non autem ut ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dices aliquis,) ut in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorū, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, ut ea res q̄ maiori voluptati esset, q̄ comodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauca sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebra ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhererentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, q̄ perspicuitatis; quippe ita ingenia studiorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentariis afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent. Id quod in lib. 1. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorū, ac multiplicationem, quæ solæ necessariæ ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando voluit, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante a didichæle Susephio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, q̄ accurate.

ITA QV E, ut ad institutum redeamus, inchoans, ut ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorū, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Ut duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater respecta, q̄ ter sumpta ipsam B,) dicantur commensurabiles. Eodem



dem

dem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum quia eas linea 120. unius palmi, quam dividit palmi, quam tertie partis unius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas una, & eadem superficies metitur; Necnon corpora, solida aut commensurabilia, quae metitur idem corpus, seu solidum.

## II.

**INCOMMENSURABILES** autem; quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

**T**ALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusvis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, ut propositione ultima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurima alia linea incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq; quanam ratione inveniri possint. Rursus, superficies dicuntur incommensurabiles, nec non, & solida, quae nullam admittant mensuram communem.

## III.

**RECTAE** lineae potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

**L**INEARUM rectarum quaedam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illae, quas in expositione defini commensurabiles simpliciter diximus; quaedam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quae sunt incommensurabiles longitudine, aliae sunt eiusmodi, ut earum quadrata sint commensurabilia; aliae vero ita se habent, ut & qua-

drata earum incommensurabilia sint. Lineæ ergo illæ longitu-  
dine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensura-  
bilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles;  
quia videlicet secundum earum potentias, hoc est secundum ea-  
rum quadrata (est enim, ut ad propof. 47. lib. 1. diximus, po-  
tentia cuiusq; lineæ; quadratum ab ea descriptum) commen-  
surabiles sunt, licet ipsæ secundum longitudinem sint prorsus  
incommensurabiles.

Q V O D si quis roget, cur Euclides definierit seorsum li-  
neas potentia cōmensurabiles, nō autē cōmensurabiles longitu-  
dine; respondendū est, lineas longitudine cōmensurabiles satis  
superq; esse explicatas in definitione cōmensurabilium magnitu-  
dinū, cū huiusmodi lineas una cōmunis mensura metiatur, ut  
dictū est: At vero quoniā lineas potentia cōmensurabiles nulla  
cōmunis mensura metiri potest, sed tantūmodo earum quadra-  
ta idem spatium metiuntur, ideo necessarium omnino fuit, ut ea  
propria definitione explicarentur.

### III.

**INCOMMENSURABILES** au-  
tem, cum quadratis earum nullum spatium,  
quod sit communis eorum mensura, con-  
tingit reperiri.

**LINEAS** reliquas longitudine incommensurabiles, qua-  
rum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommen-  
surabiles potentia.

**HABENT** autem lineæ cōmensurabiles eā longitudine  
quā potentia, hāc quasi convenientiā inter se, & connexionē;  
ut lineæ longitudine cōmensurabiles, sint etiā cōmensurabiles  
potentia, ita ut nulla lineæ dari possint cōmensurabiles longitu-  
dine, quin earū quadrata cōmensura-



bilia quoq; sint; quoniam quadratum  
ex cōmuni earum mensura descriptum  
metitur tanquā mensura cōmunis ea-  
rū quadrata, ut in subiecta figura ap-  
paret.

paris: sicut enim recta  $AB$ , metitur rectas  $CD, E, F$ , ita quoque quadrati  $AG$ , quadrata  $CH, EI$ , metitur: Non autem, ut omnes lineae potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multa enim lineae sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilium, quae tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, ut in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, ut omnes lineae potentia incommensurabiles, sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, ut omnes lineae longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multa lineae reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum eorum quadrata, commensurabiles existant. Quae quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propos. 9. huius libri.

V.

HIS positis, ostenditur, cuicumque rectae lineae propositae rectas lineas multitudinis infinitas & commensurabiles, esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

Si proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erunt omnium aliarum, quae cum ipsa comparantur, quaedam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quaedam vero potentia tantum: Item quaedam illi incommensurabiles longitudine tantum; quaedam vero longitudine, & potentia, ut hoc decimo libro demonstrabitur variis in locis: Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quamvis eius verba hoc sonare videantur) hac ita se habere: sed solum indicat nolis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositae rectae lineae commensurabiles longitudine,

et potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, ut diximus.

**L I N E A** autem illa proposita, ratione cuius alie commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis **ΡΗΤΗΣ** Latinis vero Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, et nota, alia vero cum illa comparata non semper nota sunt, quatuor singule seorsum sumptæ existant certæ quoque, ac notæ, cum quolibet in quocumque partes æquales possit dividi.

## VI.

**E T** huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

**D O C E T** lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex possessione, ut illa, sed quia cum illa comparare reperiuntur ei commensurabiles longitudine et potentia, vel potentia tantum.

**I T A Q U E** ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, quatuor longitudine sit eadem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmeticis non pauci, qui eam Irrationalem vocant, eo quod numero non possit exprimi.

## VII.

**H V I C** vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

**Q U O N I A M** in antecedenti definitio, Euclides lineas illas, quæ longitudine et potentia, vel quæ potentia tantum sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellavit Rationales.

les; liquido constat, eum hic esse dicere Irrationales, que proposita recta Rationali incommensurabiles sunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum: Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. semel (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tantum Rationali lineae propositae incommensurabilis.

## VIII.

ET quadratum, quod a proposita recta fit, dicatur Rationale.

QUEMADMODUM linea illa, quae tertia ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeque illius alia superficies, commensurabiles, incommensurabilesque dicuntur.

## IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES plane superficies quadrato Rationalis lineae propositae commensurabiles, Rationales dicuntur, non quidem ex positione, ut illud, sed quia cum eo collatae reperiuntur, et vel commensurabiles, vel incommensurabiles, quemadmodum etiam lineae, quae Rationali lineae quomodocumque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QUONIAM vero linea potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineae propositae, sunt saltem potentia commensurabiles lineae Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

*NON aliter superficies plana quadrato a Rationali linea descripto incommensurabilis, Irrationales vocantur, ac lineae, quae Rationali proposita prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dicta.*

XI.

ET rectae, quae ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectae, quae spatijs incommensurabilibus aequalia quadrata describunt.

*VOCAT lineas, quae possunt spatia quadrato Rationalis linea incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita ut si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si vero non fuerint quadrata, sed alie quaecumque figura rectilinea, appellantur rectae, quae describunt quadrata aequalia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.*

*COLLIGITUR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrata Rationalis linea, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus, lineas quae possunt spatia commensurabilia eidem quadrato Rationalis linea, appellari debere Rationales. Nam lineae, quae possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineae Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineae potentia incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles longitudine, ut ad defin. 4. diximus, demonstrabitur, in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas,*

illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationis lineæ, dici Irrationales.

PRAETEREUNDVM quoq; non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atq; potentia tantum: apponere fere semper vocibus istis: commensurabiles, ac incommensurabiles: Vix autem, & rarissime his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; ledm incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animadvertit, occasionem multis præbuit, ut varie, & obscure in hoc 10 lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq; nec non Rationalibus, Irrationalibusq; sint locuti.

CATERVM his definitionibus adiungemus postulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vsus in hoc libro reperitur.

## POSTVLATVM,

siue Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit,

minor vero infinita possit augeri; perspicuum

est, minorem toties posse multiplicari,

cati, donec superet

maiores.



AXIOMATA, SIVE

Pronunciata.

I.

MAGNITUDO quotcunq; magnitudines metiens, compositam quoq; ex ipsis metitur.

II.

MAGNITUDO quamcunq; magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITUDO metiens totā magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquā.

*H A E C axiomata, ut ad numeros pertinent, ostensa sunt a nobis in ultimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, praesertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce numeri in vocē magnitudinis.*

*C A E T E R U M quia hoc in libro discedendum nobis fuit a numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, ut ad propof. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus, ut docuimus ad initium primi libri; curamus, ut duplex numerus in margine e regione propositionum apponeretur, quorum superiorem ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstrat. Quod si vnus tantum numerus reperitur in margine, nullam tunc esse inter*

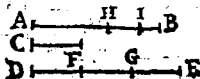
*Theonē*

Theonem, & Campanum disceptantiam, intelligas, quod ad  
numerum propositionum assinet.

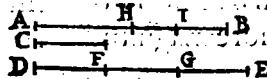
THEOR. I. PROPOS. I.

DVABVS magnitudinibus inæqua-  
libus propositis, si a maiori auferatur ma-  
ius quam dimidium; & ab eo, quod reli-  
quum est, rursus detrahatur maius quam  
dimidium; & hoc semper fiat: Relinque-  
tur tandem quædam magnitudo, quæ mi-  
nor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITAE sint duæ magnitudines inæquales  
A B, & C, quarum A B, sit maior. Dico si ex A B, auferatur  
maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rur-  
sum maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relin-  
qui tandem magnitudinem quædam, quæ minor sit quam  
C. Multiplicetur C, tones, donec magnitudo facta D E, ma-  
ior sit quam A B, ita ut D E, sit multiplex ipsius C, proxime  
maior quam A B. Diuisa autem D E, in partes D F, F G,  
G E, ipsi C, æquales; detra-  
hatur ex A B, maius quam  
dimidium A H, & ex reli-  
quâ H B, maius quam di-  
midium H I, atque hoc semper fiat, donec partes ipsius A B,  
multitudine æquales sint partibus ipsius D E. Sint ergo iam  
partes A H, H I, I B, tot, quot sunt ipsæ D F, F G, G E. Quia  
igitur D E, maior est quam A B; At ex D E, ablatum est  
D F, minus quam dimidium, vel certe dimidium, si D E,  
ipsius C, sit duplex; ex A B, vero maius quam dimidium  
A H: Erit reliquum F E, reliquo H B, maius. (Cum enim  
D E, maior sit quam A B; si ex D E, dimidium auferretur,  
nec non & ex A B, dimidium, esset quoque reliquum ex D E,  
maius reliquo ex A B. Si ergo ex D E, auferatur minus quâ  
dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam di-  
midium,

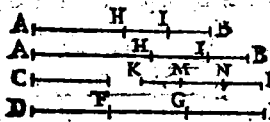


midium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.)  
 Rursus quoniam FE, maior est quam HB, auterausq; ex  
 FE, dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, si FE,  
 maior sit quam duplex ipsius C; ac ex HB, maius quam di-  
 midium HI; erit eodem modo reliquum GE, maius reli-  
 quo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem po-  
 stremam partem ipsius DE, qualis hic est GE, maiorem  
 esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo  
 GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C, erit quoq;  
 C, maior quam IB. postrema pars ipsius AB. Relicta igitur  
 est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C; Qua  
 re duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a ma-  
 iori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandū.

*Idem demonstrabitur, si ex*  
  
 AB, auferatur dimidium AH,  
 & ex reliquo HB, rursus di-  
 midium HI, &c. Næcademone

erit reliquū FE, maj<sup>r</sup> reliquo HB, nec nō & reliquū GE, ma-  
 ius reliquo IB; Cū ex maiori DE, ablatū sit DF, min<sup>r</sup> q̃ di-  
 midium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.

**ALITER.** Facta constructione, ut prius, sumatur FL,  
 ita multiplex ipsius IB, ut sit multiplex DE, ipsius C, Di-  
 uisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales,  
 erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam vero AH,

  
 maior est quam HB, vel  
 certe illi æqualis, si ablatū  
 sit dimidium ex AB; &  
 HB, maior est, quam IB;  
 erit quoq; AH, maior  
 quam IB, hoc est, quam

KM. Rursus quia HI, maior est quā IB, vel certe illi æqua-  
 lis; est autē IB, ipsi MN, æqualis: erit quoq; HI, maior quā  
 MN, vel illi æqualis; atq; adeo tota AI, maior, quā tota KN.  
 Additis ergo æqualib<sup>r</sup> IB, NL, erit tota AB, maior quā tota  
 KL: Est aut DE, maior adhuc, quā AB. Multo ergo maior  
 erit DE, quā KL. Quare cū sit ut DE ad C, ita KL, ad IB;  
 (Sumptā. n. fuit KL, ipsius IB, ita multiplex, quā multi-  
 plex est DE, ipsius C,) erit quoq; C, maior quā IB. Ac proinde  
 relictæ est IB, minor quam C. Quod erat demonstrandū.

14. quinsl.

SCH O-

## SCHOLION.

*Lyci* clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, ut minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo cons. Elus contra Iacobum Petetarium ageremus.

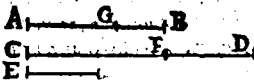
## THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractiōe, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

*Diximus* inæqualibus magnitudinibus propositis A B, C D, quarum minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B, & sic deinceps, alterna quadam detractiōe, auferatur semper minor de maiore, & nunquā reliqua metiatur præcedentē. Dico magnitudines A B, C D, incommensurabiles esse. Si. n. non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mēsurā cō-

munis. Metiatur eas si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi A B, vel minor. Detracta autē A B, ex C D, quoties pōt, relinquat F D, se minorē, ita ut A B, ipsam C F, metiatur. Rursus detracta F D, ex A B, relinquat se minorē G B, ita ut F D, metiatur ipsam A G; atq; hoc semper fiat. Relinquetur ergo tādē ex C D, vel A B, magnitudo quēdā minor quā E. (Quā cū A B, ablata ex C D, relinquat F D, se minorem, erit C F, ablata maior, quā dimidia ipsius C D, alias si esset dimidia, vel minor quā dimidia, posset adhuc A B, detrahi ex C D. Eodē modo erit A G, ablata ex A B, maior quam dimidia ipsius A B: Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maior, quam

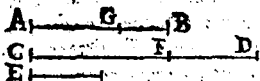


i. detrim.

1. idcirco

quam dimidium, relinquetur tandem magnitudo quādā minor quam E.) Sic ergo iam relicta G B, minor quam E.

2. pron.



3. pron.

2. pron.

3. pron.

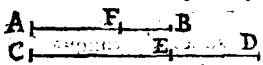
Quoniam igitur E, metitur AB; & AB, metitur CF; metietur quoque E, ipsam CF: Metitur autem E, & totam CD. Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur A G: quare & E, ipsam A G, metietur. Metitur autem E, & totam AB: ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.

### S C H O L I O N.

*Hoc Theorema conuersemus ad hunc modum.*

**S**i duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractiōe: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

**S**INT incommensurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturq; minor AB, ex D, & reliqua sit ED. Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturq; FB, & sic deinceps. Dico in hac



alterna detractiōe nunquam reliquam metiri præcedentē. Si enim fieri potest, metiatur FB, præcedentem ED. Quo-

2. pron.

1. pron.

2. pron.

1. pron.

niam igitur FB, metietur ED; & ED, metitur AF; metietur quoque FB, ipsam AF: Metitur autem & se ipsam: Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipsam CE. Igitur & FB, ipsam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipsam ED. Igitur & FB, totam ED, metietur. Offensa est autem & FB, ipsam AB, metiri. Quare FB, utraq; AB, CD, metitur: quod est absurdum: ponitur enim AB, CD, incommen-

incommen

incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua precedentem magnitudinem metiitur. Quod est propositum.

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractio: Metietur quaedam reliqua precedentem.

NAM si nunquam reliqua metiretur precedentem, essent propositae magnitudines, incommensurabiles, ut demonstrauit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum. ponuntur enim commensurabiles.

ITAQUE facile ex his dignoscemus, an dua quaecunque magnitudines propositae, sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractio, si reliqua quapiam metiatur precedentem, erunt magnitudines propositae commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur utramque magnitudinem propositam, ut constat ex demonstratione primi theorematism huius scholij: Ex eo enim, quod reliqua magnitudo  $FB$ , metiri dicebatur precedentem  $ED$ , ostensum est, eandem reliquam  $FB$ , metiri utramque magnitudinem  $AB, CD$ . Si vero nunquam reliqua magnitudo precedentem metiatur, propositae magnitudines incommensurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonstrauit.

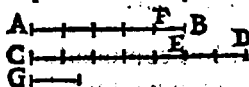
PROBL. 1. PROPOS. 3.

3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

DATAE duae magnitudines commensurabiles sint  $AB, CD$ , quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam  $AB, CD$ , commensurabiles sunt, fit ut si minor  $AB$ , ex maiore  $CD$ , detracta, quoties potest, relinquat  $ED$ ;  
 $B$  &  $ED$ ,

& E D, detracta ex A B, quoties potest, relinquat F B, & hoc semper fiat alterna quadam detractio; tandē reliqua quę-



piam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholij. Metiatur autem F B, reliqua præcedente

E D. Dico F B, esse maximam mensuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim utranque metiatur, ita ostendemus. Quoniam F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur quoq; F B, ipsam A F. At metitur F B, & se ipsam: Igitur F B, totam A B, metietur; atque adeo & ipsam C E, quā A B, metitur. Cū ergo, & ipsam E D, metiatur; metietur quoq; F B, totā C D. Metitur ergo F B, utranq; A B, C D. Quare utriusque A B, C D, communis mensura est F B.

Q u o d autem F B, sit maxima earum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earum mensura, maior quam F B. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, maior quam F B. Quia igitur G, metitur utranque A B, C B; metitur autem & A B, ipsam C E; metietur quoque G, ipsam C E: At metitur quoque totam C D. Igitur G, reliquam quoque E D, metietur. Metitur autem E D, ipsam A F: Ergo & G, ipsam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam F B, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis mensura est ipsarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis mensura est.

Q u o d si minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita ut detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipsa A B, earum maxima mensura communis; cū & se ipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

### C O R O L L A R I U M .

Ex hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

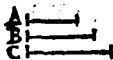
E t s i c i t u r hoc ex ea parte demonstrationis, quā ostensum est F B, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D.

*Demon-*

Demonstratum enim est ibi, magnitudinem G, si metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam mensuram F B. Haec demque est ratio de ceteris.

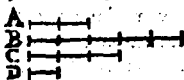
SCHOLIUM.

Ex his, quae dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositae sint commensurabiles; nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quae ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duae A, & B, commensurabiles sint, an non.



Quia si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

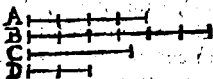
Si vero A, & B, fuerint commensurabiles; sit earum maxima communis mensura inuen-



ta D; quae si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est,

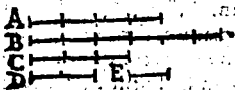
tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.

Quod si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim cre-



dantur esse commensurabiles, metietur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesein.

Si vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoque tres A, B, C, commensurabiles. Inuenta n.



E, maxima mensura ipsarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipsas A, & B; metietur quoque B 2 E, ipsas

3. decimi.

3. decimi.

2. pron.



E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datæ sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua antem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

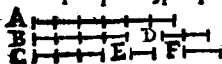
4.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nā si maior magnitudo quā D, metiri daretur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huiuslib. maximā mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si uero B, non metietur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quilibet earum mensura communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C.

Quod autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo



3. decimi

3. decimi

2. primi

do confirmari potest. Si non est maxima, sit  $F$ , maior quā  $E$ , si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur  $F$ , metitur  $A$ , &  $B$ ; metetur quoque  $D$ , earum maximam mensuram, per coroll. precedentis propos. Metitur autem &  $C$ : Igitur  $F$ , metiens  $D$ , &  $C$ , metetur quoque  $E$ , earum mensuram maximam, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam  $E$ , magnitudines  $A, B, C$ , metitur; Ac propterea  $E$ , maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, hoc quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

**A**PARTIA quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

**I**NVERTA autem hoc ex ultima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem  $F$ , si metiatur ipsas  $A, B, C$ , metiri quoque  $B$ , maximam illarum communem mensuram. Eademque de ceteris est ratio.

**S**IMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datae magnitudines faciant quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua vero omnia absolueda erunt, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

**S**I sint quotcumque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

**S**I NT quotcumque magnitudines  $A, B, C, D$ , in eisdem rationibus, in quibus totidē numeri  $E, F, G, H$ : Ut quidem  $A$ , ad  $B$ , ita  $E$ , ad  $F$ ; & ut  $B$ , ad  $C$ , ita  $F$ , ad

Si & m C, ad D, ita G, ad H. Dico ex aquo esse,  
ut A, ad D, ita E, ad H. Quoniam ex his, quæ ad de  
A, 1. E, 3. fin. 5. lib. 6. a nobis demon  
B, 2. F, 4. strata sunt, tam propor  
C, 1. G, 1. tio A, ad D, componitur  
D, 1. H, 2. ex proportionibus A, ad  
B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex  
proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspi  
cuum est, cum proportionibus componentes proportio  
nem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ  
proportionem E, ad H, componunt, & compositas  
proportionibus, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales es  
se, hoc est, esse ut A, ad D, ita E, ad H. Quod est pro  
positum.

I D E M sequitur, si magnitudinum, & numero  
rum proportio fuerit per  
A, 1. E, 3. turbata, ut in hoc exem  
B, 2. F, 12. plo apparet, in quo est, ut  
C, 1. G, 4.  
D, 1. H, 6. A, ad B, ita G, ad H; &  
ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita E, ad F. Ea  
de enim prorsus est demonstratio.

S E C U N D A .

Q U O N I A M præcedenti lemmate & in propositione,  
quæ sequitur, & in alijs multis, utendum nobis erit; placuit  
illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videatur  
ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersi  
generis quantitates constituunt: At proportio ex æqualitate im  
præcedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdem  
generis; In numeris quidem lib. 7. Libro uero & in magnitudi  
nibus, quamquam demonstratio in quinto lib. facta, etiã ad hoc  
lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri  
numeris quoque cõueniant. Vel certe demonstratio facta in 7.  
lib. huic eidem lemmati congruens, cum magnitudines A, B,  
C, D,

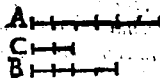
C, D, quæ proportionem habent eandem, quæ numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

## THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

COMMENSURABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties unitas repetita metiatur numerum D: Et quoties ea



D, 1.  
C, 2.  
E, 1.

3. decimi.

dem C, repetita metitur B toties unitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & unitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, unitatem. Quare erit ut A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Est autem & ut C, ad B, ita unitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atque unitas numerum E, æque metiatur. Igitur præter præcedens, erit ex quo, ut A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.

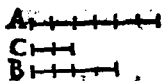
## SCHOLIUM.

Cum Euclides ad demonstrationem huius theoremati affirmat maximam communem mensuram præpositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B perspicuum est, lineas debere esse longitudine, & per id posita quoque commensurabiles, ut rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Hæc, si sola communem recipiunt mensuram, atque adeo in eis demonstratio locum habet.

Quod si lineæ sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atque idcirco mensuram habent communem, ipsi quoque demonstratio huius theoremati convenit: At ipsæ lineæ nequeunt, quia longitudine incommensurabiles esse, sunt,

commensuris mensuræ sunt expertes, ac propterea huius theorematiss demonstratio in ipsas convenire nullo modo potest.

EX demonstratione porro eiusdem huius theorematiss liquido constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Oñsensum enim est, eam habere



D, 3.

Vni. - tas.

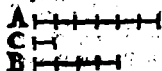
E, 2.

proportionē magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet, earum mensura com-

munis maxima C, ipsas metitur.

P N D E si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat invenire quam proportionem habeant in numeris; sumendi erant duo numeri D, & E, quos unitas aque, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam ut demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

Q U O D si loca maxime mensura C, sumamus aliam quācunque communem earum mensuram; nihilo minus hoc theorema demonstrabimus eodem



D, 6.

Vni. - tas.

E, 4.

argumento. Quāvis enim numeri D, & E, maiores inveniuntur in hac posteriori

demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, ut ex apposta figura apparet. Quoniam vero in priori demonstratione numeri inveni, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea forte Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

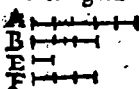
6

## THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerū: commensurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem

nem quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse cō  
mensurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero  
C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A,  
quarum partium uni equa  
lis sit magnitudo E. Dein  
de quoties unitas repetita  
metiatur numerum D, to  
ties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandā  
aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, conti  
netur, quoties unitas in C; continebit æqualiter A, ipsam  
E, & C, numero unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad  
unitatem. Est autem & ut E, ad B, ita unitas ad D, quod  
E, ipsam F, & unitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per  
lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, ut A ad E, ita C, ad  
D: Erat autem etiam ut C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit ut  
A, ad B, ita A, ad F; ac propterea B, & F, magnitudines  
æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsam F, metia  
tur, metietur quoque eadem E, ipsam B: Metiebatur autem  
& ipsam A. Igitur magnitudo E, utranque A, & B, meti  
tur; Ac proinde A, & B, commensurabiles sunt. Si igitur  
duæ magnitudines inter se proportionē habeant, &c. Quod  
erat demonstrandum.

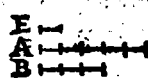


C, 5.  
Vni. -tas.  
D, 3.

9. quini.

1. defin.

**A L I E R E** Quot sunt unitates in C, in tot partes æqua  
les intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium uni  
æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est ut E, ad A,  
ita unitas ad C, quod E, ip  
sam A, & unitas ipsum C,  
æque metiantur; ponit urq;  
ut A, ad B, ita C, ad D; erit  
per idem lemma superius,  
ex æquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metitur autem unitas  
numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B,  
metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, &  
B, habentes eandem communem mensuram E, commensu  
rabiles sunt. Quod est propositum.

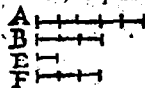


Vni. -tas.  
C, 5.  
D, 3.

**C O R O L L A R I U M.**

Ex priori autem demonstratione theorematibus aperta est nobis  
via qua lineam rectam inueniamus, ad quam nosse habemus quous  
alia

alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; diuidenda erit A, in tot æquales partes, quot

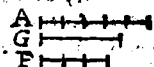


C, 1.  
Vni-  
tas.  
D, 3.

unirates sunt in C; & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unirates sunt

in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, ut C, ad D; ut demonstratū est.

Hinc rursus apparet, quam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ,



C, 5.  
D, 1.

ut numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ A, ut numerus C, ad numerum D, inueni-

da erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quæ sic se habeat A, ut C, ad D: Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, ut C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continuæ proportionales, erit ex coroll. propos. 10. lib. 6. ut A; ad F, atque adeo ut numerus C, ad numerum D, (cum sit ut A, ad F, ita C, ad D.) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.

13. sexti.

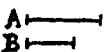
**S C H O L I O N.**

*IN hoc eiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, ut ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.*

7.  
0.

**THEOR. 5. PROPOS. 7.**  
**INCOMMENSVRABILES** magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

**S I N T** incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionē nō habere, quam habet numerus ad numerū. Si enim A, & B, proportionē dicantur habere, quam numerus ad numerum; erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur



6. decimi

A, &

A, & B, proportionē habēt, quā numerus ad numerū. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

QVOCV NQV modo linea incōmensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligimus eas proportionem non habere, quam numerus ad numerū, ut vult theorema. Nam alim, ut demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

8.  
o.

SI duæ magnitudines inter se proportionē nō habeant, quā numerus ad numerū: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quā numerus ad numerū. Dico eas incōmensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse cōmensurabiles, erit earū proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum, ponatur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerū. Nō igitur cōmensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionē habeāt, &c. Quod erat ostendendum.

s. decimi

SCHOLION.

QVOD si linea proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsa necessario, ex hoc theoremate, longitudine incōmensurabiles, alioquin proportionē haberēt, quam numerus ad numerum, ut ad propos. primus lib. demonstramus. quod est contra hypothesein. Non autē colligendū est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionē nō habent, quā numerus ad numerū, necessario & potentia incōmensurabiles esse, ut manifestū est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantū sine cōmensurabiles, eas proportionē habere, quā numerus ad numerum, ut in demonstratione theorematidis assumitur, immo nullo modo talem proportionem habere possunt, ut in scholio propos.

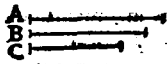
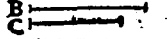
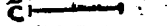


propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur inferitur ex huius theorematism demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

Si sint tres quantitates continue proportionales, & aliae tres continue quoque proportionales; sitque ut prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

Sint continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non; sitque ut A, ad

A  D, 35. C, ita D, ad F. Dico  
B  E, 28. quoque esse ut A, ad  
C  F, 21. B, ita D, ad E. Quo-

niam tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportionis A, ad C, & D, ad F, aequales; Erunt quoque proportionis A, ad B, & D, ad E, aequales, quandoquidem earum proportionis duplicatae aequales sunt.

Idem sequitur, si plures quantitates sint, quatuor; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatae, ad demonstrationem; & in quinque, quadruplicatam, &c.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

Quaeritur a rectis lineis longitudine com-

mensu-

menfurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ uero a rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

SINT primum rectæ A B, C D, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam rectæ A B, C D, longitudine sunt commensurabiles; erit A B, ad C D, ut numerus ad numerum: Sit ut E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est A B, ad C D, ut E, numerus ad numerum F: habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Brit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex C D, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportionēs, duplicatæ sunt proportionū æquiduum. Qued est propositum.



E, 2. F, 3.  
G, 4. H, 9.

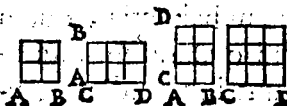
5. decimi.

20. sexti.

11. octavi.

ALITER.

ALITER. Posita eadem constructione, contineatur rectangulum B D, sub rectis A B, C D. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, ut

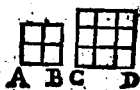


E, 2. F, 3.  
G, 4. I, 6. H, 9.

constat ex demonstratione propos. 1. lib. 8. atq; adeo in proportionem lateris E, ad latus F, ut diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est A B, ad C D, ut E, ad F: Ut aut A B, ad C D,

1. sexti. ita est quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ob eandem altitudinem A B, si C D, ponatur basis rectanguli; Item ut E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ut quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est A B, ad C D, ut E, ad F: Ut aut A B, ad C D, ita est rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ob eandem altitudinem C D, si A B, ponatur basis rectanguli; Item ut E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ut I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum B D, & quadratum ex C D, in eadem ratione sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma, propos. 4. huius lib. erit quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

S I T secundo quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas



E, 2. F, 3.  
G, 4. H, 9.

A B, C D, esse longitudine cõmensurabiles. Sint numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, ut in priori figura.

Quoniam igitur est quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: Habet autem quadratum ex A B ad quadratum

20. sexti. ex C D, proportionem duplicatam lateris A B, ad latus C D; Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit pro-

portio

portio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportionēs, æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant, quam numeri E, F, ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

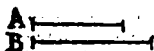
6. decimi

**A L I T E R.** Repetatur constructio figuræ posterioris. Quia igitur est ut A B, ad C D, ita quadratū ex A B, ad rectangulū B D; Itē ut A B, rursus ad C D, ita rectangulum B D, ad quadratū ex C D, ut supra diximus; erunt quadratū ex A B, rectangulū B D, & quadratū ex C D, continue proportionalia in ratione linearū A B, ad lineā C D: Sunt autem & numeri G, I, H, continue proportionales in ratione numeri E, ad numerū F, ut supra ostendimus; poniturq; quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratū numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, ut G, ad I, hoc est, ut E, ad F; Ac propterea A B, C D, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, cōmensurabiles sunt longitudine. Quod est propositū.

1. sexti.

**S I N T** tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earū quadrata proportionē non habere, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Si enim quadratū ex A, ad quadratū ex B, proportionē dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine cōmensurabiles, ut iam est demonstratū. Quod est absurdū. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionē habet, quam numerus quadratus ad numerū quadratum. Quod est propositum.

6. decimi



**Q U A R T O,** ac postremo quadratū ex A, ad quadratū ex B, nō habeat proportionē, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine cōmensurabiles credantur; habebūt earū quadrata, ut est demonstratū, proportionē quā quadratus numerus ad quadratū numerū. Quod est absurdū. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine cōmensurabiles sunt A, & B: Quod est propositum. Quapropter quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c: Quod erat demonstrandum.

COROL

E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

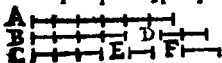
SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datæ sint quasor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

4.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nā



si maior magnitudo quā D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huiuslib. maximā mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si uero B, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quilibet earum mensura communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C.

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo

3. decimi

3. decimi

2. præm.

do confirmari potest. Si non est maxima, sit  $F$ , maior quā  $E$ , si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur  $F$ , metitur  $A$ , &  $B$ ; metetur quoque  $D$ , earum maximam mensuram, per coroll. precedentis propos. Metitur autem &  $C$ : Igitur  $F$ , metitur  $D$ , &  $C$ , metetur quoque  $E$ , earum mensuram maximam, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam  $E$ , magnitudines  $A, B, C$ , metitur; Ac propterea  $E$ , maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, hoc Quod erat faciendum.

## COROLLARIUM.

**A** P P T E quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

**I** N F E R T U R autem hoc ex ultima parte demonstrationis. Ottensum enim est ibi, magnitudinem  $F$ , si metiatur ipsas  $A, B, C$ , metiri quoque  $E$ , maximam illarum communem mensuram. Eademque de ceteris est ratio.

**S** I M I L I modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si date magnitudines faciant quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua uero omnia absoluenda erunt, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

## L E M M A.

**S** I sint quotcumque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

**S** I N T quotcumque magnitudines  $A, B, C, D$ , in eisdem rationibus, in quibus totidē numeri  $E, F, G, H$ : Ut quidem  $A$ , ad  $B$ , ita  $E$ , ad  $F$ ; & ut  $B$ , ad  $C$ , ita  $F$ , ad

$B : G ; \&$

$G$  : & ut  $C$ , ad  $D$ , ita  $G$ , ad  $H$ . Dico ex aquo esse,  
 ut  $A$ , ad  $D$ , ita  $E$ , ad  $H$ . Quoniam ex  $h$ s, quæ ad de  
 $A$  ————  $E$ , 3. fin. 5. lib. 6. a nobis demon  
 $B$  ————  $F$ , 4. strata sunt, tam propor-  
 $C$  ————  $G$ , 1. tio  $A$ , ad  $D$ , componitur  
 $D$  ————  $H$ , 2. ex proportionibus  $A$ , ad  
 $B$ ;  $B$ , ad  $C$ ; &  $C$ , ad  $D$ ; quam proportio  $E$ , ad  $H$ , ex  
 proportionibus  $E$ , ad  $F$ ;  $F$ , ad  $G$ ; &  $G$ , ad  $H$ ; perspi-  
 cuum est, cum proportionibus componentes proportio-  
 nem  $A$ , ad  $D$ , æquales ponantur proportionibus, quæ  
 proportionem  $E$ , ad  $H$ , componunt, & compositas  
 proportionibus, nempe  $A$ , ad  $D$ , &  $E$ , ad  $H$ , æquales es-  
 se, hoc est, esse ut  $A$ , ad  $D$ , ita  $E$ , ad  $H$ . Quod est pro-  
 positum.

I D E M sequitur, si magnitudinum, & numero-  
 $A$  ————  $E$ , 3. rum proportio fuerit per  
 $B$  ————  $F$ , 12. turbata, ut in hoc exem-  
 $C$  ————  $G$ , 4. plo apparet, in quo est, ut  
 $D$  ————  $H$ , 6.  $A$ , ad  $B$ , ita  $G$ , ad  $H$ ; &  
 ut  $B$ , ad  $C$ , ita  $F$ , ad  $G$ ; & ut  $C$ , ad  $D$ , ita  $E$ , ad  $F$ . Ea-  
 de enim prorsus est demonstratio.

S C H O L I O N.

Q U O N I A M præcedenti lemmati & in propositione,  
 quæ sequitur, & in alijs multis, sciendum nobis erit; placuit  
 illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videatur  
 ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus distictæ  
 generis quantitates constituent. At proportio ex æqualitate im-  
 præcedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdem  
 generis; In numeris quidem lib. 7. Libro uero 5. in magnitudi-  
 nibus. quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiã ad hoc  
 lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri  
 numeris quoque cõueniant. Vel certe demonstratio facta in 7.  
 lib. huic eidem lemmati congruat, cum magnitudines  $A$ ,  $B$ ,  
 $C$ ,  $D$ .

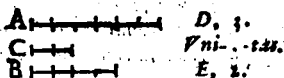
C, D, que proportionem habent eandem, quae numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

COMMENSURABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metit A, toties unitas repetita metiatur numerum D: Et quoties ea



3. decimi.

dem C, repetita metitur B toties unitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & unitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, unitatem. Quare erit ut A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Est autem & ut C, ad B, ita unitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atque unitas metitur E, æque metiatur. Igitur per primam præcedens, erit ex æquo, ut A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

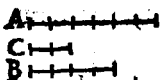
Cum Euclides ad demonstrationem huius theorematiss assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudine æquales potentia quoque commensurabiles, ut rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Hæc, sole communem recipiens mensuram, atque adeo in eis demonstratio locum habet.

Quod si lineæ sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atque idcirco mensuram habent communem, ipsarumque demonstratio huius theorematiss convenit: At ipsæ lineæ nequaquam, quales longitudine incommensurabiles esse sent,



communis mensurae sunt expertes, ac propterea huius theorema-  
tis demonstratio in ipsas convenire nullo modo potest.

Ex demonstratione porro eiusdem huius theorema-  
tis constat, commensurabilium magnitudinum proportionem  
esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis men-  
sura maxima ipsas metitur. Oñsensus enim est, eam habere



D, 3.

Vni. . . . .

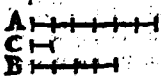
E, 2.

proportionē magnitudines  
A, & B, quam habent nu-  
meri D, & E; per quos scilicet,  
earum mensura com-

munis maxima C, ipsas metitur.

¶ N D E: si propositis duabus magnitudinibus commensura-  
bilibus A, & B, liceat invenire quam proportionem habeant  
in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas  
aque, ac communis magnitudinum commensurabilium A, &  
B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam ut  
demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habēt,  
quam numeri D, & E.

¶ Q V O D: si loca maxima mensura C, sumamus aliam quā-  
cunque communem earum mensuram; nihilo minus hoc theo-



D, 6.

Vni. . . . .

E, 4.

rema demonstrabimus eodē  
argumento. Quāvis enim  
numeri D, & E, maiores in-  
veniantur in hac posteriori

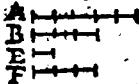
demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem propor-  
tionem cum illis, ut ex apposta figura apparet. Quoniam na-  
ro in priori demonstratione numeri inserti, sunt minimi om-  
nium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea  
forte Euclides in demonstratione maximam communem mensu-  
ram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

6 THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines inter se proportio-  
nem habeant, quam numerus ad numerū:  
commensurabiles erunt magnitudines.

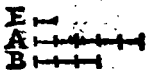
HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportio-  
nem

nem quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse cō  
mensurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero  
C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A,  
quarum partium uni equalis sit magnitudo E. Dein  
de quoties unitas repetita  
metitur numerum D, to-  
ties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandā  
aliā F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, conti-  
netur, quoties unitas in C; continebit æqualiter A, ipsam  
E, & C, numerus unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad  
unitatem: Et si autem & ut E, ad F; ita unitas ad D, quod  
E, ipsam F, & unitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per  
lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, ut A ad F, ita C, ad  
D: Erat autem etiam ut C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit ut  
A, ad B, ita A, ad F; ac propterea B, & F, magnitudines  
æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsam F, metia-  
tur, metietur quoque eadem E, ipsam B: Metiebatur autem  
& ipsam A. Igitur magnitudo E, utranque A, & B, meti-  
tur; Ac proinde A, & B, commensurabiles sunt. Si igitur  
duæ magnitudines inter se proportionē habeant, &c. Quod  
erat demonstrandum.



C, 5.  
Vni. - tas.  
D, 3.

**A L I T E R.** Quot sunt unitates in C, in tot partes æqua-  
les intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium uni  
æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est ut E, ad A,  
ita unitas ad C, quod E, ip-  
sam A, & unitas ipsum C,  
æque metiantur; poniturq;  
ut A, ad B, ita C, ad D; erit  
per idem lemma superius,  
ex æquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metietur autem unitas  
numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B,  
metietur: Metietur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, &  
B, habentes eandem communem mensuram E, commensu-  
rabiles sunt. Quod est propositum.

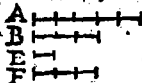


Vni. - tas.  
C, 5.  
D, 3.

COROLLARIUM.

Ex priori autem demonstratione theorematibus aperta est nobis  
via qua lineam rectam inueniamus, ad quam ut se habeat quouis  
alii a

alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; diuidenda erit A,

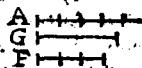


C, 9.  
Vni-  
tas.  
D, 3.

in tot aequales partes, quot unitates sunt in C; & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unitates sunt

in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, ut C, ad D; ut demonstratū est.

Hinc rursus apparet, quam arte possit inueniri linea, recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datae rectae,



C, 5.  
D, 3.

ut numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineae datae A, ut numerus C, ad numerum D, inueni-

enda erit primum linea F, ex ijs, quae modo diximus, ad quā sic se habeat A, ut C, ad D: Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, ut C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectae A, G, F, sint continuae proportionales, erit ex coroll. propos. 10. lib. 6. ut A, ad F, atque adeo ut numerus C, ad numerum D, (cum sit ut A, ad F, ita C, ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.

13. sexti.

**SCHOLION.**

In hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, ut ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

7.  
o.

**THEOR. 5. PROPOS. 7.**

**INCOMMENSVRABILES** magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

Si nō incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionē nō habere, quam habet numerus ad numerū. Si enim A, & B, proportionē dicantur habere, quam numerus ad numerum, erunt ipsae commensurabiles. Quod est absurdum. ponantur enim incommensurabiles. Non igitur



6. decimi

A, &

A, & B, proportionē habent, quā numerus ad numerū. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

QUOCVNQVE modo linea incōmensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligimus eas proportionem non habere, quam numerus ad numerū, ut vult theorema. Nam aliam, ut demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

8.  
o.

SI duæ magnitudines inter se proportionē nō habeant, quā numerus ad numerū: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quā numerus ad numerū. Dico eas incōmensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse cōmensurabiles, erit earū proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum, ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerū. Nō igitur cōmensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionē habeant, &c. Quod erat ostendendum.

s. decimi

SCHOLIUM.

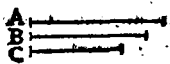
QUOD si linea proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessarīo, ex hoc theoremate, longitudine incōmensurabiles, alioquin proportionē haberēt, quam numerus ad numerum, ut ad propo. primus lib. demonstravimus, quod est contra hypothesim. Non autē colligendū est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionē nō habent, quā numerus ad numerū, necessario & potentia incōmensurabiles esse, ut manifestū est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantū sint cōmensurabiles, eas proportionē habere, quā numerus ad numerum, ut in demonstratione theorematidis assumitur, immo nullo modo talem proportionem habere possunt, ut in scholio propos.

propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur inferitur ex huius theorematibus demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continue proportionales, & aliae tres continue quoque proportionales; sitque ut prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

SINT continue proportionales tam quantitates  $A, B, C$ , quam  $D, E, F$ ; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non; sitque ut  $A$ , ad

$D$ , 35.  $C$ , ita  $D$ , ad  $F$ . Dico  
  
 $E$ , 28. quoque esse ut  $A$ , ad  
 $F$ , 21.  $B$ , ita  $D$ , ad  $E$ . Quo-

niam tam proportio  $A$ , ad  $C$ , proportionis  $A$ , ad  $B$ , quam proportio  $D$ , ad  $F$ , proportionem  $D$ , ad  $E$ , duplicata est; ponunturque proportionem  $A$ , ad  $C$ , &  $D$ , ad  $F$ , aequales; Erunt quoque proportionem  $A$ , ad  $B$ , &  $D$ , ad  $E$ , aequales, quandoquidem earum proportionem duplicatae aequales sunt.

ITEM sequitur, si plures quantitates sint, quae tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatae, ad demonstrationem; & in quinque, quadruplicatam, &c.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine commensu-

mensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ uero a rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

SINT primum rectæ A B, C D, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam rectæ A B, C D, longitudine sunt commensurabiles; erit A B, ad C D, ut numerus ad numerum: Sit ut E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est A B, ad C D, ut E, numerus ad numerum F: habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Brit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex C D, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportionēs, duplicatæ sunt proportionū æquiduum. Quod est propositum.



A B C D

E, 2 F, 3.  
G, 4 H, 9.

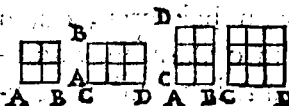
20. decimi.

20. sexti.

11. octavi.

ALITER.

ALITER. Posita eadem constructione, continetur rectangulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter



E, 2. F, 3.  
G, 4. I, 6. H, 9.

quadratos G, H, ut constet ex demonstratione propos. 1. lib. 8. atque adeo in proportionem lateris E, ad latus F, ut diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est AB, ad CD, ut E, ad F: Vt autem AB, ad CD,

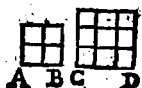
1. sexti.

ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD; ponatur basis rectanguli; Item ut E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ut quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, ut E, ad F: Vt autem AB, ad CD,

1. sexti.

ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item ut E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ut I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, in eadem ratione sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod, est propositum.

Sic secundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas



E, 2. F, 3.  
G, 4. H, 9.

AB, CD, esse longitudine commensurabiles. Sint numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, ut in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, ut quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: Habet autem quadratum ex AB ad quadratum

20. sexti.

ex CD, proportionem duplicatam lateris AB, ad latus CD; Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit pro-

11. octavi

portio

portio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportion-  
nes, æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant, quam numeri E, F, ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

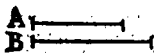
6. decimi

**A L I E R.** Repetatur constructio figuræ posterioris. Quia igitur est ut A B, ad C D, ita quadratū ex A B, ad rectangulū B D; Itē ut A B, rursus ad C D, ita rectangulum B D, ad quadratū ex C D, ut supra diximus; erunt quadratū ex A B, rectangulū B D, & quadratū ex C D, continue proportionalia in ratione lineæ A B, ad lineā C D: Sunt autem & numeri G, I, H, continue proportionales in ratione numeri E, ad numerū F, ut supra ostendimus; poniturq; quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratū numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, ut G, ad I, hoc est, ut E, ad F; Ac propterea A B, C D, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, cōmensurabiles sunt longitudine. Quod est propositū.

1. sexti.

6. decimi

**S I N T** tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earū quadrata proportionē non habere, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Si enim quadratū ex A, ad quadratū ex B, proportionē dicatur habere, quā numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine cōmensurabiles, ut iam est demonstratū. Quod est absurdū. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionē habet, quā numerus quadratus ad numerū quadratum. Quod est propositum.



**Q U A R T O,** ac postremo quadratū ex A, ad quadratū ex B, nō habeat proportionē, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine cōmensurabiles credantur; habebūt earū quadrata, ut est demonstratū, proportionē quā quadratus numerus ad quadratū numerū. Quod est absurdū. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine cōmensurabiles sunt A, & B: Quod est propositum. Quapropter quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c: Quod erat demonstrandum.

COROL



COROLLARIUM.

Ex his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ uero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ uero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; ipsa commensurabilia erunt. Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existet. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamē quam numerus simpliciter ad numerum, potentia quidem commensurabiles sunt, cum earum quadrata commensurabilia sint; at longitudine nequaquam, ut in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim ex lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, ut constat ex secunda parte huius theorematum.

RVRSUS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamē, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidē sunt longitudine, at potentia commensurabiles, ut modo diximus; liquet, ut constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse. Solum enim ex lineæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, potentia quoque incommensurabiles sunt, cum earum quadrata incommensurabilia sint.

POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, ut patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

S C H O L I O N.

UT autem scopus priorum duarum partium huius theorematum

6. decimi  
3. defin.

3. defin.  
6. decimi.

4. defin.  
8. decimi.

matia

maſis planius perfectiſq; percipiatur, diligenter conſideran-  
da ſunt hec, quæ ſequuntur. Primum lineas rectas longitu-  
dine commenſurabiles, quarum quadrata, ex primæ parte theo-  
rematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad  
quadratum numerum, non ſolum eſſe eas, quæ numeris ex-  
primi poſſunt, ſed cum linea Rationali propoſita comparentur, qua-  
les ſunt illæ, quæ in demonſtratione ſunt poſitæ: (eſt enim re-  
cta  $AB$ , 2. &  $CD$ , 3.) verum etiam illas, quæ nullis poſ-  
ſunt numeris efferri, ſed cum Rationali linea propoſita conſe-  
vantur: Deinde contrario, quadrata inter ſe proportionem ha-  
bentia; quæ quadratus numerus ad quadratum numerum,  
quorum linea, ſeu latera, ex ſecunda theorematiſ parte lon-  
gitudine ſunt commenſurabilia; non ſolum ea eſſe intelligenda  
quæ continent ſolidem quadratas meſuras æquales illis, in  
quas quadratum Rationalis linea reſolvitur, quæ ſunt unita-  
tes in numeris quadratis; eandem cum ipſis proportionem ha-  
bentibus; cuiuſmodi ſunt quadrata in demonſtratione deſcri-  
pta: (continent enim quadratum ex  $AB$ , quatuor meſuras  
quadratas, & quadratum ex  $CD$ , novem; quæ nimirum uni-  
tates ſunt in quadratis numeris 2, 3.) Sed ea etiam, quæ vel  
pauciores, vel plures meſuras quadratas complectuntur, quæ  
ſunt unitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato li-  
nea Rationalis conſervantur. Sapienter enim omnis linea data com-  
menſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi  
non poſſunt, propterea quod Rationali linea propoſita ſunt longi-  
tudine incommenſurabiles; Ac propterea quadrata illarum  
proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad  
quadratum numerum, ut in hoc theoremate eſt oſenſum, ac  
pauciores quadratas meſuras, vel plures continent, quæ  
ſunt in quadratis illis numeris unitates. Hæc autem omnia poſ-  
ſe faciemus hac demonſtratione.

EXPONATUR linea Rationalis  $AB$ , expreſſa nume-  
ro 4. cuius quadratum  $AC$ , continet meſuras quadratas 16.  
Sint quoq; numeri  $D$ ,  $E$ , plani ſimiles non quadrati; habon-  
tes tamen proportionem, ut in Arithmeticiſ eſt demonſtra-  
tum, quam quadratus numerus  $F$ , ad quadratum numerum  
 $G$ , nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur reſtingendum  $H$   $I$ , con-  
ſiſtens ex ſex quadratis meſuris quadrati  $AC$ ; quæ nimirum  
unitates in  $D$ , numero continentur; atq; ipſi  $I$   $I$ , quadratum

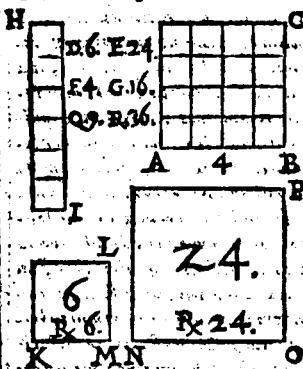
C æquale

16. octavi

14. ſecunda

14. septimi.

aquale consti- nuntur  $K L$ , cuius latus  $K M$ . Restituo per ea. qua coroll. propof. 6. huius lib. offendimus, inueniatur recta  $N O$ , ad cuius quadratum  $N P$ , ita se habeat  $K L$ , quadratum



recta  $K M$ , ut numerus  $D$ , ad numerum  $E$ , vel ut quadratus  $F$ , ad quadratum  $G$ . Quoniam igitur est ut quadratus numeri  $F$ , ad quadratum numerum  $G$ , vel ut numerus  $D$ , ad numerum  $E$ , videlicet  $6$ , ad  $24$ , ita quadratum  $K L$ , ad quadratum  $N P$ , per constructionem. Contines autem quadratum  $K L$ ,  $6$ , mensuras quadratas, quallum  $16$ . continet quadrum Rationale  $A C$ : (con-

fructum enim est quadratum  $K L$ , aequale rectangulo  $H I$ , constructi ex 6 huiusmodi quadratis mensuris.) continetis quadratum  $N P$ , eorundem mensurarum quadratarum  $24$  ac properea  $M$ ,  $N O$ , latera quadratorum  $K L$ ,  $N P$ , erunt  $6$ . &  $24$ . que numeris exprimi nequeunt, cum  $6$ . &  $24$ . non sint numeri quadrati, eruntque linea Rationali  $A B$ , longitudine incommensurabilia, inter se, autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus  $F$ , ad quadratum numerum  $G$ . Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata  $K L$ ,  $N P$ , proportionem habeant, ex coroll. propof. 2. lib. 6. duplicatum latus  $K M$ ,  $N O$ , sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nomen  $1$ , ad  $4$ . erit proportio laterum subdupla videlicet  $1$ , ad  $2$ . huius enim illa duplicata est, ut hic apparet  $1$ ,  $2$ ,  $4$ . Quare longitudine commensurabiles sunt recta  $K M$ ,  $N O$ , cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligende sunt ergo in hoc theoremate linea est illa longitudine commensurabiles, quae numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si consideremus eadem linea  $K M$ ,  $N O$ , simpliciter, & absolute, nulla habita ratione lineae Rationalis  $A B$ , numeris pythagorae offer-  
ri. Cum

6. decimi.

ii. Cum enim proportionem habeant subduplem,  $\text{se } K M$ , diuidatur in duas partes aequales, diuidetur  $N O$ , in eisdem magnitudinis partes,  $\text{quod si illam } 3$ , fecerit hanc in  $6$ , &c. At uero haec partes nullo modo aequales sunt partibus lineae Rationalis  $A B$ , immo illis omnino sunt longitudine incommensurabiles.

$R V R S V$ , quia quadrata  $K L, N P$ , proportionem habentia quam quadratus numerus  $F$ , ad quadratum numerum  $G$ , plures quadratas mensuras continent aequales illis, in quas  $A C$ , quadratum Rationalis lineae  $A B$ , resoluitur, quam unitates sunt in dictis numeris quadratis  $F, G$ ; (Nam  $K L$ , aequale est sex huiusmodi mensuris, &  $N P$ , continet  $24$ . At numerus quadratus  $F$ , componitur ex quatuor unitatibus, &  $G$ , ex  $16$ .) Et si maiores quadrati in eadem proportionem sumantur  $Q, R$ , pauciores tales mensuras complectuntur quadrata  $K L, N P$ , quam sunt unitates in numeris quadratis  $Q, R$ , eam autem ex  $9$ , alter uero ex  $36$ , unitatibus constituantur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quae numerus quadratus ad numerum quadratum, quae pauciores quadratas mensuras, uel plures obprobrium, quae unitates in illis quadratis numeris reperiuntur, se ea conferantur cum quadrato lineae Rationalis propositae. Quod si eadem quadrata  $K L, N P$ , considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati  $A C$ , ex Rationali lineae  $A B$ , descripti, resoluti poteris in totidem mensuras quadratas, quot unitates in quadrato numeris  $F, G$ , uel  $Q, R$ , continentur. Nam si uelut  $K M$ , diuidatur in duas partes, &  $N O$ , in quatuor, ut dictum est, conuenit quadratum  $K L$ , quatuor mensuras quadratas, & quadratum  $N P$ , sexdecim, quae scilicet unitates reperiuntur in quadratis numeris  $F, G$ . Item, si eadem linea fecerit in partes tres, & sex, habebunt eorum quadrata mensuras quadratas  $9$ , &  $36$ , quae nimirum unitates compreheduntur in numeris quadratis  $Q, R$ , &c. At huiusmodi mensurae nullo modo aequales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum  $A C$ , Rationalis lineae  $A B$ , resoluitur.

$I D M$  dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quatuor uero quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sunt  $12$ , &  $3$ , habentes proportionem, quam quadratus numerus  $16$ , ad quadratum numerum  $4$ , &c.

IT A Q U E theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamvis interdum Rationali lineæ incommensurabiles sint, ut sit sensus. Quadrata quæ describuntur a rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali proposita, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamvis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis lineæ confectantur, saepe numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hac quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiam si lineæ Rationali sint longitudine incommensurabiles, &c.

C O L L I G I T Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, ut ad propos. 47. lib. 1. demonstravimus. Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplas proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, ut in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex ultima parte huius theorematism eorum latera, nempe diameter & latus in uno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstravimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendit Euclides propos. ultima huius lib.

II.  
10.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

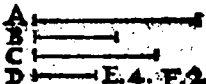
S I quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secunda fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secunda fuerit incommen-

commen-

commensurabilis; & tertia quartæ incom-  
mensurabilis erit.

S I N T proportionales quatuor magnitudines A, B, C,  
D, sitq; A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & ter-  
tiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam A,  
& B, inter se commensurabi-

les sunt, habebit A, ad B, pro-  
portionem quam numerus ad  
numerum, nempe quam B,  
ad F: Ponitur autē ut A, ad B,



5. decimi.

ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam  
numerus E, ad numerū F. Quare C, & D, commensura-  
biles inter se sunt.

6. decimi.

S E D, sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C,  
ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam A, & B, incom-  
mensurabiles sunt, non habebit A, ad B, proportionē quā  
numerus ad numerum: Ponitur autē ut A, ad B, ita C,  
ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet quam nu-  
merus ad numerum. Quare C, & D, incommensurabiles  
sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales  
fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

7. decimi.

8. decimi.

# SCHOLIION. 1.

Q U O D si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ,  
prima autem secunda commensurabilis fuerit longitudine,  
erit & tertia quarta longitudine commensurabilis, ut ex de-  
monstratione huius theorematism apparet. Eodem enim modo  
ostendemus posteriores duas proportionē habere numeri ad nu-  
merum. Quare, ut in scholio propof. 5. huius lib. diximus, lon-  
gitudine commensurabiles sunt.

S I autem prima secunde fuerit commensurabilis potentia  
tantum, erit & tertia quarta potentia tantum commensurabi-  
lis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, com-  
mensurabilis est potentia ipsi B, erunt earum quadrata com-  
mensurabilia; ac propterea proportionem habebunt, quam nu-  
merus ad numerum. Est autem, ut quadratum ex A, ad qua-

9. defin.

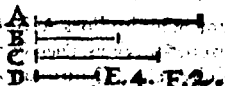
5. decimi.

22. sexti.

dratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D: (quod  
quatuor lineæ propofitæ A, B, C, D, proportionales ſint, & earum  
quadrata a figura ſimiles ſimiliterq; deſcripta) Igitur & qua-

6. decimi.

3. deſin.



drata ex C, D, proportionem ha-  
beant; quam numerus ad nu-  
merum. Quare commenſurabi-  
lia erunt; Ac propterea lineæ  
C, D, potentia commenſurabiles.

Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita ma-  
niſeſtum ſit. Quoniam rectæ A, B, cum ſint commenſurabiles  
potentiæ tantum, longitudine incommenſurabiles ſint; non  
erit earum proportio, qua numeri ad numerum; ut in ſcholio  
propof. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neq; C, D, propor-  
tionem habebunt, quam numerus ad numerum. Itaque longitudine er-  
go incommenſurabiles ſunt C, D, ex ſcholio propof. 8. huius lib.

Sunt autem potentia commenſurabiles, ut oſtendimus. Reſtatur  
potentia tantum ſunt commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.  
EADÉM rōne, ſi prima ſecunda ſit incommenſurabilis longitudi-  
dine rectæ, erit & tertia quarta longitudinis tantum incommenſura-  
bilis. Ne ſi A, & B, ſint longitudine tantum incommenſurabiles; rectæ  
ipſarum potentia commenſurabiles; ac propterea ipſæ potentia tantum  
commenſurabiles erunt. Igitur, ut nunc oſtendimus, erunt quoq; rectæ  
C, D, potentia tantum commenſurabiles; Ac idcirco longitudine  
tantum incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

R V R S V S ſi quatuor magnitudinum priores duæ fuerint  
lineæ, duæ vero reliquæ ſuperficies, vel ſolida; ſequetur nihilo  
minus, ſi lineæ ſint longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles,  
& reliquas duas magnitudines commenſurabiles, vel incommenſurabiles eſſe. Si enim lineæ longitudine ſint  
commenſurabiles, erit earum proportio, que numeri ad nu-  
merum, ex ijs, qua in ſcholio propof. 5. huius lib. docuimus. Cui  
ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandem;  
quam lineæ, erit quoque illarum proportio, qua numeri ad nu-  
merum; atq; adeo commenſurabiles erunt. Si vero lineæ longi-  
tudine incommenſurabiles ſint, ſine potentia commenſurabiles  
exiſtant, ſine non non erit earum proportio, qua numeri ad nu-  
merum, ut conſtat ex ſcholio propof. 7. huius lib. Igitur neque re-  
liquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportio-  
nem habentium, proportio erit, que numeri ad numerum. Quod  
reſtatur

6. decimi.

reſtatur

re incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

8. decimi.

EODEM modo, si priores dua magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero dua, linea, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, si neque longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si in plana, solidaue commensurabilia sint, habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igil et linea eadem cum ipsa ratione habebit, proportionem habebit, quam numerus ad numerum, hoc propter aequi longitudine commensurabiles erunt, ut diximus in scholio propositi 6 huius libri. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt a proportionem, quam numerus ad numerum, igit neque linea eadem cum ipsa proportionem habebit, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, quae docuimus in scholio propositi 8 huius libri. Quod est propositum.

9. decimi.

### L E M M A.

Duos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTUR duo plani numeri non similes, per ea, quae ad finem libri 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in scholio propositi 26. libri 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QUOD si plures numeros inuenire uelimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quoscunque numeros primos, per ea, quae in A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. scholio propositi 20.

lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habet, ex scholio propositi 26. libri 8. quia numeri quadrati ad numeros quadratos, eum non sunt plani similes, ut ad finem libri 8. docuimus.



**PORRO** inuentionē numerorū planorū nō similitum, qui videlicet proportionē nō habeāt, quam quadratus numerus ad quadratū numerum, non recte quidam irradiderunt hoc loco. Quod. ut ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua diffas numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

|                       |        |                                             |
|-----------------------|--------|---------------------------------------------|
| <b>EXEMPLUM</b> V. E. |        | quatuor numeri A, B, C, D, ita ut non sit   |
|                       |        | sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, |
| A, 30.                | C, 3.  | numerus H; & ex C, D, numerus F. Participi- |
| B, 6.                 | D, 16. | cium igitur est E, F, numeros planos esse,  |
|                       |        | planos autem dissimiles; quoniam latera     |
| E, 12.                | F, 48. | proportionalia nō sūt, qđ facere oportebat. |

**HATC** est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similitum. Errant autem huiusmodi interpretes, quia saepe numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12 & 48, sunt plani similes, cum proportionem habeant, quā quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior. numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. ut cō fiat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim est, ut duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, ut quacunq; duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio pro pos. 23. lib. 8.

10.

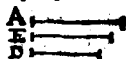
11.

**PROBL. 3. PROPOS. II.**

**PROPOSITAE** rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

**SIT** recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per

per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Deinde ex corollario propof. 6. huius lib. reperitur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, ut numerus B,



B, 10.

C, 6.

ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, ut numerus B, ad numerum C, non est autem proportio B ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

9. decimi.

6. decimi.

Si iam eidem rectæ propositiæ A, inveniendâ linea incommensurabilis longitudine, & potentia. Inveniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propof. 20. lib. 6. ut A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, ut iam est ostensum; erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propof. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propositiæ rectæ lineæ invenimus duas rectas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

13. sexti.

10. decimi.

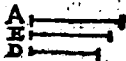
# SCHOLIUM

Si igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita ut ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per definitionem.



fin. 6. Rationalis, quia potentia illi est cōmensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis, ex defn. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM, ex demonstratione huius theorematas liquido constas, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantū cōmensurabiles, vel quod idē est, inter duas longitudine tantū incōmensurabiles, esse utrilibet illarū incōmensurabile longitudine, & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarū statueretur Rationalis. Ex eo. n. quod



B, 10. recta A, D, sunt longitudine tantū incōmensurabiles, vel cō-

C, 6. mēsurabiles potentia tantū; de-

monstramus rectā E, inter illas mediā proportionalem, esse ipsi A, incōmensurabile longitudine, & potentia: Eodemq; argumento ostendimus eandē longitudine, & potentia ipsi D, esse incōmensurabile. Cū. n. recta D, E, A, sint cōtinuæ proportionales, erit ut coroll. propos. 20. lib. 6. ut quadratū ex D, ad quadratū ex E, ita recta D, ad rectā A: Est aut recta D, recta A, incōmensurabilis longitudine. Igitur & quadratū ex D, quadrato ex E, incōmensurabile erit. Quare recta D, & E, ex defn. incōmensurabiles sunt potentia, atq; adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.

IN codicibus vulgatis preponitur hæc undecima propositio a Theone propositioni decima præcedenti: quod errore librarii non factum esse puto; cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstratur, ut ex dictis apparet.

10. decimi.

12.  
8.

## THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVAE eidem magnitudini sunt cōmensurabiles, & inter se sunt cōmensurabiles.

SIT utraq; magnitudo A, B, magnitudini C, cōmensurabilis. Dico & A, B, inter se esse cōmensurabiles. Cū. n. A, & C, sint cōmensurabiles, habeat A, ad C, proportionē, quā numerus ad numerū: habeat quā numerus D, ad numerū E. Rursus quia C, B, cōmensurabiles sunt, habeat quoq; C, ad B, proportionē, quā numerus ad numerū: habeat quā numerus F, ad numerū G. sumaturq; res numeri H, I, K, mini-

1. decimi.

4. offeni

mi de-

mi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F,  
ad G; sitq; H, ad I, ut A, ————— D, 10. E, 8.  
D, ad E, hoc est, ut A, C ————— F, 2. G, 3.  
ad C; & I, ad K, ut E, B ————— H, 6. I, 4. K, 6.  
ad G, hoc est, ut C, ad  
B. Quoniam igitur est A, ad C, ut H, ad I; & C, ad B, ut I, ad  
K; erit ex æquo A, ad B, ut H, ad K, numerus ad numerum.  
Quare A, B, proportionē habētes, quam numeri H, K, inter  
se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudinis cō  
mensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

6. decimi.

SCHOLIUM.

Quod si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atq; A, & B;  
ipsæ C, longitudine cōmensurabiles existant, erunt quoq; A, &  
B, inter se longitudine commensurabiles, ut constas ex demon  
stratione theorematīs, quia eodem modo ostendimus, lineas A, &  
B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K.  
Quare longitudine commensurabiles erunt, ut ad propof. 6. di  
cimus. Si vero A, & B, fuerint ipsæ C, potentia commensurabi  
les, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstra  
buntur eodem modo, & A, B, inter se commensurabiles potētia.  
Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, erit quadra  
tum ex A, ad quadratum ex C, ut numerus ad numerum, nem  
pe, ut D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defn. sint cōmensu  
rabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B,  
ut numerus ad numerum, nimirum ut F, ad G. Sumptis ergo in eis  
dē rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H,  
I, K, deinceps proportionalibus, erit rursum ex æquo quadratū  
ex A, ad quadratum ex B, ut numerus H, ad numerum K. Quare  
quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt, atq; adeo lineæ  
A, B, potentia commensurabiles. Non sapient ex hoc sequitur,  
K, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim  
esse duæ lineæ longitudine inter se commensurabiles, licet utra  
que cuiuspiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis;  
quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensura  
biles, potentia vero tantum Rationali expōita commensura  
biles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propof. 19.  
huius lib.

5. decimi.

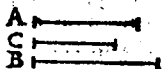
4. offi

6. decimi.

# EUCLED. GEOM.

*S E D & conuersum quodemmodo huius theorematuſ demonſtrabimus hoc modo.*

**§ 1** ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera uero ſit vni cuiſpiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis.



*S I N T* enim *A*, & *B*, commenſurabiles, ſitq; *A*, ipſi *C*, commenſurabilis. Dico & *B*, eidem *C*, commenſurabilem eſſe. Cum enim tam *B*, quam *C*, ipſi *A*, ſit commenſurabilis; erunt quoque *B*, & *C*, ex hoc theoremate, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

*Q U O D* ſi magnitudines *A*, *B*, *C*, ſint linea, & *A*, *B*, commenſurabiles longitudine, ſit autem *A*, ipſi *C*, commenſurabilis longitudine; erit & *B*, reliqua eidem *C*, longitudine commenſurabilis. Nam cum tam *B*, quam *C*, ipſi *A*, longitudine ſit commenſurabilis, eorum etiam *B*, *C*, inter ſe commenſurabiles longitudine, ut oſtendimus. At uero ſi linea *A*, & *B*, potentia tantum ſint commenſurabiles, & *A*, ipſi *C*, commenſurabilis ſue longitudine, & potentia, ſue potentia tantum, colligamus quidem eodem argumento, reliquam *B*, eidem *C*, potentia eſſe commenſurabilem; quia ueraq; *B*, *C*, ipſi *A*, hæc ratione potentia, eſt commenſurabilis ex hypotheſi. Non autem colligere licebit, ſi *A*, ipſi *C*, commenſurabilis ſit longitudine, reliquam *B*, eidem *C*, longitudine commenſurabilem eſſe, quia non ueraque *B*, *C*, ipſi *A*, longitudine commenſurabilis eſt, ſed *C*, quidem longitudine, at uero *B*, potentia tantum, ut ex hypotheſi conſtat.

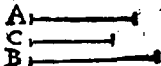
**12.**  
**o.**

## THEOR. 10. PROPOS. 13.

**§ 1** ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera uero incommenſurabilis: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

*S I N T*

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensurabilis ipsi



A, cum eidem A, commensurabilis ponatur C, erunt B, & C, inter se commensurabiles: quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

## S. C. H. O. L. I. O. N.

Si magnitudines A, B, C, sine linea, &c. A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine.) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis sine satum, sine etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.

QUONIAM vero, hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, sit, ut post hæc in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Relinquimus, n. dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

## THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini

a cuius

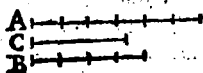
12. decimi.

12. decimi.

13.  
8.

cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

S I N T duę magnitudines cõmensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuiuspiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicitur esse



commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B; ponatur commensurabilis; erunt & A, C, inter se cõmensurabiles.

12. decimi.

Quod est absurdum. Probatur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duę magnitudines cõmensurabiles, non Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

H I C quoque, si magnitudines A, B, C, sint duę, & A, B, cõmensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantum, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine cõmensurabiles, essent quoque A, & C, cõmensurabiles longitudine. (Cum hoc posito, utraque A, & C, ipsi B, longitudine esset cõmensurabilis.) Quod est absurdum: ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, cõmensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent cõmensurabiles; & A, C, potentia cõmensurabiles, essent. (Cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset cõmensurabilis.) Quod non ponitur.

12. decimi.

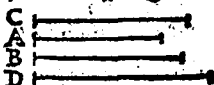
12. de cimi.

COLLIGUNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quę in hoc lib. demonstrantur, perutile.

Q V A E incommensurabilibus sunt cõmensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

S I N T duę magnitudines incommensurabiles A, B, quibus

has commensurabiles sunt C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis, erit quocumque reliqua C, eidem B, incommensurabilis.



14. decimi.

Reversus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ipsi C, incommensurabilis, erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.

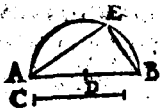
14. decimi.

Si autem magnitudines A, B, C, D, sint lineae, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia, sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles, erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si vero A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantum commensurabiles C, & D, ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles, & perspicuum est.

LEMMA.

De A, B, & C, datis rectis lineis inaequalibus, invenire id, quo maior plus potest, quam minor.

Quamvis id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamē quia hic brevius ex ijs, quae tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicavimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datae duae rectae lineae inaequales AB, & C, quarum AB, maior, oporteatque invenire, quo AB, plus possit quam C. Divisa AB, bisaria in D, describatur ex centro D, & intervallo DA, vel DB, semicirculus AEB, in quo aptetur recta AE, ipsi C, aequalis, innigaturque recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectae EB. Cum enim angulus E, in semicirculo rectus



1. quarti.

1. tertii.

rectus



47. primi. rectus sit; erit quadratum ex  $AB$ , aequale quadratis ex  $AE$ ,  $EB$ ; atq; idcirco  $AB$ , plus poterit quam  $AE$ , hoc est, quam  $C$ , quadrato rectæ  $EB$ . Quod est propositum. Similiter

DUABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

Hoc etiam aliter tradidimus ad propof. 47.



lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ  $AE$ ,  $EB$ , quæ si coniungantur ad angulum rectum  $E$ , poterit eas recta ducta  $AB$ , quippe cū

47. primi. quadratum ex  $AB$ , aequale sit quadratis ex  $AE$ ,  $EB$ .

14.  
12.

# THEOR. 15. PROPOS. 12.

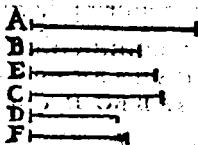
SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum

rectæ

rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Si n. r. quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, possitque A, prima plus quam B, secunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus, possit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A, & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C: Si uero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A, & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse.

Quoniam est ut A, ad B, ita C, ad D; erit quoque ut quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadrato ex B, E, per hypothesein; & quadratum ex C, quadrato ex D, F. Igitur erunt quoque, ut quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, ut quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; Ac propterea erit etiam ut recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque ut B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est ut A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, ut A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



22. sexti.

22. sexti.

SCHOLIUM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantum commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantum ipsi C, esse commensurabilem, ut constet ex ista, quæ in scholio propos. 10. huius lib. scripta

mus.

D

THEOR.

15.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

9.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo utriusque ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

COMPONENTUR duæ magnitudines commensurabiles  $AB, BC$ . Dico totam quoque magnitudinem  $AC$ , utriusque ipsarum  $AB, BC$ , commensurabilem esse. Sit enim ipsarum  $AB, BC$ , communis mensura  $D$ . Quoniam igitur  $D$ , ipsas  $AB, BC$ , metitur, metietur quoque  $D$ , totam  $AC$ , ex ipsis compositam. Cum ergo  $D$ , metiatur  $AC$ , &  $AB$ , erunt  $AC, AB$ , commensurabiles. Similiter cum  $D$ , metiatur  $AC$ , &  $BC$ , erunt &  $AC, BC$ , commensurabiles; Ac propterea  $AC$ , utrique ipsarum  $AB, BC$ , commensurabilis erit.

Sed etiam tota  $AC$ , ex  $AB, BC$ , composita commensurabilis sit alteri ipsarum  $AB, BC$ , nempe ipsi  $AB$ . Dico &  $AB, BC$ , inter se commensurabiles esse. Sit enim  $D$ , communis mensura ipsarum  $AC, AB$ . Quoniam igitur  $D$ , metitur totam  $AC$ , & ablata  $AB$ , metietur quoque  $D$ , reliquam  $BC$ . Quare cum  $D$ , metiatur  $AB, BC$ , commensurabiles erunt  $AB, BC$ , inter se. Eodem argumento ostendemus  $AB, BC$ , esse commensurabiles, si  $AC$ , ipsi  $BC$ , fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Hi non sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquam commensurabilem esse. Ut si  $AC$ , ipsi  $AB$ , sit commensurabilis, esse quoque eandem  $AC$ , reliquam  $BC$ , commensurabilem. Nam ut in posteriori parte theorematum ostensum est, semper  $D$ , communis mensura totius  $AC$ , & ablata  $AB$ , cum metiatur totam  $AC$ , & ablata  $AB$ , metietur quoque reliquam  $BC$ , ex 3. propositione. Quare commensurabiles sunt  $AC, BC$ . Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

16.

9.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo utriusque ipsarum incōmensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTUR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinē AC, utrique ipsarum AB, BC, incommensurabilē esse. Si enim non est utrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri A — B — C  
D — I  
potest, nempe ipsi AB, sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D metitur totam AC, & ablatam AB; metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur utranque AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB; Eademque ratione neque ipsi BC, commensurabilis erit. Quare utrique ipsarum AB, BC, incommensurabilis est.

3. decimi  
3. prom.

SED iā tota AC, cōposita ex AB, BC, incōmensurabilis sit uni ipsarū cōponentium, nempe ipsi AB. Dico quoque AB, BC, incōmensurabiles esse. Si enim sint cōmensurabiles, erit quoque tota AC, utriusque ipsarū AB, BC, cōmensurabilis. Quod est absurdū. Ponitur enim AC, alteri ipsarū, nempe ipsi AB, incōmensurabilis. Non ergo cōmensurabiles sunt AB, BC. Eodē argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

16. decimi.

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reli-

D 2 quæ

que incommensurabilem esse . Nempe si  $A C$ , incommensurabilis sit ipsi  $A B$ , esse quoque eandem  $A C$ , reliquæ  $B C$ , incommensurabilem . Si enim  $A C$ , ipsi  $B C$ , foret commensurabilis, esset quoque  $A C$ , ex coroll. præcedentis propositio . reliquæ  $A B$ , commensurabilis . Quod est absurdum . ponitur enim incommensurabilis . Non est ergo  $A C$ , ipsi  $B C$ , commensurabilis, sed incommensurabilis . Quod est propositum .

S C H O L I O N . I .

**P E R S P I C U U M** est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles . Assumitur enim ad utriusque propositionis demonstrationem communis mensura  $D$ , &c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, ut ex defn. apparet.

L E M M A I .

**S**i ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

**A**d rectam  $A B$ , applicetur parallelogrammum  $A D$ , deficiens figura quadrata  $B D$ . Dico parallelogrammum  $A D$ , æquale esse rectangulo sub segmentis  $A C$ ,  $C B$ , comprehenso . Cum enim  $B D$ , quadratum sit, erit angulus  $A C D$ , rectus . Parallelogrammum igitur rectangulum est  $A D$ , contentum sub  $A C$ ,  $C D$ , rectis . Quare cum  $C D$ , æqualis sit rectæ  $C B$ , ob quadratum  $B D$ ; continebitur idem parallelogrammum rectangulum  $A D$ , sub segmentis



$A C$ ,

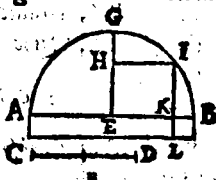
$AC, CB$ ; ac proinde parallelogrammum  $AD$ , applicatum æquale est rectangulo sub segmentis  $AC, CB$ , quæ ex applicatione in recta  $AB$ , sunt facta, comprehenso. Quod est propositum.

LEMMA II.

DATA BV S datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.

QUAMVIS id, quod in hoc lemmate proponitur, facile absolui possit ex propo. 18. lib. 6. libet tamen id ipsum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliore. Sint igitur data rectæ inæquales  $AB, CD$ , quarum  $AB$ ,

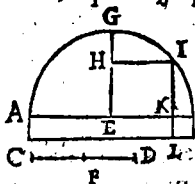
maior sit, oporteatque ad  $AB$ , applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale sit quarta parti quadrati



ex recta  $CD$ , descripti. Sectis rectis  $AB, CD$ , bisariam in  $E, F$ , describatur ex centro  $E$ , & intervallo  $EA$ , uel  $EB$ , semicirculus  $AGB$ ; & ex  $E$ , perpendicularis ad  $AB$ , ducatur  $EG$ . Et quia tota  $AB$ , maior ponitur quam tota  $CD$ , erit quoque  $AE$ , dimidia ipsius  $AB$ , hoc est  $EG$ , ipsi  $AE$ , æqualis, maior quam  $CF$ , dimidia ipsius  $CD$ . Posita igitur  $EH$ , æquali ipsi  $CF$ , agatur per  $H$ , ipsi  $AB$ , parallela  $HI$ , demittaturque  $IKL$ , ad  $AB$ , perpendicularis, & sit  $KL$ , ipsi  $KB$ , æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum  $AL$ , & quadratum  $BL$ . Dico parallelogrammum  $AL$ ,

D 3 appli-

applicatum ad rectam  $AB$ , deficiens figura quadrata  $BL$ , æquale esse quartæ parti quadrati rectæ  $CD$ .



17. sexti.  
34. primi

Quoniam  $KI$ , media proportionalis est inter  $AK, KB$ , ut in scholio propos. 13. lib. 6. ita didimissierit rectangulum sub  $AK, KB$ , hoc est, rectangulum  $AL$ , æquale quadrato ex  $KI$ , hoc est, quadrato ex  $EH$ ; (est enim  $KI$ , ipsi  $EH$ , æqualis, ob parallelogrammum  $EI$ .) hoc est, quadrato ex  $CF$ : Est autem quadratum ex  $CF$ , quarta pars quadrati ex  $CD$ ; quod quadratum ex  $CD$ , per scholium propos. 4. lib. 2, quadruplum sit quadrati ex  $CF$ . Igitur, parallelogrammum  $AL$ , ad rectam  $AB$ , applicatum deficiensq; quadrato  $BL$ , æquale est quartæ parti quadrati ex  $CD$ , descripti. Quod est propositum.

SCHOLION.

Ex hoc lemmae absolutum est hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

SI T enim recta data  $AB$ , et rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex  $CE$ , ad maius quam quadratum ex dimidia  $AE$ , ita ut latere  $CP$ , non maius sit latere  $AE$ . Educta ergo ad  $AB$ , perpendiculari  $EG$ , sit  $EH$ , æqualis ipsi  $CF$ . Deinde ducta  $HI$ , parallela ipsi  $AB$ , demittatur  $IK$ , perpendicularis ad  $AB$ . Quibus peractis ostendemus, ut prius, rectangulum sub partibus  $AK, KB$ , æquale esse quadrato ex  $KI$ .

hoc

hoc est, quadrato ex  $CF$ , atque adeo & rectilineo dato, cui aequale est positum quadratum ex  $CF$ . Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta  $CF$ , maior quam recta  $EG$ . Quare ex  $EG$ , abscindi non posset recta ipsi  $CF$ , equalis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, ut ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

Si in duabus rectis inaequalibus, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quae ex applicatione fiunt, aequalia.

Sint duae rectae inaequales  $AB$ , &  $C$ ; & ad maiorem  $AB$ , applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud aequale quartae parti quadrati ex minore  $C$ , descripti, ita ut  $DB$ , latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta  $AD$ ,  $DB$ , in aequalia esse. Si enim  $AD$ ,  $DB$ , segmenta dicantur esse aequalia; cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad  $AB$ , deficiensque figura quadrata ex  $DB$ , descripta, aequale sit rectangulo sub  $AD$ ,  $DB$ ; sit autem quod sub aequalibus  $AD$ ,  $DB$ , quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex  $AD$ , dimidio ipsius  $AB$ , descriptum; atque adeo ex scholio propo. 4. lib. 2. quadratum ex  $AB$ , quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex  $C$ , per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartae partis quadrati ex  $C$ . Igitur quadrata rectarum ex  $AB$ , et  $C$ , aequalia sunt, atque rectae  $AB$ , et  $C$ , aequales.

D 4 quod



Quod est absurdum. ponuntur enim inaequales, & A B, maior. Inaequalia igitur sunt segmenta A D, D B. Quod est propositum.

H o c facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem, E H, aequalis dimidia-  
ti ipsius C D, nempe ipsi C F, ductaque H I, parallela ipsi A B, & tandem demissa perpendicularis I K, ut partes factae ex applicatione sunt A K, K B; manifestum est A K, & K B, segmenta esse inaequalia, cum A B, in E, secta sit bisariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit; minus.

17.

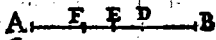
13.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duae rectae lineae inaequales, quartae autem parti quadrati, quod fit a minori, aequale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis, quartae autem parti quadrati, quod fit a minori, aequale pa-  
rallelo-

rallelogrammum ad maiorem applicetur, de-  
ficiens figura quadrata; in partes longitudi-  
ne communisurabiles ipsam diuidet.

S. N. 7. ~~duo~~ ~~recta~~ ~~lineae~~ ~~in~~ ~~ae~~ ~~quales~~ ~~A B~~, & ~~C~~, quarum maior  
A B; quae si aucta ~~in~~ ~~partem~~ ~~quadrati~~ ~~ex~~ ~~minori~~ ~~C~~, descripta per  
lemma secundum praecedens propos. applicetur ad A B, pa-  
rallelogrammum deficiens figura quadrata, faciatque seg-  
menta A D; D B, longitudine communisurabilia. Dico A B,  
plus posse quam C, quadrato-lineae  
longitudine sibi communisurabilis.



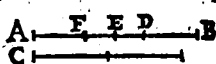
Quoniam per 3. lemma praecedens  
ris propos. A D, maior est, quam D B; diuidatur A B, bifa-  
riam in E, & ipsi E D, aequalis sumatur E F. Quo facto,  
cum tota E A; B B, aequales sint, & ablatae quoque E F, E D;  
erunt & reliquae A F, B D, aequales. Et quia recta A B, diui-  
sa est bifariam in E; & non bifariam in D; erit rectangulum  
sub A D, D B, una cum quadrato ex E D, aequale quadrato  
ex E B; Ac propterea quadruplum rectanguli sub A D, D B,  
& quadrati ex E D, aequale erit quadruplo quadrati ex E B:  
Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B, aequale qua-  
dratum ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B,  
aequale quartae parti quadrati ex C, ) & quadruplo quadra-  
ti ex E D, aequale est quadratum ex F D; (quadratum enim  
ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadra-  
ti ex B D, cum F D, dupla sit ipsius E D, ) & quadruplo qua-  
drati ex E B, aequale est quadratum ex A B. (quod quadra-  
tum ex A B, quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2.  
quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B. ) Igitur & qua-  
drata ex C, & F D, aequalia sunt quadrato ex A B; Ac pro-  
inde recta A B, plus potest quam recta C, quadrato rectae  
F D. Hanc igitur F D, demonstrare oportet longitudine co-  
munisurabilem esse ipsi A B. Quoniam recta A D, D B,  
longitudine ponuntur communisurabiles; erit quoque to-  
ta A B, parti D B, communisurabilis longitudine. Est autem  
& ipsi D B, composita ex D B, A F, longitudine commu-  
nisurabilis: (quod composita ex D B, A F, dupla sit ipsius D B)  
Igitur cum utraque A B, & composita ex D B, A F, longitu-  
dine

secundi

16. decimi.

12. decimi.

dine sit commensurabilis ipsi DB; erunt quoque AB, & composita ex DB, AF, longitudine inter se commensurabiles;



Ac propterea cum AB, composita ex AF, DB, tanquam una, & ex FD, commensurabilis sit longitudine compositae ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. pro

pos. 16. huius lib. commensurabilia longitudine reliquae FD. Ergo AB, plus potest quam C, quadrato rectae FD, longitudine sibi commensurabilis.

SE D iam AB, plus possit quam C, quadrato lineae sibi longitudine commensurabilis; & quartae parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles, iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quam C, quadrato rectae FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectae longitudine sibi commensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, longitudine commensurabilis. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam una, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine commensurabilis reliquae compositae ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum ipse sit dupla: Igitur cum utraque AB, DB, longitudine sit commensurabilis compositae ex AF, DB; erunt quoque AB, DB, longitudine inter se commensurabiles: Atque adeo cum tota AB, composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine ipsi DB; erunt ipsae AD, DB, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duae rectae lineae inaequales, &c. Quod erat demonstrandum.

12. decimi.

16. decimi.

18.

14.

THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duae rectae lineae inaequales, quartae autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, &

in

in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tanto plus poterit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod sit a minori, æquale parallelogramum ad maiorem applicetur deficient figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales  $A, B$ , &  $C$ , quarum maior  $A, B$ ; quartæ autem parti quadrati ex  $C$ , minori descripti applicetur ad  $A, B$ , per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogramum æquale deficienti figura quadrata, quod faciat in recta  $A, B$ , partes  $A, D, D, B$ , longitudine incommensurabiles. Di.  $A, F, E, D$  in recta  $A, B$ , plus possit quam  $C$ , quæ quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Eisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus  $A, B$ , plus posse quam  $C$ , quadrato rectæ  $F, D$ . Hanc igitur demonstrare oportet ipsi  $A$ , longitudine esse incommensurabilem. Quonia in rectæ  $A, D, D, B$ , ponuntur longitudine incommensurabiles; erit quoque tota  $A, B$ , parti  $D, B$ , longitudine incommensurabilis. Sed  $D, B$ , longitudine commensurabilis est composita ex  $D, B, A, F$ , cum hæc illius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium  $D, B$ , & quæ componitur ex  $D, B, A, F$ , ipsa  $D, B$ , longitudine sit incommensurabilis rectæ  $A, B$ : erit quoque reliqua composita ex  $D, B, A, F$ , eidem  $A, B$ , longitudine incommensurabilis: At propterea cum  $A, B$ , composita ex  $A, F, D, B$ , tanquam una, & ex  $F, D$ , incommensurabilis sit longitudine composita ex  $A, F, D, B$ ; erit eadem  $A, B$ , per coroll. propos. 17. huiuslib. & reliquæ  $F, D$ , longitudi-

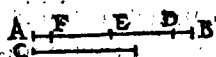
17. desimi.

14. decimi.

ne

be incommensurabilis. Ergo A B, plus potest quam C, qua  
drato rectæ FD, longitudine sibi incommensurabilis.

I A M uero A B, plus possit quam C, quadrato lineæ lon  
gitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati



ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B,

potes AD, DB. Dico & rectas AD, DB, esse incommensu  
rabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendimus

ut prius, rectam A B, plus posse quam C, quadrato rectæ

FD. Quare cum A B, ponatur plus posse, quam C, quadra

to rectæ longitudine sibi incommensurabilis; erit A B, ipsi

FD incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota A B,

composita ex FD, & ex A F, DB, tanquam una, longitu

dine incommensurabilis sit ipsi FD; erit eadem A B, per co

roll. propos. 17. huius lib. & reliquæ compositæ ex A F,

DB, longitudine incommensurabilis: Est autem composita

ex A F, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis; cum ip

sa huius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensu

tabitum, nempe quæ ex A F, DB, componitur, & DB,

ipsa composita ex A F, DB, longitudine incommensurabi

lis sit rectæ A B; erit & reliqua DB, eadem A B, longitudo

ne incommensurabilis; Ac proinde cum tota A B, compo

sa ex A D, DB, incommensurabilis sit ipsi DB, longitudine;

erunt & ipsæ A D, DB, longitudine inter se incommensura

biles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales;

quartæ autè parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandū

14. decimi

17. decimi

### § C H O R O N . I.

E G I T hæcenus Euclides de magnitudinibus commensu  
rabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales &  
Medias transit in sequentibus.

### L E M M A . I.

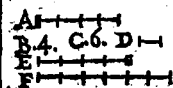
Q U O N I A M demonstratum est, lineas longitu  
dine commensurabiles, omnino & potentia commensu  
rabiles

rabiles esse, potentia uero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si exposita Rationali aliqua linea cōmensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem uocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si uero exposita Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si exposita Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

### LEMMA II.

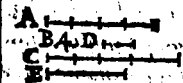
EX PROCLO. Rationales uocat eas lineas, quæ expositæ Rationali uel longitudine & potentia commensurabiles sunt, uel potentia solum. Sunt autem & alia lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atq; ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se uel longitudine & potentia, uel potentia solum. Et si quidē longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se cōmensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si uero potentia inter se solum sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

ITAQUE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera equalis est exposte Rationali & as proinde utraque Rationali commensurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali exposte equalis est, longitudine tamen ei utraque est commensurabilis: Aut denique utraque exposte Rationali commensurabilis est solum potentia. Hec autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit exposta Rationalis *A*, diuisa in quatuor partes, quot nimirum unitates sunt in numero *B*. Sumptio deinde quolibet alio numero *C*, sit *D*, recta una partium recte *A*; & quoties *D*, metitur lineam *A*, toties metiatur quandam aliam *E*. Item quoties unitas est in *C*, toties eadem *D*, metiatur quampiam aliam lineam *F*, Quoniam igitur *A*, & *E*, componuntur ex partibus multitudine equalibus, quae quidem magnitudine aequales sunt ipsi *D*; ipsae aequales erunt. Rursus quia *D*, metitur omnes tres *A*, *E*, & *F*, erunt omnes tres *A*, *E*, & *F*, longitudine commensurabiles. Quare *E*, & *F*, Rationali *A*, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensa longitudine inter se commensurabiles, cum habeant *D*, communem mensuram. Inueniunt ergo sunt, duae Rationales *E*, *F*, longitudine commensurabiles & inter se, & exposte Rationali *A*, & quarum una, nempe *E*, equalis est Rationali exposte *A*.



ITA M uero *D*, metiatur duas lineas quasdam *C*, *E*, per duos

numeros *F*, *G*, quorum neuter idem sit, qui *B*, ita ut utraque linea *C*, & *E*, inequalis sit ipsi *A*. Erunt igitur ut prius, tres recte *A*, *C*, *E*, mensuram habentes communem *D*, longitudine commensurabiles. Quare *C*, *E*, Rationali *A*, longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles, inueniuntur duae Rationales *C*, *E*, longitudine commensurabiles & inter se, & exposte Rationali *A*,

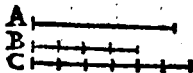


*F*, *G*. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles, inueniuntur duae Rationales *C*, *E*, longitudine commensurabiles & inter se, & exposte Rationali *A*,

li *A*, quarum neutra aequalis est Rationali exposita *A*.

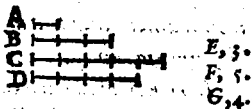
POSTREMO exposita Rationali *A*, inveniatur recta *B*, longitudine tantum incommensurabilis, qua secetur in quot 11. decimi.

cunque partes aequales, & sumatur *C*, composita ex alijs quocumque partibus, quae magnitudine aequales sint partibus rectae *B*. Quo facto, erunt *B*, & *C*, longitudine



commensurabiles. Dico easdem exposita Rationali *A*, potentia solum esse commensurabiles. Quoniam *A*, *B*, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex *A*, quadrato ex *B*, commensurabile. Est autem eidem quadrato ex *B*, commensurabile quadratum ex *C*, quod *B*, *C*, longitudine sunt commensurabiles, atque adeo, & potentia; Igitur quadrata rectarum *A*, & *C*, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare *C*, ipsi *A*, potentia est commensurabilis. Es quia duarum rectarum *B*, *C*, longitudine commensurabilium, *B*, est ipsi *A*, longitudine incommensurabilis; erit quoque reliqua *C*, eidem *A*, longitudine incommensurabilis. Est ergo *C*, solum potentia ipsi *A*, commensurabilis. Et quia *B*, & *C*, Rationali exposita *A*, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inventa erunt duae Rationales *B*, *C*, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia vero tantum commensurabiles exposita Rationali *A*. Quod est propositum.

QVOD si quis optet inuenire quocumque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mensura quavis *A*, componantur quolibet lineae *B*, *C*, *D*, ex tot partibus ipsi *A*, aequalibus, quot sunt unitates in totidem numeris inaequalibus *E*, *F*, *G*. Nam lineae *B*, *C*, *D*, habentes communem mensuram *A*, longitudine commensurabiles erunt.



CETERVM & omnes lineas Rationales, non solum exposita Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles, facile hoc modo demonstrabimus. Quoniam Rationales lineae sunt, quae exposita Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; quae autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est,

6. definitio.

12. decimi.

Ratio-

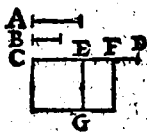


Rationales lineas quęcunque inter se commensurabiles esse.

LEMMA III.

Si sint duę rectę lineę, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratũ ex prima.

SINT duę rectę A, & B. Dico esse ut A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque lineā rectā CD, abscindatur CE, ipsi A, equalis, & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum sub CE, & EF, hoc est, sub A, & B. Quo-



i. sexti.

niam igitur est ut CE, ad EF, hoc est, ut A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duę rectę lineę, esse primam ad secundam, ut quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.

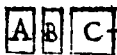
EODEM modo erit, ut B, ad A, ita rectangulũ FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA IIIL.

SPATIUM Rationali spatio commensurabile, & ipsam Rationale est.

SIT spatium A, commensurabile Rationali spa-

ito B. Dico & A, Rationale esse. Sit C, quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, uel irrationalia, quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quonia



igitur B, Rationale est; erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cum commensurabilia sint ipsi B, inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea exposita descripto commensurabile. Rationale est. Quod erat demonstrandum.

2. defin.

12. decimi

9. defin.

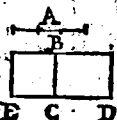
19.

15.

# THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.

S I r exposita Rationalis A, & spatium rectangulum B D, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus B C, C D, secundum aliquem prædictorum modorum (hoc est, secundum aliquem trium modorum, quos in scholio. antecedentis propos. explicuimus; ita ut vel altera ipsarum B C, C D, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei utraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantum.) Dico B D, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solum; erit quoque quadratum B E, ex B C, descriptum quadrato ex A, commensurabile: Est autem quadra



E C D

E tum

3. defin.

8. defin.

9. defin.

1. sexti.

10. decimi.

20.

16.

tum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. Igitur & B E, illi commensurabile, Rationale est. Quia vero B C, hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine commensurabiles.) & est ut E C, ad C D, ita E B, ad B D; erunt quoque E B, B D, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. B D, Rationali B E, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectus, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propos. precedentis exposuimus, hoc est, siue B C, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur ex B C, quadratum B E; quod similiter, ut in antecedenti propos. ostendimus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: Est autem ut B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur, & B C, C D, commensurabiles sunt longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi B C, commensurabilis longitudine: sed & Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atque idcirco Rationali expositæ A, commensu-



9. defin.

12. decimi.

1. sexti.

6. defin.

mentum ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur ex B C, quadratum B E; quod similiter, ut in antecedenti propos. ostendimus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: Est autem ut B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur, & B C, C D, commensurabiles sunt longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi B C, commensurabilis longitudine: sed & Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atque idcirco Rationali expositæ A, commensu-

mensurabilis sit, ut in scholio propof. 12. huius lib. demon-  
strauimus. Quare latitudo  $CD$ , Rationalis est, & longi-  
tudine commensurabilis ipsi  $BC$ . Si igitur Rationale ad  
Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat  
demonstrandum.

LEMMA.

RECTA linea potens spatium Irrationale,  
Irrationalis est.

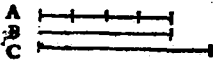
POSSIT recta  $A$ , spatium Irrationale, hoc est,  
quadratum ex  $A$ , aequale sit spatio cuiuspiam Irrationa-  
lis. Dico  $A$ , Irrationalem esse. Si e-  
nim dicatur Rationalis; erit eius qua  $A$  ———  
dratum Rationale quoque, ut in demonstratione pro-  
pos. 20. huius lib. ostensum est. quod est absurdum.  
ponitur enim Irrationale. Non ergo  $A$ , Rationalis  
est. Igitur Irrationalis.

HOC idem constat ex definitione 11. huius lib.  
Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, uocantur Ir-  
rationales.

LEMMA. II.

DVAS rectas Rationales potentia solum  
commensurabiles inuenite.

DVO genera sunt linearum Rationalium poten-  
tia tantum inter se commen-  
surabilium. Aut enim altera  
earum est equalis exposita



Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita  
inueniemus. Sit exposita Rationalis  $A$ , cui equa-  
lis sumatur  $B$ . Deinde ipsi  $B$ , inueniatur  $C$ , longitu-  
dine tantum incommensurabilis, seu (quod idem est)

potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt; (B, quidem, quod ei sit equalis; at C, ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum commensurabilis ipsi B, atque adeo ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuenta ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commensurabiles, quarum altera, nempe B, expositæ Rationali A, equalis est.

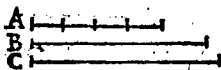
POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus exposita Rationalis A, cui longitudine tantum incommensurabilis inueniatur B, & huic rursus longitudine tantum incommensurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, ut in scholio propof. 12. huius lib. demonstravimus. Quare cum utraque B, C, expositæ Rationali A, sit potentia commensurabilis; erunt B, C, Rationales. Inuenta ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles.

SCHOLIUM.

QVOD si inveniende sint quæcunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

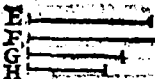
SUMANTUR per ea, quæ in scholio propof. 20. lib. 6. docuimus, tres numeri primi, quas lineæ Rationales quarum

1. decimi.



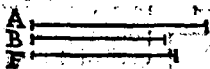
6. defn.

rum, nempe,  $A, B, C, D$ . Deinde sumpta linea Rationali  $E$ , fiat ut  $A$ , ad  $B$ , ita quadratum ex  $E$ , ad quadratum ex  $F$ , ut in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item ut  $B$ , ad  $C$ , ita quadratum ex  $F$ , ad quadratum ex  $G$ ; & denique ut  $C$ , ad  $D$ , ita quadratum ex  $G$ , ad quadratum ex  $H$ .



ex  $H$ . Dico rectas  $E, F, G, H$ , Rationales esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod unum Rationales sunt, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri  $A, B, C, D$ , (nempe quadratum ex  $E$ , ad quadratum ex  $F$ , ut numerus  $A$ , ad numerum  $B$ , ex constructione; similiterque quadratum ex  $F$ , ad quadratum ex  $G$ , ut  $B$ , ad  $C$ ; & quadratum ex  $G$ , ad quadratum ex  $H$ , ut  $C$ , ad  $D$ . At vero ex lequo quadratum ex  $E$ , ad quadratum ex  $G$ , ut  $A$ , ad  $C$ ; similiterque quadratum ex  $E$ , ad quadratum ex  $H$ , ut  $A$ , ad  $D$ ; & denique quadratum ex  $F$ , ad quadratum ex  $H$ , ut  $B$ , ad  $D$ .) erunt ipsa inter se commensurabiles; ac propterea & recte ipse potentia saltem commensurabiles. Existent ergo,  $E$ , Rationali, erunt & reliqua  $F, G, H$ , Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendimus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis  $A, B, C, D$ : numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, ut ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum  $E, F, G, H$ , proportionem, quam numeri quadrati. Quare recte  $E, F, G, H$ , longitudine incommensurabiles sunt. Offensa sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.

Quod si proposita quocunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inveniendae sit adhuc alia, quod omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint proposita duae Rationales potentia tantum commensurabiles  $A, B$ , quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus  $C$ , ad numerum  $D$ : Sumpto autem alio numero, qui ad quemlibet ipsorum  $C, D$  primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur pri-

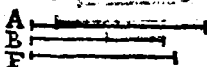


$C, 10.$   
 $D, 16.$   
 $E, 7.$

6. decimi

9. decimi

mus, qui neutrum ipsorum C, D, mediatur .) fiat ut D, ad F, ita quadratum lineae B, ad quadratum lineae F, per coroll. propof. 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem . Quod enim Rationalis fit,



C, 10. ex eo patet, quod commensurabilis fit Rationali B, E, 7. saltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, pro-

6. decimi.

portionem habentia, quam numeri D, E, commensurabilia sint. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, quae numeri quadrati ad numerum quadratum, ut ad finem lib. 8. ostendimus, quod D, & E, sint inter se primi; erunt rectae B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia solum commensurabiles. Nam ex aequo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, ut C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.

9. decimi.

21.

19.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

S i t. exposita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum sub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modum, quos in lemmate 2. praecedentis propos. diximus ( hoc est, siue altera illarum aequalis sit Rationali expositae A, siue non. )



Dico rectangulum B D, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi B D, aequale est, Irrationalem quoque, quae vocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, ut ex B C, quadratum B E, quod

quod erit Rationale, ut in demonstratione propos. 20. diximus. Et quoniam est ut EC, hoc est, BC, ad CD, ut BE, ad BD: Est autem BC, ipsi CD, longitudine incommensurabilis, ex hypothesi, erit ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipsi BD incommensurabile. Quare cum BE, commenturabile sit quadrato ex Rationali exposita A: Sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile, erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationale est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.

VOCATUR autem hæc linea potens ipsum BD, Media; propterea quod media proportionalis sit inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commenturabiles, quippe cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commenturabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.

## S C H O L I O N.

ITAQUE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commenturabiles, Media vocabitur. Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se incommensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commenturabilibus contineri. Nā sola hæc linea Media hoc loco appellatur.

UT autem recte hoc loco moneri Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenturabilibus contentum, Irrationalis est, vocaturq; Media: Verū etiā quadratum ipsius, vel rectangulum illud Mediæ dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata

1. sexti.

9. definit.

14. decimi.

10. definit.

17. sexti.

17. sexti.



illarum rectorum Rationalium potentia solum commensurabilem, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres linee sine continue proportionales, quales sunt  $BC$ , & recta Irrationalis, quae Media dicitur, &  $CD$  erunt quoque rectilinea similia, similitudinisque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, ut in scholio propof. 22. lib. 6. demonstravimus. Quare quadratum ex Media descriptum proportionale est inter quadrata rectorum  $BC$ ,  $CD$ , ideoque Medium appellari potest. Hoc autem non ita intelligas, ut putes omne rectangulum Medium contineri sub duobus rectorum Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium  $BD$ . Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duobus Irrationalibus, nempe Medium longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, ut ex propof. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur rectangulum sub duobus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, ut ostendimus: At non omne spatium Medium sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuersum tamen omne spatium Medium aequale est alteri cuiuspiam Medio sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum. Nam aliis recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

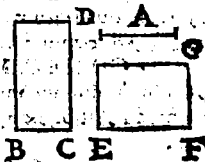
Vnde Medium describi sic poterit, ut dicamus, illud esse rectangulum sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuiuspiam rectangulo sub duobus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso aequale est, ita ut ipsum possit linea recta, quae Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duobus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duae lineae Rationales potentia tantum commensurabiles, ut in scholio sequentis theorematibus ostendimus.

THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

Si r linea Media A, & Rationalis B C, siue ea sit exposita, siue exposita commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; appliceturq; ad B C, rectangulū BD, Equale quadrato ex Media A, vel rectangulū γ quod huic quadrato æquale est, faciatq; latitudinem C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, longitudine incommensurabilem. Quoniam A, Media est, ipsa poterit rectangulum sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus inter se contentum, alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulū E G, sub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et



quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum B D: æqualia erunt B D, & E G, lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit ut B C, ad E F, ita F G, ad ad C D; Ac propterea quoque ut quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D. Sed quadratum ex B C, commensurabile est quadrato ex E F. (quod rectæ B C, B F, ponantur Rationales; atq; adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D; proptereaq; & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum F G, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis, erit quoq; C D, expositæ Rationali commensurabilis, ut ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quoniam

22.

20.

45. primi

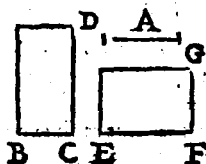
14. sexti.

22. sexti.

10. decimi.

niam E F, F G. Rationales sunt potentia tantum commen-  
surabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est ve-  
E F, ad F G, ita quadratum ex E F ad rectangulum E G, sub  
E F, F B, contentum, ex lemmate 3. propof. 19. huius lib. erit

10. decimi.



quadratum ex E F, incommensu-  
rabile rectangulo E G, atq; adeo  
rectangulo B D, quod huic æqua-  
le est. Atqui quadratum ex E F,  
commensurabile est quadrato ex  
C D. ( quod E F, C D, Rationales  
sint, atq; idcirco saltem potentia  
commensurabiles. ) Igitur cum

13. decimi.

10. decimi.

quadratum ex C D, commensurabile sit quadrato ex  
E F, at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incommen-  
surabile; incommensurabilia erunt quadratū ex C D,  
& rectangulum B D. Est autem ex lemmate 3. propof. 19.  
huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt re-  
cta C D, ad rectam B C. Incommensurabiles ergo sunt lon-  
gitudine C D, & B C. Rationalis ergo est C D, & Rationali  
B C, longitudine incommensurabilis. Quamobrē, quod a Me-  
dia sit, ad Rationale applicatū, &c. Quod demonstrandū  
erat.

S C H O L I O N.

31. sexti.

37. sexti.

FACILIS quam ex propof. 45. lib. 1. applicabimus  
ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsi B C, & A,  
sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim B C, A,  
& C D, proportionales sint; erit rectangulū B D, sub extremis  
B C, C D, contentum æquale quadrato mediae proportionalis A.

H A C arte sciendum erit & in sequentibus, quando ad ali-  
quam rectam applicandum eris rectangulum æquale quadra-  
to cuiuspiam lineae rectae.

P O R R O ex hoc theoremate manifestum est, omne Mediū,  
hoc est, spatium, quod linea Media posest, æquale esse cuiusdā  
alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia  
tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationale  
lineam applicetur æquale rectangulum, facies id, per hoc theo-  
rema, alterum latus Rationale, longitudine lineae Rationa-  
li incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Me-  
dio

do aequale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia se-  
lum commensurabilibus contentum. Atque hoc modo quod-  
cumque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub  
duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIAE cōmensurabilis, Media est.

SIT Mediae A, recta B, commensurabilis siue longitudi-  
ne & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam  
esse. Exposita enim sit Rationalis C D, ad quam applicetur  
rectangulum D E, æquale quadra-  
to ex A, Media. Quoniam igitur  
D E, Medium ad Rationalem C D,  
applicatum, facit C E, latitudinē;  
erit C E, Rationalis ipsi C D, lon-  
gitudine incommensurabilis. Rur-  
sus ad C D, Rationalem appli-  
cetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia re-  
ctæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eo-  
rum quadrata, hoc est, rectangula ipsi æqualia, D E, D F,  
commensurabilia. Est autem, ut D E, ad D F, ita recta E C,  
ad rectam C F. Igitur E C, C F, longitudine sunt commen-  
surabiles: Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine  
ipsi C D, incommensurabilis. Igitur & C F, longitudine  
eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationa-  
lis sit, propterea quod Rationali expatitæ C D, sit commen-  
surabilis; (Nam cum E C, C F, sint longitudine ostensæ  
commensurabiles, & E C, ipsi C D, cōmensurabilis saltē  
potentia, quod Rationalis fuerit & C F, eidem C D, com-  
mensurabilis potentia, ex ijs, quæ in scholio propof. 12.  
huius lib. scripsimus.) erunt C D, C F, Rationales poten-  
tia tantum commensurabiles; Ac proinde recta B,  
potens rectangulum D F, sub Rationalibus po-  
tentia tantum cōmensurabilibus C D, C F,  
Media est. Mediae igitur commensura-  
bilis, Media est. Quod ostē-  
dendum erat.

COROL.

23.

21.

45. primi.

23. decimi.

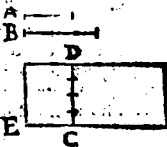
45. primi.

1. sexi.

10. decimi.

14. decimi.

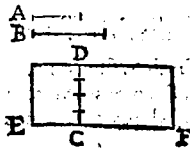
22. decimi.



## COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam demonstratum est D E, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium. Eademque ratio est in ceteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

Si igitur spatium, D F, spatium Medio D E, commensurabile. Dico & D F, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam si D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quae Media dicitur, vel in scholio propo. 22 huius lib. tradidimus.) & B, ipsum D F, Quoniam D E, D F, commensurabilia sunt, erant quoque quadrata ex A, B, ipsis aequalia, commensurabilia. Quare



A, B, recta potentia saltem sunt commensurabiles: Ac idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vel in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, ut in scholio propo. 22. huius lib. docuimus.

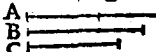
## L E M M A. I.

QVEMADMODUM autem in lemmate 1. propo. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediae longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia: Vniuersae enim quae longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si uero recta quaedam linea Mediae potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quid si Media rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEM.

LEMMA. II.

**D**uas rectas Medias longitudine commen-  
surabiles; Item duas potentia tantum commen-  
surabiles inuenire.

**S**IT Media aliqua linea A, cui si inueniantur due  
recte commensurabiles B, C; illa quidem longitudine,  
hæc uero potentia tantum; erit   
utraq; B, C, Media A, com-  
mensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitu-  
dine commensurabiles; & A, C, potentia tantum;  
erunt inuenta A, B, Media longitudine commensura-  
biles; & A, C, Media potentia solum commensura-  
biles: Quod est propositum.

24. Decimi

SCHOLIUM.

**Q**UAMVIS omnis linea recta Media commensurabilis,  
Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Media est com-  
mensurabilis; cum due Media dari possint prorsus incommen-  
surabiles, longitudine uidelicet, & potentia, ut ex propos. 36.  
huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, qua nam via in-  
uenienda sint due Media longitudine & potentia incommensu-  
rabiles.

24.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

23.

**Q**UOD sub Medijs longitudine com-  
mensurabilibus rectis lineis continetur re-  
ctangulum, Medium est.

**C**ONTINERATUR rectangulum AD, sub Medijs  
A C, C D, longitudine commensurabilibus. Dico AD, Me-  
dium

1. sexti

10. decimi.

25.

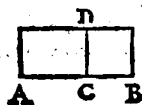
23.

45. primi.

34. primi.

23. decimi.

dium esse. Describatur ex CD, Media quadratū BD, quod erit Mediū. Et quoniam est ut AC, ad CB, ita AD, ad DB:



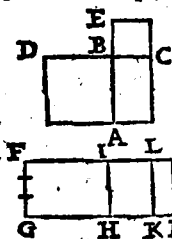
Sunt autem AC, CB; hoc est, AC, CD, longitudine cōmēsurabiles, erunt AD, DB, cōmēsurabilia. Quare spatium AD, Medio DB, cōmensurable, Mediū est, ex coroll. præcedentis propos. Quod er

go sub Medijs longitudine cōmēsurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

# THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Medijs pōtentia tantum cōmensurabilibus rectis lineis cōtinetur re ctangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehensum sub Medijs AB, BC, pōtentia tantum cōmēsurabilibus. Dico AC, esse vel Rationale, vel Medium. Describatur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, ut in scholio propos. 22. huius lib docuimus; cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, ad quam applicetur



rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, descripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, descripto; eritque totum FM, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib 1. est ostēsum. Quia vero AD, CE, Media sunt, erunt & FH, LM, illis æqua-

lia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL, (est enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM, erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipsi FG, seu KL, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, pōtentia inter se sunt cōmēsurabiles, erunt & earū qua-

dra

dratā A D, C E, atque adeo ipsis equalia rectangula F H, L M, commensurabilia : Vt autem F H, ad L M, ita est recta G H, ad K M. Igitur G H, K M, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare G H, K M Rationales ostense, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali uero F G, solum commensurabiles potentia, cum ei ostense sint longitudine incommensurabiles ; Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, K M, Rationale est. Et quoniam est, vt D B, ad B C, ita A B, ad B E ; ( quod D B, B C, ipsis A B, B E, sint æquales, utraq; utrique. ) & ut D B, ad B C, ita A D, ad A C ; & ut A B, ad B E, ita A C, ad C E ; erit quoq; ut A D, ad A C, ita A C, ad C E ; atq; adeo A D, A C, C E, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia F H, H L, L M, proportionalia erunt : Habent autem rectæ G H, H K, K M, eandem proportionem, quas rectangula F H, H L, L M. Igitur & rectæ G H, H K, K M, proportionales sunt, proptereaq; rectangulum sub G H, K M, quadrato ex H K, æquale est. Est autem rectangulum sub G H, K M, ostensum Rationale. Igitur & quadratū ex H K, Rationale est ; ideoq; & recta H K, Rationalis erit ; & ob hoc ipsi F G, Rationali expositæ, hoc est, ipsi H I, cōmensurabilis uel lōgitudine, uel solū potētia. Et si qui dē H K, ipsi H I, lōgitudine sūt cōmensurabilis ; rectagulū H I, sub Rationalibus H I, H K, lōgitudine cōmensurabilibus cōtētū, hoc est, A C, illi æquale, erit Rationale. Si uero H K, ipsi H I, potētia solū cōmensurabilis fuerit rectagulū H L, sub Rationalibus H I, H K, potētia tāū cōmensurabilibus cōtētū, hoc est, A C, illi æquale, Mediū. Est ergo A C, rectagulū sub Medijs A B, B C, potētia tāū cōmensurabilibus cōtētū, uel Rationale, uel Medium. Quocirca, quod sub Media potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIION.

FACILEVS quā ex 45. prop. lib. 1. applicabim<sup>9</sup> ad H I, rectagulū ipsi A C, æquale, si tribus rectis H I, A B, B C, quarta proportionalis sumatur pro latere H K. Nā rectagulū sub extremis H I, H K, æquale erit rectagulū sub medijs A B, B C.

HAC eadē arte utemur in sequētib<sup>9</sup>, quādo ad aliquā rectā applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

Q v o -

1. sexti  
10. decimi.

10. decimi.

1. sexti

1. sexti

17. sexti

6. desin.

20. decimi.

22. decimi.

12. sexti.

16. sexti.

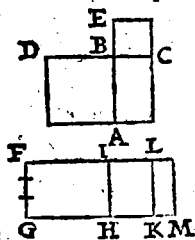


QUONIAM vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Medijs potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium; docet: Euclides propos. 28. quam ratione inveniende sint duae Mediae potentia tantum commensurabiles, quae Rationale comprehendant: Propos. vero 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquires, quae statim Medium contineant.

ITA QV B habemus ex his, rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine cōmensurabilibus esse Rationale; Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum cōmensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellariq; Medium, & rectam, quae ipsum potest, Mediam. Rursus ex demonstratis constat, rectangulum comprehensum sub duabus Medijs longitudine commensurabilibus esse Medium; Rectangulum autem sub duabus Medijs potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale, vel Medium.

QVOD si quis roget, qualem rectangulum sit illud, quod sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium; sed tertium quoddam genus constituere; nempe aequale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali & Irrationali, quae Media appellatur.

SIT enim rectangulum A.C., comprehensum sub duabus Medijs AB, BC, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico A.C., neque Rationale esse, neque Medium; &c. Constructis eisdem, ut in theoremate, ostendemus similiter, rectas GH, KM, Rationales esse, & ipsi FG, longitudine incommensurabiles. Et quia rectae AB, BC, ponuntur incommensurabiles



longitudine & potentia; erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo ipsi equalia rectangula FH, LM, incommensurabilia: Ut autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad rectam KM. Igitur recta GH, KM, longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare GH, KM, ostensa Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles; Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Irrationale est.

est, quod Medium appellatur, & recta ipsum potens, Irrationalis, quae dicitur Media. Potest autem rectangulum sub ipsis  $GH, KM$ , recta  $HK$ : (Nam, ut prius, ostendimus tres  $GH, HK, KM$ , esse proportionales) Igitur  $HK$ , Irrationalis est, & Media. Quare  $IK$ , Rationale non est: si enim Rationale esset, faceret ipsum ad Rationalem  $HI$ , applicatum latitudinem  $HK$ , Rationalem, & ipsi  $HI$ , longitudine commensurabilem. Quod est absurdum. ostensa enim est  $HK$ , Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque  $IK$ , Medium est; Si enim esset Medium, faceret ipsum applicatum ad Rationalem  $HI$ , latitudinem  $HK$ , Rationalem, & ipsi  $HI$ , longitudine incommensurabilem. quod est absurdum, ostensa est enim  $HK$ , Irrationalis, & Media. Itaque cum  $IK$ , neque Rationale sit, neque Medium; necessario neque  $AC$ , illi aequale, Rationale erit, neque Medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe aequale erit ipsi  $IK$ , quod sub Rationali, & Media, continetur, cum  $HI$ , Rationalis sit, &  $HK$ , ostensa Media. Ex quibus efficitur, rectam quae potest spatium sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus (quales ponuntur  $AB, KC$ , comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quae Media vocatur, consentium. Quod est propositum.

22. decimi.

17. sexti.

21. decimi.

23. decimi.

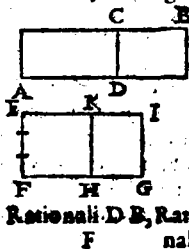
THEOR. 24. PROPOS. 27.

26.

22.

MEDIUM non superat Medium Rationali.

SUPERET Medium  $AB$ , Medium  $AC$ , rectangulo  $DB$ . Dico  $DB$ , non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest,  $DB$ , Rationale. Exposita ergo Rationali linea  $EF$ , ad ipsam applicetur rectangulum  $EG$ , Medio  $AB$ , æquale; & Medio  $AC$ , rectangulum  $EH$ , æquale, ut sit reliquum  $HI$ , Rationali  $DB$ , æquale. Erunt igitur  $EG, EH$ , æqualia Medijs  $AB, AC$ , Media; &  $HI$ , æquale Rationali  $DB$ , Ratio-



45. primi

F nalc.

23. decimi.

34. primi  
21. decimi.

14. decimi.

10. decimi

16. decimi.

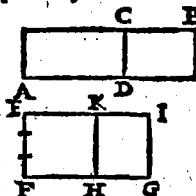
17. decimi.

4. secunda

10. defn.

11. defn.

nale. Quoniam ergo Media  $E G, E H$ , ad Rationalem  $E F$ , sunt applicata; erunt rectæ  $F G, F H$ , Rationales, & ipsi  $E F$ , incommensurabiles longitudine. Rursus, quia



Rationale  $H I$ , applicatum est ad Rationalem  $H K$ ; (est enim recta  $H K$ , Rationali  $E F$ , æqualis) erit recta  $H G$ , Rationalis, & ipsi  $E F$ , longitudine commensurabiles. Quare cum  $H G, E F$ , longitudine sint commensurabiles, &  $E F$ , ipsi  $F H$ , longitudine incommensurabilis, ut est

ostensum; erit &  $H G$ , eidem  $F H$ , longitudine incommensurabilis. Est autem ut  $F H$ , ad  $H G$ , ita quadratum ex  $F H$ , ad rectangulum sub  $F H, H G$ , ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. Igitur quadratum ex  $F H$ , incommensurabile est rectangulo sub  $F H, H G$ . Sed quadrato ex  $F H$ , commensurabile est quadratum ex  $H G$ ; (quod sint ambo ex lineis Rationalibus  $E H, H G$ , descripta) atque adeo & duo quadrata ex  $F H, H G$ , simul, quadrato ex  $F H$ , commensurabilia sunt: Et rectangulo sub  $F H, H G$ , commensurabile est id, quod bis continetur sub  $F H, H G$ , (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex  $F H, H G$ , simul incommensurabilia sunt rectangulo sub  $F H, H G$ , bis. Quare & compositum ex quadratis rectarum  $F H, H G$ , & ex rectangulo bis sub  $F H, H G$ , incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum  $F H, H G$ . At quadratis ex  $F H, H G$ , una cum rectangulo bis sub  $F H, H G$ , æquale est quadratum ex  $F G$ . Igitur & quadratum  $F G$ , incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum  $F H, H G$ : Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex  $F H$ . Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex  $F G$ , erit quadratum ex  $F G$ , Irrationale; ac propterea & recta  $F G$ , Irrationalis existet. Quod est absurdum. ostensa enim est  $F G$ , Rationalis longitudine ipsi  $E F$ , incommensurabilis. Non ergo  $D B$ , quo Medium  $A B$ , superat Medium  $A C$ , Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationale. Quod erat ostendendum.

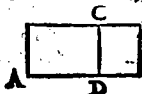
S C H O.

SCHOLION.

Ex dictis & hoc demonstrabimus.

**RATIONALIS** superat Rationalem Rationalem.

**RATIONALIS** enim  $AB$ , superet Rationalem  $AC$ , spatio  $DB$ . Dico  $DB$ , quoque esse Rationalem. Quoniam  $AB$ ,  $AC$ , Rationales sunt; erunt  $AB$ ,  $AC$ , commensurabiles quadrato Rationalis exposita; atque adeo & inter se commensurabiles. Quare cum totum  $AB$ , compositum ex  $AC$ ,  $DB$ , commensurabile sit ipsi  $AC$ ; erit quoque idem  $AB$ , reliquo  $DB$ , commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem  $AB$ , Rationale. Igitur &  $DB$ , ex lemma 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.

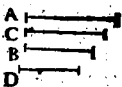


9. definit.  
12. decimi.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

**MEDIAS** inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

**EXPONANTUR** per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales  $A$ ,  $B$ , potentia tantum commensurabiles, inter quas media proportionalis sumatur  $C$ ; fiatque ut  $A$ , ad  $B$ , ita  $C$ , ad  $D$ . Dico  $C$ ,  $D$ , esse Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam  $A$ ,  $B$ , Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Mediū uocatur; atque adeo cum ipsum possit recta  $C$ , erit  $C$ , Media. Et quoniam est ut  $A$ , ad  $B$ , ita  $C$ , ad  $D$ ; suntque  $A$ ,  $B$ , potentia tantum commensurabiles; erunt quoque  $C$ ,  $D$ , solum commensurabiles potentia; ut in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. Est ergo &  $D$ , Mediæ  $C$ , commensurabilis, Media. Quare inuentæ sunt Mediæ  $C$ ,  $D$ , potentia tantum commensurabiles. Dico iam ip-



13. sexti.  
12. sexti.

22. decimi.  
17. sexti.

24. decimi.

fas continere Rationale. Quoniam est ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque ut C, ad B, ita B, ad D; ideoque B, media proportionalis inter C, & D, poterit rectangulum sub ipsis C, D. comprehensum.

Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

17. sexti.

28.

9.

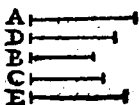
PROBL. 5. PROPOS. 29.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineat.

EXPONANTUR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles; & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. Deinde fiat ut B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quoniam A, B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; erit rectangulum sub A, B, atque adeo

13. sexti.

13. sexti.



& quadratum ex D, quod illi æquale est, Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est ut B, ad C, ita D, ad E; sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit, erit & E, illi potentia solum commensurabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam est ut B, ad C, ita D, ad E; & permutando ut B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque ut D, ad A, ita C, ad E. Rectangulum igitur sub D, E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationalibus potentia

17. sexti.

22. decimi.

24. decimi.

26. sexti.

ten ua

tentia solum commensurabilibus, Irrationale, & Medium. 22. *decimi.*  
Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo  
inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ  
Medium continent. Quod faciendum erat.

SCHOLIUM. I.

In his quæ sequuntur, indigebimus hoc problemate.

Duos numeros planos similes inuenire.

SUMANTUR quatuor quicunque numeri proportionales  
A, B, C, D, ut quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplican-  
tes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se mul-  
tiplicantes faciant F. Erunt ergo E, &  
F, numeri plani similes, quandoquidem  
latera habens proportionalia, ut ex con-  
structione est manifestum.

|        |        |
|--------|--------|
| A, 6.  | C, 2.  |
| B, 4.  | D, 8.  |
| E, 24. | F, 96. |

QUONIAM autem in lib. 9. ostensum est, si impar numerus, uel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem uero, si impar multiplicet impar, perspicuum est, quoniam modo inueniri possint duo plani similes, quorsum uterque par sit, uel impar; Vel unus quidem par, aliter uero impar. Si enim latera sumpta, sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si unius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidē planus, impar; eorum uero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat unum latus numerum parem, alterum uero imparem, &c.

LEMMA I.

Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTUR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes A B, & C, quorum

F 3 uterque

24 & 26.  
noni.

uterque uel par sit, uel impar. Et quoniam, siue a pari  
par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est;

A ..... E ..... D ..... B  
C .....

detracto B D, ex AB, qui  
æqualis sit ipsi C, erit reli-  
quus AD, par. Quo diui-  
so bisariam in E; Dico

1. noni.

numerum factum ex AB, in BD, qui quidem qua-  
dratus est, compositum cum quadrato numeri ED,  
facere quadratum. Quoniam numerus AD, bifa-  
riam est diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6.  
theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demon-  
strauimus, numerus qui sit ex AB, in BD, una cum  
quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB.  
Quare duo quadrati, nempe qui sit ex AB, in BD,  
& quadratus numeri DE, compositi faciunt qua-  
dratum, eum uidelicet, qui ex BE, gignitur. quod  
est propositum.

COROLLARIUM.

Ex his manifestum est, quando AB, & C, similes sunt, inuen-  
tos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED,  
quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam  
numerus quadratus sit.

2. noni.

Quod si numeri sumantur AB, & C, non similes, uterq; tamē  
par, uel impar; inuenti erūt eodē modo duo quadrati numerorū BE,  
ED, quorum excessus, numerus scilicet, qui sit ex AB, in BD, non est  
quadratus. Si. n. quadratus esset, numeri AB, BD, hoc est, AB, & C,  
plani similes essent. Quod est absurdū. ponuntur enim non similes.

SCHOLIUM. II.

ITAQUE si iubeamur inuenire duos quadratos nume-  
ros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sume-  
mus ut prius, duos planos similes, quorum uterque par, uel  
impar sit, nempe AB, & C, & reliqua persiciemus, ut in  
proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex BE,  
ED,

*E D*, descripti sunt illi, quos iquerimus. Exce lit enim quadratus ex *B E*, quadratum ex *E D*; numero, qui producitur ex *A B*, in *B D*, qui etiam quadratus est.

*A* ..... *E* ..... *D* ..... *B*  
*C* .....

*S* i vero inueniendi sint duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani *A B*, & *C*. non similes, quorum uterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, ut prius. Nam similiter ostendemus, quadratum

*A* ... *E* ... *D* ..... *B*  
*C* .....

ex *B E*, aequale esse quadrato ex *D E*, una cum eo qui ex *A B*, in *B D*, sit; Quare excessus quadratorum ex *B E*, *E D*, est numerus factus ex *A B*, in *B D*, qui cum non sit quadratus, (Si enim esset quadratus, essent *A B*, *B D*, plani similes. quod non ponitur) constat propositum.

*H* o c posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de ceteris.

# L E M M A. II.

*D* v o s numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

*S* i n t duo numeri plani similes *A B*, & *C*, pares, vel impares, ut in lemma

*A* .. *H* .. *I* . *E* . *F* . *G* ... *D* ..... *B*  
*C* .....

mate precedenti, fiatque eadem constructio, ita ut rursus quadratus, qui sit ex multiplicatione similium numerorum *A B*, *D B*, inter se,



una cum quadrato ex  $DE$ , equalis sit quadrato ex  
 $BE$ . Auferatur deinde ex  $DE$ , unitas  $EF$ . Erit ergo  
 quadratus ex  
 $A..H..I..E..F..G...D.....B$   $DF$ , minor  
 $C.....$  quadrato ex  
 $DE$ , quod &

latus  $DF$ , latere  $DE$ , minus sit. Dico quadratos nu-  
 meros, quorum alter ex  $AB$ , in  $BD$ , alter uero ex  
 $DF$ , in se fit, compositos non efficere numerum qua-  
 dratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus,  
 erit is uel maior quadrato ex  $BF$ , uel equalis, uel mi-  
 nor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstra-  
 bimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex  
 $BF$ ; ac propterea latus ipsius maius latere  $BF$ . Erit  
 ergo latus ipsius uel aequale numero  $BE$ , uel maius.  
 (Minus enim non erit, quoniam inter numeros  $BE$ ,  
 $BF$ , sola unitate inter se distantes nullus medius est  
 numerus, ne unitas ipsa secetur; Eset autem dictum  
 latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam  
 $BF$ , minus uero quam  $BE$ .) Si dicatur aequale, ita  
 ut quadrato ex  $BE$ , equalis sit quadratus numerus  
 compositus ex quadrato, qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ , &  
 ex quadrato numeri  $DF$ ; cum eidem quadrato ex  
 $BE$ , sit ostensus in precedenti lemmate equalis nume-  
 rus, qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  
 $DE$ ; erit, qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato  
 ex  $DF$ , equalis ei, qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum  
 quadrato ex  $DE$ . Ablato ergo communi, eo scilicet  
 qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ ; erit reliquus quadratus ex  
 $DF$ , equalis reliquo quadrato ex  $DE$ ; Ideoque &  
 latus  $DF$ , lateri  $DE$ , aequale, pars tota. Quod est  
 absur-

absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex  $AB$ , in  $BD$ , alter uero ex  $DF$ , in se fit, æquale est numero  $BE$ . Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius æquale numero  $BI$ , qui maior sit, quam  $BE$ , ita ut quadrato ex  $BI$ , æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex  $BI$ , latere maiori, maior est quadrato ex  $BE$ , latere minori; erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex  $AB$ , in  $BD$ , alter uero ex  $BF$ , in se fit, (cum hic compositus æqualis ponatur quadrato ex  $BI$ ,) maior quadrato ex  $BE$ . Est autem quadrato ex  $BE$ , ostensus in lemmate precedenti æqualis numerus, qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DE$ ; Ablato ergo communi, qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ ; erit reliquus quadratus ex  $DF$ , reliquo quadrato ex  $DE$ , maior; ac proinde latus  $DF$ , latere  $DE$ , maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex  $AB$ , in  $BD$ , alter uero ex  $DF$ , in se, maius est latere  $BE$ . Sed neque æquale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus, maior est quadrato ex  $BF$ .

SIT iam, si fieri potest, numerus qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ , æqualis quadrato ex  $BF$ ; & ponatur numerus  $AH$ , duplus unitatis  $EF$ . Quia igitur totus  $AD$ , totius  $ED$ , duplus est, (diuisus enim est  $AD$ , in  $E$ , bifariam) & ablatas  $AH$ , ablata unitatis  $EF$ ; erit & reliquus  $HD$ , reliqui  $FD$ , duplus, ex ijs, quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco  $HD$ , in  $F$ , bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propos. 14. lib.

lib. 9. demonstravimus, erit numerus qui fit ex  $HB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ , equalis quadrato ex  $BF$ . Sed eidem  $A \dots H \dots I \dots E \dots F \dots G \dots D \dots B$  quadrato ex  $C \dots$   $BF$ , equalis

ponitur numerus, qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato  $DF$ : Igitur qui fit ex  $HB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ , equalis est ei, qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ ; & detractio communi quadrato ex  $DF$ , relinquetur, qui fit ex  $HB$ , in  $BD$ , ei qui fit ex  $AB$ , in  $BD$ , equalis. Quare cum  $HB$ ,  $AB$ , multiplicantes eundem  $BD$ , producant aequales numeros; habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit  $HB$ , ipsi  $AB$ , equalis, pars totius. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ , quadrato ex  $BF$ , equalis.

18. septimi

**SIT** tandem, si potest fieri, numerus qui ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ , minor quadrato ex  $BF$ , ac propterea & latus eius latere  $BF$ , minus, quod sit  $BG$ , ita ut qui ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ , equalis sit quadrato ex  $BG$ . Sumatur autem ipsius  $EG$ , duplus  $AI$ . Quoniam igitur totus  $AD$ , totius  $ED$ , duplus est, & ablati  $AI$ , ablati  $EG$ ; erit rursus & reliquus  $ID$ , reliqui  $GD$ , duplus; ac propterea  $ID$ , in  $G$ , dividetur bisariam. Quare ex eodem theor. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus qui fit ex  $IB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DG$ , equalis quadrato ex  $BG$ : ponitur autem eidem quadrato ex  $BG$ , equalis

equalis, qui sit ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ . Igitur qui sit ex  $IB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DG$ , equalis est ei, qui ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ . Ablatis igitur quadratis ex  $DG$ , &  $DF$ , quorum qui ex  $DG$ , minor est, remanebit qui ex  $IB$ , in  $BD$ , maior eo, qui ex  $AB$ , in  $BD$ , pars, toto. Quod est absurdum. Non est ergo qui ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ , minor quadrato ex  $BF$ . Sed neque maior est, ostensus, neque equalis. Non igitur quadratus est, qui ex  $AB$ , in  $BD$ , una cum quadrato ex  $DF$ . Quod est propositum.

SCHOLIION. III.

Ex hoc facile inueniemus duos numeros, ita ut ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma precedens inueniantur duo quadrati, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus, habebis hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

Idem obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebis, quam quadratus ad quadratum.

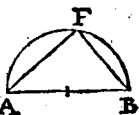
PROBL. 6. PROPOS. 30.

29.  
17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPO-

EXPONATUR linea Rationalis  $AB$ , & inueniantur ex ijs, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati  $CD$ ,  $CE$ , quorum excessus  $DE$ , non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat ut



$CD$ , numerus ad numerum  $DE$ , ita quadratum ex  $AB$ , ad aliud quadratum, nempe ad id, quod ex  $AF$ , accommodeturque  $AF$ , in semicirculo  $ABF$ , circa diametrum  $AB$ , descripto: ac denique connectatur recta  $FB$ .

31. tertij.

$C \dots E \dots D$

Quoniam ergo angulus  $F$ , rectus est in semicirculo: erit quadratum ex  $AB$ ,

47. primi

æquale duobus quadratis ex  $AF$ , &  $FB$ ; hoc est, recta  $AB$ , plus poterit quam  $AF$ , quadrato rectæ  $FB$ . Et quia est quadratum ex  $AB$ , ad quadratum ex  $AF$ , ut numerus  $CD$ ,

6. decimi.

ad numerum  $DE$ ; erunt quadrata ex  $AB$ ,  $AF$ , commensurabilia; atque adeo cum quadratum ex  $AB$ , sit Rationale, nempe ex linea Rationali  $AB$ , descriptum; erit & quadratum ex  $AF$ , Rationale, proptereaque & recta  $AF$ , ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt  $AB$ ,  $AF$ ; atque adeo commensurabiles: saltem potentia. Quia vero quadratum ex  $AB$ , ad quadratum ex  $AF$ , proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus  $CD$ , ad non quadratum  $DE$ , proportionem habeat quam quadratus ad quadratum; alias &  $DE$ , quadratus esset, ut in Arithmetis est demonstratum, quod non ponitur) erunt rectæ  $AB$ ,  $AF$ ,

24. octavi.

9. decimi.

longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, ut ostensum est. Igitur  $AB$ ,  $AF$ , Rationales sunt potentia tantum commensurabiles.

9. decimi.

Item vero, quoniam est ut  $CD$ , ad  $DE$ , ita quadratum ex  $AB$ , ad quadratum ex  $AF$ , erit per conuersionem rationis, ut quadratus numerus  $CD$ , ad quadratum numerum  $CE$ , ita quadratum ex  $AB$ , ad quadratum ex  $FB$ . (sicut enim  $CD$ , superat  $DE$ , quadrato  $CE$ , ita etiam quadratum ex  $AB$ , superat quadratum ex  $AF$ , quadrato ex  $FB$ .) Quare rectæ  $AB$ ,  $FB$ , longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales  $AB$ ,  $AF$ , potentia tantum commensurabiles, ita ut maior  $AB$ , plus possit, quam minor  $AF$ ,

$AF$ ,

A F, quadrato lineæ FB, sibi longitudine commensurabilis.  
Quod faciendum erat.

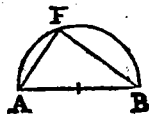
PROBL.7. PROPOS.31.

30.  
18.

INVENIRE duas Rationales poten-  
tia tantum commensurabiles, ita ut ma-  
ior, quam minor, plus possit quadrato re-  
ctæ lineæ sibi longitudine incommensura-  
bilis.

EXPONATUR Rationalis linea A B, inuenianturque  
per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati  
CE, E D, ita ut ex illis compositus C D, non sit quadratus,  
uel certe numerus, aliquis quadratus C D, secetur in duos  
numeros non quadratos C E, E D: Vtrumvis enim horum

fiat, totus C D, ad neutrum  
ipsorum C E, E D, propor-  
tionem habebit, quam qua-  
dratus ad quadratum, alias  
secundum priorem modum,  
esset totus C D, etiam qua-  
dratus: iuxta posteriorem  
uero, quilibet ipsorum C E,



C, 144. E, 16. D C, 60. D  
C..... E... D

B D, quadratus quoque, ut in Arithmeticiis ostensum est.  
quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius  
lib. ut C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadra-  
tum, ut ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in se-  
micirculo A F B, circa A B, descripto. Denique connectatur  
recta F B. Poterit igitur, ut in præcedenti, A B, plus quam  
A F, quadrato rectæ F B; Eruntque A B, A F, Rationales  
potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est de-  
monstratio, quæ in præcedenti propos. Quoniam uero  
rursus, ut prius, est per conuersionem rationis, ut C D, ad  
C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B: Non ha-  
bet autem C D, ad C E, proportionem quam quadratus ad  
quadratum; Non habebit quoque quadratum ex A B, ad  
qua-

24. offani

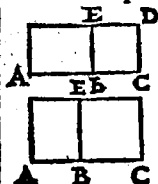
9. decimi.

quadratum ex FB, proportionem, quā quadratus numerus ad numerum quadratum. Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commensurabiles, ita ut maior AB, plus possit quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

### L E M M A.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarum AB, maior sit. Dico esse, ut AB, ad BC, ita rectangulū sub AB, BC, ad quadratum ex BC. Describatur ex BC, quadratum BD, compleaturque rectangulum AD; eritq; rectangulum AE, sub AB, BC, contentum; quod BE, ipsi BC, sit æqualis:



1. sexti.

perspicuum autem est, esse ut AB, ad BC, ita AE, ad BD.

EODEM modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, ut in secunda figura est manifestum, in qua AB, minor est, quam BC.

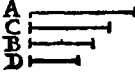
3. I.  
24. 25.

### PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior plus possit quam minor.

minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudi-  
ne commensurabilis .

**R E P E R T A B** sint duæ Rationales A, B, potentia tan-  
tum commensurabiles, ita ut A, maior plus possit quam B,  
minor, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis ;  
sitque C, media proportionalis inter A, & B ; & fiat ut A,  
ad B, ita C, ad D . Quoniam igitur A, B, sunt Rationa-  
les potentia solum commensurabiles ;

erit rectangulum sub A, B, Irrationale, &    
recta C, ipsum potens, linea Media . Et   
quia est ut A, ad B, ita C, ad D ; sunt au-

tem A, & B, potentia tantum commensurabiles ; erunt  
quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, ut in  
scholio propos. 10. huius libri ostendimus . Quare D,  
Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est .

Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensura-  
biles . Dico eas Rationale comprehendere . Cum enim sit  
ut A, ad B, ita C, ad D ; & permutando ut A, ad C, ita B, ad  
D ; sit autem ut A, ad C, ita C, ad B ; erit quoque ut C, ad  
B, ita B, ad D ; Ac propterea rectangulum sub C, & D,  
æquale erit quadrato ex B . Quam ob rem, cum quadra-  
tum ex B, Rationale Rationale sit ; erit & rectangulum sub  
C, D, illi æquale, Rationale . Continent ergo Mediæ C,  
D, potentia tantum comensurabiles, Rationale . Quo-  
niam uero est ut A, ad B, ita C, ad D : potest autē A, plus  
quam B, quadrato lineæ longitudine sibi cōmensurabilis, ex  
constructione ; poterit quoque C, plus quam D, quadrato  
lineæ longitudine sibi commensurabilis . Inuenimus igitur  
duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ  
Rationale continent, ita ut maior C, plus possit quam mi-  
nor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensura-  
bilis . Quod faciendum erat .

**Q U O D** si repertæ sint A, B, Rationales potentia  
tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam  
B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis ;  
reliqua autem fiant, ut prius, ostendemus eodem mo-  
do, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum  
commen-

30. decimi.

22. decimi.

24. decimi.

17. sexti.

15. decimi.

ia  
de  
im  
or,



commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

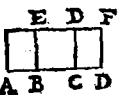
S C H O L I O N.

*ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem brevius ac facilius idem sine ipso ostendimus, ut facile iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.*

L E M M A.

**S**i sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

**S**int tres rectæ *AB, BC, CD*, in rectum constitutæ. Dico esse ut *AB*, ad *CD*, ita rectangulum sub *AB, BC*, ad rectangulum sub *BC, CD*. Describatur ex *BC*, quadratū *BCDE*, perficiaturque rectangulum *AF*; Eritque *AE*, contentum sub *AB, BC*; & *CF*, sub *BC, CD*; quod *BE, CD*, ipsi *BC*, æquales sint. Perspicuum autem est esse *AB*, ad *CD*, ut *AE*, ad *CF*. Quod est propositum.



1. sexsi.

32.

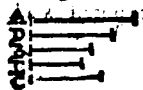
26.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

**INVENIRE** duas Medias potentia solum commensurabiles, quæ Medium cōtineant

tineant, ita ut maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

**S**INT inuenta tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, inueniatur alia B, utrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quæ in scholio propof. 31. huius lib. demonstrauimus. Et ipsarum A, B, sumatur me-



dia proportionalis D, fiatque ut D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est ut A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: Est autem rectangulum sub A, B, æquale quadrato ex D, & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque ut A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed ut quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propof. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit ut A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles, Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, ut in scholio propof. 10. huius lib. ostendimus. Quia uero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuenta ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectangulo sub D, E, erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique quia ostendimus esse ut A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solum

30. decimi.

13. sexti.

12. sexti.

17. sexti.

16. sexti.

22. decimi.

24. decimi.

22. decimi.

15. decimi.

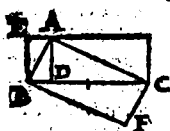
luna commensurabiles, quę Medium continent, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineę rectę longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

Q u o d si repertę fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineę sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, ut prius, demonstrabimus similiter, inęquitas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quę Medium continent, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineę sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile appareat, potest ex adducta demonstratione.

### L E M M A. I.

S i t triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, a quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum sub C B, B D, æquale esse quadrato ex A B: contentum autem sub B C, C D, æquale quadrato ex A C: & contentum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum denique sub B C, A D, æquale contento sub A B, A C.

Q u o n i a m ex coroll. propof. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis est inter C B, B D, erit rectangulum sub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.



E A D E M ratione erit rectangulum sub B C, C D, æquale quadrato ex A C: quoniam per idem coroll.

A C, media proportionalis est inter B C, C D.

R v r s v s quia ex eadem coroll. A D, inter B D, D C, media est proportionalis, erit eodem modo re-

16. feni:

do rectangulū sub BD, DC, æquale quadrato ex A D.

POSTREMO, quia triangu-  
la ABC, ABD, similia sunt; erit ut B A, ad A C, ita A B, ad A D,  
Quare rectangulum sub B C, A D, æquale est rectan-  
gulo sub A B, A C, Quod etiam ita ostendetur. Com-  
pleatur rectangulū C E, contentum sub B C, A D.  
Item rectangulum A F, sub A B, A C, contentum.  
Quoniam igitur rectangulum C E, duplum est trian-  
guli A B C, necnon & rectangulum A F, eisdem trian-  
guli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula  
C E, A F. quod est propositum.

8. sexti.

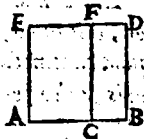
17. sexti.

41. primi

## L E M M A . I I .

Si recta linea secetur in duas partes inæqua-  
les, erit ut maior pars ad minorem, ita rectan-  
gulum sub tota & maiore parte, ad rectangu-  
lum sub tota & minore parte contentum.

SECE TUR recta A B, non bisariam in C, sitq;  
maior pars A C. Dico esse ut A C, ad C B, ita rectan-  
gulum sub A B, A C, ad rectangu-  
lum sub A B, C B. Describatur enim  
ipsius A B, quadratum A B D E, du-  
caturq; C F, ipsi A E, parallela;  
eritq; A F, contentum sub A B, A C;  
& C D, contentum sub A B, C B;  
quod A E, C F, ipsi A B, æquales sint. Quoniam igitur  
est ut A C, ad C B, ita A F, ad C D; constat propositū.



1. sexti.

EADEM ratione erit, ut minor pars B C, ad maio-  
rem C A, ita B F, contentum sub A B, B C, tota, &  
minore parte, ad C E, contentum sub A B, C A, tota,  
& maiore parte.

G 2 S I

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori lineâ & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales  $AB, BC$ , angulum rectum constituentes  $ABC$ , seceturq; minor  $BC$ , bifariam in  $D$ . Dico rectangulum sub  $AB, BC$ , duplum esse rectangulum sub  $AB, BD$ . Compleatur rectangulum  $AC$ , sub  $AB, BC$ ; ducaturq;  $DE$ , ipsi  $AB$ , parallela; eritq;  $BE$ , contentum sub  $AB$ , &  $BD$ , dimidia minoris. Quoniam igitur  $AC$ , ipsius  $BE$ , duplum est, quod & basis  $BC$ , dupla sit basis  $BD$ ; constat propositum.

EODEM modo, si  $BC$ , secta bifariam, sit maior, erit quod sub  $AB, BC$ , continetur, duplum eius, quod continetur sub  $AB$ , minore &  $BD$ , dimidia maioris, ut ex secunda figura apparet.

1. sexti.

33.  
27.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

REP-

REPERIANTUR duæ Rationales  $AB, CD$ , potentia solum commensurabiles, ita ut maior  $AB$ , plus possit, quam minor  $CD$ , quadrato linearum longitudine sibi incommensurabilis; seceturque  $CD$ , bisariam in  $E$ . Deinde per lemma 1. propos. 17. huius lib. ad  $AB$ , applicetur quadrato ex  $CE$ , hoc est, quartæ parti quadrati ex  $CD$ , æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud, quod sub  $AF, FB$ , continetur. Postremo descripto semicirculo  $AGB$ , circa  $A B$ , erigatur  $FG$ , ad  $AB$ , perpendicularis, connectanturque rectæ  $AG, GB$ . Quoniam igitur  $AB$ , plus potest, quàm  $CD$ , quadrato linearum longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad  $AB$ , rectangulum sub  $AF, FB$ , æquale quartæ parti quadrati ex  $CD$ , deficiens figura quadrata; erit  $AF$ , ipsi  $FB$ , longitudine incommensurabilis. Est autem ut  $AF$ , ad  $FB$ , ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub  $AB, AF$ , ad rectangulum sub  $AB, FB$ ; Rectangulum vero sub  $AB, AF$ , quadrato ex  $AG$ , & rectangulum sub  $AB, FB$ , quadrato ex  $GB$ , est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; quod angulus  $AGB$ , rectus sit in semicirculo  $AGB$ . Igitur quoque erit ut  $AF$ , ad  $FB$ , ita quadratum ex  $AG$ , ad quadratum ex  $GB$ ; ac propterea cum  $AF, FB$ , longitudine sine incommensurabiles, erunt quadrata ex  $AG, GB$ , incommensurabilia. Igitur rectæ  $AG, GB$ , potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali  $AB$ , Rationale est, æqualeque quadratis ex  $AG, GB$ , erit etiam compositum ex quadratis rectarum  $AG, GB$ , Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub  $AF, FB$ , quod quadrato ex  $CE$ , æquale est factum, æquale est quadrato ex  $FG$ ; (propterea quod angulus  $AGB$ , rectus est, &  $FG$ , ad  $AB$ , perpendicularis) erunt quadrata ex  $FG, CE$ , æqualia; ac proinde & rectæ  $FG, CE$ , æquales. Quare  $CD$ , dupla existens ipsius  $CE$ , dupla etiam erit ipsius  $FG$ . Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub  $AB, CD$ , duplum erit rectanguli sub  $AB, FG$ . (cum  $FG$ , dimidia sit minoris  $CD$ ),



31. decimi.

9. decimi.

31. tertij.

10. decimi.

4. defn.

47. primi.

22. decimi. Sed rectangulum sub A B, C D, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub A B, F G, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 4. huius lib. Atqui rectangulo sub A B, F G, per 1. lemma propositionis precedentis, æquale est rectangulum sub A G, G B. Contentum igitur sub A G, G B, Medium quoque est: Oñsumma autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Inventa ergo sunt duæ rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum



quidem ex ipsarum quadratis, Rationales Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

S C H O L I O N.

DEMONSTRATUR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, ut duo spatia irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATUR Rationalis linea A B, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum, fiatque C, ad D, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A E, & eadem descripto quadrato ex A B, educatur E F, ad A B, perpendicularis. Quoniam igitur est ut C, ad D, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A E: Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum, erunt latera A B, A E, dictorum quadratorum



A E B

9. decimi. C, 6. D, 4. erunt latera A B, A E, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cum A B, tota longitudine sit incommensurabilis parti A E, erit eadem A B, & reliqua E B, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. Vt autem A B, ad A E, ita est quadratum ex A B, ad A E. Igitur cum A B, A E, incommensurabiles sint longitudine, erunt quadratum ex A B, & rectangulum A F, incommensurabiles. Quare quadratum ex A B, existens Rationale

1. sexti.

10. decimi.

li,

li, quod &  $A B$ , Rationalis paratur; erit  $A F$ , dicto quadrato incommensurable, Irrationale. Eodemq; argumento ostendimus  $B F$ , Irrationale, esse. Quia vero  $A F$ ,  $B F$ , componunt quadratum Rationale ex  $A B$ ; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus constare, posse Rationale. Quod est propositum.

*A T* vero si  $A F$ ,  $B F$ , Rationalia sint, ostendimus, & totum  $A B$ , ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim utrumq;  $A F$ ,  $B F$ , Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia. Igitur & totum  $A B$ , ex ipsis compositum utriq; eorum commensurable erit. Quare  $A B$ , totum commensurable utrique Rationali  $A F$ ,  $B F$ , Rationale quoque est. Quod est propositum.

16. decimi.

9. defn.

34.  
28.

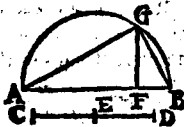
PROBL. II. PROPOS. 35.

**INVENIRE** duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

**REPERIANTUR** duæ Mediæ  $A B$ ,  $C D$ ; potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior  $A B$ , plus possit quam minor  $C D$ , quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, fiantque reliqua, ut in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, ut in propos. antecedenti, rectas  $A G$ ,  $G B$ , potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media  $A B$ , æquale existens quadratis rectarum  $A G$ ,  $G B$ , Medium est; erit quoque compositum ex quadratis rectarum  $A G$ ,  $G B$ , Medium. Rursus ut in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub  $A B$ ,  $C D$ , duplum esse rectanguli sub  $A B$ ,  $F G$ ; atq; adeo

32. decimi.

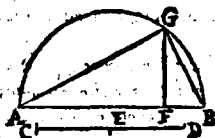
47. primi.



G 4 illud



istud esse huic commensurabile. Quare cum rectangulum sub  $A B, C D$ , Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub  $A B, F G$ , illi commensurabile, Rationale:



Sed per 1. lemma propof. 33. huius lib. rectangulo sub  $A B, F G$ , æquale est rectangulum sub  $A G, G B$ . Igitur & rectangulum sub  $A G, G B$ , Rationale est. O scilicet autem est, compositum ex quadratis ipsarum  $A G, G B$ , esse Medium. Inveniente ergo sunt duæ

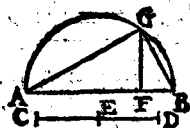
rectæ  $A G, G B$ ; potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.

35.  
29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurableq; composito ex ipsarum quadratis.

3. decimi. REPERIANTUR duæ Mediæ  $A B, C D$ , potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior  $A B$ , plus possit quam minor  $C D$ , quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis;



fiantq; reliqua, ut in propof. 34. Ostendamus igitur similiter, rectas  $A G, G B$ , potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media  $A B$ , Medium est, & quadratis rectæ

47. primi.

rum  $A G, G B$ , æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum  $A G, G B$ , Medium. Rursus, ut in 34. demonstrabimus,

imus, rectangulum sub  $A B, C D$ , duplum esse rectangu-  
li sub  $A B, F G$ ; atq; adeo illud esse huic commensurabile.  
Quare cum ex constructione, rectangulum sub  $A B, C D$ ,  
Medium sit; erit quoque rectangulum sub  $A B, F G$ , hoc  
est, sub  $A G, G B$ , qd illi per 1. lemma propof. 33. huius lib.  
æquale est, Medium, ex coroll. propof. 24. huius lib. Quoniã  
vero  $A B$ , longitudine incommensurabilis ponitur ipsi  $C D$ ;  
Est autem eidẽ  $C D$ , ipsa  $C E$ , longitudine commensurabi-  
lis, quod illa huius sit dupla; erunt  $A B, C E$ , longitudine  
incommensurabiles: Sed ut  $A B$ , ad  $C E$ , ita est per lemma 3.  
propof. 19 huius lib. quadratum ex  $A B$  ad rectangulum  
sub  $A B, C E$ , hoc est, ad rectangulum sub  $A B, F G$ , hoc  
est, sub  $A G, G B$ . (sunt enim rectangula sub  $A B, F G$ , &  
sub  $A G, G B$ , per 1. lemma propof. 33. huius lib æqualia.)  
Igitur quadratum ex  $A B$ , hoc est, compositum ex quadra-  
tis rectarum  $A G, G B$ , incommensurabile est rectangulo  
sub  $A G, G B$ . Inuentæ sunt ergo duæ rectæ linæ  $A G$ ,  
 $G B$  potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compo-  
situm ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub  
ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito  
ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

19. decimi.

10. decimi.

# SCHOLION.

Ex hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad  
propof. 24. huius lib. nos demonstratueros recepi-mus, nimirum.

**INVENIRE** duas Medias longitudine, &  
potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est iam compositum ex quadra-  
tis rectarum  $A G, G B$ , quam rectangulum sub ipsis, esse Me-  
dium, & hoc illi composito incommensurabile 3. erant quæque  
linæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum  
Medium, Medie, incommensurabiles tam longitudine, quam  
potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent &  
earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum  
 $A G, G B$ , & rectangulum sub  $A G, G B$ , commensurabilia,  
quod

quod non ponitur. Quocirca si sumatur  $A B$ , potens compositum ex quadratis rectarum  $A G$ ,  $G B$ , & alia recta potens rectangulum sub  $A G$ ,  $G B$ , idest, media proportionalis inter  $A G$ ,  $G B$ ; inuenta erunt duæ Medie & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

# PRINCIPIVM SENARIORVM per compositionem.

## THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantum cõmensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTUR duæ Rationales  $A B$ ,  $B C$ , potentia solum commensurabiles, inuenta per lemma proposit. 21. huius lib. Dico totam  $A C$ , Irrationalem esse.

$A$  ———  $E$  ———  $C$

Quoniam  $A B$ , longitudine incommensurabilis est ipsi  $B C$ ; & ut  $A B$ , ad  $B C$ , ita est rectangulum sub  $A B$ ,  $B C$ , ad quadratum ex  $B C$ , per lemma

10. decimi.

proposit. 31. huius lib. erit rectangulum sub  $A B$ ,  $B C$ , quadrato ex  $B C$ , incommensurable. Sed rectangulo sub  $A B$ ,  $B C$ , commensurable est eius duplum, nempe quod bis sub  $A B$ ,  $B C$ , continetur; & quadrato ex  $B C$ , commensurabilia sunt quadrata rectarum  $A B$ ,  $B C$ ; (omnia enim sunt Rationalia) atque adeo & compositum ex quadratis rectarum  $A B$ ,  $B C$ , eidem quadrato ex  $B C$ , commensurable est. Igitur per ea, quæ in scholio proposit. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub  $A B$ ,  $B C$ , continetur, incommensurable est compositum ex quadratis rectarum  $A B$ ,  $B C$ . Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub  $A B$ ,  $B C$ , & ex composito quadratorum rectarum  $A B$ ,  $B C$ , hoc est, quadratum ex tota  $A C$ , (Est enim hoc quadratum æqua-

16. decimi

le qua-

Ex quadratis rectarum  $AB, BC$ , una cum rectangulo sub  $AB, BC$ , his composito ex quadratis rectarum  $AB, BC$ , incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum  $AB, BC$ , Rationale, quod commensurabile fit ostensum quadrato Rationali ex  $BC$ , Rationali. Igitur quadratum ex  $AC$ , quadrato Rationali ex  $BC$ , incommensurabile, Irrationale est; atque adeo & recta ipsa  $AC$ , Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu ut alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis  $AB, BC$ , potentia solum commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia rarum commensurabiles, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

ITAEQUE ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus præstantur due lineæ Irrationales. Nam recta que inter eas est medio loco proportionalis, Irrationalis est, quæ Media vocatur. At vero composita ex ipsi, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTUR duæ Mediæ superiusingentæ  $AB, BC$ , potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam  $AC$ , Irrationalem esse. Quia  $AB$ , est



ad  $BC$ , ut rectangulum sub  $AB, BC$ , ad quadratum ex  $BC$ , ut in lemmate propos. 1. huius lib. est ostensum; sunt autem  $AB, BC$ , longitudine incommensurabiles; erunt rectangulum sub  $AB, BC$ , & quadratum ex  $BC$ , incommensurabilia: Sed rectangulum sub  $AB, BC$ , com-

4. secundi.  
17. decimi.

10. definit.

22. decimi.

37. decimi.

37.

31.

28. decimi.

10. decimi.

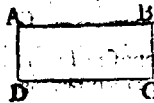
commensurabile est, quod sub  $AB, BC$ , bis, & quadrato ex  $BC$ , commensurabile est compositum ex quadratis rectorum  $AB, BC$ : (Nam cum  $AB, BC$ , potentia sine commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex  $BC$ , commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub  $AB, BC$ , bis,

& compositum ex quadratis rectorum  $AB, BC$ , incommensurabilia inter se sunt, per ea, quae in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectorum  $AB, BC$ , una cum rectangulo bis sub  $AB, BC$ , hoc est, quadratum ex  $AC$ , quod huic composito aequale est, incommensurabile, quoque est rectangulum sub  $AB, BC$ , bis: Est autem eidem rectangulo bis sub  $AB, BC$ , commensurabile rectangulum semel sub  $AB, BC$ , cum hoc sit illius dimidiū. Igitur quadratum ex  $AC$ , incommensurabile est rectangulo sub  $AB, BC$ : Ponitur autem rectangulum sub  $AB, BC$ , Rationale. Irrationale ergo est quadratum ex  $AC$ , & ob id recta quoque  $AC$ , Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel ut alij loquuntur, Bimediale prius. Si duae ergo Medie potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendū.

LEMMA.

Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATUR rectangulum  $ABCD$ , sub Rationali  $AB$ , & Irrationali  $BC$ . Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, faciet ipsum ad Rationalem  $AB$ , applicatum latitudinem  $BC$ , Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim  $BC$ , Irrationalis. Non ergo  $AC$ ,



16. decimi.

4. secundi.

17. decimi.

13. decimi.

10. defn.

11. defn.

21. decimi.

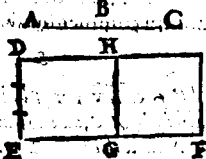
*AC, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.*

**THEOR. 27. PROPOS. 39.**

38.  
32,

**SI** duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.

**COMPONANTUR** duæ Mediæ superius intentæ *AB, BC*, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam *AC*, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis *DE*, ad quam applicetur rectangulum *DF*, æquale quadrato *AC*; & composito ex quadratis rectarum *AB, BC*, æquale alterum ad eandem *DE*, applicetur *DG*. Et quia quadratum ex *AC*, hoc est, rectangulum *DF*, æquale est duobus quadratis ex *AB, BC*, una cum rectangulo bis sub *AB, BC*; erit reliquum *HF*, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub *AB, BC*, continetur. Quoniam vero, ex hypothesi, rectangulum sub *AB, BC*, Medium est; erit & rectangulum bis sub *AB, BC*, ei commensurabile, hoc est, *HF*, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum *AB, BC*, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt, erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum *DG*, utriusque ipsorum commensurabile: Sed utrumque quadratorum ex Medijs *AB, BC*, Medium est. Igitur & *DG*, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media *DG, HF*, applicantur ad Rationalem *DE*, (est enim *GH*, Rationali *DE*, æqualis.) erunt eorum latitudines *EG, GF*, Rationales ipsi *DE*, longitudine incommensurabiles. Rursus quia *AB, BC*, longitudine incommensurabiles.



29. decimi.

45. primi.

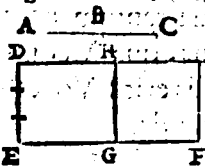
4. secundi.

16. decimi.

34. primi.  
23. decimi.

menfu-

menfurabiles sunt; & est ut  $A B$ , ad  $B C$ , ita quadratum ex  $A B$ , ad rectangulum sub  $A B$ ,  $B C$ ; ex lemma 3. propof. 19. huius lib. erit quadratum ex  $A B$ , incommenfurable re-  
ctangulo sub  $A B$ ,  $B C$ , ut in fcholio propof. 1. c. huius lib. oftē-  
fum est: Atqui quadrato ex  $A B$ , oftēfum est commensu-  
rabile compofitum ex quadratis rectorum  $A B$ ,  $B C$ ; & re-  
ctangulo sub  $A B$ ,  $B C$ , commenfurable est, quod contine-



tur bis sub  $A B$ ,  $B C$ , cum hoc il-  
lius fit duplum. Igitur per ea, quæ  
in fcholio propof. 14. huius lib.  
diximus, erit & compofitum ex  
quadratis rectorum  $A B$ ,  $B C$ , hoc  
est, rectangulum  $D G$ , incommē-  
furabile rectangulo bis sub  $A B$ ,

1. fexti.  
10. decimi.  
37. decimi.

$B C$ , hoc est, rectangulo  $H F$ . Cum ergo fit ut  $D G$ , ad  $H F$ ,  
ita  $E G$ , ad  $G F$ ; erit  $E G$ , ipsi  $G F$ , longitudine incommen-  
furabilis: oftēfum autem iam fuit  $E G$ ,  $G F$ , effe Rationa-  
les. Rationales igitur funt  $E G$ ,  $G F$ , potentia tantū cōmē-  
furabiles; ac propterea, & tota  $E F$ , cōpofita, Irrationalis est.  
Quare, per lemma antecedens,  $D F$ , cōtentū sub Rōnali  $D E$ ,  
& Irrationali  $E F$ , Irrationale est; Ac propterea & quadratū  
ex  $A C$ , ipsi  $D F$ , æquale, Irrationale est. Quare & recta  $A C$ ,  
Irrationalis est. Vocetur autē ex binis Medijs fecunda, feu ut  
alijs placet, Bimediale fecundū. Si duæ ergo Mediæ potentia  
tantum commenfutabiles, &c. Quoderat demonftrandū.

SCHOLIUM

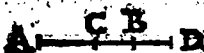
VOCAVIT Euclides in precedēti propofitione lineā Ir-  
rationalē  $A C$ , quæ cōponitur ex duabus Medijs potentia tantū  
cōmēfurabilibus, quæ Rationale cōtineat, ex binis Medijs pri-  
mā: Hic vero lineā Irrationalē  $A C$ , quæ cōponitur ex duabus  
Medijs potentia tantū cōmēfurabilibus, quæ Mediū cōtineat, ex  
binis Medijs fecundā, quoniam Rationale & natura, & cognitio-  
ne prius est Medio, quod Irrationalē est, ex propof. 22. huius lib.

LEMMA.

Si recta lineā non bifariam fecetur, erit cō-  
pofitum ex quadratis partium maius, quàm re-  
ctangulū

angulū sub partibus his cōprehensam, quadrato eius lineę, quę maior pars minorem superat.

**S E C E T V R** recta  $AD$ , in  $B$  uchi bifariam, sitq; maior pars  $AB$ ; in qua sumatur  $BC$ , minori pars  $BD$ , equalis, ut sit  $AC$ , excessus, quo  $AB$ , superat  $BD$ , hoc est,  $BC$ , ipsi  $BD$ , æqualem. Dico quadrata rectarū  $AB$ ,  $BD$ , simul maiora esse rectangulo bis sub  $AB$ ,  $BD$ , quadrato rectę  $AC$ . Quo



niā quadrata ex  $AB$ ,  $BC$ , equalia sunt rectangulo bis sub  $AB$ ,  $BC$ , una cum quadrato ex  $AC$ ; estq;  $BC$ , ipsi  $BD$ , equalis: erant quoq; quadrata ex  $AB$ ,  $BD$ , æqualia rectangulo bis sub  $AB$ ,  $BD$ , una cū quadrato ex  $AC$ . Quare quadrata ex  $AB$ ,  $BD$ , maiora sunt, quā rectangulum bis sub  $AB$ ,  $BD$  quadrato rectę  $AC$ . quod est propositum.

**COROLLARIUM.**

Ex hoc sequitur, quadrata partū inæqualū simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

**THEOR. 28. PROPOS. 40.**

**S I** duę rectę lineę potētia incōmēsurabiles cōponātur, quę faciāt cōpositū quidē ex ipsarū quadratis Rōnale; quod autē sub ipsis cōtinetur, Mediū: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

**COMPONENTVR** duę rectę superius inuētę  $AB$ ,  $BC$ , potētia incōmēsurabiles, faciētes quidē cōpositū ex ipsarū quadratis Rōnale; rectangulū vero sub ipsis cōtētū, Mediū. Dico totā  $AC$ , esse Irrationale. Qm rectangulū sub  $AB$ ,  $BC$ , Mediū ponitur, erit & rectangulū bis sub  $AB$ ,  $BC$ ; illi cōmēsurabile, Mediū, ex coroll. propos. 24. huius lib. atq; adeo Irrationale.

Ponitur

39.

33.

34. decimi.



10. *defn.* Ponitur autē cōpositū ex quadratis rectarū AB, BC, Rōnale.  
 Incomēsurabile ergo est rectāgūlū bis sub AB, BC, cōposito  
 ex quadratis rectarū AB, BC. Igitur & rectāgulum bis sub  
 17. *decimi.* A B, B C, unā cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadra-  
 tum ex A C, incommensurabile est cōposito ex quadra-  
 10. *defn.* tis rectarū AB, BC. Cum ergo hoc cōpositum ponatur  
 11. *defn.* Rationale; erit quadratum ex A C, illi, incommensurabile,  
 Irrationale; & propterea recta A C, Irrationalis est. Vocetur  
 4. *secundi* autem Maior, quia cōpositū duo quadrata ex AB,  
 BC, & rectāgūlū bis sub AB, BC, cōpositum ex quadratis rectarū  
 AB, BC, per lemma antecēdēs, ma-  
 ius est rectāgulo bis sub AB, BC. Quare cum cōpositum  
 ex quadratis rectarū AB, BC, Rationale sit, rectāgulum  
 uero bis sub AB, BC, Medium; recte uocabitur A C, Maior,  
 siquidem a Rationali, quod maius est, nomen conuenit im-  
 ponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabi-  
 les componantur, &c. Quod erat ostendendum.

40.  
34

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommen-  
 surabiles componantur, quæ faciant cō-  
 positum quidē ex ipsarū quadratis Me-  
 dium; quod autem sub ipsis continetur, Ra-  
 tionale: tota recta linea Irrationalis erit. Vo-  
 cetur autem Rationale ac Medium potēns.

35. *decimi.* COMPONENTE duæ rectæ superius inuentæ  
 A B, B C, potentia incommensurabiles, facientes cōposi-  
 tum quidē ex quadratis ipsarū, Medium; rectāgulum  
 uero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam A C, Ir-  
 rationalem esse. Quoniam cō-  
 positum ex quadratis rectarū AB,  
 BC, Medium est; quod uero cō-  
 tinetur bis sub AB, B C, Rationale, quod eius dimidium,  
 nempe quod sub AB, B C, semel continetur, Rationale  
 ponatur;

ponatur; erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurable rectangulo bis sub AB, BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, una cum rectangulo bis sub AB, BC; hoc est, quadratum ex AC, incommensurable est rectangulo bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, ut diximus, sit Rationale; erit quadratum ex AC, illi incommensurable, Irrationale; Ac proinde & recta AC, Irrationaliserit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandū erat,

10. defin.

17. decimi.

10. defin.

11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

41.

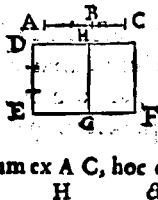
35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurableque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONENTUR duæ rectæ superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurableque composito ex quadratis ipsarum. Dico totam AC, Irrationale esse. Exponatur enim Rationalis DE, ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et composito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, re-

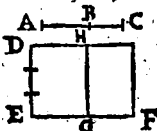
6. decimi.

45. primi.



4. *secundi.*

angulum D E, æquale est composito ex quadratis rectarum A B, B C, una cum rectangulo bis sub A B, B C, erit reliquum H F, æquale rectangulo bis sub A B, B C. Quoniam uero tam compositum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc est, rectangulum D G, quam rectangulum sub A B, B C, at-



que adeo ex coroll. propos. 24. huius libri, quod bis sub A B, B C, nempe ipsum H F, (eum illi sit communisurabile.) Medium ponitur; facient D G, H F, ad Rationalem D E, applicata latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum A B, B C, id est, rectangulum D G, incommensurabile ponitur rectangulo sub A B, B C: Eidem autem rectangulo sub A B, B C, communisurabile est ipse duplex, nempe quod bis continetur sub A B, B C, hoc est, ipsum H F; erunt & D G, H F, incommensurabilia. Quare cum sit ut D G, ad H F, ita E G, ad G F; erunt E G, G F, longitudine incommensurabiles: Atque E G, G F, ostensæ sunt Rationales. Igitur E G, G F, Rationales sunt potentia solum communisurabiles; Ac propterea tota E F, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex A C, illi æquale, Irrationale est, ideoque & recta ipsa A C, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, & rectangulum bis sub A B, B C. Si duæ ergo rectæ lineæ, potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat demonstrandum.

23. *decimi.*

13. *decimi.*

1. *sexti.*

10. *decimi.*

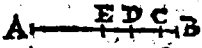
37. *decimi.*

12. *defini.*

LEMMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECTVR recta  $AB$ , inaequaliter in  $C$ , & rur-  
sus inaequaliter in  $D$ , sintque priores partes  $AC$ ,  $CB$ ,  
magis inaequales, quam posteriores  $AD$ ,  $DB$ . Di-  
co quadrata ex  $AC$ ,  $CB$ , simul maiora esse quadra-  
tis ex  $AD$ ,  $DB$ , simul. Diui

sa enim  $AB$ , bisariam in  $E$ ,   
cadet punctum  $D$ , uehinter  $E$ ,  $C$ , uel inter  $A$ ,  $E$ . Cadat  
primum inter  $E$ ,  $C$ . Quoniam igitur rectangulum sub  
 $AC$ ,  $CB$ , una cum quadrato ex  $EC$ , aequale est quadra-  
ta ex  $EB$ : Item rectangulum sub  $AD$ ,  $DB$ , una cum  
quadrato ex  $ED$ , aequale est eidem quadrato ex  $EB$ ;  
erit rectangulum sub  $AC$ ,  $CB$ , una cum quadrato ex  
 $EC$ , aequale rectangulo sub  $AD$ ,  $DB$ , una cum quadra-  
to ex  $ED$ . Ablatis igitur quadratis inaequalibus recta-  
rum inaequalium  $EC$ ,  $ED$ , cum quadrato ex  $EC$ , maius  
sit quadrato ex  $ED$ ; erit reliquum rectangulum sub  $AC$ ,  
 $CB$ , minus reliquo rectangulo sub  $AD$ ,  $DB$ ; ac propter  
rea & rectangulum bis sub  $AC$ ,  $CB$ , minus erit rectan-  
gulo bis sub  $AD$ ,  $DB$ . Quoniam uero quadrato ex  $AB$ ,  
aequale est tam rectangulo bis sub  $AC$ ,  $CB$ , una cu qua-  
dratis ex  $AC$ ,  $CB$ , qua rectangulo bis sub  $AD$ ,  $DB$ , una  
cum quadratis ex  $AD$ ,  $DB$ ; erit rectangulum bis sub  
 $AC$ ,  $CB$ , una cum quadratis ex  $AC$ ,  $CB$ , aequale rectan-  
gulo bis sub  $AD$ ,  $DB$ , una cum quadratis ex  $AD$ ,  $DB$ .  
Quare cum rectangulum bis sub  $AC$ ,  $CB$ , ostensum sit  
minus rectangulo bis sub  $AD$ ,  $DB$ ; erunt reliqua qua-  
drata ex  $AC$ ,  $CB$ , maiora reliquis quadratis ex  $AD$ ,  
 $DB$ . Quod est propositum.

5. secundi

4. secundi

SE D cadat ia  $D$ , inter  $A$ ,  $E$ . Quoniam igitur partes  
 $AC$ ,  $CB$ , magis inaequales ponuntur, qua partes  $AD$ ,  
 $DB$ : erit  $AD$ ; (qua minor est posterioru) maior qua

H 2 CB;

CB; (qua priorū minor est) ac proinde tū AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quā reliqua DE.

A — D — E — C — B

Itaque quia rectangulum sub AC, CB, una cum quadrato ex

secundi

EC, æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, una cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, una cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, una cum quadrato ex DE. Igitur ut prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

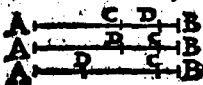
42.

36.

### THEOR. 31. PROPOS. 43.

QV AE ex binis nominibus, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

S I T ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut AC, CB, sint Rationales potentia tantū commensurabiles, ut uult propositio 37. huius libri. Dico



AB, ad aliud punctū diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri pos-

test, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bisariam. Nam si bisariam diuideretur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles, quod est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum commensurabiles. Eodem modo neque ad D, bisariam secabitur AB, cum ad A D, DB, Rationales sint potentia tantū commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quā ad D, inæqualiter, ac propterea partes AC, CB, uel minus inæquales sunt, quā partes AD, DB, uel magis inæquales; Ac propterea per lemmā antecedens, quadrata ex AC,

CB,

C B, uel minora sunt quadratis ex A D, D B, uel maiora. (Neque enim partes A D, D B, ubicunque punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, utraque utrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in qua secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia uero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, ut in pronunciato 6. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, una cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, una cum rectangulo bis sub A D, D B, quod tam illa, quam hæc, æqualia sint quadrato ex A B; fit, ut qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis Rationale, ex ijs, quæ in scholio propos. 34. huius libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, ut in scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est. Quoniam uero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi commensurable, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. Quare cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuidetur. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

4. secundi

22. decimi.

27. decimi

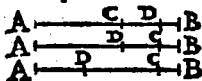
43.

37.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

QVAE ex binis Medijs prima, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut A C, C B, sint Mediae potentia solum commensurabiles, quae Rationale contineant, ut uult propositio 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quae scilicet sint etiam Mediae lineae potentia tantum commensurabiles, continentisque



Rationale: Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina A D, D B. Igitur ubicunque punctum D, existat, similiter probabimus,

ut in praecedenti propositione, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B: Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. (Cum enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis sub A C, C B, ei, quod continetur semel sub A C, C B, commensurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis sub A D, D B. Quare cum Rationale superet Rationale Rationale, ut in scholio propos. 27. huius libri ostendimus; perspicuum est, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C D, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. Quia uero rectae A C, C B, Mediae sunt, & potentia commensurabiles; erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. Quare & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum utrunque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus compositum ex quadratis rectarum A D, D B. Cum ergo Medium non superet Medium Rationale; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum

A C,

16. decimi.

27. decimi.

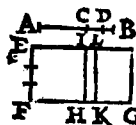
A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale. Ostendimus autē & Rationale esse Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quā ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44.  
38.

Q V AE ex binis Medijs secunda, ad unū duntaxat punctū diuiditur in nomina.

S i t ex binis Medijs secunda A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut A C, C B, Mediæ sint potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ut uult propos. 39. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantū commensurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur ubique punctum D, existat, similiter ostendemus, ut in propositione 43. quadrata ex A C, C B,



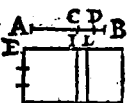
uel maiora esse quadratis ex A D, D B, uel minora. Exponatur Rationalis E F, ad quam applicetur rectangulū E G, æquale quadrato ex A B. Item E H, æquale quadratis ex A C, C B. Erig igitur reliquum I G, æquale ei, quod continetur bis sub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B, æquale est quadratis ex A C, C B, & rectangulo bis sub A C, C B. Eodem modo si ad E F, applicetur E K, quadratis ex A D, D B, æquales erit reliquum L G, æquale rectangulo bis sub A D, D B, comprehenso. Et quia quadrata ex A C, C B, inæqualia sunt quadratis ex A D, D B; erunt quoque rectangula E H, E K, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ F H, F K, inæquales erūt. Rursus quia quadrata ex A C, C B, maiora sunt, per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub A C, C B; erit & E H, maius quā I G; ac propterea E H, maius quā dimidiū ipsius E G, ideoq; & recta F H, maior quā dimidiū ipsius F G. Eadē ratione osten-

45. primi  
4. secundi.

H 4 demus



demus  $FK$ , maiorem esse dimidio ipsius  $FG$ . Inaequales ergo sunt partes  $FH$ ,  $HG$ , partibus  $FK$ ,  $KG$ , singulae singulis. Quoniam uero  $AC$ ,  $CB$ , Mediae sunt, & potentia



commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utriusque ipsorum commensurabile erit. Cum ergo utrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est,  $EH$ , per coroll.

propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit  $FK$ . Quare  $EH$ ,  $FK$ , ad Rationalem  $EF$ , applicata faciunt latitudines  $FH$ ,  $FK$ , Rationales ipsi  $EF$ , longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub  $AC$ ,  $CB$ , ponatur Medium, erit & quod bis sub

$AC$ ,  $CB$ , hoc est,  $IG$ , illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem  $HI$ , erit  $HG$ , Rationalis ipsi  $HI$ , longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus  $LG$ , Medium esse, &  $KG$ , Rationalem ipsi  $KL$ , longitudine incommensurabile.

Rursus quia  $AC$ ,  $CB$ , longitudine sunt incommensurabiles; & est ut  $AC$ , ad  $CB$ , ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex  $AC$ , ad rectangulum sub  $AC$ ,  $CB$  erit

quadratum ex  $AC$ , rectangulo sub  $AC$ ,  $CB$ , incommensurabile. Sed quadrato ex  $AC$ , commensurabile est compositum ex quadratis rectarum  $AC$ ,  $CB$ : (cum enim  $AC$ ,  $CB$ , potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; erit & compositum ex ipsis utriusque ipsorum, nimirum quadrato ex  $AC$ , commensurabile.) Rectangulo uero sub  $AC$ ,  $CB$ , commensurabile est,

quod bis sub  $AC$ ,  $CB$ . Igitur & compositum ex quadratis rectarum  $AC$ ,  $CB$ , hoc est, rectangulum  $EH$ , incommensurabile est, per scholion propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub  $AC$ ,  $CB$  hoc est, ipsi  $IG$ . Quocirca cum sit ut  $EH$ , ad  $IG$ , ita  $FH$ , ad  $HG$ ; erunt  $FH$ ,  $HG$ , longitudine incommensurabiles. Ostensa sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt  $FH$ ,  $HG$ , potentia solum commensurabiles. Igitur  $FG$ , tota Irrationalis est, quae ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum  $H$ . Eodem modo ostendemus &  $FG$ , ex binis nominibus, diuis-

iam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, ut demonstratum est in precedentibus. Igitur 43. decimi.  
 AB, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendū.

# THEOR. 34. PROPOS. 46.

45.  
39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita ut AC, CB, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis. Rationale; rectangulum uero sub ipsis Mediū, ut uult propositio 40. huius libri.



Dico AB, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ scilicet lineæ incommensurabiles quoque sint potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Medium. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbiunque ergo punctum D, extiterit, demonstrabimus similiter, ut in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, cum esse, qui rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale: (quia cum utrumque compositum ex hypothesi sit Rationale, erit quoque eorum excessus spatium Rationale, ut in scholio propo. 27. huius libri ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium est Rationale. Quoniam uero rectangulum sub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub AC, CB, Medium, ex coroli. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurable. Atque eodem modo Medium erit rectanguli bis sub AD, DB. Igitur cum Medium non superet Medium Rationale, non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, spatium 27. decimi.

spatium Rationale : Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

46.  
49.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

S i t linea Rationale ac Medium potens A B, diuisa in sua nomina in puncto C, ita ut A C, C B, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum uero sub ipsis Rationale, ut uult propos. 41. huius libri.



Dico A B, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ

nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B. Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est; quod ostendemus, ut in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale. Quia uero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: Medium autem non superat Medium Rationale; non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum

27. decimi.

Quam diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

47.

41.

BINA Media potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

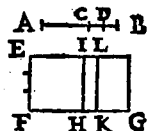
S I T linea potens bina Media A B, diuisa in sua nomina ad C, ita ut A C, C B, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, ut uult propos. 42. huius libri. Dico A B, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ uidelicet sint etiam tunc & potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctum D, existat. Constructio autem eadem fiat, quæ in propos. 47. ostendemusque ut ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæquales esse singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commensurabile est. Igitur Media E H, I G, applicata ad Rationalem E F, (est enim I H, ipsi E F, æqualis) faciunt latitudines F H, H G, Rationales, longitudine ipsi E F, incommensurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas F K, K G, Rationales esse, longitudine incommensurabiles ipsi E F. Quia uero compositum ex quadratis rectarum A C, C B, descriptis, hoc est, rectangulum E H, incommensurabile est, ex hypothese, rectangulo bis sub A C, C B, nempe rectangulo I G, estq; ut E H, ad



23. decimi.

1. sexti.

ad I G, ira F H, ad H G ; erunt F H, H G, longitudine incommensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius libri ostendimus : Sed & ostensæ sunt Rationales.



37. decimi.

43. decimi.

Rationales ergo sunt F H, H G, potentia solum commensurabiles. Igitur tota F G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & F G, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, iam ante demonstratum est. Igitur A B, binæ Media potens non diuiditur ad aliud punctum quàm ad C, in sua nomina. Quocirca ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

## DEFINITIONES

### SECUNDÆ.

**E**XPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomē plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine ; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI uero minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile ; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali ; Vocetur ex binis nominibus tertia .

RVRSVS si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali cōmensurabile sit longitudine ; Vocetur ex binis nominibus quarta .

V.

SI uero minus nomen ; Vocetur quinta.

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum ; Vocetur sexta .

SCHOLION.

NVMERVS distarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur ; colligitur hac ratione . Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ potentia tantum commensurabiles, non poterit utrunque nomen exposita Rationali commensurabile esse longitudine ; ( alias enim nomi-

na ipsa essent linea longitudine inter se commensurabiles, ut in scholio propo. 12. huius libri docuimus. quod non ponitur.) Sed vel unum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quae ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inequalia sunt; (alias enim essent linea inter se longitudine commensurabiles. quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato linea sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato linea longitudine sibi commensurabilis, constituentur una cum tribus dictis generibus, tres diuersae lineae ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato linea longitudine sibi incommensurabilis, efficientur una cum eisdem tribus generibus aliae tres diuersae lineae ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, ut ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersae lineae ex binis nominibus appellatae.

**P V L C H R E** autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile, antecedit incommensurabile.

**R V R S V S** recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositae lineae Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineae expositae longitudine est commensurabile: quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum expositae Rationali longitudine est commensurabile:

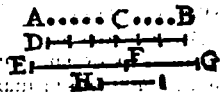
Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

**I N V E N I R E** ex binis nominibus primam .

**R E P E R T I S** duobus numeris quadratis  $A B$ ,  $C B$ , ex  
his, quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quo-  
rum excessus  $A C$ , non sit quadratus, ita ut  $A B$ ,  $C B$ , propor-  
tionem quidem habeant, quam

quadratus ad quadratum; at  $A B$ ,  $A C$ , proportionem non habeant,  
quam quadratus ad quadratum: Exponatur Rationalis quæpiam



$D$ , cui longitudine commensurabilis sumatur  $E F$ . Erit er-  
go &  $E F$ , Rationali  $D$ , commensurabilis, Rationalis. Fiat  
deinde ut numerus  $A B$ , ad  $A C$ , ita per coroll. propos. 6.  
huius libri, quadratum ex  $E F$ , ad quadratum ex  $F G$ : Dico  
 $E G$ , esse ex binis nominibus primam. Quoniam quadra-  
ta ex  $E F$ ,  $F G$ , cum proportionem habeant, quam numeri  
 $A B$ ,  $A C$ , commensurabilia sunt; erunt & rectæ  $E F$ ,  $F G$ ,  
commensurabiles, saltem potentia; Ostensa autem est  $E F$ ,  
Rationalis. Igitur &  $F G$ , Rationalis est. Quæ uero  $A B$ ,  
ad  $A C$ , proportionem non habet, quam quadratus ad qua-  
dratum, non habebunt quoque quadrata ex  $E F$ ,  $F G$ , pro-  
portionem, quam numerus quadratus ad quadratum. In-  
commensurabiles ergo sunt longitudine rectæ  $E F$ ,  $F G$ : Sunt  
igitur  $E F$ ,  $F G$ , Rationales potentia solum commensurabi-  
les; Ac idcirco tota  $E G$ , Irrationalis est, quæ ex binis no-  
minibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit  
ut numerus  $A B$ , ad numerum  $A C$ , ita quadratum ex  
 $E F$ , ad quadratum ex  $F G$ ; sit autem  $A B$ , maior, quam  
 $A C$ ; erit quoque quadratum ex  $E F$ , maius quam qua-  
dratum ex  $F G$ . Sit maius, ex lemmate propos. 14 hu-  
ius libri, quadrato rectæ  $H$ . Quoniam igitur est ut  $A B$ ,  
numerus ad  $A C$ , ita quadratum ex  $E F$ , ad quadratum ex  
 $F G$ ; erit quoque, per conuersionem rationis, ut  $A B$ , ad  
 $C B$ , uidelicet ad excessum quo antecedens  $A B$ , supe-  
rat consequentem  $A C$ , ita quadratum ex  $E F$ , ad quadra-  
tum ex  $H$ , nimirum ad excessum, quo antecedens qua-  
dratum

48.

42.

6. decimi.

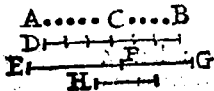
9. decimi.

37. decimi.



dratum ex E F, superat consequens quadratum ex F G. Habet autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionē

9. decimi.



habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; ac prout rectæ E F, H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen E, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen E, F, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine, erit E G, per definitionem, ex binis nominibus prima. Invenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

49.

43.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

R. E P E R T I S duobus numeris quadratis A B, C B, ut in præcedenti propositione, expositæque Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis F G: Erit ergo & F G, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A C, ad numerum A B, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; erunt & rectæ F G, E F, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis est. Quia uero A C, A B, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantum commensurabiles; Atque ideo tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit ut numeros A C, ad numerum A B; ita quadratū ex F G, ad quadratū ex E F;

6. decimi.

9. decimi.

37. decimi.

Et

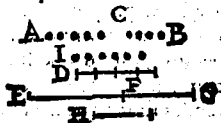
Et convertendo ut  $AB$ , ad  $AC$ , ita quadratum ex  $EF$ , ad quadratum ex  $FG$ ; sit autem  $AB$ , maior quam  $AC$ ; erit & quadratum ex  $EF$ , maius, quam quadratum ex  $FG$ . Sit, per lemma propof. 14. huius lib. maius quadrato rectæ  $H$ . Ostendemus iam, ut in præcedenti propof.  $H$ , ipsi  $EF$ , longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen  $EF$ , plus potest, quam minus  $FG$ , quadrato rectæ  $H$ , sibi longitudine commensurabilis; estq; minus nomen  $FG$ , expositæ Rationali  $D$ , commensurable longitudine; erit  $EG$ , per definitionem, ex binis nominibus secundum. Invenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

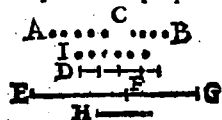
REPERTIS duobus numeris quadratis  $AB, CB$ , ut in propof. 49. Sumatur alius numerus  $I$ , qui ad neutrum ipsorum  $AB, AC$ , proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: quod quidem fiet, si sumatur  $I$ , non quadratus numerus proxime maior quam  $AC$ . Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum  $AB$ , proportionem, quam quadratus ad quadratum: Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quā  $AC$ , differet vel sola unitate ab  $AC$ , vel binario.

(Unitate quidem, quando  $AC$ , numerus fuerit cui addita unitas non facit quadratum: binario vero, quando unitas addita ad  $AC$ , quadratum facit. Vt si  $AC$ , sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia unitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si  $AC$ , sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. Unitate, quia unitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare ut in scholio propof. 8. lib. 8. ostendimus, non eadem inter  $I$ , &  $AC$ , medius proportionalis. Igitur non



I erunt

erunt similes plani; ac propterea neq; proportionem habebunt, quā numeri quadrati. Exposita iā Rationali quapiā D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. ut I, ad AB, ita quadratū



6. decimi.

ex D, ad quadratum ex EF. Erūt ergo quadrata ex D, & EF, proportionē habentia, quam numerus I, ad numerum AB, cōmensurabilia; atq; adeo & lineę D, EF, cōmensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia uero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non

9. decimi.

habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratū; erunt D, & EF, rectę inter se longitudine incōmensurabiles. Rursus per dictū coroll. fiat ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG. Erūt ergo quadrata ex EF, FG, proportionē habentia, quā numerus ad numerū, cōmensurabilia; Ideoq; & lineę EF, FG, cōmensurabiles saltem potētia. Igitur cū EF, ostensa sit Rationalis, erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratū ex EF, ad quadratū ex FG, p-

6. decimi

portionē nō habet, quā numerus quadratus ad numerum quadratū; erūt EF, FG, longitudine incōmensurabiles. Sūt ergo EF, FG, Rationales potētia tantum cōmensurabiles; Atq; idcirco tota EG, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & pētiā esse. Quoniā est ut I, ad AB, ita quadratū ex D, ad quadratū ex EF; Et ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG; erit ex æqualitate ut I, ad AC, ita quadratū ex D, ad quadratū ex FG. Nō habet autē I, ad AC, proportionē quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionē habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; ac propterea rectę D, & FG, longitudine incōmensurabiles sunt. Quoniā autē est ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG: Est aut AB, maior, quā AC, erit & quadratū ex EF, maius quā quadratū ex FG. Sit ergo mai⁹, per lēma propos. 14. huius lib. quadrato rectę H. Ostēdem⁹ iā similiter, ut in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine cōmensurabilē esse. Quoniā igitur maius nomē EF, plus pōt, quā minus FG, quadrato rectę H, sibi lōgitudine cōmensurabilis; & neutra ipsarū EF, FG, lōgitudine cōmensurabilis est expositę

9. decimi.

37. decimi.

Ratio

Rationali D, ut demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

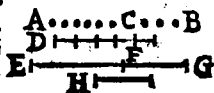
PROBL. 16. PROPOS. 52.

51.  
45.

INVENIRE ex binis nominibus quartā.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita ut cōpositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionē habeat, quā quadratus ad quadratū, ex ijs, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine cōmēsurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cū Rationali D, cōmēsurabilis

sit. Quod si reliqua cōstruantur, ut in propos. 49. ostēdemus similiter, ut ibi, totā EG, ex binis nominibus esse. Dico & quartā esse. Erit



enim rursus, ut in 49. propos. quadratū ex EF, maius quam quadratū ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodē modo, ut in 49. propos. per cōuersionē rōnis, est ut AB, ad CB, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex H: Nō est aut AB, ad CB, ut quadratus ad quadratū; neq; quadratū ex EF, ad quadratū ex H, erit ut numerus quadratus ad numerū quadratū. Lōgitudine ergo incōmēsurabiles sūt rectę EF, & H. Itaq; cū maius nomē EF, plus possit, quā minus FG, quadrato rectæ H, sibi lōgitudine incōmēsurabilis, & maius rursus nomē EF, lōgitudine cōmēsurabile expositę Rōnali D; erit EG, p. defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartā. Qd faciendū erat.

9. decimi.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

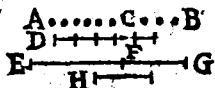
52.  
46.

INVENIRE ex binis nominib<sup>9</sup> quintā.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ut in præcedenti propos. fiat constructio, ut in propos. 50. nēpe sumatur FG, longitudine cōmēsurabilis expositę Rationali D, &c. Ostēdemus ergo ut in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico, & quintā esse. Demonstrabimus enim eodem modo, ut in 50. propos. quadratū ex EF, maius

I 2 esse,

esse, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam uero, ut in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est ut A B, ad C B, ita quadra-



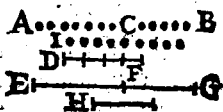
tum ex E F, ad quadratum ex H. Ostendemus, ut in propositione antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen E F, plus possit, quā minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen F G, longitudine commensurable expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

53.  
47.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

10. *septimi* R E P E R T I S duobus numeris A C, C B, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. Nam hac ratione & totus ad utrumque ipsorum primus erit; atq; idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finē lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quilibet numerus quadratus: Hic enim ad A B, & A C, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & ut I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex A E, per coroll. propos. 6. huius lib. & reliqua fiant, ut in propos. 51.



qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quilibet numerus quadratus: Hic enim ad A B, & A C, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & ut I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex A E, per coroll. propos. 6. huius lib. & reliqua fiant, ut in propos. 51.

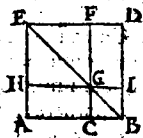
pos. 51. ostendemusq; ut ibi, rectas D, & E F, esse longitudine incommensurabiles, atq; totam E G, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, ut in 51. propos. D, & F G, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit ergo malus, quadrato rectæ H. Ostendemus quoque ut in propos. 49. per conuersionem rationes, esse ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum igitur A B, ad C B, atque adeo quadratū ex E F, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum, erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius nomen E F, plus possit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum E F, F G, longitudine sit commensurable expositæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextā. Quod faciendum erat.

9. decimi.

# L E M M A.

Si recta linea secta sit utcunq; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA sit recta A B, utcunq; in C. Describatur ex A B, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta C F, ipsi B D, parallela, qua diameter secet in G, agatur per G, ipsi A B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium A C, C B; utrumq; autem rectangulorum



lorum  $DG, GA$ , comprehensum sub eisdem partibus: At uero rectangula  $CD, AI$ , sub tota  $AB$ , & parte  $CB$ , contenta. Dico  $DG$ , medium proportionale esse inter quadrata  $FH, CI$ : At  $CD$ , medium esse proportionale inter quadrata  $AD, CI$ . Quoniam ut  $HG$ , ad  $GI$ , ita est tam  $FH$ , ad  $DG$ , quam  $AG$ , ad  $CI$ ; erit ut  $FH$ , ad  $DG$ , ita  $AG$ , ad  $CI$ : Est autem  $AG$ , ipsi  $DG$ , æquale. Igitur erit quoque ut  $FH$ , ad  $DG$ , ita  $DG$ , ad  $CI$ ; Atque adeo  $DG$ , medium proportionale est inter quadrata  $FH, CI$ .

$RVRVS$  quia est ut  $AE$ , ad  $CB$ , ita tam  $AD$ , ad  $CD$ , quam  $AI$ , ad  $CI$ ; erit ut  $AD$ , ad  $CD$ , ita  $AI$ , ad  $CI$ : Est autem  $AI$ , ipsi  $CD$ , æquale. Igitur erit ut  $AD$ , ad  $CD$ , ita quoque  $CD$ , ad  $CI$ ; Quare  $CD$ , medium proportionale est inter quadrata  $AD, CI$ . Eodem modo erit  $AF$ , medium proportionale inter quadrata  $AD, FH$ .

THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATUR spatium  $AC$ , sub Rationali  $AB$ , & ex binis nominibus prima  $AD$ . Dico rectam lineam, quæ potest spatium  $AC$ , Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit ipsius  $AD$ , maius nomen  $AE$ . Erunt igitur ex definit.  $AE, ED$ , Rationales potentia tantum commensurabiles; &  $AE$ , plus poterit, quam  $ED$ , quadrato

1. sexti.  
43. primi

1. sexti.

54.  
48.

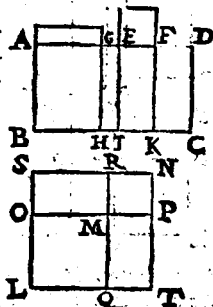
drato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & deniq;  
A E, expositæ Rationali A B, longitudine commensurabi-  
lis erit. Secetur E D, bifariam in F. Quia igitur A E, plus  
potest quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine com-  
mensurabilis, si quartæ parti quadrati ex E D, hoc est, qua-  
drato ex E F, æquale parallelogrammum sub A G, G E,

contentum, per 2. lemma proposi-  
t. 17. huius lib. applicetur deficiens fi-  
gura quadrata; in partes longitu-  
dine commensurabiles ipsam diui-  
det. Quare A G, G E, partes inter  
se longitudine commensurabiles sunt.

Ducantur iam per puncta G, E, F,  
ipsi A B, D C, parallelæ G H, E I,  
F K. Et parallelogrammo A H,  
æquale quadratum fiat L M: At  
parallelogrammo G I, æquale fiat  
quadratum M N; coniunganturq;  
quadrata L M, M N, ita ad angulū

M, ut latera M O, M P, unam rectam lineam constituent  
O P. Facient ergo & latera M Q, M R, unam rectam  
Q R, ut demonstratum est a nobis ex Proclo ad proposi-  
t. 15. lib. 1. propterea quod anguli O M Q, P M R, ad verti-  
cem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem re-  
ctangulo L N, cum rectæ O M, M P, rectis Q M, M R,  
æquales sint, ideoq; & tota O P, toti Q R; sit autem O P,  
ipsis S N, L T; & Q R, ipsi L S, T N, æqualis; æquila-  
terum erit rectangulum L N; ideoq; quadratum.

Quoniam uero rectangulum sub A G, G E, æqua-  
le est, per constructionem, quadrato ex E F; erit ut  
A G, ad E F, ita E F, ad G E; Ac propterea & ut A H,  
ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium propor-  
tionale est inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M,  
M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N,  
medium proportionale est T M, ex antecedenti lemmate:  
Æquale igitur est T M, ipsi E K. Cum ergo ipsi T M,  
æquale sit M S; & ipsi E K, æquale sit F C; erit & M S, ip-  
si F C, æquale. Quocirca totū quadratū L N, toti rectangulo  
A C, æquale est; atq; adeo recta O P, potest spatiū A C, con-  
tentum



18. decimi.

14. secundi.

34. primi.

17. sexti.  
1. sexti.

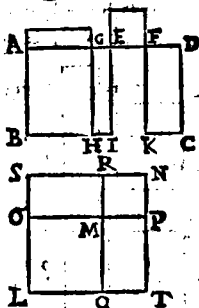
43. & 36.  
primi.



tentum sub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico O P, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

QUONIAM A G, G E, ostensæ sunt longitudine

16. decimi.



20. decimi.

& quadrata L M, M N, ipsi æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

Et quoniam A E, ipsi E D, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis A G; & ipsi E D, commensurabilis est longitudine E F, eius dimidia; erunt ex scholio propof. 14. huius lib. & A G, E F, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & A H, E K, eandem proportionem habentia, quam A G, E F, incommensurabilia sunt; ac proinde & L M, M T, illis æqualia, sunt incommensurabilia. Igitur & rectæ O M, M P, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T: Sunt autem & O M, M P, Rationales ostensæ. Igitur O M, M P, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quapropter tota O P, potens spatium A C, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

1. sexti  
10. decimi.

10. decimi.

1. sexti

37. decimi.

55.  
49.

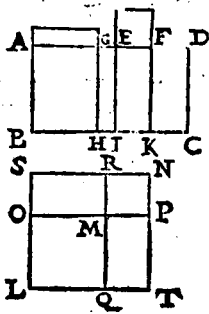
THEOR. 38. PROPOS. 56.

SI spatium contineatur sub Rationali,  
& ex

& ex binis nominibus secunda; Recta line a  
spatium potens Irrationalis est, quæ ex bi-  
nis Medijs prima appellatur.

**C**ONTINEATUR spatium A C, sub Rationali  
AB, & ex binis nominibus secunda A D. Dico rectam lineã,  
quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ ex binis  
Medijs prima dicitur. Sit ipsius A D, maius nomen A E.  
Erunt igitur ex defn. A E, E D, Rationales potentia tantũ cõ-  
mensurabiles; & A E, plus poterit quam E D, quadrato re-  
ctæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et deniq; E D,  
Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis. Se-  
cetur E D, b fariam in F; & reliqua conlignantur, vt in an-  
tecedenti propositione. Quo facto, demonstrabimus simi-  
liter, vt ibi, rectam O P, posse spatium A C, contentum sub  
Rationali A B, & ex binis nominibus secunda A D. Dico  
iam O P, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vo-  
catur.

**Q**UONIAM A E, longitudine incommensurabilis  
est ipsi E D; & E D, minus nomen existens ipsius A D, ex  
binis nominibus secunda, longitudine commensurabilis est  
Rationali AB; erunt A E, A B, lon-  
gitudine incommensurabiles. Et  
quia A G, G E, ostensæ sunt in ante-  
cedenti propositione longitudine cõ-  
mensurabiles; erit quoq; tota A E,  
vtriq; ipsarum commensurabiles.  
Quare cum A E, maius nomẽ exi-  
stens ipsius A D, ex binis nomi-  
nibus secunda, linea sit Rationalis;  
erunt & A G, G E, Rationales:  
quod cum vtraq; A G, G E, ipsi  
A E, sit longitudine commensurabi-  
lis; at vero A E, Rationali A B, lon-



13. decimi.

16. decimi.

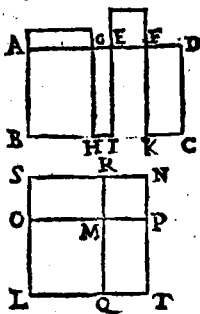
14. decimi.

12. decimi.

ptereaq;

pterea; & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ O M, M P, sunt Mediæ.

10. decimi. Q V I A uero A G, G E, longitudine sunt commensurabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia, commensurabilia; atq; idcirco & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, commensurabilia sunt: igitur & rectæ O M, M P, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam A E, E D, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi uero A E, ostensa est longitudine commensurabilis A G; & ipsi E D, longitudine commensurabilis est E F, eius dimidia; erūt per scholiū propof. 14. huius lib. A G, E F, longitudine incommensurabiles; Ac proinde A H, E K, eandem habentia proportionem cū ipsis, incommensurabilia sunt. Igitur & L M, M T, ipsis A H, & E K, æqualia, incommensurabilia sunt. Ideoq; & rectæ O M, M P, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem habeant proportionem quam L M, M T. Cum ergo ostentum sit O M, M P, Medias esse, & commensurabiles; erunt O M, M P, Mediæ



10. decimi.

10. decimi.  
1. sexsi.

potentia solum commensurabiles. Quoniā deniq; E D, minus nomē ipsius A D, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi A B, hoc est, ipsi E I: Est autem E F, ipsi E D, quoque longitudine commensurabilis; Erunt etiam E I, E F, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum E I, Rationalis sit, erit & E F, Rationalis. Quare E K, rectangulum, Rationale est: Est autem M T, sub O M, M P, contentum ipsi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale est. Quapropter O M, M P, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, Rationaleq; continentes; atq; adeo

12. decimi.

20. decimi.

38. decimi.

O P, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 39. PROPOS. 57.

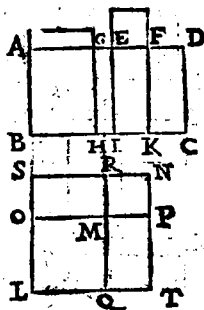
56.  
50°

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia A D. Dico rectâ, quæ pōt spatii AC, Irrationale esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda. Sit ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantū cō-

mensurabiles; & AE, plus poterit, quā ED, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis; Et denique neutra ipsarum AE, ED, Ratio nali expositæ AB, longitudine cōmensurabilis est. Secra E D, bifariam in F. reliqua oīa fiāt, vt in propos. 55.

Similiter ergo, ut ibi, ostendemus rectam OP, posse spatium AC: Et ut in antecedenti propos. 56. rectas OM, MP, esse Medias potentia tantū cōmensurabiles; propterea quod



AE, Rationali AB, ponatur longitudine incōmensurabilis, quēadmodū & ibi eadē AE, ipsi AB, longitudine erat incōmensurabilis. Quoniā uero ED, EF, sunt cōmensurabiles longitudine; estq; ED, ipsi AB, Rōnali, hoc est, ipsi EI, lōgitudine incōmensurabilis; erit quoq; EF, eidē EI, lōgitudine incōmensurabilis: Sūt aut EF, EI, Rōnales, qđ EF, dimidia sit ipsius ED, Rōnalis; & EI, expositæ Rōnali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rōnales sunt potētia tantū cōmensurabiles; Ac propterea EK, Mediū est; ideoq; & MT, æquale ipsi EK, Mediū est, qđ sub Medijs OM, MP, cōtinetur. Itaq; cū OP, MP, Mediæ sint potētia solū cōmensurabiles, cōtineantq; spatii Mediū; erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Medijs secūda appellatur. Si igitur spatii contineatur sub Rōnali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

14. decimi.

22. decimi.

39. decimi.

THEO.

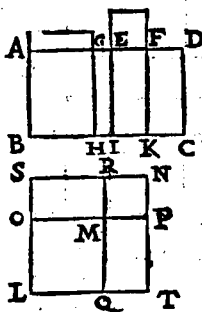
57.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

51.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

CONTINEATUR spatiū A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit A E, ipsius A D, maius nomen. Erunt ergo ex defn. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ



19. decimi.

10. decimi.

20. decimi.

longitudine sibi incommensurabilis; & deniq; A E, ipsi A B, commensurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in F, fiant reliqua omnia, ut in propof. 15. Erunt ergo A G, G E, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus id eodem modo, ut ibi, O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam A G, G E, longitudine incommensurabiles sunt; erunt & rectangula A H, G I, eandem cum illis ha-

bentia proportionem, incommensurabilia; atq; adeo & quadrata L M, M N, ipsis A H, G I, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali A B; erit & A E, Rationalis; & rectangulum A I, sub ipsis contentum, Rationale. Est autē A I, æquale composito ex quadratis L M, M N: Compositum ergo ex quadratis L M, M N, Rationale est.

E t quoniam E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Ra-

lis Rationali A B, erit & E F, ipsius dimidia eidem A B, longitudine incommensurabilis; Et est E F, Rationalis, cum sit Rationali E D, commensurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quare E K, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & M T, illiæquale, contentumq; sub O M, M P, Medium est. Quocirca cum O M, M P, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis M T, Medium; Irrationalis erit tota O P, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

22. decimi

40. decimi.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

58.

52.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

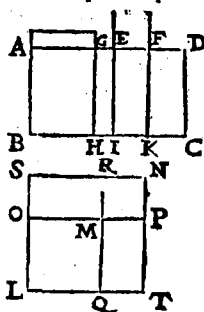
CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit ipsius A D, maius nomen A E. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus potest, quam E D, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; & denique E D, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali A B. Secta E D, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propof. 55. Erunt igitur rursus A G, G E, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, ut in propof. 55. constabit rectam O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, ut in propof. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles. Ex quia A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali. A. B.

19. decimi

crunt;

22. decimi.

erunt A E, A B, Rationales potētia tantū commenſurabiles. Quare rectangulū A I, ſub iſtis contentū, Mediū eſt. Eſt autē A I, æquale cōpoſito ex quadratis L M, M N. Igitur & cōpoſitū hoc, Mediū erit. Rurſus quia



20. decimi.

E D, Rōnalis ponitur lōgitudine cōmenſurabilis Rōnali A B, cū ſit minus nomē iſtius A D, ex binis nominibus quintæ; erit & E F, iſtius dimidia, eidē A B, cōmenſurabilis lōgitudine, & Rōnalis. Quare E K, ſub Rōnaliſ E I, E F, lōgitudine cōmenſurabilibus, Rationale eſt; atq; idcirco & M T, ſub O M, M P, contentū Rōnale erit; cū iſſi E K, ſit æquale. Quōbrē cū rectæ O M, M P, potētia incōmēſurabiles ſint,

41. decimi.

faciantq; cōpoſitū quidē ex iſarū quadratis L M, M N, Mediū; Rectangulū vero M T, ſub iſtis cōtentū, Rōnale; Irrationalis erit tota O P, quę dicitur potēs Rationale & Mediū. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

59.

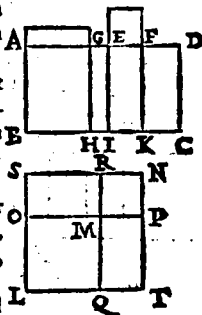
53.

# THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATUR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſexta A D. Dico rectā, quæ ſpatium A C, poteſt, Irrationalem eſſe, quę dicitur potens bina Media. Sit iſtius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & deniq; neutra iſarū A B, E D, longitudine erit cōmēſurabilis Rationali A B. Fiant omnia, quę in ſu-

in superioribus; eruntq; AG, GE, longitudine incommensurabiles. Iam uero ostendemus similiter, ut in propof. 55. re-  
 ctā OP, posse spatiū AC. Item, ut in propof. 58. rectas OM,  
 MP, potentia esse incommensurabiles. Rursus, ut in antecede-  
 ti propof. erit cōpositum ex quadra-  
 tis LM, MN, Medium. Vt autē in  
 propof. 58. erit quoq; MT, sub OM,  
 MP, comprehensum, Medium. Et  
 quia duarum rectarum AE, EF, il-  
 la quidem incommensurabilis est lon-  
 gitudine ipsi E D; hæc uero eidē cō-  
 mensurabilis; erunt AE, EF, longi-  
 tudine incommensurabiles. Igitur  
 & AI, EK, incommensurabilia sunt,  
 cum eandem rationem habeant,  
 quam AE, EF. Quare & composi-  
 tum ex quadratis LM, MN, quod  
 ipsi AI, æquale est, & rectangulum MT, quod ipsi EK,  
 est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cum re-  
 ctæ OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantq;  
 & cōpositum ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium,  
 & MT, sub ipsis contentum, Medium, incommensura-  
 bileq; cōposito ex ipsarum quadratis; erit tota OP, Irra-  
 tionalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spa-  
 tium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sex-  
 ta, &c. Quod ostendendum erat.



9. decimi

13. decimi.

10. decimi.

1. sexti.

42. decimi

THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ est ex  
 binis nominibus, ad Rationalem applica-  
 tum, latitudinem facit ex binis nominibus  
 primam.

Si T ex binis nominib<sup>9</sup> A B, cuius maius nomē AC, &  
 ad Rōnālē exposita DE, applicetur rectangulū DF, æquale  
 quadrato ex A B, latitudinē faciēs DG. Dico DG, ex binis  
 nomi-

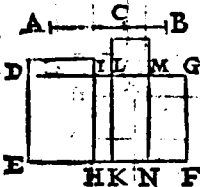
60.

54.

45. p. m.



4. *secundi.* nominibus esse primam. Applicetur ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis sub A C, C B, continetur, cum quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia sint quadrato ex A B, quæ in admodum & eidem quadrato ex A B, æquale est; per constructionem, rectangulum D F. Secetur L G, bifariam in M. puncto, per quod ipsi L K, G F, parallela agatur M N; eritq; utrumque rectangulum I N, M F, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur. Et quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, quod tota A B, sit ex



37. *decimi.* binis nominibus; erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commensurabilia; quorum utrque cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine commensurabilem.

22. *decimi.* R V R S V S quia A C, C B, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis, Medium, atq; adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Rationalem, facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudine. Igitur D L, L G, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commensurabiles, Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

Q V O N I A M ex lemmate propos. 54. huius lib. rectangulum sub A C, C B, medium proportionale est inter quadrata ex A C, C B; erit quoque L N, medium proportionale inter D H, I K; atque adeo cum rectis D L, L M, I L, eandem

eandem rationem habeant , quam  $DH$  ,  $LN$  ,  $IK$  ; erit quoque recta  $LM$  , media proportionalis inter  $DI$  ,  $IL$  . Quare rectangulum sub  $DI$  ,  $IL$  , æquale est quadrato ex  $LM$  . Et quia quadrata ex rectis  $AC$  ,  $CB$  , commensurabilia sunt , quod  $AC$  ,  $CB$  , ponuntur potestria commensurabiles , erunt &  $DH$  ,  $IK$  , ipsis æqualia , commensurabilia . Igitur & rectæ  $DI$  ,  $IL$  , eandem cum illis habentes rationem longitudine commensurabiles sunt . Quoniam autem  $DK$  , maius est , quam  $LF$  , quod & quadrata ex  $AC$  ,  $CB$  , maiora sunt , per lemma propos. 39 huius libri , quam rectangulum bis sub  $AC$  ,  $CB$  ; erit & recta  $DL$  , maior quam  $LG$  ; cum  $DL$  ,  $LG$  , eandem rationem habeant , quam  $DK$  ,  $LF$  . Itaque quoniam  $DL$  , maior est quam  $LG$  ; & ad  $DL$  , applicatur rectangulum sub  $DI$  ,  $IL$  , deficiens figura quadrata , æquale quadrato ex  $LM$  , hoc est , quartæ parti quadrati ex minore  $LG$  , descripti ; ( ostensum enim est rectangulum sub  $DI$  ,  $IL$  , æquale quadrato ex  $LM$  . ) diuiditurque  $DL$  , ad  $I$  , in partes  $DI$  ,  $IL$  , longitudine commensurabiles , ut est demonstratum , poterit  $DL$  , maior plus quam  $LG$  , minor , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis . Quare cum  $DG$  , ostensa sit ex binis nominibus , &  $DL$  , maius nomen plus posse , quam  $LG$  , minus nomen , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis , atque idem maius nomen  $DL$  , longitudine commensurabile Rationali expositæ  $DE$  ; erit ex defin.  $DG$  , ex binis nominibus prima . Quadratum ergo eius , quæ est ex binis nominibus , &c. Quod ostendendum erat .

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius , quæ est ex binis Medijs prima , ad Rationalem applicatum , latitudinem facit ex binis nominibus secundam .

Si t ex binis Medijs prima  $AB$  , cuius maius nomen  $AC$  ; & ad Rationalem  $DB$  , applicetur rectangulum  $DF$  , K æquale

1. sexti.

17. sexti.

10. decimi.

1. sexti.

18. decimi.

67.

55.

45. primi

æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse secundam. Construantur quædam, quæ in propos. præcedenti, ita ut rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, C B, & utrumque ipsorum L N, M F, ei quod sub A C, C B, continetur. Quoniam igitur A C, C B, ex binis Medijs primam A B, componentibus, Mediæ sunt

38. decimi.

potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex A C, C B;

atque adeo rectangula ipsi æqualia D H, I K, commensurabilia, atque Mediæ.

16. decimi.

Gum ergo propterea & totum D K, utriusque apforum D H, I K, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huiuslib. D K, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationale D E;

erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E; longitudine incommensurabilis.

23. decimi.

Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est; erit & eius duplum, nempe L F. Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem L K; erit eius latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis.

21. decimi.

Quare cum duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis; erunt D L, L G, longitudine incommensurabiles.

13. decimi.

Quod cum D L, L G, ostentæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; ac propterea tota D G, ex binis nominibus est.

37. decimi.

Iam uero ut in antecedenti propos. demonstrabimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

Quocirca cum ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex definit. D G, ex binis nominibus secunda.

Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Medijs prima, &c. Quod erat ostendendum.

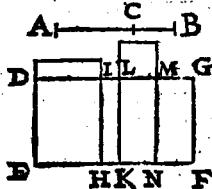
THEOR.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationale applicatū, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Medijs secunda A B, cuius maior nomen A C, & ad Rationale D E, applicetur rectangulū D F, equale quadrato ex A B, latitudine faciēns D G. Dico D G, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis iisdē, quæ in propos. 61.

quoniā A C, C B, ex binis Medijs secundā A B, cōponētes, Mediæ sunt potentia solū cōmensurabiles, quæ Mediū cōtinent; Erūt quadrata ex A C, C B, atq; adeo rectangula ipsæ æqualia D H, I K, cōmensurabilia, & Media. Cum ergo propterea & totum D K, utriq; ipforū D H, I K, sit cōmensurable; erit & ex



coroll. propos. 24. huius libri D K, Mediū; quod cum applicatū sit ad Rationale D E; erit eius latitudo D I, Rationalis ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Rursus quia rectangulū sub A C, C B, Mediū est; erit & eius duplū L F, Mediū; quod cū applicatū sit ad Rationale L K; erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Et quia A C, ipsi C B, lōgitudine est incōmensurabilis; estq; ut A C, ad C B, ita per lēma 3. propos. 19. huius libri, quadratū ex A C, ad rectangulū sub A C, C B; erit quoque quadratū ex A C, rectangulo sub A C, C B, incōmensurabile. Est autē quadrato ex A C, cōmensurable cōpositum ex quadratis rectarū A C, C B, quod quadrata ex A C, C B, cōmensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia ponantur cōmensurabiles, & rectangulo sub A C, C B, cōmensurable est eius duplum, nimirū rectangulum bis sub A C, C B. Igitur cōpositum ex quadratis rectarū A C, C B, hoc est, rectagulū D K, incōmensurable est rectagulo bis sub A C, C B, hoc est, rectagulo L F, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius libri conscripsimus. Quare rectæ D L, L G, eandem

K 2 rationem

62.

56.

45. primi

39. decimi.

16. decimi.

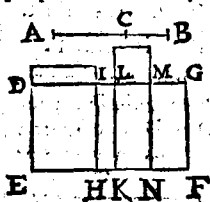
23. decimi.

23. decimi.

20. decimi.

16. decimi.

10. *decimi.* rationem cum D K, L F, habentes, longitudine sunt incommensurabiles: sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; ac  
37. *decimi.* propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in



propos. 61. ostendimus D L, esse maius nomen, posseque plus, quā minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quā ob rem cum D L, maius nomen plus possit, quā L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum D L, L G, Rationali expositæ D E,

sit ostensa longitudine commensurabilis, erit ex defin. G ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Medijs secunda, &c. Quod erat demonstrandum.

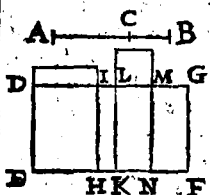
63.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

57.

QVADRATVM Maioris ad Ratio

nalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



Si T. Maior A B, cuius maius nomen A C; & ad Rationale D E, applicetur rectangulū D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartā. Construatur eadē prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes potentia

incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum uero sub ipsis, Medium; erit quoque D K, composito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale existens, Rationale; At uero L F, duplum eius, quod sub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem D E, est applicatum; erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cum L F, Medium sit

appli-

applicatum ad Rationalem L K ; erit L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipsi D E, commensurabilis sit longitudine ; hæc uero eidem D E, longitudine incommensurabilis ; incommensurabiles erunt longitudine D L, L G : ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L G, Rationales potentia tantum commensurabiles ; ideoque D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in propof. 61. demonstrabimus rectangulū sub D I, I L, æquale esse quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommensurabilia sunt, quod rectæ A C, C B, potentia incommensurabiles sunt ; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommensurabilia ; atque adeo & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam uero ut in propof. 61. ostendimus, D L, maior est, quam L G, & ad D L, applicatum est rectangulū sub D I, I L, quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam D L, ad I, in partes longitudine incommensurabiles ; poterit D L, plus quam L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa D L, (maius nomen ipsius D G, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali D E, erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratū ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

23. decimi

3. decimi.

37. decimi.

10. decimi.

19. decimi.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

64.  
58.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

S i t recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomen A C, & ad Rationalem D E, rectangulum D E, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinē faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam esse. Fiant eadem

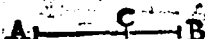
15. primi

K 3 omnino

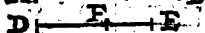
# EUCCLID. GEOM.

Si r. ex binis nominibus quaecunque A B, diuisa in sua nomina, quorum maius A C, & C B, minus, sitque recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B.

12. sexti.



19. quinti



Fiat ut tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablata D F, eut ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, ut tota A B, ad totam D E.

10. decimi.

37. decimi.

10. decimi.

37. decimi.

15. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E, erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis: sunt autem A C, C B, cum sint nomina eius, quae ex binis nominibus Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quis est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt & D F, F E, potentia solum commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; & propterea D E, ex binis nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quam C B, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem A C, plus potest quam C B, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudine Rationali expositae, ita ut A B, sit ex binis nominibus prima; erit & D F, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum utraque, & Rationalis & D F, eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si uero C B, expositae Rationali sit longitudine commensurabilis, ut A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositae longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositae Rationali; ita ut A B, sit ex binis nominibus tercia; erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis expositae Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tercia.

A r si A C, plus possit, quam C B, quadrato rectae sibi longi-

longitudine incommensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quar tam esse, uel quintam, uel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, uel quinta, uel sexta. Eligitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

5. decimi.

SCHOLIION.

Quod si recta DF, potentia tantum commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodẽ modo, (scilicet loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus ubique: commensurabilis potentia tantum:) & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi A B, incommensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile exposita Rationali; & D F, maius nomen eadem esse commensurabile longitudine; propterea quod non utraque, nempe exposita Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem, commensurabilis longitudine; At uero D F, potentia tantum, ex hypothesi. Immo uero, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, fieri nulla ratione potest, ut D E, illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

Sed enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, diuisa in sua nomina ad C; sitque ei commensurabilis potentia tantum D E, quam quidem, ut in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F; & partes AC, CB, partibus B F, F E, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, ut D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit utraque ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumque maius nomen A C, D F, ex definit. Rationali exposita commensurabilis longitudine. Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est ut A C, ad D E, ita A B, ad D E; erunt, propterea, & A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D E, ipsi A B, potentia

12. decimi

10. decimi



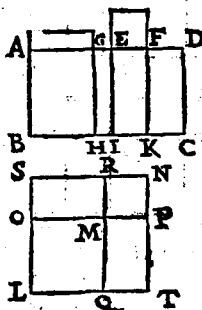
57.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

51.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit A E, ipsius A D, maius nomen. Erunt ergo ex defn. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ



19. decimi.

longitudine sibi incommensurabilis; & deniq; A E, ipsi A B, commensurabilis erit longitudine. Secta E D, bisariam in F, fiant reliqua omnia, ut in propos. 15. Erunt ergo A G, G E, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus ita eodem modo, ut ibi, O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam A G, G E, longitudine incommensurabiles sunt; erunt & rectangula A H, G I, eadem cum illis ha-

10. decimi.

bentia proportionem, incommensurabilia; atq; adeo & quadrata L M, M N, ipsis A H, G I, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali A B; erit & A E, Rationalis; & rectangulum A I, sub ipsis contentum, Rationale. Est autē A I, æquale composito ex quadratis L M, M N: Compositum ergo ex quadratis L M, M N, Rationale est.

20. decimi.

Et quoniam E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Ra-

lis Rationali A B, erit & E F, ipsius dimidia eidem A B, longitudo incommensurabilis; Et est E F, Rationalis, cum sit Rationali E D, commensurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quare E K, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & M T, illiæquale, contentumq; sub O M, M P, Medium est. Quocirca cum O M, M P, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis M T, Medium; Irrationalis erit tota O P, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

22. decimi

40. decimi.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

58.

52.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

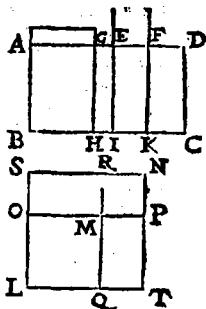
CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit ipsius A D, maius nomen A E. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus potest, quam E D, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; & denique E D, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali A B. Secta E D, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propof. 55. Erunt igitur rursus A G, G E, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, ut in propof. 55. constabit rectam O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, ut in propof. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles. Ex quia A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali. A. B. x

19. decimi

erunt;

22. decimi.

crunt AE, AB, Rationales potētia tantū commensurabiles. Quare rectangulū AI, sub ipsis contentū, Mediū est. Est autē AI, æquale cōposito ex quadratis LM, MN. Igitur & cō-



20. decimi.

positū hoc, Mediū erit. Rursus quia ED, Rōnalis ponitur lōgitudine cōmensurabilis Rōnali AB, cū sit minus nomē ipsius AD, ex binis nominibus quintæ; erit & EF, ipsius dimidia, eidē AB, cōmensurabilis lōgitudine, & Rōnalis. Quare EK, sub Rōnālibus EI, EF, lōgitudine cōmensurabilibus, Rationale est; atq; idcirco & MT, sub OM, MP, contentū Rōnale erit; cū ipsi EK, sit æquale. Quōbrē cū rectæ OM, MP, potētia incōmensurabiles sint,

41. decimi.

faciantq; cōpositū quidē ex ipsarū quadratis LM, MN, Mediū; Rectangulū vero MT, sub ipsis cōtentū, Rōnale; Irrationalis erit rota OP, quę dicitur potēs Rationale & Mediū. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

59.

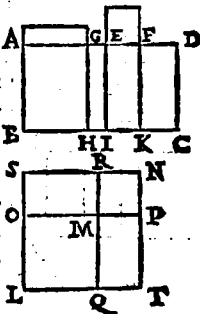
53.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectā, quæ spatium AC, potest, Irrationalem esse, quę dicitur potens bina Media. Sic ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & deniq; neutra ipsarū AE, ED, longitudine erit cōmensurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quę in su-

in superioribus;eruntq; AG,GE, longitudine incommensurabiles. Iam uero ostendemus similiter, ut in propof. 55. recta O P, posse spatiū AC. Item, ut in propof. 58. rectas OM, MP, potentia esse incōmensurabiles. Rursus, ut in antecēdēti propof. erit cōpositum ex quadratis LM, M N, Medium. Vt autē in propof. 58. erit quoq; MT, sub OM, MP, comprehensum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incōmensurabilis est longitudine ipsi E D; hæc uero eidē cōmensurabilis; erunt AE, EF, longitudine incommensurabiles. Igitur & A I, EK, incōmensurabilia sunt, cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & cōpositum ex quadratis LM, MN, quod ipsi A I, æquale est, & rectangulum M T, quod ipsi E K, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cum rectæ O M, M P, sint potentia incommensurabiles, faciantq; & cōpositum ex ipsarum quadratis L M, M N, Medium, & M T, sub ipsi contentum, Medium, incommensurabileq; cōposito ex ipsarum quadratis; erit tota O P, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta, &c. Quod ostendendum erat.



19. decimi

13. decimi.

10. decimi.

1. sexti.

42. decimi

# THEOR. 43. PROPOS. 61.

60.

54.

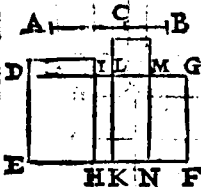
QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

S I T ex binis nominib<sup>9</sup> A B, cuius maius nomē AC, & ad Rōnālē expōsitā DE, applicetur rectangulū DF, æquale quadrato ex A B, latitudinē faciēs D G. Dico D G, ex binis nominib<sup>9</sup>

45 pp. m.

nominib<sup>9</sup>

4. *secundi.* nominibus esse primam. Applicetur ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis sub A C, C B, continetur, cum quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia sint quadrato ex A B, quæ in admodum & eidem quadrato ex A B, æquale est; per constructionem, rectangulum D F. Secetur L G, bifariam in M. puncto, per quod ipsi L K, G F, parallela agatur M N; eritque utrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur. Et quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; quod tota A B, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commensurabilia; quorum utrumque cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine commensurabilem.



37. *decimi.* R V R. S V S. quia A C, C B, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit, per coroll. propof. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Rationalem, facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudine. Igitur D L, L G, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commensurabiles, Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.
22. *decimi.*
23. *decimi.*
13. *decimi.*
37. *decimi.*

Q U O N I A M ex lemmate propof. 34. huius lib. rectangulum sub A C, C B, medium proportionale est inter quadrata ex A C, C B; erit quoque L N, medium proportionale inter D H, I K; atque adeo cum rectis D L, L M, I L, eandem

eandem rationem habeant, quam  $DH$ ,  $LN$ ,  $IK$ ; erit quoque recta  $LM$ , media proportionalis inter  $DI$ ,  $IL$ . Quare rectangulum sub  $DI$ ,  $IL$ , æquale est quadrato ex  $LM$ . Et quia quadrata ex rectis  $AC$ ,  $CB$ , commensurabilia sunt, quod  $AC$ ,  $CB$ , ponuntur potestria commensurabiles, erunt &  $DH$ ,  $IK$ , ipsi æqualia, commensurabilia. Igitur & rectæ  $DI$ ,  $IL$ , eandem cum illis habentes rationem longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem  $DK$ , maius est, quam  $LF$ , quod & quadrata ex  $AC$ ,  $CB$ , maiora sint, per lemma propos. 39 huius libri, quam rectangulum bis sub  $AC$ ,  $CB$ ; erit & recta  $DL$ , maior quam  $LG$ ; cum  $DL$ ,  $LG$ , eandem rationem habeant, quam  $DK$ ,  $LF$ . Itaque quoniam  $DL$ , maior est quam  $LG$ ; & ad  $DL$ , applicatur rectangulum sub  $DI$ ,  $IL$ , deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex  $LM$ , hoc est, quartæ parti quadrati ex minore  $LG$ , descripti; (ostensum enim est rectangulum sub  $DI$ ,  $IL$ , æquale quadrato ex  $LM$ .) diuiditurque  $DL$ , ad  $I$ , in partes  $DI$ ,  $IL$ , longitudine commensurabiles, ut est demonstratum; poterit  $DL$ , maior plus quam  $LG$ , minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum  $DG$ , ostensa sit ex binis nominibus, &  $DL$ , maius nomen plus posse, quam  $LG$ , minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen  $DL$ , longitudine commensurabile Rationali expositæ  $DE$ ; erit ex defin.  $DG$ , ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis Medijs prima  $AB$ , cuius maius nomen  $AC$ ; & ad Rationalem  $DB$ , applicetur rectangulum  $DF$ ,  
K æquale

1. sexti.

17. sexti.

10. decimi.

1. sexti.

18. decimi.

61.

55.

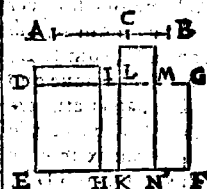
45. primi

aequale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse secundam. Construantur eodem, quæ in propos. præcedenti, ita ut rursus D H, I K, equalia sint quadratis ex A C, C B, & utrūque ipsorū L N, M F, ei quod sub A C, C B, continetur. Quoniam igitur A C, C B, ex binis Medijs primam A B, componentes, Mediæ sunt

38. decimi.

potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent, erunt quadrata ex A C, C B, atque adeo rectangula ipsis æqualia D H, I K, commensurabilia, atque Mediæ.

16. decimi.



Gum ergo propterea & totius D K, utriusque ipsorum D H, I K, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huiuslib. D K, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationale D E; erit eius latitudo D I, Rationalis

23. decimi.

lis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est; erit & eius duplum, nempe L F. Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem L K; erit eius latitudo: L G, Rationalis ipsi

21. decimi.

L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis;

13. decimi.

erunt D L, L G, longitudine, incommensurabiles. Quod cum D L, L G, ostentæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; ac propterea tota D G, ex binis nominibus est.

37. decimi.

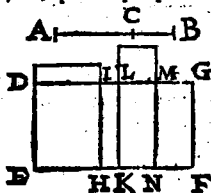
Iam utro ut in antecedenti propos. demonstrabimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Medijs prima, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationale applicatū, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

S i t ex binis Medijs secunda A B, cuius maior nomen A C, & ad Rationale D E, applicetur rectangulū D F, æquale quadrato ex A B, latitudinē faciē D G. Dico D G, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis ipsē, quæ in propos. 61. quoniā A C, C B, ex binis Medijs secundā A B, cōponētes, Mediæ sunt potentia solū cōmensurabiles, quæ Mediū cōtinent; Erūt quadrata ex A C, C B, atq; adeo rectangula ipsi æqualia D H, I K, cōmensurabilia, & Media. Cum ergo propterea & totum D K, utriq; ipsorū D H, I K, sit cōmensurable; erit & ex coroll. propos. 24. huius libri D K, Mediū; quod cum applicatū sit ad Rationale D E; erit eius latitudo D I, Rationalis ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Rursus quia rectangulū sub A C, C B, Mediū est; erit & eius duplū L F, Mediū; quod cū applicatū sit ad Rationale L K; erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Et quia A C, ipsi C B, lōgitudine est incōmensurabilis; estq; ut A C, ad C B, ita per lēma 3. propos. 19. huius libri, quadratū ex A C, ad rectangulū sub A C, C B; erit quoque quadratū ex A C, rectangulo sub A C, C B, incōmensurabile. Est autē quadrato ex A C, cōmensurable cōpositum ex quadratis rectarum A C, C B, quod quadrata ex A C, C B, cōmensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia ponantur cōmensurabiles; & rectangulo sub A C, C B, cōmensurabile est eius duplum, nimirū rectangulum bis sub A C, C B. Igitur cōpositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectagulū D K, incōmensurable est rectagulo bis sub A C, C B, hoc est, rectagulo L F, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius libri conscripsimus. Quare rectæ D L, L G, eandem



62.  
56.

45. primi

39. decimi.

16. decimi.

23. decimi.

23. decimi.

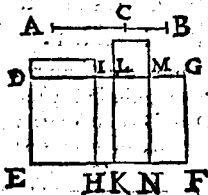
20. decimi.

16. decimi.

K 2 rationem



10. *decimi.* rationem cum D K, L F, habentes, longitudine sunt incommensurabiles: sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; ac  
37. *decimi.* propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in



propos. 61. ostendimus DL, esse maius nomen, posseque plus, quā minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quā ob rem cum D L, maius nomen plus possit, quā L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, L G, Rationali expositæ DE,

sit ostensa longitudine commensurabilis, erit ex defin. G. ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Medijs secunda, &c. Quod erat demonstrandum.

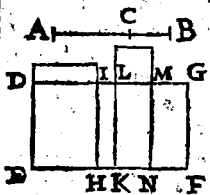
63.

57.

## THEOR. 46. PROPOS. 64.

### QVADRATVM Maioris ad Ratio

nalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



SI T. Maior A B, cuius maius nomen AC; & ad Rationale D E, applicetur rectangulū DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartā. Construatur eadē prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes potentia

incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum uero sub ipsis, Medium; erit quoque D K, composito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale existens, Rationale; At uero L F, duplum eius, quod sub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem D E, est applicatum; erit DL, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cum L F, Medium sit

appli-

applicatum ad Rationale  $LK$ ; erit  $LG$ , Rationalis ipsi  $LK$ , hoc est, ipsi  $DE$ , longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum  $DL$ ,  $LG$ , illa quidem ipsi  $DE$ , commensurabilis sit longitudine; hæc uero eidem  $DE$ , longitudine incommensurabilis; incommensurabiles erunt longitudine  $DL$ ,  $LG$ : ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur  $DL$ ,  $LG$ , Rationales potentia tantum commensurabiles; ideoque  $DG$ , ex binis nominibus est. Iam uero ut in propos. 61. demonstrabimus rectangulū sub  $DI$ ,  $IL$ , æquale esse quadrato ex  $LM$ . Quia autem quadrata ex  $AC$ ,  $CB$ , incommensurabilia sunt, quod rectæ  $AC$ ,  $CB$ , potentia incommensurabiles sunt; Erunt etiam illis æqualia  $DH$ ,  $IK$ , incommensurabilia; atque adeo & rectæ  $DI$ ,  $IL$ , eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam uero ut in propos. 61. ostendimus,  $DL$ , maior est, quam  $LG$ ; & ad  $DL$ , applicatum est rectangulū sub  $DI$ ,  $IL$ , quadrato ex  $LM$ , hoc est, quartæ parti quadrati ex  $LG$ , æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam  $DL$ , ad  $I$ , in partes longitudine incommensurabiles; poterit  $DL$ , plus quam  $LG$ , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa  $DL$ , (maius nomen ipsius  $DG$ , quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali  $DE$ ; erit ex defin.  $DG$ , ex binis nominibus quarta. Quadratū ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

23. decimi

3. decimi

7. decimi

10. decimi

19. decimi

THEOR. 47. PROPOS. 65.

64.

58.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

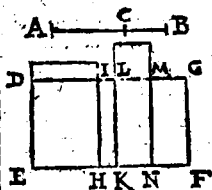
SIT recta potens Rationale ac Medium  $AB$ , cuius maius nomen  $AC$ ; & ad Rationalem  $DE$ , rectangulū  $DF$ , applicetur æquale quadrato ex  $AB$ , latitudinē faciens  $DG$ . Dico  $DG$ , ex binis nominibus quintam esse. Fiant eadem

15. primi

K 3 omnino

41. *decimi.*

omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, cõponentes AB, potentem Rationale ac Medium, potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis con-



33. *decimi.*

tenrum, Rationale; erit DK, æquale cõpositum ex quadratis rectarum AC, CB, Mediũ; & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudinem Rationalem DE, incommensurabilem: At uero Rationale LE,

21. *decimi.*

ad Rationalem LK, applicatum, facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, cõmensurabilem.

13. *decimi.*

Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine cõmensurabilis est Rationali DE, illa uero longitudine incommensurabilis; erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solum

37. *decimi.*

commensurabiles; Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iam uero, ut in propos. 61. ostendimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & ut in antecediti propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cum & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine cõmensurabile; erit ex definit. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

65.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

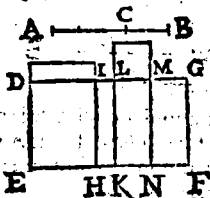
59.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

45. *primi.*

Si t bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC; & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale

æquale quadrato ex  $AB$ , latitudinem faciens  $DG$ . Dico  
 $DG$ , esse ex binis nominibus sextam. Constructis ipsis  
 quæ in propos. 61. quoniam rectæ  $AC$ ,  $CB$ , componen-  
 tes ipsam  $AB$  potentem bina Media, potentia incommen-  
 surabiles sunt, faciuntq; & cõpo-  
 situm ex ipsarum quadratis Me-  
 dium, & quod sub ipsis cõtinetur,  
 Medium, & incommensurabile cõ-  
 positum ex quadratis ipsarum, erit  
 tam  $DK$ , illi composito æquale,  
 quàm  $LF$ , rectangulo bis sub  $AC$ ,  
 $CB$ , æquale, Medium. Et quia  
 Media  $DK$ ,  $LF$ , applicata sunt ad  
 Rationalem  $DE$ ; erunt eorum latitudines  $DL$ ,  $LG$ , Ratio-  
 nales ipsi  $DE$  longitudine incommensurabiles. Quoniã uero  
 cõpositum ex quadratis rectarum  $AC$ ,  $CB$ , incommensu-  
 rabile est rectangulo sub  $AC$ ,  $CB$ ; eidem uero rectangulo  
 sub  $AC$ ,  $CB$ , cõmensurabile est rectangulũ bis sub  $AC$ ,  $CB$ ,  
 cum hoc illius sit duplum; Erit cõpositum ex dictis quadra-  
 tis, hoc est  $DK$ , incommensurabile rectangulo bis sub  $AC$ ,  $CB$ ,  
 hoc est, ipsi  $LF$ ; Ac propterea rectæ  $DL$ ,  $LG$ , eandẽ rationẽ  
 habentes cum  $DL$ ,  $LG$ , longitudine incommensurabiles sunt.  
 Rationales ergo sunt  $DL$ ,  $LG$ , potentia solum cõmensura-  
 biles; Ac proinde  $DG$ , est ex binis nominibus. Iam uero, ut  
 in præcedenti propo. demonstrabimus  $DL$ , esse maius no-  
 men, possq; plus quam minus  $LG$  quadrato rectæ sibi lon-  
 gitudine incommensurabilis. Cum ergo ostensum sit, neutrà  
 ipsarum  $DL$ ,  $LG$ , longitudine cõmensurabilem esse expo-  
 sitæ Rationali  $DE$ ; erit ex defin.  $DG$ , ex binis nominibus  
 sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, &c.  
 Quod erat ostendendum.



42. decimi.

23. decimi.

42. decimi.

13. decimi.

10. decimi.

37. decimi.

THEOR. 49. PROPOS. 67.

66.

60.

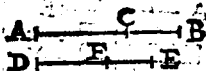
Et  $L$ , quæ est ex binis nominibus, longitu-  
 dine cõmensurabilis; & ipsa ex binis no-  
 minibus est, atque ordine eadem.

# EVLID. GEOM.

Si r. ex binis nominibus quaecunque A B, diuisa in sua nomina, quorum maius A C, & C B, minus, sitque recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B.

Fiat, ut tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D E, erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, ut tota A B, ad totam D E.

12. sexti.



19. quinti

10. decimi.

37. decimi.

10. decimi.

37. decimi.

15. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E; erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis: sunt autem A C, C B, cum sint nomina eius, quae ex binis nominibus. Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt & D F, F E, potentia solum commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; & propterea D E, ex binis nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quam C B, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem A C, plus potest quam C B, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudine Rationali expositae, ita ut A B, sit ex binis nominibus prima; erit & D F, eidem Rationali longitudine commensurabilis; cum utraque, & Rationalis & D F, eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si uero C B, expositae Rationali sit longitudine commensurabilis, ut A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositae longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositae Rationali, ita ut A B, sit ex binis nominibus tertia; erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis expositae Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

A r si A C, plus possit, quam C B, quadrato rectae sibi longi-

longitudine incommensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quæ tam esse, uel quintam, uel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, uel quinta, uel sexta. Eligitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

5. decimi.

SCHOLION.

Q UOD si recta D F, potentia tantum commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodẽ modo, ( si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus ubique: commensurabilis potentia tantum: ) & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile exposita Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quod non utraque, nempe exposita Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem, commensurabilis longitudine; At uero D F, potentia tantum, ex hypothesi. Immo uero, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, fieri nulla ratione potest, ut D E, illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

S I T enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, diuisa in sua nomina ad C; sitque ei commensurabilis potentia tantum D E, quam quidem, ut in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus B F, F E, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, ut D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit utraque ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumque maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali exposita commensurabilis longitudine. Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est ut A C, ad D F, ita A B, ad D E; erunt propterea & A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D E, ipsi A B, potentia

12. decimi

10. decimi

potentia solum commensurabilis. Non ergo utraque  $AB$ ,  $DE$ ,  
ex binis nominibus prima est. Eodem modo neque utraque  
ex binis nominibus quarta erit. Sed  
 $A$  —  $C$  —  $B$  neque secunda, vel quinta. Effer  
 $D$  —  $F$  —  $E$  enim utrunque nomen minus  $CB$ ,  
 $FF$ , ex defin. longitudine commen-  
surabile Rationali exposita, atque adeo & inter se. Igitur &  
totæ  $AB$ ,  $DE$ , longitudine, forent commensurabiles. quod  
non ponitur.

SEMPER tamen verum est, si  $AB$ , est ex binis  
nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam  $DE$ , ipsi  
 $AB$ , potentia solum commensurabilem, esse quoque unam ex il-  
lis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito; poterit  
 $AC$ , plus quam  $CB$ , quadrato rectæ sibi longitudine commen-  
surabilis. Cum ergo sit ut  $AC$ , ad  $CB$ , ita  $DF$ , ad  $FE$ ; poter-  
it quoque  $DF$ , plus quam  $FE$ , quadrato rectæ sibi longitudi-  
ne commensurabilis. Quare ex defin. erit  $DE$ , ex binis nomi-  
nibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si  $AB$ , est  
ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut  $AC$ ,  
plus possit, quam  $CB$ , quadrato rectæ sibi longitudine incommen-  
surabilis; poterit quoque  $DF$ , plus quam  $FE$ , quadrato re-  
ctæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit ut  $AC$ , ad  $CB$ ,  
ita  $DF$ , ad  $FE$ . Igitur ex defin. erit  $DE$ , ex binis nominibus  
etiâ quarta, vel quinta, vel sexta, licet nō eadē ordine ipsi  $AB$ .

IN sequentibus autem quinque propositionibus necessario  
erit  $DE$ , eadem ordine ipsi  $AB$ , quanquam potentia tantum  
illi commensurabilis sit.

67.  
61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Medijs, longitudi-  
ne commensurabilis, & ipsa ex binis Me-  
dijs est, atque ordine eadem.

SIT ex binis Medijs  $AB$ , quæcunque diuisa in sua nomi-  
na, quorum  $AC$ , maius, &  $CB$ , minus, sitque ei recta  $DE$ ,  
longitudine commensurabilis. Dico  $DE$ , quoque ex binis  
Medijs esse, & ipsi  $AB$ , ordine eadem. Fiat ut tota  $AB$ ,  
ad

ad totā D E, ita ablata A C, ad ablatam D F. Erit ergo & reliqua C F, ad reliquā F E, ut tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipsi A B, ponitur longitudine commensurabilis D E; erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis. 
$$\begin{array}{c} A \text{---} C \text{---} B \\ D \text{---} F \text{---} E \end{array}$$
 Sunt autem A C, C B, Medix. Igitur & D F, F E, illis commensurabiles, Medix sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt & D F, F E, solum commensurabiles potentia. Cum ergo & ostense sint Medix; erunt D F, F E, Medix potentia tantum commensurabiles; Atque idcirco D E, erit ex binis Medijs: Dico & ipsi A B, eandem esse ordine. Quoniam est ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Est autem ut A C, ad C B, ita quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, & ut D F, ad F E ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F, F E, ex lemma 3. propos. 19. huius libri; erit quoque ut quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F, F E; & permutando ut quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum sub A C, C B, ad rectangulum sub D F, F E. Commensurabile est autem quadratum ex A C, quadrato ex D F; quod recte A C, D F, commensurabiles ostense sint longitudine. Igitur & rectangulum sub A C, C B, rectangulo sub D F, F E, commensurabile est. Quare si rectangulum sub A C, C B, fuerit Rationale, ita ut A B, sit ex binis Medijs prima; erit & rectangulum sub D F, F E, Rationale, cum illi sit commensurabile; atque adeo & D E, ex binis Medijs prima erit. Si vero rectangulum sub A C, C B, fuerit Medium, ita ut A B, sit ex binis Medijs secunda; erit & rectangulum sub D F, F E, ei commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Ac propterea & D E, erit ex binis Medijs secunda. Quare et, quæ ex binis Medijs, longitudine commensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Eodem præfuso modo demonstrabimus, rectam lineam D E,

2. sexii.  
9. quini.  
10. decimi.  
24. decimi.  
38. decimi.  
10. decimi.  
38. vel 39. decimi.

10. decimi.  
38. decimi.  
39. decimi.



D E, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi A R, quæ est ex binis Medijs, ex binis Medijs esse, atque ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est; si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus ubique: commensurabilis potentia tantum, &c. ut manifestum est.

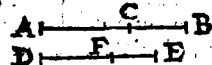
68.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

62.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

S i t linea Maior A B, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Maiorem esse. Fiant enim eadẽ,



quæ superius; ita ut partes A C, C B, ad partes D F, F E, eandem

habeant rationem, quam tota A B, ad totam D E. Quoniam igitur A B, D E, commensurabiles sunt uel longitudine & potentia, uel potentia tantum, erunt quoque tam

10. decimi.

A C, D F, quam C B, F E, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; erit ut quadratum ex

22. sexti.

A C, ad quadratum ex C B, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex F E; & componendo ut compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ad quadratum ex C B, ita compositum ex quadratis rectarum D F, F E, ad quadratum ex

F E; Et conuertendo ut quadratum ex C B, ad compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ita quadratum ex F E, ad compositum ex quadratis rectarum D F, F E; Et permutando ut quadratum ex C B, ad quadratum ex F E, ita compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ad compositum ex quadratis rectarum D F, F E. Commensurabile est autem

quadratum ex C B, quadrato ex F E, quod rectæ C B, F E, ostensæ sint commensurabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum. Igitur & compositum ex quadratis

10. decimi.

rectarum A C, C B, comensurabile est composito ex quadratis rectarum D F, F E. Est autem compositum illud Rationale, cum rectæ A C, C B, componant Maiorem A B. Igitur

40. decimi.

rectarum A C, C B, comensurabile est composito ex quadratis rectarum D F, F E. Est autem compositum illud Rationale, cum rectæ A C, C B, componant Maiorem A B. Igitur

tur

tur & hoc Rationale est, ex p. defin.

R v r s v s quia est ut A C, ad C B, ita D F, ad F E;  
Vt autem A C, ad C B, ita est quadratum ex A C, ad rectan-  
gulum sub A C, C B, & ut D F, ad F E, ita quadratum ex  
D F, ad rectangulum sub D F, F E, ex lemmate 3, propos. 19.  
huius libri; Erat quoque ut quadratum ex A C, ad rectan-  
gulum sub A C, C B, ita quadratum ex D F, ad rectan-  
gulum sub D F, F E, ut permutando ut quadratum ex A C,  
ad quadratum ex D F, ita rectangulum sub A C, C B, ad re-  
ctangulum sub D F, F E. Est autem quadratum ex A C,  
quadrato ex D F, commensurabile, quod recta A C, D F,  
ostense sint commensurabiles uel longitudine & potentia,  
uel potentia tantum. Igitur & rectangulum sub A C, C B,  
rectangulo sub D F, F E, commensurabile est. Est autem re-  
ctangulum sub A C, C B, Medium. Igitur & rectangulum  
sub D F, F E, illi commensurabile, Medium est, ex coroll.  
propos. 24. huius libri. Quoniam uero est ut A C, ad C B,  
ita D F, ad F E; suntque A C, C B, potentia incommensura-  
biles, cum componant Maiorem A B; Erunt quoque D F,  
F E, potentia incommensurabiles. Itaque cum D F, F E,  
sint, potentia incommensurabiles, faciantque compositum  
quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub  
ipsis continetur, Medium, ut ostensum est; erit tota D E,  
Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est.  
Quod demonstrandum erat.

10. decimi.  
40. decimi.

10. decimi.  
10. decimi.

40. decimi.

THEOR. 52. PROPOS. 70.

69.  
63.

RATIONALE ac Medium poten-  
ti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Me-  
dium potens est.

S i t recta A B, potens Rationale ac Medium, diuisa in  
sua nomina ad C, eique commensurabilis D E, siue longitu-  
dine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, esse po-  
tentem Rationale ac Medium. Constructis iisdem, quae su-  
pra, ostendemus, ut in precedenti propos. compositum ex  
quadratis rectarum A C, C B, commensurabile esse compo-

lito

41. de. imi.

sito ex quadratis rectarum DF FE. Est autem illud compositum Medium, cum rectæ AC, CB, component ipsam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Mediū est. Eodem modo, ut in eadem propos. antecedenti, erit rectan-



41. decimi.

gulum sub AC, CB, quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub DF, FE; atque adeo & rectangulum sub DF, FE, Rationale est, ex 9. defin. Denique ut in eadem superiori propos. erunt DF, FE, potentia incommensurabiles. Quare cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale, ut demonstratum est; erit tota DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

41. decimi.

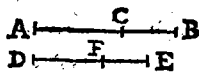
70.

64.

# THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse bina Media potentē. Constructis iisdem, quæ supra, ostendimus, ut in propos.



69. compositū ex quadratis rectarū AC, CB, cōposito ex quadratis rectarū DF, FE, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub

42. de cimi.

AC, CB, esse cōmensurabile rectangulo sub DF, FE. Cū ergo tā compositū ex quadratis rectarū AC, CB, quam rectangulū sub AC, CB, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 2. huius libri, tā cōpositum ex quadratis rectarū DF, FE, quam rectangulū sub DF, FE, Mediū. Sed & DF, FE, potentia incōmensurabiles sunt, ut prius. Postremo quia cōpositum ex quadratis rectarū AC, CB, & rectangulum sub

AC,

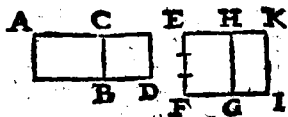
A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod A B, bina Media potest: Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurable ostensum compositum ex quadratis rectarum D F, F E; & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurable rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cum rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Mediū; & quod sub ipsis continetur, Mediū, incommensurableq; composito ex quadratis ipsarum, erit D E, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

THEOR. 34. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componatur, quatuor Irrationales fiant, uel ea, quæ ex binis nominibus, uel quæ ex binis Medijs prima, uel Maior, uel Rationale ac Mediū potens.

SI T Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse uel ex binis nominibus, uel ex binis Medijs primam, uel Maiorem, uel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, uel maius

quam C D, uel minus: Aequale siquidem non erit; alias cum A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo



maius, & exposita Rationali E F, applicetur ad eam rectangulum E G, æquale ipsi A B; & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, ut totum E I, totum A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium; erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium; quæ cum applicentur ad Ration.

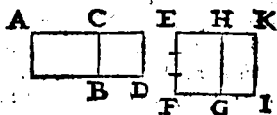
42. decimi.

42. decimi.

71.  
65.

45. primi.

21. *decimi.* Rationalem EF; erit EH, Rationalis, & ipsi EF longitu  
23. *decimi.* dine commensurabilis; At uero HK, Rationalis, & eodem



EF, longitudine incommensurabilis. Rursum quia FG, HI, incommensurabiles sunt, ut constat ex definitionibus; quod EG, Rationalis sit, at HI, Irrationale, nempe Medium; erunt EH,

10. *decimi.* HK, eandem cum illis habentes rationem incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia  
37. *decimi.* solum commensurabiles; Ac propterea EH, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoque EH, maior quam

1. *sexti.*

HK, cum EH, HK, eandem rationem habeant, quā EG, HI. Iam uero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & spatium AD, compositum ex Rationali AB, & Medio CD, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

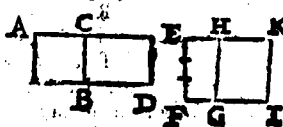
55. *decimi.*

Si uero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & spatium AD, Irrationalis est, quæ uocatur Maior.

58. *decimi.*

Si T secundo AB, minus quam CD; & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, ut prius, EK, ex binis nominibus, & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et quia AB, minus est, quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoque recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rursus HK, maius nomen ipsius EK, quæ est ex binis nominibus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectæ longitudine

tudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit  $HK$ , quam  $EH$ , quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit  $EK$ , ex binis nominibus secunda, cum



$EH$ , minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali  $EF$ , ut ostensum est. Quare recta potens spatium  $EI$ , contentum sub Rationali  $EF$ , & ex binis

nominibus secunda  $EK$ , atq; adeo & spatium  $AD$ , ex Rationali  $AB$ , & Medio  $CD$ , compositum, Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Medijs prima.

56. decimi.

Si vero  $HK$ , plus possit quam  $EH$ , quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; erit  $EK$ , ex binis nominibus quinta, cum  $EH$ , minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali  $EF$ . Quare recta potens spatium  $EI$ , contentum sub Rationali  $EF$ , & ex binis nominibus quinta  $EK$  atq; adeo & spatium  $AD$ , Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

59. decimi.

# THEOR. 55. PROPOS. 73.

72.  
66.

SI duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs secunda, vel bina Media potens.

COMPONENTUR duo Media incommensurabilia  $AB$ ,  $CD$ . Dico rectam, quæ potest totum spatium  $AD$ , esse vel ex binis Medijs secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus  $AB$ , vel majus, quam  $CD$ , vel minus: A Equale siquidem non erit; alias essent  $AB$ ,  $CD$ , commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo majus, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia  $AB$ ,  $CD$ , ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt

L &

10. decimi.

23. decimi.

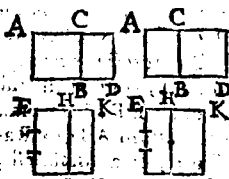
37. decimi.

57. decimi.

60. decimi.

23. decimi.

& spatia E G, H I, Media & incōmensurabilia; cum illis sint æqualia. Igitur rectæ E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incōmensurabiles sunt; & utraq; (cum E G, H I, Media fiat, applicentur; ad Rationalem



E F.) Rationalis est, ipsi E F, longitudine incōmensurabiles. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solum cōmensurabiles; ac propterea E K, ex binis nominibus est. Quoniam vero A B, maius potest, quam C D, erit

ut in antecedenti propos. E H, maius nomen ipsius E K. Potest ergo plus quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis, vel incōmensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi cōmensurabilis longitudine, cum utrunq; nomen E H, H K, ostensum sit longitudine incōmensurabile Rationali E F; erit E K, ex defn. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus tertia E K, atque adeo, & spatium A D, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs, secunda dicitur.

Si vero E H, plus possit, quam H K, quadrato rectæ longitudine sibi incōmensurabilis, cum utrunq; nomen E H, H K, longitudine sit incōmensurabile Rationali E F; erit E K, ex binis nominibus sexta, ut constat ex defn. Recta igitur potens spatium E I, siue spatium A D, Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

Quod si A B, minus sit, quam C D, non aliter propositum concludemus, ut ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se incōmensurabilia componantur, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Ex his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquis ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediz, neque inter se easdem esse.

Nam quadratum Mediz ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incōmensurabilem.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

61. decimi.

ET quadratum eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

62. decimi.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

63. primi.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

64. decimi.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

65. decimi.

POSTREMUM quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

66. decimi.

ITAQUE cum hæc latitudines differant & a latitudine Medię, & inter se; a latitudine quidem Medię, quod hæc Rationalis sit, illę vero Irrationales; Inter se autem, quod ordinē non sint eadem ex binis nominibus; perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hæcenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIUM.

HACTENUS egit Euclides de septem senarijs.

IN primo, qui continetur propof. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit orum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propof. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuisionibus, docens singulas in singula dumtaxat punctis diuidi posse.

IN tertio deinde contento propof. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, uidelicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta.

IN quarto, quem absoluunt propof. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæc sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quanam lineæ Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, uel ex bi-



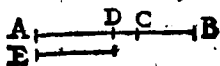
nis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

IN quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam Latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absolvitur, demonstrans lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo deniq; contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicans rursus differentiam aliam sex dictarum Irrationalium.

REPERITUR autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quae quidem consistit in excessu eodem. Ex recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusvis lineae Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit.



SIT enim quaecunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus  $AB$ , cuius maius nomen  $AC$ ; & dividatur  $AB$ , bisariam in  $D$ ; & eius dimidia  $AD$ , vel  $DB$ , equalis sumatur  $E$ . Dico  $E$ , mediam esse, secundum Analogiam Arithmeticam, inter  $AC$ ,  $CB$ : &  $E$ , esse quoque ex binis nominibus. Quoniam  $AC$ , superat dimidiam  $AD$ , recta  $DC$ ; & dimidia  $DB$ , superat ipsam  $CB$ , eadem recta  $DC$ ; perspicuum est, dimidiam ipsius  $AB$ , nempe  $E$ , esse mediam proportionalem inter  $AC$ ,  $CB$ , in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia  $E$ , commensurabilis est longitudine totius  $AB$ , cum hac illius sit dupla; erit &  $E$ , Irrationalis eadem ipsi  $AB$ , ut in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in ceteris lineis Irrationabilibus contingere.

SEQUVNTUR iam septem alij senarii, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex alijs lineis Irrationalibus, quae per detractionem generantur, quae in praecedentibus septem senarijs de Irrationalibus, quae per compositionem fiunt, cum ostendisse de ceteris.

PRINCIPIVM SENARIORVM  
per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

73.  
68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATUR a Rationali A B, Rationalis A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B. Dico reliquam B C, Irrationalem esse. Quoniam per lemma 3. propos. 9. huius lib. est ut A B, ad A C,

ita quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, A C: Et sunt



A B, A C, longitudine incommensurabiles; erunt incommensurabilia quadratum ex A B, & rectangulum sub A B, A C. Sed quadrato ex A B, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum A B, A C; (Cum enim A B, A C, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex A C,) rectangulo vero sub A B, A C, commensurabile est rectangulum sub A B, A C, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulum sub A B, A C, bis contentum, incommensurabilia sunt, ut in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. Est autem compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale rectangulo bis sub A B, A C, una cum quadrato ex B C. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A B, A C, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex B C, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum A B, A C, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex A C, linea Rationali descripto;) erit quadratum ex B C, Irrationale; atq; adeo & recta ipsa B C, Irratio-

10. decimi.

16. decimi.

7. secundi.

rationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIION.

POTUISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

37. decimi. *NAM cum AB, AC, sint Rationales potentia tantum commensurabiles; erit composita ex A ——— B ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus, digitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, ut relinquatur Apotome BC.*

74.  
69.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

16. decimi. *DETRAHATUR a Media AB, Media AC; potentia solum commensurabilis ipsi AB. sitq; rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia; atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile est.*

erit quadrato ex  $AC$ . Est autem quadratum ex  $AC$ ,  
Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. pro-  
pos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis recta-  
rum  $AB$ ,  $AC$ , Irrationale erit, ac Medium. Et quia  
rectangulum sub  $AB$ ,  $AC$ , ponitur Rationale; erit

& rectangulum bis sub  $AB$ ,  
 $AC$ , Rationale. Igitur incom-



mensurable est compositum ex  
quadratis rectarum  $AB$ ,  $AC$ ,

rectangulo bis sub  $AB$ ,  $AC$ . Cum ergo compositum

ex quadratis rectarum  $AB$ ,  $AC$ , æquale sit rectangu-

7. secundi.

lo bis sub  $AB$ ,  $AC$ , una cum quadrato ex  $BC$ ; erit

quodque rectangulum bis sub  $AB$ ,  $AC$ , una cum qua-

drato ex  $BC$ , incommensurable rectangulo bis sub  $AB$ ,

$AC$ . Quare & rectangulum bis sub  $AB$ ,  $AC$ , &

17. decimi.

quadratum ex  $BC$ , incommensurabilia sunt. Existen-

te ergo rectangulo bis sub  $AB$ ,  $AC$ , Rationali; erit

quadratum ex  $BC$ , Irrationale; idèq; & recta  $BC$ ,

Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome pri-

ma, quia videlicet relinquitur post subtractionem mino-

ris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori no-

mine, ut in scholio sequenti patebit. Si igitur a Me-

dia Media auferatur potentia tantum commensurabilis exi-

stens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Ir-

rationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

Quod ostendendum erat.

# SCHOLIUM.

POTUISSET hæc propositio proponi hoc modo.

Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Me-  
dijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua  
Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apo-  
tome prima.

Cum enim  $AB$ ,  $AC$ , sint Media potentia solum com-

L 4

men-

38. decimi.

mensurabiles, continentq; Rationale, erit composita ex ipsis Irrationalis, qua ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomen  $A B$ , & minus  $A C$ . Auferatur igitur  $A C$ , minus nomen ex maiori  $A B$ , ut relinquatur  $B C$ , Media Apotome prima.

$A \quad C \quad B$

75.

70.

. THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

16. decimi.

DETRAHATUR a Media  $A B$ , Media  $A C$ , potentia solum commensurabilis ipsi  $A B$ , sitq; rectangulum sub  $A B$ ,  $A C$ , Medium. Dico reliquam  $B C$ , esse Irrationalem. Quoniam quadrata ex  $A B$ ,  $A C$ , potentia commensurabilibus commensurabiles sunt; erit & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile:

$A \quad C \quad B$

7. secundi.

27. decimi.

Est autem utrumque ipsorum Medium, quod & rectæ  $A B$ ,  $A C$ , Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, utrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulum sub  $A B$ ,  $A C$ , Medium ponitur; erit & eius duplum, rectangulum uidelicet bis sub  $A B$ ,  $A C$ , ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum  $A B$ ,  $A C$ , æquale sit rectangulo bis sub  $A B$ ,  $A C$ , una cum quadrato ex  $B C$ ; superabit compositum ex quadratis rectarum  $A B$ ,  $A C$ , quod Medium est, rectangulum bis sub  $A B$ ,  $A C$ , quod etiam Medium est, quadrato ex  $B C$ . Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex  $B C$ , Rationale est. ergo Irrationale, & ipsa recta  $B C$ , Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquatur post subtractionem minoris nominis eris, quæ ex binis

nis Medijs secunda, a maiori nomine, ut ex scholio sequenti apparebit. Si igitur a Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

## S C H O L I O N.

H o c etiam theorema ita potuisset proponi.

S I a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Medix Apotome secunda.

Q U O N I A M  $AB$ ,  $AC$ , Medie sunt potentia tantum commensurabiles, continentq; Medium; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius nomen  $AB$ , & minus  $AC$ . Auferatur igitur  $AC$ , minus nomen ex maiori  $AB$ , ut relinquatur  $BC$ , Medie Apotome secunda.

39. decimi.

## THEOR. 59. PROPOS. 77.

76.

71.

S I a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti; quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

D E T R A H A T U R a recta  $AB$ , recta  $AC$ , potentia ipsi  $AB$ , incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum  $AB$ ,  $AC$ , Rationale; rectangulum vero sub  $AB$ ,  $AC$ , Medium. Dico reliquam  $BC$ , Irrationalem esse. Quoniam compositum ex quadratis rectarum  $AB$ ,  $AC$ , Rationale est, rectangulum vero sub  $AB$ ,  $AC$ , arq;

adeo,

10. defin.

7. secundi.

10. defin.

adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei cōmensurable, hoc est, rectangulū bis sub  $AB$ ,  $AC$ , Mediū, hoc est, Irrationale; erit cōpositū ex quadratis rectarū  $AB$ ,  $A$ ,  $C$ , incōmensurable rectangulo bis sub  $AB$ ,  $AC$ . Est autē cōpositū ex quadratis rectarū  $AB$ ,  $AC$ , æquale rectangulo bis sub  $AB$ ,  $AC$ , una cum quadrato ex  $B$   $C$ . Igitur & cōpositum ex quadratis rectarū  $AB$ ,  $A$ ,  $C$ , p̄ coroll. propos. 7. huius lib. reliquo quadrato ex  $B$   $C$ , incommensurable erit. Ponitur autem cōpositum ex quadratis rectarū  $AB$ ,  $A$ ,  $C$ , Rationale. Igitur quadratum ex  $B$   $C$ , illi incommensurable, Irrationale est, & linea  $B$   $C$ , Irrationalis. vocetur autem Minor, quoniam

relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris, a maiori nomine, ut in scholio sequentis dicemus. Si igitur a recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Si c etiam theorema hoc poterat proponi.

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

40. decimi. NAM cum  $A$   $B$ ,  $A$   $C$ , sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt cōpositum quidem ex ipsarū quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: erit cōposita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusq; maius nomen  $A$   $B$ , minus autem  $A$   $C$ . Auferatur igitur  $A$   $C$ , minus nomen ex maiori  $A$   $B$ , ut relinquatur Minor  $B$   $C$ .

77.

72.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum

rota

tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATUR ex recta  $AB$ , recta  $AC$ , potentia ipsi  $AB$ , incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam  $BC$ , esse Irrationalem. Quoniam compositum ex quadratis rectarum  $AB$ ,  $AC$ , Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub  $AB$ ,  $AC$ , atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub  $AB$ ,  $AC$ , Rationale; erit compositum ex quadratis rectarum  $AB$ ,  $AC$ , incommensurable rectangulo bis sub  $AB$ ,  $AC$ . Est autem compositum ex quadratis rectarum  $AB$ ,  $AC$ , æquale rectangulo bis sub  $AB$ ,  $AC$ , una cum quadrato ex  $BC$ . Igitur & rectangulum bis sub  $AB$ ,  $AC$ , una cum quadrato ex  $BC$ , incommensurable est rectangulo bis sub  $AB$ ,  $AC$ . Sunt ergo & rectangulum bis sub  $AB$ ,  $AC$ , & quadratum ex  $BC$ , incommensurable. Cum ergo rectangulum bis sub  $AB$ ,  $AC$ , Rationale sit; erit quadratum ex  $BC$ , Irrationale, & recta  $BC$ , Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub  $AB$ ,  $AC$ , quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum  $AB$ ,  $AC$ , quod Medium existit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION

Hoc etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.



SI a maiori nomine eius , quæ Rationale ac Medium potest , minus nomen auferatur ; Reliqua Irrationalis est . Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens .

CUM enim  $AB$ ,  $AC$ , sint potentia incommensurabiles , quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis . Medium ; quod autem sub ipsis continetur , Rationa-



41. decimi.

le ; erit composita ex ipsis Irrationalis , quæ nominatur Rationale ac Medium potens , omnis maius nomen est  $AB$ , minus autem  $AC$ . Auferatur igitur minus nomen  $AC$ , a maiori  $AB$ , ut  $BC$ , cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur .

78.

73.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti , quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis , Medium ; & quod sub ipsis continetur , Medium , incommensurabileq ; composito ex quadratis ipsarum : Reliqua Irrationalis est . Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens .

DETRACTATUR ex recta  $AB$ , recta  $AC$ , potentia ipsi  $AB$ , incommensurabilis ; Sitq ; tam compositum ex ipsarum quadratis , quam rectangulum sub ipsis , Medium , incommensurabileq ; composito ex ipsarum quadratis . Dico reliquam  $BC$ , esse Irrationalem . Quoniam



compositum ex quadratis rectarum  $AB$ ,  $AC$ , æquale est rectangulo bis sub  $AB$ ,  $AC$ , una cum quadrato ex  $BC$ , superabit compositum ex quadratis rectarum  $AB$ ,  $AC$ , quod

7. secundi.

quod Medium ponitur, rectangulum bis sub  $AB, AC$ , quod ex coroll. propos. 24 huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub  $AB, AC$ , continetur, sit commensurable) quadrato ex  $BC$ . Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex  $BC$ , Rationale est. ergo Irrationale, & recta ipsa  $BC$ , Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub  $AB, AC$ , quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum  $AB, AC$ , quod Medium etiam est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

27. decimi.

SCHOLION.

IN hunc modum proponi quoque potuisses hoc theorema.

Si a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QUONIAM cum  $AB, AC$ , sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque compositum ex quadratis ipsarum, erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen  $AB$ , & minus  $AC$ . Auferatur igitur minus nomen  $AC$ , ex maiori  $AB$ , ut relinquatur  $BC$ , cum Medio Medium totum efficiens.

42. decimi.

LEMMA.

Si idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui

qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines  $AB, CD, EF, GH$ , sitq;  $IB$ , excessus inter  $AB, CD$ , aequalis excessui  $KF$ , inter  $EF, GH$ . Dico eundem esse excessum inter  $AB, EF$ , qui inter  $CD, GH$ . Quoniam  $IB$ , excessus est inter  $AB, \& CD$ ; erit  $AI$ , ipsi  $CD$ , aequalis. Eodem modo aequalis erit  $EK$ , ipsi  $GH$ . Idem igitur excessus erit inter  $AI, \& EK$ , qui inter  $CD, \& GH$ ; cum haec magnitudines illis sint aequales, singula singulis. Est autem totorum  $AB, EF$ , ex pronunciato 45. lib. 1. idem excessus, qui inter  $AI, EK$ ; quod  $IB, KF$ , aequales ponuntur. Igitur idem quoque excessus erit inter  $AB, \& EF$ , qui inter  $CD, \& GH$ . quod est propositum.



COROLLARIUM.

Ex his constat, quatuor magnitudines Arithmetica Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmetica Analogiam. quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmetica habeant.

79.

74.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

APOTOMAE una tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT Apotome  $AB$ ; congruens autem ei Rationalis  $BC$ ,

B C, potentia solum toti A C, commensurabilis. Dico ip-  
 si A B, aliam Rationalem non congruere, quæ toti sit po-  
 tentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, con-  
 gruatur alia Rationalis B D, ita ut B D, ipsi A D, sit potentia  
 solum commensurabilis. Et quia B C, A B C D  
 Rationalis est, erit & A C, illi solū pote-  
 tia cōmensurabilis, Rōnalis. & ōnales ergo sunt A C, B C, pote-  
 tia tantum commensurabiles. Eodem modo erunt & A D,  
 B D, Rationales potentia solum commensurabiles. Quo-  
 niam vero idem excessus est inter compositum ex quadra-  
 tis rectarum A C B C, & rectangulum bis sub A C, B C,  
 qui inter compositum ex quadratis rectarum A D, B D, &  
 rectangulum bis sub A D, B D; (superat enim compositum  
 ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis sub A C,  
 B C, quadrato ex A B; quod compositum ex quadratis re-  
 ctarum A C, B C, æquale sit rectangulo bis sub A C, B C,  
 una cum quadrato ex A B. Et eodem modo compositum  
 ex quadratis rectarum A D, B D; superat rectangulum bis  
 sub A D, B D, quadrato eodem ex A B; cum & compositum  
 ex quadratis rectarum A D, B D, æquale sit rectan-  
 gulo bis sub A D, B D, una cum quadrato ex A B.)  
 erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem  
 excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C,  
 B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D,  
 qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangu-  
 lum bis sub A D, B D. Est autem excessus inter illa  
 composita, spatium Rationale, ex scholio propof. 27.  
 huius lib. quod utrunque Rationale sit. (Nam cum  
 A C, B C, sint Rationales potentia solum commensu-  
 rabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & com-  
 mensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utriusque il-  
 lorum commensurabile est, atque adeo & Rationale;  
 ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus composi-  
 tum ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & ex-  
 cessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectan-  
 gulum bis sub A D, B D, spatium Rationale est. Et  
 quia rectangulum sub A C, B C, Rationalibus poten-  
 tia solum commensurabilibus Medium est; erit ex cō-  
 rollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum,  
 nempe

7. secundi.

7. secundi.

16. decimi.

22. decimi.

27. *decimi.*

nempe rectangulum bis sub  $A C$ ,  $B C$ . Medium. Eadem-  
que ratione Medium erit rectangulum bis sub  $A D$ ,  $B D$ .  
Medium autem non superat Medium Rationale. Igitur  
excessus inter rectangulum bis sub  $A C$ ,  $B C$ , & rectan-  
gulum bis sub  $A D$ ,  $B D$ , Rationale spatium non est,  
Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum.  
Ergo ipsi  $A B$ , alia Rationalis non congruit, præter  
 $B C$ , quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apo-  
tomæ igitur una tantum congruit, &c. Quod erat ostend-  
endum.

80.  
75.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIAE Apotomæ primæ una tan-  
tum congruit recta linea Media, potentia  
solum commensurabilis existens toti, &  
cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotomæ prima  $A B$ , & ipsi congruat  $B C$ ,  
Media toti  $A C$ , potentia solum commensurabilis, & rectan-  
gulum sub  $A C$ ,  $B C$ , sit Rationale. Dico ipsi  $A B$ , aliam  
Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum com-  
mensurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Si enim fie-  
ri potest, congruat alia  $B D$ , Media toti  $A D$ , potentia tan-  
tum commensurabilis, sitq; rectangulum

$A \quad B \quad C \quad D$   
sub  $A D$ ,  $B D$ , Rationale. Et quia  $B C$ ,

24. *decimi*

Media est potentia solum ipsi  $A C$ , commensurabilis; erit  
&  $A C$ , Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo  
sunt  $A C$ ,  $B C$ , potentia tantum commensurabiles. Simili-  
ter &  $A D$ ,  $B D$ , Mediæ erunt potentia solum commensu-  
rabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum  
ex quadratis rectarum  $A C$ ,  $B C$ , & compositum ex qua-  
dratis rectarum  $A D$ ,  $B D$ , qui inter rectangulum bis sub  
 $A C$ ,  $B C$ , & rectangulum bis sub  $A D$ ,  $B D$ , ut in propo-  
s. precedenti ostensum est. Est autem excessus inter hæc re-  
ctangula, ex scholio propo- 27. huius lib. spatium Ratio-  
nale; quod utrunq; sit Rationale. (cum enim rectangulum  
sub

sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub A D, B D. Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ A C, B C, Mediæ sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Mediæ, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile est, atque addo & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoque Medium erit compositum ex quadratis rectarum A D, B D. Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Mediæ non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solum commensurabilis, continetque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

16. decimi.

27. decimi.

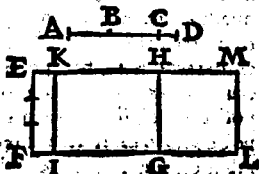
THEOR. 64. PROPOS. 82.

81.

76.

MEDIAE Apotomæ secundæ una tantum congruit recta linea Mediæ potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

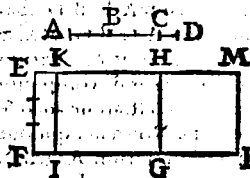
SIT Mediæ Apotomæ secundæ A B, cui congruat Mediæ B C, toti A C, potentia tantum commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliam Mediæ non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia B D, Mediæ toti A D,



M potentia

45. primi

potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub A D, B D, Medium. Exponatur Rationalis E F, ad quam applicetur rectangulum E G, æquale composito ex quadratis rectarum A C, B C; & ad eandem E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex A B. Et denique aliud E L, æquale composito ex quadratis rectarum A D, B D. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, una cum



7. secundi.

quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis continetur sub A C, B C. Eodemque modo erit K L, æquale ei, quod bis continetur sub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cum enim B C, Media ponatur, erit & A C, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est utrique eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Igitur & E G, quod illi composito æquale est, Medium est; quod cum applicetur ad Rationalem E F, erit E H, Rationalis ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium: quod cum applicetur ad Rationalem K I, erit K H, Rationalis ipsi K I, hoc est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommensurabiles sunt, estque ut A C, ad B C, ita quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, ut ostendimus lem. 3. ad propos. 9. huius lib. erit quadratum ex A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, rectangulum E G. (cum enim rectæ A C, B C, ponantur potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est utrique ipsorum, nempe quadrato ex A C.) & rectangulo sub A C, B C, commensurabile est eius duplum, uidelicet K G. Igitur & E G, ipsi K G, incomm.

24. decimi.

16. decimi.

23. decimi.

23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

incommensurabile est, ex his, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationē cū EG, KG, longitudine incommensurabiles sunt: Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensurabilis, si EH, erit EK, Apotome, & illi congruas KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ una tantum congruit rectæ lineæ Rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere, demonstratum est. Igitur Mediæ Apotomæ secundæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

10. decimi.

74. decimi.

80. decimi.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

82.

77.

MINORI una tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidē ex ipsarum quadratis Rationale; quod autē sub ipsis continetur, Medium:

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; & rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadem præstet. Si enim, si fieri potest, alia congruens BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidē ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulū sub AD, BD, Mediū. Quoniā igitur, ut in propos. 80. demonstratum est, idē excessus est inter compositū ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulū bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri;

M 2 quod



quod utrunque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter  
rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D,  
B D, spatium est Rationale: sed & non Rationale est. (Cū

A B C D

enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. eius duplum, nempe

rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. Quare unum non superabit alterum Rationale.) Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommensurabili, &c. Minori ergo una tantum congruit, &c.

Quod erat demonstrandum.

27. decimi.

83.  
78.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

E I, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota fatiens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

S I T recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum uero sub A C, B C, Rationale. Dico ipsi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Sic enim fieri potest, congruat ipsi alia recta B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium,

A B C D

rectangulum uero sub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur, ut in propos. 8e. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem

excessus

excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, ut in propo-  
s. 81. demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa com-  
posita, spatium Rationale est sed & non Rationale est, cum  
utrumque sit Medium. Medium enim Medium non superat  
Rationale. Quod est absurdum. Non ergo ipsi A B,  
alia recta, quam B C, congruet potentia tot incommen-  
surabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum  
facit, una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandū.

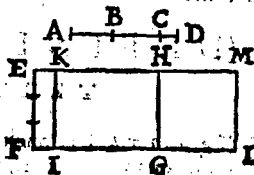
27. decimi.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

84.  
79.

EI, quæ cum Medio Medium totum  
facit, una tantum congruit recta linea po-  
tentia incommensurabilis existens toti, &  
cum tota faciens & compositum ex ipsarū  
quadratis Medium, & quod sub ipsis con-  
tinetur Medium, incommensurableq; cō-  
posito ex ipsarum quadratis.

S i t recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipsi  
uero congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis,  
faciensque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C,  
Medium, & rectangulum sub A C, B C, Medium, incom-  
mensurableque composito  
ex quadratis rectarum A C,  
B C. Dico ipsi A B, aliam  
non congruere, quæ eadē  
hæc faciat. Si enim fieri pō-  
test, congruat ipsi recta alia  
B D, toti A D, potentia incō-  
mensurabilis, ita ut & com-  
positum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium sit, & re-  
ctangulum sub A D, B D, Medium quoque, ac incommen-  
surabile composito ex quadratis rectarum A D, B D. Constru-  
ctis autem iisdem, quæ in propos. 81. quoniam compositū  
ex quadratis rectarum A C, B C, Medium est; crit etiam E G,

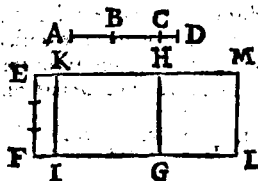


M s illi

23. decimi.

23. decimi.

illiquale, Medium. Recta igitur  $EH$ , Rationalis est, ipsi  $E-F$ , longitudine incommensurabilis. Rursum quia rectangulum sub  $AC$ ,  $BC$ , Medium est, erit & eius duplum  $KG$ , Medium.



Igitur & recta  $KH$ , Rationalis est, longitudine ipsi  $E-F$ , incommensurabilis. Et quoniam  $KG$ , commensurabile est, rectangulo sub  $AC$ ,  $BC$ , cum illud huius sit duplum; at rectangulum sub  $AC$ ,  $BC$ , incommensurabile ponitur composito ex quadratis re-

14. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

80. decimi.

ctarum  $AC$ ,  $BC$ ; erit quoque  $KG$ , eidem composito, hoc est, ipsi  $EG$ , incommensurabile; Ac propterea rectae  $EH$ ,  $KH$ , eandem habentes cum  $EG$ ,  $KG$ , rationem, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostense sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali  $EH$ , auferatur Rationalis  $KH$ , potentia solum commensurabilis ipsi  $EH$ ; erit  $E-K$ , Apotome, & ei congruens  $KH$ . Non aliter ostendimus  $E-K$ , esse Apotomen, & ei congruentem esse  $K-M$ . Non igitur Apotomae una tantum recta congruit, &c. Quod est absurdum. Unam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quae cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

## DEFINITIONES

### TERTIAE.

**E**XPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis,

I.

**S**I quidem tota exposita Rationali sit longi-

longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI uero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RURSUS si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ linear sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI uero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta,

SCHOLION.

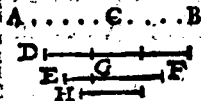
NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotome, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post deductionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, et ex definiti ionibus est perspicuum.

85.  
80.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus AC, non sit quadratus; ita ut AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, non: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui



longitudine commensurabilis sit EF. Erig; EF, cū commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde ut numerus AB, ad numerū AC, ita per coroll. propos. 6, huius lib. quadratum ex EF, ad

quadratum ex GF. Dico EG, esse primam Apotomen. Quoniam quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia uero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeris

6. decimi.

numeri; neque quadrata ex  $EF$ ,  $GF$ , proportionem habebunt, quam quadrati numeri. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ  $EF$ ,  $GF$ . Rationales ergo sunt  $EF$ ,  $GF$ , potentia tantum commensurabiles; atque idcirco reliqua  $EG$ , Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta  $EF$ , plus quam recta  $GF$ , quadrato rectæ  $H$ . Et quia est ut numerus  $AB$ , ad numerum  $AC$ , ita quadratum ex  $EF$ , ad quadratum ex  $GF$ ; erit per conuersionem rationis, ut  $AB$ , ad  $CB$ , ita quadratum ex  $EF$ , ad quadratum ex  $H$ . Habent autem  $AB$ ,  $CB$ , proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex  $EF$ , &  $H$ , proportionem habent, quam numeri quadrati; Ac propterea rectæ  $EF$ , &  $H$ , longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota  $EF$ , plus potest, quam congruens  $GF$ , quadrato rectæ  $H$ , sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem  $EF$ , expositæ Rationali  $D$ , commensurabilis longitudine; erit  $EG$ , ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

9. decimi.

74. decimi.

9. decimi.

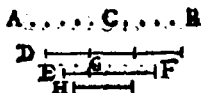
# PROBL. 20. PROPOS. 87.

86.

81.

## INVENIRE secundam Apotomen.

REPORTIS duobus numeris quadratis  $AB$ ,  $CB$ , ut in propos. præcedenti; expositaque Rationali  $D$ , sumatur ei longitudine commensurabilis  $GF$ ; eritque  $GF$ , Rationali  $D$ , commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus  $AC$ , ad numerum  $AB$ , ita quadratum ex  $GF$ , ad quadratum ex  $EF$ , per coroll. propos. 6. huius libri. Dico  $EG$  esse secundam Apotomen. Quoniam quadrata ex  $GF$ ,  $EF$ , proportionem habentia, quam numeri  $AC$ ,  $AB$ , commensurabilia sunt; Erunt & rectæ  $GF$ ,  $EF$ , commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo  $GF$ , sit ostensa Rationalis; erit quoque  $EF$ , Rationalis. Quia uero numeri  $AC$ ,  $AB$ , atque adeo & quadrata ex  $GF$ ,  $EF$ , proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt  $GF$ ,  $EF$ , longitudine incommensurabiles.



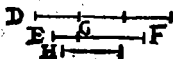
6. decimi.

9. decimi.

les.

74. *decimi.* les. Rationales ergo sunt  $GF$ ,  $EF$ , potentia solum commensurabiles; Ideoque  $EG$ , reliqua, Apotome est. Dico

$A \dots C \dots B$



& secundam esse. Possit enim recta  $EF$ , plus quam  $GF$ , quadrato ex  $H$ . Quoniam ergo est ut  $AC$ , ad  $AB$ , ita quadratum ex  $GF$ , ad quadratum ex  $EF$ ; & conuertendo, ut  $AB$ , ad  $AC$ , ita quadratum ex  $EF$ , ad quadratum

ex  $GF$ : Ostendemus iam, ut in antecedenti propos. rectam  $H$ , ipsi  $EF$ , longitudine esse commensurabilem.

Quam ob rem cum tota  $EF$ , plus possit, quam congruens  $GF$ , quadrato rectæ  $H$ , sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens  $GF$ , expositæ Rationali  $D$ , longitudine commensurabilis; erit  $EG$ , ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

87.  
82.

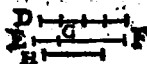
## PROBL. 21. PROPOS. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis  $AB$ ,  $CB$ , ut in propos. 86. sumatur alius numerus  $I$ , ut in propos. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum  $AB$ ,  $AC$ , proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali  $D$ , fiat ut  $I$ , ad  $AB$ , ita quadratum ex  $D$ , ad quadratum

$A \dots C \dots B$

$I \dots$



ex  $EF$ , per coroll. propos. 6. huius lib. Eruntque quadrata ex  $D$ , &  $EF$ , proportionem habentia, quam numeri  $I$ , &  $AB$ , commensurabilia; atque adeo & rectæ  $D$ , &  $EF$ , commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo  $D$ , Rationali, erit &  $EF$ , Rationalis. Et quia numeri  $I$ , &  $AB$ , ac propterea qua-

6. *decimi.*

&  $EF$ , proportionem habentia, quam numeri  $I$ , &  $AB$ , commensurabilia; atque adeo & rectæ  $D$ , &  $EF$ , commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo  $D$ , Rationali, erit &  $EF$ , Rationalis. Et quia numeri  $I$ , &  $AB$ , ac propterea qua-

qua-

quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat ut AB, ad A C, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario propos. 6. huius libri. Dico EG, esse tertiam Apotomen. Quoniam quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cum illi hæc sit commensurabilis, ut demonstrauimus. Et quia AB, AC, atque adeo & quadrata ex EF, GF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt rectæ EF, GF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia solum commensurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi solum commensurabilis; reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam est ut I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo ut I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF. Non habent autem numeri I, & AC, proportionem quam numeri quadrati; Neque igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & D, EF, longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H: Ostendemusque, ut in propos. 86. rectam H, esse ipsi EF, longitudine commensurabilem. Quapropter cum tota EF, plus possit quam congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ; erit ex defin.

EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen Quod faciendum erat.

PROBL.

9. decimi.

6. decimi.

9. decimi.

74. decimi.

9. decimi.



88.

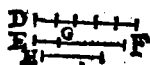
PROBL. 22. PROPOS. 89.

83.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita ut A B, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit EF, eritque propterea & EF, Rationalis Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendimus, ut ibi, E G, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit n. EF, plus quam G F, quadrato rectæ H, Et quia est ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conversionem rationis, ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum ergo A B, & C B, proportionem non habeant, quam numeri quadrati, erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota E F, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

A . . . . . C . . . B



9. decimi.

89.

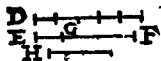
THEOR. 23. PROPOS. 90.

84.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ut in propos. precedenti, fiat constructio, ut in propos. 87. hoc est, sumatur G F, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendimus ergo ut in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & secundam esse. Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, ut in propos. 86. ostendimus

A . . . . . C . . . B



quadrato rectæ H. Et quia similiter, ut in propos. 86. ostendimus

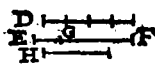
demus, per conversionem rationis, esse ut  $AB$ , ad  $CB$ , ita quadratum ex  $EF$ , ad quadratum ex  $H$ ; erunt rursus, ut in propos. antecedenti, rectæ  $EF$ , &  $H$ , longitudine incommensurabiles. Quia ergo tota  $EF$ , plus potest, quam congruens  $GF$ , quadrato rectæ  $H$ , sibi longitudine incommensurabilis; estque congruens  $GF$ , Rationali  $D$ , commensurabilis longitudine; erit ex defin.  $E$ ,  $G$ , quinta Apotome. Invenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

90.

85.

**REPERTIS** tribus numeris  $A$ ,  $C$ ,  $B$ , &  $I$ , ut in propos. 84. ita ut  $AB$ , ad neutrum ipsorum  $A$ ,  $C$ ,  $B$ ; &  $I$ , ad neutrum ipsorum  $A$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $C$ , proportionem habeat, quam quadratas ad quadratum: exponatur Rationalis  $D$ , & reliqua fiant,  $A \dots C \dots B$   
 $I \dots$   


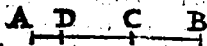
ut in propos. 88. Ostendimus ergo similiter, ut ibi,  $D$ , &  $EF$ , longitudine incommensurabiles esse; &  $EG$ , Apotomen esse: Dico & sextam esse. Nam ut in propos. 88. erunt  $D$ , &  $GF$ , longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeo neutra ipsarum  $EF$ ,  $GF$ , longitudine commensurabilis est expositæ Rationali  $D$ . Possit iam  $EF$ , plus quam  $GF$ , quadrato rectæ  $H$ , quam ostendimus, ut in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi  $EF$ . Igitur cum tota  $EF$ , plus possit, quam congruens  $GF$ , quadrato rectæ  $H$ , sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum  $EF$ ,  $GF$ , longitudine sit commensurabilis Rationali  $D$ , erit ex defin.  $E$ ,  $G$ , sexta Apotome. Invenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHOLION

*Si D & expeditius sex dictas Apotomas invenimus hac ratione, ut Theon daces hoc loco.*

49. decimi.

SIT inveniendae exempli gratia, prima Apotome. Reperiatur prius ex binis nominibus prima  $AB$ , cuius maius nomen  $AC$ , & minus  $CB$ . Abscissa igitur ex  $AC$ , recta  $CD$ , quae qualis sit ipsi  $CB$ . Dico  $AD$ , esse primam Apotomen. Quoniam  $AC, CB$ , Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erunt etiam  $AC, DC$ ; Rationales potentia tantum commensurabiles. Est ergo  $AD$ , Apotoma. Es



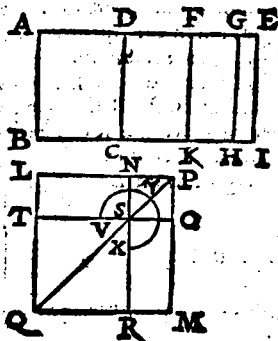
74. decimi.

quia  $AC$ , plus potest, quam  $CB$ , hoc est, quam  $DC$ , quadrato recta linea sibi longitudine commensurabilis; & est  $AC$ , Rationali exposita longitudine commensurabilis, ex definitione eius, quae ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotoma prima,  $AD$ , prima Apotome. Eadem ratione ex ceteris, quae ex binis nominibus dicuntur, & aliae Apotomae inveniuntur, ut ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.

91.  
86.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.



CONTINEATUR spatium  $AC$ , sub Rationali  $AB$ , & Apotoma prima  $AD$ . Dico rectam lineam, quae potest spatium  $AC$ , Apotomen esse. Sit ipsi  $AD$ , congruens  $DB$ . Erunt igitur  $AE, DE$ , ex definitione Apotomae primae, Rationales potentia solum commensurabiles; & tota  $AE$ , longitudine commensurabilis Rationali  $AB$ ; & denique eadem  $AE$ , tota plus poterit, quam

quam congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine com-  
mensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE,  
hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, re-  
ctangulum æquale sub AG, GE, deficiens figura quadra-  
ta, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia AE, plus  
potest, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine com-  
mensurabilis; erunt rectæ AG, GE, longitudine com-  
mensurabiles; Ac propterea & utraque toti AE, longitudine  
commensurabilis erit. Est autem AE, Rationali AB,  
longitudine commensurabilis. Igitur & utraque AG, GE,  
ipsi AB, longitudine est commensurabilis; atque ex defini-  
tione 6. Rationalis. Quare ductis GH, FI, ipsi AB, paralle-  
lis, quæ ipsi BC, productæ occurrant in H, I; erit utrumque  
rectangulum AH, GI, contentum sub duabus Rationalibus  
longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia  
utraque DF, FE, longitudine commensurabilis est ipsi DE;  
& DE, longitudine incommensurabilis est Rationali AB;  
(Nam si commensurabilis esset longitudine, cum & AE, sit  
eidem AB, longitudine commensurabilis; essent AE, DE, longi-  
tudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum: po-  
nuntur enim solum potentia commensurabiles;) erit etiam utraque  
ipsarum DF, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quo-  
niā utraq; DF, FE, Rationali DE, commensurabilis, Rationa-  
lis est; Erunt propterea tam AB, DF, quā AB, FE, Rationa-  
les potentia tantum commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB,  
parallela, erit utrumque rectangulum DK, FI, contentum sub Ra-  
tionalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

Iam uero ipsi AH, fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI,  
æquale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, an-  
gulum LPM. Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem  
diametrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem figura, ut uides.  
Quoniā igitur rectangulum sub AG, GE, per constructionem,  
æquale est quadrato ex FE; erunt tres rectæ AG, FE, GE,  
proportionales; Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipsis  
habeant rationem; erit FI, medium proportionale inter AH,  
GI, hoc est, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem  
inter eadem LM, NO, per lemma propos. 4. huius lib. me-  
dium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO,  
æqualia sunt: Sed ipsi FI, æquale est DK; & ipsi LO,  
æquale

18. decimi.

16. decimi.

12. decimi.

10. decimi.

12. decimi.

4. decimi.

22. decimi.

14. secundi.

16. sexti.

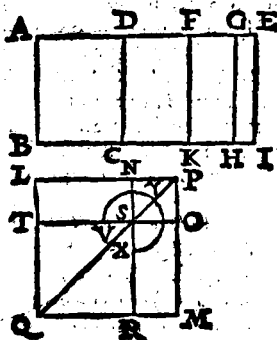
17. sexti.

1. sexti.

16. primi

æquale est  $M N$ . Est ergo totum  $D I$ , toti gnomini  $V Y X$ , cum quadrato  $N O$ , æquale. Est autem & totum  $A I$ , per constructionem, æquale quadratis  $L M$ ,  $N O$ . Igitur & reliquum  $A C$ , reliquo quadrato  $T R$ , est æquale; Ac propterea recta  $T S$ , potest spatium  $A C$ . Dico  $T S$ , Apotome esse.

QUONIAM spatia  $A H$ ,  $G I$ , ostensa sunt Rationalia; & eis æqualia sunt  $L M$ ,



$N O$ ; erunt quoque quadrata  $L M$ ,  $N O$ , Rationalia; atque adeo & rectæ  $T O$ ,  $S O$ , Rationales. Rursus quia  $F I$ , Medium est ostensum; erit &  $L O$ , illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt  $L O$ , &  $N O$ , cum unum sit Irrationale, alterum uero Rationale. Igitur rectæ  $T O$ ,  $S O$ , eandem rationem habentes cum  $L O$ ,  $N O$ , longitudine incommensurabiles sunt; Ac idcirco reliqua

7. sexsi.  
10. decimi.

74. decimi  $T S$ , Apotome est. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

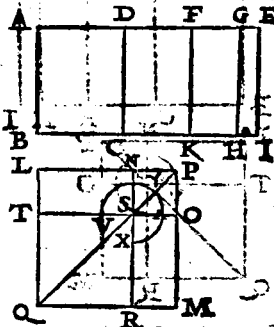
92.  
87.

# THEOR. 69. PROPOS. 93.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CONTINEATUR spatium  $A C$ , sub Rationali  $A B$ , & Apotoma secunda  $A D$ . Dico rectam, quæ spatium  $A C$ , potest, Mediæ Apotomen esse primam. Sit ipsi  $A D$ , congruens recta  $D E$ . Erunt ergo  $A E$ ,  $D E$ , ex definitione Apotomæ secundæ, Rationales potentia tantum commensurabiles, & congruens  $D E$ , longitudine commensurabilis Rationali

tionali A B; Et denique A E, plus poterit, quam D E, qua-  
 drato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur D E,  
 bifariam in F, & reliqua omnia construuntur, ut in propo-  
 sitione precedenti. Bruntq; rursus, ut in antecedenti pro-  
 positione, A G, G E, longitudine commensurabiles; A c  
 propterea & utraq; toti A E, longitudine commensurabi-  
 lis. Est autem A E, Rationa-  
 li A B, longitudine incommensurabilis: (Si enim com-  
 mensurabilis esset, ipsi A B, longitudine, cum D E, e-  
 dem A B, ponatur longi-  
 tudine commensurabilis, esset A E, D E, inter se quoque  
 commensurabiles longitu-  
 dine. Quod est absurdum: po-  
 nuntur enim potentia tantum  
 commensurabiles.) Igitur &  
 utæque ipsarum A G, G E, longitudine incommensurabi-  
 lis est eidem A B. Est autem utraq; A G, G E, Rationali  
 A E, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt  
 tam A B, A G, quam A B, G E, potentia solum commen-  
 surabiles; Atq; idcirco rectangulum utrumq; A H, G I, cō-  
 tentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabi-  
 libus; Medium est. Rursus quia utraq; D F, F E, ipsi D E,  
 longitudine commensurabilis est; & ponitur D E, Ratio-  
 nali A B, longitudine commensurabilis; erit quoque, ut in  
 scholio propof. 12. huius lib. ostendimus, eidem A B, Ra-  
 tionali longitudine commensurabilis utraq; D F, F E, atq;  
 adeo & Rationalis. Vtrunq; ergo rectangulum D E, F I  
 contentum sub Rationalibus longitudine commensurabi-  
 bus, Rationale est. Iam vero ut in precedenti propof. de-  
 monstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S,  
 Medie Apotomen esse primam.



18. decimi.

16. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

20. decimi.

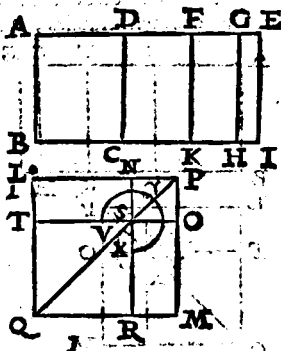
10. decimi.

Q U O N I A M A G, G E, longitudine sunt commen-  
 surabiles, erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia ra-  
 tionem, commensurabiles; atque adeo & L M, N O, qua-  
 drata illis æqualia, commensurabiles erunt. Igitur & latera

N

ra co-

racorum, nempe rectæ  $TO$ ,  $SO$ , saltem potentia erunt  
commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata  
 $LM$ ,  $NO$ , Medijs  $AH$ ,  $GI$ , æqualia, (ostensa enim sunt



10. decimi.

75. decimi.

$AH$ ,  $GI$ , Mediæ esse.) Me  
diæ sint. Et quoniam  $FI$ ,  
atque adeo sibi æquale  $LO$ ,  
Rationale est, proptereaque  
Medio  $NO$ , incommensu  
rabile; erunt rectæ  $TO$ ,  
 $SO$ , eandem cum illis ratio  
nem habentes, longitudine  
incommensurabiles. Cum  
ergo & Mediæ sint ostensæ,  
& commensurabiles; erunt  
 $TO$ ,  $SO$ , Mediæ potentia  
tantum commensurabiles.  
Cum ergo contineant  $LO$ ,  
quod Rationale est osten

sum; erit  $TS$ , Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium con  
tineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod  
demonstrandum erat.

93.  
88.

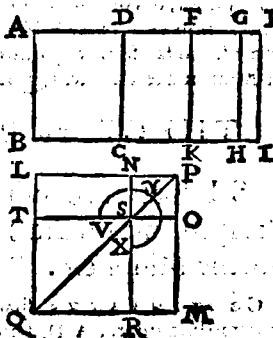
THEOR. 70. PROPOS. 94.

SI spatium contineatur sub Rationali,  
& Apotoma tertia; Recta linea spatium po  
tens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATUR spatium  $AC$ , sub Rationali  
 $AB$ , & Apotoma tertia  $AD$ . Dico rectam, quæ spatium  
 $AC$ , potest esse Mediæ Apotomen secundam. Sit ipsi  $AD$ ,  
congruens  $DE$ . Erunt ergo, ex definitione Apotomæ ter  
tiæ,  $AE$ ,  $DE$ , Rationales potentia tantum commensura  
biles, & neutra ipsarum  $AB$ ,  $DE$ , longitudine commensu  
rabilis Rationali  $AB$ ; Et denique  $AE$ , plus poterit, quam  
 $DE$ , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Se  
cetur  $DE$ , bifariam in  $F$ , & cætera fiant, ut in propo. 92.  
eruatq; rursus, ut ibi  $AG$ ,  $GE$ , longitudine inter se com  
menfu

mensurabiles; At propterea & utraq; toti A E, longitudi-  
ne commensurabilis erit. Est autem A E, posita incommen-  
surabilis longitudine Rationali A B. Igitur & utraque A G,  
G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cum  
ergo utraque A G, G E, Ra-  
tionali A E, commensurabi-  
lis, Rationalis sit; erunt tā  
A B, A G, quam A B, G E,  
Rationales potentia solum  
commensurabiles; Ac pro-  
pterea utrumque rectangu-  
lum A H, G I, Medium erit.  
Rursus quia D E, longitu-  
dine ponitur incommen-  
surabilis Rationali A B; erit  
quoque utraque D F, F E,  
ipsi D E, longitudine com-  
mensurabilis existens, eidē  
A B, longitudine incommensurabilis. Cum ergo utraque  
D F, F E, Rationali D E, commensurabilis, sit Rationa-  
lis; erunt tam A B, D F, quam A B, F E, Rationales poten-  
tia tantum commensurabiles; atq; propterea utrumq; rectan-  
gulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonstrabi-  
mus, ut in propof. 92. rectam T S, posse spatium A C. Di-  
co T S, esse Mediæ Apotomen secundam.

Quoniam A H, G I, Media sunt ostensa, erunt &  
quadrata L M, N O, illis æqualia, Media; Ac propterea &  
rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem haben-  
tia rationem, quam A G, G E, quas ostendimus commen-  
surabiles esse, commensurabilia sunt; Erunt & quadrata  
L M, N O, commensurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, cō-  
mensurabiles, saltem potentia. At uero quia A E, D E, po-  
tentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine in-  
commensurabiles, estq; ipsi A E, longitudine ostensa com-  
mēsurabilis G E, ipsi uero D E, cōmensurabilis est longitudi-  
ne F E, erūt ex scholio propof. 14. huius lib. & G E, F E, longi-  
tudine incōmensurabiles; ac propterea G I, F I, eandem rationē  
habentia, quam G E, F E, hoc est, illis æqualia N O, L O, incō-  
mensurabilia. Quare T O, S O, eandē rationem habentes



16. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

10. decimi.

10. decimi.



quam L O, N O, longitudine incommensurabiles. sunt. Oſtenſæ ſunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo ſunt T O, S O, potentia ſolum commensurabiles. Et quoniam continent L O Medium; (cum enim L O, æquale ſit ipſi F I, ut conſtat ex propoſ. 92. quod Medium eſſe oſtendimus, erit & L O, Medium.) erit T S, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

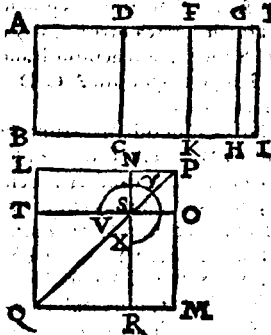
76. decimi.

94.  
89.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta; Recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONFIRMATUR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Minorẽ eſſe. Sit ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Rationales potentia ſolum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & A E, longitudine cõmmensurabilis. Rationali A B, & eadem A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, biſariam in F, & reliqua omnia fiant, ut prius. Erunt ergo A G, G E, incommensurabiles longitudine, quandoquidem A E, plus poteſt, quàm D E, quadrato rectæ ſibi longitudine in-



89. decimi.

commensurabilis; & ad A E, applicatum eſt rectangulum ſub A G, G E, æquale quartæ parti quadrati ex D E, deficientisq; figura quadrata. Et quia A E, Rationalis eſt, & Rationali A B, longitudine cõmmensurabilis; erit rectangulũ A I, Rationale. Rurſus quia D E, Rationalis eſt, & Ratio-  
nali

80. decimi.

nali A B, longitudine incommensurabilis; erit D I, atque adeo & eius dimidium F I, Medium. Amplius cum A G, G E, sint longitudine incommensurabiles; incommensurabilia erunt A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia Iam uero similiter demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse Minorem.

22. decimi.

10. decimi.

Q V O N I A M ex constructione, rectangulo A I, æquale est compositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum T O, S O, Rationale. Item quia F I, Medium est ostensum; erit & L O, contentum sub T O, S O, illi æquale, Medium. Denique quoniam A H, G I, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, incommensurabilia; Atque adeo rectæ T O, S O potentia incommensurabiles. Quæ propter eam T O, S O, potentia sint incommensurabiles, sitque compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum uero sub ipsis, Medium; erit reliqua T S, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

77. decimi.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

95.

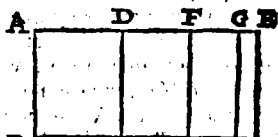
90.

S I spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

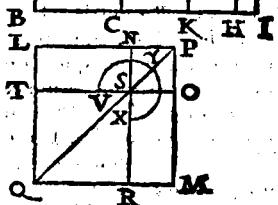
C O N T I N E A T U R spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma quinta A D. Dico rectam lineam quæ spatium A C, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, A E, D E, Rationales potentia tantum commensurabiles, & D E, Rationali A B, commensurabilia longitudine; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua con-

struantur, ut prius. Erunt ergo rursus, ut in antecedenti propof. A G, G E, longitudine incommensurabiles. Et quia A E, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali A B, ut in propof. 95. diximus; erit rectangu-

22. decimi.



20. decimi.



lum A I, Medium. Item quia D E, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit D I, atque ideo & eius dimidiū F I, Rationale. Rursus erunt, ut in precedenti propof. A H, G I, incommensurabilia; poteritque ut ostensum est in propof. 92. recta T S, spatium A C. Dico T S, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

Quoniam ostensum est A I, Medium esse; erit & compositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia demonstravimus F I, Rationale esse; erit & L O, rectangulum sub T O, S O, contentum, cum illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & T O, S O, potentia incommensurabiles, ut in propof. antecedenti est demonstratum. Igitur cum T O, S O, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum vero sub ipsis, Rationale; erit reliqua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

78. decimi.

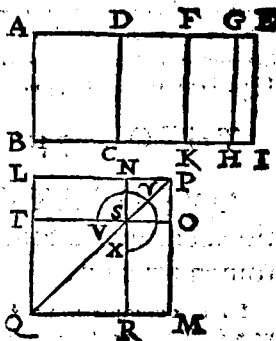
96.  
91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CON

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum incommensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construatur, ut supra. Erunt ergo rursus ut in propos. 95. AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque ut in propos. 95. AH, GI, incommensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles; Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commensurabilia sint, erit FI, ipsi AI, incommensurabile. Iam uero demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.



Quo niam AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumque sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incommensurabile, ut ostendimus; erit quoque LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum TO, SO; propterea quod LO, ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, sit æquale. Denique TO, SO, potentia incommensur-

22. decimi.

10. decimi.

14. decimi.

incommensurabiles sunt, ut in propof. 95. est demonstratum. Quamobrem cunctis  $TO$ ,  $SO$ , sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile; erit reliqua  $TS$ , ea, quae cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quid erat ostendendum.

79. decimi.

97.

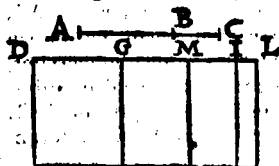
92.

THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomae ad Rationalem applicatum, latitudinē facit Apotomen primam.

Si  $r$ . Apotome prima  $AB$ , & ipsi congruens  $BC$ , ita ut  $AC$ ,  $BC$ , sint Rationales potentia solum commensurabiles: & ad Rationalem  $DE$ , applicetur rectangulum  $DF$ , aequale quadrato ex  $AB$ , latitudinem faciens  $DG$ . Dico  $DG$ , esse Apotomen primam. Adeandem  $DE$ , applicetur rectangulum  $DH$ , aequale quadrato ex  $AC$ ; & ad  $IH$ ,

45. primi.



7. secundi.

aliud  $IK$ , aequale quadrato ex  $BC$ , ita ut totum  $DK$ , aequale sit composito ex quadratis rectarum  $AC$ ,  $BC$ . Et quoniam compositum ex quadratis rectarum  $AC$ ,  $BC$ , aequale est rectangulo bis sub  $AC$ ,  $BC$ , una cum quadrato ex  $AB$ ; si auferatur quadratum ex  $AB$ , & rectangulum  $DF$ ; relinquetur  $GK$ , rectangulo bis sub  $AC$ ,  $BC$ , aequale; & quae adeo d. iussa  $GL$ , bifariam in  $M$ , ductaq;  $MN$ , ipsi  $DE$ , parallela, erit  $MK$ , aequale rectangulo sub  $AC$ ,  $BC$ . Et quoniam  $AC$ ,  $BC$ , Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex  $AC$ ,  $BC$ , Rationalia; ideoq; commensurabilia. Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum  $AC$ ,  $BC$ , utrique ipsorum sit commensurabile; cum & illud compositum, hoc est, illud aequale  $DK$ ,

6. decimi.

Ratio-

Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Rursus quia A C, B C, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atq; adeo & eius duplum G K, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem G F, erit G L, Rationalis ipsi G F, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; erunt rectæ D L, G L, tandem habentes proportionem, quam D K, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt D L, G L, Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam esse.

21. decimi.

23. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

Quoniam per lemma propos. 3. huius lib. rectangulum sub A C, B C, hoc est, M K, medium est proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc est, inter D H, I K; erunt D H, M K, I K, continue proportionalia; atq; adeo & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex M L, hoc est, quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc est, illis æqualia, D H, I K, commensurabilia sunt; erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficientq; figura quadrata; atq; sit ostensa D I, ipsi I L, longitudine commensurabilis; poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensam D G, esse Apotomen, & totam D L, plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atq; eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

17. sexti.

10. decimi.

18. decimi.

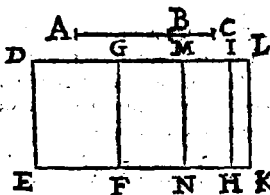
98.

93.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT Mediæ Apotome prima  $AB$ , & ipsi congruens  $BC$ , ita ut  $AC$ ,  $BC$ , sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantq; Rationale: Et ad Rationalem  $DE$ , quadrato ex  $A B$ , æquale applicetur rectangulum  $DF$ , latitudinem faciens  $DG$ . Dico  $DG$ , Apotomen secundam esse. Construatur eadem, quæ in antecedenti propos. ita



ut rursus  $DH$ ,  $IK$ , æqualia sint quadratis ex  $AC$ ,  $BC$ , &  $GK$ , æquale ei, quod sub  $AC$ ,  $BC$ , bis continetur; ac proinde  $MK$ , ei, quod sub  $AC$ ,  $BC$ , continetur semel. Quoniam igitur  $AC$ ,  $BC$ , Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum

quadrata, hoc est, illis æqualia,  $DH$ ,  $IK$ , Mediæ, & commensurabilia; ac proinde & totum  $DK$ , utrique illorum commensurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lit. Cum ergo  $DK$ , applicetur ad Rationalem  $DE$ , erit  $DL$ , Rationalis ipsi  $DE$ , longitudine incommensurabilis. Rursum quia rectangulum sub  $AC$ ,  $BC$ , Rationale ponitur, erit quoque eius duplum  $GK$ , Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem  $DE$ , erit  $GL$ , Rationalis longitudine commensurabilis ipsi  $DE$ . Quia uero  $DK$ , Medium, id est, Irrationale; &  $GK$ , Rationale, incommensurabilia sunt; erunt rectæ  $DL$ ,  $GL$ , eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostense, erunt  $DL$ ,  $GL$ , Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua  $DG$ , Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, ut in præcedenti propos. demonstrabimus totam  $DL$ , plus posse, quam congruentem  $GL$ , quadrato rectæ sibi longitudine

45. primi.

16. decimi.

23. decimi.

21. decimi.

10. decimi.

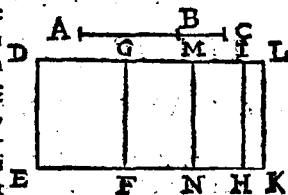
74. decimi.

tudine commensurabilis. Quare cum congruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defn. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Medie Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Medie Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Medie Apotome secunda AB, & ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, sint Medie potentiâ tantum commensurabiles, contineantq; Medium: Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apotomen. Eadem enim hant, quæ supra. Ostendemus iam, ut in propos. præcedenti, DK, Medium esse, atque adeo rectam DL, Rationalem ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub AC, BC, Medium est, atque ob id, & eius duplum GK; erit quoque GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine sunt incommensurabiles, estq; ut AC, ad BC, ita per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, quod quadrata ex AC, BC, ex rectis AC, BC, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sunt; rectangulo vero sub AC, BC, commensurabile est rectangulum bis sub



99.

94.

45. primi.

23. decimi.

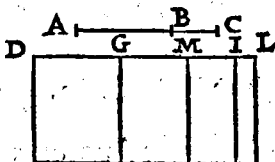
23. decimi.

10. decimi.

26. decimi.



sub A C, B C. Igitur ex scholio, propof. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectorum A C, B C, hoc est, D K, incommensurable est rectangulo bis sub A C, B C, hoc est, ipsi G K; Atq; adeo rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensa & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles; Ac proinde reliqua D G, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, ut in propof. 98. demonstrabimus D L, totam plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum D L, G L, Rationali D E, longitudine sit commensurabilis, ut demonstratum est; erit ex defin. D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.



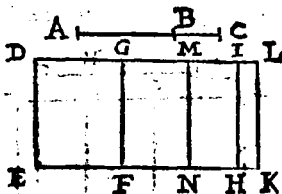
E F N H K

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT Minor A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C, potentia incommensurabiles sint, facientesq; compositum quidem ex quadratis rectorum A C, B C, Rationale; rectangulum vero sub A C, B C, Medium: Et ad Rationalem D E, applicetur spatium D F, quadrato ex A B, æquale, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, ut in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectorum A C, B C, hoc est, ipsi æquale D K, Rationale est; erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est; erit G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis.

bilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium, incommensurabilia sunt; erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, ut in propo. 98. est demonstratum; poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiens figurâ quadratâ, diuidensq; maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit, quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitq; eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensâ commensurabilis; Erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 78. PROPOS. 102.

QUADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi

10. decimi.

74. decimi.

10. decimi

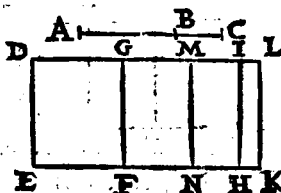
19. decimi.

101.

96.

45. primi.

& ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum uero sub ipse AC, BC, Rationale: Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintā esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atq; adeo & illi æquale DK, Medium est; erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atq; adeo & eius duplum GK, Rationale est; erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabiles sunt; erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, ut in antecedenti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.



23. decimi.

21. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

102.

97.

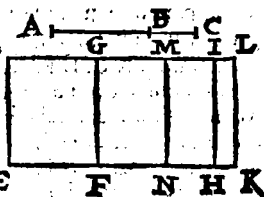
### THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens BC, ita ut A C, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum sub ipse A C, BC, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato ex A B, spatium

45. primi

æquale D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem D enim fiunt, quæ supra. Quoniam tam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, quæ rectangulum sub A C, B C; atq; adeo & eius duplū GK,



Medium est; Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub A C, B C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, B C; Et sunt rectangulum sub A C, B C, & eius duplū G K, commensurabilia; Erit & G K, eidem composito, hoc est, ipsi D K, incommensurabile; proptereaq; rectæ D L, G L, eandē habentes rationē, quā D K, G K, longitudine incommensurabiles. Ostensę sunt autē & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solū commensurabiles; Atq; idcirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextā. Ostēdimus, n. similiter ut in propos. 103. totam D L, plus posse, quā congruentē G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cū igitur neutra ipsarum D L, G L, commensurabilis sit longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

23. decimi.

14. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

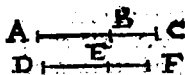
# THEOR. 80. PROPOS. 104.

103.

98.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

Si r Apotome A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C sint Rationales potentia solum, commensurabiles. Sit autem ipsi A B, longitudine commensurabilis D E. Dico &



D E, Apotomen esse, atque ordine eadem ipsi A B. Fiat ut A B, ad D E, ita B C, ad E F. Erunt ergo tota A C, ad

12. sexi.

12. quinti.

10. decimi.

74. decimi.

13. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

15. decimi.

totam D F, ut A B, ad D E, uel ut B C, ad E F. Quoniam igitur A B, D E, longitudine ponuntur commensurabiles, Erunt quoq; A C, D F, necnon & B C, E F, commensurabiles longitudine, & quia A C, B C, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles D F, E F, Rationales. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F: & sunt A C, B C, potentia solum commensurabiles; erunt quoq; ex ijs, quæ ad propos. 10. huius lib. demonstrauiunt, D F, E F, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensa, reliqua D E, Apotome est. Dico & ipsi A B, ordine eadem esse. Possit enim primum A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur A C, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, ut A B, sit Apotome prima; erit quoque D F, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam D F, eidem A C, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoq; D E, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi A B. Si uero B C, sit longitudine commensurabilis Rationali; erit eodem modo E F, Rationali longitudine commensurabilis; Atq; adeo utraque A B, D E, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum A C, B C, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; erit quoque neutra ipsarum D F, E F, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare utraque A B, D E, ex defin. erit Apotome tertia.

P o s s i t i a m A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, esse Apotomen

lomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

## S C H O L I O N.

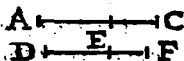
I D E M hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Primum, si recta D E, commensurabilis sit ipsi A B, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: utamur voce: potentia tantum commensurabilis:) & D E, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eadem ipsi A B. Non enim sequitur, si tota A C, longitudine sit commensurabilis Rationali exposita, & D F, eidem esse commensurabilem longitudine; propterea quod non utraque, nempe Rationalis exposita, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero D F, potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si A B, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, ut D E, illi potentia tantum commensurabilis sit, Apotome eadem ordine.

S I T enim A B, prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eique congruens B C; & sit D E, ipsi A B, potentia tantum commensurabilis, quam quidem, ut in theoremate, ostendimus Apotomen esse, eique congruentem E F; & paries A B, B C, ad partes D E, E F, eandem proportionem habere cum totis A C, D F. Dico, nulla ratione D E, Apotomen esse ordine eandem ipsi A B. Nam si fieri potest, sit utraque Apotome prima. Quo posito, erit tam A C, tota, q̄ tota D F, ex definitione Apotome prima, Rationali exposita commensurabilis longitudine; atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt A C, et D F. Quare cum sit ut A C, ad D F, ita A B, ad D E; erunt quoque A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim D E, ipsi A B, potentia solum commensurabilis. Non ergo utraque A B, D E, Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim utraque congruens B C, E F, ex defn. longitudine commensurabilis Rationali exposita, atque adeo & ipse inter se, Quocirca & A B, D E, inter se longitudine forent commensurabiles. Quod non ponitur.

12. decimi.

10. decimi.

**S** E M P E R tamen verum est, si  $AB$ , est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam  $DE$ , quæ ipsi  $AB$ , potentia solû est commensurabilis, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc pos-



to, poteris  $AC$ , plus quam  $BC$ , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit

15. decimi.

ut  $AC$ , ad  $BC$ , ita  $DF$ , ad  $EF$ ; poterit quoque  $DF$ , plus quàm  $EF$ , quadrato rectæ sibi longitudine sibi commensurabilis. Quare ex defin. erit  $DE$ , Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si  $AB$ , est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut  $AC$ , plus possit, quàm  $BC$ , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; Erit quoque  $DE$ , Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quamvis ordine non eadem ipsi  $AB$ : quia rursus, cum sit ut  $AC$ , ad  $BC$ , ita  $DF$ , ad  $EF$ , poterit quoque  $DF$ , plus quam  $EF$ , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit  $AB$ , Apotome quarta, vel quinta, vel sexta.

15. decimi.

**I** N sequentiibus autem quinque propositionibus necessario erit  $DE$ , eadem ordine ipsi  $AB$ , licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

104.

99.

## THEOR. 81. PROPOS. 105.

**R** E C T A lineæ Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

**S** I t Mediæ Apotome quæcunque  $AB$ , eique congruës  $BC$ , ita ut  $AC$ ,  $BC$ , sint Mediæ potentia solum commensurabiles: Sit autem ipsi  $AB$ , commensurabilis  $DE$ , siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico &  $DE$ , Apotomen esse, & ipsi  $AB$ , ordine eandem. Fiat ut  $AB$ , ad  $DE$ , ita  $BC$ , ad  $EF$ . Erit ergo tota  $AC$ , ad totam  $DF$ , ut  $AB$ , ad  $DE$ , & ut  $BC$ , ad  $EF$ . Quoniam igitur  $A$ ,  $B$ ,  $DE$ , commensurabiles ponuntur uel longitudine & potentia, uel potentia tantum; erunt quoque  $BC$ ,  $EF$ , &  $AC$ ,  $DF$ , eodem modo commensurabiles. Et quia  $AC$ ,  $BC$ , Mediæ sunt, erunt quoque

12. sexti.

12. quinti

10. decimi.

quoque DE, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus 24. *decimi.*  
quia est ut AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando ut

AC, ad BC, ita DF, ad EF:

Sunt autem AC, BC, potentia  
solum commensurabiles, erunt  
etiam, ex scholio propos. 10.



huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Qua-  
re cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ; erit reliqua DE, Mediæ 75. *vel 76.*  
Aporome. Dico, & eandem esse ordinem ipsi AB. Quoniam est  
ut AC, ad BC, ita DF, ad EF; & ut AC, ad BC, ita est qua-  
dratū ex AC, ad rectangulū sub AC, BC, ex lemmate 3. pro-  
pos. 19 huius lib. & ut DF, ad EF, ita quadratū ex DF, ad re-  
ctangulū sub DF, EF; Erit quoque ut quadratū ex AC, ad re-  
ctangulū sub AC, BC, ita quadratū ex DF, ad rectangulū sub  
DF, EF; Et permutando ut quadratum ex AC, ad quadra-  
tum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum  
sub DF, EF. Ignitur cum quadratū ex AC, commensurabile  
sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint com-  
mensurabiles; erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo  
sub DF, EF, commensurabile. Quare si rectangulū sub AC,  
BC, sit Rationale, ita ut AB, sit Mediæ Apotome prima; Erit  
etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit com-  
mensurabile; atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima  
erit. Si uero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita ut  
AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoque rectangulū  
sub DF, EF, ei commensurabile, Medium, ex coroll. propos.  
24. huius lib. Ac propterea & DE, Mediæ Apotome se-  
cunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensu-  
rabilis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

105, 116.  
100.

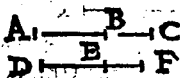
RECTA linea Minori commensura-  
bilis; & ipsa Minor est.

SIT Minor AB, ipsiq; congruens BC, ita ut AC, BC, po-  
tentia sint incōmensurabiles, facientesq; cōpositum quidē ex  
quadratis rectarū AC, BC, Rationale; rectangulū uero sub  
ipsidem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, com-

O 2 mensu-



mensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Minorem esse. Fiant eadem, quæ supra, ita ut rursus A B, B C, ad D E, E F, eandem habeant rationem, quam A C, ad D F. Erunt ergo rursus, ut in antecede



deñti propos. D F, E F, ipsis A C, B C, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam

est ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; erit ut quadratum ex A C, ad quadratum ex B C, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F; Et componendo ut compositum ex quadratis rectorum A C, B C, ad quadratum ex B C, ita compositum ex quadratis rectorum D F, E F, ad quadratum ex E F; Et permutando ut compositum ex quadratis rectorum A C, B C, ad compositum ex quadratis rectorum D F, E F, ita quadratum ex B C, ad quadratum ex E F. Est autem quadratum ex B C, commensurabile quadrato ex E F; quod rectorum B C, E F, ostenderimus commensurabiles esse. Igitur & compositum

ex quadratis rectorum A C, B C, composito ex quadratis rectorum D F, E F, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectorum A C, B C, ex hypothesi, Rationale. Igitur & compositum ex quadratis rectorum D F, E F, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam ut in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub A C, B C, rectangulo sub D F, E F, esse commensurabile: Ponitur autem rectangulum sub A C, B C, Medium; Erit, quod rectangulum sub D F, E F, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; suntque A C, B C, potentia incommensurabiles; erunt etiam D F, E F, potentia incommensurabiles. Quam obrem cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectorum D F, E F,

Rationale, rectangulum uero sub iisdem

D F, E F, Medium; erit D E, Minor.

Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

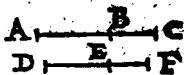
THEOR.

THEOR. 83. PROPOS. 107. 106. 117.

101.

**R E C T A** linea commensurabilis ei,  
quæ cum Rationali Medium totum efficit;  
& ipsa cum Rationali Medium totum effi-  
ciens est.

**S I T** recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens,  
& ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, sint potentia incommen-  
surabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis re-  
ctarum AC, BC, Medium; at rectangulum sub AC, B C,  
Rationale: Sit autem DE, ipsi  
AB, commensurabilis quo-  
cunque modo. Dico & DE,  
esse, quæ cum Rationali Me-



dium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra,  
ostendemus ut in antecedenti propos. compositum ex qua-  
dratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito  
ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur  
Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Me-  
dium. Rursus ut in propos. 105. demonstrabimus rectan-  
gulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub  
DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc  
Rationale; ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, ut in  
præcedenti propos. est probatum, rectæ DF, EF, potentia  
incommensurabiles. Igitur cum DF, EF, incommensura-  
biles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ip-  
sarum quadratis Medium, rectangulum uero sub ipsis, Ra-  
tionale; erit DE, quæ cum Rationali Medium totum effi-  
cit. Quocirca recta linea commensurabilis ei, quæ cum Ra-  
tionali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.

78. decimi.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

107.

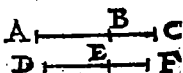
102.

**R E C T A** linea commensurabilis ei,  
quæ cum Medio Medium totum efficit; &

O 3 ipsa

ipsa cum Medio Medium totū efficiens est.

S i t recta A'B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita ut A C, B C, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque,



& adhuc incommensurable composito ex ipsarum quadratis: Sit autem D E, ipsi A B, quomodolibet commensurabilis: Dico & D E, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit.

Constructis enim ipsis, quæ supra, probabimus similiter, ut in propof. 106. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurable esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc, ex coroll. propof. 24. huius lib. Medium. Rursum ut in propof. 105. ostendemus rectangulum sub A C, B C, commensurable esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item ut in propof. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommensurabiles: Postremo quia composito ex quadratis rectarum A C, B C, commensurable est compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ut dictum est; & rectangulo sub A C, B C, commensurable est rectangulum sub D F, E F: Sunt autem compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum sub A C, B C, per hypothesin, incommensurabilia; Erunt quoque ex scholio propof. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, E F, & rectangulum sub D F, E F, incommensurabilia. Quocirca cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis; Medium; nec non & rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurableq; composito ex ipsarum quadratis; erit D E, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

79. decimi.

THEOR.

THEOR. 85. PROPOS. 109.

108.

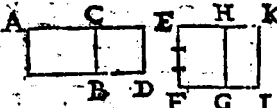
103.

MEDIO a Rationali detracto; Recta  
linea, quæ reliquum spatium potest, una  
ex duabus Irrationalibus fit, uel Apotome,  
uel Minor.

DETRAHATUR a Rationali A D, Medium C D.  
Dico rectam, quæ potest spatium reliquum A B, esse uel  
Apotomen, uel Minorem. Exponatur Rationalis E F, ad  
quã applicetur rectangulum E G, æquale ipsi A B, & ad G H,  
aliud H I, æquale ipsi C D, ita ut totum E I, toti A D, sit  
æquale. Quoniam igitur

45. primi.

E I, æquale Rationali A D,  
Rationale est; erit E F, Ra  
tionalis, Rationali E F, longi  
tudine commensurabilis.



21. decimi.

Rursus quia H I, Medio C D, æquale Medium est; erit H K,  
Rationalis, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Itaque  
cum E K, quidem sit longitudine cõmensurabilis ipsi E F, at  
H K, eidem E F, longitudine incõmensurabilis; erunt E K,  
H K, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales.

23. decimi.

13. decimi.

Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles:  
proptereaque reliqua E H, Apotome est, & ei congruens

74. decimi.

H K. Aut igitur E K, plus potest quam H K, quadrato  
rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommen  
surabilis. Si plus pōt E K, q̃ H K, quadrato rectæ cõmen  
surabilis sibi longitudine, cum tota E K. ostensa quoque sit  
longitudinis cõmensurabilis Rationali E F; erit ex def. E H,  
Apotome prima. Quare recta potēs spatiū E G, cõtentū sub  
Rationali E F, & Apotoma prima E H, hoc est, spatiū A B,  
sibi æquale, Apotome est. Si uero E K, plus potest, quā H K,  
quadrato rectæ sibi lōgitudine incõmẽsurabilis, cū tota E K,  
sit ostensa cõmensurabilis longitudine Rationali E F; erit ex  
def. E H, Apotome quarta. Quapropter recta potēs spa  
tiū E G, cõtentū sub Rationali E F, & Apotoma quarta E H,  
hoc est, spatiū A B, illi æquale, Minor est. Medio ergo a Ra  
tionali detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

92. decimi.

95. quinti.

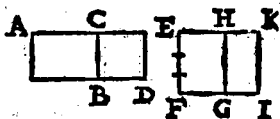
109.

104

THEOR. 86. PROPOS. 110.

RATIONALI a Medio detracto; alia duæ Irrationales sunt, uel Mediæ Apotome prima, uel cum Rationale Medium totum efficiens.

DETRACTATUR a Medio A D, Rationale C D. Dico rectam, quæ reliquum spatium A B, potest, esse uel Mediæ Apotomen primam, uel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem construantur, quæ supra. Et quia



E I, Medio A D, æquale, Medium est; erit E K, Rationalis ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Itæ quia H I, æquale Rationali C D, Rationale est; erit H K, Rationalis ipsi E F, longitudine commensurabilis. Itaque cum H K, quidem ipsi E F, sit commensurabilis longitudine; at E K, eidem E F, longitudine incommensurabilis; Erunt H K, E K, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles; Ac proinde reliqua

E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E A, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens H K, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma secunda E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, Mediæ est Apotome prima. Si uero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum congruens H K, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc est, spatium illi æquale A B, est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

23. decimi.

21. decimi.

73. decimi.

74. decimi.

93. decimi.

96. decimi.

efficit. Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c.  
Quod ostendendum erat.

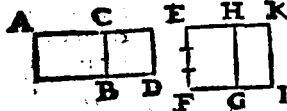
110.

105.

THEOR. 87. PROPOS. III.

MEDIO a Medio detracto, quod sit  
incommensurabile toti; Reliquæ duæ Irra-  
tionales fiunt, uel Mediæ Apotome se-  
cunda, uel cum Medio Medium totum  
efficiens.

DETRAHATUR a Medio A D, Medium C D, quod  
incommensurabile sit toti A D. Dico rectam, quæ reli-  
quum spatium A B, potest, esse uel Mediæ Apotomen secun-  
dam, uel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Con-  
structis enim iisdem, quæ  
supra; quoniam E I, H I,  
Medijs A D, C D, æqualia,  
Media sunt; erunt E K,  
H K, Rationales ipsi E F,  
longitudine incommensurabiles.



Et quia A D, C D, hoc est,  
E I, H I, ponuntur incommensurabilia; erunt E K, H K,  
eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt  
potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua  
E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K,  
plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine  
commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest  
E K, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum neutra ipsarum E K, H K, Rationali E F,  
longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. E H,  
Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium E G, con-  
tenentem sub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc est,  
spatium A B, illi æquale, Mediæ Apotome est secunda. Si  
uero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi lon-  
gitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum E K, H K,  
Rationali

23. decimi.

10. decimi.

74. deci. i.

74. decimi.

97. *decimi.* Rationali E F, sit longitudine commensurabilis, ut demon-  
strauimus; erit ex defin. E H, Apotome sexta. Quam ob-  
rem recta potens spatium E G, contentum sub Rationali  
E F, & Apotoma sexta E H, hoc est, spatium A B, illi equa-  
le, est ea, quæ cum Medio Medium totū efficit. Medio ergo  
a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

III.  
106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non est eadem, quæ ex  
binis nominibus.

45. *primi* SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse ean-  
dem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest, A,  
aliqua ex binis nominibus. Exposita Rationali B C, appli-  
cetur ad B C, rectangulum C D, æquale quadrato ex A.

98. *decimi.*



Quoniam igitur A, Apotome est; erit la-  
tudo B D, Apotome prima. Sit ergo ei  
congruens D E. Erunt igitur ex defin. Apo-  
tomæ primæ, B E, D E, Rationales poten-  
tia tantū commensurabiles, potentique  
B E, plus quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine com-  
mensurabilis; & ipsa B E, Rationali B C, commensurabilis  
erit longitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex  
binis nominibus; erit latitudo eadem B D, ex binis nomi-  
nibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen B F. Erunt igitur  
ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima est; B F,  
F D, Rationales potentia solum commensurabiles, pote-  
ritque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commensura-  
bilis sibi longitudine; & ipsa B F, Rationali B C, longitudine  
commensurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, lon-  
gitudine sit commensurabilis eidem B C; erunt quoque  
B E, B F, inter se commensurabiles longitudine. Igitur to-  
ta B E, existente longitudine commensurabili parti B F,  
erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commen-  
surabilis, ex coroll. propof. 16. huius libri; Atque adeo cum  
B E, Rationalis sit, & F E, Rationalis erit. Quoniam uero  
duarum linearum B E, F E, longitudine commensura-  
bilium,

61. *decimi.*

12. *decimi.*

bilium, ipsa BE, longitudine incommensurabilis est ipsi DE; (quod BE, DE, Rationales sint potentia solum commensurabiles) erit quoque altera FE, eidem DE, incommensurabilis longitudine. Sed & utraque FE, DE, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt FE, DE, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua FD, Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

14. decimi.

74. decimi.

COROLLARIUM.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & ceteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediarum, neque inter se esse easdem.

QUADRATUM enim Mediarum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

23. decimi.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen primam.

98. decimi.

ET quadratum Mediarum Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen secundam.

99. decimi.

QUADRATUM vero Mediarum Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

100. decimi.

QUADRATUM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quartam.

101. decimi.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quintam.

102. decimi.

QUADRATUM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen sextam.

103. decimi.

ITAQUE cum hæc latitudines differant, & a latitudine Mediarum, & inter se; a latitudine quidæ Mediarum, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eadem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & a Media, & inter se se differre.

QUONIAM vero in hoc theoremate demonstrauius Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus; Et quadrata Apotomæ, & ceterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium,

quæ



quæ post ipsam, easdem non esse taticudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam exposita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hæcenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.
4. Ex binis Medijs secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

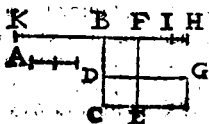
**THEOR. 89. PROPOS. 113.**

112.

0.

**QVADRATVM** Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportionem; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

**S I T** Rationalis  $A$ , & ex binis nominibus  $BC$ , cuius maius nomen  $BD$ ; & ad  $BC$ , applicetur rectangulum  $BE$ , æquale quadrato ex  $A$ , latitudinem faciens  $BF$ . Dico  $BF$ , esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus  $BD$ ,  $DC$ , ipsius  $BC$ , ex binis nominibus; & in eadem proportionem; & adhuc Apotomæ  $BF$ , esse ordinem eandem ipsi  $BC$ , ex binis nominibus. Applicetur enim rursus ad  $DC$ , minus nomen, rectangulum  $CG$ , æquale eidem quadrato ex  $A$ ; atque adeo rectangulo  $BE$ , latitudinem faciens  $DG$ ; sitque ipsi  $DG$ , æqualis  $BH$ . Et quoniam æqualia sunt  $BE$ ,  $CG$ ; erit ut  $BC$ , ad  $DC$ , ita  $DG$ , hoc est, sibi æqualis  $BH$ , ad  $BF$ . Et diuidendo ut  $BD$ , ad  $DC$ , ita  $HF$ , ad  $FB$ : Est autem  $BD$ , maior, quam  $DC$ . Igitur &  $HF$ , maior est, quam  $FB$ . Ponatur  $FI$ , ipsi  $FB$ , æqualis; & fiat ut  $HI$ , ad  $IF$ , ita  $FB$ , ad  $BK$ . Erit ergo componendo ut  $HF$ , ad  $IF$ , hoc est, ad sibi æqualem  $BF$ , ita  $FK$ , ad  $BK$ . ostensum est autem esse ut  $HF$ , ad  $BF$ , ita  $BD$ , ad  $DC$ . Igitur erit quæque ut  $BD$ , ad  $DC$ , ita  $FK$ , ad  $BK$ . At  $BD$ ,  $DC$ , (cum sint nomina ipsius  $BC$ , ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. Igitur &  $FK$ ,  $BK$ , potentia solum commensurabiles sunt.



45. primi

45. primi

14. vel 16. sexti.

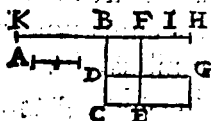
12. sexti.

10. decimi.

**R V R S V S**

12. quinti

R V R S V S quia est ut H F, ad B F, ita F K, ad B K, erunt quoque H F, F K, antecedentes simul, nempe tota H K, ad B F, & B K, consequentes simul, hoc est, ad totam F K, ut F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis est inter H K, B K. Quare ut H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, secunda. Quia uero C G, cum



Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Ra-

21. decimi

tionalē D C, applicatum facit D G, latitudinem Rationale, ipsi D C, longitudine cōmensurabilem; Erit quoque H B, ipsi D G, æqualis, Rationalis & longitudine cōmensurabilis ipsi D C. Et quoniam ostensum est, esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K: Ut autē F K, ad B K, ita H K, ad F K, erit quoque ut B D, ad D C, ita H K, ad F K. Igitur ut quadratum ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, cōmensurabile est quadrato ex D C, (quod rectæ B D, D C, sint Rationales potentia cōmensurabiles, cum sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus.) Cōmensurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit ut quadratum ex H K, ad quadratum ex F K, ita recta H K, ad B K. Igitur longitudine cōmensurabilis est H K, ipsi B K; atque adeo & reliquæ B H, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem B H, Rationalis; Igitur & H K, illi cōmensurabilis, Rationalis est; ac, propterea & B K, ipsi H K, cōmensurabilis, Rationalis existit. Cum ergo ostensa sit F K, ipsi B K, potentia solum cōmensurabilis; erit quoque F K, Rationalis. Quare cum F K, B K, Rationales sint, & potentia tantum

12. sexti

10. decimi

10. decimi

74. decimi

16. decimi

ostensæ cōmensurabiles; erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod est primum.

Q V O N I A M uero ostensum est esse rectam H K, totam parti B K, longitudine cōmensurabilem; erunt propterea & B K, B H, longitudine inter se cōmensurabiles. Cum ergo B H, ostensa sit longitudine cōmensurabilis ipsi D C; erit quoque B K, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem D C, longitudine cōmensurabilis. Rursus quia demonstratum

stratum est esse ut  $B D$ , ad  $DC$ , ita  $FK$ , ad  $B K$ ; & permu-  
tando ut  $B D$ , ad  $FK$ , ita  $D C$ , ad  $B K$ : Sunt autem modo  
 $D C$ ,  $B K$ , ostense longitudine commensurabiles; Erunt  
quoque  $B D$ ,  $FK$ , commensurabiles longitudine. Itaque  
cum  $FK$ , ipsi  $B D$ , &  $B K$ , ipsi  $D C$ , longitudine sit commen-  
surabilis, erunt ipsius Apotomæ  $B F$ , nomina  $FK$ ,  $B K$ ,  
nominibus  $B D$ ,  $DC$ , ipsius  $BC$ , ex binis nominibus, longitu-  
dine commensurabilis. Quod est secundum.

10. decimi.

ITEM quia demonstrauimus esse ut  $B D$ , ad  $D C$ , ita  
 $FK$ , ad  $B K$ ; erunt idcirco Apotomæ nomina  $FK$ ,  $B K$ , in  
eadem ratione cum  $B D$ ,  $D C$ , nominibus ipsius  $BC$ , quæ est  
ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO uel  $B D$ , plus potest, quam  $DC$ , quadra-  
to rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensu-  
rabilis. Si plus potest  $B D$ , quam  $D C$ , quadrato rectæ sibi  
longitudine commensurabilis; cum sit ut  $B D$ , ad  $D C$ , ita  
 $FK$ , ad  $B K$ ; poterit quoque  $FK$ , plus quam  $B K$ , quadra-  
to rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si  $B D$ , plus  
potest quam  $D C$ , quadrato rectæ sibi longitudine incom-  
mensurabilis; poterit &  $FK$  plus quam  $B K$ , quadrato re-  
ctæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem  $B D$ ,  
expositæ Rationali fuerit, longitudine commensurabilis;  
erit &  $FK$ , quæ longitudine ostensa est commensurabi-  
lis ipsi  $B D$ , commensurabilis longitudine eidem Ratio-  
nali, per ea, quæ in scholio propos. 2. huius lib. demon-  
strauimus. Si uero  $D C$ , sit Rationali commensurabi-  
lis longitudine; erit & eadem ratione  $B K$ , eidem Ratio-  
nali longitudine commensurabilis. Si denique neutra ip-  
sarum  $B D$ ,  $D C$ , sit Rationali longitudine commen-  
surabilis; erit quoque neutra ipsarum  $FK$ ,  $B K$ , com-  
mensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem

15. decimi.

ordine est Apotome  $B F$ , ipsi  $BC$ , ex binis no-  
minibus, ut constat ex definitionibus se-  
cundis, atque tertijs. Quod est quar-  
tum.

14. decimi.

Quadratum ergo Ratio-  
nalis ad eam, quæ ex binis  
nominibus, &c. Quod  
demonstran-  
dum erat.

THEOR.

113.

THEOR. 90. PROPOS. 114.

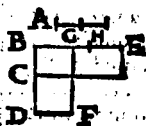
o.

**QVADRATVM** Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionẽ; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

45. primi.

**SIT** Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD; & ad BC, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt nominibus B D, C D, Apotomæ BC, & in eadem p̃por

45. primi.



14. vel 16. seci.

tionẽ; & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eadem. Applicetur enim rursus ad BD, totum, rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinem faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia sũnt, erit ut BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per cõuersionem rationis, ut BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundum proportionem BE, ad GE, ex ijs, quæ in scholio propos. 10. lib. 6. conscripsimus; ut sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est ut BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablata; erit quoque BH, reliqua ipsius BE, ad HE, reliquam ipsius GE, ut tota BE, ad totam GE: Erat autem ut BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoque ut BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BH, GH. Quare erit ut BH, prima ad GH, tertiã, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 10. lib. 6. Quia uero fuit ut BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantũ com-

commensurabiles; Et sunt quoque  $BH$ ,  $HE$ , potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex  $BH$ ,  $HE$ , commensurabilia. Igitur rectæ  $BH$ ,  $GH$ , eandem habentes rationem cum quadratis ex  $BH$ ,  $HE$ , ut demonstraui-  
mus, longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota  $BH$ , longitudine commensurabilis existens parti  $GH$ , comensurabilis quoque longitudine erit parti reliqua  $BG$ , ex coroll. propos. 16. huius lib. At uero cum  $BD$ , Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ  $BC$ ; & rectangulum  $BF$ , quadrato ex Rationali linea  $A$ , æquale, Rationalis; erit latitudo  $BG$ , Rationalis commensurabilis longitudine ipsi  $BD$ . Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. &  $BH$ , eidem  $BD$ , Rationali commensurabilis est longitudine, atque adeo Rationalis existit; quandoquidem  $BH$ ,  $BG$ , longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia uero  $BH$ ,  $HE$ , ostensæ sunt commensurabiles potentia tantum, &  $BH$ , Rationalis; erit quoque  $HE$ , illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt  $BH$ ,  $HE$ , potentia solum commensurabiles; Ac propterea  $BE$ , ex binis nominibus est. Quod est primum.

10. decimi.

10. decimi

21. decimi.

37. decimi.

10. decimi.

15. decimi

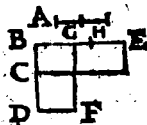
QUONIAM uero ostendimus esse  $BH$ , ad  $HE$ , ut  $BD$ , ad  $CD$ ; atque adeo permutando  $BH$ , ad  $BD$ , ut  $HE$ , ad  $CD$ ; Ostensa est autem  $BH$ , ipsi  $BD$ , longitudine commensurabilis; erit quoque  $HE$ , ipsi  $CD$ , commensurabilis longitudine. Quare  $BH$ ,  $HE$ , nomina ipsius  $BE$ , ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus  $BD$ ,  $CD$ , Apotomæ  $BC$ . Quod est secundum.

IMMO & in eadem proportionem, cum demonstratum sit esse  $BH$ , ad  $HE$ , ut  $BD$ , ad  $CD$ . Quod est tertium.

POSTREMO uel  $BD$ , plus potest quam  $CD$ , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; poterit quoque  $BH$ , plus quam  $HE$ , quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: Et si  $BD$ , plus potest, quam  $CD$ , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam  $BH$ , plus quam  $HE$ , quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidē  $BD$ , Rationali exposita longitudine sit commensurabilis; erit quoque  $BH$ , commensurabilis existens longitudine ipsi

$F$  si  $BD$ ,

si B D, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. huius lib. Si uero C D, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione H E, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si uero neutra ipsarum B D, C D, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; erit quoque neutra ipsarum B H, H E, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atque tertijs definitionibus, ipsa B E, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ B C. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionem, &c. Quod erat demonstrandum.



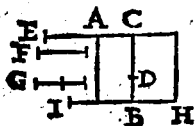
14. decimi.

114.  
o.

THEOR. 91. PROPOS. 115.

SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportionem; Recta lineæ spatium potens, est Rationalis.

CONTINEATUR spatium AB, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina C D, D B, commensurabilia sint nominibus C E, A E, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe C D, ad D B, ut C E, ad A E. Possit autem recta F, spatium A B. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum



45. primi.  
113. decimi

CH, æquale quadrato ex G. Erit ergo latitudo B H, Apotome, cuius nomina H I, B I, longitudine commensurabilia sunt nominibus C D, D B; & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, ut C D, ad D B; atque adeo ut C E, ad A E; & per-

& permutando, ut tota  $HI$ , ad totam  $CE$ , ita ablata  $BI$ ,  
ad ablata  $AE$ . Erig ergo & reliqua  $BH$ , ad reliquam  $AC$ ,  
ut tota  $HI$ , ad totam  $CE$ : Commensurabilis autem est lon-  
gitudine  $HI$ , ipsi  $CE$ , quod utraque  $HI$ ,  $CE$ , commensu-  
rabilis fuit longitudine ipsi  $CD$ . Igitur &  $BH$ , ipsi  $AC$ ,  
longitudinis est commensurabilis; Atque idcirco  $HC$ , ipsi  
 $BA$ , commensurabile erit, cum sit ut  $HB$ , ad  $AC$ , ita  
 $HC$ , ad  $BA$ : Sed  $HC$ , quadrato Rationalis  $G$ , æquale,  
Rationale est. Igitur &  $BA$ , illi commensurabile, Ratio-  
nale erit, propterea; & recta  $F$ , ipsum  $BA$ , potens, Ratio-  
nalis erit. Quapropter si spatium continetur sub Apoto-  
ma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina com-  
mensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem pro-  
portionem; Recta linea spatium potens, est Rationalis.  
Quod erat demonstrandum.

19. quinti.

12. decimi.

10. decimi.

1. sexti.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, fieri posse, ut spatium Rationale con-  
tineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium  $AB$ , con-  
tinetur sub  $AC$ ,  $CB$ , Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Ir-  
rationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIUM.

In proximis autem tribus propositionibus intelligenda  
sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nomi-  
nibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim  
duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In  
posteriori uero, nempe in hac 115, nihil colligetur, si nomina  
 $CD$ ,  $DB$ , nominibus  $CE$ ,  $AE$ , potentia tantum commensu-  
rabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum  
trium propositionum apparet.

115.

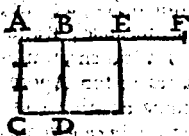
107.

THEOR. 92. PROPOS. 116.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt,  
& nulla alicui antecedentium est eadem.



SIT Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quatum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propof. 112. huius lib. Exposita enim Rationali A C, continetur sub A B, Media, & Rationali A C, spatium A D. Et ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum, Irrationale, ex lemmate propof. 38. huius lib. Possit ipsum recta B E, quæ ex defn. xj. Irrationalis erit. Dico B E, non esse eandem alicui aredicim illarum, quas in coroll. propof. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Medie ad Rationalem A C, applicatum, latitudinem faciat



23. decimi.

Rationalem ipsi A C, longitudinem incommensurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines uel ex binis nominibus, uel Apotomas, ut constat ex propof. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At uero quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem a latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

Quod si compleatur rectangulum D E, erit & hoc contentum sub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propof. 38. Possit ergo ipsum recta E F, quæ ex defn. xj. Irrationalis erit. Dico rursus E F, non esse eandem alicui illarum tredecim, uel etiam ipsi B E. Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius B E, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes a B E, ut demonstratum est. Eodem modo & alie Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

118.

7.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum  $ABCD$ , in quo diameter  $AC$ . Dico diametrum  $AC$ , longitudine incommensurabilem esse lateri  $AB$ . Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; ac propterea  $AC$ ,  $AB$ , proportionē habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat  $AC$ , ad  $AB$ , proportionem, quam numerus  $E F$ , ad numerum  $G$ ; sintque numeri  $E F$ , &  $G$ , minimi omniaque eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est ut  $AC$ , ad  $AB$ ,

g. decimi.

ita numerus  $E F$ , ad numerum  $G$ ; Erit quoque ut quadratum ex  $AC$ , ad quadratum ex  $AB$ ; ita quadratus numerus ex  $E F$ , ad quadratum numerum ex  $G$ , (Cum enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatā, latera autē æquales habeant proportionem; erunt proportionēs quadratorū æquales etiā, cū sint æqualium duplicatę.) Sed quadratū ex  $AC$ , duplū est qua-



20. sexti. &  
11. octavi.

drati ex  $AB$ , per ea, quę in scholio propof. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex  $E F$ , duplus erit quadrati numeri ex  $G$ ; Ac propterea quadratus numerus ex  $E F$ , cum dimidium habeat, atque adeo bifariam possit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse  $E F$ , illum producus, par erit. (Si namque impar esset, cum se ipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; eo quod impar imparem multiplicans imparem procreet. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia uero  $E F$ , &  $G$ , in sua proportionē minimi, inter se primi sunt; &  $E F$ , ostensus est par, erit  $G$ , impar. (Si enim par etiam esset, metiretur utrumque  $E F$ , &  $G$ , binarius; atque adeo non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus  $E F$ , bifariam in  $H$ . Quia igitur numerus  $E F$ , duplus est numeri  $E H$ ; & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex  $E F$ , quadruplus

29. noni.

24. septimi.

11. octavi.

quadrati ex E H. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex E F, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex E H; qualium partium 4. est quadratus ex E F, talium 2. erit quadratus ex G, & talium 1. quadratus ex E H. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, ut supra de numero E F, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par; & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter A C, lateri A B. Igitur incommensurabilis longitudine.

**ALITER.** Sit si potest fieri, diameter A C, commensurabilis longitudine lateri A B, habeantq; A C, A B, proportionem, quam numeri E F, & G, qui minimi sint in sua proportione, atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, unitas. (Cum enim quadratum ex A C, duplum sit quadrati ex A B; sit autem ut quadratum ex A C, ad quadratū ex AB, ita quadrat⁹ numerus ex E F, ad quadratū numerū ex G, ut in priori demonstratione diximus; erit quoq; quadratus ex E F, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est unitas, atq; adeo & quadrat⁹ ex ea, unitas; erit quadratus ex E F, binarius. Quod est absurdū.) ergo numerus. Et quia, ut iam est demonstratum, quadratus ex E F, duplus est quadrati ex G; metietur quadratus ex G, quadratū ex E F; ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri E F, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdū. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudine lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

**SED** & affirmative hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex his, quæ in scholio propof. 47. lib. I. demonstr-

14. ostendi.

monstrata a nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadratum ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. uel 4. ad 2. uel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportionem dupla quotcumque numeris ab unitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. solum tertius ab unitate quadratus est, & ceteri om-

nes unum intermittentes; quod 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. primus ab unitate, nempe 2. quadratus non fit, erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati, reliqui uero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum (alias & 2. quadratus esset.)

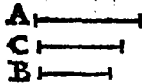
ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

Hoc etiā theorema aliter demonstrauimus in scholio prop. 8. lib. 8. & in scholio prop. 9. huius libri.

C A B T E R U M in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quedam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometria libris pendet, ut merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens; uisum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solita in margine loca Stereometriae, quæ ad demonstrationem eorū, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hac.

I N V E N T I S lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inueniuntur & alie quam plurima magnitudines, plana scilicet, atque solide incommensurabiles inter se. Sint enim recta A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas mediā proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. prop. 20. lib. 6. ut A, ad B, ita est figura rectilinea quævis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterq; posita super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; erunt rectilinea illa figura super A, & C, incommensurabiles.

R V R S V S quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta:



P 4 Qua-

10. noni.

24. octau.

9. decimi

10. decimi.

2. duodecimi.

11. quinti. Quadrata autem hac, cum sint figura rectilinea similes, similiterq; posita, proportionem habent, quam rectae  $A$ , &  $B$ ; ex coroll. propof. 20. lib. 6. Habebunt quoque circuli diametrorum  $A$ ,  $C$ , eandem proportionem, quam rectae  $A$ ,  $B$ : Sed rectae  $A$ ,  $B$ ; incommensurabiles sunt longitudine. Igitur & circuli diametrorum  $A$ ,  $C$ , incommensurabiles sunt.

10. decimi. Iam uero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figurae rectilineae similes, similiterq; descriptae super  $A$ ,  $C$ ; habebunt pyramides, atq; prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineae illae figurae. Quare cum rectilineae illae figurae incommensurabiles sint, ut modo est demonstratum; Incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.

11. duodecimi. Quid si coni, uel cylindri aequae altitudinis fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum  $A$ ,  $C$ ; habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles; Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inueniuntur igitur non solum lineae, & superficies incommensurabiles, uerum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.

10. decimi. Eadem autem ratione, si rectae  $A$ , &  $B$ , longitudine commensurabiles sint, ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse; atq; adeo & earundem pyramides, & prismatas; & deniq; conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI DECIMI.



## E V C L I D I S

## E L E M E N T V M X I.

Et Solidorum primum.



## D E F I N I T I O N E S.

I.

**SOLIDVM** est, quod longitudinē,  
latitudinem, & crassitudinem habet.



**OSTQVAM** Euclides in prioribus  
sex libris abunde de ea Geometria par-  
te disseruit, qua circa plana versatur,  
sibiq; nomen Geometriae, tanquam pro-  
prium, usurpauit; In subsequentibus  
vero tribus diligenter ea de passio-  
nibus numerorum docuit, quae necessaria  
videbantur ad intelligendam doctrinā

linearum commensurabilium, ac incommensurabilium, quas  
idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, ut  
constructio, atque natura quinque corporum regularium, de  
quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15.  
subtilissime differitur, perfectius posset cognosci: Nunc tan-  
dem aggreditur in hoc libro undecimo eam partem Geometriae,  
qua corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Ste-  
reometria est appellata.

**EXPLICAT** autem prius, more suo, voces ad eam rem  
pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nem-  
pe tertium genus quantitatis. Docet igitur, eam quantitatem,  
quae

que præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita ut tres dimensiones possideat, unam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemque, appellari solidum, siue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; qua vero longitudini latitudinem adiecit, superficies vocatur, ut in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, præcipiunt, ut imaginemur punctum aliquod e loco in locum moveri; hoc enim describis uestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quod punctum omnis sit magnitudinis expertus; ut autem percipiamus superficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri; hæc enim describet uestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in transversum est factus; Carens autem profunditate, quod & linea illius sit expertus: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trinā dimensione præditum, consulunt, ut concipiamus superficiem aliquam æqualiter elevari, siue in transversum moveri; hæc enim ratione describetur uestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum vero seu crassum, propter elevationem illam, seu motum superficiæ. Hæc ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta distincta a linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantum dimensio possit assignari, ut perspicue in commentarijs, quos in spheram Ioannis de sacro bosco conscripsimus, a nobis suis demonstratum ex Ptolemao in libello de Analemmate.

## II.

SOLIDI autem extremum, est superficies.

QUEMADMODUM linea finita in extremitatibus puncta,

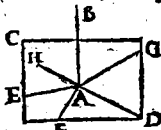
puncta, superficies vero lineas recipit, ut in I. lib. docuit; ita nunc ait Solidi finis extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficies; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

### III.

**LINEA** recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

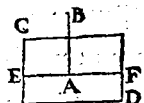
*V* T linea recta  $AB$ , plano  $CD$ , insistsens, ita ut  $B$ , punctum sit in sublimi extra planum  $CD$ , at punctum  $A$ , in ipso plano, tum demum dicesur recta seu perpendicularis ad planum  $CD$ , cum rectos effeceris angulos cum lineis  $AE$ ,  $AF$ ,  $AD$ ,  $AG$ , & cum omnibus alijs, quæ in eodem existentes in plano ipsam tangunt in puncto  $A$ . Hac enim ratione fiet, ut  $AB$ , equaliter insistas plano  $CD$ , & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta  $DA$ , ad  $H$ , cum angulus  $BAD$ , ponatur rectus, erit quoque ei deinceps  $BAH$  rectus, ideoque illi equalis. Eademque ratione protracta qualibet linea in plano  $CD$ , faciet  $AB$ , cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut  $AB$ , cum una linea ex  $A$ , in plano  $CD$ , educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur  $AB$ , recta ad planum  $CD$ . Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et e contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum datæ rectæ demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conscribere.

*V* T autem recta quampiam plano cuicumque insistsens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamque

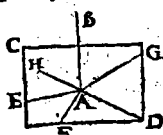




ipsamq; tangentibus, satis est, ut cum duabus non efficien-  
tibus lineam unam, sed se mutuo secantibus, si producantur,  
rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum  
omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, ut perspicuum  
fiet ex propof. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficien-  
tibus lineam unam: quia si duæ lineæ componant unam rectam  
lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis re-  
ctos angulos constituit, cum omnibus alijs rectos conficere an-  
gulos. Recta enim  $AB$ , insit in plano  $CD$ , efficiatq; rectos



angulos cum duabus in eodem plano ductis  
 $AE$ ,  $AF$ , quæ rectam unam lineam compo-  
nant. Dico  $AB$ , non propterea cum omnibus  
alijs rectos angulos constituere, ac idcirco  
non esse rectam ad planum  $CD$ . Hoc autem  
perspicuum est, cum  $AB$ , circa  $EF$ , veluti autem, circum-  
verti queat, ita ut punctum  $B$ , modo sit plano propinquius, mo-  
do ab eodem remotius, nihilominus tamen ipsa cum  $EF$ , sem-  
per eosdem rectos angulos, & æquales conficiat: Quod si ea-



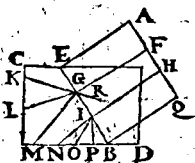
dem  $AB$ , cum duabus angulum componen-  
tibus, quales sunt  $AG$ ,  $AD$ , in priori  
figura, rectos constituat angulos, tunc  
demum cum omnibus alijs rectos angulos  
efficiet, ut diximus. Id quod dilucide de-  
monstrabitur propof. 4. huius lib.

### IIII.

PLANVM ad planum rectum est,  
cum rectæ lineæ, quæ communi planorum  
sectioni ad rectos angulos in vno planorum  
ducuntur, alteri plano ad rectos sunt an-  
gulos.

INSISTAT planum  $AB$ , plano  $CD$ , ita ut linea  
 $AQ$ , sit in sublimi, hoc est, extra planum  $CD$ , ad  $EB$ , in  
plano: Sit autem horum planorum communis sectio  $EB$ , quæ,  
ut demonstrabitur propof. 3. huius lib. recta erit linea. In hac  
autem

autem sumptis quocunque punctis G, I, ex ipsis in plano A B, ducantur G F, I H, perpendiculares ad communem sectionem E B. Si igitur lineae F G, H I, ad planum alterum C D, rectae fuerint, hoc est, rectas angulorum effecerint cum lineis G K, G L, G M, I N, I O, I P, & cum alijs omnibus in plano C D, a punctis G, & I, ductis; dicetur planum A B, ad planum C D, rectum; quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, sed aequaliter illi insistet. Si enim K G, producat ad R, cum angulus F G K, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps F G R, rectus; ideoque illi equalis. Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano C D, sicut utrobique a lineis F G, H I, anguli aequales. Quare planum A B, aequaliter plano C D, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem deducas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.



## V.

RECTAE lineae ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectae illius lineae ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque a puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositae illius lineae extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus ipsa insistente linea, & adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta  $AB$ , plano  $CD$ , non ad angulos rectos, sed inclinata, ita ut punctum  $B$ , sit extra planum. in sublimi, punctum vero  $A$ , in plano. Deinde ex  $B$ , termino sublimi rectae  $AB$ , intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis  $BE$ , faciens in plano punctum  $E$ ; atq; ab  $E$ , ad  $A$ , adiungatur recta  $EA$ ; eritq; necessario angulus  $BAE$  acutus, cum in triangulo  $ABE$ , duo anguli



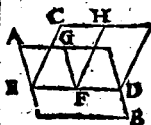
17. primi.

$BAE$ ,  $BEA$ , duobus sine rectis minores, & angulus  $BEA$ , rectus. Angulus igitur acutus  $BAE$ , comprehensus linea insistente  $AB$ , & adiuncta  $AE$ , dicitur inclinatio rectae  $AB$ , ad dictum planum  $CD$ ; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio linea  $AB$ , ad planum  $CD$ , quātus est dictus angulus acutus  $BAE$ .

## VI.

PLANI ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO  $AB$ , insistat planum  $CD$ , ita ut pars ad  $C$ , sit in sublimi extra planum  $AB$ , & pars ad  $D$ , in ipso plano  $AB$ , sitq;  $CD$ , inclinatum ad  $AB$ ; & communis eorum sectio sit  $DE$ . Si igitur ad  $D$ , communem sectionem ex eius puncto  $F$ ,



due perpendiculares ducantur;  $FG$ , quidem in plano  $AB$ , at  $FH$ , in plano  $CD$ ; dicetur angulus acutus  $GFH$ , dictis rectis comprehensus, inclinatio plani  $CD$ , ad planum  $AB$ : Ita ut tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.

INTERDV M Geometrae angulum  $GFH$ , dicunt angulum inclinationis plani  $CD$ , ad planum  $AB$ , siue is acutus sit siue rectus, obtususue; quanquam proprie solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, ut Euclides do-

des do-

des docet hoc loco: Rectus enim indicat potius aquabilem elevationē unius plani supra aliud, q̄ inclinationē unius ad alterū; obtusus vero recessum quodāmodo unius ab altero. Verū tamen quia quilibet horū angulorū cōmōstrat sitū, seu elevationē unius plani supra alterū, generaliter dici cōsuevit a plerisq; angulus inclinationis omnis ille, qui cōprehēditur duabus rectis lineis, quæ in utroq; plano ad aliqd̄ unū punctū cōis illorū sectionis ducuntur perpendiculares; cuiusmodi est angulus  $G F H$ , siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

## VII.

**PLANVM** ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atq; alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

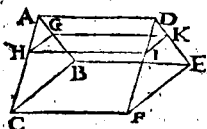
*NON* obscura est hæc definitio, præcedēti bene intellecta. Vnde planū ad planū magis inclinatū esse dicet, cui⁹ angul⁹ inclinationis minor extiterit, atq; adeo a recto magis recesserit.

## VIII.

**PARALLELA** plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

**INTELLIGE**, in quamcunq; partē, etiā infinite, producantur; hoc est, siue ad dexterā, siue ad sinistrā, & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt. n. quodā plana, quæ nec ad dexterā, nec ad sinistrā producta conueniunt; nec tamē ob id parallela sunt dicenda; quia nimirū vel sursum, vel deorsum protracta, tandē coeunt. Nam si sumatur rectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum; remanentia duo plana non conueniunt, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio; idcirco non dicuntur parallela.

SIT enim tectum quoddam  $AB C D E F$ , contentum duobus planis  $A B E D$ ,  $A C F D$ , cuius basis  $B C F E$ ; auferaturq; fastigium  $A G H D K I$ . Quo



facio, perspicuum est, reliqua plana  $G B E K$ ,  $H C F I$ , non conuenire inter se, si ad partes  $G B$ ,  $H C$ , uel ad partes  $K E$ ,  $I F$ , producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum

producta ad partes  $G H$ ,  $K I$ , conueniant in fastigio  $A D$ . Vigetur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, ut in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autem lineae in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt esse protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atq; deorsum. Itaque duo plana quaecumq;, uel sunt parallela, uel ad aliquam partem producta coeunt; lineae uero rectae, uel sunt parallelae, uel ad alteram partem protractae conueniunt, si nimirum in eodem existant plano, uel tandem nec sunt parallelae, nec unquam conueniunt, si uidelicet in diuersis sunt planis, & in transuersum posita. Vnde in definitione linearum parallelarum in I. lib. additum fuit: quae cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quae nunquam conueniunt.

## IX.

**SIMILES** solidae figurae sunt, quae similibus planis continentur, multitudine aequalibus.

POTVISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos aequales, & proportionalitatem laterum circa aequales angulos, uti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satiùs tamen esse indicauit, ut breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine aequalibus describeret; praesertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum aequalitas, ut ex defn. II. patebit, cum illos constituent anguli plani & multitudine, & magnitudine aequales;

*æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.*

X.

**ÆQVALES**, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continetur.

*Quod si plana similia, quibus corpora similia ex precedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicuntur eiusmodi figura solida non solum similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum inferitur angulorum solidorum æqualitas, ut in precedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, ut in lemma te propof. 22. lib. 6. demonstravimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent; ac propterea inter sese existunt æqualia.*

XI.

**SOLIDVS** angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

*Dvæ lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad unum punctum conveniunt, efficiunt angulum planum ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quadam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum*

larum planum, efficietur ad punctum  $A$ , angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel deniq; plures adiungeretur, licet anguli quātitas variaretur.



Dixit autem Euclides, lineas angulū solidū constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniā videlicet, si tres lineae  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ , in eadē consistereut superficie, nō efficeretur angulus solidus ad punctum  $A$ , sed planus dūtaxat ex duobus planis  $BAD$ ,  $DAC$ , compositus. Quod si  $AD$ , sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt  $AB$ ,  $AC$ , iam non componetur angulus planus totus ex  $BAD$ ,  $DAC$ ; immo circa punctum  $A$ , tres plani consistent anguli  $BAD$ ,  $DAC$ ,  $CAB$ , qui ut mox dicitur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineae, & idcirco plures quoque anguli plani.

### A L I T E R .

**SOLIDVS** angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

**H A E C** definitio secunda anguli solidi facilis est, praecedenti recte intellecta. Cū enim saltem tres lineae in eodē non existens plano necessariae sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, ut angulus solidus efficiatur, ut ex superiori figura apparet. Angulus enim  $BAD$ , in plano est, in quo rectae  $AB$ ,  $AD$ ; & angulus  $DAC$ , in plano, in quo rectae  $AD$ ,  $AC$ ; angulus deniq;  $CAB$ , in plano, in quo rectae  $AC$ ,  $AB$ ; atque ita ex ipsis angulis solidus ad punctum  $A$ , constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad unum punctum consistant, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus, sed totus quidam angulus planus, ut supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum; etiam si in diversis sint planis. Hiabis enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, ut tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consti-

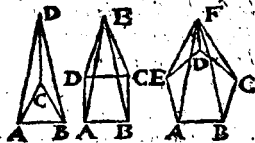
confistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pavimento domus, uel laqueari, ad unum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si una earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

Ex his vero perspicuum cuius erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum retilineum assumpsit, ita hic ex omnibus solidis eam duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ, quam duæ, uel plures anguli plani retilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui unica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, una quidem plana, altera uero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

## XII.

PYRAMIS, est figura solida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum constituta.

Videlicet figura solida a planis  $ABC$ ,  $ABCD$ ,  $ABCDE$ , ad puncta  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , constituta appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad unum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, uel quadrangulum, uel pentagonum, &c. a quo quidem totæ pyramides denominatione sumit; ut uidelicet dicatur pyramis triangularis, quadrangularis, pentagona, hexagona, &c. Totæ uero angulis quolibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu litteras



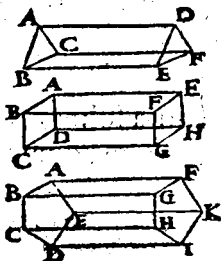


planum dictum continet. Vnde & basis pyramidis nuncupari solet planum huiusmodi. Vt pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt  $ABD, ACD, BCD$ : Quadrangula uero  $ABE, ADE, BCE, CDE$ : Pentagona denique  $ABE, AEF, BCE, CDE, EDF$ .

XIII.

**PRISMA** est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia uero parallelogramma.

**FIGURAE** scilicet solide, quarum plana aduersa & æqualia, & similia & parallela sunt triangula  $ABC, DEF$ :



vel quadrangula  $ABCD, EFGH$ : vel pentagona  $ABCDE, FGHIK$ , &c. Parallelogramma uero  $ACFD, ABED, CBEF$ : vel  $ABFE, ADHE, CDHG, CEFG$ : vel  $ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG$ ; dicuntur prismata. Itaq; prisma nil aliud erit, quam columna quoddam latera a equalis crassitudinis, cuius bases opposita sunt æquales, similes, & parallele,

sive hæc sint triangula, sive quadrangula, sive pentagona, &c. Vnde ut parallelogramma consistebit prismata quodlibet, quos latera, sive anguli in unoquoque oppositorum planorum reperiuntur, ut figura indicant.

Ex his manifestum est, quantum hallucinemur; inter quos est & Campanus, qui prismata intelligunt esse eam figuram solidam dumtaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua uero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum una species prismatis, de-

finis

finis autem tradita infinita alia genera prismatis complectitur, ut constat; praesertim quod plurima demonstrationes in hoc libro & 12 sequenti, ex quo omnibus prismatibus conveniatis, perspicuum est eos hallucinari, qui unum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt autem forte hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propof. ultima huius lib. & in 3. 4. & 5. propof. lib. 12 solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animadvertunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangularum oppositorum, eo quod tali prismati solū demonstratio illa conveniat. Quod si sola ea figura, ut ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Immo in corollario dictae propositionis septimae inserit Theon. Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, & altitudinem aequalem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quouis retilinea, equalia tamen & similia, ut vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismaticum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communis omnium sententia demonstrationes Theoni ascripta, sine Euclidis. Accedit etiam, quod a Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia solida, quae habent duo plana aduersa & equalia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHÆRA est, quando, semicirculi manentē diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, unde moueri cæperat, circumassumpta figura.

Si c v t linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum; ita & semicirculus circa al-

serum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometra sphaeram appellant. Unde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, a quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existant illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in sphaera punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, a quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sint semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphaera definiri poterit etiam hoc modo.

**S P H A E R A** est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

**CICERO** in lib. de vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαῖρῆς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radijs attingitur.

## XV.

**A X I S** autem sphaeræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

## XVI.

**CENTRUM** sphaeræ est idem, quod & semicirculi.

## XVII.

**DIAMETER** autem sphaeræ, est re-

Est quædam linea per centrū ducta, & vtrinque a sphæræ superficie terminata.

Hæc tres definitiones non egent expositione; dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum spheræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphaera reuoluatur. Vnde quid in descriptione spheræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius spheræ; propterea eam solam Euclides axem spheræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, unde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si uero minor, Amblygonius: Si uero maior, Oxygonius.

UT si triangulum rectangulum  $ABC$ , circa latus quiescens  $AB$ , quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, describetur solida quedam figura, qua continetur duabus superficiibus, circulari una, ac plana, quæ  $BC$ , latus alterum



circa angulum rectum, suo motu describit; & curva alia, eaq; conuexa, quam latus  $AC$ , recto angulo oppositum delinat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

Q U O D si latus quiescens  $AB$ , aequale fuerit circumducto  $BC$ , ut in prima figura, dicitur conus descriptus orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope uerticem  $A$ , re-

ctus est. Cum enim latera  $AB, BC$ , ponantur equalia; erit et anguli  $BAC, BCA$ , aequales; qui cum aequaleant uni

5. primi



recto, eo quod  $ABC$ , sit rectus; erit  $BAC$ , semirectus. Eodemque modo angulus  $BAD$ , ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus  $CAD$ , rectus erit. Si vero quiescens latus  $AB$ , minus fuerit circumducto  $BC$ , ut in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad uerticem  $A$ , obtusus existit. Cum enim  $BC$ , latus latere  $AB$ , sit maius; erit angulus  $BAC$ , maior angulo  $BCA$ . Quare cum hi duo aequipol-

18. primi

leant uni recto, propterea quod angulus  $ABC$ , ponatur rectus, erit  $BAC$ , semirecto maior. Similiter  $BAD$ , maior erit semirecto; atque adeo totus  $CAD$ , recto maior erit. Si denique quiescens latus  $AB$ , maius fuerit circumducto  $BC$ , ut in tertia figura, appellabitur conus descriptus oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad uerticem  $A$ , acutus est. Cum

18. primi

n. latus  $AB$ , maius sit latere  $BC$ , erit et angulus  $BCA$ , angulo  $BAC$ , maior. Quapropter cum hi duo uni recto aequaleant, eo quod angulus  $ABC$ , rectus ponatur, erit  $BCA$ , semirecto maior, ideoque reliquus  $BAC$ , semirecto minor. Non secus ostendetur angulus  $BAD$ , minor esse semirecto. Igitur totus  $CAD$ , recto erit minor.

## XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circum quam triangulum uertitur.

U T in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens  $AB$ .

## X X.

**BASIS** uero conici est circulus, qui a circumducta linea recta describitur.

**NIMIRUM** circulus, qui describitur ab alio latere circa rectum angulum, quale est  $B\hat{C}$ . in superioribus conis. Ita que huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

**QUONIAM** vero Euclides solum definit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basin rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem conici descriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat, propterea quod in 12. lib. eadem sepe demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, ut ibi docebimus. Ita igitur scribis Apollonius ad initium conicorum elementorum.

**SI** ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in utramque partem producat; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, a quo cepit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad uerticem inter se se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, uoco conicam superficiem.

**VERTICEM** ipsius, manens punctum.

**AXEM**, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

**CONVM** autem uoco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter uerticem,

& cir.

& circuli circumferentiam interiicitur.

**VERTICEM** conii, punctum, quod & superficie conicæ uertex est.

**AXEM**, rectam lineam, quæ a uertice ad circuli centrum perducitur.

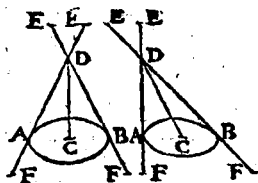
**BASIM**, circulum ipsum.

**CONORVM**, Rectos quidem uoco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

**SCALENOS** uero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

**HÆC** autem omnia ita explicat Eutocius & commentarijs, quos in Apollonium scripsit.

**SIT** circulus  $AB$ , cuius centrum  $C$ , & punctum aliquod sublime  $D$  junctaque  $DB$ , in infinitum ex utraque parte producat ad puncta  $E, F$ . Si igitur recta linea  $DB$ , feratur eoque in circuli  $AB$ , circumferentia, quousque punctum  $B$ , rursus in eum locum restituitur, a quo capit moueri: describet superficiem quandam, quæ quidem constas ex duabus su-



perficiebus ad  $D$ , punctum se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea  $DB$ , ipsam describens in infinitum produciatur. Verticem superficie dicis punctum  $D$ . Axem, rectam  $DC$ . Conum uero ap-

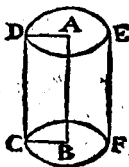
pellas figuram contentam circulo  $AB$ , & ea superficie, quam  $DB$ , sola describit. Coni uerticem, punctum  $D$ . Axem  $DC$ . Basim  $AB$ , circulum. Quod si  $DC$ , ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

## XXI.

**CYLINDRVS** est, quando rectan-  
guli

guli parallelogrammi manente uno latere eorum; quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus reuoluitur, unde cæperat moueri, circumassumpta figura.

*VELUTI* si rectangulum parallelogrammum *ABCD*, circa latus quiescens *AB*, circumuoluitur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficieribus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera *AD*, *BC*, describunt; & altera curua, eaque connexa, quam latus *CD*, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, ut Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



## XXII.

*AXIS* autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

*NEMPE* recta *AB*, in superiori figura, dicitur axis cylindri.

## XXIII.

*BASES* uero cylindri sunt circuli a duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

*QUALIS* sunt circuli a lateribus *AD*, *BC*, oppositis descripti.



**EVCLIDES** uero solum cylindrum rectū hoc loco definit, cuius uidelicet axis rectus est ad utramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris finis proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, qua Euclides de cylindro recto demonstrauit, uisum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum uniuerse, ut complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

**SI** duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri, semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eū locum restituatur, a quo moueri capit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies uocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

**CYLINDRVS** est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

**CYLINDRI** bases sunt circuli ipsi.

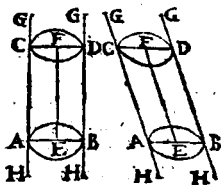
**AXIS**, recta linea, quæ per circulorum centro ducitur.

**LATVS** autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases utrasque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

**CYLINDRORVM**, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

SINT duo circuli aequales, & aequidistantes  $AB, CD$ , quorum centra  $E, F$ , & diametri aequidistantes quoque  $AB, CD$ : Iunctaque recta  $AC$ , in infinitum ex utraque parte producat ad puncta  $G, H$ . Si igitur diametri  $AB, CD$ , circa centra  $E, F$ , in planis circularibus semper aequidistantes, una cum recta  $AC$ , circunducantur, donec ad eum locum reuertantur, unde moveri ceperunt; describetur a linea  $AC$ , superficies quedam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; qua & augetur in infinitum, cum recta  $AC$ , ipsam describens in infinitum producit. Cylindrum vero appellat figuram  $ABDC$ , circulis  $AB, CD$ , & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam uidelicet sola  $AC$ , describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos  $AB, CD$ . Axem, rectam  $EF$ , qua circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam  $AC$ . Quod si axis  $EF$ , perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scaenum.



### XXIII.

SIMILES conus & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, et basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos &



cylind.

cylindrus secundū duas dimensiones esse similes, longitudinē scilicet ac latitudinē; Axes vero eosdē secundū profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni



$ABC$ ,  $EFG$ ; Itē duo cylindri; in conis autem axes  $AD$ ,  $EH$ , & basium diametri  $BC$ ,  $FG$ ; similes & in cylin-

dris: Itaque si fuerit, ut axis  $AD$ , ad axem  $EH$ , ita  $BC$ , diameter basis ad  $FG$ , diametrum basis, dicentur iam coni, quam cylindri similes inter se; quia videlicet hac ratione iam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, ut diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt; Vel etiam, quis triangula  $ADB$ ,  $EHF$ , ex quorum revolutione descripti sunt coni, nec non rectangula  $AB$ ,  $EF$ , quorum conversiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit ut  $AD$ , ad  $EH$ , ita  $BC$ , ad  $FG$ ; Sit autem ut  $BC$ , ad  $FG$ , ita dimidia  $BD$ , ad dimidiam  $FH$ ; erit quoque ut  $AD$ , ad  $EH$ , ita  $DB$ , ad  $HF$ : & permutando ut  $AD$ , ad  $DB$ , ita  $EH$ , ad  $HF$ . Quare iam in triangulis, quam in rectangulis latera circum aequales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula similia inter se erunt, & rectangula: Triangula quidem, propterea quod triangula unū angulum uniangulo habentia aequalem, & circum aequales angulos latera proportionalia, equiangula sint, adeoque latera omnia circa angulos aequales habeant proportionalia, asque adeo inter se similia existant: Rectangula vero, eo quod reliqua duo latera duobus lateribus  $AD$ ,  $DB$ , sint aequalia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habeant.

Q U O D si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de re-  
ctis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur & tum de-  
mum similes; quando eorum axes, & diametri basium erunt  
proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt,  
aequales: qui quidem anguli accipiendi sunt, ut in definitio-  
ne quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter &  
cylindri

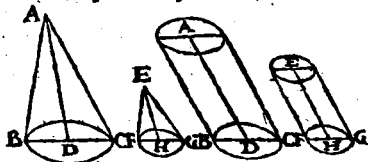
15. quinti.

6. sexti.

4. sexti.

14. primi.

cylindri  $ABC$ ,  $EF G$ . In conis autem axes sint  $AD$ ,  $EH$ ,  
 & basium diametri  $BC$ ,  $FG$ ; similiter & in cylindris.  
 Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, ut  $AD$ , ad  
 $EH$ , ita  $BC$ , ad  $FG$ ,  
 extiterintque anguli  
 inclinationis  $ADB$ ,  
 $EHF$ , tam in conis,  
 quam in cylindris,  
 aequales inter se, dicē  
 tur & conī iter se, &  
 cylindri quoque inter se se similes; quoniam nimirum hac ratione &  
 tres eorū dimensiones sunt proportionales, ut supra diximus, &  
 rursus tam triangula  $ADB$ ,  $EHF$ , quam rectangula  $AB$ ,  
 $EF$ , quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, in-  
 ter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque de-  
 monstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum  
 anguli  $ADB$ ,  $EHF$ , ponantur aequales, licet non sint  
 recti.



XXV.

CVBVS est figura solida sub sex qua-  
 dratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM est figura solida  
 sub quatuor triangulis æqualibus, & æqui-  
 lateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura  
 solida sub octo triagulis æqualibus, & æqui-  
 lateris contenta.

XXVIII.

XXVIII.

**DODECAEDRVM** est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

**ICOSAEDRVM** est figura solida sub uiginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

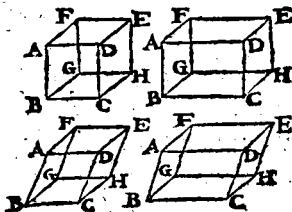
**H A B C** sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, eo quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sunt, æquilatera, & æquiangula, ut ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ simplicia a philosophis nuncupantur, nempe Calum, Ignem, Aerem, Aquam, atq; Terram. quinque dictis corporibus assimilens, ut in sphaera Ioannis a sacro bosco latinè explicauimus. Harum omnium constructio traditur lib. 13. Cubi quidem propof. 11. Tetraedri vero propof. 13. Octaedri deinde propof. 14. Dodecaedri autem propof. 17. Icosaedri denique propof. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, ac uerum eorum effigiem, atque formam quis inuicatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque prædicta dari potest, ut demonstrabimus ad finem lib. 13.

**Q V O N I A M** uerbò in hoc lib. 11. frequens fit mentio Parallelepipedum, & in lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium, necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit Parallelepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

**PARALLELEPIPEDVM** est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta.

*VELVTI* solida comprehensa sex quadrilateris figuris  $ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG$ , quarum oppositæ  $AC, FH$ ; Item  $DF, CG$ ; Item  $AG, DH$ , sunt parallelæ, nominantur *parallelepipeda*, quasi parallelis planis comprehensa. quæ quidem plana parallelæ opposita, sunt & equalia, & similia, & parallelogramma, ut demonstrabitur propof. 24. huius lib.



**SUNT** autem tot parallelepipedorum genera, quos parallelogrammarum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicitur parallelepipedum illud, cubus, respondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus: Si deniq; sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Ceterum quodcumq; parallelepipedum vocari etiam poteris Prisma, ut ex definitione prismatis constat.

XXXI.

**SOLIDA** figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

**SOLIDA** figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

*NON est necesse, ut anguli interioris figura constituatur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figura, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: Sed satis est, ut omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquos angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquos plana exterioris figuræ; ita ut nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figuræ exterioris.*

*PRIMUM, duæ hæc postrema definitiones planius percipiuntur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusq; mutuis corporum regularium copiose agitur.*

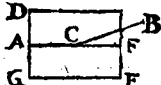
I.

THEOR. I. PROPOS. I.

**RECTAE** linæ pars quædam non est  
in su-

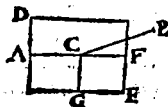
in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ  $AB$ , pars quidem  $AC$ , in subiecto plano  $DE$ , pars vero  $CB$ , in sublimi, ita ut omnia puncta partis  $AC$ , in plano  $DE$ , iaceant; puncta uero omnia partis  $B$ , supra planum  $DE$ , existant, uel infra. Erat igitur in plano  $DE$ , ipsi  $AC$ , rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum posita, nempe  $CF$ . Quamobrem duæ rectæ  $AB, AF$ , commune habent segmentum  $AC$ . quod est absurdum, ut in pronunciato 13. lib. 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam uero in sublimi. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIUM

HÆC est communis demonstratio interpretum. Sed forte dices aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe ut ostendatur, rectæ  $AC$ , esse aliquam rectam in plano  $DE$ , in directum, & continuum positam. Qui enim concedis, rectæ  $AB$ , partem quidem  $AC$ , esse in plano  $DE$ , partem uero  $CB$ , in sublimi, utique negabit, rectæ  $AC$ , in plano  $DE$ , dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam  $CB$ , in rectum & continuum positam esse fateatur ipsi  $AC$ . Veruntamen ei, qui sic dubitas, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem ulterius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, quæ ex equali suas interioret lineas, hoc est, quæ recte, & aqualiter semper extenditur, ut & linea recta. Quamobrem si  $AC$ , in plano  $DE$ , producaturs usque ad  $F$ , erit  $CF$ , recta rectæ  $AC$ , in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam id ipsum Geometrice, in plano uidelicet  $DE$ , ipsi  $AC$ , dari posse aliam rectam, quæ cum ipsa unam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat,  $AB$ , esse quoque rectam, eiusque partem  $AC$ , in plano  $DE$ , partem uero  $CB$ , in sublimi esse positâ. Ducatur, n. in plano  $DE$ , ipsi  $AC$ , perpendicularis  $CG$ ;



11. primi.



14. primi.

Et in eodem plano ipsi  $CG$ , perpendicularis  $CF$ . Dico  $CF$ , esse ipsi  $AC$ , positam in continuum & rectum. Cum enim  $AC$ , &  $FC$ , in eodem plano  $DE$ , cum recta  $CG$ , duos rectos angulos constituent  $ACG$ ,  $FCG$ , ex constructione; erunt  $AC$ , &  $FC$ , in directum & continuum posita. Quamobrem etiamsi quis contendat,  $AB$ , esse rectam, cuius quidem pars  $AC$ , in plano  $DE$ , subiecto, pars autem  $CB$ , in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano  $DE$ , erit alia recta, nempe  $CF$ , quæ cum  $AC$ , unam rectam constituat lineam; atque adeo due rectæ  $AB$ ,  $AF$ , segmentum commune habebunt  $AC$ . Quod est absurdum.

2.

## THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secant, in vno sunt plano. Atq; triangulum omne in vno est plano.

RECTAE lineæ  $AB$ ,  $CD$ , se mutuo secant in  $E$ , & in  $EB$ ,  $ED$ , sumptis punctis  $F$ , &  $G$ , utcumque, ducatur recta  $FG$ , ut fiat triangulum  $EFG$ . Dico triangulum  $EFG$ , in vno esse plano; Item rectas  $AB$ ,  $CD$ , in vno quoque plano existere. Si enim trianguli  $EFG$ , pars quædam, nimirum  $EHI$ , in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua  $FHI$ , in sublimi, vel



contra; Existent quoque rectarum  $EF$ ,  $GF$ , partes quidem  $EH$ ,  $GI$ , in vno plano, partes vero  $HF$ ,  $IF$ , in sublimi, vel contra. quod fieri non posse, iam supra demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem  $EFIK$ , in vno plano credatur esse, pars autem  $GLIK$ , in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum  $EG$ ,  $FG$ , partes quidem  $EK$ ,  $FI$ , in vno plano, partes vero  $KG$ ,  $IG$ , in sublimi, vel contra. Si denique eiusdem trianguli pars quidē  $FHK$ , in vno concedatur esse plano, pars vero  $EHK$ , in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum  $FE$ ,  $GE$ , partes quidem  $FH$ ,  $GK$ , in vno plano, partes autem  $HE$ ,  $KE$ ,

1. undeci.

K E, in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, vt est demonstratum. Quare triangulum E F G, in uno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

1. undec.

Q V I A vero, in quo plano est triangulum E F G, in eodem existunt eius latera E F, E G: In quo autem sunt rectæ E F, E G, in eodem sunt rectæ totæ C D, A B, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ A B, C D, in uno plano, in quo nimirum triangulum E F G, consistere demonstraui-  
mus. Q U O circa si duæ rectæ lineæ se mutuo secant, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

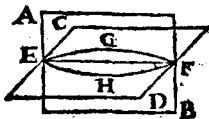
1. undec.

### THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI duo plana se mutuo secant, communis eorum sectio est linea recta.

S E C E N T se mutuo plana A B, C D, sitq; communis eorum sectio E F. Dico E F, esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano A B, recta E G F, & in plano C D, recta E H F. Rectæ igitur E G F, E H F, cum eisdem habeant terminos E, & F, superficiem inclu-  
dent. Quod fieri non potest, vt in



12. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio E F, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secant, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

A L I T E R. Secent se rursus plana A B, C D, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta E F. Si igitur recta E F, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si uero E F, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur E G F, concludent rursus duæ rectæ E F, E G F, superficiem, cum eisdem habeant terminos E, & F. Si deniq; recta E F, in altero tantum plano

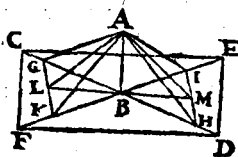
esse credatur, tunc si in altero ducatur recta  $E G F$ ; includent iterum duæ rectæ  $E F$ ,  $E G F$ , superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta  $E F$ , in utroque plano  $A B$ ,  $C D$ ; atque adeo communis eorum sectio est.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea  $A B$ , insistat duabus rectis  $C D$ ,  $E F$ , ad rectos angulos in communi earum sectione  $B$ . Dico rectam  $A B$ , ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secant in  $B$ ; erunt ipsæ in uno plano, quod sit  $C E D F$ . Sumantur inter se æquales rectæ



$B G$ ,  $B H$ ; Item rectæ  $B I$ ,  $B K$ ; ducanturq; rectæ  $G K$ ,  $I H$ ; & in eodem plano per  $B$ , ducatur recta  $L M$ , secans rectas  $G K$ ,  $I H$ , in punctis  $L$ , &  $M$ . Demittantur quoque ex  $A$ , puncto in su-

blimi ad idem planum rectæ  $A G$ ,  $A L$ ,  $A K$ ,  $A H$ ,  $A M$ ,  $A I$ . Quoniam igitur latera  $B G$ ,  $B K$ , trianguli  $B G K$ , lateribus  $B H$ ,  $B I$ , trianguli  $B H I$ , ex constructione sunt æqualia; & anguli quoque ipsis contenti  $G B K$ ,  $H B I$ , cum sint ad uerticem  $B$ , oppositi, æquales: Erunt bases  $G K$ ,  $H I$ , inter se, & anguli  $B K G$ ,  $B I H$ , inter se quoque æquales.

RURSUS cum anguli  $K B L$ ,  $I B M$ , ad uerticem  $B$ , oppositi sint æquales, erunt duo anguli  $K B L$ ,  $B K L$ , trianguli  $B K L$ , duobus angulis  $I B M$ ,  $B I M$ , trianguli  $B I M$ , æquales; Sunt autem & latera  $B K$ ,  $B I$ , quibus adjacent, æqualia, ex constructione. Igitur & reliqua latera  $K L$ ,  $L B$ , reliquis lateribus  $I M$ ,  $M B$ , æqualia erunt.

PRAETerea cum latera  $A B$ ,  $B G$ , trianguli  $ABG$ , æqualia

22. undec.

15. primi.

4. primi.

15. primi.

26. primi.

æqualia sint lateribus  $AB, BH$ , trianguli  $ABH$ , ex constructione; & anguli ipsis contenti  $ABG, ABH$ , æquales, nempe recti, ex hypothesi; erunt & bates  $AG, AH$ , æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ  $AI, AK$ .

1. *primi.*

AMPLIUS quia latera  $AI, IH$ , trianguli  $AIH$ , lateribus  $AK, KG$ , trianguli  $AKG$ , æqualia sunt; & basis  $AH$ , basi  $AG$ , ex hactenus demonstratis; erunt etiam anguli  $AIH, AKG$ , dictis lateribus comprehensi, æquales.

2. *primi.*

ITAQUE cum latera  $AK, KL$ , trianguli  $AKL$ , æqualia sint lateribus  $AI, IM$ , trianguli  $AIM$ ; & anguli ipsis contenti  $AKL, AIM$ , æquales etiam, ut hactenus demonstrauius; erunt quoque bases  $AL, AM$ , æquales.

4. *primi.*

QUONIAM denique latera  $AB, BL$ , trianguli  $ABL$ , æqualia sunt lateribus  $AB, BM$ , trianguli  $ABM$ ; & basis  $AL$ , basi  $AM$ , ex demonstratis; erunt quoque anguli  $ABL, ABM$ , dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. Quare recta  $AB$ , rectos angulos efficit cum recta  $LM$ , quæ in plano subiecto ipsam tangit in  $B$ : Eademque ratione ostendetur, rectam  $AB$ , cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in  $B$ , angulos rectos constituere: Ac proinde recta  $AB$ , plano  $CEDF$ , quod per rectas  $CD, EF$ , ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit. Quod demonstrandum erat.

5. *primi.*

# THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

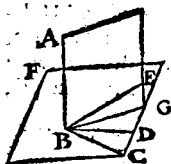
2. undec.

2. undec.

3. undec.

4. undec.

INSISTAT recta linea A B, tribus rectis lineis B C, B D, B E, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas B C, B D, B E, in uno plano esse. Cum enim quælibet duæ in vno sint



plano, propterea quod productæ ad partes E, se mutuo secant in B; sint B C, B D, in plano F C; Et si fieri potest, recta B E, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. Quoniam vero duæ rectæ A B, B E, in vno sunt plano, cum se mutuo secant in B; Sint ambæ in plano A E. Et quia plana F C, A E, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt.

Sit ergo eorum communis sectio recta B G. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis B C, B D; erit propterea & plano F C, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ B G, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli A B E, A B G, existentes in plano A G, per rectas A B, B E, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in uno plano F C, existentibus, non erit B E, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

6.

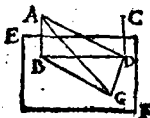
## THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, C D, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta B D, in plano E F, erunt anguli A B D, C D B, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodẽ plano E F, ducatur D G, ad B D, perpendicularis, ponanturq; æquales A B, D G. Connectantur deinde rectæ B G, G A, A D. Quoniam igitur latera A B, B' D, trianguli A B D, æqua-

lia

lia sunt lateribus  $GD, DB$ , trianguli  $GDB$ , ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti  $ABD, GDB$ , æquales, nempe recti; Erunt bases æquales  $AD, GB$ . Rursus quia latera  $AB, BG$ , trianguli  $ABG$ , æqualia sunt lateribus  $GD, DA$ , trianguli  $GDA$ ; Est autem & basis communis  $AG$ ; Erunt anguli  $ABG, GDA$ , æquales: Est autem  $ABG$ , rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur &  $GDA$ , rectus erit. Quoniam uero, ex eadem defin. angulus quoque  $GDC$ , rectus est, erit recta  $GD$ , tribus rectis  $DB, DA, DC$ , ad angulos rectos. Quare rectæ  $DB, DA, DC$ , in uno et eodem plano: Est autem  $AB$ , in eodem plano, in quo  $DB, DA$ . Recta igitur  $CD$ , in eodem erit cum  $AB$ , plano. Quocirca cum anguli interni  $ABD, CDB$ , sint recti, erunt rectæ  $AB, CD$ , parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



4. primi.

3. primi.

5. undec.

2. undec.

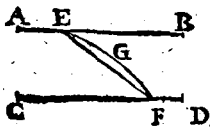
28. primi.

# THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis  $AB, CD$ , sumantur utcumque duo puncta  $E, F$ , quæ recta connectantur  $EF$ . Dico rectam  $EF$ , in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ  $AB, CD$ . Si enim recta  $EF$ , non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra: scietiam aliud planum superficiem parallelarum per puncta  $E, F$ , sitq; communis sectio horum planorum  $EGF$ , quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ  $E F, E G F$ , cum habeant eisdem terminos  $E, F$ , superficiem claudent. Quod est absurdum. Non ergo extra planum



3. undec.

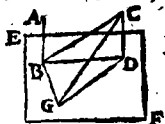
planum parallelarum  $AB, CD$ , erit recta  $EF$ . Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodẽ est cum parallelis plano. Quod erat demonstradũ.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ  $AB, CD$ ; sitque  $CD$ , plano  $EF$ , ad angulos rectos. Dico &  $AB$ , eidem plano  $EF$ , esse ad rectos angulos. Ducta enim recta  $BD$ , in plano  $EF$ ; erit per defin. 3. huius lib. angulus  $CDB$ , rectus: Sunt autem duo  $CDB, ABD$ , duobus rectis æquales. Igitur &  $ABD$ , rectus erit. Iam in plano  $EF$ , ducatur  $BG$ , perpendicularis ad  $BD$ ; ponanturque æquales  $BG, CD$ . Coniungantur deinde rectæ  $DG, GC, CB$ .



Quoniam igitur latera  $CD, DB$ , trianguli  $CDB$ , æqualia sunt lateribus  $GB, BD$ , trianguli  $GBD$ , ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti  $CDB, GBD$ , æquales, nimirum recti; Erunt bases  $CB, GD$ , æquales. Rursus quia latera  $CD, DG$ , trianguli  $CDG$ , æqualia sunt lateribus  $GB, BC$ , trianguli  $GBC$ ; & basis est communis  $CG$ ; Erunt anguli  $CDG, GBC$ , dictis lateribus comprehensæ æquales. Est autem  $CDG$ , rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur &  $GBC$ , rectus erit.. Quare recta  $GB$ , duabus rectis  $BD, BC$ , se mutuo tangentibus in  $B$ , ad rectos angulos existit; ac proinde ad rectos angulos erit plano per  $BD, BC$ , ducto: Est autem in hoc eodem plano recta  $AB$ ; propterea quod rectæ  $BD, BC$ , in eodem sint plano, in quo parallelæ  $AB, CD$ ; cum puncta  $B, C, D$ , existant in parallelis  $AB, CD$ . Igitur &  $GB$ , recta rectæ  $BA$ , ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum

29. primi.

4. seprimi.

8. primi.

4. undec.

7. undec.

re cum A B, recta sit ad rectas B G, B D, erit quoque A B, recta ad planum per B G, B D, ductum, hoc est, ad planū E F. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

4. undec.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QV AE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

S I N T rectæ lineæ A B, C D, ipsæ E F, parallelæ; non sint autem in eodem cum E F, plano. Dico A B, C D, parallelas quoque esse. Nam a quolibet puncto G, rectæ E F, ad ipsam E F, ducantur duæ perpendiculares; G H, quidem in plano parallelarum A B, E F, fiat G I, in plano parallelarum C D, E F. Quoniam igitur E G, recta est ad duas rectas G H, G I, se tangentibus mutuo in G, erit recta quoque ad planum per ipsas G H, G I, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ A B, E F; & E F, sit recta ad planum per G H, G I, ductum; erit quoque A B, ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ C D, E F; Sit autem E F, recta ad planum per G H, G I, ductum; erit etiam C D, recta ad idem planum; Atque proinde rectæ A B, C D, cum rectæ sint ad idem planum per G H, G I, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

4. undec.

8. undec.

8. undec.

6. undec.

SCHOLIION.

D A T A opera Euclides voluit, duas rectas A B, C D, non esse in eodē plano cū recta E F, cui sunt parallelæ. Nā si foret in eodē plano cū ipsa E F, essent A B, C D, inter se parallelæ.



ex 30. propof. 1. lib. Supernacaneum ergo effet, hic idem demonſtrare.

10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulæ æquales comprehendent.

SINT rectæ  $AB, AC$ , ſe tangentes in  $A$ , parallelæ rectis  $DE, DF$ , ſe tangentibus in  $D$ ; non ſint autem  $AB, AC$ , in eodem plano, in quo  $DE, DF$ . Dico angulos  $BAC, EDF$ , ab ipsis comprehenſos eſſe æquales. Ponantur enim  $AB, DE$ , inter ſe æquales, &  $AC, DF$ , inter ſe; ducanturq; rectæ  $BC, EF, BE, AD, CF$ . Quoniam igitur  $AB, DE$ , parallelæ ſunt & æquales; erunt quoque  $BE, AD$ , parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales  $CF, AD$ . Quare cū  $BE, CF$ , parallelæ & æquales ſint eidem  $AD$ ; erunt etiā  $BE, CF$ , inter ſe parallelæ, & æquales: Ac propterea, parallelæ & æquales erunt rectæ  $BC, EF$ . Quia ergo latera  $AB, AC$ , triânguli  $ABC$ , æqualia ſunt laterib<sup>9</sup>  $DE, DF$ , triânguli  $DEF$ , ex cōſtructione; & baſis  $BC$ , baſi  $EF$ , æqualis, vt modo demonſtrauimus; Erunt & anguli  $BAC, EDF$ , dictis lateribus comprehenſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oftendendum.

SCHOLIION.

CONCLUSIO huius theorematidis vera etiam eſt, quā do priores dua linea in eodem ſunt plano cum duabus poſterioribus. Sint enim quatuor linea  $AB, AC, DE, DF$ , in eodem plano, ſitq;  $AB$ , ipſi  $DE$ , &  $AC$ , ipſi  $DF$ , parallelæ. Dico angulos  $BAC, EDF$ , eſſe æquales. Nam ponantur æquales  $AB, DE$ , &  $AC, DF$ ; ducanturq; rectæ  $BC, EF$ , quæ aut in

33. primi.

9. undec.

33. primi.

8. primi.

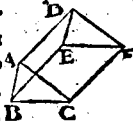
in una recta linea erunt confitutæ, aut non. Sini prius in una recta  $BF$ . Quoniam igitur parallela sunt  $AB, DE$ ; æquales erunt anguli  $ABC, DEF$ ; internus & externus. Similiter æquales erunt anguli  $ACB, DFE$ ; Sunt enim &  $AC, DF$ , parallela. Quare duo anguli  $ABC, ACB$ , trianguli  $ABC$ , æquales sunt duobus angulis  $DEF, DFE$ , trianguli  $DEF$ . Igitur anguli quoque reliqui  $BAC, EDF$ , æquales erunt. Quod est propositum.



29. primi.

32. primi.

NON sint iam  $BC, EF$ , in una recta linea confitutæ. Ductis rectis  $AD, BE, CF$ , cum  $AB, DE$ , sint parallela & æquales; erunt &  $AD, BE$ , parallela & æquales. Eadem ratione  $AD, CF$ , parallela erunt & æquales, eo quod  $AC, DF$ , parallela ponantur & æquales. Quare &  $BE, CF$ , eidem  $AD$ , parallela existentes & æquales, inter se parallela erunt & æquales: Ac proinde parallela & æquales quoque erunt  $BC, EF$ . Itaq; cum duo latera  $AB, AC$ , trianguli  $ABC$ , &  $DE, DF$ , trianguli  $DEF$ , æqualia sint lateribus  $DE, DF$ , trianguli  $DEF$ ; & basis  $BC$ , bæsi  $EF$ ; erunt anguli  $BAC, EDF$ , contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.



33. primi.

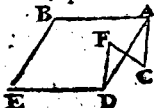
30. primi.

33. primi.

8. primi

CARTESIVM ut conclusio huius theorematiss recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (sive omnes sint in eodem plano, sive non,) ut tres rectæ  $AD, BE, CF$ , nulla ratione se mutuo secant; ut ex prima, & ultima figura apparet. Nam alias conclusio vera non erit.

SUNT enim rectæ  $AB, AC$ , rectis  $DE, DF$ , parallela in hac figura; & tamen anguli  $BAC, EDF$ , quos comprehendunt, non sunt æquales, cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo evenit, quod  $AD, CF$ , se mutuo secant. Vnde quamvis  $AC, DF$ , sint parallela & æquales, non tamen propterea  $AD, CF$ , quæ eas cōiungunt, parallela sunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad easdem partes, ut vult propof. 33 lib. 1. Quare demonstratio huius theorematiss locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris servatur.



PRO.

11.

PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

12. primi.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta ut-  
cunque D E, ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F:



11. primi.

12. primi.

31. primi.

4. undec.

8. undec.

2. undec.

4. undec.

Quæ si fuerit perpendicularis ad pla-  
num B C, factum erit, quod pro-  
ponitur: Si uero non fuerit A F, ad  
planum B C, perpendicularis, ducatur  
in plano B C, per F, ad D E, per-  
pendicularis G H, ad quam ex A, perpendicularis demittatur  
A I. Dico A I, esse perpendicularem ad planum subie-  
ctum B C. Ducta enim in plano B C, per I, ipsi D E, paral-  
lela K L; cum D F, ad rectos angulos sit duabus F A, F H,  
ex constructione, ac proinde recta ad planum per F A, F H,  
ductum; erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H,  
ductum recta. Quoniam uero A I, in eodem est cum rectis  
F A, F H, plano, tangitq; rectam K I, in I; erit per de-  
finitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atq; adeo  
A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. Igitur A I, ad  
planum per K I, I F, ductum, hoc est, ad planum B C, re-  
cta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum pla-  
num perpendicularem rectam lineam duximus. Quod fa-  
ciendum erat.

12.

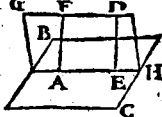
PROBL. 2. PROPOS. 12.

DATO plano, a puncto, quod in illo  
datum est, ad rectos angulos rectam lineam  
excitare.

11. undec.

SIT a dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendi-  
cularis ad datum planum B C. Ex quouis puncto D, in su-  
blimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E: quæ  
si ceci-

si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E, extensa recta per E, & A, ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datum BC. Cū enim DE, AF, parallele sint; & DE, recta ad planum BC, ex constructione; erit quoque AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat



31. primi.

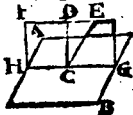
8. undec.

# THEOR. 11. PROPOS. 13.

13.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

SIT datum planum AB. Dico a dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB; & per CD, CE, quæ in uno eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.



2. undec.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB; erunt ipsæ inter se peral-  
lele, cū tamē conveniant in puncto C. Quod est absurdum.

6. undec.

## SCHOLIUM.

EODEM modo, a puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum BC,

BC,

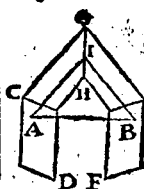
2. undec. *B C, si fieri potest, dua perpendicularares A D, A E. Ducatur per A D, A E, quae in vno plano sunt, planum F G, secans planum B C, per rectam G H. Cum igitur A D, A E, rectae sint ad planum B C; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti, interni in triangulo A D E. Quod est absurdum; cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quovis assumpti.*
17. primi. *ALITER. Si A D, A E, rectae sunt ad planum B C; ipsae erunt inter se parallelae, cum tamen conveniant in puncto A. Quod est absurdum.*
6. undec.



## 14. THEOR. 12. PROPOS. 14.

**AD** quae plana; eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

3. undec. *SIT recta A B, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conveniant. Conveniant ad partes C, E; & faciant communem sectionem rectam lineam G H: In qua sumpto puncto utcumq; I, ducantur rectae I A, I B, in planis G C D, G E F. Quia igitur A B, recta ponitur ad plana G C D, G E F; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli I A B, I B A, recti, in triangulo A B I. Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana C D, E F, producta nunquam inter se conveniunt. Parallela ergo sunt. Ad quae igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.*
17. primi.

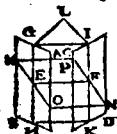


### S C H O L I O N.

**FACILE** etiā demonstrari poterit cōversum huius, videlicet. Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quae ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

S I N T

SINT duo plana parallela  $AB, CD$ , ad quorum alterum  $AB$ , recta sit linea recta  $EF$ . Dico  $EF$ , rectam quoque esse ad planum reliquum  $CD$ . Secet enim planum aliquod, nempe  $GK$ , plana  $AB, CD$ , per lineam recta  $EF$ , incidens, faciatque communes sectiones cum dictis planis rectas  $GH, IK$ : eruntque anguli  $GEF, HEF$ , recti, per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli  $IFE, KFE$ . (Si enim aliter eorum, nempe  $IFE$ , dicatur acutus; erunt duo anguli  $GEF, IFE$ , duobus rectis minores. Quare recta  $EG, FI$ , ad partes  $G, I$ , convenient, nimirum in puncto  $L$ ; atque adeo & plana  $AB, CD$ , in quibus existunt, ad easdem partes convenient ad punctum  $L$ ; cum tota recta  $HGL$ , sit in uno plano, nempe in  $AB$ , producta; Item tota recta  $KIL$ , in vno quoque plano, nimirum in  $CD$ , protrahetur. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli  $IFE, KFE$ .) Eodem modo si aliud planum videlicet  $MN$ , eadem plana secet per  $EF$ , faciens alias rectas, communes sectiones cum ipsis,  $MO, PN$ ; erunt anguli  $PFE, NFE$ , recti. Itaque cum  $EF$ , sit recta ad duas rectas  $IK, PN$ , recta quoque erit  $EF$ , ad planum  $CD$ , per ipsas ductum. Quod est propositum.



1. undec.

4. undec.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illas ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ  $AB, AC$ , se tangentes in  $A$ , duabus rectis lineis  $DE, DF$ , se tangentibus in  $D$ , existentibusque in alio cum illis plano parallelæ. Dico & plana  $BC, EF$ , per ipsas ducta, esse parallela. Ex  $A$ , enim deducatur ad planum  $EF$ , perpendicularis  $AG$ , occurrens plano  $EF$ , in puncto  $G$ . Deinde in plano  $EF$ , per  $G$ , ducantur  $GH, GI$ ,

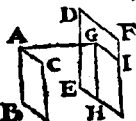
1. undec.

3. 1. primi.

S ipsis

9. undec.  
29. primi.

ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE: erunt & AB, GH, inter se parallelæ; Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3 huius lib. Rectus ergo erit



4. undec.

14. undec.

& angulus BAG. Simili argumento concludes angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC; recta quoque erit GA, ad planū BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. Igitur parallelæ sunt plana BC, DE. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

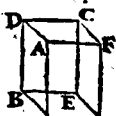
### S C H O L I O N .

*Ex hoc theoremate non difficile erit problema subsequens .  
Videlicet .*

**D A T O** plano , per datum punctum , quod in eo non est, parallelum planum ducere.

**D A T U M** planum sit AB, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur utrunque duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, agatur CE, ipsi DB, parallela; Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CF, CE, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallelæ sint; parallelæ erunt plana AB, EF, per ipsas ductæ. Quod est propositum.

31. primi



15. undec.

16.

**THEOR. 14. PROPOS. 16.**

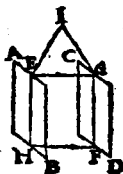
**SI** duo plana parallela plano quopiam  
fæcentur

secantur : communes illorum sectiones sunt parallelæ .

SECENTUR plana  $AB, CD$ , plano  $EF$ , per rectas  $EH, GF$ . Dico communes sectiones eorum  $EH, GF$ , esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient. Cõueniant igitur in puncto  $I$ .

Quia ergo tota recta  $HEI$ , in uno est plano, nimirum in  $AB$ , producta; Item tota recta  $FGI$ , in uno quoque est plano, uidelicet in  $CD$ , producta; conuenient etiã plana  $AB, CD$ , producta ad  $I$ . Quod est absurdum, cū ponantur parallelæ. Sunt igitur rectæ  $EH, GF$ , parallelæ.

Quare si duo plana parallelæ plano quopiam secantur, &c. Quod erat demonstrandū.



I. undec.

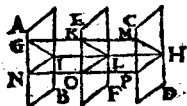
### SCHOLION.

HOC theorema nulla ratione potest conuersti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum factæ ab alio plano secante sint parallelæ, ut hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum cõmunes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallelæ sunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantum sunt parallelæ, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniant.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theorema 30. lib. I. nimirum.

Quæ eidem plano parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT duo plana  $AB, CD$ , plano  $EF$ , parallelæ. Dico &  $AB, CD$ , parallelæ esse. Secetur enim oĩa tria plana plano  $GH$ , sintq; cõmunes eorū sectiones rectæ  $GI, KL, MH$ . Secetur rursus alio plano  $NH$ , sintq; communes eorum sectiones rectæ  $NJ, OL, PH$ , hac tamen lege, ut duo plana secantia  $GH, NH$ ,

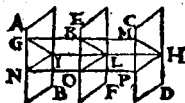




se quoque mutuo secant, quarum sectio communis sit linea recta  $H I$ . Quia igitur parallela plana  $A B, E F$ , secantur plano  $G H$ , erunt communes sectiones  $G I, K L$ , parallelae. Eodem modo parallela erunt  $M H, K L$ ; atque adeo parallela erunt inter se  $G I, M H$ . Nō aliter ostendemus, parallelas esse  $N I, P H$ . Itaque cum  $I G, I N$ , se mutuo tangentes in  $I$ , parallela sint rectis  $H M, H P$ , se tangentibus in  $H$ , existentibusq;

16. undec.

30. primi



15. undec.

Quod est propositum.

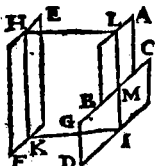
**A L I T E R.** Sumatur in tertio plano  $E F$ , punctū quodlibet  $G$ , a quo in utramque partem educatur ad planum  $E F$ , linea recta perpendicularis, occurrens plano  $A B$ , in puncto  $H$ , & plano  $C D$ , in puncto  $I$ . Quoniam igitur linea  $H G$ , recta est ad planum  $E F$ , recta quoque erit ad planum  $A B$ , si bi parallelum, per ea, quae in scholio propos.



14. undec.

14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione  $G I$ , recta eris ad planum  $C D$ . Quamobrem cum recta  $H I$ , sit recta ad plana  $A B, C D$ ; parallela inter se erunt plana  $A B, C D$ . Quod est propositum.

**Q U O D** si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duae rectae, quae alteri rectae sunt parallelae, si conueniant, unam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana  $A B, C D$ ,



plano  $E F$ , parallela, conueniantque producta secundum rectam  $C G$ . Dico plana  $A B, C D$ . vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam  $H I$ , omnia tria plana per lineas rectas  $H K, L M, M I$ . Quoniam igitur parallela sunt plana  $A B, E F$ ; erunt & communes sectiones  $L M, H K$ , parallelae. Eadem ratione parallela erunt  $I M, H K$ . Quamobrem cum recta  $L M, I M$ , parallela sint ipsi  $H K$ , existantque in eodem plano secante  $H I$ , & conueniant in  $M$ ; ipsae erunt in rectum & continuum posita, per ea, quae ad 30. propos. 1. lib. ostendimus. Ac proinde plana  $A B, C D$ ,

16. undec.

vnum

unum planum efficiunt; propterea quod recta  $LI$ , in uno iaceat plano. Quod est propositum.

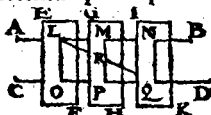
ITAQUE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conveniant, unum planum conficiunt.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur; In easdem rationes secabuntur.

RECTÆ lineæ  $AB$ ,  $CD$ , (siue eæ parallelæ sint, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transversum positæ, in diuersis existentes planis) secantur planis parallelis  $EF$ ,  $GH$ ,  $IK$ , in punctis  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $Q$ . Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, ut quidem  $LM$ , ad  $MN$ , ita esse  $OP$ , ad  $PQ$ .



Ducantur enim rectæ  $LO$ ,  $NQ$ , in planis  $EF$ ,  $IK$ , & coniungatur recta  $LQ$ , occurrens plano  $GH$ , in  $R$ , puncto, a quo ad puncta  $M$ ,  $P$ , rectæ ducantur  $RM$ ,  $RP$ , in eodem plano  $GH$ . Eritque triangulum  $LNQ$ , in uno plano: similiter triangulum  $LOQ$ , in uno plano. Quoniam uero plana parallela  $GH$ ,  $IK$ , secantur plano trianguli  $LNQ$ , erunt communes sectiones eorum  $MR$ ,  $NQ$ , parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt  $RP$ ,  $LO$ . Quam ob rem erit ut  $LR$ , ad  $RQ$ , ita  $LM$ , ad  $MN$ ; Item ut  $LR$ , ad  $RQ$ , ita  $OP$ , ad  $PQ$ ; Ac proinde ut  $LM$ , ad  $MN$ , ita  $OP$ , ad  $PQ$ . Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur, &c. Quod erat demonstrandum.

2. undec.

16. undec.

2. sexti.

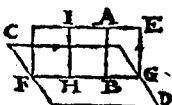
THEOR. 16. PROPOS. 18.

18.

SI recta linea plano cuiuspiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, pla-

na eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD,



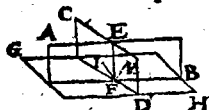
per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, utcumque in recta FG, ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur anguli ABH, IHB, duobus rectis sunt æqua-

les: Est autem ABH, rectus, per 3. defin huius lib. erit & angulus IHB, rectus. Rursus quia AB, ponitur recta ad planum CD; erit quoque IH, ad idem planum CD, recta. Eadem ratione erunt omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, ad planum CD, rectæ: Quæ cum ducantur in plano EF, ad communem sectionem FG, perpendiculares; rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius lib. Similique argumento ostenduntur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuiuspiam ad rectos sit angulos, &c. Quoderat demonstrandum.

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta.



Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, recta quoque erit ad planum GH,

Si recta est EF, ad BF, DF, recta quoque erit ad planum

GH,

G H, quod per ipsas ducitur. Si uero E F, concedatur recta ad alteram rectarum B F, D F, tantum; Sit ea recta ad B F. Quoniam igitur planum C D, ad planum G H, ponitur rectum; erit E F, quæ in plano C D, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur perpendicularis, ad planum G H, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si E F, concedatur recta ad D F. Si denique E F, ad neutram B F, D F, esse credatur recta; ducatur ex F, in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F I; Item in plano C D, ad D F, communem eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F K. Quoniam igitur planum A B, rectum ponitur ad planum G H, erit quoque perpendicularis I F, quæ in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur, recta ad planum G H, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit K F, ad idem planum G H, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum G H, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra demonstratum est. Quare E F, recta erit ad planum G H. Si duo igitur plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

11. primi

13. undec.

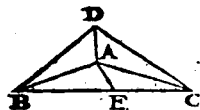
THEOR. 18. PROPOS. 20.

20.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet utut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATUR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB.

Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosvis duos maiores esse reliquo: Si uero

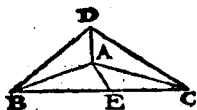


duo tantum sint æquales, & tertius utrovis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si unus, uidelicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quolibet horum

S 4 cum

rum maximo illo  $BAC$ , reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo  $BAC$ , maiores quoque esse angulos duos  $BAD$ ,  $DAC$ . In plano enim per  $AB, AC$ , ducto

23. primi.



fiat angulus  $BAE$ , angulo  $BAD$ , æqualis; & recta  $AE$ , æqualis rectæ  $AD$ . Deinde in eodem plano per  $E$ , extendatur recta  $BC$ , secans rectas  $AB, AC$ , in  $B$ , &  $C$ ;

coniunganturque rectæ  $BD, DC$ . Quoniam igitur latera  $AD, AB$ , trianguli  $BAD$ , æqualia sunt lateribus  $AE, AB$ , trianguli  $BAE$ ; & anguli quoque ipsis contenti, per

4. primi.

20. primi.

constructionem, æquales, erunt bases  $BD, BE$ , æquales. Quia uero latera  $DB, DC$ , maiora sunt latere  $BC$ ; si demantur æquales rectæ  $BD, BE$ , relinquetur recta  $CD$ , maior quam  $CE$ . Cum igitur latera  $AD, AC$ , trianguli  $DAC$ , æqualia sint lateribus  $AE, AC$ , trianguli  $EAC$ ; &

25. primi.

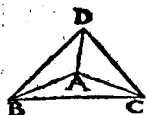
basis  $CD$ , maior basi  $CE$ ; erit angulus  $CAD$ , angulo  $CAE$ , maior. Additis ergo æqualibus angulis  $BAD, BAE$ , erunt duo anguli  $CAD, BAD$ , maiores duobus angulis  $CAE, BAE$ , hoc est, toto angulo  $BAC$ , qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde quilibet duo multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendū.

21.

## THE OR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis, continetur.

SIT angulus solidus  $A$ , contentus tribus planis angulis  $BAC, CAD, DAB$ . Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis



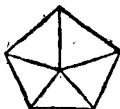
$BC, CD, DB$ , erunt constituti tres anguli solidi  $B, C, D$ , quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe  $B$ , sub  $CBA, ABD, DBC$ . At  $C$ , sub  $BCA, ACD, DCB$ ;  $D$ , uero sub  $CDA, ADB, BDC$ .

**B D C.** Quoniam uero duo anguli  $CBA, ABD$ , maiores sunt angulo  $BCD$ ; similiterque duo anguli  $BCA, ACD$ , maiores angulo  $BCD$ ; & duo anguli  $CDA, ADB$ , maiores angulo  $CDB$ : erunt sex anguli  $CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB$ , tribus angulis  $CBD, BCD, CDB$ , maiores: Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi una cum tribus ad  $A$ , æquales sint sex rectis, propter triangula  $BAC, CAD, DAB$ , (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) Si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad  $A$ , solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

**Q**UONIAM hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituent; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

**S**IT angulus solidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoque minores. Nam si omnibus angulis planis recta subtrahantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus,



tot laterum, angulorumque, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambiens. Unde omnes anguli horum triangulorum (cum anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, & horum

20. vnde.

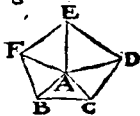
32. primi.

32. primi.

32. primi

10. vnder. horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorundem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

V E R V M ut res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus  $A$ , contentus quinque angulis planis  $BAC$ ,



$CAD, DAE, EAF, FAB$ , quibus subtiendatur ordine recte  $BC, CD, DE, EF, FB$ , ita ut constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, et in ambitu quinque triacula, tot videlicet,

3. 2. primi

quos anguli plani componunt angulum solidum  $A$ . Quia vero omnes anguli quinque triangulorum  $BAC, CAD, DAE, EAF, FAB$ , aequales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis  $BCDEF$ , aequales sunt sex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus  $B$ , tribus planis angulis  $ABC, ABF, CBF$ , combineatur; erunt duo  $CBA, ABF$ , qui sunt in triangulis, maiores angulo  $CBF$ , qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum  $A$ , constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis aequales sunt decem rectis, ut dictum est; Eadem demonstratio adhibenda est in alijs omnibus angulis solidis.

10. vnder.

22.

# THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, ut ex lineis æquales illas rectas

rectas cōnectentibus triangulū cōstituatur.

Sunt tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus A D, A E, B F, B G, C H, C I, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis D E, F G, H I, quæ rectas illas æquales cōnectunt, triangulū posse constitui; hoc est, trium rectarū D E, F G, H I, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ D E, F G, maiores sint, quam H I, ita ostēderur. Fiat angulus D A K, angulo B, æqualis, cadatq; primo A K, ad partes A D, ita ut fiat totus quidā angulus E A K, ex duobus E A D, D A K, compositus; quod quidē cōtinget, quādo duo anguli D A E, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur autē A K, ipsi A D, æqualis, cōnectanturq; rectæ K D, K E. Quoniam igitur latera A K, A D, triāguli A K D, equalia sunt lateribus B F, B G, triāguli B F G; & anguli ipsis cōtenti D A K, & B, æquales; erūt & bases K D, F G, æquales. Rursus quia latera A K, A E, triāguli A K E, equalia sunt lateribus C H, C I; & angulus E A K, maior angulo C; propterea quod duo anguli D A E, & B, maiores ponuntur angulo C; erit & basis E K, maior base H I: Sunt autē rectæ E D, D K, maiores recta E K. Igitur multo maiores erūt E D, D K, quā H I. Cū ergo D K, ostēsa sit equalis rectæ F G; erūt quoq; D E, F G, maiores quā H I. quod est, ppositū.



22. primi.

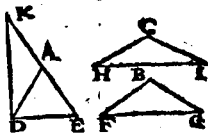
23. primi.

4. primi.

24. primi.

20. primi.

CADAT secundo A K, in rectum & cōtinuum ipsi A E; quod quidē accider, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturq; A K, ipsi A D, æqualis rursū, & cōnectatur recta K D. Erit igitur, ut prius, K D, ipsi F G, æqualis. Quoniam uero rectæ E D, D K, maiores sunt recta K E; & K E, æqualis est rectis C H, C I, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque E D, D K, maiores duabus C H, C I: Hæ autem maiores sunt, quam H I. Igitur multo maiores erunt E D, D K, quam H I. Cū ergo D K, ostēsa sit æqualis ipsi



4. primi.

20. primi.

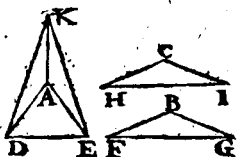
20. primi.

ipsi



ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.

CADAT postremo AK, ad partes AE, ita ut nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK; nec recta sit EAK; quod demum eveniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt maiores. Ponaturque rursus AK, ipsi AD, æqualis, & ducatur rectæ KD, KE. Erit igitur, ut prius KD, ipsi FG, æ-



4. primi.  
21. primi.

qualis. Quoniam uero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK; & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI: Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, si angulo C, ad FG, constituatur angulus æqualis, &c. Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.

20. primi.

22. primi.

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si uero duo tantum anguli sunt

4. primi.



4. primi.  
24. primi.

æquales, & tertius minor; erunt quoque duæ illorum bases æquales, & basis tertij utraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliquæ.

24. primi.

Quod si unus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales; erit quoque basis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K,

23. primi.

infra

infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, tranſcat circunſerentia circuli ex A, ad interuallum A D, deſcripta, ob æqualitatem reſtarum A D, A K, A E. Connectantur deinde reſtæ D K, K E. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo D A E; & B, æqualis eſt angulo D A K, per conſtructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo K A E. Et quia latera A D, A K, triânguli A D K, æqualia ſunt lateribus B F, B G; triânguli B F G; & anguli ipsis contenti D A K, & B, æquales; erit baſis D K, baſi F G, æqualis. Rurſus quia latera C H, C I, triânguli C H I, æqualia ſunt lateribus A K, A E, triânguli A K E; & angulus C, oſtenſus maior angulo K A E; erit & baſis H I, maior baſe K E. Quare cum D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt F G, H I, maiores quam D K, K E: Sed D K, K E, maiores ſunt, quam D E. Igitur multo maiores erunt F G, H I, quam D E. Quod eſt propoſitum.

4. primi.

24. primi.

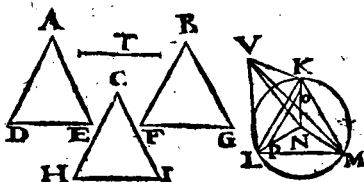
20. primi.

### PROBL. 3. PROPOS. 23.

23.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituerè. Oportet autem illos tres angulos quatuor reſtis minores eſſe.

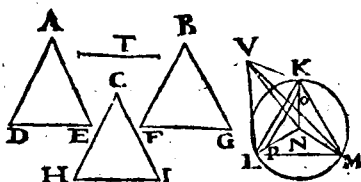
SINT tres anguli A, B, C, quatuor reſtis minores, hac cõditione, ut quilibet duo ſint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum ſolidum conſficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui diſtis tribus angulis ſint æquales. Ponantur ſex lineæ angulos diſtos cõprehendentes, nẽpe A D, A E, B F, B G, C H, C I, æquales; ſubtendanturque baſes D E, F G, H I. Fieri ergo poteſt, ut ex D E, F G, H I, triângulum conſtituatur.



2. un dec

5. quarti.

fituatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulū KLM, sitq; latus KL, rectæ DF; latus LM, rectæ FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. Describatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrū



N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritq; quilibet rectarum angulos planos comprehendentiū, nempe AD, AE, &c. maior qualibet du-

8. primi.

arum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrū N, intra triangulū KLM; quod quidem fiet, quando triangulū est oxygonium. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quā NK, NL, erūt uel æquales, uel minores. Sint ergo æquales. Quoniā igitur latera AD, AE, triāguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, triāguli NKL; & basis DE, basi KL, æqualis: erit angulus A, angulo KNL, equalis. Eodē argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, equalis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis, ex coroll. propof. 15. lib. 1. erūt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur n. quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neq; minores. Si n. minores sint AD, AE, quā NK, NL; abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniā igitur est ut NK, ad NO, ita NL, ad NP, cū & antecedētia inter se, & cōsequentia sint inter se æqualia; erunt latera NK, NL, triāguli NKL, secta proportionaliter; ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triāgulo NKL, æquiangulum. Igitur erit ut NK, ad KL, ita NO, ad OP. Est autē NK, maior quā NO. Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quā OP. Quocirca cū latera AD, AE, triāguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, triāguli NOP; & basis DE, maior base OP; erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadē ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, ma-

2. sexti.

29. primi.

4. sexti.

14. quinti.

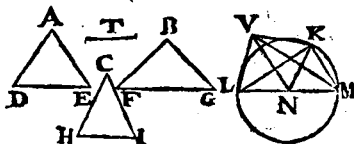
25. primi.

ior

ior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad  $N$ , quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propof. 15. lib. 1. erunt tres anguli  $A, B, C$ , maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt  $AD, AE$ , quā  $NK, NL$ ; sed neq; æquales: Igitur maiores.

CADAT secundo centrum  $N$ , in latus  $LM$ ; quod tum continget, quando triangulum  $KLM$ , angulum  $LKM$ , habuerit rectum. Si igitur  $AD, AE$ , dicantur esse æquales ipsis  $NK, NL$ ; erūt quoque  $BF, BG$ , æquales eisdē  $NK, NL$ .

Cum ergo  $NK$ , æqualis sit ipsi  $NM$ ; æquales erunt  $BF, BG$ , rectæ  $LM$ : Po-

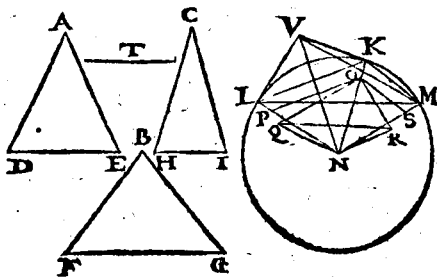


sita autē fuit  $LM$ , æqualis ipsi  $FG$ . Igitur  $BF, BG$ , æquales quoque sunt rectæ  $FG$ . Sunt autē & maiores  $BF, BG$ , quā  $FG$ . Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt  $AD, AE$ , ipsis  $NK, NL$ . Quod si  $AD, AE$ , minores credantur, quam  $NK, NL$ ; erunt quoque  $BF, BG$ , minores quā  $NK, NL$ . Cū ergo  $NK$ , æqualis sit ipsi  $NM$ ; minores erunt  $BF, BG$ , quā recta  $LM$ : Posita autem fuit  $LM$ , ipsi  $FG$ , æqualis. Igitur  $BF, BG$ , minores quoque sunt recta  $FG$ . Quod est absurdum, cum sint maiores. Non ergo minores sunt  $AD, AE$ , quā  $NK, NL$ ; sed neque æquales: Igitur maiores.

20. primi.

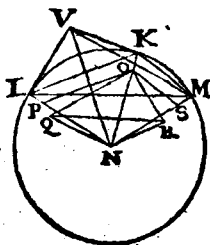
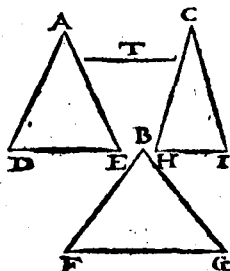
20. primi.

CADAT postremo centrū  $N$ , extra triāgulum  $KLM$ , infra latus  $LM$ ; quod demum accideret, quādo angulus  $LKM$ , fuerit obtusus. Si igitur dicatur  $AD, AE$ , esse æquales ipsis  $NK, NL$ ; cū & basis  $DE$ , basi  $KL$ , ponatur æqualis, erit angulus  $A$ , angulo  $KNL$ , æqualis. Eadē ratione angulus  $C$ , angulo



8. primi.

8. primi.



maiorē ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt  $AD, AE$ , ipsi  $NK, NL$ , quod si  $AD, AE$ ,

credantur esse minores, quam  $NK, NL$ ; Si abscondantur  $NO, NP$ , ipsi  $AD, AE$ , æquales, & ducatur recta  $OP$ ; demonstrabitur, ut in primo casu, angulus  $A$ , maior angulo  $ONP$ ; & eadē ratione angulus  $C$ , maior angulo  $KNM$ . Fiat angulus  $ONQ$ , angulo  $A$ ; & angulus  $ONR$ , angulo  $C$ , æqualis: ponanturque  $NQ, NR$ , æquales ipsi  $AD, AE$ , & connectantur  $OQ, OR$ ; caderq;  $OQ$ , infra  $OP$ , propterea quod per puncta  $O, P, Q$ , transeat circumferentia circuli ex  $N$ , ad intervallum  $NO$ , descripta, cum æquales sint rectæ  $NO, NP, NQ$ . Quare cum angulus  $PON$ , æqualis sit angulo  $LKN$ , externus interno; erit angulus  $QON$ , minor angulo  $LKN$ . Eadem ratione ostendetur angulus  $NOR$ , minor angulo  $NKM$ , si ducatur  $OS$ , parallela ipsi  $KM$ . Cader enim similiter  $OR$ , infra  $OS$ . Igitur totus angulus  $LKM$ , toto angulo  $QOR$ , maior erit. Quoniam uero latera  $NO, NQ$ , trianguli  $NOQ$ , æqualia sunt lateribus  $AD, AE$ , trianguli  $ADE$ ; Est autem & angulus  $ONQ$ , angulo  $A$ , æqualis, per constructionem; erit  $OQ$ , ipsi  $DE$ , hoc est, ipsi  $KL$ , æqualis. Eodem modo erit  $OR$ , ipsi  $KM$ , æqualis. Connexa iam recta  $QR$ , cum latera  $KL, KM$ , trianguli  $LKM$ , æqualia sint lateribus  $OQ, OR$ , trianguli  $OQR$ ; & angulus

23. primi

29. primi

4. primi

& angulus  $L K M$ , maior angulo  $Q O R$ , ut ostendimus:  
erit basis  $L M$ , hoc est  $F G$ , maior base  $Q R$ . Quoniam igitur  
latera  $B F$ ,  $B G$ , trianguli  $B F G$ , æqualia sunt lateribus  
 $N Q$ ,  $N R$ , trianguli  $N Q R$ ; & basis  $F G$ , maior base  
 $Q R$ ; erit angulus  $B$ , maior angulo  $Q N R$ . Rursus quia  
angulus  $O N Q$ , angulo  $A$ ; & angulus  $O N R$ , angulo  $C$ ,  
factus est æqualis, erit angulus totus  $Q N R$ , duobus  $A$ ,  
&  $C$ , æqualis: Sed  $A$ , &  $C$ , maiores ponuntur angulo  $B$ .  
Igitur & angulus  $Q N R$ , maior erit angulo  $B$ . Quod est  
absurdum, cum  $B$ , ostensus sit maior angulo  $Q N R$ .  
Non ergo minores sunt  $A D$ ,  $A E$ , quam  $N K$ ,  $N L$ ; sed  
neque æquales: Igitur maiores.

Iam uero, cum rectæ  $A D$ ,  $A E$ , maiores sint rectis  
 $N K$ ,  $N L$ , ubicunque centrum  $N$ , existat; possit recta  $A D$ ,  
plus quam recta  $N K$ , quadrato lineæ  $T$ , per lemma pro-  
pos. 14. lib. 10. ita ut quadratum rectæ  $A D$ , æquale sit qua-  
dratis rectarum  $N K$ , &  $T$ . Ex centro  $N$ , excitetur ad pla-  
num circuli  $K L M$ , perpendicularis  $N V$ , rectæ  $T$ , æqua-  
lis; connectanturq; rectæ  $K V$ ,  $L V$ ,  $M V$ . Quoniam igitur  
 $N V$ , recta est ad planum circuli  $K L M$ , recta quoque  
eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas  $N K$ ,  $N L$ ,  $N M$ ;  
ac proinde quadratum rectæ  $V K$ , quadratis rectarum  $K N$ ,  
 $N V$ , æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ  $A D$ , æ-  
quale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum  $K N$ ,  
 $N V$ ; æqualia erunt inter se quadrata rectarum  $V K$ , &  $A D$ .  
Ac propterea æquales erunt rectæ  $V K$ ,  $A D$ . Rursus quia  
latera  $V N$ ,  $N K$ , trianguli  $V N K$ , æqualia sunt lateribus  
 $V N$ ,  $N L$ , trianguli  $V N L$ ; & anguli ipsis contenti  $V N R$ ,  
 $V N L$ , recti; erit basis  $V K$ , æqualis basi  $V L$ ; Atq; eadem  
ratione rectæ  $V M$ . Quare tres rectæ  $V K$ ,  $V L$ ,  $V M$ , æqua-  
les sunt inter se: Ostensa est autem recta  $V K$ , æqualis rectæ  
 $A D$ . Tres ergo rectæ  $V K$ ,  $V L$ ,  $V M$ , æquales sunt rectæ  
 $A D$ , & ob id, rectis  $A E$ ,  $B F$ ,  $B G$ ,  $C H$ ,  $C I$ . Quamob-  
rem, cum latera  $V K$ ,  $V L$ , trianguli  $V K L$ , æqualia sint  
lateribus  $A D$ ,  $A E$ , trianguli  $A D E$ ; & basis  $K L$ , basi  
 $D E$ ; erit angulus  $K V L$ , angulo  $A$ , æqualis. Non secus  
demonstrabimus, angulum  $L V M$ , angulo  $B$ ; & angulum  
 $K V M$ , angulo  $C$ , esse æqualem. Quare angulus solidus  
 $V$ , continetur tribus angulis planis  $K V L$ ,  $L V M$ ,  $M V K$ ,

T qui

qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

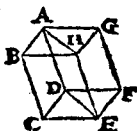
24.

**THEOR. 21. PROPOS. 24.**

**SI** solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.

**S**IT parallelepipedum A B E F, (de hoc enim intelligē da est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris A C, C F, F H, H A, A F, B E, quarū aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cum enim parallela B G, C F, secentur plano A C; erunt communes sectiones A B, D C, parallelæ. Similiter cum plana

16. undec.



parallela A F, B E, secentur plano A C; erunt communes sectiones A D, B C, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera A B C D. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam

opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ A B, B H, parallelæ sint rectis D C, C E, & non in eodem plano, sed in oppositis; erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemq; argumento reliqui anguli parallelogrammi B G, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi C F. Quoniam vero A B, ipsi D C, in parallelogrammo A C; & B H, ipsi C E, in parallelogrammo B E, æqualis est; erit ut AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea ut BH, ad HG, ita CE, ad EF, &c. eadē de causa: Erunt latera parallelogrammorum B G, C F, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis ita diametris A H, D E; cū latera A B, B H, trianguli ABH, æqualia sint lateribus D C, C E, trianguli DCE; & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, ut ostensum est; erūt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. Quare cū triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum B G, C F; erūt parallelogramma B G, C F, inter se æqualia. Similiter demonstrabim⁹, similia & æqualia esse parallelogram-

10. undec.

34. primi.

34. primi.

10. undec.

1. primi.

1. primi.

lelogrāma opposita AC, GE, & AF, BE. Si solidū ergo paral-  
lelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogram-  
ma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

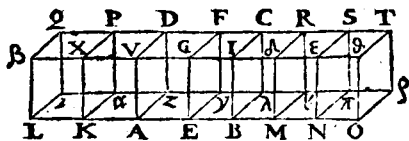
THEOR. 22. PROPOS. 25.

25.

SI solidum parallelepipedum plano se-  
cetur aduersis planis parallelo: Erit quem-  
admodū basis ad basim, ita solidū ad solidū.

SECETVR parallelepipedū ABCD, plano EF, paral-  
lelo oppositis planis AD, BC. Dico ut est basis AG, ad basim  
BG, ita esse solidū AEFD, ad solidū BEFC. Intelligat enim  
parallelepipedū ABCD, productū in utramq; partē quan-  
tumlibet, sumaturq; in AB, protracta quocunq; rectæ AK  
KL, ipsi AE; & quocunq; rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æ-

quā  $\frac{1}{2}$ . Dein-  
de per pūctā  
K, L, M, N,  
O, ducantur  
plana KP,  
LQ, MR,



NS, OT, parallela planis AD, EF, BC. p scholion ppos. 15.

huius lib. Quoniā igitur solidū AEFD, cōiunctur planis pa-  
rallelis ex hypothēsi, ipsum erit parallelepipedū, ex definitio-  
ne, habebitq; plana opposita, parallelogrāma, similia, & æqua-

lia. Eodē mō erūt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF,  
BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebutq; plana

opposita, parallelogrāma, similia, & æqualia. Quoniam uero  
parallelogrāma AK, KV, LX, cū sint sup æquales bases AE,

AK, KL, æqualia sunt; & similia quoq; cū anguli unius sint  
æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æ-

qualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportio-  
nalia. Eademque ratione æqualia, & similia sunt parallelo-

grāma AY, KZ, LX. Cū igitur æqualia quoq; sint, & similia pa-  
rallelogrāma AD, KP, LQ; Erūt tria plana AG, AY, AD,

solidi AEFD, æqualia, & similia tribus planis KV,  
KZ, KP, solidi AKPD; & tribus planis LX, LA,

LQ, solidi KLQP: Sunt autem tria in unoque-

T 2 que

24. undec.

36. primi.

29. primi.



24. undec.

que solido æqualia, & similia tribus, reliquis oppositis in eodem, nempe  $AG$ , ipsi  $ZF$ , &  $AY$ , ipsi  $VF$ , &  $AD$ , ipsi  $EF$ , &c. Igitur per defin. 10. huius libri, æqualia sunt solida  $A E F D$ ,  $A K P D$ ,  $K L Q P$ . Eodem argumento æqualia ostendentur solida  $E B C F$ ,  $B M R C$ ,  $M N S R$ ,



NOT S.

Quare quam multiplex est basis  $LG$ , basis  $AG$ , tam multiplex erit

solidum  $LEFQ$ , solidi  $A E F D$ ; Et quam multiplex est basis  $OG$ , basis  $BG$ , tam multiplex erit solidum  $O E F T$ , solidi  $B E F C$ . Quoniam uero si basis  $LG$  (multiplex basis  $AG$ , primæ magnitudinis,) æqualis est basi  $OG$ , (multiplici basis  $BG$ , secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum  $LEFQ$ , (multiplex solidi  $A E F D$ , tertiæ magnitudinis) solido  $O E F T$ , (multiplici solidi  $B E F C$ , quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus  $LG$ ,  $OG$ , æqualibus existentibus, æqualia quoque sint & similia sex parallelogramma solidi  $LEFQ$ , sex parallelogrammis solidi  $O E F T$ : Si autem basis maior est base, solidum quoque solido maius est; & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 3. ut basis  $AG$ , prima magnitudo, ad basin  $BG$ , secundam magnitudinem, ita solidum  $A E F D$ , tertia magnitudo, ad solidum  $B E F C$ , quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis  $DY$ , ad basin  $CY$ ; & ut basis  $AY$ , ad basin  $BY$ ; & ut basis  $DG$ , ad basin  $CG$ . Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

### SCHOLION.

*Hæc propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo; erit quemadmodum basis ad basin, ita solidum ad solidum. Sit enim primo prisma  $ABCD E F$ , cuius plana aduersa sint triangula  $ABC$ ,  $DEF$ ; seceturq; plano  $GHI$ , aduersis*

uerfis planis parallelo. Dico ut est basis  $AI$ , ad basin  $FI$ , ita esse solidum  $ABCIHG$ , ad solidum  $FEDIHG$ . Intelligatur prisma  $ABCDE F$ , in utramque partem quantumlibet productum,

ex  $A F$ , producta utrinque; capiantur quotcumque recta  $AK$ ,  $KL$ , ipsi  $AG$ ;



et quocumque recta  $FM$ ,  $MN$ ,  $NO$ , ipsi  $FG$ , equales. Deinde per puncta  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $O$ , ducantur plana  $KPQ$ ,  $LRS$ ,  $MTV$ ,  $NXY$ ,  $OZ\alpha$ , parallela planis  $ABC$ ,  $GHI$ ,  $FED$ , per scholion propos. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela  $ABC$ ,  $GHI$ , secantur plano  $AI$ ; erunt communes sectiones  $AC$ ,  $GI$ , parallela: Sunt autem et  $AG$ ,  $CI$ , parallela ex hypothesi, ob parallelogrammum  $AD$ . Igitur parallelogrammum est  $AI$ . Rursus quia plana parallela  $ABC$ ,  $GHI$ , secantur plano  $AH$ ; erunt communes sectiones  $AB$ ,  $GH$ , parallela: Sunt autem et  $AG$ ,  $BH$ , parallela, ob parallelogrammum  $AE$ . Igitur parallelogrammum est  $AH$ . Eodem modo parallelogrammum ostendetur  $CH$ . Quoniam uero latera  $AC$ ,  $AB$ , trianguli  $ABC$ , equalia sunt lateribus  $GI$ ,  $GH$ , trianguli  $GHI$ ; cum  $AC$ ,  $AB$ , ipsi  $GI$ , et  $AB$ , ipsi  $GH$ , sit equalia; et anguli  $CAB$ ,  $IGH$ , sunt quoque equalia, eo quod recte  $CA$ ,  $AB$ , parallelae sint rectis  $IG$ ,  $GH$ , et non in eodem plano: Erunt triangula  $ABC$ ,  $GHI$ , equalia inter se, et equiangula. Quare latera circum equalia angulo: proportionalia habebunt; Ac idcirco similia erunt. Igitur solidum  $ABCIHG$ , contentum duobus planis oppositis  $ABC$ ,  $GHI$ , equalibus et similibus, atque parallelogrammis  $AI$ ,  $IB$ ,  $BG$ , prisma est. Eadem arte prismata erunt  $ABCQPK$ ,  $KPQ SRL$ ;  $FEDIHG$ ,  $FEDVTM$ ,  $MTVYXN$ ,  $NXY\alpha ZO$ ,  $LRSIHG$ ,  $OZ\alpha IHG$ . Quoniam uero parallelogramma  $AI$ ,  $IC$ ,  $LQ$ , equalia sunt et similia; necnon  $AH$ ,  $KB$ ,  $LP$ ; et  $CH$ ,  $QB$ ,  $SP$ ; Erunt omnia plana prismatis  $ABCIHG$ , equalia et similia omnibus planis prismatum  $ABCQPK$ ,  $KPQ SRL$ . Quare, per defin. 10. huius lib. equalia erunt prismata  $ABCIHG$ ,  $ABCQPK$ ,  $KPQ SRL$ . Eadem ratione equalia erunt

16. undec.

16. undec.

34. primi.

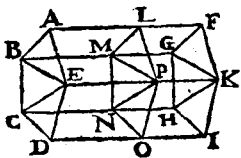
10. undec.

4. primi.

4. sexti.

prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYAZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; Es quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma OZ & IHG, prismatis FEDIHG. Quia vero si basis LI, (multiplex basis AI, prima magnitudinis) equalis est basi OI, (multiplici basis FI, secunda magnitudinis; ) equale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertia magnitudinis, ) prismati OZ & IHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quarta magnitudinis; ) propterea quod basibus LI, OI, existentibus equalibus, equalia quoque sint & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZ & IHG. Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin 6. lib. 5. ut basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, ut est basis AH, ad basin FH: & ut basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT secundo prisma ABCDEFGHIK, cuius oppo-



sita plana sint polygona, nēpe pentagona, seceturq; plano LMNOP. Dico rursus, ut est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resolvan-

tur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMCKGF, per ea, quae demonstrata sunt. Eodem modo erit ut basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPML, ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPN, ad prisma NOPKHI. Ut autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, ut CN, ad NH; Et ut CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPML, CDEPN, ad prismata

LM-

1. fini.

*L M P K G F, M N P K G H, N O P K H I, eandem habent proportionem ei, quam habes C M, ad N G; ac proinde eandem inter se. Ut autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit ut prisma B C E P M N, ad prisma M N P K G H, hoc est, ut basis C M, ad basin N G; ita prisma A B C D E I. M N O P, ex tribus compositum ad prisma L M N O P F G H I K, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.*

12. quinsi.

*P O T E S T* tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua usi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producat prisma in utranque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se aequalia, & similia; propterea quod latera eorum sint parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum; ac proinde angulos aequales comprehendant, &c. Unde, ut prius, ostenduntur prismata ex una parte inter se aequalia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

16. undec.

10. undec.

# COROLLARIUM.

*Ex his inferitur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante; Sectionem esse figuram æqualem, & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est, in priori prismate, triangulum G H I, æquale esse & simile triangulo A B C, atque adeo triangulo D H F. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.*

## PROBL. 4. PROPOS. 26.

26.

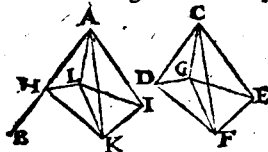
*A D* datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

*S I T* ad punctum A, in data recta A B, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, cõtecto tribus angulis planis D C E, D C F, F C E, non in eodẽ plano existentibus. Ducat ex F, ad planũ p C D, C E, ductũ perpendicularis F G;

11. undec.

23. primi.

connectanturq; rectæ D F, D G, E F, E G, C G. Deinde abscindatur A H, æqual sipsi C D, fiatq; angulus H A I, angulo D C E, æqualis; & recta A I, rectæ C E, æqualis. Rursus in plano per A H, A I, ductum constituatur angulus H A L, angulo D C G, qui in plano per C D, C E, ducto existit; & recta A L, rectæ C G, æqualis. Ex L, vero ad planum, in quo sunt tres A H, A L, A I, erigatur perpendicularis L K, quæ ipsi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta K A. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis H A I, H A K, K A I, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis H K, H L, I K, I L; cum latera A H, A L, trianguli A H L, æqualia sint lateribus C D, C G, trianguli C D G; & anguli H A L, D C G, æquales, per constructionem; Erunt bases H L, D G, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus H A L, D C G, ab æqualibus H A I, D C E, reliqui æquales sunt L A I, G C E: Cum igitur & latera A L, A I, trianguli A L I, æqualia sint lateribus C G, C E, trianguli C G E, per constructionem; æquales quoque erunt bases L I, G E. Quia igitur latera L H, I K, æqualia sunt lateribus G D, G F; & anguli H L K, D G F, recti, ex defin. 3. huius lib. erunt & bases H K, D F, æquales. Quare cum & latera A H, A K, trianguli A H K, sint æqualia lateribus C D, C F, ex constructione; Erunt quoque anguli H A K, D C F, æquales. Denique quia latera L I, I K, sunt æqualia lateribus G E, G F; & anguli I L K, E G F, recti, ex defin. 3. huius lib. Erunt bases I K, E F, æquales: Cum igitur & latera A I, A K, trianguli A I K, lateribus C E, C F, trianguli C E F, sint æqualia, ex constructione; Erunt quoque anguli I A K, E C F, æquales. Sunt ergo tres anguli plani H A I, H A K, K A I, solidum angulum A, componentibus, æquales tribus angulis planis D C E, D C F, F C E, angulum solidum C, componentibus; Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad daram itaq; rectam lineam, cuiusq; punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendū.



12. undec.

4. primi.

4. primi.

4. primi.

8. primi.

4. primi.

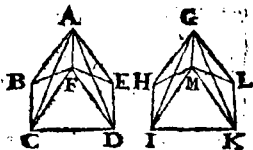
8. primi.

SCHO.

SCHOLION.

Quod si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendenda erunt omnibus angulis planis rectæ in uno eodemq; existentes plano, (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita ut figuram planam polygonam constituant, pyramisq; quadā multilatera efficiatur. Si enim figura polygonæ in triangula resoluitur, habebuntur tot pyramides trilatere, quot triangula in figura polygonæ continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituentur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, cõstitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtrendenda sunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, ut fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula resoluitur BCF, FCD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Acque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.



PROBL. 5. PROPOS. 27.

27.

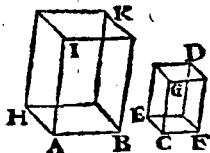
A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Si T

26. undec.

12. sexvi.

SIT a data recta A B, describendum parallelepipedum simile, similiterq; positum parallelepipedo C D. Fiat ad rectam A B, eiusq; punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita ut tres anguli plani H A I, I A B, B A H, æquales sint tribus angulis planis E C G, G C F, F C E. Deinde ut est C F, ad C G, sic fiat A B, ad A I, & ut C G, ad C E, ita A I, ad A H; eritq; ex æquo, ut C F, ad C E,



ita A B, ad A H. Post hæc, perficiatur parallelepipedum A K, completis nimirum parallelogrammis B H, H I, I B, & per I, B, H, ductis planis I K, B K, H K, quæ parallela sint parallelogrammis B H, H I, I B. Dico parallelepipedum A K, parallelepipedo C D, simile esse similiterq; positum. Cum enim anguli B A H, F C E, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe ut B A, ad A H, ita F C, ad C E, ex constructione; erunt parallelogramma H B, E F, similia, similiterq; posita. Eadem ratione similia erunt, similiterq; posita parallelogramma H I, E G, & I B, G F. Tria igitur plana B H, H I, I B, solidi A K, similia sunt, similiterq; posita tribus planis F E, E G, G F, solidi C D. Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis.

24. undec.

Quare sex plana solidi A K, similia sunt, similiterq; posita sex planis solidi C D; Ac proinde, ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterq; posita, solida A K, C D. A data ergo recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.

28.

## THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduerforum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

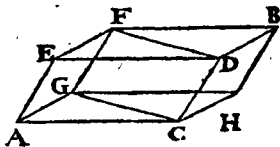
SIT parallelepipedum A B, in quo plana opposita sint A H,

A  
C  
eff  
G  
pro  
&  
pla  
per  
fec  
ped  
plan  
leio  
mil  
G  
tera  
pro  
la.  
mil  
mu  
gra  
& si  
mis  
pris  
con  
ped  
plan

der  
ne  
loc  
lia.

s.

A H, E B, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ C G, D F. Quoniam igitur utraque C D, G F, parallela est, & æqualis ipsi A E, cum sint parallelogramma C E, G E; erunt & inter se parallelae, & æquales C D, G F. Ac proinde, quæ ipsas coniungunt C G, D F, parallelae erunt, & æquales, ideoq; in uno plano. Dico planū quod per C G, D F, ducitur, secare bifariam parallelepipedum A B. Cum enim plana A H, E B, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula A G C, G C H; E F D, F D B, æqualia inter se: Sunt autem & la-tera circa angulos æquales G A C, C H G; F E D, D B F, proportionalia; Igitur similia quoque erunt dicta triangula. Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale sit & simile parallelogrammo C B; & A D, ipsi G B; & C F, commune: Erunt duo triangula A G C, E F D, & parallelogramma A F, A D, C F, prismatis A C G F E D, æqualia & similia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrammis C B, B G, C F, prismatis H G C D B F; proptereaque prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum component parallelepipedum A B, sectum erit parallelepipedum A B, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.



34. primi.

9. undec.

33. primi.

24. undec.

6. sexti.

24. undec.

THEOR. 24. PROPOS. 29.

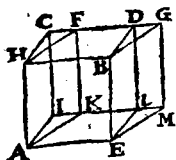
29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SUPER basin A B, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem



eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda  $A C D E$ ,  $A F G E$ , quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe



35. primi.

34. primi.

4. sexti.

24. undec.

36. primi.

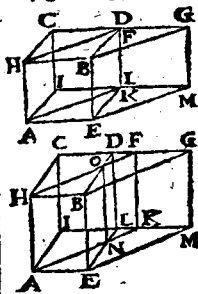
34. primi.

$A I$ ,  $A K$ ,  $E L$ ,  $E M$ , in recta  $I M$ ; &  $H C$ ,  $H F$ ,  $B D$ ,  $B G$ , in recta  $C G$ . Dico parallelepipeda  $A C D E$ ,  $A F G E$ . esse inter se equalia. Cum enim equalia sint parallelogramma  $A L$ ,  $A M$ , super eadem basi  $A E$ , & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato communi trapezio  $A E L K$ , equalia quæque triangula  $A I K$ ,  $E L M$ . Quoniam uero omnia latera trianguli  $A I K$ , equalia sunt omnibus lateribus trianguli  $H C F$ ; erit triangulum  $A I K$ , triangulo  $H C F$ , æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum  $E L M$ , triangulo  $B D G$ , æquale erit & simile. Rursus quia parallelogrammum  $A C$ , æquale est, & simile parallelogrammo  $E D$ ; & eadem ratione parallelogrammum  $A F$ , parallelogrammo  $E G$ ; Sed &  $I F$ , ipsi  $L G$ , cum bases  $I K$ ,  $L M$ , sint æquales, ( Nam cum rectæ  $I L$ ,  $K M$ , æquales sint ipsi  $A E$ , erunt quoque inter se æquales; quare communi dempta  $K L$ , æquales erunt  $I K$ ,  $L M$  ) Erunt omnia plana prismatis  $A I K F C H$ , æqualia & similia omnibus planis prismatis  $E L M G D B$ . Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido  $A H F K L D B E$ , æqualia fient parallelepipeda  $A C D E$ ,  $A F G E$ . Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

### SCHOLIUM

$H A E C$  propositio similis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere medijs, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, ut ex demonstratione liquet. Unde reliqui duo casus, quando nimirum punctum  $K$ , in punctum  $L$ , cadit, vel ultra  $L$ , eodem modo demonstrabuntur, ut in his si-

his figuris appareat: Nam in secundo casu si ex parallelogram-



mis equalibus  $AL$ ,  $AM$ , auferatur  
triangulum commune  $ALB$ , erunt re-  
liqua triangula  $AIK$ ,  $ELM$ , aequa-  
lia. Vnde, ut prius, equalia erunt  
prismata  $AIKFCH$ ,  $ELMGDB$ .  
Adito ergo prismate cōi  $AKEBHD$ ,  
equalia fiet parallelepipeda  $ACDE$ ,  
 $AFGE$ .

IN tertio uero casu, si ex parallelo-  
grammis equalibus  $AL$ ,  $AM$ , dema-  
tur triangulum commune  $ANE$ ,  
erunt reliqua trapezia  $AILN$ ,  
 $NKME$ , equalia; quibus si addatur triangulum commune  
 $KLN$ , tota triangula  $AIK$ ,  $ELM$ , equalia fient. Vnde,  
ut prius, equalia erunt prismata  $AIKFCH$ ,  $ELMGDB$ ,  
a quibus si auferatur prisma commune  $KLNO$   $DF$ ; (Nam  
communis sectio planorum  $AF$ ,  $DE$ , est recta  $NO$ .) remane-  
bit solidum comprehensum planis  $AILN$ ,  $NOHA$ ,  $AICH$ ,  
 $HCD O$ ,  $CDLI$ ,  $DLNO$ , aequale solido contento planis  
 $ENKM$ ,  $MKFG$ ,  $GFOB$ ,  $FKNO$ ,  $BGME$ ,  $EBON$ .  
Si igitur addatur utrique prisma cōmune  $AENOBH$ , fient  
parallelepipeda  $ACDE$ ,  $AFGE$ , inter se equalia.

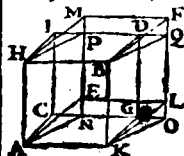
THEOR. 25. PROPOS. 30.

30.

**SOLIDA** parallelepipeda super ean-  
dem basin constituta, & in eadem altitudi-  
ne, quorum insistentes lineæ nō i iisdem col-  
locantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

**SUPER** basin  $AB$ , in eadem altitudine, hoc est, inter  
eadē plana parallela, sint constituta parallelepipeda  $AIDK$ ,  
 $AMFK$ , quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis ba-  
sis exeuntes  $AC$ ,  $AE$ ,  $KG$ ,  $KL$ ;  $HI$ ,  $HM$ ,  $BD$ ,  $BF$ , non  
sint in eisdem rectis, hoc est, neque  $CI$ ,  $GD$ , protractæ  
transcant per puncta  $M$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $L$ , neque  $CG$ ,  $ID$ , produ-  
ctæ,

atq; , &c. Dico parallelepipeda  $AIDK$ ,  $AMFK$ , esse æqualia. Cum enim plana  $CD$ ,  $EF$ , opposita basi  $AB$ , sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ  $CG$ ,  $ID$ , quarum  $CG$ , secet  $EM$ ,  $LF$ , protrahat in punctis  $N$ ,  $O$ ; Et  $ID$ , eadem in punctis  $P$ ,  $Q$ ; adiunganturque rectæ  $AN$ ,  $KO$ ,  $HP$ ,  $BQ$ . Quia igitur rectæ  $PQ$ ,  $MF$ , sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo  $FP$ ; &  $ME$ , ipsi  $HB$ , est æqualis; erunt &  $PQ$ ,  $HB$ , æquales: Sunt autem & parallelæ, propter



34. *primi.*

33. *primi.*

29. *undec.*

parallelogrammum  $HIDB$ . Igitur &  $HP$ ,  $BQ$ , parallelæ sunt & æquales, ideoq; parallelogrammum est  $HPQB$ . Eadem ratione parallelogramma erunt  $HPNA$ ,  $ANOK$ ,  $KOQB$ : Est autem & parallelogrammum  $NOQP$ . Igitur parallelepipedum est  $APQK$ . Quamobrem parallelepipedum  $AIDK$ , æquale est parallelepipedo  $APQK$ , cum utriusque eadem sit basis  $AB$ , & insistentes lineæ sint in rectis eisdem  $CO$ ,  $IQ$ . Eodem modo eidem parallelepipedo  $APQK$ , æquale erit parallelepipedum  $AMFK$ , cū utriusque eadem sit basis  $AB$ , & insistentes lineæ sint in rectis eisdem  $NM$ ,  $OF$ . Quare parallelepipeda  $AIDK$ ,  $AMFK$ , inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

### S C H O L I O N.

*CONVERTERE hæc propositio, atque precedens, in hunc modum.*

**SOLIDA** parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

*NA M si unum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum,*

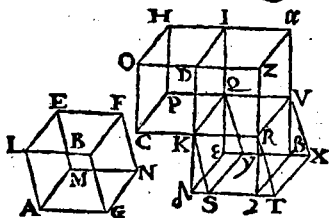
abscissum, & reliquum. Cum igitur & totum huic reliquo ponatur aequale, & aequale erit abscissum toti. Quod est absurdum. 29. vel 30. undec.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

31. 32.

**SOLIDA** parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

**SUPER** æquales bases AB, CD, in eadē altitudine sint constituta parallelepipeda A EFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sin. n. primū insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB, & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes diæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, sitq; KR, æ-

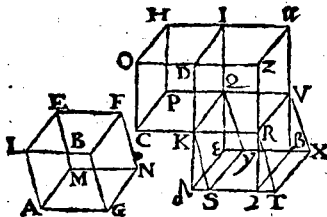


qualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturq; KS, æqualis ipsi LA, & perficiatur parallelogrammum KT, super quod, ad altitudinē perpendicularis KQ, construatut parallelepipedū QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LP, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & similia. Rursus quia latera KQ, KS, æqualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod A Q. LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & similia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia sint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoq; parallelogramma KV, LF, æqualia & similia. Quare cū tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia sint & similia tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi A EFG; Tā aut illa, quæ hæc æqualia sint & simi-

24. undec.

24. undec. & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipedum  $QSTV$ ,  $EAGF$ , inter se æqualia.

CONVENIANT rectæ  $DK$ ,  $TS$ , productæ in  $\delta$ ;



&  $IQ$ ,  $XY$ , in  $\epsilon$ , compleaturq; parallelepipedum  $Q\delta\gamma V$ . Itē  $H1$ ,  $\beta V$ , protractæ conveniant in  $\alpha$ ; &  $OD$ ,  $\gamma R$ , in  $Z$ , perficiaturq; parallelepipedum  $IKRa$ . Quoniam igitur parallelepipedum  $QSTV$ ,  $Q\delta\gamma V$ , eandē habent basin  $KV$ , suntq; in eadem altitudine, nempe inter eadē plana parallela  $KV$ ,  $\delta X$ , & insistentes ipsorum linæ  $KS$ ,  $K\delta$ ,  $RT$ ,  $R\gamma$ ;  $QY$ ,  $Q\epsilon$ ,  $VX$ ,  $V\beta$ , collocantur in eisdem rectis  $\delta T$ ,  $\epsilon X$ ; ipsa inter se æqualia erunt. Est autē parallelepipedum  $QSTV$ , parallelepipedo  $EAGF$ , æquale: Igitur eidem parallelepipedo  $EAGF$ , æquale erit parallelepipedum  $Q\delta\gamma V$ .

29. undec.

inter se æqualia erunt. Est autē parallelepipedum  $QSTV$ , parallelepipedo  $EAGF$ , æquale: Igitur eidem parallelepipedo  $EAGF$ , æquale erit parallelepipedum  $Q\delta\gamma V$ .

35. primi.

QUONIAM vero parallelogramma  $KT$ ,  $K\gamma$ , æqualia sunt inter se; &  $KT$ , æquale est ipsi  $LG$ , erit &  $K\gamma$ , ipsi  $LG$ , hoc est, ipsi  $CD$ , æquale; cum bases  $LG$ ,  $CD$ , ponantur æquales. Quare erit, ut  $CD$ , ad  $DR$ , ita  $K\gamma$ , ad  $DR$ : Ut autē  $CD$ , basis ad basin  $DR$ , ita est solidū  $CHIK$ , ad solidū  $K\beta\alpha R$ ; cum parallelepipedum  $CH\alpha R$ , secetur plano  $IK$ , planis oppositis  $CH$ ,  $\alpha R$ , parallelo: Eteadem ratione ut  $K\gamma$ , ad  $DR$ , ita est solidū  $Q\delta\gamma V$ , ad solidū  $IKRa$ ; cum & parallelepipedū  $I\delta\gamma\epsilon$ , secetur plano  $KV$ , oppositis planis  $D\alpha$ ,  $\delta\beta$ , parallelo. Igitur æqualia erunt parallelepipedum  $CHIK$ ,  $Q\delta\gamma V$ ; cum eandem habeant proportionem ad idem solidū  $IKRa$ . Quare cum parallelepipedum  $Q\delta\gamma V$ , sit ostensum æquale parallelepipedo  $A EFG$ ; æqualia quoque erunt parallelepipedum  $A EFG$ ,  $CHIK$ . Quod est propositum.

7. quinti.

25. undec.

9. quinti.

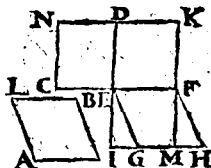
SINT iam neque insistentes linæ  $AM$ ,  $GN$ ,  $LE$ ,  $BF$ , ad basin  $AB$ ; neque  $CP$ ,  $KQ$ ,  $OH$ ,  $DI$ , ad basin  $CD$ , perpendiculares: Et a punctis  $E$ ,  $F$ ,  $M$ ,  $N$ , demittantur  $ER$ ,  $FS$ ,  $MT$ ,  $NV$ , ad planum, in quo basis  $AB$ , perpendiculares; Item a punctis  $H$ ,  $I$ ,  $P$ ,  $Q$ , ad planum, in quo basis  $CD$ ,

31. undec.

perpendiculares: Et a punctis  $E$ ,  $F$ ,  $M$ ,  $N$ , demittantur  $ER$ ,  $FS$ ,  $MT$ ,  $NV$ , ad planum, in quo basis  $AB$ , perpendiculares; Item a punctis  $H$ ,  $I$ ,  $P$ ,  $Q$ , ad planum, in quo basis  $CD$ ,



sciaturque parallelogrammum  $E H$ , quod æquale erit, & simile parallelogrammo  $A B$ . Conuenias autem  $H G$ , producta cum  $D E$ , producta in  $I$ , & compleatur parallelogrammum  $I K$ . Iam uero intelligantur super bases  $E H$ ,  $I F$ ,  $E K$ , constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super  $A B$ ,  $C D$ , constructis; sintque insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super  $E H$ , æquale esse ac simile solido super  $A B$ , ex defn. 10.



29. undec.

35. primi.  
7. quini.  
25. undec.

9. quini.

huius lib. cum plana illius æqualia sint et similia planis huius, per constructionem: Sunt autem & æqualia parallelepipeda super  $E H$ ,  $I F$ , cum habeant basin eandem, cuius infimum latus  $E F$ , erectam super planum  $I K$ ; Item plana basi opposita, quorum latera infima  $G H$ ,  $I M$ , in eodem plano, cuius infimum latus  $I H$ ; atque insistentes lineas  $E G$ ,  $F H$ ,  $E I$ ,  $F M$ , &c. in eisdem rectis lineis  $I H$ , &c. Igitur æquale erit parallelepipedum super  $I F$ , parallelepipedo super  $A B$ . Quoniam uero parallelogramma  $E H$ ,  $I F$ , æqualia sunt; &  $E H$ , æquale est ipsi  $C D$ : æqualia erunt  $I F$ ,  $C D$ . Erit igitur, ut  $I F$ , ad  $E K$ , ita  $C D$ , ad  $E K$ : Est autem ut  $I F$ , ad  $E K$ , ita solidum super  $I F$ , ad solidum super  $E K$ , quod solidum super  $I K$ , secetur plano super  $E F$ , erecto parallelo planis super  $D K$ ,  $I M$ , erectis. Ex eadem ratione, ut  $C D$ , ad  $E K$ , ita solidum super  $C D$ , ad solidum super  $E K$ , cum solidum super  $C K$ , secetur plano super  $D E$ , erecto parallelo planis super  $C N$ ,  $F K$ , erectis. Quare erit ut solidum super  $I F$ , ad solidum super  $E K$ , ita solidum super  $C D$ , ad solidum super  $E K$ ; Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super  $I F$ , &  $C D$ . Offensum est autem parallelepipedum super  $I F$ , æquale parallelepipedo super  $A B$ . Æqualia ergo erunt et parallelepipedum super  $A B$ ,  $C D$ . Quod est propositum.

CONVERTETUR quoque hac propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia, super æquales bases, in eadē sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadē altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin;

Si enim unum alteri credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine; sicut equalia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur equalis alteri, & equalis erit abscissum toti. Quod est absurdum.

31. undec.

Quod si in eadem sint altitudine, & basis unius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis equalis alteri, & super abscissam intelligitur parallelepipedum eiusdem altitudinis; demonstrabimus eodem modo partem toti esse equallem. Quod est absurdum.

THEOR. 27. PROPOS. 32.

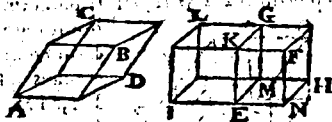
33.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, ut bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidum, ut est basis ad basin. Super rectam enim EX, construatur parallelogrammum EK, & equalis parallelogrammo AB, in angulo IEK, q. sit & equalis angulo ENF.

45. primi.

Constituent autem parallelogramma EF, IF, totum paralle-



logrammum unum FI, ut in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum unum parallelepipedum IFLH; erant parallelepipeda ABCD, IKLM, equalia, cum habeant equalēs bases, per constructionem AB, IK; & eandem altitudinem, ex hypothesis. Quare erit ut solidum IKLM; ad solidum EFGH, ita solidum ABCD, ad solidum EFGH: Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, ut basis IK, hoc est, illi equalis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD; erit ad solidum EFGH, ut basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

31. undec.

7. quinti.

25. undec.



SCHOLION.

CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, ut bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori aequalis, & ducatur planum basi parallelum; erisque ut basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque eras ad totum. Abcissum ergo aequale est toti. Quod est absurdum.

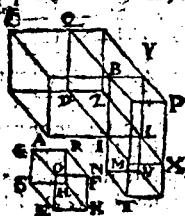
32. undec.  
9. quinti.

36.

THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda  $ABCD, EFGH'$ , super bases similes  $AB, EF$ , in quibus latera homologa sint  $AI, EK$ . Dico proportionem parallepipedum  $ABCD$ , ad parallepipedum  $EFGH$ , esse triplicatam proportionia laterum homologorum  $AI, EK$ . Producatum enim  $AI$ , ad  $L$ , & sit  $IL$ , aequalis ipsi  $EK$ , uel  $GR$ , item  $DI$ , ad  $M$ , & sit  $IM$ , aequalis ipsi  $HK$ , uel  $GO$ , item  $BH$ , ad  $N$ , & sit  $IN$ , aequalis ipsi  $KE$ , uel  $GS$ . Deinde completis parallelogrammis  $LM, LN, IT$ , perficiatur parallelepipedum  $TXIV$ . Quoniam uero latera  $IL, IM$ , aequalia sunt lateribus  $GR, GO$ , & anguli contenti aequales, cum angulus  $LI M$ , sit aequalis angulo  $AID$ , qui ob similitudinem parallelepipedorum aequalis est angulo  $EKH$ , &  $R, GO$ : Erunt parallelogramma  $IX, GF$ , similia & aequalia. Eadem ratione similia erunt & aequalia  $LN, RS$ ; item  $IT, GE$ . Quare tria plana  $IX, LN, IT$ , parallelepipedum  $TXIV$ , similia sunt & aequalia tribus planis  $GF, RS, GE$ , parallelepipedum  $EFGH$ :



15. primi.

24. undec.

Sunt autem tria cuiusque similia & aequalia tribus reliquis oppo-

oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipedum  $T X I V$ ,  $E F G H$ , ex defin. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis  $M B$ ,  $B L$ ,  $L M$ , perficiatur parallelepipedum  $M P B L$ ; Item completis parallelogrammis  $I Y$ ,  $D L$ ,  $I Q$ , perficiatur parallelepipedum  $I Y Q Z$ . Quoniam igitur, ob similitudinem parallelepipedorum  $A B C D$ ,  $E F G H$ , est ut  $A I$ , ad  $E K$ , hoc est, ad  $I L$ , ita  $D I$ , ad  $H K$ , hoc est, ad  $I M$ ; &  $B I$ , ad  $F K$ , hoc est, ad  $I N$ . Vt autem  $A I$ , ad  $I L$ , ita est parallelogrammum  $A D$ , ad  $D L$ ; Et ut  $D I$ , ad  $I M$ , ita parallelogrammum  $D L$ , ad  $L M$ ; & ut  $B I$ , ad  $I N$ , ita parallelogrammum  $B L$ , ad  $L N$ . Igitur erit ut  $A D$ , ad  $D L$ , ita  $D L$ , ad  $L M$ ; &  $B L$ , ad  $L N$ . Sed ut  $A D$ , basis ad  $D L$ , basin, ita est parallelepipedum  $A D C B$ , ad parallelepipedum  $D L Y Q$ ; & ut basis  $D L$ , ad basin  $L M$ , ita parallelepipedum  $D L Y Q$ , ad parallelepipedum  $L M B P$ ; Et ut basis  $B L$ , ad basin  $L N$ , ita parallelepipedum  $L M B P$ , ad parallelepipedum  $L N T X$ . Quare erit, ut parallelepipedum  $A D C B$ , ad parallelepipedum  $D L Y Q$ , ita parallelepipedum  $D L Y Q$ , ad parallelepipedum  $L M B P$ , & parallelepipedum  $L M B P$ , ad parallelepipedum  $L N T X$ . Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales  $A D C B$ ,  $D L Y Q$ ,  $L M B P$ ,  $L N T X$ , ideoque proportio primæ  $A D C B$ , ad quartam  $L N T X$ , hoc est, ad  $E F G H$ , erit triplicata proportionis primæ  $A D C B$ , ad secundam  $D L Y Q$ , ex definitione 10. lib. 5. Vt autem  $A D C B$ , ad  $D L Y Q$ , ita est basis  $A D$ , ad basin  $D L$ ; Et ut  $A D$ , ad  $D L$ , ita est recta  $A I$ , ad  $I L$ , hoc est, ad  $E K$ . Igitur proportio parallelepipedi  $A D C B$ , ad parallelepipedum  $E F G H$ , est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum  $A I$ , ad  $E K$ . Quapropter similia solida parallelepipedum, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonstrandum.

1. sexti.

32. undec.

32. undec.

1. sexti.

# COROLLARIUM.

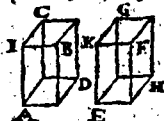
Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor linee rectæ continue proportionales, ut est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonstratum est, quam prima linea ad quar-

tam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam pro-  
portionis primæ linearum ad secundam, nimirum laterum homologarum.

34. 35. THEOR. 29. PROPOS. 34.

ÆQUALIVM solidorum paralle-  
lepipedorum bases, & altitudines recipro-  
cantur: Et quorum solidorum parallelepi-  
pedorum bases, & altitudines reciprocan-  
tur; Illa sunt æqualia.

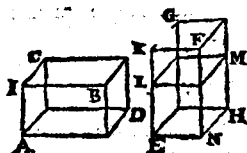
S I N T æqualia parallelepipeda  $ADCB$ ,  $EHGF$ , super  
bases  $AD$ ,  $EH$ . Dico bases  $AD$ ,  $EH$ , & altitudines paralle-  
lepipedorum  $ADCB$ ,  $EHGF$ , esse reciprocas, hoc est, esse  
ut  $AD$ , ad  $EH$ , ita altitudinem solidi  $EHGF$ , ad altitudinem



solidi  $ADCB$ . Sin enim primo insisten-  
tes lineæ  $AI$ ,  $EK$ , perpendiculares ad  
bases  $AD$ ,  $EH$ , ita ut  $AI$ ,  $EK$ , sint per  
defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipe-  
dorum. Si igitur altitudines  $AI$ ,  $EK$ ,

sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur;  
erunt & bases  $AD$ ,  $EH$ , æquales, per ea, quæ ad finem pro-  
pos. 31. huius lib. ostendimus. Quare erit, ut basis  $AD$ , ad  
basin  $EH$ , ita altitud  $EK$ , ad altitudinem  $AI$ . Ac proin-  
de bases & altitudines sunt reciprocae.

Q U O D si altitudines  $AI$ ,  $EK$ , inæquales fuerint; sit  
 $EK$ , maior, ex qua abscindatur  $EL$ , ipsi  $AI$ , æqualis; & per  
 $L$ , ducatur planum  $LM$ , parallelum basi  $EH$ , per scholion



propos. 15. huius lib. Quo-  
niam igitur æqualia sunt soli-  
da  $ADCB$ ,  $EHGF$ ; erit ut  
 $ADCB$ , ad solidum  $EH-$   
 $ML$ , ita  $EHGF$ , ad idem soli-  
dum  $EHML$ : Vt autem  
solidum  $ADCB$ , ad solidum

32. undec.  $EHML$ , ita est basis  $AD$ , ad basin  $EH$ , cum æquales ponan-  
tur altitudines  $AI$ ,  $EL$ ; Et ut solidum  $EHGF$ , ad solidum

$PH$ .

EHML, ita est, eadem ratione, basis KN, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; Brunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit ut basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: Sed ut KN, ad LN, ita est recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciproce sunt bases, & altitudines.

1. sexti.

SUNT iam bases & altitudines reciproce. Dico parallelepipedum esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, ut altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. Quare parallelepipedum ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se equalia erunt.

31. undec.

QVOD si altitudo EK, maior fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallellum basi EH. Quia igitur ex hypothesi est, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad EL, ipsi AI, æqualem; Vt autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur; Et ut EK, ad EL, ita est KN, ad LN; Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum DHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; Erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH: Erit ut solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML; ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

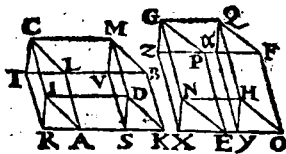
32. undec.

1. sexti.

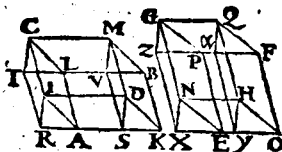
32. undec.

9. quinti.

Sed proponantur iam parallelepipedum ABCD, EFGH, æqualia, quorū insistentes lineæ AI, KD, BM, LC, EN, OH, FQ, PG, nō sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem a punctis I, D, M, C, ad planum basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item a punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares



diculares  $NX, HY, Q\alpha, GZ$ ; connectunturque rectae  $RS, TV, RT, SV; XY, Z\alpha, XZ, Y\alpha$ : Eruntque perpendiculares  $RI, XN$ , parallelepipedorum altitudines, ex



defin. 4. lib 6. Dico rursum, ut basis  $AB$ , ad basin  $EF$ , ita esse altitudinem  $XN$ , ad altitudinem  $RI$ . Cum enim aequalia sint solida  $ABCD, EFGH$ , ex hypothesis, sit autem

29. vel 30. undecimi.

$ABCD$ , aequale solido  $RVCD$ , eo quod habeant eandem basin  $CD$ , eandemque altitudinem  $RI$ ; &  $EFGH$ , eadem ratione, aequale solido  $X\alpha GH$ : Erunt & parallelepipeda  $RVCD, X\alpha GH$ , aequalia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases  $CD, GH$ ; erit, ut iam demonstratum est, ut basis  $CD$ , ad basin  $GH$ , hoc est, ut basis  $AB$ , ad basin  $EF$ , ita altitudo  $XN$ , ad altitudinem  $RI$ . Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocae.

24. undec.

Sit & iam bases atque altitudines reciprocae. Dico parallelepipeda esse aequalia. Constructa enim figura, ut prius, Cum sit ut basis  $AB$ , ad basin  $EF$ , ita altitudo  $XN$ , ad altitudinem  $RI$ ; Sit autem  $AB$ , ipsi  $CD$ , &  $EF$ , ipsi  $GH$ , equalis; Erit quoque ut basis  $CD$ , solidi  $RVCD$ , ad basin  $GH$ , solidi  $X\alpha GH$ , ita altitudo  $XN$ , ad altitudinem  $RI$ . Quare, cum  $XN, RI$ , sint insistentes lineae, perpendiculares ad bases  $CD, GH$ ; erunt, ut iam ostensum est, aequalia parallelepipeda  $RVCD, X\alpha GH$ : Sunt autem haec parallelepipeda parallelepipedis  $ABCD, EFGH$ , aequalia. Igitur aequalia quoque erunt parallelepipeda  $ABCD, EFGH$ : Idemque ostendetur, si insistentes lineae unius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius uero non. Quamobrem, Aequalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.

29. vel 30. undecimi.

### SCHOLION

OMNIA haec, quae demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoque

quoque prismatis, que habent duo plana opposita triangularia, si predictæ hypotheses seruētur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficiuntur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases existentia. Quare æqualia erunt huiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.

29. 30. vel  
31. undec.

RURSU, si duobus prismatis predictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis, adiciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficiuntur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. Quare erit parallelepipedū ad parallelepipedū, ut basis ad basin. Atque adeo prisma ad prisma, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad dimidium alterius, ut eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe ut triangulum ad triangulum, dimidium scilicet unius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangularia.

32. undec.  
35. quinti

PRAETerea, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituitur duo parallelepipeda similia, quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.

33. undec.  
35. quinti

DENIQUE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componantur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum prismatis. Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciproca; & bases prismatum eadem sint, vel certe triangularia earum dimidia eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciproca.

34. undec.  
35. quinti

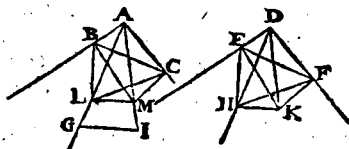
### THEOR. 30. PROPOS. 35.

37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorū uerticibus sublimes rectæ lineæ insistant,

sistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis uero, quæ in planis a perpendicularibus sunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SUNT duo anguli plani æquales  $BAC$ ,  $EDF$ , quorum uerticibus  $A$ , &  $D$ , insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ  $AG$ ,  $DH$ , ita ut angulus  $BAG$ , angulo  $EDH$ , & angulus  $CAG$ , angulo  $FDH$ , sit æqualis. A sumptis autem punctis  $G$ ,  $H$ , in rectis  $AG$ ,  $DH$ , demittantur ad plana, in quibus anguli  $BAC$ ,  $EDF$ , existunt, perpendiculares  $GI$ ,  $HK$ , incidentes in puncta  $I$ ,  $K$ , & adiungantur rectæ  $IA$ ,  $KD$ . Dico



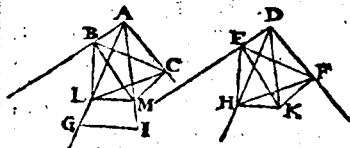
angulos  $GAI$ ,  $HDK$ , esse æquales inter se. Nā si  $AG$ ,  $DH$ , sunt inæquales, auferatur a maiori  $AG$ , ipsi  $DH$ , æqualis linea  $AL$ ; & ex  $L$ , ad planum anguli  $BAC$ , perpendicularis demittatur  $LM$ . Quoniam igitur  $GI$ ,  $LM$ , rectæ sunt ad planum anguli  $BAC$ , ipsæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli  $AGI$ . Quare  $LM$ , caderet in rectam  $AI$ . Ducantur iam ex punctis  $M$ ,  $K$ , ad rectas  $AB$ ,  $AC$ ,  $DE$ ,  $DF$ , perpendiculares  $MB$ ,  $MC$ ,  $KE$ ,  $KF$ ; & connectantur rectæ  $BC$ ,  $BL$ ,  $LC$ ,  $EF$ ,  $EH$ ,  $HF$ . Et quia  $LM$ , recta est ad planum anguli  $BAC$ , ipsa rectum angulum efficiet cum recta  $AM$ , in eodem plano ducta, per defin. 3. huius lib. Quare quadratum rectæ

6. undec.

rectæ  $AL$ , æquale erat quadratis rectarum  $AM$ ,  $ML$ : 47. primi.  
 Est autem quadratum rectæ  $AM$ , æquale quadratis recta- 47. primi.  
 rum  $AO$ ,  $CM$ , cum & angulus  $ACM$ , rectus sit, ex con-  
 structione. Quadratum ergo rectæ  $AL$ , æquale est qua-  
 dratis rectarum  $AO$ ,  $CM$ ,  $ML$ : At quadratis rectarum  $CM$ ,  
 $ML$ , æquale est quadratum rectæ  $CL$ , cum angulus  $CML$ , 47. primi.  
 rectus sit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ  
 $AL$ , æquale est quadratis rectarum  $AO$ ,  $C$ ,  $CL$ ; Ac proinde  
 de angulus  $ACL$ , rectus erit. Rursus quia quadratum  
 rectæ  $AL$ , æquale est quadratis rectarum  $AM$ ,  $ML$ : 48. primi.  
 Est autem quadratum rectæ  $AM$ , æquale quadratis recta- 47. primi.  
 rum  $AB$ ,  $BM$ , cum angulus  $ABM$ , per constructio-  
 nem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ  $AL$ , æquale  
 est quadratis rectarum  $AB$ ,  $BM$ ,  $ML$ : At quadratis recta-  
 rum  $BM$ ,  $ML$ , æquale est quadratum rectæ  $BL$ , quod 47. primi.  
 & angulus  $BM L$ , sit rectus ex defin. 3. huius lib. Qua-  
 dratum ergo rectæ  $AL$ , æquale est quadratis rectarum  
 $AB$ ,  $BL$ ; proptereaque angulus  $ABL$ , erit rectus. Non 48. primi.  
 aliter ostenderetur recti, anguli  $DFH$ ,  $DEH$ . Quo-  
 niam igitur anguli  $ABL$ ,  $LAB$ , trianguli  $ABL$ , æqua-  
 les sunt angulis  $DEH$ ,  $HDE$ , trianguli  $DEH$ ; suntque 26. primi.  
 latera  $AL$ ,  $DH$ , æqualia; Erunt & reliqua latera  $AB$ ,  $BL$ ,  
 reliquis lateribus  $DE$ ,  $EH$ , æqualia. Eodem argumen-  
 to æquales erunt rectæ  $AC$ ,  $CL$ , & anguli  $DF$ ,  $FH$ . Qua-  
 re cum latera  $AB$ ,  $AC$ , trianguli  $ABC$ , æqualia sint late-  
 ribus  $DE$ ,  $DF$ , trianguli  $DEF$ ; & anguli cōtenti  $BAC$ ,  
 $EDF$ , æquales, ex hypoth. si; erunt & bases  $BC$ ,  $EF$ , inter  
 se, & anguli  $ABC$ ,  $ACB$ , angulis  $DBF$ ,  $D F E$ , æqua-  
 les: Sunt autem & toti anguli  $ABM$ ,  $A C M$ , totis angulis  
 $DEK$ ,  $D F K$ , æquales, cum omnes sint recti. Igitur & re-  
 liqui anguli  $MBC$ ,  $M C B$ , reliquis angulis  $KEF$ ,  $K F E$ ,  
 æquales erunt; Ac propterea cum & latera  $BC$ ,  $EF$ , sint  
 ostensa æqualia; erunt latera  $BM$ ,  $CM$ , lateribus  $E K$ ,  $FK$ ,  
 æqualia. Quia igitur latera  $AC$ ,  $CM$ , trianguli  $ACM$ ,  
 æqualia sunt ostensa lateribus  $DF$ ,  $FK$ , trianguli  $D F K$ ; &  
 anguli  $ACM$ ,  $D F K$ , sunt recti; erunt & bases  $AM$ ,  $DK$ ,  
 inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensa re-  
 ctæ  $BL$ ,  $EH$ , erunt etiam earum quadrata æqualia:  
 Quia uero quadratum rectæ  $BL$ , æquale est qua- 47. primi.  
 dratis



dratis rectarum  $B M, M L$ ; & quadratum rectæ  $E H$ , quadratis rectarum  $E K, K H$ , quod anguli  $B M L, E K H$ , recti sunt, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum



$B M, M L$ , æqualia quadrat s. rectarum  $E K, K H$ . Ablatis ergo quadratis rectarum  $B M, E K$ , quæ æqualia sunt, quod rectæ  $B M, E K$  ostē

se sint æquales; reliqua quadrata rectarum  $L M, H K$ , æqualia erunt, ac proinde rectæ  $L M, H K$ , æquales. Quam obrem, cum latera  $A L, A M$ , trianguli  $A L M$ , æqualia sint lateribus  $D H, D K$ , trianguli  $D H K$ , & basis  $L M$ , basi  $H K$ , æqualis; erunt & anguli  $L A M, H D K$ , æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimnes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.

*E. primi.*

COROLLARIUM.

ITAEQUE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimnes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique. Erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana angularum primo positum demissa perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani  $B A C, E D F$ , ponuntur æquales, & sublimnes æquales  $A L, D H$ , constituunt angulos æquales  $L A B, H D E$ ; Item  $L A C, H D F$ ; demonstratum fuit, demissas perpendiculares  $L M, H K$ , esse æquales.

38.

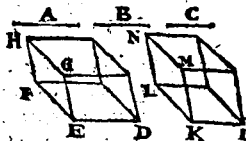
THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto a media linea solido parallelepipedo, quod æqui laterum quidem sit, æquiangulum uero prædicto.

SINT

S  
stra  
but.  
E F  
para  
D H  
ex p  
fiat  
his fo  
angu  
L K  
bus l  
tra u  
æqua  
Com  
tur p  
B, se  
do I  
(quo  
sump  
Erunt  
latera  
uero  
tribu  
les ang  
stru  
F, L, a  
nes pa  
inter s  
paralle  
les, &  
tres igit  
erat de  
  
P  
uivret  
angulo

SINT continuę proportionales tres rectę A, B, C. Constituatırque angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunque DEF, DEG, FEG, ita ut recta DE, ipsi A, & EF, ipsi B; & EG, ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedu DH; quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipsis fieri: Deinde ad rectam IK, eiusque punctum K, fiat solidus angulus K, æqualis solidulo angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales sint tribus DEF, DEG, FEG; ita ut rectę IK, KL, KM, æquales sint medię lineę B.



25. undec.

Completis uero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN, quod contineri dicitur sub linea B, seu ex ipsa describi. Dico solidum DH, æquale esse solidulo IN. Cum enim sit ut DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: Erunt parallelogramma DG, IM, equalia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam uero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorum utricibus insistant sublimēs lineę æquales EF, KL, quę quales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demisse, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales, per coroll. propos. præcedentis. Quare parallelepipeda DH, IN, cū habeant bases DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter se equalia erunt. Si tres igitur rectę lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

4. sexti.

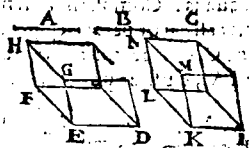
31 undec.

# SCHOLION.

VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a medię lineę descripto: Erunt tres rectę continuę proportionales.

proportiona-

portionales. Sit enim parallelepipedum  $DH$ , descriptum ex rectis  $A, B, C$ , ut dictum est, quale sibi equiangulo parallelepipedo  $IK$ , descripto a media  $B$ . Dico tres  $A, B, C$ , esse continue proportionales. Nam,



reliqui prius, ostendentur eorum aequalitatem ex  $F, I$ , demissa esse aequalis. Quare cum ipsa ponantur aequalia; erunt eorum bases  $DE, EG, IK$ , aequales, per ea, quae

ad finem propof. 31. huius lib. demonstravimus. Quia bases cum angulos habeant aequales  $DEG, IKM$ , ex const. & p. no; habebunt latera circa illos angulos reciproca; hoc est, erit  $DE$ , ad  $IK$ , ita  $IK$ , ad  $EG$ . Quapropter cum ad  $E$  ipsi  $A$  &  $IK$ ,  $K, M$ , ipsi  $B$  &  $EG$ , ipsi  $C$ , sumptis sit aequalis. Ex quoque ut  $A$ , ad  $B$ , ita  $B$ , ad  $C$ . Quod est propositum.

14. sexi.

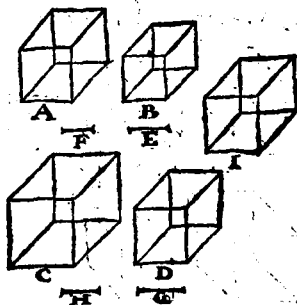
39.

# THEOR. 32. PROPOS. 37.

SI quatuor rectae lineae proportionales fuerint: & solida parallelepipeda, quae ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quae & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsae rectae lineae proportionales erunt.

SIT quatuor rectae proportionales  $A, B, C, D$ ; Ut quidem  $A$ , ad  $B$ , ita  $C$ , ad  $D$ ; constituanturque super  $A$ , &  $B$ , duo parallelepipeda  $A$ , &  $B$ , similia similiterque descripta; Item super  $C$ , &  $D$ , alia duo  $C$ , &  $D$ , similia similiterque posita, siue haec sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida  $A, B, C, D$ , proportionalia; Ut quidem solidum  $A$ , ad solidum  $B$ , ita solidum  $C$ , ad solidum  $D$ : Inveniantur enim per scholion propof. 11. lib. 6. duabus rectis  $A, B$ , aliae duae continue proportionales  $E, F$ ; Item duabus

duabus C, D, alię duę G, H. Quoniam igitur sunt quatuor li-  
neę A, B, E, F, & qua-  
tuor lineę alię C, D, G,  
H, quę binę in eadem  
ratione sumuntur; erit  
ex æquo, ut A, ad F,  
ita C, ad H. Vt au-  
tem A, ad F, ita est so-  
lidum A, ad solidum  
B; Et ut C, ad H, ita  
solidum C, ad solidum  
D, ex coroll. propos.  
33. huius lib. Igitur erit  
ut solidum A, ad soli-  
dum B, ita solidum C,  
ad solidum D. Quod est propositum.



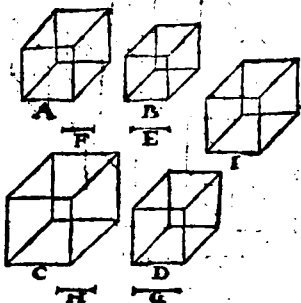
SINT iam contrario solida A, B, C, D, proportiona-  
lia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales. Tri-  
bus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I,  
super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simi-  
le similiterque positi. Quoniam igitur est, ut recta A, ad  
rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, ut iam est  
ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad  
solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita poni-  
tur quoque solidum C, ad solidum D; Igitur erit ut soli-  
dum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D.  
Ac idcirco equalia erunt solida I, & D. Quę cū sint similia,  
similiterq; descripta, continebuntur planis equalibus & simi-  
libus, per definitio. huius lib. Sed plana equalia & similia  
habent latera homologa equalia, per lemma propos. 22. lib.  
6. Igitur rectę I, & D, equalis sunt, Ac propterea erit,  
ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Po-  
sita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut  
recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si  
quatuor rectę lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat  
demonstrandum.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum  
Theone, hoc modo. Ponatur primo ut recta A, ad rectam B,  
ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A,  
ad

(2. sexti.  
7. undec.

9. quinti.

33. *undec.* ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum



D, triplicata proportio-  
nis rectę C, ad rectam  
D: Erunt proportio-  
nes solidi A, ad solidū  
B, & solidi C, ad soli-  
dum D, æquales; quā-  
doquidē triplicatę sunt  
proportionum æqua-  
lium, nempe rectę A,  
ad rectam B; & rectę  
C, ad rectam D. Quod  
est primum. Rurſus  
ponatur ſecundo eſſe,

33. *undec.* ut ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Dico eſſe quoque, ut recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportionēs rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportionēs tripli-  
catę, nimirum ſolidi A, ad ſolidum B; & ſolidi C, ad ſolidū  
D, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.

### SCHOLIUM.

Eodem modo, ſi fuerint tres rectę proportionales, erūt  
& parallelepipeda ſimilia ſimiliterque deſcripta ex eis, propor-  
tionalia, &c. Si enim media linea, cuiusque ſolidum ſumatur  
bis, habebuntur quatuor rectę proportionales. Igitur & qua-  
tuor ſolida proportionalia, ut demonſtratum eſt. Cum igitur  
ſolidum ſecunda linea æquale ſit ſolido tertia lineę; & linea  
ſecunda æqualis tertia lineę; perſpicuum eſt, quod pro-  
ponitur.

Tota vero hæc præpoſitio conuenit etiam priſmatis, quo-  
rum duo plana aduerſa æqualia, ſunt vel triangula, vel paral-  
logramma, ut Campanus ait. Nam additis priſmatis, quę  
ſingula

*singula singulis sint equalia, exurgent parallelepipeda, quæ ut hic est demonstratum, proportionalia erunt. Cum igitur prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.*

15. quinsi.

THEOR. 33. PROPOS. 38.

13.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

PLANVM AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F; & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG, connectaturq; recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdum; cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet. ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

12. primi.



17. primi.

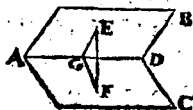
SCHOLIUM.

HABC est demonstratio Theoria. Nos tamen idem demonstrabimus brevius, hac modo. Si ex puncto E, dato in plano AB,

X

AB,

AB, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem; ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; qua ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto F, extra planum AC, ducta sunt ad ipsum planum AC, due perpendicularar: EF, EG. Quod fieri nequit, ut in scolio propos. 13. huius lib. demonstravimus.

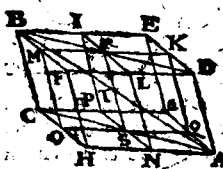


40.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI solidi parallelepipedum eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedum diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedum AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB.



Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH; & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS.) & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus

34. primi.

39. primi.

4. primi.

13. primi.

duobus sunt rectis æquales; Ac propterea AS, CS; vnā rectā lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnā ex eis componi lineam rectā. Rursus quia vtriusq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC; ipsæ quoq; inter se paralelæ erunt, & æquales. Quar & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt, & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt; erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoq; se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorū, quæ ex æquælo, &c. Quod erat ostendendum.

## COROLLARIUM.

Hic efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, ut hic demonstratum est, rectam RS.

## SCHOLIUM.

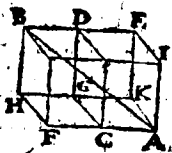
Hic theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstrauimus, videlicet.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

SECETUR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo planū CD, oppositis planis AE, BF, parallelū. Et quia plana parallela BF, DC, EA, secant rectas quaslibet, proportionaliter, secantur autē



25. undec.

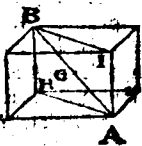


B A, bifariam in G & secantur quoque; latera aduersum planorum A H, B I, atque adeo & bases A H, B I, bifariam. Cuius igitur sit ut basis K C, ad basin C H, ita solidum A D, ad solidum C B; erit parallelepipedum A B, sectum bifariam, plano C D, per centrum G, ducto.

TRANSBAT secundo planum secans A I B H, per diametros B I, A H, planorum oppositorum; quoniam & sic secantur parallelepipedum per centrum G; im-

7. undec.

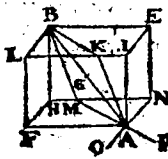
28. undec.



mo per totam diametrum A B; cum A B, in plano sit parallelarum A H, B I. Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.

TERTIO planum secans A K B M, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A, & B, planorum A H, B I. Quoniam igitur plana parallela A H, B I, secantur planis A K B M, erunt communes sectiones A M, B K, parallelae. Similiter parallelae erunt A K, B M, cum sint communes sectiones planorum parallelorum A L, B N, factae a plano A K B M. Quare parallelogrammum est A K B M; ideoque tam recta A K, B M, quam re-

16. undec.



cta A M, B K, inter se erunt aequales. Quia ergo latera B K, B I, trianguli B K I, equalia sunt lateribus A M, A N, trianguli A M N; & angulus K B I, angulo M A N, aequalis. (Productis enim N A, M A, ad O, P, erunt A O, A P, rectis B I, B K, parallelae; ac proinde aequales anguli erunt O A P, I B K. Cum igitur O A P, aequalis sit angulo M A N, aequales quoque erunt anguli K B I, M A N.)

34. primi.

10. undec.

15. primi

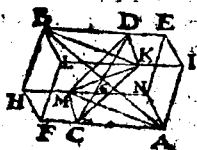
9. primi.

4. sexti.

Erunt bases K L, M N, inter se, & anguli K B L, B I K, angulis A M N, A N M, aequales; & triangulum triangulo aequale. Quare & similia erunt triangula B K L, A M N, cum latera habeant circa aequos angulos proportionalia. Quoniam uero recta K L, recta M N, & angulus K B L, angulo A M N; & angulus K B I, angulo M A N, est aequalis, ut ostendi-

ostendimus; erit & reliqua I K, reliqua H M, & reliquus angulus B K I, reliquo A M H, & reliquus K B E, reliquo M A F, equalis. (Est. n. tota L I, toti N H, equalis, & ita anguli B K I, B K I, quam anguli A M N, A M H, duobus rectis aequales; & totus angulus L B E, toti angulo N A F, equalis, ob similitudinem parallelogrammorum L E, F N.) Sunt autem & latera B E, E I, lateribus A F, F H, equalia; & anguli B E I, E I K, angulis A F H, F H M, ob parallelogramma L E, F N. Igitur quadrilaterum B K I E, & equilaterum, & equiangularum est quadrilatero A M H F; Ac propterea aequale & simile, cum singula singulis conveniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo equalia erunt & similia triangula B H M, K I K; & quadrilatera A K L F, B M N E; cum inter se sint & aequilatera & equiangulara. Quapropter solidum contentum planis A K L F, F H M A, A K B M, M H B, B K I, L B H F, aequale erit solido contento planis B M N E, E I K B, B M A K, K I A, A M N, N A I E, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & equalia, ut demonstratum est. Parallelepipedum ergo A B, sectum est plano A K B M, per centrum G, bisariam.

POSTREMO planum secans C D, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neque per ullos angulos eorum ductum, sed utcumque secet plana opposita A H B I. Ostendimus autem, ut prius, planum secans C D, esse parallelogrammum, & tam rectas C K, D M, quam rectas C M, D K, esse aequales. Ducantur in parallelogrammo C D, diametri C D, K M; connectanturque recta A M, B K, quae parallela erunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum A H, B I, factae a plano per rectas A B, K M, ducto. Quoniam igitur A F, B E, parallelae ipsi L I, ob parallelogramma A L, L E, inter se sunt parallela; Erunt A B, C D, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G; In solo enim centro G, recta A B, per hypothesin, secat planum C D, in quo existit recta C D. Simili argumento, cum A M, B K, sint ostensa parallela; erunt A B, M K; in eodem cum illis



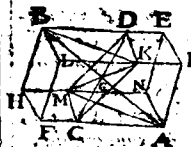
16. undec.

9. undec.

7. undec.

15. primi.  
4. primi

illis plano, seq; mutuo secabunt in centro G. Quare diametri  
CD, KM, per centrum G, transibunt, itiq; se mutuo secabunt  
atq; æq; bisariã, per ea, quæ ad propos. 34. l. b. 1. ostendimus.  
Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, equalia sũt laterib;  
AG, GC, trianguli AGC; & angulus BGD, æqualis angulo  
AGC; Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodem argumen  
to æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera  
BD, DK, KB, trianguli BDK, equalia sint tribus lateribus  
AC, CM, MA, trianguli ACM;



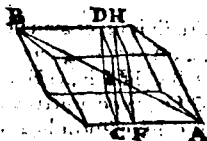
Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. l. b. 1.  
docuimus, anguli illius angulus huius  
æquales: Est autem totus DEI, toti  
CAN, æqualis, ob similitudinem pa  
rallilogramorum BI, AH, igitur  
& reliquæ KBI, reliquæ MAN,

A. primi.

erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL,  
equalia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angu  
lus KBL, angulo MAN, æqualis; Erit & basis KL, basi  
MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur  
equalibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli  
BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare  
quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterũ  
est, & equiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum sin  
gula conveniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli  
angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit &  
reliqua IK, reliquæ HM, æqualis; Eademque ratione reli  
qua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilate  
rum DEIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM. Sed  
& equiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint an  
gulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogram  
morum BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM,  
HMC, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alter  
ni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrila  
tera DEIK, CFHM, equalia sunt & similia. Non aliter  
ostendemus, equali esse & similia quadrilatera ACKI,  
BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateri  
bus, & anguli angulis conveniant, ut perspicuum est. Quam  
obrem solidum contentum planis CKLF, FHM, C, CKDM,  
MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defn. huius lib. æquale est so  
lido

hinc cōstruē planis  $DMNE$ ,  $EIKD$ ,  $DMCK$ ,  $KIAC$ ,  $CMNA$ ,  $AIEN$ , cum hisce illa sint demonstrata & equalia & similia. Parallelepipedum igitur  $AB$ , sectum est per centrum  $G$ , planis  $CD$ , bifariam.

Sed secetur iam parallelepipedum  $AB$ , plano  $CD$ , bifariam. Diagonum planum  $CD$ , per centrum parallelepipedum transire, hoc est, punctum  $G$ , in quo planum  $CD$ , secat diametrum  $AB$ , diuidere diametrum  $AB$ , bifariam. Si enim diameter  $AB$ , in  $G$ , non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in  $E$ , ut sit  $B$ , centrum parallelepipedum. Si igitur per  $B$ , ducatur planum  $FH$ , plano  $CD$ , parallelum, secabitur parallelepipedum  $AB$ , bifariam plano  $FH$ , ut demonstratum est. Ponitur autē & bifariam secari plano  $CD$ ; igitur solida  $CB$ ,  $FB$ , cum sint dimidia parallelepipedum  $AB$ , inter se equalia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Nō ergo aliud punctū, præter  $G$ , diuidet diametrum  $AB$ , bifariam. Ac pōde  $G$ , cōstruē eris parallelepipedum. Q. d. demonstrandum erat.



### THEOR. 35. PROPOS. 40.

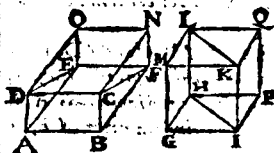
41.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis  $AB C D E F$ ,  $G H I K L M$ , quorū illud basin habeat parallelogrammū  $A B C D$ , hoc uero, trianguli  $G H I$ ; sicq; parallelogrammū  $A C$ , trianguli  $G H I$ , duplū. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur. n. parallelepipedā  $A N$ ,  $G Q$ ; Quod quidē fiet, si plana triangulorū extendātur, perficianturq; parallelogramma  $B N$ ,  $A O$ ;  $G P$ ,  $M Q$ . Si enim connectantur rectæ  $N O$ ,  $P Q$ , constituta erūt duo parallelepipedā  $A N$ ,  $G Q$ , eiusdē altitudinis cōstruē prismatis. Nam plana horum solidorū opposita esse

34. primi.

parallela, facile colligetur ex propof. 16. huius lib. Quoniam igitur parallelogrammum  $GP$ , duplum est trianguli  $GHI$ ; Ponitur autem & parallelogrammum  $AC$ , eiusdem trianguli  $GHI$ , duplum: æqualia erunt parallelogramma  $AC$ ,  $GP$ . Quare parallelepipedum  $AN$ ,  $GQ$ , eiusdem al-



31. undec.

titudinis super æquales bases  $AC$ ,  $GP$ , inter se sunt æqualia; Arque propterea eorum dimidia, nimirum prismata  $AB C D E F$ ,  $G H I K L M$ , (Nam parallelepipedum  $AN$ ,  $GQ$ , per diametros  $CF$ ,  $D E$  &  $H I$ ,  $L K$ , planorum aduersorum secantur bisariam, in dina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

28. undec.

### SCHOLIUM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis dumtaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipedum compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum  $ABCD$ , constitutum non haberet duo triangula, nempe  $ADE$ ,  $BCF$ . Eset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.



# E V C L I D I S

## E L E M E N T V M XII.

Et Solidorum secundum.



### THEOR. I. PROPOS. I.

QV AE in circulis polygona similia: inter se sunt, vt a diametris quadrata.

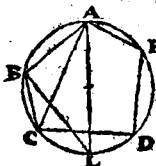


**S**INT duo polygona similia  $ABCE$ ,  $FGHIA$ , descripta in circulis, quorum diametri  $AL$ ,  $FM$ . Dico ita esse polygonum  $ABCE$ , ad polygonum  $FGHIA$ , ut quadratum diametri  $AL$ , ad quadratum diametri  $FM$ . Subtendantur enim angulis æqualibus  $ABC$ ,  $FGH$ , rectæ  $AC$ ,  $FH$ , & connectantur rectæ  $BL$ ,  $GM$ . Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est ut  $AB$ , ad  $BC$ , ita  $FG$ , ad  $GH$ ; erunt triangu-

$ABC$ ,  $FGH$ , æquantula, cum circa angulos æquales  $ABC$ ,  $FGH$ , habeant latera proportionalia: Est autem angulus  $ALB$ , angulo

$ACB$ , & angulus  $FMG$ , angulo  $FHG$ , æqualis. Igitur & anguli  $ALB$ ,  $FMG$ , æquales erunt. Cum ergo & anguli  $ABL$ ,  $FGM$ , æquales sint, nempe recti in semicirculis existentes, erunt & reliqui  $BAL$ ,  $GFM$ , æquales. Quare erit ut  $AL$ , ad  $AB$ , ita  $FM$ , ad  $FG$ ; & permutando, vt

$AL$ , ad



6. sexti.

31. tertij.

31. tertij.

32. primi.

4. sexti.

22. *seci.*

A L, ad F M, ita A B, ad F G. igitur est ut quadratum ex A L, ad quadratum ex F M, ita polygonum A B C D E, super A B, ad polygonum F G H I K, super F G; cum tam quadrata, quam polygoni sint figure similes, similitudoque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, ut a diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

2.

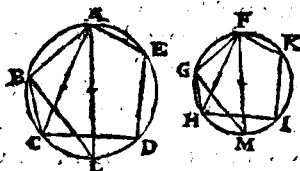
THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata.

1.

S I N T duo circuli A B C D, E F G H, quorum diametri A C, E G. Dico esse, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulum A B C D, ad circulum E F G H. Si enim res non ita se habet; Sit ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ uel minor erit, uel maior circulo E F G H. Si .n. esset æqualis, haberet circulus A B C D, ad circulum E F G H, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus A B C D, ad circulum E F G H, ut quadratum diametri

7. *quinti.*



A C, ad quadratum diametri E G, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor quam circulus E F G H; magnitudine scilicet K, ita ut circulus E F G H, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo E F G H, quadratū E F G H; quod quia dimidiū est quadrati circa eundem circulum descripi, ut ad prop. 9 lib. 4. ostendimus, maius erit, quā dimidiū circuli E F G H. Secentur bifariam peripheriæ E F, F G, G H, H E, in punctis L, M, N, O, adiunganturq; rectæ L E, L F, M F, M G, N G, N H, O H, O E. Ducatur per L, recta T V, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi E F, ut ad prop. 27. lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis H E, G F, productis in T, & V. Quia ergo triangulū E L F, dimidiū est parallelogrammi T E F V; maius erit triangulū E L F, quā dimidiū segmenti circuli E L F. Eadē ratione erunt reliqua triangu-

41. *primi.*

la maior, a quam dimidia segmentorū, in quibus sunt. Omnia  
 igitur triangula simul maiora sunt, quā dimidium omnium  
 segmentorū simul. Quod si rursus peripheriæ  $EL$ ,  $LF$ , & c.  
 secantur bifariā, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur  
 eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quā dimi-  
 dium omnium segmentorū simul, in quibus sunt; & sic de-  
 inceps. Quoniam uero, si a circulo  $EFGH$ , auferatur plus  
 quam dimidium, nempe quadratum  $EFGH$ ; & a reliquis  
 segmentis plus quā dimidiū, nempe triangula  $ELF$ ,  $FMG$ , &c.  
 atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tan-  
 dem minor magnitudo, quam  $K$ , excessus inæ circularum  
 $EFGH$ , & magnitudinem  $I$ . Sint jam circuli segmenta reli-  
 cta  $EL$ ,  $LF$ ,  $FM$ , &c. simul supra minora, quam magnitudo  
 $K$ . Cum igitur circulus  $EFGH$ , & qualis ponatur magnitudi-  
 nibus  $I$ , &  $K$ , simul; si ex circulo detrahantur dicta segmen-  
 ta, & ex  $I$ , &  $K$ , ipsa magnitudo  $K$ , quæ maior est præfatis  
 circuli segmentis; erit reliquum polygonū  $ELFMGNHO$ ,  
 maius reliqua magnitudine  $I$ . Inscrubatur in circulo  $ABCD$ ,  
 polygonum  $APBQCRDS$ , simile polygono  $ELFMGNH-$   
 $O$ . Quod quidem facile fiet, si semicirculi  $ABC$ ,  $ADC$  bi-  
 fariā secantur in  $B$ , &  $D$ ; & rursus circumferentiæ  $AB$ ,  $BC$ ,  
 $CD$ ,  $DA$ , bifariā in  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ; & sic deinceps, donec in tot  
 partes æquales diuisa sit circumferentiæ  $ABCD$ , in quot distri-  
 buta ē circumferentiæ  $EFGH$ . Nā iunctis rectis  $AP$ ,  $PB$ ,  $BQ$ , &c.  
 erit figura inscripta similis figuræ  $ELFMGNHO$ , ut patet.  
 Quoniā igitur est polygonū  $APBQCRDS$ , ad polygonū  
 $ELFMGNHO$ , ut quadratū diametri  $AC$ , ad quadratum  
 diametri  $EG$ ; hoc est, per hypothesin, ut circulus  $ABCD$ ,  
 ad  $I$ : Est aut polygonum  $APBQCRDS$ , minus circulo  
 $ABCD$ . Igitur & polygonum  $ELFMGNHO$ , minus erit  
 quam  $I$ . Oñsum aut est & maius. Quod est absurdum.  
 Non igitur maior est magnitudo  $I$ , circulo  $EFGH$ .

1. decimi.

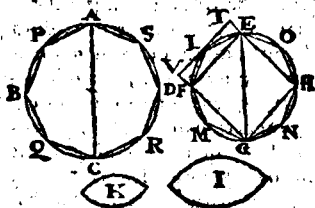
1. duodec.

14. quinti.

Si r secundo magnitudo  $I$ , maior circulo  $EFGH$ . Cum  
 ergo ponatur circulus  $ABCD$ , ad  $I$ , esse ut quadratū dia-  
 metri  $AC$ , ad quadratum diametri  $EG$ ; erit & conuertēdo  
 $I$ , ad circulum  $ABCD$ , ut quadratum diametri  $EG$ , ad  
 quadratum diametri  $AC$ . Ponatur ut  $I$ , ad circulum  $AB-$   
 $CD$ , ita circulus  $EFGH$ , ad magnitudinē aliquā, nempe ad  $K$ .  
 Et quia  $I$ , maior ponitur circulo  $EFGH$ , maior quoque erit  
 circulus



circulus A B C D, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C, ita circulus E F G H, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo A B C D. Quod est absurdum. Offensum enim est iam, non posse esse ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H. Sed neq; minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G,



ita circulus A B C D, ad I, sit autem ut circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque ut quadratum diametri A C, ad qua-

dratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc fit, ita esse circulum ad circulum, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descripto. Quoniam et circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

Si  $\Gamma$  pyramis, cuius basis triangulum ABC, uertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & uertices H, D; nec non in duo solida EBF GH I K, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBF G, & triangula opposita EHG, BIF; huius uero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulum KIH, habentq; hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, ut constat, si recte concipiatur pyramidis uertex D, in sublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item, duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter; erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC. Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE, EBF G, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam uero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. Proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, similis est, per def. 9. huius lib. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ, erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. Quare latera trian-



2. sexsi.

9. undec.

10. undec.

4. sexsi.

10. undec.

guli

4. *sexi.*

guli  $H I K$ , lateribus trianguli  $A B C$ , circa æquales angulos sunt propoportionalia; ac propterea triangulum  $H I K$ , triangulo  $A B C$ , simile est: Sunt autem & triangula  $D H I$ ,  $D I K$ ,  $D K H$ , triangulis  $D A B$ ,  $D B C$ ,  $D C A$ , similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 5. Pyramis ergo  $H I K D$ ,



similis est quoque eadem pyramidi  $A B C D$ , per defin. 9. huius lib. Quoniam autem triangula  $A H E$ ,  $H D I$ , similia sunt trian-

11. *sexi.*

gulo  $A D B$ , ut ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales  $A H$ ,  $H D$ , constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula  $A H G$ ,  $H D K$ , cum similia sint ostensa triangulo  $A D C$ , & constituta super æquales rectas  $A H$ ,  $H D$ . Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula  $A E G$ ,  $H I K$ , cum similia sint ostensa triangulo  $A B C$ , & super rectas posita  $A E$ ,  $H I$ , quæ æquales sunt, ob parallelogrammum  $A E I H$ . Non secus æqualia erunt & similia triangula  $E H G$ ,  $I D K$ , cum sint ostensa similia triangulo  $B D C$ , & habeant rectas  $H B$ ,

34. *primi.*

$D I$ , quæ æquales sunt, ob parallelogrammum  $H B I D$ . Pyramides igitur  $A E G H$ ,  $H I K D$ , æquales sunt & similes, per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia triangula unus æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, ut demonstratum est.

34. *primi.*

$R V R S V S$ , quia rectæ  $E H$ ,  $H G$ ,  $G E$ , æquales sunt, & parallelæ rectis  $B I$ ,  $I F$ ,  $F B$ , ob parallelogramma  $E H I B$ ,  $F G H I$ ,  $B F G E$ ; erunt triangula  $E H G$ ,  $B I F$ , æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1.

15. *undec.*

Ac propterea & similia: Sunt autem & parallelæ; cum  $E H$ ,  $H G$ , per quas ducitur planum  $E H G$ , parallelæ sint rectis  $B I$ ,  $I F$ , per quas planum  $B I F$ , ducitur. Igitur solidum  $B I F G H E$ , contentum duobus triangulis  $E H G$ ,  $B I F$ , ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis  $E G F B$ ,  $B E H I$ ,  $I F G H$ ; prisma est, ex definitione. Eodem modo prisma ostendetur solidum  $C F G H I K$ . Cum enim rectæ  $F C$ ,  $C G$ ,  $G F$ , æquales sint, & parallelæ rectis  $I H$ ,  $H K$ ,  $K I$ , ob parallelogram-

34. *primi.*

logram-

logramma  $CFIK$ ,  $CGHK$ ,  $FGHI$ ; erunt trian-  
gula  $CFG$ ,  $HIK$ , æqualia, & æquiangula inter se, & propte-  
rea similia: Sunt autem & parallela, quod rectæ  $CF$ ,  $CG$ ,  
per quas ducitur planum  $CFG$ , parallelae sint rectis  $KI$ ,  
 $KH$ , per quas planum  $KIH$ , ducitur. Igitur solidum  
 $CFGHIK$ , contentum duobus triangulis  $CFG$ ,  $KIH$ ,  
ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tri-  
bus parallelogrammis  $CFIK$ ,  $KHGC$ ,  $IFGH$ , prisma  
est. Quoniam uero prismata  $EBFGHI$ ,  $CFGHIK$ ,  
sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela  $BC$ ,  
 $GE$ ,  $HIK$ ; & parallelogrammum  $EBFG$ , basis illius,  
duplum est trianguli  $CFG$ , basis huius, per scholion pro-  
pos. 4<sup>ta</sup>. lib. 1. Ipsa inter se æqualia erunt.

5. undec.

DENIQUE quia prisma  $EBFGHI$ , maius est py-  
ramide  $EBFI$ , totum parte; Est autem pyramis  $EBFI$ ,  
æqualis & simili pyramidi  $AEGH$ , necnon pyramidi  $HIK$ ,  
 $D$ , ut perspicuum est ex æqualitate & similitudine trian-  
gulorū: Maiora erunt prismata  $EBFGHI$ ,  $CFGHIK$ , pyra-  
midibus  $AEGH$ ,  $HIKD$ . Ac proinde illa quidē dimidiū pyra-  
midis  $ABCD$ , excedent, hæ uero a dimidio eiusdē deficient.  
Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, ma-  
ior dimidium eius superat, minor uero a dimidio deficit.  
Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c.  
Quod erat ostendendum.

40. undec.

# THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem alti-  
tudinis, triangulares habentes bases; sit autē  
illarū utraq; diuisa & in duas pyramidas æ-  
quales inter se, & similes toti; & in duo pris-  
mata æqualia; Ac eodē modo diuisa sit utra-  
que pyramidum, quæ ex superiore diuisione  
natæ sunt, idque semper fiat: Erit ut u-  
nius pyramidis basis ad alterius pyramidis  
basim,

basim, ita & omnia, quæ in yna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

S I N T duæ pyramides  $ABCD, EFGH$ , eiusdem altitudinis, quarum latera bisariam diuidantur in punctis  $I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V$ , connectanturque rectæ  $IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP$ , ita ut pyramis utraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in  $A I L M$ ,



$M N O D; E P R S, S T V H$ ; & in bina prismata equalia  $I B K L M N, C K L M N O, P F Q R S T, G Q R S T V$ ; ut vult propositio præcedens: Eodemque modo intelligantur esse diuise pyramides factæ  $A I L M,$

$M N O D; E P R S, S T V H$ ; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide  $ABCD$ , ad omnia prismata generata in pyramide  $EFGH$ , illis multitudine æqualia, ut est basis  $ABC$ , ad basin  $EFG$ . Cum enim sit ut  $BC$ , ad  $CK$ , ita  $FG$ , ad  $GQ$ , eo quod utraque linea sit diuisa bisariam; sint autem triangula  $ABC, LKC$ , similia similiterque posita; Item triangula  $EFG, RQG$ , ex coroll. propos. 4. lib. 6. Erit quoque ut triangulum  $ABC$ , ad triangulum  $LKC$ , ita triangulum  $EFG$ , ad triangulum  $RQG$ . Et permutando, ut  $ABC$ , ad  $EFG$ , ita  $LKC$ , ad  $RQG$ . Ut autem  $LKC$ , ad  $RQG$ , ita est prisma  $CKLMNO$ , ad prisma  $GQ R S T V$ , ut mox ostendemus; atque adeo ita prisma  $I B K L M N$ , ad prisma  $P F Q R S T$ , cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prisma, uidelicet  $I B K L M N$ , ad unum prisma  $P F Q R S T$ , ita sunt duo prismata  $I B K L M N, C K L M N O$ , ad duo prismata  $P F Q R S T, G Q R S T V$ . Igitur erunt quoque, ut basis  $ABC$ , ad basin  $EFG$ , ita duo prismata in pyramide  $ABCD$ , ad duo prismata in pyramide  $EFGH$ . Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus  $A I L M, M N O D$ , factis in pyramide  $ABCD$ , ad bina prismata in pyramidibus  $E P R S, S T V H$ , factis in pyramide  $EFGH$ , ut sunt bases  $A I L, M N O$ , illarum pyramidum ad bases

22. sexti.

12. quinti.

ad bases  $EPR$ , &  $TV$ , harum pyramidum; & sic deinceps, eadem semper facta diuisione. Sed ut illæ bases ad has, ita est  $LKC$ , basis, quæ illis est æqualis & similis, ad basin  $RQS$ , quæ his est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis  $ABC$ , ad basin  $EFG$ . Igitur erunt quoque, ut basis  $ABC$ , ad basin  $EFG$ , ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide  $ABCD$ , ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide  $EFGH$ : Ac propterea erunt quoque, ut prismata pyramidis  $ABCD$ , ad prismata pyramidis  $EFGH$ , ita prismata tam pyramidis  $AILM$ , ad prismata pyramidis  $EPRS$ , quam prismata pyramidis  $MNO$ , ad prismata pyramidis  $STVH$ ; & ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis  $ABCD$ , ad duo prismata pyramidis  $EFGH$ , ita omnia prismata in pyramidibus  $ABCD$ ,  $AILM$ ,  $MNO$ , &c. simul, ad omnia prismata in pyramidibus  $EFGH$ ,  $EPRS$ ,  $STVH$ , &c. simul, si hæc illis multitudine sint equalia; Erunt quoque, ut basis  $ABC$ , ad basin  $EFG$ , ita omnia prismata in pyramide  $ABCD$ , ad omnia prismata in pyramide  $EFGH$ . Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

12. quinti

**L E M M A.**

QVOD autem sit  $LKC$ , ad  $RQG$ , ita prisma  $CKLMNO$ , ad prisma  $GQRSTV$ , ita ostendemus. Intelligentur ex uerticibus  $D, H$ , ad bases  $ABC$ ,  $EFG$ , demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum  $ABCD$ ,  $EFGH$ . Quoniam igitur plana parallela  $ABC$ ,  $MNO$ , secant duas rectas, nempe  $DC$ , & perpendicularem ex  $D$ , demissam proportionaliter; secatur autem  $DC$ , bisariam in  $O$ ; secabitur quoque perpendicularis ex  $D$ , demissa bisariam in puncto, cui planum  $MNO$ , occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex  $H$ , demissa bisariam secabitur a plano  $STV$ . Quare cum totæ perpendicu-

17. undec.

Y lares

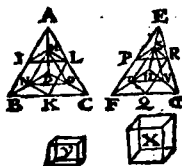
lares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata  $CKLMNO, GQRSTV$ , cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases  $LKC, RQG$ , per ea, quæ ad propof. 34. lib. 11. demonstrauimus.

5.

# THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis  $ABCD, EFGH$ , quarum bases triangula  $ABC, EFG$ . Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis  $ABC$ , ad basin  $EFG$ , ita pyramis  $ABCD$ , ad solidum  $X$ ; quod uel



minus erit, uel maius pyramide  $EFGH$ . Sit primo minus, magnitudine  $Y$ . Diuidatur pyramis  $EFGH$ , in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propof. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide

$EFGH$ , in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide  $EFGH$ , auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata  $PFQ RST, GQRSTV$ , quæ maiora sunt dimidio pyramidis  $EFGH$ : Item a reliquis pyramidibus  $EPRS, STVH$ , plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam  $Y$ , excessus pyramidis  $EFGH$ , supra solidum  $X$ . Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis  $EFGH$ , æqualis ponatur solidis  $X, Y$ ; erunt reliqua prismata in pyramide  $EFGH$ , maiora solido  $X$ . Diuidatur pyramis  $ABCD$ , in duas pyramides æquales, & duo prismata

3. duodec.

1. desimi

ma equalia, & eodem modo factæ pyramides A I L M, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata equalia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide E F G H. Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, æ omnia prismata numero equalia in pyramide EFGH, ut basis ABC, ad basin EFG, hoc est, ut pyramis ABCD, ad solidum X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quàm tota pyramis ABCD; Erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora, quam solidum X. Oñsa uero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.

4. duodec.

Sit secundo solidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, ut basis ABC, ad basin EFG; Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, ut basis EFG, ad basin ABC. Ponatur ut solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide EFGH; erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit, ut basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Oñsum enim est iam, non posse esse, ut est basis ab basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum pyramide EFGH; sed neque minus est oñsum. Igitur equalis est. Quare cum ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; Sit autem pyramis ABCD, ut ad solidum X, ita ad pyramidem EFGH, solido X, equalis: Erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

14. quinti

14. quinti

7. quinti.

# SCHOLION.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sint, ut bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim unius altitudo maior credatur, abscondatur ab ea equalis minori, & a puncto abscissionis ad oēs angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritq; ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constituta. Sed sic quoq; erit ad istam pyramidem. Pyramis ergo constituta

Y 2 equalis.



9. quinti. *aqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod est: absurdum.*

COROLLARIUM.

HINC fit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, uel aequales bases triangulares constitutas, esse inter se aequales; propterea quod eandem proportionem habeant eum basibus, quae aequales ponuntur, uel certe una & eadem.

ITEM sequitur, e conuerso pyramides triangulares aequales super eandem, uel aequales bases, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares aequales eandemque habentes altitudinem, bases habere aequales, si non eandem habuerint. Quae quidem duo ex prima parte corollarii eodem argumento ostendemus, quo in conuerso propos. 10. & 11. lib. 11. demonstrando usus sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituantur alia pyramis, &c.

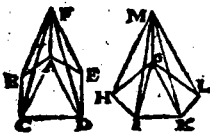
6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

S V B eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonae ABCDE, GHIKL, latera multitudine aequalia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin: Resolutis enim basibus in triangula numero aequalia, erit quaelibet pyramis in totidem pyramides

triangulares diuisa. Quia uero est, ut basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACD F; Erit componendo ut basis ABCD, ad basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACD F: Sed rursus est ut basis



9. duodec.

5. duodec.

ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACD F, ad pyramidem ADE F. Igitur ex aequo ut basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit ut basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit ut basis GHIKL, ad basin GKL, ita pyramis GHIKLM, KLM.

K L M, ad pyramidem G K L M; Et conuertendo ut basis G K L ad basin G H I K L, ita pyramis G K L M, ad pyramidem G H I K L M. Rursus quoniam est, ut basis A D E, ad basin G K L, ita pyramis A D E F, ad pyramidem G K L M; Erunt quatuor bases A B C D E, A D E, G K L, G H I K L, in eisdem proportionibus cum quatuor pyramidibus A B C D E F, A D E F, G K L M, G H I K L M, ut in hac formula uides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit ut basis A B C D E, ad basin G H I K L, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M; Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

|           |             |
|-----------|-------------|
| A B C D E | A B C D E F |
| A D E     | A D E F     |
| G K L     | G K L M     |
| G H I K L | G H I K L M |

5. duodec.

SCHOLION.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio, de illis dumtaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quorum bases polygonæ latera habens multisitudine aequalia; facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum unius basis plura continet latera, quam basis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiusdem altitudinis A B C D E F, G H I K, quarum illius basis sit polygonæ, nempe pentagonæ, huius uero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin.



Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuisa. Quoniam uero est, ut basis A B C, prima quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; Et eodem modo, ut basis A C D, quinta quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A C D F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem: Erit ut basis A B C D, prima quantitas cū quinta; ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas cū sexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis A B C D, prima quanti-

5. duodec.

24. quinti

T 3

5. duodec.

24. quinti

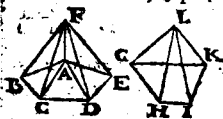
tas, ad basin  $GHI$ , secundam quantitatem, ita pyramis  $AB-  
CDF$ , tertia quantitas, ad pyramidem  $GHIK$ , quartam quanti-  
tatem, ut modo est ostensum: & ut basis  $ADE$ , quinta quan-  
titas, ad basin  $GHI$ , secundam quantitatem, ita pyramis  $AD-$



$EF$ , sexta quantitas, ad pyramidem  
 $GHIK$ , quartam quantitatem;  
Erit etiam ut basis  $ABCDE$ , pri-  
ma quantitas cum quinta, ad basin  
 $GHI$ , secundam quantitatem, ita

pyramis  $ABCDEF$ , tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem  
 $GHIK$ , quartam quantitatem: Quod est propositum. Eo-  
dem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula  
in basi polygoni. Cum autem; ut demonstratum est, sit ut ba-  
sis polygoni  $ABCDE$ , ad basin triangularem  $GHI$ , ita pyra-  
mis  $ABCDEF$ , ad pyramidem  $GHIK$ ; Erit quoque con-  
ueriendo, ut basis  $GHI$  ad basin  $ABCDEF$ , ita pyramis  $GH-  
IK$ , ad pyramidem  $ABCDEF$ . Quam ob rem duae pyramides  
qualibet, quarum vnus basis est polygoni, alterius triangu-  
laris, suis basibus sunt proportionales, vndeunque incipias:  
Quamuis enim demonstratio incipiat a polygono, eiusque pyra-  
mide, ut ex demonstratione constat, tamen conueriendo licebit  
initium quoque sumere a triangulo, eiusque pyramide, ut di-  
ctum est.

**S**ed iam sint duae pyramides eiusdem altitudinis  $ABC-  
DEF$ ,  $GHIKL$ , quarum bases sint polygoni, sintque plura  
latera in vna base, quam in altera. Dico rursus esse pyramide



ad pyramidem, ut est basis ad ba-  
sin. Resoluo enim polygonum  $AB-  
CDF$ , in triangula  $ABC$ ,  $ACD$ ,  
 $ADF$ , erit pyramis eius in totide  
diuisa pyramides. Quia vero; ut

iam est demonstratum, est ut basis  $ABC$ , triangularis prima  
quantitas, ad basin  $GHIK$ , polygonam, secundam quantitatem;  
ita pyramis  $ABCF$ , tertia quantitas ad pyramidem  $GHIKL$ ,  
quartam quantitatem; & ut basis  $ACD$ , quinta quantitas, ad  
basin  $GHIK$ , secundam quantitatem, ita pyramis  $ACDF$ , sex-  
ta quantitas, ad pyramidem  $GHIKL$ , quartam quantitatem;  
Erit etiam ut basis  $ABCD$ , prima quantitas cum quinta, ad ba-  
sin  $GHIK$ , secundam quantitatem, ita pyramis  $ABCF$ , ter-  
tia

24. quinti

ita quantitas cum sexta, ad pyramidem  $GHIKL$ , quartam quantitatem. Rursus quia est, ut bases  $ABCD$ , prima quantitas, ad basin  $GHIK$ , secundam quantitatem, ita pyramis  $AB-CD E$ , tertia quantitas, ad pyramidem  $GHIKL$ , quartam quantitatem, ut proxime demonstratum est; Et est quoque ut bases  $ADE$ , quinta quantitas, ad basin  $GHIK$ , secundam quantitatem, ita pyramis  $ADEF$ , sexta quantitas, ad pyramidem  $GHIKL$ , quartam quantitatem, ut ante est ostensum; Erit etiam ut bases  $ABCDE$ , prima quantitas cum quinta, ad basin  $GHIK$ , secundam quantitatem, ita pyramis  $AB-CD E$ , tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem  $GHIKL$ , quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi  $AB-CD E$ . 24. quinsi

HANC autem propositionem 6. & ea, quae in hoc scholio demonstrata sunt, conuersemus hoc modo.

**PYRAMIDES** quarumlibet basium, quae inter se sunt, ut bases; eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quae in scholio pro-  
pos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

# COROLLARIUM.

PERSPICVUM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super aequales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se aequales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quae aequales ponuntur, vel certe una & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas aequales, & super aequales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas aequales, eandemque habentes altitudinem, aequales habere bases, si non habuerint eandem. Haec autem duo dem ostenduntur, ut in coroll. propos. 5. huius lib. diximus.

## THEOR. 7. PROPOS. 7.

6.

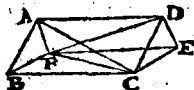
**OMNE** prisina triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides

T 4 aequales

æquales inter se, triangulares bases habentes.

34. primi

5. duodec.



Sit prisma  $ABCDEF$ , cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia  $ABF$ ,  $DCE$ . Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur in tribus parallelogramis tres diametri, nempe  $AC$ , in  $ABCD$ ;  $CF$ , in  $BCEF$ ;  $FD$ , in  $ADEF$ . Quoniam igitur triangula  $ABC$ ,  $ADC$ , æqualia sunt; estque ut basis  $ABC$ , ad basin  $ADC$ , ita pyramis  $ABCF$ , ad pyramidem  $ADCF$ , cum hæc pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex  $F$ , uertice ad planum  $ABCD$ , demissam; Erunt & pyramides  $ABCF$ ,  $ADCF$ , inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides  $ADF$ ,  $EDF$ , super æquales bases  $ADF$ ,  $EDF$ , constituta, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari a uertice  $C$ , ad planum  $ADEF$ , demissa. Est autem pyramis  $ADCF$ , eadem pyramidi  $ADF$ , cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi  $ADC$ , & triangulis  $ADF$ ,  $ACF$ ,  $DCF$ ; hæc uero eisdem quatuor planis, nimirum basi  $ADF$ , & triangulis  $ADC$ ,  $ACF$ ,  $DCF$ . Igitur tres pyramides  $ABCF$ ,  $ADCF$ ,  $EDF$ , seu  $CDEF$ , (quæ eadem est pyramidi  $EDF$ , cum tam  $EDF$ , quam  $CD-EDF$ , contineatur planis  $CDE$ ,  $EDF$ ,  $DCF$ ,  $FCE$ , totum prisma componentes, ut perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma  $ABCDEF$ , in tres pyramides est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basim, &c. Quod erat demonstrandum.

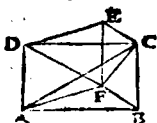
### COROLLARIUM. I.

Hinc colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim, & altitudinem.

Sit enim primum pyramis  $ABFC$ , triangularem habens basim  $ABF$ ; & prisma  $ABCDEF$ , sub eadem altitudine eandem habens basim triangularem  $ABF$ . Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis.

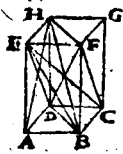
prismatis. Nam si ducatur recta  $DP$ , erit prisma diuisum in tres pyramides æquales  $ABCF$ ,  $ADCF$ ,  $CDPF$ ; & demonstratum est; Ac propterea pyramis  $ABCF$ , hoc est, pyramis  $ABFC$ , (cum hæc illi sit æqualis. immo eadem, quod eidem planis comprehendatur  $ABF$ ,  $FCA$ ,  $ABC$ ,  $CF$ ), tertia pars erit prismatis  $ABCDE$ . Cum igitur pyramis  $ABFC$ , æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim  $ABF$ , constituta, ex coroll. propof. 5. huius lib. manifestum est quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma e contrario esse pyramidis triplum.

7. duodec.



Si igitur secundo pyramis  $ABCDE$ , cuius. basim rectilineum quodcunque  $ABCD$ , quolibet laterum; & prisma  $ABCDEFGH$ , sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi  $ABCD$ , & plano opposito  $EFGH$ , in triangula numeri æqualia  $ADR$ ,  $BCD$ ;  $BHP$ ,  $FGH$ ; erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis  $AH$ ,  $BH$ ;  $DF$ ,  $CF$ ; erit, ut demonstratum est, pyramis  $ADBH$ , tertia pars prismatis  $ABFEHD$ ; Item pyramis  $BCDF$ , tertia pars prismatis  $CDHGFB$ . Quare erit, ut pyramis  $ADBH$ , ad prisma  $ABFEHD$ , ita pyramis  $BCDF$ , ad prisma  $CDHGFB$ ; Ac propterea ut una pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma  $ABCDEFGH$ . Igitur pyramides  $ADBH$ ,  $BCDF$ , simul tertia partem constituent prismatis  $ABCDEFGH$ . Sunt autem pyramides  $ADBH$ ,  $BCDF$ , æquales pyramidi  $ABCD$ ; propterea quod pyramides  $ADBH$ ,  $ADBE$ , super eandem basim, & sub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. propof. 5. huius lib. Eademque ratione æquales sunt pyramides  $BCDF$ ,  $BCDE$ , super eandem basim, & sub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides  $ADBE$ ,  $BCDE$ , component totam pyramidem  $ABCDE$ ; erit & pyramis  $ABCD$ , tertia pars prismatis  $ABCDEFGH$ . Cum igitur pyramis  $ABCD$ , æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim  $ABC$ , constituta, per coroll. propof. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habeat basim multilateram, eandemque altitudinem.

12. quinta



Quod si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostenderetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Unde singule pyramides triangulares horum prismatum erunt tertie partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæc pyramides æquales sint pyramidi basi habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

h o d m modo pyramis tertia pars est prismatis habentis ba-

lora

sem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem Nam eiusmodi pyramis æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

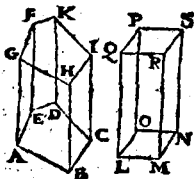
SCHOLIION. I.

Ex dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

**S V B** eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases; inter se sunt, ut bases.

**Q V A M V I S** enim hoc demonstratum sit in lib. 12. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ; nec nō de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen id ipsum demonstrabimus uniuersæ de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygonæ, quamuis plura latera seu

anguli in vnus base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis  $ABCDEF GHIK$ ,  $LMNOPQRS$ , quorum bases sint figura multilatera. Dico, ut est basis  $ABCDE$ , ad basim  $LMNO$ , ita esse prismam ad prismam. Si enim ex omnibus angulis utriusque ba-



sis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis, habentes easdem bases: Ac proinde, per coroll. prædictum, qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. Quamobrem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, ut basis ad basim, ut ostensum est propos. 6. eiusque scholio. Igitur eris quoque ut basis ad basim, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.

15. Quinti.

CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, ut bases ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendimus, quo scholion propos. 5. demonstratum est.

### COROLLARIUM. II.

VND E prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel aequales bases quascunque, inter se sunt aequalia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quae aequales ponuntur, vel certe una & eadem.

E CONTRARIO, Prismata aequalia super aequales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata aequalia eiusdem altitudinis, bases habent aequales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendens, ac conversum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.

### SCHOLION. II.

CETERVM tam ea, quae in priori corollario, quam illa, quae in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tam summo de prismatis, quae in vertice habent plana basi parallela, aequalia, & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, aequalibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putas tantummodo prismata dici ab Euclide, ut in defn. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis unum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, ut in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebis, quam basis ad basim, ut in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basa concipiatur unum parallelogrammorum, ita ut in vertice sis linea recta, non eris pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed due tertia partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebis sesquialteram, quam videlicet habens 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud aequale & simile, ut parallelepipedum efficiatur, eris pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, in corollario



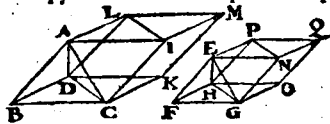
lario prædicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesqui alteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quia cum ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant bases parallela, equalia atque similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, duas tertie partes prismatum, ut modo demonstramus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

8.

# THEOR. 8. PROPOS. 8.

**SIMILES** pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

**SINT** pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita ut bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula unius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homolo-



ga, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde du-

cantur

cantur  $LM$ ,  $IM$ , rectis  $AI$ ,  $AL$ , parallelæ & æquales, conuenientes in  $M$ , connectaturque recta  $KM$ . Erit igitur cōpletum parallelepipedum  $BM$ , eiusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi  $BM$ , sint parallela, ut facili colligitur ex propof. 15. lib. 11. Rurfus eodem modo perficiatur parallelepipedum  $FQ$ . Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani  $ABC$ ,  $EHG$ , sunt æquales, estque ut  $AB$ , ad  $BC$ , ita  $EH$ , ad  $FG$ ; erunt parallelogramma  $BL$ ,  $FN$ , similia. Eodem modo cū anguli  $ABD$ ,  $EFH$ , sint æquales, sitque ut  $AB$ , ad  $BD$ , ita  $EH$ , ad  $FH$ ; Item anguli  $DBC$ ,  $HFG$ , æquales, & ut  $DB$ , ad  $BC$ , ita  $HF$ , ad  $FG$ ; erunt & parallelogramma  $BL$ ,  $BK$ , parallelogrammatis  $F P$ ,  $F O$ , similia. Sed tam in  $BL$ ,  $BK$ ,  $BL$ , parallelepipedum  $BM$ , reliquis tribus oppositis  $DM$ ,  $AM$ ,  $CM$ ; quam tria  $FN$ ,  $FO$ ,  $FP$ , parallelepipedum  $FQ$ , reliquis oppositis tribus  $HQ$ ,  $EQ$ ,  $GQ$ , sunt æqualia & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum  $BM$ , similia sunt sex planis solidum  $FQ$ , ambientibus; Ac propterea ex defn. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda  $BM$ ,  $FQ$ . Quoniā uero ductis rectis  $LI$ ,  $PN$ , prismata  $DBCLIA$ ,  $HFGNPE$ , habent eandem proportionem, quam parallelepipeda  $BM$ ,  $FQ$ , eorum dupla; & pyramides  $ABCD$ ,  $EHG H$ , eandem, quam prismata dicta, earum tripla; habebūt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. Cum igitur proportio parallelepipedum  $BM$ , ad parallelepipedum  $FQ$ , sit triplicata proportionis homologorum laterū  $BC$ ,  $FG$ ; erit quoque proportio pyramidis  $ABCD$ , ad pyramidem  $EHG H$ , proportionis  $BC$ , ad  $FG$ , triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

# COROLLARIUM.

Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilineæ similia plurius laterum  $ABCDE$ ,  $GHIK L$ . Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa  $AB$ ,  $GH$ .

24. undec.

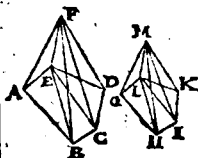
15. quinti

11. quinti

33. undec.

10. *sexti.*

G H. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ E B, E C; L H, L I, erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, si in ha erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, equalis; erit ut FE, ad EA, ita ML ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorū AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia citur EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et ut B A, ad BF, ita HG, ad H M, cum ob pyramidū similitudinem similia sint triangula



5. *sexti.*

8. *duodec.*

12. *quinti.*

8. *duodec.*

ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita L H, ad H M; Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH; & ut EB, ad BF, ita L H, ad H M; erit etiam ex æquo, ut FE, ad BF, ita M L, ad M H. Quare æquiangula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABBF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides BBCE, LHIM; Itē CDEF, IKLM. Quapropter, ut demonstratū est, pyramides ABFE, BBCE, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatā proportionē habebunt laterū homologorū A B, B C, C D, ad G H, H I, I K, singulorū ad singula. Cum igitur AB, B C, C D, ad G H, H I, I K, habeant unā & eandē proportionē, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoq; pyramides ABFE, BBCE, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemq; proportionē, triplicatā scilicet illius; Atque idcirco erit, ut una pyramis ABFE, ad unā pyramidem GHLM, ita oēs pyramides nempe pyramis ABCDEF, ad oēs pyramides, nimirū ad pyramidē GHIKLM. Quam ob rē, cū pyramis ABFE, ad pyramidē GHLM, habeat triplicatā proportionē homologorū laterū AB, GH; habebit quoq; pyramis ABCDEF, ad pyramidē GHIKLM, triplicatā proportionē eorundē laterū homologorū AB, GH: Quod est ppositū.

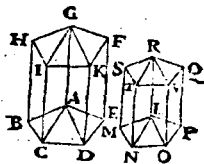
### S C H O L I O N

EAD E M ratione, prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S T V. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ A C, A D; L N, L O, erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula A B C, C A D, D E A, triangulis L M N, N L O, O P L, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ

20. *sexti.*

re. E. 2

recte GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGR, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismaticis. Quoniam uero, quod similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt; erit ut IC, ad CB, ita TN, ad NM: Ut autem CB, ad CA, ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex equo erit ut IC, ad CA, ita TN, ad NL.



Rursus quoniam angulus solidus N, aequalis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum, si ille huic superponatur, omnia inter se convenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD, & angulus T NM, angulo ICB, & angulus T NO, angulo ICD: Conuenit autem & recta NL, recta CA, eo quod anguli MNL, BCA, sint aequales. Igitur anguli ICA, TNL, aequales sunt; Ac propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sunt, ex definitione solidorum similium. Non aliter ostenduntur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quae demonstrauimus ad propof. 34 lib. 11. triplicatam habet proportionem, singula ad singula, laterum homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante res sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

Ex quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, et numero aequales, et homologas totis. Hoc manifestum est ex demonstratione praecedentis corollarii. Eodem modo inferi, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero aequalia, et homologa totis. Ut apparet ex huius scholij demonstratione.

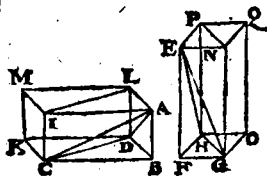
THEOR.

7.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

AEQUALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, ut in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se



æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit ut basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: Ut autem basis BI, ad basin FN, ita est triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eadem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

SINT iam bases & altitudines reciprocae. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, ut prius, cum sit ut ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eadem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum, & pyramidum;

94. undec.

15. quinsi

15. quinsi

pipedorum

pipedorū & altitudines eorum dem reciproca; Ac propterea inter se equalia erunt parallelepipedum  $BM, FQ$ . Quare & prismata  $DBCILA, HFGNPE$ , eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertie partes, æquales erunt. A Equalium igitur pyramidū, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

34. undec.

## SCHOLIUM.

E ADEM ratione A Equalium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illa sunt æquales. Sint enim primum dua pyramides æquales, quarum quidem  $ABCD$ , basin habeat triangularem; at vero  $EFGHI$ , non triangularem. Fiat basi non triangulart  $EFGH$ , æquale triangulū  $KLM$ . Quod quidem fiet, si ba-



sis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propof. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammū facile ad triangulum reduce sur, per ea, quæ demonstramus ad propof. 42. lib. 1. Deinde super  $KLM$ , fiat pyramis  $KLMN$ , eiusdem altitudinis cum pyramide  $EFGHI$ . Quoniam ergo pyramides  $EFGHI, KLMN$ , æquales habent bases, & eandem altitudinem, ipse erunt æquales, per ea, quæ in scholio propof. 64. huius lib. offendimus: Ponitur autem pyramis  $EFGHI$ , equalis pyramidi  $ABCD$ . Igitur & pyramis  $KLMN$ , pyramidi  $ABCD$ , equalis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides  $ABCD, KLMN$ , bases triangulares; erit ut basis  $ABC$ , ad basin  $KLM$ , hoc est, ad huic æqualem basin  $EFGH$ , ita altitudo pyramidis  $KLMN$ , hoc est, altitudo pyramidis  $EFGH$ , (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis  $ABCD$ . Ac proinde pyramidum  $ABCD, EFGHI$ , equalium bases & altitudines reciprocantur.

9. duodec.

S E D reciprocantur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo; cum basis  $KLM$ , æqualis sit basi  $EFGH$ , & alti-

Z

tudo

9. duodec.

tudo pyramidis  $KLMN$ , eadem qua pyramidis  $EFGHI$ ; ponatur autem esse ut  $ABC$ , ad  $EFGH$ , ita altitudo pyramidis  $EFGHI$ , ad pyramidis  $ABCD$ , altitudinem; erit quoque ut basis



$ABC$ , ad basin  $KLM$ , ita altitudo pyramidis  $KLMN$ , ad altitudinem pyramidis  $ABCD$ . Quamobrem aequales sunt pyramides  $ABCD$ ,  $KLMN$ . Cum er

go pyramis  $KLMN$ , aequalis sit pyramidi  $EFGHI$ , per ea, quae ostensa sunt in scholio propof. 6. huius lib. Erit & pyramis  $ABCD$ , pyramidi  $EFGHI$ , aequalis. Quod est propositum.

S i n t secundo pyramides aequales  $ABCDE$ ,  $FGHIKL$ , quarum bases sint in triangula. Fias rursus triangulū  $MNO$ , aequale basi  $ABCD$ , & pyramis  $MNOP$ , eiusdem altitudinis



cū pyramide  $ABCDE$ : Eritq; ex scholio propof. 6. huius lib. pyramis  $MNOP$ , aequalis pyramidi  $ABCDE$ : Sed hac a-

qualis ponit pyramidi  $FGHIKL$ . Igitur & pyramis  $MNOP$ , aequalis est pyramidi  $FGHIKL$ . Quare, ut nunc demonstramus, erit ut basis  $MNO$ , hoc est, basis  $ABCD$ , sibi aequalis, ad basin  $FGHIK$ , ita altitudo pyramidis  $FGHIKL$ , ad altitudinē pyramidis  $MNOP$ , hoc est, ad altitudinē pyramidis  $ABCDE$ ; (ponuntur .n. haec altitudines aequales.) Ac propterea pyramidum aequaliū  $ABCDE$ ,  $FGHIKL$ , bases & altitudines reciprocantur.

S i d reciprocetur iam bases harum pyramidum atq; altitudines. Dico ipsas esse aequales. Constituatur .n. eodē modo figura, cum basis  $MNO$ , aequalis sit basi  $ABCD$ , & altitudo pyramidis  $MNOP$ , eadem qua pyramidis  $ABCDE$ ; ponatur autē ut  $ABCD$ , ad  $FGHIK$ , ita altitudo pyramidis  $FGHIKL$ , ad altitudinē pyramidis  $ABCDE$ ; Erit quoq; ut  $MNO$ , ad  $FGHIK$ , ita altitudo pyramidis  $FGHIKL$ , ad altitudinē pyramidis  $MNOP$ . Quare ut ante ostēdimus, aequales erant pyramides  $MNOP$ ,  $FGHIKL$ : Est autē pyramis  $MNOP$ , pyramidi  $ABCDE$ , aequalis, ex scholio propof. 6. huius lib. Igitur & pyramis  $ABCDE$ , pyramidi  $FGHIKL$ , aequalis erit. Quod est propositum.

OMNIA haec facile quoq; demonstrabuntur convenire prismatis quibuscunq;. Nam si prismata fuerint aequalia, erunt & eorū pyramides earundē altitudinē cū ipsis, & super easdē bases, aequales;

æquales; cū sint eorū tertia partes, ex coroll. propos. 7. huius lib. Vel certe duæ tertia, si nimirū prismatū bases fuerint parallelogrāma, & eorū uertices, linea recta, ut in scholio eiusdē propos. ostensum est. Quare, ut modo demonstrauimus, bases harū pyramidū atq; altitudines reciprocantur. Cū ergo hæ bases & altitudines eadem sint quæ prismatū reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

R V R S V S, si prismatū bases, & altitudines reciprocantur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines pyramidū easdē bases & altitudines cum prismatis habentium. Quare, ut demonstratū est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint tripla, uel certe sesquialtera, æqualia quoque sunt. Quod est propositum.

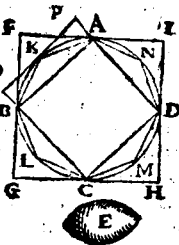
THEOR. 10. PROPOS. 10.

9.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus basin eandē circulū ABCD, & altitudinē eandē. Dico conū cylindri esse tertiā partē. Si .n. conus nō credatur esse tertia pars cylindri, nō erit cylindrus conī triplus, sed uel maior, uel minor triplo conī. Sit primū maior quā tripl⁹ conī, magnitudine E, ita ut cylindrus sit æqualis triplo conī & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratū ABCD, & circa eundē, quadratū FGHI; intelligaturq; super hæc quadrata sub altitudine conī, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratū ABCD, dimidiū est quadrati FGHI, ut ad propos. 9.

lib. 4. ostēdimus; estq; ut basis ad basin, ita parallelepipedū ad parallelepipedū eiusdē altitudinis; Erit & parallelepipedū basis ABCD, dimidiū parallelepipedī basis FGHI; Ac proinde parallelepipedū basis ABCD, mai⁹ erit, q̄ dimidiū cylindri,



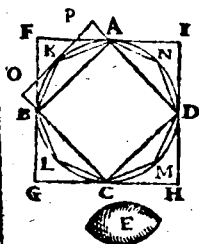
Z 2

cuius



cuius basis circulus ABCD. Secetur bisariam peripheriæ A B, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, ut ad propos. 27. lib. 1. ostendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intel-

41. primi.



ligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulū AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP; erit quoque prisma basis AKB, dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis ABOP: cum sit prisma ad prisma, ut basis ad basin, quemadmodum ad propos. 7. huius lib. demonstrauimus; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit, quam dimidium segmenti cylindri, cuius

basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangu-  
gula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, &c. secentur bisariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cylindro, cuius basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedium basis ABCD; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium AKE, BLC, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri reliqua basium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta), simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo

3. decimi.

plo coni una cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ AKBLCMDN, eandem habens altitudinē cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.

S I T secundo cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E. ita ut conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum A E C D, & circa eundem, quadratum F G H I; intelliganturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I, ut ad propos. 9. lib. 4. demonstrauius; estq; ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus A B C D. Secentur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiungantq; rectæ A K, A B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, ut ad propos. 27. lib. 3. demonstrauius, occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A K B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulum A K B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoque pyramis super basin A K B, dimidium pyramidis super basin A B O P, cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin A K B, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæc pyramides simul maiores sunt, quam di-

6. duodec.

41. primi.

6. duodec.

x. decimi.

media omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ  $A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A$ , secantur bisariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cono, cuius basis circulus  $A B C D$ , auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin  $A B C D$ , quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus  $A B C D$ ; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium  $A K B, B L C, C M D, D N A$ ; atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam  $E$ , excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium  $A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A$ , (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam  $E$ . Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini  $E$ , simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine  $E$ , ipsa magnitudo  $E$ , quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum  $A K B L C M D N$ , eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in corollario propositionis septimæ huius libri a nobis est demonstratum; erit huiusmodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, proptereaque conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem.

Quod erat demonstrandum.

SCHO.

SCHOLION.

QUAMVIS propositio hac solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hoc duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis convenit, ut perspicuum est eius demonstratione diligenter insueti. Itaque propositio uniuersa ita proponi poterit.

OMNIS conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis conici & cylindri.

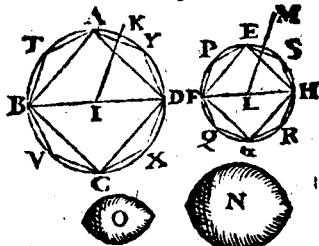
THEOR. II. PROPOS. II.

II.

SVB eadem altitudine existentes conici & cylindri, inter se sunt, ut bases.

SINT sub eadem altitudine conici & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, altitudines uero æquales IK, LM.

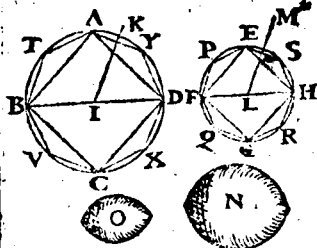
Dico ut est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si. n. hoc non credatur, sit ut basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ uel maior



erit, uel minor cono EFGHM. Si. n. esset æqualis, haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conum, ut basis ad basim: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribe in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidaturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bisariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quæ igitur ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH,

7. quinti.

1. decimi.



quam O. excessus con-  
ni EFGHM, super N.  
Sint ergo iam segmen-  
ta con- relicta basium  
EP, PF, FQ, &c.  
(quæ quidem bases  
sunt circuli segmenta)  
simul sumpta, mino-  
ra quam O. Cum igitur  
conus EFGHM,  
ponatur æqualis ma-

gnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta  
coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ præ-  
dicti coni segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius  
basis polygonum EPFQGRHS, eiusdem altitudinis cum  
cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribebatur in  
circulo ABCD, polygonum ATBV CXDY, simile polygo-  
no EPFQGRHS, ut in propof. 2. huius lib. docuimus, du-  
canturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur,  
per coroll. propof. 2. huius lib. est ut circulus ABCD, ad  
circulum EFGH, ita polygonum ATBV CXDY, ad poly-  
gonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad cir-  
culum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudi-  
nem N; & ut polygonum ad polygonum, ita est pyramis  
ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque  
ut pyramis ATBV CXDYK, ad pyramidem EPFQ-  
GRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis  
ATBV CXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, erit  
& pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Ofsensa au-  
tem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor  
est magnitudo N, cono EFGHM.

6. duodec.

SIT secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur  
ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus  
ABCDK, ad N; Erit & conuertendo ut circulus EFGH,

ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur  
ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitu-  
dinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM, maior  
quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circu-  
lus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad  
magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod  
est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse con-  
um ad magnitudinem minorem alio cono, ut est basis il-  
lius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, ma-  
gnitudo cono EFGHM; Sed neque minor est ostensa;  
Aequalis igitur est. Quapropter cum ponatur, ut basis  
ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Sit au-  
tem, ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK.  
ad conum EFGHM; erit quoque ut basis ABCD, ad basin  
EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

14. quinti.

7. quinti.

Quoniam autem, ut conus ABCDK, ad conum  
EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est coni  
ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni  
EFGHM) Erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH,  
ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod ta-  
men eodem modo confirmari potest, quo usi sumus in co-  
nis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylin-  
dri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes co-  
ni & cylindri, inter se sunt, ut bases. Quod erat demon-  
strandum.

15. quinti.

### SCHOLIUM.

PERSPICUUM quoque est, hanc propositionem, quam  
Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, ob ratio-  
nem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cy-  
lindros scalenos, ut eius demonstratio manifeste indicat, ita  
ut propositio uniuerse proponatur in hunc modum.

SUB eadem altitudine existentes coni & cy-  
lindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue  
vnus rectus, & alter scalenus; inter se propor-  
tionem habent, quam bases.

CON-

CONVERTETUR hac propositio quoq; hoc modo.

S I coni & cylindri inter se sint, ut bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

Q U O D quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum propos. 32. lib. 12. ostendimus.

COROLLARIUM.

H I N C fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, uel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, uel scaleni, siue unus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habeant, quam bases, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

I T E M sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, uel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter ac conuersum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

10.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

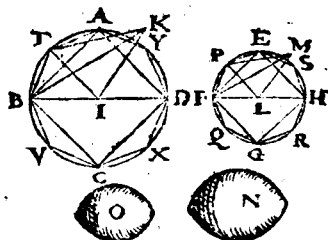
S I N T similes coni, & cylindri, quorum bases circuli A B C D, E F G H, axes uero I K, L M, & diametri basium B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus A B C D K, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H. Eritque N, uel minor, uel maior cono E F G H M. Si enim esset æqualis, haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni A B C D K, ad conum E F G H M, esset quoque triplicata proportionis diametri B D, ad diametrum F H; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor, quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatq; eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita ut rursus pyramis E P F Q G R H S M, maior ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ K B, K T; M F, M P, ut habeantur duo trian-

7. quinti.

gula

gula B K T, F M P, pyramidum A T B V C X D Y K,  
E P F Q G R H S M,

& cōnectantur re-  
ctæ T I, P L. Quo-  
niam igitur coni  
A B C D K, E F-  
G H M, similes  
ponuntur, erit,  
ex 24. defin. lib. 11.  
ut diameter B D,  
ad diametrum F H,  
ac propterea ut se-  
midiameter B I, ad semidiametrum F L, ita axis I K, ad axem



L M; Ac permūtādo ut B I, ad I K, ita F L, ad L M. Cū igitur anguli B I K, F L M, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propterea q; axes recti ad eorum bases; Erunt triangu-  
la B I K, F L M, æquiangu-  
la; Ac propterea  
ut K B, ad B I, ita M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita  
F L, ad F P; ob similitudinem triangulorum B I T, F L P.  
(Cum enim anguli B I T, F L P, insistentes similibus ar-  
cibus B T, F P, sint æquales, ut in scholio propos. 3. lib. 6.  
ostensum est; siq; ut B I, ad I T, ita F L, ad L P, ob æ-  
qualitatē ita linearū B I, I T, quam F L, L P, erunt triangu-  
la B I T, F L P, similia.) Igitur ex æquo, ut K B, ad B T, ita M F,  
ad F P. Rursus quia latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia sūt  
lateralibus K I, I T, trianguli K I T, & anguli dictis lateralibus cō-  
prehēsi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cū axis I K, rectus ponatur ad  
circulū A B C D, erunt bases K B, K T, æquales. Eodem modo  
æquales erunt rectæ M F, M P; Ac propterea rectæ K B, K T,  
rectis M F, M P, proportionales erūt, cū utrobq; sit propor-  
tio æqualitatis. Quoniā uero, ut K B, ad B T, ita K T, ad ean-  
dē B T, itē ut M F, ad F P, ita M P, ad eandē F P: Erat autē ut  
K B, ad B T, ita M F, ad F P; Erit quoque ut K T, ad B T, ita  
M P, ad F P; Et cōuertēdo ut B T, ad T K, ita F P, ad P M. Qua-  
re cū sit ut T K, ad K B, ita P M, ad M F; & ut K B, ad B T, ita  
M F, ad E P; Et ut B T, ad T K, ita F P, ad P M, ueluti ostēsu  
est, habebūt triangu-  
la B K T, F M P, latera, p-  
portionalia, ideo-  
que æquiangu-  
la erūt; Ac p-  
inde similia, ex definitione. Non  
aliter ostenduntur reliqua triangu-  
la ambientis pyramides  
A T-

15. quinti.

6. sexti.

4. sexti.

6. sexti.

4. primi.

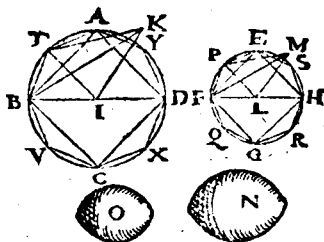
7. quinti.

3. sexti.



ATEVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quae cum sint multitudine aequalia, erunt duae pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportionem erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propof. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP; Et ut BI, ad

15. *quinti.* FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habe-



bit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH. Ponebatur autem & proportio conii ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Erit ergo ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyra-

midem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

14. *quinti.*

S i t secundo N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime ostendimus: Erit ut conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo ut N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PE, ad TB, hoc est, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoque N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, propor-

proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM, erit quoque conus ABCDK, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor est ostensa. Aequalis igitur est; ac proinde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad conum EFGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportionem diametrorum BD, & FH; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportionem triplicata.

14. quinti.

7. quinti.

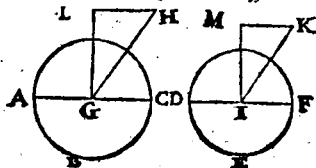
QUONIAM uero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

15. quinti.

# SCHOLIUM.

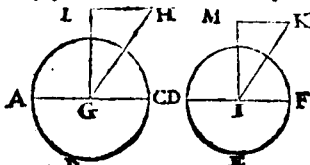
HABET propositio, quamvis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes recti ad bases.

Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli



ABC, DEF, axes uero GH, IK, & diametri basium AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere

habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur super easdem bases duo coni, & cylindri recti eandem cum scalenis altitudinum, quorum axes  $GL$ ,  $IM$ . Ducanturq; per rectas  $GH$ ,  $GI$ ; Item per  $IK$ ,  $IM$ , plana secantia bases lineis rectis  $AC$ ,  $DF$ . Quoniam igitur axes  $GL$ ,  $IM$ , recti sunt basibus  $ABC$ ,  $DEF$ , erunt & plana per  $GH$ ,  $GI$ ; & per  $IK$ ,  $IM$ , ad eas-



dem recta; Ac propterea perpendiculares lineæ ex  $H$ ,  $K$ , ad bases demissa cadent in  $AC$ ,  $DF$ , communes sectiones; & proinde erunt anguli  $CGH$ ,  $FIK$ , anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli  $CGL$ ,  $FIM$ , æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. reliqui igitur  $HGL$ ,  $KIM$ , æquales quoq; erunt. Quoniam vero coni  $ABCH$ ,  $ABCL$ , ponuntur esse eiusdem altitudinis recta  $HL$ , per aximum vertices ducta ipsa  $AC$ , parallela, ideoq; angulus  $L$ , rectus: Eodemq; argumento rectus erit angulus  $M$ , cum & anguli  $CGL$ ,  $FIM$ , recti sint. Non aliter & reliqui anguli  $H$ ,  $K$ , æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli  $CGH$ ,  $FIK$ . Triangula igitur  $GHL$ ,  $IKM$ , æquiangula sunt; atq; idcirco erit ut  $GH$ , ad  $GL$ , ita  $IK$ , ad  $IM$ ; & permutando, ut  $GH$ , ad  $IK$ , ita  $GL$ , ad  $IM$ . Ut autem axis  $GH$ , ad axem  $IK$ , ita est  $AC$ , diameter ad  $DF$ , diametrum, quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur &  $GL$ , axis ad  $IM$ , axem erit, ut diameter  $AC$ , ad  $DF$ , diametrum; Et proinde coni & cylindri recti  $ABCL$ ,  $DEFM$ , similes erunt, ex definitione. Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus  $ABCL$ , cono & cylindro  $ABCH$ , (cum eandem habeant basim, & altitudinē,) quam conus & cylindrus  $DEFM$ , cono & cylindro  $DEFK$ , (ob eandem rationem,) est æqualis, ut constet ex coroll. propof. 11. huius lib. Erit ut conus & cylindrus  $ABCL$ , ad conum & cylindrum  $DEFM$ , ita conus & cylindrus  $ABCH$ , ad conum & cylindrum  $DEFK$ ; ideoq; proportio coni & cylindri  $ABCH$ , ad conum & cylindrum  $DEFK$ , triplicata quoq; erit diametri  $AC$ , ad diametrum  $DF$ . Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

II.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo : Erit ut cylindrus ad cylindrū, ita axis ad axem .

SECE TUR cylindrus ABCD, plano GH parallelo ad uersis planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico ut est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in utramq; partem, una cum eius axe, & rectangulo EC, ad cuius reuolutionē descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet; Sumaturq; in axe producto quotcūq; rectæ EK, KL, æquales ipsi EI; Itē quotcūq; rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidē ad reuolutionē rectanguli EC, describent circulos GH, PR, QS, TA, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter æquidistantes circumferuntur.

Ac propterea cylindricerunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componentes totum cylindrum SQXY. Quoniam uero tam cylindri SP, PA, AH, super bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt; quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, TA, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex corollario propof. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudi-



gnitudinis) æqualis quoque est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propos. 11. huius lib. liquet. Si uero



axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, se-

cundam magnitudinem, ut cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ET SI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri



scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita ut quemadmodum in conis rectis rectangulus circa quie-

scen latus circumscribitur, sic quoque in conis scalenis circumscribuntur semidiametri L S, K R, E A, &c. semper æquidistantes circa centra L, K, E, &c. una cum recta S T, semidiametros coniungente; hac enim ratione semper cylindri describuntur, ut constat ex his, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

II.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, ut altitudines.

SINT

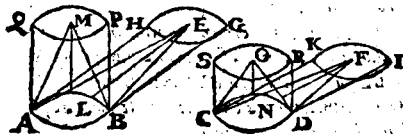
S I N T super bases æquales  $AB, CD$ , duo coni  $ABE, CDF$ , & duo cylindri  $ABGH, CDIK$ , quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipsi sunt altitudines)  $LE, MF$ . Dico esse conum  $ABE$ , ad conum  $CDF$ , & cylindrum  $ABGH$ , ad cylindrum  $CDIK$ , ut est altitudo  $LE$ , ad altitudinem  $MF$ . Extendatur enim cylindrus  $ABGH$ , ad partes  $GH$ , una cum eius axe  $LE$ , & rectangulo  $AEL$ ; abscindaturque axis  $EN$ , æqualis axi  $MF$ , & circa centrum  $N$ , intelligatur circulus  $OP$ , æqualis & parallelus circulo  $GH$ , ut fiat cylindrus  $GHOP$ , eiusdem altitudinis cum cylindro  $CDIK$ . Quoniam igitur cylindri  $HP, CI$ , cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propof. 1. huius lib. proptereaque cylindrus  $AG$ , ad ipsos eandem habet proportionem: Est autem cylindrus  $AG$ , ad cylindrum  $HP$ , ut axis, seu altitudo  $LE$ , ad axem seu altitudinem  $EN$ , hoc est, ad altitudinem  $MF$ , sibi æqualem. Igitur & cylindrus  $AG$ , ad cylindrum  $CI$ , erit quoque, ut altitudo  $LE$ , ad altitudinem  $MF$ .

Q U I A uero coni  $ABE, CDF$ , sunt terræ partes cylindrorum  $AG, CI$ ; ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus  $ABE$ , ad conum  $CDF$ , ut altitudo  $LE$ , ad altitudinem  $MF$ . Super æqualibus igitur basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut altitudines. Quod ostendendum erat.

SCHOLIION.

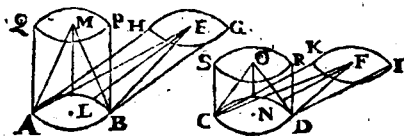
Hoc idem convenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Siue

super bases æquales  $AB, CD$ , coni  $ABE, CDF$ , & cylindri  $ABGH, CDIK$ ,



scaleni, quorum altitudines  $LM, NO$ . Dico conum  $ABE$ , ad conum  $CDF$ , ut altitudo  $LM$ , ad altitudinem  $NO$ .

conum  $CDF$ , & cylindrum  $ABGH$ , ad cylindrum  $CDIK$ ,  
esse, ut est altitudo  $LM$ , ad altitudinem  $NO$ . Super basin  $AB$ ,



cōstruatur cy-  
lindrus rectus  
 $ABPQ$ , sub  
altitudine  $L-$   
 $M$ ; Item su-  
per basin  $CD$ ,  
cylindrus re-

14. duodec.

ctus  $CDRS$ , sub altitudine  $NO$ . Quoniam igitur est cylin-  
drus rectus  $ABPQ$ , ad cylindrum rectum  $CDRS$ ; ut al-  
titudo  $LM$ , ad altitudinem  $NO$ : Est autem cylindro  $ABPQ$ ,  
cylindrus  $ABGH$ ; Item cylindro  $CDRS$ , cylindrus  $CDIK$ ,  
equalis, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus  
 $ABGH$ , ad cylindrum  $CDIK$ , ut altitudo  $LM$ , ad altitudi-  
nem  $NO$ . Quod est propositum.

10. duodec.

15. quinti

QVONIAM autem coni, cum sint tertiae partes cylin-  
drorum, eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit  
quoque conus  $ABE$ , ad conum  $CDF$ , ut altitudo  $LM$ , ad altitu-  
dinem  $NO$ . Quod tamen eodem argumento, quo rsi sumus in  
cylindris, confirmari potest, ut perspicuum est, si super bases  
 $AB, CD$ , fiant coni recti  $ABM, CDO$ , earundem altitudinum  
cum cylindris  $ABPQ, CDRS$ .

IDEM concludetur, quamvis unus conorum, & cylindro  
rum, nempe conus  $ABE$ , & cylindrus  $ABGH$ , fuerit scalenus,  
alter vero, nimirum conus  $CDO$ , et cylindrus  $CDRS$ , rectus. Nam  
cū cylindrus scalenus  $ABGH$ , equalis sit cylindro recto  $AB-$   
 $PQ$ ; sit autē cylindrus rectus  $ABPQ$ , ad cylindrū rectum  
 $CDRS$ , ut altitudo  $LM$ , ad altitudinē  $NO$ , ut Euclides demō-  
stravit: Erit quoq; cylindrus scalenus  $ABGH$ , ad cylindrū re-  
ctum  $CDRS$ , ut altitudo  $LM$ , ad altitudinem  $NO$ . Quod est  
propositum.

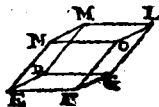
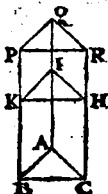
15. quinti

20. duodec.

QVONIAM vero coni eandē habent proportionē, quam cy-  
lindri, cum illi horū sint tertiae partes; Erit etiā, conus scalenus  
 $ABE$ , ad conū rectū  $CDO$ , ut altitudo  $LM$ , ad altitudinē  $NO$ .  
Quod nihilominus ostēdetur eadē ratione, qua rsi sumus in cy-  
lindris, ut manifestum est.

EADEM quoq; hāc propositio convenit prismatis, parallele-  
pipedis, & pyramidibus super aequales bases cōstitutis. Sint n.  
super

super bases aequales  $ABC, DEFG$ , prismata  $ABCHIK, DEFG-  
LMNO$ , & pyramides sub eisdē altitudinibus. Dico esse pris-  
ma ad prisma, & pyramidē ad  
pyramidem, ut est altitudo ad  
altitudinem. Sint namque in-  
sistentes lineae  $AI, CH, BK$ ,  
prismatis  $ABCHIK$ , ad basin  
 $ABC$ , perpendiculares, ita ut  
 $BK$  sit altitudo prismatis  $AB-  
CHIK$ ; Productis autem rectis  
 $AI, CH, BK$ , sumantur  $IQ,$



$HR, KP$ , aequales altitudini prismatis  $EL$ ; & ductis rectis  
 $PQ, QR, RP$ , compleatur prisma  $HIKPQR$ , eiusdē al-  
titudinis cū prismate  $EL$ . Eruntq; prismata  $HIKPQR, EL$ ,  
cum habeant & bases, & altitudines aequales, inter se aequalia,  
ex coroll. 2. propos. 7. huius lib. Ac propterea prisma  $ABC-  
HIK$ , ad utrumq; eandē habebit proportionem. Quia vero, ex  
scholio propos. 25. lib. 11. prisma  $ABCHIK$ , ad prisma  $HIK-  
PQR$ , est ut planū  $BI$ , ad planum  $KQ$ ; Et ut planū  $BI$ , ad  
planum  $KQ$ , ita est recta  $BK$ , ad  $KP$ ; Erit prisma  $ABC-  
HIK$ , ad prisma  $HIKPQR$ , hoc est, ad prisma  $EL$ , ut  $BK$ ,  
altitudo prismatis  $ABCHIK$ , ad  $KP$ , altitudinem prismatis  
 $HIKPQR$ , hoc est, prismatis  $EL$ . Quod est propositū.

7. quinti

1. sexti.

Quod si insistentes lineae  $AI, CH, BK$ , nō sint perpendicu-  
lares ad basin  $ABC$ , cōstituedū eris sup basin  $ABC$ , aliud prisma,  
cuius insistentes sint perpendiculares ad basin, et aequales altitu-  
dini prismatis  $ABCHIK$ . Nam cū ex 2. coroll. propos. 7. huius  
lib. haec duo prismata eandem habentia altitudinem, & basin,  
sint aequalia, sitq; prisma cōstituentū ad prisma  $EL$ , ut illius al-  
titudo ad huius altitudinem; eris & prisma  $ABCHIK$ , ad pris-  
ma  $EL$ , ut altitudo illius, ad altitudinem huius.

Quoniam vero pyramides eandem habent proportio-  
nem cū prismatis, quod ille sint horum tertiae partes: Perspi-  
cuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, ut est al-  
titudo ad altitudinem.

15. quinti

Eadem prorsus est ratio habenda de parallelepipedis,  
cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismata,  
cum, ut dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit  
accommodari.



*H A E C omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.*

*O M N I A quoque hac facile conuerſi poſſunt. hoc modo.*

**C O N I** & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

*N A M alias pars æqualis foret toti, ut in conuerſe, propoſ. 31. lib. 11. oſenſum eſt.*

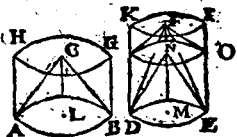
**22. THEOR. 15. PROPOS. 15.**

**Æ Q V A L I V M** conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

**S I N T** æquales coni  $A B C$ ,  $D E F$ , & æquales cylindri  $A B G H$ ,  $D E I K$ , quorum bases  $A B$ ,  $D E$ , axes, altitudinesve  $L C$ ,  $M F$ . Dico bases & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut  $A B$ , ad  $D E$ , ita  $M F$ , ad  $L C$ . In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines  $L C$ ,  $M F$ , ſint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit ut basis  $A B$ , ad baſin æqualem  $D E$ , ita altitudo  $M F$ , ad altitudinē æqualem  $L C$ . Ac prouinde bases atque altitudines ſunt reciprocae.

**Q U O D** ſi altitudines  $L C$ ,  $M F$ , inæquales fuerint, ſit  $M F$ , maior, ex qua abſcundatur  $M N$ , ipſi  $L C$ , æqualis; & per  $N$ , ducatur planum  $O N$ , baſi  $D E$ , parallelum, ut in ſcholio propoſ. 13. lib. 11. docuimus, ut ſiāt duo cylindri  $D O$ ,  $O K$ . Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri  $A B G H$ ,  $D E$  -

DEIK; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. Est autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita basis AB, ad basin DE, cum æquales sint altitudines. Itē ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint æquales, immo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc est, ad huc æqualem LC; Ac propterea reciproce sunt bases & altitudines.



IN conis uerō ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, cum coni sint cylindrorum tertiæ partes; Quare ut ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam consequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo usi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus MN, NF, constituantur duo coni, ut in figura.

SEN iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & bases AB, DE, æquales; Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propof. 11. huius lib.

QVOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, ut prius. Quis igitur ponitur, ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huc æqualem MN; Est autem, ut basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: Item ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

7. quinti.

11. duodec.

14. duodec.

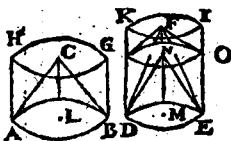
10. duodec.

11. duodec.

14. duodec.

9. quinti.

A. T. aëro in conis hæc erit demonstratio. Si conorum ABC, DEF, bases & altitudines



ABC, DEF, bases & altitudines reciprocebuntur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eadem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut ostensum fuit, cylindri, idcirco con-

ni, eorum tertiae partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo, conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

NON difficile eris idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoque recti easdem cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare ut ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocantur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, ut demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt, Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inserse quoque erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet unus conorum & cylindrorum sit rectus, & aliter scalenus, ut perspicuum est ex his, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

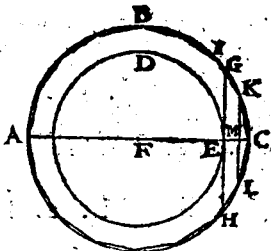
13.

PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscri-

inscribere, quod non tangat minorem circulum.

S I N T duo circuli ABC, D E, circa idem centrū F, oportetq; in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari cōtinentur, non-tangens minorem D E. Extendatur per cētrum F, recta A C, secans circulum D E, in E, puncto, & per E, ducatur G H, ad A C, perpēdicularis, quę tãget circulum D E, in E, ex coroll. propof. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu CG, si ex AGC, auferatur dimidiū AB, & ex residuo BC, dimidiū B I, & ex residuo



tur dimidiū  $A B$ , & ex residuo  $BC$ , dimidiū  $BI$ , & ex residuo  $I C$ , dimidium  $IK$ , & sic deinceps; relinquetur tandē minor arcus, quā  $CG$ . Sit igitur iam arcus  $CK$ , arcu  $CG$ , minor, & subtendatur recta  $CK$ . Dico rectā  $CK$ , esse unum latūs polygoni inscribendi. Si enim arcus  $BI$ , diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus  $CI$ ; & quadrās  $A B'$ , in totidē partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans  $BC$ ; nec nō semicirculus  $AHC$ , in totidem partes, quot cōtinet semicirculus  $ABC$ ; deinde omnibus arcubus rectæ subtendantur, quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ  $CK$ , eo quod arcus arcui  $CK$ , æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo  $ABC$ , & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem  $DE$ , ita ostendetur. Ex  $K$ , ad  $A C$ , demittatur perpendicularis  $KL$ , secans ipsam  $AC$ , in  $M$ . Quoniam igitur anguli  $GEM$ ,  $KME$ , recti sunt, erunt rectæ  $GH$ ,  $KL$ , parallelæ. Quare cū recta  $GH$ , tangat circulum  $DE$ , in solo puncto  $E$ ; recta  $KL$ , erit tota extra dictum circulū, nec unquam ipsum contingeret, quod nunquam cum recta  $GH$ , conueniat. Multo igitur minus recta  $CK$ , quæ longius a circulo  $DE$ , abest, quam  $KL$ , circulum  $DE$ , tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri  $CK$ , ideoque æqualiter cum  $CK$ , a cen-

*I. dolini.*

29. *Sertif.*

**28. primi.**

14. செய்தது.

tro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, si ab extremitate lateris polygani inscripti, quod cum diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed totum extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, contentis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DB.

14.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS sphaeris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaera solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphaerae superficiem.

SINT duæ sphaerae ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphaeram EFGH. Secentur ambæ sphaerae plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphaeris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphaerae, habentes idem centrum sphaerarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumvolutionem sphaerae describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt æquales, cum ducantur ex centro sphaerarum ad earum superficiem, erunt ipsæ sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD, se se in centro I, secantes ad angulos rectos, ut sint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem, ut

facilius

facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur.  
 Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G  $\gamma$ , ad circumferen-  
 tiam usque circuli ABCD, quæ circumulum EFGH, tanget in  
 G, ex coroll. propof. 16. lib. 3. Et rectæ G  $\gamma$ , applicetur in  
 circulo ABCD, recta æqualis A  $\epsilon$ . Quia uero, si arcui  
 C  $\gamma$ , intelligatur subtendi recta, ut fiat triangulum G C  $\gamma$ ,  
 latus C  $\gamma$ , oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est  
 latere G  $\gamma$ , quod minori angulo opponitur, nimirum acuto;  
 erit quoque recta C  $\gamma$ , maior recta A  $\epsilon$ ; ac proinde arcus  
 C  $\gamma$ , arcu A  $\epsilon$ , maior erit, ut constat ex scholio propof. 27.  
 lib. 3. Abiicindatur ergo arcus C  $\delta$ , arcui A  $\epsilon$ , æqualis. Quod  
 si ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo  
 CL, dimidium LK, & sic deinceps, relinquetur tandem ar-  
 cus minor arcu C  $\delta$ , seu arcu A  $\epsilon$ . Sit ergo jam arcus CK,  
 minor; Eritque recta CK, subtensa minor quam recta A  $\epsilon$ ,  
 hoc est, quam G  $\gamma$ , ex scholio propof. 29. lib. 3. Dico igitur,  
 rectam CK, esse unum latus polygoni æquilateri inscri-  
 bendi. Nam cum recta subtendens arcum C  $\delta$ , minorem ar-  
 cu C  $\gamma$ , non tangat circumulum EFGH, ut ex demonstratione  
 præcedentis propof. pater, multo minus recta CK, subten-  
 dens arcum minorem arcu C  $\delta$ , eundem circumulum tanget.  
 Rursus ducta diametro KN, erigatur ex centro I, ad plana  
 circumulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occur-  
 rens superficiæ sphaeræ maioris in O; Et per rectas OI, AC,  
 & OI, KN, plana ducantur, quæ ad circumulum ABCD,  
 recta erunt, efficientque communes sectiones, circulos, ut  
 iam dictum est, quorum semicirculi sint AOC, NOK. Quia  
 uero anguli OIC, OIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 1, qua-  
 drantes erunt OC, OK; atque adeo, cum circuli ABCD,  
 AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint &  
 sphaeræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes CD,  
 OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes equa-  
 les distribuatur, in quot diuisus fuit arcus CL; Et quadran-  
 tes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales ar-  
 cubus quadrantis CD; Erunt rectæ his omnibus arcubus  
 æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD; CP,  
 PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Coniun-  
 ctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad  
 planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, quæ in  
 commu-

1. quæssi

9. primi

1. decimi.

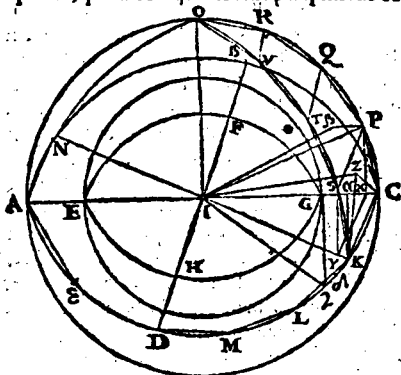
12. undec.

18. undec.

29. tercij.

38. & 8.  
undec.  
27. terij.

comunes sectiones AC, NK, cadet; eruntq; inter se parallele.  
QVONIAM igitur triangulorū PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti sunt, ex defn. 3. lib. 1. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint periphæriæ AOP, NOS, quibus insistūt;



(Nam si ex semicirculis AOC, NOK, equalibus demantur arcus æquales CP, KS; reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erūt duo anguli PCX, PXC, triangu-

li PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY: Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta XY; æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY. At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CX, KY, relinquentur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, ut IX, ad XC, ita IY, ad YK.) Erunt parallelæ quoq; PS, CK, inter se, cum utraq; parallela sit ipsi XY; ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent. Totū igitur quadrilaterū CKSP, in uno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendicularares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendimus, similiter CK, QT, esse parallelas; atq; adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cū eidē CK, sint parallelæ; totumque quadrilaterum PSTQ, in uno esse plano. Eadem ratione in uno erit plano quadrilaterū QTVR: Est autē & triangulum RYO, in uno plano. Si igitur eadem cōstructio exhibetur

26. primi.

33. primi  
2. sexti.

9. undec.

7. undec.

2. undec.

beat<sup>ur</sup> super reliqua latera  $KL, LM, MD$ , ductis scilicet quadrantibus  $OL, OM, OD$ ; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio; ut tota sphaera maior repleatur quadrilateralis, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes  $OC, OK$ , super latus  $CK$ , constructis; inscriptum erit in sphaera maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateralis, atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphaeram minorem  $EFGH$ .

**DVCATVR** ex  $I$ , ad planum  $CKSP$ , perpendicularis  $IZ$ , connectanturque rectæ  $ZC, ZK$ . Quoniam igitur, ex def. 3. lib. 1. anguli  $IZC, IZK$ , recti sunt; erit quadratum rectæ  $IC$ , quadratis rectarum  $IZ, ZC$ , & quadratum rectæ  $IK$ , quadratis rectarum  $IZ, ZK$ , æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium  $IC, IK$ , æqualia sint; erunt & quadrata rectarum  $IZ, ZC$ , quadratis rectarum  $IZ, ZK$ , equalia. Ac proinde de proprio communi quadrato  $IZ$ , reliqua quadrata rectarum  $ZC, ZK$ , equalia erunt, ideoque, & ipsæ rectæ  $ZC, ZK$ , æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex  $Z$ , ad  $P, S$ , ducuntur, æquales esse & inter se, & rectis  $ZC, ZK$ ; Quare circulus ex  $Z$ , ad intervallum  $ZC$ , descriptus per quatuor puncta  $C, K, S, P$ , transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera  $PSTQ, QTVR$ , & triangulum  $RVO$ , circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam uero, ut postea ostendemus, angulus  $CZK$ , obtusus est; erit quadratum rectæ  $CK$ , maius quadratis rectarum  $ZC, ZK$ ; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ  $CK$ , duplo quadrato rectæ  $ZC$ .

**DVCATVR** ex  $K$ , ad rectam  $AC$ , perpendicularis  $Ka$ . Cum igitur  $AC$ , dupla sit ipsius  $Aa$ . &  $Aa$ , maior sit, quàm  $Aa$ , erit  $AC$ , minor duplo ipsius  $Aa$ . Quam ob rem cum sit, ut  $AC$ , ad  $Aa$ , ita rectangulum sub  $AC, aC$ , ad rectangulum sub  $Aa, aC$ , quod bases horum rectangulorum sint  $AC, Aa$ , & eadem altitudo  $aC$ ; erit quoque rectangulum sub  $AC, aC$ , minus duplo rectanguli sub  $Aa, aC$ . Est autem rectangulum sub  $AC, aC$ , æquale quadrato rectæ  $CK$ ; & rectangulum sub  $Aa, aC$ , æquale quadrato rectæ  $Ka$ ; quod rectæ  $CK$ , inter  $AC, aC$ , sit media proportionalis; & rectæ  $Ka$ , inter  $Aa, aC$ , ex coroll. propof. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta  $AK$ , fieret triangulum rectangulum

47. primi.

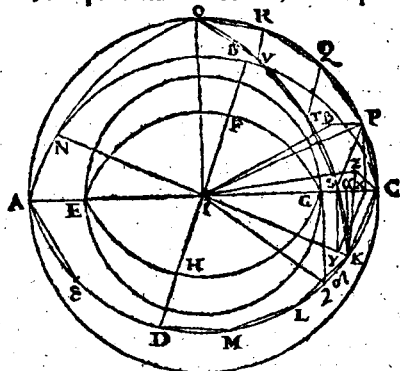
12. secundi.

1. sexti.

7. sexti.



47. primi.



gulum  $A K C$ . ) Igitur & quadratum rectæ  $CK$ , minus erit duplo quadrati rectæ  $K \alpha$ . Ac propterea cum quadratum rectæ  $CK$ , ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ  $Z C$ ; erit quadratum rectæ  $K \alpha$ , maius quadrato rectæ  $Z C$ .

Quoniam vero quadratū rectæ  $IC$ , & quale est quadratis rectarū  $IZ$ ,  $Z C$ ; & quadratū rectæ  $IK$ , quadratis rectarum  $I \alpha$ , &  $K$ ; Suntq; equalia quadrata rectarū equaliū  $IC$ ,  $IK$ ; Brune

& quadrata rectarum  $IZ$ ,  $Z C$ , equalia quadratis rectarū  $I \alpha$ , &  $K$ . Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ  $\alpha K$ ; & ex illis minus, uidelicet rectæ  $Z C$ , erit reliquum quadratum rectæ  $IZ$ , maius quadrato reliquo rectæ  $I \alpha$ ; ideoque recta  $IZ$ , maior quam recta  $I \alpha$ . Quapropter cum punctum  $\alpha$ , non tangat spheram minorem  $E F G H$ , quod per coroll. propos. præcedentis recta  $K \alpha$ , tota sit extra dictam spheram; multo minus punctum  $Z$ , longius distans, eandem spheram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani  $CK S P$ , longius absint a sphaera  $E F G H$ , quam punctum  $Z$ , ut mox ostendemus, non tanget planum  $CK S P$ , spheram  $E F G H$ .

19. primi.

Sed & expeditius ex ipsa sere cōstructione figurę ostendemus, planum  $CK S P$ , non tangere spheram minorem  $E F G H$ , si prius ducatur recta  $I \gamma$ , hoc modo. Quoniam ex cōstructione ostensum fuit, rectam  $CK$ , minorem esse recta  $G \gamma$ : Est autem  $CK$ , maior, quam  $Z C$ , quod angulus  $C Z K$ , obtusus sit, ut mox demonstrabitur; Multo maior erit  $G \gamma$ , quam  $Z C$ ; Ac proinde quadratum rectæ  $G \gamma$ , maius quadrato rectæ  $Z C$ . Quia uero quadratum rectæ

$I \gamma$ ,

I γ, æquale est quadratis rectarum I G, G γ; & quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C; sunt autem quadrata rectarum I γ, I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ G γ, & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quam ob rem, cum I G, sit sphaeræ minoris E F G H, semidiameter; existet punctum Z, extra eandem sphaeram; Et proinde, ut prius, planum C K S P, sphaeram E F G H, nequaquam continget.

47. primi

D V C A T V R. rursus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis I β, eritque β, centrum circuli circa P S T Q, descripti, ut demonstratum est: Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus sit, ex 3. defin. lib. 1. erit quadratum rectæ I R, æquale quadratis rectarum I β, β P. Quia uero & quadratum rectæ I C, (quod æquale est quadrato rectæ I P, ob æqualitatem rectarum I C, I I) æquale est quadratis rectarum I Z, Z C; erunt quadrata rectarum I β, β P, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia: est uero quadratum rectæ Z C, maius quadrato rectæ β P, quod & linea Z C, maior sit, quàm linea β P, ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ I β, reliquo quadrato rectæ I Z, maius erit; idcirco; & linea I β, maior quam linea I Z: Ac proinde multo magis punctum β, extra sphaeram E F G H, existet, quam punctum Z; proptereaque multo minus planum P S T Q, quam C K S P, tanget sphaeram minorem E F G H. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphaeram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphaeris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaera solidum polyedrum inscripsimus, quod non tanget minoris sphaeræ superficiem. Quod erat faciendum.

47. primi.

C O R O L L A R I U M.

Ex ijs, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in una sphaera ad polyedrum in altera sphaera esse triplicatam eius, quam habent sphaerarum diametri. Nam si ex centris sphaerarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra

in

in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphaerarum; ut constet, si intelligatur harum sphaerarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo linee rectæ ductæ a centris ad basium angulorum, ob similitudinem basium; Ac propterea pyramides efficiuntur similes. Quare cum singulae pyramides in una sphaera ad singulas pyramides illis similes in altera sphaera habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphaerarum, ut constat ex coroll. propof. 8. huius lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem, ita omnes pyramides, id est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, hoc est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum unius sphaerae ad polyedrum alterius sphaerae proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphaerarum, cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

S C H O L I O N.

Q V O N I A M vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, ut vera, quæ tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breviter a nobis erunt demonstranda.

P R I M O itaque ostendendum est, angulum  $CZK$ , in quadrilatero  $CKSP$ , esse obtusum. Quod ut commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro  $Z$ , circulus. Quoniam



igitur in figura superiori, est ut  $IK$ , ad  $KC$ , ita  $IZ$ , ad  $YX$ , (quod per coroll. propof. 4. lib. 6. triangula  $ICK$ ,  $IXY$ , similia sunt.) Est autem  $IK$ , maior quam  $IZ$ ; erit &  $KC$ , maior quam  $YX$ . Cum igitur  $YX$ , equalis sit ostensa ipsi  $SP$ , erit quoque  $KC$ , maior quam  $SP$ ; Ac propterea

arcus  $CK$ , maior erit arcu  $SP$ , ex scholio propof. 28. lib. 3. Quare cum arcus  $CP$ ,  $KS$ , arcui  $CK$ , sint æquales, quod & linea  $CP$ ,  $KS$ , ipsi  $KC$ , linea sint æquales demonstratæ; (subtenduntur enim arcibus circulorum æqualibus, ut ex constructione figura superioris constat) erunt quoque arcus  $CP$ ,  $KS$ , arcui  $PS$ , maiores; Ac idcirco quilibet arcuum  $CK$ ,  $CP$ ,  $KS$ , quadrans circuli  $CKSP$ , excedet; atque adeo angulus  $CZK$ , obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, ut perspicuum est ex coroll. 2. ultime propof. lib. 6.

S E C U N D O demonstrandum est, omnia alia puncta quadri-

12. quinti

13. quinti

14. quinti

28. tercij.

quadrilateri  $CKSP$ , longius a centro  $I$ , abesse, quam punctum  $Z$ . Sumatur enim quodcunque aliud punctum  $\theta$ , in quadrilatero  $CKSP$ , & adiungantur rectæ  $I\theta$ ,  $Z\theta$ .

Quoniam ergo angulus  $I\theta Z$ , rectus est ex defin. 3. lib. 11.

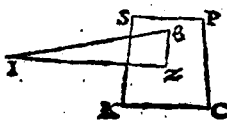
Erit latus illi oppositum  $I\theta$ , maius latere  $I\theta$ , quod minori angulo  $I\theta Z$ , nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum  $\theta$ , longius a centro  $I$ , distat, quam punctum  $Z$ . Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.

TERTIO, ac ultimo probandum est, rectam  $ZC$ , maiorem esse recta  $\beta P$ . Quod ut aptius fiat, demonstremus prius erit, rectam  $PS$ , maiorem esse recta  $QT$ . Describatur igitur pars superioris figura, ea videlicet, qua continetur

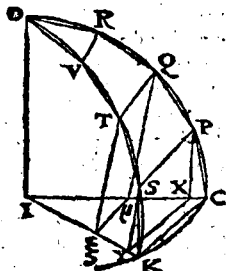
femidiametris  $IC, IO$ , & quadrantibus  $OC, OK$ , &c. Demittantur deinde ex  $Q$ , &  $T$ , ad platum circuli  $ABCD$ , in quo est triangulum  $ICK$ , perpendiculares  $QU, TE$ , qua in communes sectiones  $IC, IK$ , cadent, eruntque inter se se parallela, ut de rectis  $PX, SI$ , dictum est.

Quod si adiungatur recta  $\mu E$ , erunt  $QT, \mu E$ , parallela & aequales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & aequales  $PS, XT$ . Quia vero  $\mu E$ , ipsi  $CK$ , parallela est, quod latera  $IC, IK$ , proportionaliter sunt secta in  $\mu, E$ , veluti diximus de recta  $XT$ ; erit quoque  $\mu E, XT$ , parallela. Quare erit, ex coroll. propof. 4. lib. 6. ut  $IY$ , ad  $YX$ , ita  $I\theta$ , ad  $\theta\mu$ : est autem  $IY$ , maior quam  $I\theta$ . Igitur &  $YX$ , maior erit quam  $\theta\mu$ ; Ac proinde &  $PS$ , quæ equalis est ipsi  $XT$ , maior erit quam  $QT$ , quæ equalis est ipsi  $\theta\mu$ .

Hoc ergo demonstrato, describantur ex centris  $Z, \beta$ , circa quadrilatera  $CKSP, PSTQ$ , circuli, egredianturque ex centris rectæ  $ZC, ZK, ZS, ZP, \beta P, \beta S, \beta T, \beta Q$ . Si igitur  $ZC$ , non credatur maior, quā  $\beta P$ , erit vel equalis, vel minor. Sit



19. primi.



38. undec.  
6. undec.

2. sexti.  
20. primi.

primum

25. primi.

8. primi.

2. sexti.

14. quinti.

primum equalis. Quia ergo latera  $ZK, ZC$ , equalia ponuntur lateribus  $\beta S, \beta P$ ; & basis  $KC$ , maior est base  $PS$ ; erit angulus  $KZC$ , maior angulo  $S\beta P$ : Eadem ratione maior erit angulus  $SZP$ , angulo  $T\beta Q$ . At quoniam bases  $KS, CP$ , basibus  $ST, PQ$ , sunt equalis; erunt anguli  $KZS, CZP$ , angulis  $S\beta T, P\beta Q$ , equalis. Igitur quatuor anguli ad  $Z$ , maiores erunt quatuor angulis ad  $\beta$ : Sunt autem & equalis, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint equalis, ex coroll. 2. propof. 15 lib. 1. quod est absurdum. Non igitur equalis est recta  $ZC$ , recta  $\beta P$ .

**S I T** secundo  $ZC$ , minor, quam  $\beta P$ . Es abscondantur  $\beta \pi, \beta p, \beta \omega, \beta \phi$ , ipsi  $ZC, ZK, ZS, ZP$ , equalis, connectanturq; recta  $\pi p, p\omega, \omega\phi, \phi\pi$ , quae parallelae erunt rectis  $PS, ST, TQ, QP$ , eo quod recta ex eisdem secta sint proportionaliter;

Ac proinde, ex coroll. propof. 4. lib. 6. erit ut  $\beta S$ , ad  $S\beta$ , ita  $\beta p$ , ad  $p\phi$ . Cum ergo  $\beta S$ , maior sit, quam  $\beta p$ , erit &  $S\beta$ , maior quam  $p\phi$ . Eademq; ratione maiores erunt  $ST, TQ, QP$ , rectis  $p\omega, \omega\phi, \phi\pi$ ; At propterea cum  $PS$ , minor sit quam  $CK$ , &  $ST, PQ$ , equalis rectis  $KS, CP$ ; &  $TQ$ , minor quam  $PS$ , erunt recta  $\pi p, p\omega, \omega\phi, \phi\pi$ , minores rectis  $CK, KS, SP, PC$ . Quare cum recta  $\beta \pi, \beta p, \beta \omega, \beta \phi$ , rectis  $ZC, ZK, ZS, ZP$ , sint equalis; erunt anguli ad  $Z$ , maiores angulis ad  $\beta$ : Sunt autem & equalis, quod tam illi, quam hi sint quatuor rectis equalis ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta  $ZC$ , quam  $\beta P$ : Sed neque equalis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.

15.

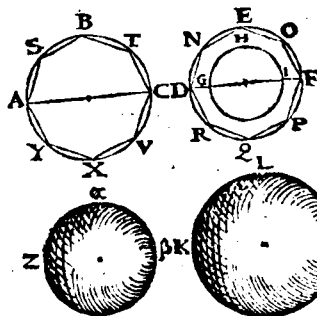
**THEOR. 16. PROPOS. 18.**

**SPHAERAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.**

**S I N T** duae sphaerae  $ABC, DEF$ , quarum diametri  $AC, DF$ . Dico sphaeram  $ABC$ , ad sphaeram  $DEF$ , habere proportionem triplicatam diametri  $AC$ , ad diametrum  $DF$ . Si enim hoc non concedatur, habebit sphaera  $ABC$ , ad aliam

aliam sphaeram GHI, minorem, vel KLM, maiorem quam DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primum sphaera ABC, ad sphaeram GHI, minorem sphaera DEF,

proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturq; sphaera GHI, concentrica sphaerae DEF. Inscribeatur in sphaera maiori DEF, polyedrum DNEOFFQR, non tangens minorem sphaeram GHI; Atq; huic



simile polyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphaera ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphaerae ABC, ad sphaeram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Est autem, per coroll. praecedentis propof. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFFQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF; Erit ut sphaera ABC, ad sphaeram GHI, ita polyedru ASBTCVXY, ad polyedru DNEOFFQR. Quare cum sphaera ABC, maior sit polyedro ASBTCVXY, erit & sphaera GHI, maior polyedro DNEOFFQR, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphaera ABC, ad sphaeram GHI, minorem sphaera DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.

HABEAT secundo sphaera ABC, ad sphaeram KLM, maiorem sphaera DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur, ex coroll. praecedentis propof. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFFQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit ut sphaera ABC, ad sphaeram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFFQR: Et conuertendo, ut sphaera KLM, ad sphaeram ABC, ita polyedrum DNEOFFQR, ad polyedrum AS-

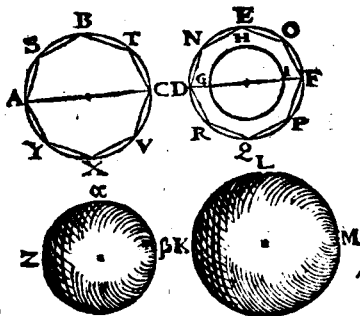
Bb

BTCVXY:

17. duodec.

14. quinsi.

BT CV XY : Est autem ex dicto coroll. præcedentis propol. polyedrum DNEOFPO R, ad polyedrum A S B T C VXY, in triplicata proportionē diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & sphaera KLM, ad sphaeram ABC, erit in tripli-



cata proportionē diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut sphaera KLM, ad sphaeram ABC, ita sphaera DEF, ad aliam sphaeram Z  $\alpha$   $\beta$ . Habebit igitur & sphaera DEF, ad sphaera Z  $\alpha$   $\beta$ , proportionem triplicatā diametri DF, ad diametrum AC.

Et quia sphaera KLM, maior ponitur, quam sphaera DEF, erit quoque sphaera ABC, maior, quam sphaera Z  $\alpha$   $\beta$ . Quapropter sphaera DEF, ad sphaeram Z  $\alpha$   $\beta$ , minorem sphaera ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod est absurdum. Ostensum enim est non posse sphaeram ad sphaeram alia sphaera minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphaera ABC, ad sphaeram KLM, maiorem sphaera DEF, proportionem triplicatā diametri AC, ad diametrum DF; Sed neque ad minorem habet, ut demonstratum est: Igitur habebit ad sphaeram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphaerae itaque inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendum.

### COROLLARIUM.

Hinc fit, ita esse sphaeram ad sphaeram, ut polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphaera ad sphaeram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS

# E V C L I D I S

## E L E M E N T V M XIII.

Et Solidorum tertium.



### THEOR. I. PROPOS. I.

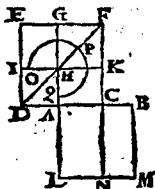
I.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumens dimidiam totius, quintuplū potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati.



ECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentū AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratū rectæ CD, quintuplum esse quadrati rectæ AD. Describatur. n. super CD, quadratū CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans

diametrū in H, pūcto, p qđ ducatur IK, parallela ipsi CD. Producta deinde GA, pñciatur quadratū AM, protrahaturq; FC, ad N. eruntq; ex coroll. propof. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarū AD, AC. Quia ergo est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB, erit rectangulū CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cū ponatur AB, dupla ipsi AD, sitq; AL, ipsi AB; & AH ipsi AD, æqualis; erit quoq; AL, ipsius AH, dupla: Est autem ut



3. defn. sex.  
17. sexsi.

Bb 2

tem ut





THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI recta linea suiipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

**DIVISA** sit recta A B, in C, possitque quintuplum segmenti A C; sumatur autem ipsius A C, dupla C D, quæ, ut post ostendemus, maior erit reliquo segmento B C. Dico si C D, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse C B, reliquam partem prioris lineæ. Describatur super A B, quadratum B F, in quo ducta diametro A E, ex C, ducatur ipsi A F, parallela C G, secans diametrum in puncto H, per quod agatur I K, parallela ipsi A B. Producta deinde G C, perficiatur quadratum C M, protrahaturq; E B, ad N. Erūtq; ex coroll. propof. 4. lib. 2. C I, K G, quadrata rectarum A C, C B. Quia igitur quadratum B F, quintuplum ponitur quadrati C I; Si tollatur quadratum C I, relinquetur gnomon O P Q, eiusdem quadrati C I, quadruplus: Est autem & quadratū C M, quadruplū quadrati C I, ex scholio, propof. 4. lib. 2. quod recta C D, dupla sit rectæ A C. Igitur gnomon O P Q, quadrato C M, æqualis erit. Rursus quoniam C D, ponitur ipsius A C, dupla; estq; L C, ipsi C D; & C H, ipsi A C, æqualis; erit & L C, ipsius C H, dupla. Cum igitur sit ut L C, ad C H, ita rectangulum L B, ad rectangulum C H; erit quoque illud huius duplum: Est autem C K, ipsi H F, æquale. A Equale igitur est L B, ipsis C K, H F; Ad proinde & reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B M. Quoniam ergo sunt tres rectæ C D, C B, B D; estq; rectangulum B M, sub C D, B D, comprehensum æquale ipsis K G, quadrato rectæ C B; Erit ut C D, ad C B; ita C B, ad B D. Quamobrem, ex definitione, recta C D, secta est in

**1. fexti.**

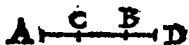
43. primi.

17. sexti.

Bb 3 B, extrac-

B, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum C B.

4. *secundi.* A L I T E R. Quoniam quadratum rectæ A B, quintuplum ponitur quadrati rectæ A C; estq; quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum C B, A C, una cum rectangulo sub A C, C B, bis; Erunt & quadrata rectarum C B,



A C, una cum rectangulo sub A C, C B, bis, quintuplum quadrati rectæ A C. Dempto igitur

quadrato rectæ A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum sub A C, C B, bis, quadruplum eiusdem quadrati rectæ A C: Est autem & quadratum rectæ C D, eiusdem quadrati rectæ A C, quadruplum, ex scholio propof. 4.

lib. 2. A Equale igitur est quadratum rectæ C B, & rectangulum sub A C, C B, bis, quadrato rectæ C D. Cum ergo rectangulum sub A C, C B, bis æquale sit rectangulo sub C D, C B; (sicut enim recta C D, dupla est rectæ A C, ita quoque duplum erit rectangulum sub C D, C B, rectanguli sub A C, C B; cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo C B; Ac propterea rectangulum sub C D, C B, æquale erit rectangulo sub A C, C B, bis.) Erit & quadratum rectæ C B, & rectan-

2. *secundi.* gulum sub C D, C B, quadrato rectæ C D, æquale: At quadratum rectæ C D, æquale est rectangulis sub C D, C B, & sub C D, B D. Igitur quadratum rectæ C B, & rectangulum sub C D, C B, æquale erit rectangulis sub C D, C B, & sub C D, B D; Ac proinde dempto communi rectangulo sub C D, C B, relinquetur quadratum rectæ C B, æquale rectangulo sub C D, B D; ideoque erit ut C D, ad C B, ita C B, ad B D. Quare ex defin. recta C D, secta est in B, extrema ac media ratione, estq; segmentum maius C B. Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit, &c. Quod erat demonstrandum.

17. *sexti.*

L E M M A.

Q V O D autem recta C D, maior sit necessario, quam C B, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ C D, quadruplum est, ex scholio propof. 4. lib. 2. quadrati rectæ A C; Addito quadrato rectæ

rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare rectæ AD, maior erit, quam rectæ AB; ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod est propositum.

secundi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECTUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quintuplum esse quadrati rectæ CD. Describatur super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsi AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipsi AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propof. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propof. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit ut AB, ad AC,



Bb 4 ita

17. *sexti.*

ita A C, ad C B, erit rectangulum sub A B, C B, nampe C E, æquale quadrato rectæ A C, nimirum ipsi L G, ) Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia uero æ-



34. *primi.*

36. *primi.*

43. *primi.*

qualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum A D, C D; erunt earum latera H K, I Q, æqualia; ac proinde rectæ E O, O M, ipsis oppositæ æquales erunt. Quare rectangula I O, Q E, æqualia erunt: Est autem I O, ipsi I D, æqua-

le. Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi C O; gnomon R S T, rectangulo C E, erit æqualis. Cum igitur C E, ostensum sit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus; Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta B D, quintuplum quadrati P Q, ex recta C D.

**ALITER.** Cum A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; erit rectangulum sub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulū

6. *secundi.*



17. *sexti.*

sub A B, B C, quadruplum est quadrati rectæ C D; ( Nam cum sit, ut A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C: quod cum, ex scholio propos. 4 lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ C D; erit & rectangulum sub A B, B C, quadruplum eiusdem quadrati rectæ C D.) Ac propterea rectangulum sub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratū rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat ostendendum.

### SCHOLION.

CONVERSVM huius theorematidis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

Si recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmen-

ti quin-

ti quintuplum possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

**S I T** recta  $AB$ , diuisa inaequaliter in  $C$ , cuius maius segmentum  $AC$ , bisariam sectum sit in  $D$ , sitque quadratum rectae  $BD$ , quintuplum quadrati rectae  $CD$ . Dico rectam  $AB$ , diuisam esse in  $C$ , extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum  $LG$ , rectae  $AC$ , quadruplum quadrati  $PQ$ , rectae  $CD$ , ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon  $RST$ , eiusdem quadrati  $PQ$ , quadruplus. (cum enim quadratum  $DO$ , rectae  $BD$ , quintuplum ponatur quadrati  $PQ$ , ex recta  $CD$ ; dempto quadrato  $PQ$ , relinquetur gnomon  $RST$ , eiusdem quadrati  $PQ$ , quadruplus.) Igitur gnomon  $RST$ , equalis erit quadrato  $LG$ : At gnomoni  $RST$ , aequale est rectangulum  $CE$ , ut supra ostensum est. Ergo & quadrato  $LG$ , rectae  $AC$ , aequale erit idem rectangulum  $CE$ , sub  $AB$ ,  $BC$ , comprehensum: Ac proinde erit, ut  $AB$ , ad  $AC$ , ita  $AC$ , ad  $CB$ . Quocirca, ex definitione, secta erit  $AB$ , in  $C$ , extrema ac media ratione. Quod est propositum.

17. sexti.

**ALITER.** Cum  $AC$ , diuisa sit bisariam in  $D$ , & ei addita  $CB$ ; erit rectangulum sub  $AB$ ,  $BC$ , una cum quadrato rectae  $CD$ , aequale quadrato rectae  $BD$ ; Ac propterea cum quadratum ex recta linea  $BD$ , descriptum quintuplū ponatur quadrati ex recta  $CD$ , descripti; erit & rectangulū sub rectis lineis  $AB$ ,  $BC$ , descriptum, una cum quadrato rectae  $CD$ , quintuplum eiusdem quadrati rectae  $CD$ . Quare ablato quadrato rectae  $CD$ ; rectangulum sub  $AB$ ,  $BC$ , quadruplum erit quadrati rectae  $CD$ : Est autem eiusdem quadrati rectae  $CD$ , quadruplum quadratum rectae  $AC$ , ex scholio propos. 4.

6. sexti.

lib. 2. Igitur quadrato rectae  $AC$ , aequale est rectangulum sub  $AB$ ,  $BC$ . Quamobrem erit, ut  $AB$ , ad  $AC$ , ita  $AC$ , ad  $CB$ ; Ac proinde secta  $AB$ , in  $C$ , extrema ac media ratione, ex definitione.

17. sexti.

5.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur ; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur, quadrati.

SECTUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectae AC. Describatur enim super AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propos. 4.



17. sexti.

lib. 2. Quoniam igitur est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB, ita AC, ad CB, erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectae AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD; erit gnomon KLM, una cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, una cum quadrato CH, rectæ BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

17. sexti.

7. secundi

ALITER. Quoniam est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectae AC; Atque adeo rectangulum sub AB, BC, bis, una cum quadrato rectae AC, triplum quadrati rectae AC. Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectae AC, una cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectae AC. Quocirca si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur ; Quod a tota, quodque a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

SCHO.

SCHOLION.

CONVERSUM etiam huius verum est, videlicet.

Si recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta  $AB$ , inæqualiter in  $C$ , ita ut quadratum totius  $AB$ , & quadratum minoris segmenti  $BC$ , utraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti  $AC$ . Dico rectam  $AB$ , sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, ut prius, cum quadrata  $AD$ ,  $CH$ , tripla sint quadrati  $IF$ ; Dempso quadrato  $IF$ , erit gnomon  $KLM$ , una cum quadrato  $CH$ , duplus eiusdem quadrati  $IF$ ; Est autem gnomon  $KLM$ , una cum quadrato  $CH$ , equalis duobus rectangulis  $AH$ ,  $CD$ . Igitur & rectangula  $AH$ ,  $CD$ , dupla sunt quadrati  $IF$ ; Ac propterea cum equalia sint  $AH$ , &  $CD$ ; erit  $AH$ , ipse  $IF$ , equalis. Quapropter tum rectangulum  $AH$ , sub  $AB$ ,  $BC$ , equalis sit quadrato  $IF$ , recta  $AC$ ; erit ut  $AB$ , ad  $AC$ , ita  $AC$ , ad  $CB$ ; Ac proinde  $AB$ , divisa erit in  $C$ , extrema & media ratione. 17. sexti.

ALITER. Cum quadrata rectarum  $AB$ ,  $BC$ , tripla sint quadrati recte  $AC$ ; Sint vero quadrata rectarum  $AB$ ,  $BC$ , equalia quadrato recte  $AC$ , & rectangulo sub  $AB$ ,  $BC$ , bis, 7. secundi. erit & quadratum recte  $AC$ , una cum rectangulo sub  $AB$ ,  $BC$ , bis, triplum quadrati recte  $AC$ .

Dempso ergo quadrato recte  $AC$ , relinquetur rectangulum sub  $AB$ ,  $BC$ , bis duplum quadrati recte  $AC$ ; Et proinde rectangulum sub  $AB$ ,  $BC$ , semel, equalis quadrato recte  $AC$ . Quare ut prius, erit ut  $AB$ , ad  $AC$ , ita  $AC$ , ad  $CB$ ; adeoque  $AB$ , in  $C$ , secta erit extrema ac media ratione. 17. sexti.



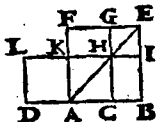


4.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturq; ei æqualis maiori segmento : Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ a principio, recta linea.

SECETUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC, & adijciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A extrema ac media ratione, esseq; maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in



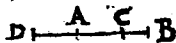
quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi IK, productæ in L. Bruntq;

17. sexti.  
36. primi.

ex coroll. propof. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB, erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC: Est autem CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL; additoq; communi BK, erit rectangulum BL, contentum sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB; Ac proinde erit ut BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum AB.

17. sexti.

ALITER. Quoniam est ut AB, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo ut DA, ad AB, ita BC, ad CA; & componendo ut DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea



secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturq;

naturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea, &c.  
Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea  $BD$ , extrema ac media ratione secetur in  $A$ , cuius maius segmentum  $AB$ , minus autem segmentum  $AD$ ; & ex maiori segmento  $AB$ , detrahatur recta  $AC$ , æqualis minori segmento  $AD$ . Dico maius segmentum  $AB$ , diuisum esse in  $C$ , extrema ac media ratione, & maius segmentum esse rectam  $AC$ , quæ æqualis est minori segmento  $AD$ . Facta enim prioris figura constructione, cum sit ut  $BD$ , ad  $AB$ , ita  $AB$ , ad  $AD$ ; erit rectangulum  $BL$ , contentum sub  $BD$ ,  $AD$ , æquale quadrato  $BF$ , recta  $AB$ , & ablato communi  $BK$ , erit  $AL$ , æquale ipsi  $IF$ : Est autem  $AL$ , ipsi  $CK$ , æquale.  $AE$  quale igitur est  $IF$ , cõsensum sub  $AB$ ,  $CB$ , quadrato  $CK$ , recta  $AC$ ; Ac proinde erit ut  $AB$ , ad  $AC$ , ita  $AC$ , ad  $CB$ . Quare  $AB$ , secta est in  $C$ , extrema ac media ratione. cuius segmentum maius est  $AC$ , minus uero segmentum recta  $CB$ . Quod est propositum.

ALITER. Quoniam est ut tota  $BD$ , ad totam  $AB$ , ita  $AB$ , detracta ex  $BD$ , ad  $AD$ , hoc est, ad  $AC$ , detractam ex  $AB$ ; erit quoque ita  $AD$ , reliqua ipsius  $BD$ , hoc est,  $AC$ , ad  $CB$ ; reliquam ipsius  $AB$ , ut tota  $BD$ , ad totam  $AB$ , hoc est, ut  $AB$ , ad  $AC$ ; Ac propterea diuisa erit  $AB$ , in  $C$ , extrema & media ratione.

RURSUM & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

17. sexti.  
36. primi.  
17. sexti.  
19. quinti.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidium maioris segmenti; Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

*D I V I D A T U R* enim *A B*, extrema ac media ratione in *C*, sitq; *D E*, dimidium totius, & *D F*, dimidium maioris segmenti *A C*. Dico *D E*, in *F*, secari extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse *D F*. Cum enim sit ut *A B*, tota ad *D E*, totam, ita *A C*, ablata ad *D F*, ablatam, cum utrobique sit proportio du-



19. quinti.

15. quinti.

plaz erit quoque reliqua *C B*, ad reliquam *F E*, ut tota ad totam; Ac proinde & *C B*, dupla erit ipsius *F E*. Quoniam uero est ut *A B*, ad *A C*, ita *D E*, dimidia illius ad *D F*, dimidiam huius: Item ut *A C*, ad *C B*, ita *D F*, dimidia illius ad *F E*, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, *A B*, ad *A C*, ut *A C*, ad *C B*: Erit quoq; *D E*, ad *D F*, ut *D F*, ad *F E*; Ac proinde ex eadẽ defin. *D E*, secta erit in *F*, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

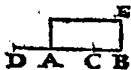
6.

## THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrunque segmentorum Irrationalis linea est, quæ uocatur Apotome.

*S E C E T U R* recta Rationalis *A B*, in *C*, extrema ac media ratione. Dico utrunque segmentum *A C*, *C B*, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur. n. maiori segmento *A C*, recta *A D*, æqualis dimidiæ totius *A B*. Quoniã igitur quadratũ rectæ *CD*, quintuplũ est quadrati

drati rectę AD, habebit quadratum rectę CD, ad quadratū  
rectę AD, proportionem, quā numerus ad numerū. Quare  
commensurabilia erunt quadrata rectarū CD, AD; pro-  
pterea; ipsę rectę CD, AD, commensurabiles quoque; existēt,  
saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia  
lineę Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia ue-  
ro quadrata rectarum CD, AD, non ha-  
bent proportionem, quam numerus qua-  
dratus ad numerum quadratum, ( ut con-  
stat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent. n.  
proportionem quam 5. ad 1. uel 25. ad 5. ) erunt rectę CD,  
AD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationa-  
les potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Ra-  
tionali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commē-  
surabilis; erit reliqua AC, Irrationalis, quę appellatur  
Apotome.



6. decimi.

9. decimi.

74. decimi.

17. sexti.

98. decimi.

R V R S V S applicato ad AB, rectangulo AE, conten-  
to sub AB, CB; cum sit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB;  
erit rectangulum AE, æquale quadrato rectę AC. Quam-  
obrem quadratum Apotomę AC, nimirum rectangulum  
AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, facit  
alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apo-  
tomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac  
media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

### SCHOLION.

S E D & hoc theorema cum Campano ostendimus.

SI recta linea secundum extremam & me-  
diam rationem secetur, sitque maius segmen-  
tum linea Rationalis; erit minus segmentum,  
Apotome.

S I T recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C,  
sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus seg-  
mentū CB, esse Apotomen. Diuisa. n. AC, bifariam in D; erit  
CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cū sit ipsi AC,  
commen-

3. terijdec. commensurabilis. Quoniam autem quadratum recte B D, quintuplum est quod ad recte C D; habebunt quadrata re-

A,  $\overline{PC}$  B

6. decimi.

ctarum B D, C D, proportionem, quam numerus ad numerum; ac propterea commensurabilia existant. Quare & ipse recte B D, C D, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur C D, sit Rationalis, erit quoque B D, Rationalis. Quia vero quadrata rectorum B D, C D, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt recte B D, C D, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex B D, Rationali detrahatur C D, Rationalis potentia tantum commensurabilis; erit reliqua C B, Irrationalis, quae vocatur Apotome.

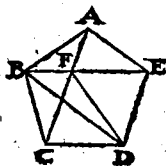
74. decimi.

7.

## THEOR. 7. PROPOS. 7

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

S I N T in pentagono æquilatero A B C D E, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis



angulis æqualibus recte B E, A C, B D; & ex puncto F, ubi se intersectant recte B E, A C, recta ducatur F D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothefi; Erunt & bases B E, B D, & anguli A E B, C D B, æquales: Sunt autem & anguli B E D, B D E, æquales, cum æqualia sint ostensa latera B E, B D;

4. primi.

5. primi.

B D; Toti igitur anguli A, E D, C D E, æquales erunt. Rur-  
sus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateri-  
bus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipsis con-  
tenti æquales, ex hypothesi: Erit & basis BE, basi AC, æqua-  
lis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum  
ergo æquales sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; erunt  
quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea si ipsa de-  
mōstratur, ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ hinc FE,  
FC, æquales. Itaque cum latera FE, ED, trianguli FED,  
æqualia sint lateribus FC, CD, trianguli FCD; & basis com-  
munis FD, ærunt & anguli dictis lateribus contenti FE D,  
FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, ostensi  
æquales. Acquales igitur sunt non anguli AED, BCD;  
Ac proinde cum angulo AED, ostensus sit æqualis angulus  
CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC,  
BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoq; æqui-  
angulum erit ipsum pentagonum.

4. primi.

6. primi.

8. primi.

S I N T secundo tres anguli non deinceps æquales A, C,  
D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqua-  
lia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quo-  
que ipsis contenti, æquales, ex hypothesi; Erunt & bases BE,  
BD, & anguli AEB, CDB, æquales; Sunt autem & anguli  
BED, BDE, æquales, quod æqualia ostensa sunt latera BE,  
BD. Igitur non anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare  
cum æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli  
deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, ut iam demonstre-  
tum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur  
æquilateri, tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum,

4. primi.

5. primi.

## THEOR. 8. PROPOS. 8.

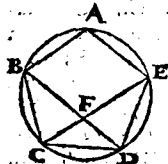
II.

S I pentagoni æquilateri, & æquiangu-  
li duos angulos, qui deinceps sint, subten-  
dant rectæ lineæ: hæ extrema & media ra-  
tione se mutuo secant, & maiora ipsarum  
segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

Cc

SVB.

SVB TENDANTVR in pētagono æquilatēro & æqui  
angulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, &  
D, rectæ DB, CE, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari



extrema & media ratione, maioraque  
earum segmenta FB, FE, æqualia esse  
lateri cuiuslibet pentagoni. Descripto  
enim circulo circa pōntagonum, erūt  
quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA,  
æquales. Quia uero latera CD, CB,  
trianguli CDB, æqualia sunt lateribus

DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis conten-  
ti æquales, ex hypothēsi; Erunt & bases DB, CE, & angu-  
li CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum in triangulo  
CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, & ipsis æqua-  
lis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus  
anguli DCE: Est autem & angulus BCE, eiusdem an-  
guli DCE, duplus, quod & arcus BAE; arcus DE, sit du-  
plus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt; Ideoque  
recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. Quoniam au-  
tem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistentes  
æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli  
BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli  
CFD; Ac proinde æquiangula erunt triangu-  
la BCD, CFD. Quare erit ut BD; ad DC, hoc est, ad BF, æqua-  
lem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD;  
Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione,  
estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale,  
ut ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE,  
secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius seg-  
mentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si  
pentagoni æquilatēri & æquianguli duos angulos, &c: Quod  
erat ostendendum.

14. quarti.  
28. terci.

4. primi.

32. primi.  
33. sexti.

6. primi.  
27. terci.

32. primi.  
4. sexti.

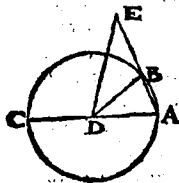
9.

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eo-  
dem circulo descriptorum, componantur-  
Tota recta linea extrema ac media ratione  
secatur,

secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

In circulo  $ABC$ , sit latus decagoni  $AB$ , cui in rectum addatur  $BE$ , æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eodem circulo inscripti. Dico  $EA$ , rectam sectam esse in  $B$ , extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse  $EB$ , latus hexagoni. Ducatur enim ex  $A$ , per centrum  $D$ , diameter  $AC$ , coniunganturque recta  $DB$ ,  $DE$ . Quoniam igitur  $AB$ , arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli; continebit arcus semicirculi arcum  $AB$ , quinque; Ac proinde arcus  $BC$ , quadruplus erit arcus  $AB$ . Quare & angulus  $BDC$ , anguli  $ADB$ , quadruplus erit. Rursus quia latera  $BD$ ,  $BE$ , sunt æqualia, nempe latera hexagoni; (est enim  $BE$ , latus hexagoni semidiametro  $BD$ , æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) erunt & anguli  $BDE$ ,  $BED$ , æquales: quibus cum æqualis sit externus  $ABD$ ; erit angulus  $ABD$ , duplus anguli  $BED$ : Est autem angulo  $ABD$ , æqualis angulus  $BAD$ , ob æqualitatem laterum  $DA$ ,  $DB$ . Igitur & angulus  $BAD$ , duplus erit anguli  $BED$ : Ac proinde duo anguli  $DAB$ ,  $DBA$ , simul quadrupli erunt anguli  $BED$ . Cum ergo angulis  $DAB$ ,  $DBA$ , æqualis sit externus  $BDC$ ; erit angulus  $BDC$ , quadruplus eiusdem anguli  $BED$ : Atqui idem angulus  $BDC$ , ostensus fuit quadruplus anguli  $ADB$ . Igitur æquales sunt anguli  $AED$ ,  $ADB$ . Quocirca cum duo anguli  $AED$ ,  $DAE$ , trianguli  $ADE$ , æquales sint duobus angulis  $ADB$ ,  $BAD$ , trianguli  $ABD$ ; erunt triangula  $ADE$ ,  $ABD$ , æquiangula. Igitur erit ut  $EA$ , ad  $AD$ , hoc est, ad  $EB$ , ipsi  $AD$ , æqualem, ita  $AD$ , hoc est,  $EB$ , sibi æqualis, ad  $BA$ ; Ac idcirco recta  $EA$ , secta est in  $B$ , extrema & media ratione, estque maius segmentum  $EB$ , latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quoderat demonstrandum.



33. sexti.

5. primi

32. primi.

5. primi

32. undec.

32. primi.

4. sexti.



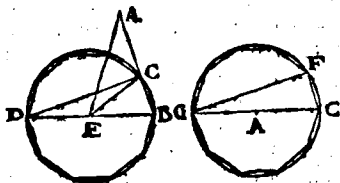
S C H O L I O N .

QVIA vero demonstramus ad propof. 5. huius lib. fi minus segmentum lineæ diuifa extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur; maius segmentum fecari quoque extrema & media ratione, cuiusque segmentum maius esse minus segmentum detractum; Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni, fecari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni fecetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, dimisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, ut ad propof. 5. huius lib. ostendimus. Hoc samon aliter demonstrabimus lib. 14. propof. 4.

CONVERSUM quoque huius theorematif facile cum Campano demonstrabimus. Videlicet.

Si lineæ diuifæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

Si t enim  $AB$ , diuifa in  $C$ , extrema & media ratione, sique primo  $AC$ , latus hexagoni circuli  $BCD$ . Dico minus



segmentū  $CB$ , esse eiusdem circuli latus decagoni. Coarctetur enim  $BC$ , in circulo, ita ut  $CA$ , extra circuli cadat. Et ducta ex  $B$ , per centrum  $F$ , diametro  $BED$ , connectan

tur rectæ  $EA$ ,  $EC$ . Quia ergo est ut  $AB$ , ad  $AC$ , ita  $AC$ , ad  $CB$ ; & est  $AC$ , latus hexagoni aequale semidiametro  $EB$ , ex coroll. propof. 15. lib. 4. Erit quoque ut  $AB$ , ad  $BE$ , ita  $EB$ , ad  $BC$ , ideoque triangula  $ABE$ ,  $EBC$ , æquiangula erunt, cum habeant

6. sexi.

latera

latera circa communem angulum  $B$ , proportionalia s. eritque angulus  $A$ , angulo  $BEC$ , equalis. Rursus quia latera  $CA$ ,  $CF$ , equalia sunt, nempe latera hexagoni, erunt anguli  $CAE$ ,  $CEA$ , aequales; quibus cum aequalis sit externus  $BCE$ , erit  $BCE$ , duplus anguli  $A$ : Est autem angulo  $BCE$ , angulus  $CBE$ , ob aequalitatem laterum  $EB$ ,  $EC$ , equalis. Igitur  $\angle CBE$ , duplus erit anguli  $A$ ; Ac proinde duo anguli  $BCE$ ,  $CBE$ , simul quadrupli erunt eiusdem anguli. Cum ergo angulus  $BCE$ ,  $CBE$ , equalis sit externus  $CED$ ; erit quoque angulus  $CED$ , eiusdem anguli  $A$ , & propterea angulus  $BFC$ , qui equalis ostensus est angulo  $A$ , quadruplus erit. Quare  $\angle$  arcus  $CD$ , quadruplus erit arcus  $BC$ ; Ac proinde arcus semicirculi  $BCD$ , eiusdem arcus  $BC$ , quintuplus existet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus  $BC$ . Quapropter recta  $BC$ , latus est decagoni.

5. primi.

32. primi

5. primi.

32. primi

33. sexti.

§ 1 T secundo  $CB$ , minus segmentum, latus decagoni circuli  $BCD$ . Dico minus segmentum  $AC$ , esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus  $BC$ , in circulo  $BCD$ , ducaturque diameter  $BED$ . Deinde intervallo  $AC$ , describatur circulus  $CFG$ , cuius diameter  $CAG$  eritque ex coroll. propof. 13. lib. 4.  $AC$ , latus hexagoni circuli  $CF$ . Quoniam igitur  $AB$  secta est in  $E$ , extrema ac media ratione, estque maius segmentum  $AC$ , latus hexagoni circuli  $CFG$ ; erit, ut iam ostensum est, minus segmentum  $CB$ , latus decagoni eiusdem circuli  $CFG$ . Describatur ergo in circulo  $CFG$ , decagonum aequilaterum & equiangularum  $CFG$ ; Item in circulo  $BCD$ , decagonum aequilaterum, & equiangularum  $BCD$ ; eruntque latera  $BC$ ,  $CF$ , inter se equalia. Quoniam vero, si connectantur recta  $CD$ ,  $FG$ , anguli  $CDB$ ,  $FGC$ , sunt aequales, ut in scholio propof. 33. lib. 6. ostendimus, quod insistant arcibus similibus  $BC$ ,  $CF$ , nempe decem partibus peripheriarum; & sunt quoque anguli  $BCD$ ,  $CFG$ , in semicirculis aequales, nimirum recti: Erunt quoque latera  $BD$ ,  $CG$ , inter se equalia. Quoniam ob rectam diametrum  $BD$ ,  $CG$ , sint aequales, aequales quoque erant circuli  $BCD$ ,  $CFG$ . Ac proinde, cum recta  $AC$ , sit latus hexagoni circuli  $CFG$ , erit quoque eadem recta  $AC$ , latus hexagoni circuli  $BCD$ .

31. tertij

26. primi

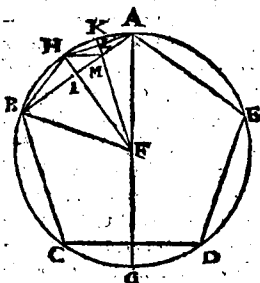
Quod est propositum.

10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

IN circulo A B C D E, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris A B, æquale esse quadrato lateris hexagoni, una cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta F B. Diuiso deinde arcu A B, bisariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, secans rectam A B, in I: eritque recta A H, latus decagoni, & B F, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu A H, bisariam in K, adiungatur recta F K, secans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, puncto, ad quod recta ducatur H M. Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales sunt; erunt & anguli ipsi insistentes A F H, B F H, æquales. Quare cum latera A F, F I, trian-



27. serij.

4. primi

guli A F I, æqualia sint lateribus B F, F I, trianguli B F I, & anguli ipsi contenti, æquales quoque; erunt & bases A I, B I, æquales, & anguli A I F, B I F, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ A L, H L, & anguli A L F, H L F, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus A B C G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, A E D, relinquentur arcus C G, D G, inter sese æquales, ideoque erit arcus C G, dimidium arcus C D: Est autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cum arcus A B, C D, æquales sint;

sint;

sint; erunt quoque eorum dimidij arcus  $CG$ ,  $AH$ , æqua-  
les; Ac proinde cum arcus  $AH$ , duplus sit arcus  $HK$ , erit  
& arcus  $CG$ , duplus eiusdem arcus  $HK$ . Eodem modo,  
quia arcus  $AB$ ,  $BC$ , æquales sunt, & est arcus  $AB$ , du-  
plus arcus  $BH$ , erit etiam arcus  $BC$ , eiusdem arcus  $BH$ ,  
duplus. Quare arcus  $CG$ ,  $BC$ , æquemultiplices sunt; nẽ-  
pe dupli, arcuum  $HK$ ,  $BH$ ; Ac propterea totus arcus  
 $BG$ , duplus quoque erit tunc arcus  $BK$ ; & idcirco angu-  
lus quoque  $BFG$ , duplus anguli  $BFK$ : Sed quia (cum an-  
guli  $FAB$ ,  $FBA$ , ob æqualitatem laterum  $FA$ ,  $FB$ , æqua-  
les sint, ipsisque æqualis externus  $BFG$ ;) idem angulus  
lus  $BFG$ , duplus est quoque anguli  $FAB$ ; erunt idcirco  
anguli  $BFM$ ,  $FAB$ , æquales; Ac propterea triangu-  
la  $ABF$ ,  $FBM$ , cum habeant angulos  $FAB$ ,  $MBF$ , æqua-  
les, & angulum  $ABF$ , communem, æquiangula erunt.  
Quocirca erit ut  $AB$ , ad  $BF$ , ita  $BF$ , ad  $BM$ ; ideoque  
rectangulum sub  $AB$ ,  $BM$ , æquale erit quadrato recte  
 $BF$ . Rursus quia latera  $AL$ ,  $LM$ , trianguli  $ALM$ , æqua-  
lia sunt lateribus  $HL$ ,  $LM$ , trianguli  $HLM$ , & anguli quo-  
que ipsis contenti æquales, nempe recti: erunt & bases  $AM$ ,  
 $HM$ , & anguli  $LAM$ ,  $LHM$ , æquales: Est autem angu-  
lus  $LAM$ , angulo  $HBA$ , æqualis, quod & latera  $HA$ ,  
 $HB$ , æqualia sint. Igitur & angulus  $LHM$ , eidem angu-  
lo  $HBA$ , æqualis erit; Ac propterea triangu-  
la  $ABH$ ,  
 $AHM$ , cum habeant angulos  $ABH$ ,  $AHM$ , æquales,  
& angulum  $HAM$ , communem, æquiangula erunt.  
Quam ob rem erit ut  $AB$ , ad  $AH$ , ita  $AH$ , ad  $AM$ ;  
ideoque rectangulum sub  $AB$ ,  $AM$ , æquale erit quadrato  
recte  $AH$ : ostensum est autem & rectangulum sub  $AB$ ,  
 $BM$ , æquale quadrato recte  $BF$ . Igitur rectangula sub  
 $AB$ ,  $BM$ , & sub  $AB$ ,  $AM$ , simul æqualia sunt quadratis  
rectarum  $BF$ ,  $AH$ : At uero rectangula sub  $AB$ ,  $BM$ , &  
sub  $AB$ ,  $AM$ , æqualia sunt quadrato recte  $AB$ . Quadra-  
tum ergo recte  $AB$ , nempe lateris pentagoni, æquale est  
quadratis rectarum  $BF$ ,  $AH$ , lateris uidelicet hexagoni, &  
lateris decagoni. Si igitur in circulo pentago-  
num æquilaterum describatur, &c.

Quod erat demon-  
strandum.

quinti.  
3. sexti.  
5. primi  
2. primi.  
3. 2. primi.  
4. sexti.  
17. sexti.  
4. primi  
5. primi.  
3. 2. primi.  
4. sexti.  
17. sexti.  
2. secundi

# EUCLID. GEOM.

## COROLLARIUM. I.

Hinc sequitur, lineam rectam, quæ ex centro ducta dividit arcum quempiam bifariam, dividere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam EF, propter quod arcum A B, dividit bifariam, subtendere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

## COROLLARIUM. II.

Perspiciendum quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam dividere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos. Demonstratum enim est diametrum A G, ex puncto A, ductam dividere arcum C D, quem latus oppositum C D, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoque latus C D, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatere in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, ut constat.

## SCHOLIUM.

QUONIAM ad finem lib. 4. præxim quandam ex Ptolemaeo tradidimus, quæ una eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, eiusque demonstrationem in hunc locum disulimus, paucis nunc a nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrum D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde divisa semidiametro C D, bifariam in E, ducta recta E A, cui equalis abscindatur E F, adiungaturque recta A F. Dico rectam A F, esse latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cum enim C D, secta sit bifariam in E, eique addita



6. secundi

47. primi.

D F, erit rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoque quadrato rectæ E A, quæ ipsæ E F, est equalis: Est autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale est quadratis rectarum A D, D E, Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E,

D E,

*D F, relinquantur rectangulum sub C F, D F, æquale quadrato rectæ A D, hoc est, quadrato rectæ C D. Quam ob rem erit ut C F, ad C D, ita C D, ad D F; proptereaque rectæ C F, dimisa erit in D, extrema ac mediæ ratione. Cum igitur maius segmentum C D, sit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll. prop. 1. lib. 4. erit minus segmentum D F, latus decagoni eiusdem circuli; ut demonstravimus ad prop. 9. huius lib. Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni A D, una cum quadrato lateris decagoni D F, æquale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli; Est autem eisdem quadratis rectarum A D, D F, æquale quadratum rectæ A F, erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; ac propterea rectæ A F, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.*

THEOR. II. PROPOS. II.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN titulo A B C D E, habent diametrum Rationalem, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E. Di-  
co eius latus A B, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, secetque A G, latus C D, in I, connectanturque rectæ A C, A H, quarum A C, secet diametrum B H, in K. Abscindatur quoque ex semidiametro F H, quarta ei<sup>9</sup> pars F L, ite ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, ponitur Rationalis; erunt quoque F L, B F, illi commensurabiles, cum sint eius partes aliquotæ, Rationales, Atque idcirco & tota B L, composita, cum sit commensurabilis utrique F L, B F, Rationalis erit. Rursus quoniam recta F B, ex centro ducta secat arcum A C, bifariam in B; secabit quoque rectæ A C, bifariam



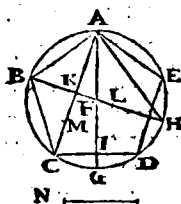
17. sexti.

10. tertij d. c.  
47. primi.

12.

16. decimi.

bisariam in K, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propof. Secat autem & recta A G, rectam C D, in I, bisariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propof. Triangula ergo A C I, A F K, cum habeant angulos A I C,



A K F, rectos, & angulum C A I, communem, æquiangula inter se erunt. Quam ob rem erit, ut C I, ad C A, ita F K, ad F A; & permutando ut C I, ad F K, ita C A, ad F A: Vt autem C A, ad A F, ita est C M, quarta pars ipsius C A, ad F L, quartam partem ipsius F A. Erit igitur ut C I, ad F K, ita C M, ad F L; & permu-

tando, ut C I, ad C M, hoc est, ut C D, dupla ipsius C I, ad C K, duplam ipsius C M, ita F K, ad F L; Atque componendo, ut C D, C K, simul ad C K, ita F K, F L, simul, nimirum recta K L, ad F L; Ac propterea erit, ut quadratum rectæ compositæ ex C D, C K, ad quadratum rectæ C K, ita quadratum rectæ K L, ad quadratum rectæ F L. Quia uero I A C, secetur extrema ac media ratione, (ducta uidelicet recta B D,) maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi C D; Erit quadratum rectæ compositæ ex C D, maiori segmento, & C K, dimidia totius. Quare & quadratum rectæ K L, quintuplum erit quadrati rectæ F L, ideoque quadratum rectæ K L, commensurabile erit quadrato rectæ F L; Ac proinde rectæ K L, F L, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem F L, ostensa Rationalis. Igitur & K L, Rationalis erit. Deinde quia qualium partium 4. est B F, talium 1. est F L; ac propterea qualium 5. est B L, talium 1. est F L; erit quadratum rectæ B L, talium partium 25. qualium 1. est quadratum rectæ F L, (ut in his numeris patet 1. 5. 25. habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. est quadratum rectæ F L, talium 5. ostensum est quadratum rectæ K L. Qualium igitur 25. est quadratum rectæ B L, talium 5. est quadratum rectæ K L; ac proinde quadratum rectæ B L, quintuplum erit quadrati rectæ K L. Quia ergo quadrata rectarum B L,

A L,

32. primi  
4. sexti.

5. quinti

22. sexti.

8. tertijdec.

1. tertijdec.

6. decimi.

20. sexti.

$KL$ , proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut patet ex coroll. propof. 2. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. uel 5. ad 1.) Erunt rectæ  $BL$ ,  $KL$ , longitudine incommensurabiles; ideoque, cum ostense sint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali  $BL$ , dematur Rationalis  $KL$ , potentia tantum commensurabilis; erit reliqua  $BK$ , Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei uero congruens erit  $KL$ .

7. decimi.

74. decimi

Item uero recta  $BL$ , possit plus, quam recta  $KL$ , quadrato rectæ  $N$ . Quoniam igitur quadratum rectæ  $BL$ , æquale est quadratis rectarum  $KL$ , &  $N$ ; Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ  $BL$ , talium 1. fuit quadratum rectæ  $KL$ ; Erit reliquum quadratum rectæ  $N$ , talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ  $BL$ ; Ac propterea quadrata rectarum  $BL$ , &  $N$ , proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Quare commensurabilia erunt; proptereaque rectæ ipsæ  $BL$ , &  $N$  commensurabiles, saltem potentia: Est autem  $BL$ , ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit &  $N$ . Quia uero quadrata rectarum  $BL$ , &  $N$ , proportionem non habent, quâ numerus quadratus ad numerum quadratus (ut perspicuum est ex coroll. propof. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) Erunt rectæ  $BL$ , &  $N$ , longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta  $BL$ , Rationalis, longitudine sit commensurabilis Rationali  $BH$ ; (Qualium enim partium 8. est  $BH$ , talium 5. est  $BL$ ), possitque plus, quam congruens  $KL$ , quadrato rectæ  $N$ , sibi longitudine incommensurabilis, ut ostensum est; Erit  $BK$ , Apotome quarta, ex definitione.

6. decimi.

9. decimi.

Posui rem quia recta  $AB$ , est media proportionalis inter  $BH$ ,  $BK$ , ex coroll. propof. 8. lib. 6. (quod triangulum  $ABH$ , habeat angulum  $BAH$ , rectum, & quo ducta est  $AK$ , ad basin perpendicularis) erit quadratum rectæ  $AB$ , æquale rectangulo sub  $BH$ ,  $BK$ . Quocirca cum superficiem contentam sub Rationali  $BH$ , & Apotoma quarta  $BK$ , possit recta linea  $AB$ ; Erit  $AB$ , linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

31. tertii.

17. sexti.

95. decimi.

THEOR.



8.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo  $ABC$ , cuius centrum  $D$ , triangulum æquilaterum inscribatur  $ABC$ . Dico quadratum lateris  $AB$ , triplum esse quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro



$AE$ , quæ fecer, ex coroll. propof. 10. huius lib. arcum  $BC$ , bifariam in  $E$ , & rectâ  $BC$ , bifariam quoque & ad angulos rectos in puncto  $F$ ; cum arcus  $BC$ , sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus  $BE$ , eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoque coniuncta recta  $BE$ , latus erit hexagoni, & equalis semidiametro circuli, ex coroll. propof. 15. lib. 4.

Quoniam igitur quadratum rectæ  $AE$ , æquale est quadratis rectarum  $AB$ ,  $BE$ , quod angulus  $ABE$ , in semicirculo rectus sit: est autem quadratum rectæ  $AE$ , quadruplum quadrati rectæ  $BE$ , ex scholio propof. 4. lib. 2. quod linea  $AE$ , dupla sit lineæ  $BE$ , erunt quadrata rectarum  $AB$ ,  $BE$ , simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ  $BE$ ; Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum  $AB$ ,  $BE$ , talium partium 1. erit quadratum rectæ  $BE$ ; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ  $AB$ . Quare quadratum rectæ  $AB$ , triplum est quadrati rectæ  $BE$ , quæ equalis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc facite colligi potest, semidiametrum  $DE$ , bifariam secari in  $F$ , a latere trianguli  $BC$ . Cum enim quadratum rectæ  $AB$ , triplum sit quadrati rectæ  $BE$ ; si ponatur quadratum rectæ  $AB$ , pareum 12. erit quadratum rectæ  $BE$ , talium partium 4. Est autem quadratum rectæ  $BE$ , æquale quadratis rectarum  $BF$ ,  $FE$ . Igitur & talium

47. primi.  
31. versj.

47. primi.

& talium partium 4. sunt quadrata rectarum  $BF$ ,  $FE$ . Est autem talium partium 3. quadratum rectæ  $BF$ , (quod quadratum rectæ  $AB$ , quadruplum fit quadrati rectæ  $BF$ , ex scholio propof. 4. lib. 3. Est enim  $AB$ , dupla iofius  $BF$ .) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ  $FE$ ; Ac prout quadratum rectæ  $BE$ , hoc est, quadratum rectæ  $DE$ , sibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ  $FE$ . Cum igitur, ex scholio propof. 4. lib. 1. idem quadratum rectæ  $DE$ , quadruplum fit quadrati dimidiæ lineæ ipsius  $DE$ ; erit  $FE$ , dimidia ipsius  $DE$ . Quocirca  $DE$ , bifariam secatur in  $F$ .

SCHOLIION.

Hoc tamen corollarium aliter demonstrabitur hac theoremate propofito.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex uno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque uicissim bifariam, & angulos rectos secabitur a latere opposito.

In circulo  $ABC$ , cuius centrum  $D$ , triangulum æquilaterum inscribatur  $ABC$ . Dico rectam  $AE$ , per centrum  $D$ , ductam, hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum  $BAC$ , & latus  $BC$ , nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque  $DE$ , secari a latere  $BC$ , bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis  $BD$ ,  $CD$ ,  $BE$ , cum latera  $AB$ ,  $AD$ , trianguli  $BAD$ , aequalia sint lateribus  $AC$ ,  $AD$ , trianguli  $CAD$ ; & bases  $BD$ ,  $CD$ , æquales quoque: Erunt anguli  $BAD$ ,  $CAD$ , æquales. Quod est primum.



3. primi

DEINDE, cum latera  $AB$ ,  $AF$ , trianguli  $BAF$ , aequalia sint lateribus  $AC$ ,  $AF$ , trianguli  $CAF$ , & anguli ipsi consensu æquales ostensi: Erunt & bases  $BF$ ,  $CF$ , & anguli ad  $F$ , æquales, ideoque recti. Quod est secundum.

4. primi.

POSTREMO, cum anguli  $BAE$ ,  $CAE$ , demonstrati sint esse æquales; erunt & arcus  $BE$ ,  $CE$ , æquales. Quare cum

26. tertij.

5. primi

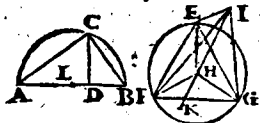
26. primi

13.

PROBL. 4. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphaera complecti; & demonstrare, quod sphaerae diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

S I T datae sphaerae diameter  $AB$ , circa quam semicirculus describatur  $ACB$ ; & ex  $A, B$ , auferatur tertia pars  $BD$ , ut sit  $AD$ , ipsius  $DB$ , dupla; at uero  $AB$ , eiusdem  $DB$ , tripla; & ipsius  $AD$ , sesquialtera. Deinde ducta  $DC$ , perpendiculari ad  $AB$ , connectantur rectae  $AC, BC$ . Ad interval



lum rectae  $HE$ , quae equalis sit ipsi  $DC$ , describatur circulus  $EFG$ , cuius centrum  $H$ , in quo triangulum equilaterum inscribatur  $E$

$FG$ , adiunganturque rectae  $HF, HG$ , quae singulae equaliter erunt ipsi  $DC$ , cum equaliter sint ipsi  $HE$ , ad cuius intervalum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex  $H$ , ad planum circuli perpendicularis  $HI$ , quae equalis ponatur rectae  $AD$ , & ex  $I$ , demittantur rectae  $IE, IF, IG$ . Dico solidum contentum quatuor triangulis  $FE C, IEF, IFG, IEG$ , esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam latera  $DA, DC$ , trianguli  $ADC$ , equalia sunt lateribus  $HI, HE$ , trianguli  $IHE$ , & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesis, & 3. defin. lib. 4. i. erit basis  $AC$ , basi  $IE$ , equalis. Non aliter ostendemus eandem rectam  $AC$ , equaliter esse rectis  $IF, IG$ . Rursus quia tres linee  $AD, DC, DB$ , proportionales sunt

4. primi.

sunt, ex coroll. propof. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propof. 20. lib. 6. ut  $AD$ , ad  $DB$ , ita quadratū rectę  $AD$ , ad quadratū rectę  $DC$ ; & cōponēdo, ut  $AB$ , ad  $DB$ , ita quadrata rectarū  $AD$ ,  $DC$ , fimul ad quadratū rectę  $DC$ : Sunt autē quadrata rectarū  $AD$ ,  $DC$ , æqualia quadrato rectę  $AC$ . Igitur erit quoq; ut  $AB$ , ad  $DB$ , ita quadratū rectę  $AC$ , ad quadratū rectę  $DC$ ; Ac proinde cū  $AB$ , fit ipſius  $DB$ , tripla, erit quoq; quadratū rectę  $AC$ , triplum quadrati rectę  $HE$ , cū  $HE$ , æqualis fit ipſi  $DC$ : Atqui & quadratū rectę  $EF$ , triplum quoque est eiufdem quadrati rectę  $HE$ . Quadratū ergo rectę  $AC$ , quadrato rectę  $EF$ , æquale erit; & propterea rectę  $AC$ , rectę  $EF$ . Quare cū recta  $AC$ , oſtenſa quoque ſit æqualis rectis  $IE$ ,  $IF$ ,  $IG$ ; erunt quatuor triangula  $EEG$ ,  $EFI$ ,  $IGI$ ,  $GEI$ , æquilatera & æqualia inter ſe. Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cuius baſis  $EEG$ , uertex uero  $I$ . Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cuius diameter  $AB$ ; & diametrum ſphære  $AB$ , potentia ſeſquialteram eſſe lateris  $BE$ , uel  $AC$ .

47. primi.

12. tertij de c.

EXTENDATUR perpendicularis  $IH$ , uſque ad  $K$ , ut ſit  $HK$ , ipſi  $DB$ , & tota  $IK$ , toti  $AB$ , æqualis. Quia ergo tres rectę  $AD$ ,  $DC$ ,  $DB$ , proportionales ſunt, quibus æquales exiſtunt tres  $IH$ ,  $HE$ ,  $HK$ ; erunt quoq;  $IH$ ,  $HE$ ,  $HK$ , proportionales. Quare cum  $HE$ , ſit ad  $IK$ , perpendicularis, & media proportionalis inter  $IH$ ,  $HK$ , ſemicirculus circa  $IK$ , deſcriptus in plano rectarū  $IK$ ,  $HE$ , tranſibit per  $E$ , ut mox oſtenditur; Eodemq; argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam  $IK$ , deſcriptus in plano rectarum  $IK$ ,  $HF$ , tranſibit per  $F$ , quam ſemicirculus circa eandem  $IK$ , deſcriptus in plano rectarum  $IK$ ,  $HG$ , per  $G$ . Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $I$ , incedat. Cum ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphære data, quod diameter  $IK$ , æqualis ponatur diametro  $AB$ ; comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

QUONIAM uero tres rectę  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ , proportionales ſunt, ex coroll. propof. 8. lib. 6. erit ut  $AB$ , ad  $AD$ , ita quadratū rectę  $AB$ , ad quadratū rectę  $AC$ , ex coroll. propof. 20. lib. 6. Eſt autē recta  $AB$ , ſeſquialtera rectę  $AD$ , qđ qualiū partiū 3.

en

est AB, taliū 2. sit A D. Igitur & quadratū rectę AB, sesqui-  
alterū erit quadrati rectę AC; Ac propterea cum AB, sit  
diameter sphęrę, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqua-  
lis, perspicuum est, diametrum sphęrę potentia sesquialte-  
ram esse lateris Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem er-  
go constituimus, & data sphęra cõplexi sumus, &c. Quod  
erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem semicirculus circa IK, in plano  
rectarum IK, HE, descriptus, transeat per E, facile  
demonstrabitur hoc propositio theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis duca-  
tur, quę sit media propotionalis inter segmen-  
ta lineę; semicirculus circa illam lineam rectam  
descriptus transibit per extremum punctum li-  
neę perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & me-  
dia propotionalis inter AC, & CB. Dico semicir-  
culum circa AB, descriptum transire  
per D. Nam si transeat citra D,  
uel ultra, nimirum per punctum E;  
erit quoque CE, media propotiona-  
lis inter AC, & CB, ex coroll. propof. 13. lib. 6.  
Quare tam quadratum rectę CD, quam quadratum  
rectę CE, æquale erit rectangulo sub AC, CB; Ac  
proinde quadrata rectarum CD, CE, inter se æqualia,  
& ipsa rectę CD, CE, æquales erunt, pars & to-  
tum, Quod est absurdum. Transibit ergo semicir-  
culus per D.

HINC manifestum est, semicirculum in superiori  
figura

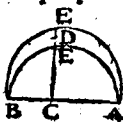
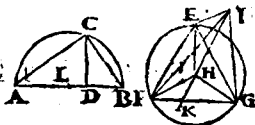


figura descriptum circa  $IK$ , in plano rectorum  $IK$ ,  
 $HE$ , transire per  $E$ , cum  $HE$ , sit ad  $IK$ , perpendi-  
 cularis, & media proportionalis inter  $IH$ ,  $HK$ .

COROLLARIUM I.

$H$  in  $C$  facile colligemus, diametrum sphaerae esse quadruplam  
 sesquialteram semidiametri circuli circa basim pyramidis determi-  
 ni. Cum enim diameter sphaerae  $AB$ , ostensa sit sesquialtera la-  
 teris pyramidis  $EF$ ; erit quadratum rectae  $EF$ , talium partium 6.  
 qualium 9. est quadratum rectae  
 $AB$ : Ac qualium partium 6. est  
 quadratum rectae  $EF$ , talium  
 partium 2. est quadratum rectae  
 $HE$ , quod quadratum rectae  $EF$ ,  
 triplum sit quadrati rectae  $HE$ .  
 Qualium igitur partium 9. est  
 quadratum rectae  $AB$ , talium  
 partium 2. erit quadratum rectae  $HE$ ; Ac propterea diameter sphae-  
 ra  $AB$ , potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri  $HE$ , cum  
 proportio quadratorum sit, quae 9. ad 2.



12. tertijde

COROLLARIUM II.

$R$  vs vs perpendicularis ex centro sphaerae ad planum basis  
 pyramidis demissa, sexta pars erit diametri sphaerae, & tertia pars  
 semidiametri. Sit enim  $L$ , centrum semicirculi  $ACB$ , eritque  $L$ ,  
 centrum quoque sphaerae. Dico rectam  $LD$ , (quae nimirum ex cen-  
 tro sphaerae ad basim  $EBFG$ , ducitur perpendicularis) cum  $AD$ ,  
 equalis sit ipsi  $IH$ , & ideo punctum  $D$ , idem quod  $H$ , quemad-  
 modum &  $L$ , idem est quod centrum sphaerae) esse sextam partem  
 diametri sphaerae, nempe rectae  $AB$ . & tertiam partem semidiamet-  
 ri  $AL$ . Quoniam  $AD$ , dupla est ipsi  $DB$ ; Qualium partium 4.  
 est  $AD$ , talium 2. erit  $DB$ ; ac proinde talium 6, tota  $AB$ , & semi-  
 diameter  $AL$ , talium 3. Quare si  $AD$ , est 4. &  $AL$ , 3. erit  $LD$ , 1.  
 & idcirco  $LD$ , sexta pars erit rectae  $AB$ , quae fuit partium earun-  
 dem 6. & tertia pars rectae  $AL$ , quae fuit earundem partium 3.

$S$  i m i l i t e r, altitudo pyramidis  $HL$ , duas tertias partes  
 continebit ipsius diametri. Est enim  $HI$ , eadem, quae  $AD$ , conti-  
 neas duas tertias diametri, ex constructione.

$R$  vs vs, qualium partium 9. ponetur quadratum dia-  
 metri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyra-  
 midis. Nam proportio 9. ad 4. est du-  
 plicata proportionis 3. ad 2.  
 ut hic apparet 9.

6. 4.

Dd SCHO-

SCHOLION.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor trian-  
gula equilatera equalia, disponunturque, ut hac figura indi-  
cat, facile ex ipsis rite inter se compli-  
catis componetur Tetrædron, secun-  
dum totam soliditatem. Hanc vero pra-  
xim, & sequentes quatuor, quibus re-  
liqua quatuor solida regularia in materia quavis sensibili con-  
ficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durerō non ignobili scri-  
ptore.



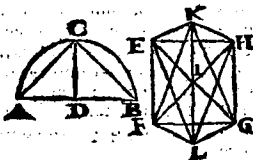
15.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere; &  
sphæra complecti, qua & pyramidem; &  
demonstrare, quod sphærae diameter poten-  
tia sit dupla lateris ipsius octaedri.

4. primi.

Si r sphærae, quæ constitutam pyramidem comprehen-  
dit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur  
ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC,  
connectanturq; rectæ AC, BC, quæ æquales inter se erunt.  
Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, uel BC, de-  
scribat ut super eam quadrat-  
um EFGH, in quo ducan-  
tur diametri EG, FH, se mu-  
tuo secantes in I: eruntque re-  
ctæ IE, IF, IG, IH, æquales,  
cum sint semidiametri circuli  
circa quadratum descripti, ut  
in 4. lib. demonstratum est.



Deinde ex I, in utranque partem ad planum quadrati  
erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL,  
æquales ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur  
ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH;  
LF,

LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum, quod queritur. Quoniam latera EI, IK, trianguli EIK, equalia sunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsius contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At uero EIH, eo quod sit equalis angulo GIH, sibi deinceps, ob equalitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) Erit & basis EK, basi EH, equalis: Eodemq; modo eidem EH, equalis erit KH; ideoque triangulum equilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triacula esse equalitera; atque adeo equalia triangulo ABH, cum illorum latera equalia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & equalibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphaera diametri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphaere AB, potentia duplam esse lateris EF, uel AC.

3. primi.

4. primi.

Quoniam IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL; (quod tres recte KI, IE, IL, equalis sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per punctum E, ex lemmate precedentis propos. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphaeram, quæ complectitur octaedrum constitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc sphaera equalis sit datæ sphaere, cuius diameter AB; (Nam cum recte AC, BF, equalis sint, ideoque ipsarum quadrata equalia. Sit autem tam quadratum recte AC, duplum quadrati recte AD, quam quadratum recte BF, quadrati recte EI; Erunt & recte AD, EI, hoc est, KI, semidiametri equalis. Quare & recte diametri AB, KL, equalis erunt; ac proinde sphaere ipsarum equalis existent.) comprehendet idem octaedrum data sphaera.

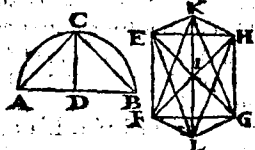


47. primi.

Quia vero quadratum rectæ AB, æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF, manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplum esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

**COROLLARIUM. I.**

Ex dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, BG, FH, secantes sese in L. Omnes enim anguli ad L, ostensu sunt recti.



Atque proinde, cum KI, recta sit ad lineas BG, HF, recta quæque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum; Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KL, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, ut paucis re complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, se mutuo ad angu-

los rectos secabunt; Quæ quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, ut ostendimus,) quadratum diametri HF, æquale existat quadrato laterum octaedri FK, KH. Ita enim efficitur, ut angulus, FKH, rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis.

**COROLLARIUM. II.**

Octaedrum dividitur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, uertices uero K, & L; altitudines denique, semidiametri KL, LL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana unius sunt similia & æqualia planis alterius, ut constat; cum sint triangula æquilatera, & æqualia; præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, ut est demonstratum.

**COROLLARIUM. III.**

Si tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquicertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. Quo-  
eniam igitur diameter sphæræ est potentia sesquialtera lateris tetraedri;

4. undec.

18. undec.

48. primi.

13. tersijde

edri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualem  
6. est quadratum diametri sphaerae. Rursus quia diameter sphaerae  
est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri  
talium partium 2. qualem 6. est quadratum diametri sphaerae. Igi-  
tur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium  
3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri  
potentia sesquitergium esse lateris octaedri.

14. terdec.

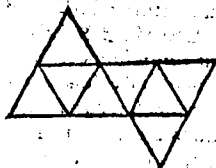
COROLLARIUM. IIII.

Denotat, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela  
est rectae FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectae GL: Brit  
planum EHK, per EH, & K. ductum plano FGL, per FG, GL,  
ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de ceteris basibus  
octaedri, efficiunt, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

15. undec.

SCHOLION.

Quod si ex materia aliqua  
constituantur octo triangula a-  
quilatera inter se aequalia, di-  
spendanturque, ut hac figura in-  
dicat, facile ex ipsis rite inter  
se complicatis componetur octae-  
dri secundum vocatam solidita-  
tem, ut ait Albertus Durerus.



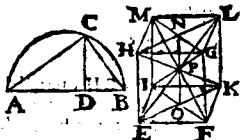
PROBL. 3. PROPOS. 15.

14.

CVBVM constituere; & sphaera com-  
plecti, qua & priores figuras; & demonstra-  
re, quod sphaerae diameter potentia sit tri-  
pla lateris ipsius cubi.

Si  $\tau$  sphaerae, quae praedictas figuras comprehendit, dia-  
meter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: & ex  
AB, auferatur tertia pars BD, ut sit AB, ipsius BD, tripla.  
Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur  
rectae AC, BC. Super rectam EF, quae rectae BC, sit aequa-  
lis, quadratum constituatur EFGH, super quod erigatur  
D d 3 perpen-

perpendicularares  $EI, FK, GL, HM$ , æquales quoque ipsi  $BC$ , quarum extrema coniungantur rectis  $IK, KL, LM, MI$ . Quoniam ergo anguli  $IEF, KFE$ , recti sunt, ex



defini. 3. lib. 11. erunt rectæ  $EI, FK$ , parallelæ sunt autem & æquales, quod utraque æqualis posita sit ipsi  $BC$ , hoc est, ipsi  $EF$ . Igitur &  $EF, IK$ , parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est  $EFKI$ ; In quo, cum lineæ  $EI, IK, KF$ , æquales sint ip-

si  $EF$ , omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum  $EIK, FKI$ , æquales sint oppositis rectis  $KFE, IEF$ . Igitur  $EFKI$ , quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt  $FKLG, GLMH, HMI$ ; Atque ideo &  $IKLM$ , quadratum erit, cum simile sit & æquale quadrato opposito  $EFGH$ . Est enim  $EL$ , solidum parallelepipedum, quod eius plana opposita sunt parallelæ, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ductæ. Quare cubus erit  $EL$ . Quem dico comprehendi sphaera diametri  $AB$ . Sicut enim planorum oppositorum  $EFKI; GHML$ , diametri  $EK, FI, GM, HL$ , per quæ ducantur plana  $EKLH, FIMG$ . Quia igitur tam planum  $EKLM$ , quam  $FIMG$ , cubum bisariam secat; utrumque per centrum cubi transibit, ex scholio propof. 32. lib. 11. per punctum uidelicet  $P$ , in quo, ex coroll. eiusdem propof. se mutuo quoque bisariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum sectio, recta scilicet  $NO$ , per idem punctum  $P$ , incedet. Quia uero plana  $EKLH, FIMG$ , rectangula sunt, (Cum enim  $HE$ , perpendicularis sit duabus rectis  $EI, EF$ , ob quadrata  $EM, EK$ ; perpendicularis quoque erit ad planum  $EK$ , ideoque ad rectam  $EK$ , ex defini. 3. lib. 1. Rectus ergo angulus est  $HEK$ . Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano  $EKLH$ , nec non & anguli in plano  $FIMG$ . Rectangula ergo sunt plana  $EKLH, FIMG$ , & æqualia, quod latera unius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri  $EL, HK, FM, GI$ , æquales, ut constet ex scholio propof. 34. lib. 1.

Ac

Ac proinde & semidiametri PE, PL, PH, PK, PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, sphaeram describet per omnes cubi angulos transeuntem: quam quidem æqualem esse sphaeræ diametri AB, ita demonstrabitur.

Cum quadratum rectæ EK, æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL. Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL: Est autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc est, quadrati rectæ BC. At, uero, eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6, ut est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipsius BD, sit tripla, erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt; Ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphaerarum, ideoque & ipsarum sphaeræ, æquales existunt.

Quia uero ostensum est quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL; manifestum est, diametrum sphaeræ potentia triplum esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphaera compleximus, &c. Quod erat faciendum.

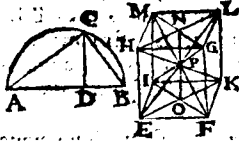
#### COROLLARIUM. I.

Ex demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bisariam in centro sphaeræ secare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bisariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseque mutuo bisariam secare in centro P. Quod uero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bisariam diuidatur; hac ratione ostendit. Duo anguli OPP, OPP, trianguli OPP, æquales sunt duobus angulis

19. primi.  
16. undec.

NMP, NPM, trianguli NMP: ( Nam angulus OFP, æqualis est al-

tetrio NMP, inter lineas FI, GM, quæ parallele sunt, cum sint communes, sectiones planorum parallelorum FFKI, GHML; & angulus OFP, æqualis est opposito ad verticem NPM ) Sunt autem & latera P.F, P.M, quibus adiacent, æqualia, cum sint semidiametri. Igitur & latera P.O, P.N, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademque est ratio de cæteris lineis copulgentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.



15. primi.

GOROLLARIUM. II.

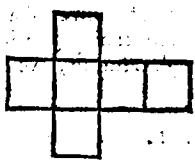
13. tertijde.

15. tertijde.

RVAVS potentia diametri sphaeræ, seu cubi, æqualis est potentis laterum tetraedri & cubi simul sumptis: Nam quatum paritum 7. est quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris tetraedri: Quatum vero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quæ admodum & quadratum diametri: Ac proinde quadratum diametri æquale est quadrato dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex sequenti circulo circa diametrum sphaeræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi vero BC. Per spicuum autem est, diametrum sphaeræ AB, posse & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, sit rectus.

47. primi.

SCHOLION.



QVOD si ex aliqua materia conspiciantur sex quadrata inter se æqualia, disponanturque, ut hæc figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicantur inter se. Efficietur enim

ex illis figura quedam solida octo angulos solidas continens instar tesserae cuiuspiam, ut constat.

16.

PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM constituere; & sphaera

sphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosædri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.

Sit sphæra, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quiora pars BD, ut AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta; At uero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcibus FG, GH, HI, IK, KF, bisariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX; quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntq; omnes inter se æquales; sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe EL, QR, EM, QS, EN, QT, EQ, QV, EP, QX. (quas tamen omnes, ut uitaremus confusum, non duximus.) binæ inter se æquales eunt: Ac proinde, cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoq; erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. Quia uero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: Eademq; ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto: conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficiunt hæc duo plana unum planum, per ea, quæ ad propos. 6. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere unum planum; nec non planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritq; æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta

11. quarsi.

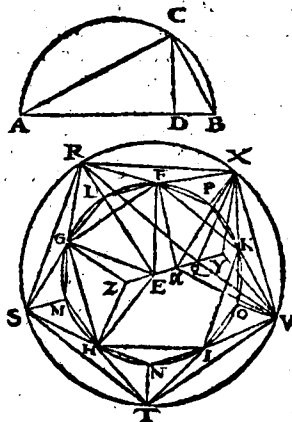
6. undec.

33. primi.

15. undec.

6. undec.  
33. primi.  
28. terijde.

puncta R, S, T, V, X, rectis RS, ST, TV, VX, XR. Quia igitur LR, PX, æquales sunt & parallelæ; si concipiatur duci recta LP, erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL: FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumento con-



cludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera equalia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XE. Quia igitur perpendicularis

LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK; & est LF, latus decagoni; erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR, quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 1. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus utriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia, cum eorum omnia latera equalia sint lateribus pentagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in utramque partem extendatur,

10. terijde

47. primi.

adatur, sintque rectę QY, EZ equales singule, lateri decagoni circuli FGHK, uel RSTVX; & connectantur rectę VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quomā ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni; & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; erit quadratum lateris pentagoni, XV, æquale quadratis rectarum QX, QY. Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectę XY, quod angulus XQY, rectus sit, ex defin. 3. lib. 1. (Nam cum plana circulatorum FGHK, RSTVX parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione; erit quoque EQ, ad illius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectę XF, æquale est quadrato rectę XV, proptereaque recta XY, rectę XV, æqualis; Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY; Ac proinde, triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectę RY, SY, TY, (quas tamen, ut uitaremus confusionem linearum, non duximus.) quatuor trianguła RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit, triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor trianguła HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus) quę omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc trianguła uiginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturque singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosædrum. Quod dico cōprehendi sphaera diametri AB.

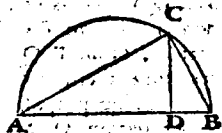
D. V. I. S. A. recta EQ, bisariam in α, ducantur rectę αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, triangułi αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, triangułi αQX, cum QV, QX, sint semidiametri circuli RSTVX;

10. verside.  
47. primi.

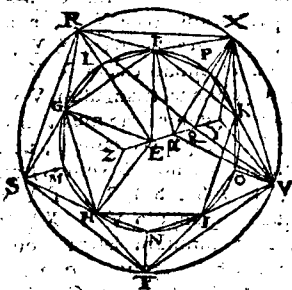


4. primi.

VX: Sunt autem & anguli  $\alpha$  QV, & QX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. Et sunt & bases  $\alpha$  V, & X, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex  $\alpha$ , Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ  $\alpha$  R, & S, & T, æquales & inter se, & ipsis  $\alpha$  V, & X. Rursus quia latera  $\alpha$  Q, QX, trianguli  $\alpha$  QX, æqualia sunt lateribus  $\alpha$  E, EF, trianguli  $\alpha$  EF, cum QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, divi-



4. primi.



sa sit bisariam in  $\alpha$ : Sunt autem & anguli  $\alpha$  QX, & EF, æquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. Erunt quoque bases  $\alpha$  X, & F, æquales: Eodemque modo si ex  $\alpha$ , E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur  $\alpha$  G, & H, & I, & K, æquales ipsi  $\alpha$  X; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam vero QE, semidiameter est, hoc

9. serij dec.

est, latus hexagoni circuli FGH I K; & EZ, latus decagoni eiusdem circuli, erit QZ, divisa in E, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens Ea, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta  $\alpha$  Z, quintuplum potest eius, quod ex Ea, describitur, quadrati: Potest autem & recta  $\alpha$  F, quintuplum eiusdem quadrati rectæ Ea. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ  $\alpha$  E, ex scholio propof. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla sit ipsius Ea; erunt quadrata rectarum EF, Et, simul quintupla quadrati rectæ Ea. Cui ergo quadrati rectarum EF, Ea, æquale sit quadratum rectæ  $\alpha$  F, erit quoque quadratum rectæ  $\alpha$  F, quintuplum quadrati rectæ Ea.) Igif æqualia sunt quadrata rectarum  $\alpha$  Z, & F, ac proinde rectæ ipse  $\alpha$  Z, & F, æquales erunt. Cuiusmodi ZY, bisariam secet in  $\alpha$ ; (propterea quod

47. primi.

quo si æ qualibus  $\alpha B$ , &  $Q$ , æquales rectæ addantur  $E Z$ ,  $Q Y$ , totæ  $Z \alpha$ ,  $Y \alpha$ , æquales fiant. ) Erunt omnes rectæ duarum ex  $\alpha$ , ad omnes angulos Icosædri æquales. Quo circa sphaera descripta circa diametrum  $Z Y$ , ex centro  $\alpha$ , per omnes angulos Icosædri constituitur transibit. Hanc ergo sphaeram dico æqualem esse sphaeræ diametri  $A B$ .

Cum sit ut  $\alpha Z$ , ad  $\alpha E$ , ita  $Y Z$ , dupla ipsius  $\alpha Z$ , ad  $Q E$  duplam ipsius  $\alpha E$ ; Ac propterea ut quadratum rectæ  $\alpha Z$ , ad quadratum rectæ  $\alpha E$ , ita quadratum rectæ  $Y Z$ , ad quadratum rectæ  $Q E$ ; sit autem quadratum rectæ  $\alpha Z$ , ostensum quintuplum quadrati rectæ  $\alpha E$ : Erit quoque quadratum rectæ  $Y Z$ , quintuplum quadrati rectæ  $Q E$ , hoc est, quadrati rectæ  $B C$ ; quod recta  $Q E$ , æqualis sit posita semidiametro  $E F$ , hoc est, rectæ  $B C$ : Est autem & eiusdem quadrati rectæ  $B C$ , quintuplum quadratum rectæ  $A B$ . ( Nam cum, ex coroll. propof. 8. lib. 6 sit ut  $A B$ , ad  $B C$ , ita  $B C$ , ad  $B D$ ; erit ut  $A B$ , ad  $B D$ , ita quadratum rectæ  $A B$ , ad quadratum rectæ  $B C$ , ex coroll. propof. 10. lib. 6. Ac proinde existente  $A B$ , quintupla ipsius  $B D$ , erit etiam quadratum rectæ  $A B$ , quintuplum quadrati rectæ  $B C$ . ) Quadratur igitur rectarum  $Y Z$ ,  $A B$ , æqualia sunt, ideoque & rectæ  $Y Z$ ,  $A B$ ; Ac propterea & sphaeræ circa ipsas, æquales erunt. 15. quinti. 22. sexti.

Quoniam denique diameter sphaeræ  $A B$ , Rationalis ponitur; ( Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosædri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur. ) potestque quintuplum quadrati rectæ  $B C$ , hoc est, rectæ illi æqualis  $E F$ ; erit quoque semidiameter  $E F$ , circuli  $F G H I K$ , Rationalis. ( Nam quadrata rectarum  $A B$ ,  $E F$ , cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5 ad 1. vel 10. ad 2. erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ  $A B$ ,  $E F$ , commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo  $A B$ , sit Rationalis, erit &  $E F$ , Rationalis. ) Quare & tota diameter circuli  $F G H I K$ , Rationalis erit; Ac propterea  $F G$ , latus pentagoni, hoc est, latus Icosædri, Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosædru igitur constituimus, & sphaera sumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonstrauiamus, quod Icosædri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. quod erat faciendum.

6. decimi

COROL.

COROLLARIUM I.

Ex dictis inferitur, sphaerae diametrum esse potentia quintuplâ semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos inedit. Ostensum enim est, quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati, rectae BC, hoc est, semidiametri EF.

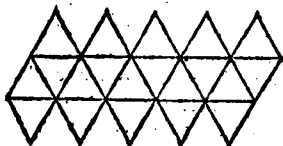
COROLLARIUM. II.

Item manifestum est, sphaerae diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli. Nam YZ, idiameter sphaerae componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHK.

COROLLARIUM. III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallelâ. Nâ recta RX, ostensa est parallelâ rectae, quae ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectae LP, sit quoque parallelâ recta HI, ut in scholio propos. 17. lib. 3. demonstravimus; (eo quod aequales sint arcus HL, LP; continet enim uterque tres decimas partes totius circumferentiae,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eadêq; est ratio de ceteris lateribus oppositis.

SCHOLIUM.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula aequilatera inter se aequalia, disponanturque, ut hac figura indicat, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

cundam totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

17.

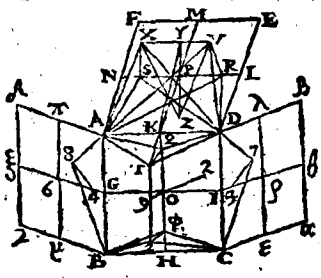
PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphaera complecti, qua & praedictas figuras; & demonstrare, qd Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quae vocatur Apotome.

SIT

**S**IT una basis cubi data sphaera comprehensi, quadratum  $ABCD$ , cui insitit aliud æquale ad rectos angulos  $ADEF$ , ut sit communis horum sectio recta  $AD$ . (Insitūt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, ut cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis  $EFGH$ , quatuor lineæ  $EL, FK, GL, HM$ , ipsi basi  $EFGH$  perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin  $EFGH$ .)

Diuisis itaque cunctis  
lateribus bitariā in pun-  
ctis G, H, I, K, L, M, N,  
quæ rectis connectan-  
tur secātibz sese in O,  
P, cētris quadratorum,  
ut constat ex demon-  
stratione octauī pro-  
blematis lib. 4. Scep-  
torem OK, PL, PN, extre-  
ma ac media ratione



in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorū educantur extra cubū perpendiculares QT, RV, SX, æquales segmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, esse unū ex duodecim përagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri cōstituēdi. Q  $\hat{e}$  enim pentagonū ATDVX, sit in uno plano, ita ostendetur.

Cū RV, SX, sint ad quadratū ADEF, rectæ, ipsæ erūt paral-  
lelæ; Ac, p̄inde, cū sint æquales, ( quia segmēta maiora PR,  
PS, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cum & lineæ  
sectæ PL, PN, æquales sint. ) erūt quoq; cōiungētes rectæ  
RS, VX, æquales & parallelæ: Est aut̄ & AD, eide m RS,  
siue LN, parallela, eo qđ AN, DL, parallelæ sint & æqua-  
les. Igit̄ & AD, VX, parallelæ sūt; Ac, p̄pterea rectę cōiun-  
gētes AX, DV, in eodē cū ipsis erūt plano; ideoq; trapeziū  
ADVX, in uno existet plano: Est aut̄ & triagulu A T D, in  
uno plano. Dico qđ & in eodē plano cū trapezio ADVX.  
Ex P, ducat PY, parallela ipsi RV, q̄ erit recta ad quadratū  
ADEF, qđ ad idē recta sit RV: Et cōnectant rectę KT, AY.  
Qm̄ igitur est ut OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob sectionē  
rectæ

8. Under.

6. Index.

13. primi.

33. primi.

9. undec.

7. undec.

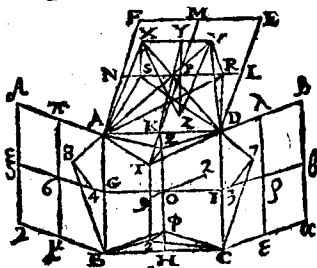
8. ~~un dec.~~

recte

sectæ  $OK$  : Est autem  $KP$ , ipsi  $OK$ , æqualis ; ( sunt enim dimidia latera cubi ; ) &  $PY$ , ipsi  $OQ$ , ( cum æqualis sit ipsi  $RV$ , quæ posita fuit æqualis ipsi  $OQ$ , maiori segmento ; Erunt quoque ut  $KP$ , ad  $PY$ , ita  $OQ$ , hoc est,  $QT$ , illi æqualis, ad  $QK$ . Quare cum triangu-  
la  $PKY$ ,  $QTK$ , duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad unum angulum  $K$ , composita, ita ut homologa latera sint parallela, nempe  $PK$ , &  $QT$ , inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum  $ABCD$  ; &  $PY$ ,  $QK$ , inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum  $ADEF$  : Erunt reliqua latera  $KY$ ,  $KT$ , in rectam lineam collocata ; Ac propterea recta  $TY$ , in uno erit plano, ideoque planum  $ATD$ , & planum  $ADVX$ , unum planum constituent, per rectas  $TY$ ,  $AD$ , ductum. Quocirca pentagonum  $ATDVX$ , in uno existit plano.

Quod vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera  $AN$ ,  $NS$ , trianguli  $ANS$ , æqualia sint lateribus  $AK$ ,  $KQ$ , trianguli  $AKQ$  ; ( Sunt enim  $AN$ ,  $AK$ , dimidia la-

tera cubi, &  $NS$ ,  $KQ$ , segmenta minora rectarum æqualium sectarum. ) & anguli  $ANS$ ,  $AKQ$ , recti ; si ducatur recta  $AQ$ , erunt bases  $AS$ ,  $AQ$ , æquales. Rursus cum latera  $AS$ ,  $SX$ , trianguli  $ASX$ , sint æqualia lateribus  $AQ$ ,  $QT$  ; tria-



ulig  $AQT$  ; ( Nam rectæ  $AS$ ,  $AQ$ , ostensæ sunt æquales, &  $SX$ ,  $QT$ , sunt segmenta maiora rectarum æqualium sectarum ) & anguli  $ASX$ ,  $AQT$ , recti, ex defin. 3 lib. 1. Erunt quoque bases  $AX$ ,  $AT$ , æquales. Quod si ducatur recta  $DQ$ , ostendemus eodem argumento, rectam  $DT$ , rectæ  $AT$  ; si uero ducatur recta  $DR$ , rectam  $DV$ , rectæ  $DT$ , esse æqualē. Sunt igitur pentagoni quatuor latera  $XA$ ,  $AT$ ,  $TD$ ,  $DV$ , æqualia ; quibus etiam æquale ostendemus reliquum  $V$ , hac ratione. Quadrata rectarum  $PN$ ,  $NS$ , simul tripla sunt quadrati rectæ  $PS$ , hoc est, quadrati rectæ  $SX$  : Est autem quadrato rectæ  $PN$ , æquale quadratum rectæ  $AN$ . Igitur & quadra-

6. undec.

33. sexvi.

1. undec.

4. primi.

4. primi.

4. sexviii.

quadrata rectarum  $AN$ ;  $NS$ , simul tripla sunt quadrati rectæ  $SX$ . Cum ergo quadratis rectarum  $AN$ ,  $NS$ , æquale sit quadratum rectæ  $AS$ ; erit quoque quadratum rectæ  $AS$ , triplum quadrati rectæ  $SX$ ; Ac proinde quadrata rectarum  $AS$ ,  $SX$ , simul; quadrupla eiusdem quadrati rectæ  $SX$ : Est autem quadratum rectarum  $AS$ ,  $SX$ , æquale quadratum rectæ  $AX$ . Quadratum ergo rectæ  $AX$ , quadruplum quoque erit quadrati rectæ  $SX$ , hoc est, quadrati rectæ  $P$ , hoc est, quadrati rectæ  $XY$ . Sunt enim rectæ  $P$ ,  $S$ ,  $X$ ,  $Y$ , æquales. Cum igitur & quadratum rectæ  $VX$ , quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ  $XY$ ; ex scholio propof. 4. lib. 2. quod  $VX$ , dupla sit ipsius  $XY$ ; Erunt quadrata rectarum  $AX$ ,  $VX$ , æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ æquales. Quare cum &  $XA$ ,  $AT$ ,  $TD$ ,  $DV$ , ostensa sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum  $ATDVX$ .

Quod autem & equiangulū sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis  $AR$ ,  $AV$ ; cum  $PN$ , secta sit in  $S$ , extrema ac media ratione, scilicet addita  $PR$ , æqualia maiori segmento  $PS$ ; erit quoque  $NR$ , secta in  $P$ , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit  $NP$ . Quadrata igitur rectarum  $NR$ ,  $R$ ,  $P$ , simul tripla sunt quadrati rectæ  $NP$ , hoc est, quadrati rectæ  $AN$ : Est autem quadratum rectæ  $R$ ,  $V$ , æquale quadrato rectæ  $R$ ,  $P$ . Ergo & quadrata rectarum  $NR$ ,  $R$ ,  $V$ , tripla sunt quadrati rectæ  $AN$ ; Ac proinde quadrata rectarum  $NR$ ,  $R$ ,  $V$ ,  $AN$ , quadrupla sunt eiusdem quadrati rectæ  $AN$ : Sunt autem quadrata rectarum  $NR$ ,  $AN$ , æqualia quadrato rectæ  $AR$ . Igitur & quadrata rectarum  $R$ ,  $V$ ,  $AR$ , quadrupla sunt quadrati rectæ  $AN$ . Cum ergo quadratis rectarum  $AR$ ,  $R$ ,  $V$ , æquale sit quadratum rectæ  $AV$ ; Erit quoque quadratum rectæ  $AV$ , eiusdem quadrati rectæ  $AN$ , quadruplum. At uero eiusdem quadrati rectæ  $AN$ , quadruplum est quadratum rectæ  $AD$ , ex scholio propof. 4. lib. 2. quod  $AD$ , dupla sit ipsius  $AN$ . Aequalia igitur sunt quadrata rectarum  $AV$ ,  $AD$ , idcirco; & rectæ  $AV$ ,  $AD$ , æquales. Simili argumento, ductis rectis  $DS$ ,  $DX$ , ostendemus  $DX$ ,  $DA$ , æquales esse; ac propterea tres rectæ  $AD$ ,  $AV$ ,  $DX$ , inter se esse æquales. Quoniam igitur latera  $TA$ ,  $TD$ , trianguli  $TAD$ , æqualia sunt lateribus  $DV$ ,  $VX$ ; trianguli  $DXV$ ; & bases  $AD$ ,  $DX$ , æquales quoque: Erunt & anguli  $ATD$ ,

E c D V X,

47. primi.

47. primi.

34. primi.

5. tertijdec.

4. tertijdec.

47. primi.

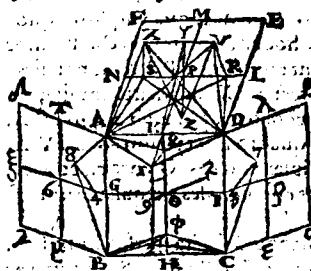
47. primi.

8. primi.

DVX, æquales Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV; Ac proinde, cum in pentagono æquilatere ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, ipsum erit æquiangulum.

7. tertij dec.

QVOB. si sumantur alia duo cubi quadrata  $C\alpha\beta D$ ,  $B\gamma\delta A$ , recta ad quadratum ABCD, in communibus sectio-



nibus CD, AB, quorū singula latera bifariam secantur in  $\epsilon, \theta, \lambda, \kappa, \mu, \xi, \pi, \Gamma$ , punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum, centris  $\rho, \sigma$ . Secantur deinde OH, OK,  $\rho, \sigma, \Gamma$ , extrema ac media ratione in punctis  $\phi, \psi, \chi, \eta, \theta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi, \Gamma$ , ex quibus

bus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exterioris, perpendiculares  $\phi, \psi, \chi, \eta, \theta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi, \Gamma$ , æquales segmentis maioribus  $\phi O, \psi O, \chi O, \eta O, \theta O, \kappa O, \lambda O, \mu O, \nu O, \xi O, \pi O, \Gamma O$ , coniunganturque rectæ T $\phi$ ,  $\psi \Gamma$ ,  $\chi \delta$ ,  $\eta \epsilon$ ,  $\theta \zeta$ ,  $\kappa \delta$ ,  $\lambda \epsilon$ ,  $\mu \zeta$ ,  $\nu \delta$ ,  $\xi \epsilon$ ,  $\pi \zeta$ ,  $\Gamma \delta$ , demonstrabimus eadem ratione pentagona T $\phi$  C $\gamma$  D, T $\psi$  B $\delta$  A, æquilatera esse & æquiangulara, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt etiam pentagona tangētia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo coherentia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methode fabricentur alia nouem similia pentagona tangētia reliqua nouē cubi latera, constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphaera comprehendit, quæ & cubum, & præcedentes figuras, hac arte demonstrabimus.

INTELLIGANTUR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorū latera bifariam secantes ducuntur, nempe planū ADEF, & eius oppositū, planis ductis per rectas KM, LN; Itē planū ABCD, & eius oppositū, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniā igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sunt basib⁹ cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD: Erunt & communes eorū sectiones ad eadē cubi plana rectæ. Quare cū YP, recta sit ad planū ADEF, ipsa producta uerius Z, erit communis sectio plano-

19. undec.

planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodē pacto, si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis OQ, erit ipsa, communis sectio planorum quę per rectas GI, HK, ducuntur. Quia uero dictę cōmunes sectiones, & diametri cubi se mutuo bisariam secant, secant se mutuo bisariam in Z. Sciant autem sese diametri cubi bisariam in centro sphaerę cubum complectentis, ex coroll. 1. propol. 15. huius lib. Punctū igitur Z centrum erit sphaerę circa cubum descriptę. Ac proinde omnes rectę ex Z, ad omnes angulos cubi, ductę inter se, quales erunt: Quibus omnibus & quales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos, Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. Quoniam parallele sunt KP, OZ, quod utraq; recta sit ad planum ABCD, Item parallele sunt OK, ZP, quod utraq; recta sit ad planum ADE F, erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrammum, ac propterea PZ, equalis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateris cubi: Est autem & PY, ipsi PR, æqualis. Totā ergo ZY, totū NR, equalis erit. Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectę NP, quod NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erunt quoque quadrata rectarum ZY, PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectę PZ: (Est enim YX, equalis ipsi PS, hoc est, ipsi PY:) Est autem quadratis rectarum ZY, YX, equalis quadratum rectę ZX. Igitur & quadratū rectę ZX, triplum erit quadrati rectę ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoque quadratum semidiametri sphaerę cubum cōprehēdit. (Nam ut diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; Ac proinde ut quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratū semidiametri ad quadratum dimidij lateris. Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Aequale igitur est quadratum rectę ZX, quadrato semidiametri sphaerę, seu cubi; Ac propterea ZX, equalis semidiametro. Eadē ratione erit ducta recta ZV, semidiametro equalis. Vel certe, quia cum latera ZY, YX, triāguli ZYX, equalia sint lateribus ZY, YV, triāguli ZYV, & anguli cōtenti recti. (cum. n. PY, sit perpen-

39. undec.

6. undec.

34. primi

A. versydec.

47. primi.

15. primi

22. sexti.

15. versydec.





RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR: Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. ( Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphaerae, quae Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius. ) Igitur maius segmentum SR, hoc est, dodecaedri latus XV, illi aequale, Irrationalis est linea, quae uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphaera complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

6. tertijdec.

### COROLLARIUM I.

Cum ergo demonstratum sit; recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam RS: Sic autem LN, aequalis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti.

### COROLLARIUM II.

Sic quoque latus cubi aequale est lineae rectae subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum aequale rectis AV, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

Quoniam uero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum latus pentagoni; ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphaerae.

8. tertijdec.  
5. tertijdec.

### COROLLARIUM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis aequalibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VZ, TZ, quae uidelicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB; aliaque quatuor reperiuntur super reliquis quatuor bases cubi, quorum, quae super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos, a lineis

Ecce 3 rectis,

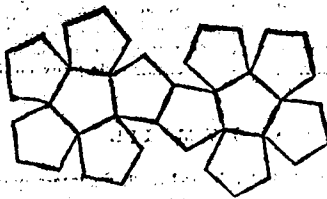
rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ  $YZ$ , &  $Z$ , &c. quæ ut demonstratum est, se mutuo interfecant in centro  $Z$ . Dico se mutuo secare bisariam & ad angulos rectos: bisariam quidem, quoniam cum rectæ  $PZ$ ,  $OZ$ , æquales sint dimidio lateri cubi; &  $YP$ , &  $O$ , æquales maioribus segmentis æqualibus  $PS$ ,  $OZ$ ; sunt totæ  $YZ$ , &  $Z$ , æquales; eademque ratione reliquæ lineæ ex  $Z$ , ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bisariam in centro  $Z$ , mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo  $KOZP$ , angulus  $OZP$ , rectus est, cum opponatur recto  $OKP$ . Non aliter ostenduntur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficiere angulos rectos. Oēs enim parallele sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constitutæ, ut perspicuum est.

**COROLLARIUM. IIII.**

**Demonstratur** constare, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bisariam, & ad angulos rectos, ut dictum est, secetur extrema at media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Cum enim quadrata rectarum  $ZY$ ,  $YP$ , tripla ostensa sint quadrati rectæ  $PZ$ ; erit  $ZY$ , secta in  $P$ , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit  $PZ$ , ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit ut  $ZY$ , ad  $ZP$ , ita  $ZP$ , ad  $PY$ ; ideoque ut dupla ipsius  $ZY$ , nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bisariam, ad duplā ipsius  $ZP$ , nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius  $ZP$ , ad duplam ipsius  $PY$ , hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bisariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eiusdem sphaeræ.

15. quinti.

**SCHOLIUM.**



**Quod** si ex aliqua materia cōficiantur duodecim pentagona æquilatæra, & æquiangula, inter se æqualia, disponanturq; ut hac figura indicat, cōponetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem.

tem, si rite inter se complacentur.

18.

**PROBL. 6. PROPOS. 18.**

**LATERA** quinque figurarum exponere,

nere, & inter se comparare.

SIT spherę diameter  $AB$ , quę in  $C$ , secetur bisariam; In  $D$ , utro ita, ut  $BD$ , sit ipsius pars tertia; In  $E$ , denique ita, ut  $BE$  sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa  $AB$ , semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex  $C, D, E$ , ipsi  $AB$ , perpendiculares  $CF, DG, EH$ ; connectanturque rectę  $AF, BF, AG, BG, AH, BH$ . Post hæc ex  $HA$ , abscindatur  $HI$ , æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est  $BH$ ; connectaturque recta  $BI$ . Postremo  $BG$ , secetur extrema ac media ratione in  $K$ , sitque maius segmentum  $BK$ .

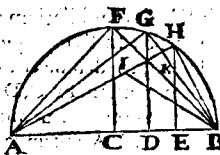
Quod igitur attinet ad expositionem laterũ prædictarũ figurarum, dico  $AG$ , esse latus Pyramidis, seu Tetraedri;  $AF$ , latus Octaedri;  $BG$ , latus cubi;  $BI$ , latus Icosaedri;  $BK$ , denique latus Dodecaedri. Quoniam  $AG$ , media proportionalis est inter  $BA, AD$ , ex coroll. propof. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propof. 20. eiusdẽ lib. ut  $BA$ , ad  $AD$ , ita quadratũ rectę  $BA$ , ad quadratũ rectę  $AG$ : Est autem  $BA$ , ipsius  $AD$ ; sesquialtera; cum talium partium 2 sit  $AD$ , qualium 3, est  $BA$ . Igatur & quadratum rectę  $BA$ , sesquialterum est quadrati rectę  $AG$ ; Ac proinde cum diameter spherę sit potentia sesqui altera lateris Tetraedri; Erit  $AG$ , latus Tetraedri. 13. serijdec.

Rursus quoniã  $AF$ , est media proportionalis inter  $BA, AC$ , ex eodẽ coroll. ppos. 8. lib. 6. Ac proinde ut  $BA$ , ad  $AC$ , ita quadratũ rectę  $BA$ , ad quadratũ rectę  $AF$ , ex adducto coroll. propof. 20. lib. 6. Est autẽ  $BA$ , ipsius  $AC$ , dupla: Erit quadratũ rectę  $BA$ , duplũ quadrati rectę  $AF$ . Quare cum diameter spherę potentia sit dupla lateris Octaedri; Erit  $AF$ , latus Octaedri. Eodẽ modo erit  $BF$ , latus Octaedri. 14. serijdec.

Deinde cũ  $BG$ , sit media proportionalis inter  $AB, BD$ , ideoque ut  $AB$ , ad  $BD$ , ita quadratũ rectę  $AB$ , ad quadratum rectę  $BG$ , ex præfatis duobus corollarijs lib. 6. Sit autem  $AB$ , ipsius  $BD$ , tripla, ex constructione: Erit quadratum rectę  $AB$ , triplum quadrati rectę  $BG$ . Quocirca cum spherę diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit  $BG$ , latus cubi. 15. serijdec.

PRAETEREA quia, ex eisdem corollarijs,  $BH$ , est media proportionalis inter  $AB, BE$ , atque idcirco ut  $AB$ , ad  $BE$ ,

ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Est autem, ex constructione A B, ipsius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter spheræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosædri ambientis, ex coroll. 1. propof.



6. huius lib. Erit B H, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli: Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. Igitur latus pentagoni poterit & B H, & H I, simul; Ac proinde cum quadratum rectæ B I, æquale sit quadratis rectarum B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiusdem. Quam obrem B I, latus est Icosædri.

D E N I Q V E, cum B G, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius segmentum, latus Dodecaedri in eadem spherâ descripti, ex coroll. 1. propof. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem spherâ descriptarum.

Q U O D uero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit, diametrum spheræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia uero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perspicuum est, qualium partium 6.

Diamet. 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse Tetraed. 4. quadratum lateris Tetraedri; talium uero 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi, talium 2.

Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitercium lateris Octaedri, potentia uero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex spheræ diametro descripta, proportio nem inter se habent, quam numerus ad numerum; Ac propterea diameter spheræ, & latera dictarum figurarum linee sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter spheræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia.

10. tertij dec.

47. primi.

16. tertij dec.

6. decimi.

tionalia; Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Erunt huiusmodi lineę, nimirum diameter spherę, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

9. decimi.

A T uero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor; hoc uero, Apotome, ut demonstratum est, nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum sint diametro spherę commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum. ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

S E D neque inter se ullo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo, quod latus Icosaedri Minor sit. Quod est absurdum. Nā ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineę Irrationales prorsus inter se differentes, ita ut neutra sit eadem alteri.

104. decimi

106. decimi

106. decimi

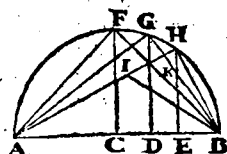
I T A Q U E quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro spherę, ideoque Rationalia existant; duo uero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, ut latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; Hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quę forte causa fuit, cur Euclides non eodem

eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propof. 28. lib. 3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quam BG, cubi latus.

LATIVS autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri BI, hac arte demonstrabimus.



Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD, & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cum nōcupla propor-

tio sit duplicata proportionis triplæ ut hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. est quadratum rectæ AB, taliū 3. est quadratum rectæ BG, quod illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cū equalia sint quadrato rectæ BG. Igitur si auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam uero quadratum rectæ AB, quintuplum est quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratū rectæ GD, maius est quadrato rectæ BH, ideoque recta GD, maior, quam recta BH. Rursus quia diameter s. hære AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, quo Icosædron constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propof. 16. huius lib. constat latus decagoni HI, minus esse tertia parte rectæ AB, hoc est. minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus

20. sexti.

15. septi dec.

8. quinti.

10. quinti

duabus tertijs partibus, nempe ipsi  $AD$ ; Ac propterea  $BH$ , reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi  $BD$ ; Atque adeo, cum quadratum rectæ  $AB$ , noncuplum sit ostensum quadrati rectæ  $BD$ , erit idem quadratum rectæ  $AB$ , noncuplum quadrati rectæ  $BH$ . Quod est absurdum. quintuplū enim est demonstratū. Non ergo  $HI$ , tertia pars est ipsius  $AB$ : Sed neque maior tertia parte. Si enim recta  $HI$ , dicatur maior tertia parte rectæ  $AB$ , & proinde dupla ipsius  $HI$ , maior quam duæ tertiæ, hoc est, quam  $AD$ , erit  $BH$ , minor quam tertia pars  $BD$ . Quare quadratum rectæ  $AB$ , maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ  $BD$ . Quod magis est absurdum. Non igitur maior est  $HI$ , tertia parte ipsius  $AB$ : Sed neque æqualis tertiæ parti, ut ostendimus. Minor ergo est quam tertia pars, hoc est, quam  $BD$ . Itaque cum rectæ  $GD$ ,  $DB$ , maiores sint rectis  $BH$ ,  $HI$ , ut demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: Est autem quadratum rectæ  $BG$ , æquale quadratis rectarum  $GD$ ,  $DB$ ; & quadratum rectæ  $BI$ , quadratis rectarum  $BH$ ,  $HI$ . Quadratum ergo rectæ  $BG$ , maius quoque erit quadrato rectæ  $BI$ ; Ac proinde recta  $BG$ , nempe latus cubi, maior erit quam recta  $BI$ , latus scilicet Icosaedri.

47. primi

**M A T H** S denique esse latus Icosaedri  $BI$ , latere Dodecaedri  $BK$ , hæc ratione patefiet. Cum rectæ  $BG$ , diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit  $BK$ , & minus  $GK$ ; erit rectangulum sub  $BG$ ,  $BK$ , maius rectangulo sub  $BG$ ,  $GK$ ; atque adeo rectangula sub  $BG$ ,  $BK$ , & sub  $BG$ ,  $GK$ , simul maiora duplo rectanguli sub  $BG$ ,  $GK$ : Est autem rectangulis sub  $BG$ ,  $BK$ , & sub  $BG$ ,  $GK$ , æquale quadratum rectæ  $BG$ ; Et duobus rectangulis sub  $BG$ ,  $GK$ , æqualia sunt duo quadrata rectæ  $BK$  (Nā cū sit, ut  $BG$ , ad  $BK$ , ita  $BK$ , ad  $GK$ ; erit quadratū rectæ  $BK$ , æquale rectangulo sub  $BG$ ,  $GK$ ; ideoque duo quadrata rectæ  $BK$ , æqualia duobus rectangulis sub  $BG$ ,  $GK$ .) Maius igitur quoque est quadratū rectæ  $BG$ , duobus quadratis rectæ  $BK$ ; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ  $BG$ , sex quadratis rectæ  $BK$ : Atqui tribus quadratis rectæ  $BG$ , æqualia sunt quinque quadrata rectæ  $BH$ . (Cum enim quadratum rectæ  $AB$ , triplum sit quadrati rectæ  $BG$ , & quin-

2. secundi

17. sexti.



& quintuplum quadrati rectæ B H ; sunt tam tria quadrata rectæ B G , quam quinque quadrata rectæ B H , equalia eidem quadrato rectæ A B , ideoque tria illa his quinque equalia . ) Igitur & quinque quadrata rectæ B H , maiora erunt sex quadratis rectæ B K ; Ac proinde unum quadratum rectæ B H , maius erit uno quadrato rectæ B K . ( si namque equalis esset quadratum rectæ B H , quadrato rectæ B K , uel minus ; forent quinque quadrata rectæ B H , minora sex quadratis rectæ B K . quod est absurdum , cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata . ) Quam ob rem & recta B H , maior erit quam recta B K ; Ac propterea cum B I , maior sit quā B H , multo maior erit B I , latus uidelicet Icosaedri , quam B K ; latus Dodecaedri . Latera igitur quinque figurarum exposuimus , & inter se comparauimus . Quod erat faciendum .

S C H O L I O N .

**I N T E R P R E T E S** hoc loco demonstrant , præter dictas quinque figuras , non posse aliam constitui figuram solidam , quæ planis & æquilateris & equiangularis cōtineatur , inter se equalibus ; hac fere ratione .

Ex duobus triangulis , vel ex duabus figuris alijs , solidus angulus constitui non potest , cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem .

Ex tribus autem triangulis æquilateris , constat pyramidis angulus ;

Ex quatuor , Octaedri angulus ;

Ex quinque angulus Icosaedri ;

Ex sex autem huiusmodi triangulis ad idē punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus . Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti , ex coroll. 3. propof. 32. lib. 1 . Erunt eiusmodi anguli sex , duodecim tertie partes unius recti , hoc est , quatuor rectis æquales . Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur . Nam solidus omnis angulus , minoribus quam quatuor rectis angulis continetur . Multo ergo minus ex pluribus , quam sex planis eiusmodi angulis , solidus angulus constabit .

Ex tribus dāinde quadratis , cubi angulus conficitur . Ex quatuor

quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quā quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & equiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, ut ostendimus ad propof. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnū rectum, ac propterea quintam partem vnus recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnus recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cum enim vnus, ut dictum est, maior sit recto, eo quod contineat vnum rectum, & insuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex alijs figuris æquilateris, & equiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cum sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, ut ad propof. 32. lib. 1. est demonstratum; Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac propterea duas partes sextas vnus recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus eiusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & equiangulis inter se equalibus contineatur.

Nam si tria triangula æquilatera & equalia cocant in vnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

Si vero quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

Si denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosædri viginti triangulis eiusmodi contentum.

**Q**UOD si tria quadrata equalia coeant in vnum punctū, ut constituent angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

**P**OSTREMO, si tria pentagona aequilatera, & equiangula, inter se equalia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

**H**OC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figura regularis habeatur.

**S**I enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnus basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnus lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.

**E**XEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnus trianguli, vt in 3 sunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modū & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum cōponentia multiplicentur in vnus quadrati latera, nempe in 4. sunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnus trianguli, sunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnus trianguli, sunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnus pentagoni, sunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

**Q**UOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandae sunt omnes bases in vnus basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnus anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt angulum solidum constituendum, vt  
numerus

numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

**EXEMPLVM.** Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, sunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli. constituunt unum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum unius quadrati, sunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli efficiunt unum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, sunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri.) efficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, sunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri.) producant 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angularium unius pentagoni, sunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

ELEMENTI DECIMITERTII FINIS.



# EVCLIDIS

ELEMENTVM XIII.

ET SOLIDORVM QVARTVM,

Vt quidam arbitrantur : vt alij uero ,

Hypsiclis Alexandrini de quin-  
que corporibus .

LIBER PRIMVS.



PROOEMIVM HYPsiclis ALE-  
xandrini ad Protarchum .



**B**ASILIDES Tyrinus, Protar-  
che, Alexandriam profectus, pa-  
trique nostro ob disciplina societa-  
tem commendatus, longissimo pere-  
grinationis tempore cum eo uersa-  
tus est. Cumq; differerent aliquan-  
do de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri  
& Icosaedri eidem sphaera in scriptorum, quam haec in-  
ter se habeant rationem, censuerunt ea non recte tra-  
didisse Apollonium; quae a se emendata, ut pater meus  
dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi  
in alterum librum ab Apollonio editum, qui demon-  
strationem accurate complectebatur de re proposita,  
ex eiusque problematis indagatione magnam equidem

capit

corpore uoluptatem. Illud certe ab omnibus perspicere potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus, Quod autem diligenti, quantum conicere licet, studio nos postea scripsisse uidemur, id monimentiis consignatum tibi dedicandum duximus; ut qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum uel maxime in Geometria uersatus, scite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam uero, quæ tibi cum patre fuit, uitæ consuetudinem, quaque nos complecteris, beneuolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, ut prooemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TR E D E C I M libri hactenus expositi ab omnibus Euclidis ascribuntur: Dua uero subsequentes a plerisque Hypsicle Alexandrino recte, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidem priori inter se comparantur Icosædron, & Dodecaedron, eam secundum superficies, quam soliditates: In posteriori uero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium uel in se intra aliam; ut hi duo libri sint instar appendicis cuiusdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scilicet non inuicunda, quæ spectant ad comparationes distorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones unus in alio; quatuor enim propositionibus dumtaxat liber hic quatuordecimus, quinque uero problematibus decimus quintus absolvitur: Visum est, ut aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo uberius de dictis figuris regularibus in uniuersum disserere, proponendo maria theorematum, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussacem Candallam, qui diligentem operam, & sedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quam plurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; uerum etiam integrum librum, qui decimus sextus est ordine adiectus, in quo proprietas illu-

propter de dictis corporibus proponit. Ceterum præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hac lib. 1. diffinitur de comparatione manus Icosædri & Dodæcaedri, facile intelligi potest ex eius proæmio ad Protarchum, quod superius est positum.

QVOMIAM uero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem ordine, & inter se, & a Francisco Flauto, ideoque a nobis discrepant, annotauimus in margine ordinem utriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior uero Campani seriem indicat. Quando autem in margine unicus numerus modernus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum, & Hypsiclem, significatur. Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum est, in Hypsiclis dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

I.

## THEOR. I. PROPOS. I.

QVAE ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidiam esse lineæ compositæ ex latere hexagoni, & decagoni eiusdem circuli. Extensa enim AE, in utramque partem, ut perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, æquali ipsi BF, connectantur rectæ AC, CG, CF, BF. Quoniam igitur perpendicularis AE, secat rectam BC, bisariam, erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF. Constat igitur & anguli contenti sine æquales, nempe recti, erunt bases CF, BF, æquales, adeoque & arcus

3. tertij.

4. primi.

CE.

C F, B F, equales; & ex p[ro]p[ri]e & p[ro]p[ri]e arcu B C, quinta  
parte totius circ[um]ferentia, erit C F, eiusdem pars decima;  
atq[ue] adeo recta C F, latus erit decima

part[is] A B. Rursum quia latera C E, & E F,

trianguli C E F, equalia sunt lateri-

b[us] C E, E F, trianguli C E G,

hincque anguli contig[ue]ntes, scilicet

anguli C F, C G, & anguli

C F G, C G F, æquales. Quia ut

arcus C F, quinta pars est semi

circ[um]ferentia D C F, cum sit to-

tius circ[um]ferentia decima pars

Erit itaque partium 1. arcus C F, qualium 4. est arcus D C,

hoc est, arcus D C, quadruplus erit arcus C F. Quare & an-

gulus D A C, quadruplus erit anguli C A F: Est autem an-

gulus C F D, dimidium anguli D A C, cum illius ad circ[um]se-

rentiam, & huius ad centrum eadem sit basis D C. Ergitur

angulus C F D, atque adeo illi equalis ostensus C G F, duplus

erit anguli C A F: Atque angulus C G F, externus, equalis est

internis G A C, & G C A, in triangulo G A C. Cum igitur G A C,

sit dimidium anguli C G F, ut ostensum est, erit G C A, reli-

quum dimidium eiusdem anguli C G F, ideoque equalis e-

rit anguli G A C, G C A; & p[ro]inde & latera A G, C G, æ-

qualia. Est autem C G, recta ostensa equalis recte C F. Igitur &

A G, recta equalis erit eidem C F. Quare additis æ-

qualibus G E, E F, fiet A E, equalis duobus E F, F C, simul:

Appropinde, tres simul A E, E F, F C, hoc est, duæ simul A F,

F C, duplæ erunt ipsius A E, atque idcirco & contrario erit

A E, ducta, videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimi-

diæ duarum simul A F, F C, nempe lateris hexagoni, & dec-

goni. Quare ergo ex centro circuli cuiuspiam in penta-

goni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat de-

monstrandum.

# COROLLARIUM I.

Ex his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro cir-  
culi ad lineam rectam in eodem circulo apertam, secare æquum  
quem ducta hæc linea recta sustendit, bisariam. Nam in-  
scriptum enim est rectam A E, atque æquum perpendi-

F f 2

cularis

28. tertij.

4. primi.

23. sexti.

20. tertij.

32. primi.

6. primi.

20. tertij.





cularis est ad B C, dividere arcum B C, bisariam id F.

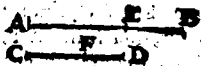
COROLLARIUM. II.

Hinc quoque fit, perpendiculararem ex centro ad latus pentagoni ductam, æqualem esse reliquis lineis simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli equilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni. Quoniam ut in hac propo. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni, æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul. Est autem perpendicularis ad latus trianguli equilateri, ex coroll. propo. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni, esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac mediâ ratione secantur; ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportionēs.

Si rectæ binæ rectæ A B, C D, extrema ac mediâ ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportionēs secari, hoc est, esse ut A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; item ut A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cum enim sit



ut A B, ad A E, ita A E, ad E B; & ut C D, ad C F, ita C F, ad F D; erunt rectangula sub A E, E B, æqualia quadrato rectæ A E; & rectangulum sub C D, F D, æquale quadrato rectæ C F.

Quamobrem erunt rectangulum sub A B, B B, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum sub C D, D D, ad quadratum rectæ C F; (est enim utrobique Aequalitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstravimus in scholio propo. 4. lib. 5. ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: Et componendo, ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A B, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ

C F.

17. sexta

C F. Sed quod quater continetur sub A B, E B, una cum quadrato rectæ A B, æquale est quadrato lineæ compositæ ex A B, E B. Et quod quater continetur sub C D, F D, una cum quadrato rectæ C F, æquale est quadrato lineæ compositæ ex C D, F D. Igitur erit quoque, ut quadratum lineæ compositæ ex A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadratum lineæ compositæ ex C D, F D, ad quadratum rectæ C F. Ac perinde, ut recta composita ex A B, E B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, ad rectam C F: Et componendo, ut composita rectæ A B, E B, & recta A, hoc est, dupla ipsius A B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, & recta C F, id est, dupla ipsius C D, ad rectam C F. Et permutando, ut dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A E, ad C F: Vt autem dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A B, ad C D. Erit ergo ut A B, ad C D, ita A E, ad C F. Ac propterea, cum sit ut tota A B, ad totam C D, ita A E, ablata ad C F ablatam, erit quoque reliqua E B, ad reliquam F D, ut tota ad totam. Quare ut A E, ad C F, ita erit E B, ad F D, cum utraque proportio eadem sit proportioni A B, ad C D: Et permutando, erit ut A E, ad E B, sic C F, ad F D, & sic denique iuxta omnes modos arguendi, ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si lineæ itaque totæ lineæ ab utraque media ratione sectentur, &c. Quod erat ostendendum.

secundi.

sex.

quinti.

quinti.

# COROLLARIUM

Ex hac propositione & præcedenti inferemus hoc theorema.

**Theorema 1.** Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni inscripti eodem circulo descripti ducta secuerit latus atque sita ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris ductæ eodem circulo inscripti.

**Propositio.** Cum A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eodem circulo inscripti, secetur in E, extremitas ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli

Ff 3 ductæ



rentia, itaque recta subtenfa CG, latus decagoni. Quoniam  
 igitur recta AG, dupla est recte FG, erit ex scholio propof. 4.  
 lib. 2. quadratum recte AG, quadruplum quadrati recte FG.  
 Sane autem quadratum recte AG, equale quadrato rectarum  
 AG, OG, igitur et quadratum rectarum AC, CG, quadrupla  
 fuit quadrati recte FG; Atque adeo tria quadrata rectarum  
 AC, OG, FG, quintupla quadrati eiusdem recte FG. Cum  
 ergo quadratum rectarum FG, OG, nempe lateris hexagoni,  
 & lateris decagoni, equale fit quadratum recte CD, lateris  
 uidebitur pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum  
 AG, CD, quintupla quadrati recte FG, quoniam semidi-  
 ametri. Si in circulo fingatur pentagonum, & quilibet angu-  
 lus tribuatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, &c.  
 Quod erat demonstrandum.

47. primi

10. secunde.

COROLLARIUM

Ex his theorema huiusmodi. In quocumque cubo, & dodecaedro in-  
 scripto, quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dode-  
 caedri, utraque finit, quintupla sunt quadrati semidia-  
 metri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribitur. De his  
 Corollariis. Si in circulo describitur pentagonum  
 unum Dodecaedri in quapiam sphaera descripti; eritque ex coroll.  
 2. propof. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, la-  
 tus cubi in eadem sphaera descripti. Perspicuum est autem, quadra-  
 ta rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quin-  
 tuplica esse quadrati semidiametri FG, &c.

3. quadrade.

PROBLEMA 4. PROPOSITIO 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli sece-  
 ditur extrema ac media ratione, maius illius  
 segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.  
 Si autem sit AB, latus hexagoni alicuius circuli extre-  
 ma ac media ratione in C, sitque maius segmentum AG.  
 Dico AG, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim AD,

FF 4 latus

9. serij dec.

10. quarte.

11. quarte.

12. quarte.

latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum ap-  
 si A B, ponitur tota composita B D, & latus hexagoni, & late-  
 re decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cuius  
 maius segmentum est A B: Ponitur autem & A B, secus in C,  
 aqualesque & C D, O A & similes. Igitur erit ut B D tota ad  
 maius segmentum A B, ita maius sit segmentum A B, ita A B,  
 D O A & C B. Tota ad maius sit segmentum A C:  
 Sed est quippe ut B D tota ad ma-  
 ius sit segmentum A B, ita maius sit segmentum A B, ita  
 sit segmentum A D, segmentum minus, per definitio-  
 nem lineæ secus extrema ac media ratione. Igitur erit ut  
 A B ad A C, ita maius sit segmentum A B, ita A D, & A C, A D,  
 æquales erunt. Quoniam ergo A D, ponatur latus decagoni, il-  
 lius circuli, cuius latus hexagoni est A B, erit & A C eiusdem  
 circuli latus decagoni.

3. serij dec.

A L I T E R. Adiungatur ipsi A B, in rectum recta A D,  
 æqualis maiori segmento A C, eritque tota recta B D, diuisa  
 in A, extrema ac media ratione. Cum igitur A B, maius  
 segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni aut cuius circuli;  
 eritque per se, quod demonstramus, ut ad propositum. A D  
 minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni. A C pro-  
 pterea & A C, æqualis ipsi A D, latus erit decagoni in eodem  
 circulo descripti, cuius A B, latus hexagoni ponitur. Si ergo  
 latus hexagoni aduersus circuli, &c. Quod erat ostenden-  
 dum.

13. quarte.

14. quarte.

15. quarte.

16. quarte.

17. quarte.

18. quarte.

19. quarte.

20. quarte.

21. quarte.

22. quarte.

23. quarte.

24. quarte.

25. quarte.

26. quarte.

27. quarte.

28. quarte.

29. quarte.

30. quarte.

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

I D E M circulus comprehendit & Do-  
 decædri pentagonum, & Icosædri triangu-  
 lum, eidem sphaeræ inscriptorum.

In sphaera, cuius diameter A, intelligatur descriptum  
 & Dodecædri, cuius unum pentagonum B C D E F, &  
 Icosædri, cuius unum triangulum G H I. Dico eundem  
 circulum circumferre & pentagonum B C D E F, & trian-  
 gulum G H I, hoc est, circulos B C D E F, G H I, ipsi sphaeræ  
 circulos esse æquales. Circulosque pentagonum circulis B C D E F.

N O.

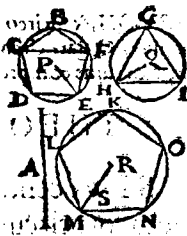
NO, pentagonum KLMNO, ex quo icosaedrum sphaerae  
 inscribitur, ita ut quinque latera huius pentagoni sint late-  
 ra icosaedri; idcirco quodlibet ipsorum aequale cuius late-  
 ri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectae  
 PE, QH, RM; Secturq; RM, extrema ac media ratione in  
 S; erique maius segmentum RS, latus decagoni in circulo  
 KLMNO in quo RM, est latus hexagoni. Subtendat quo-  
 que recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quae erit,  
 per coroll. 1. propof. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphaera  
 descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propof.  
 B, F, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris cubi  
 CF, seci citius a media ratione, erit ut tota CF, ad tota  
 RM, ita BF, ad maius segmentum RS, maius segmentum; Ac  
 propterea quadratum rectae CF,  
 ad quadratum rectae RM, ita qua-  
 dratum rectae BF, ad quadratum re-  
 ctae RS; Acquirat deo, per ea, quae  
 demonstrata sunt in scholio pro-  
 pof. 4. lib. 5. ut triplum quadrati re-  
 ctae CF, ad quintuplum quadrati re-  
 ctae RM, ita triplum quadrati rectae  
 BF, ad quintuplum quadrati rectae  
 RS: Est autem triplum quadrati re-  
 ctae CF, e quale quintuplo quadrati  
 rectae RM, ( quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex  
 propof. 4. lib. 13. quam quintuplum quadrati semidiame-  
 tri RM, ex coroll. 1. propof. 16. lib. 13. aequale est quadra-  
 to ex A, diametro sphaerae. ) Igitur & triplum quadrati re-  
 ctae BF, aequale erit quintuplo quadrati rectae RS: Quia ue-  
 ro quadratum rectae MN, lateris pentagoni, aequale est qua-  
 drato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectae RS, lateris de-  
 cagoni, ita ut quocumque quinque quadrata rectae MN, aequa-  
 lis quinque quadratis rectae RM, & quinque quadratis re-  
 ctae RS. Igitur & quinque quadrata rectae MN, aequalia  
 sunt tribus quadratis rectae CF, ( cum haec ostensa sint ae-  
 qualia quocumque quadratis rectae RM, ) & tribus quadratis  
 rectae BF, quae aequalia sunt quinque quadratis rectae RS.  
 Sed quoniam, ( cum quadrata rectarum CF, BF, quinque  
 quadrato semidiametri PE, sunt equalia ) tria quadrata re-

16. tergyde

4. quartyde

2. quartyde

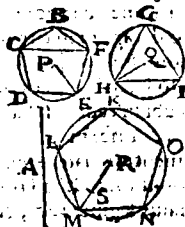
22. senti



10. tergyde

3. quartyde

At CF, & tria quadrata recte BF, æqualia sunt quindecim quadratis recte PE; & quinque quadrata recte MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cū



12. scrij. de.

MN, æqualis sit ostensū ipsi GH, lateri isosædri; seu trianguli æquilateri; sit autem quadratū ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata recte GH, hoc est, recte MN, æqualia quindecim quadratis recte QH. Erunt quoque quindecim quadrata recte PE, æqualia quindecim quadratis recte QH, ac præterea unū quadratum recte PE, unū quadrato recte QH, & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idcirco ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandū.

### THEOR. 6. PROPOS. 6.

3.  
6.

SI ex centro circuli, pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, Rectangulum trigesies sumptum Dodecaedri superficiei æquale.

Ex centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri, A B C D E, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum contentum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resolvetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propof. 8. lib. 1. cū bina latera unius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque una basis aliorum æqualis.

qualis. Ducatur quoque per  $F$  recta  $HI$ , parallela ipsi  $CD$ ,  
occurrentes duobus perpendicularibus  $CH$ ,  $DI$ , ductis ex  $C$ ,  
 $D$ , ad  $OD$ , in punctis  $H$ , &  $I$ . Erigatur rectangulum  $CI$ ,  
contentum sub  $HC$ , hoc est, sub  $FG$ ,  
&  $CD$ . Quoniam uero rectangulum

$CI$  duplum est trianguli  $FGD$ , ut  
ad q. 1. prim. relinquitur quatuor  
triangulorum ipsi  $FGD$  equalium, nimirum  
rectanguli  $CI$ , quinque sumpti, & qua-  
le decem huiusmodi triangulis, hoc est  
duobus pentagonis Dodecaedri.



quingue triangula, & quales sint uni pentagono. Acque adeo  
sexagulum rectanguli  $CI$ , quinque sumpti, nimirum re-  
ctangulum  $CI$  sumptum sexages, & quale quodque erit sex-  
tuplo duplum pentagonorum, id est, quoddecim pentago-  
nis, hoc est, totius superficiei Dodecaedri. Superius ex centro  
circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demon-  
strandum.

Facta eadem figure constructio, cum  
rectangulum  $CI$ , duplum sit trianguli  $FGD$ , hoc est, &  
quale triangulo  $FGD$ , bis sumptis. Erigatur rectangulum  $CI$ ,  
triangulo sumptum & quale triangulo  $FGD$ , bis sumptis tri-  
angulis, hoc est, sumptis sexages, ac proinde totius super-  
ficiei Dodecaedri. Cum enim unum pentagonum Dode-  
caedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt  
dupdecim pentagona, nempe tota superficies Dodecae-  
dri, sexaginta huiusmodi triangulis. Ac idcirco triangulum  
 $FGD$  sumptum sexages, & quale erit superficiei Dode-  
caedri.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Si ex centro circuli triangulum pro-  
scribitur circumscriptis, perpendicularis  
ducatur ad unum latus trianguli; Erit,  
quod sub dicto latere, & perpendicu-

1. prim.

1. prim.

7.



lari comprehenditur, rectangulum trigelses sumptum Icosaedri superficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latera perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, triages sumptum,



equale esse toti superficiei Icosaedri. Ductus namque rectus ex D, ad omnes trianguli angulos, resoluatur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. Propos. 8. lib. 1. Sunt enim binæ latera unius binis lateribus aliorum æqualia, & basi unius basibus aliorum æqualis. Ducatur

quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrenti in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad FG; eritq; rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. Quoniam uero rectangulum BG, duplum est rectanguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum rectangulorum ipsi BDC, æqualium. Erit rectangulum BG, iter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cum tria talia triangula, qualia sint unum triangulum Icosaedri; Atque adeo idem rectangulum trigelses sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, iter sumpti, æquale erit uiginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

ALITER. Facta eadem constructione figuræ, cum rectangulum BG, duplum sit trianguli BDC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum BG, trigelses sumptum; æquale triangulo BDC, sumpto sexagesies. Atque sexagesies huiusmodi triangula constituent uiginti triangula Icosaedri, eo quod tria constituent unum. Igitur rectangulum BG, trigelses sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIUM.

Ita Quæ superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuslibet

enistuntque Icosaedri, etiam si non describantur amba figuræ in eadem sphaera, est sicut rectangulum contentum sub latere D. decaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni. Dodecaedri in latere dictum; ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latere. Cum enim superficies Icosaedri aequalis sit illi rectangulo trigehies sumpto; Item superficies Icosaedri aequalis huic rectangulo trigehies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. Quare ut superficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ut rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

6. quattide.  
7. quattide.

15. quinsi.

SCHOLION.

Non dissimili argumento indagabimus superficies reliquarum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, sine quadrato cubi, circumscribentis perpendiculari ducatur ad unum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In Octaedro vero & cubo duodecies sumptum superficiei Octaedri, & cubi aequale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC, circumscripimus & circulo, cuius centrum D, a quo perpendiculari ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, ut de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum B G, sexies sumptum, aequale esse superficiei Tetraedri. Quoniam rectangulum B G, duplum est trianguli D B C, hoc est, aequale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum aequale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituent totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula aequilatera ipsi ABC, equalia, eo quod tria constituent unum; Erit rectangulum B G, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis aequale.



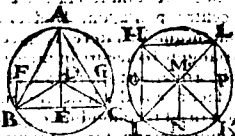
7. quattide

41. primi.

Si tamen sumamus idem triangulum ABC, Octaedri, & c. Dico rectangulum B G, duodecies sumptum, aequale esse superficiei Octaedri. Cum enim rectangulum B G, duplum sit trianguli

41. p. vimi.

DBC, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem



rectangulum duobus rectis sumptum æquale trigintaquatuor huiusmodi triangulis. Sed sex gintaquatuor talia triangula constituunt octo triacula Ollaedri, id est, totam superficiem Ollaedri, propterea quod tria constituant unum. Ergo rectangulum B C, duobus rectis sumptum æquale est superficiem Ollaedri.

41. primi. S I T tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex cetro M, describatur, & deducta MN perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, ut quadratum resolvatur in quatuor triangula æqualia, ut per M, agatur OP, ipsi IK, parallelæ. Dico rectangulum IP, totam superficiem sub OI, hoc est sub MN, & IK, sumptum duodecim, æquale esse superficiem cubi. Quoniam rectangulum IP, duplum est trianguli MIK, hoc est, æquale duobus talibus triangulis, erit idem duodecim sumptum æquale trigintaquatuor eiusmodi triangulis. Quare cum trigintaquatuor talia triangula constituant octo quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triacula unum quadratum constituunt, erit rectangulum IP, duodecim sumptum æquale superficiem cubi. Quod est propositum.

ALITER. Cum duo rectangula IP, constituant quadratum HIKL; (sunt, ut IP, PH, æqualia, cum rectæ OI, sit dimidium lateris HI, nempe æqualis ipsi MN,) constituant duodecim talia rectangula sex quadrata ejusmodi hoc est, totam superficiem cubi.

### PROBL. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentū sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinq; sextis partibus lineæ subtendens angulū pentagoni æquilateri in eodē circulo descriptæ, æquale est dicto pentagono.

In circulo, cuius cetrū F, describatur pentagonū æquilaterum ABCDE, & ducta diametec A B, dividatur in quatuor

tuor

tuor æquales partes, quarum tres sint  $AH$ ; Angulum uero  $A$ , subtendens recta  $BE$ , secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint  $BI$ , & una  $IE$ , ita ut  $BI$ , sit quintupla ipsius  $IE$ . Dico rectangulum comprehensum sub  $AH$ ,  $BI$ , æquale esse pentagono  $ABCDE$ . Ducta enim recta  $BF$ ; quoniam  $AH$ , continet tres quartas partes diametri, &  $AF$ , duas, cum sit semidiameter, erit  $AH$ , ipsius  $AE$ , sesquialtera. Quia uero recta  $FA$ , diuidens arcum  $BAE$ , bisariam, diuidit quoque rectam  $BE$ , bisariam, per coroll. i. propof. 10. lib. i. 3, in puncto  $K$ ; contine-



1.  
3.

6. sexti.

41. primi.

1. sexti.

1. sexti.

bit tam  $KB$ , quam  $KE$ , tres sextas, rectæ  $BE$ , atque adeo cum  $BI$ , contineat quinque, continebit  $KI$ , duas, Ac proinde &  $KB$ , ipsius  $KI$ , erit sesquialtera. Quamobrem erit ut  $AH$ , ad  $AF$ , ita  $KB$ , ad  $KI$ , atque ideo rectangulum sub extremis  $AH$ ,  $KI$ , æquale erit rectangulo sub medijs  $AF$ ,  $KB$ . Est autem rectangulum sub  $AF$ ,  $KB$ , duplum trianguli  $ABF$ , cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin  $AF$ , & eandem altitudinem  $BK$ ; hoc est, inter easdem sint parallelas constructæ. Igitur & rectangulum sub  $AH$ ,  $KI$ , duplum erit eiusdem trianguli  $ABF$ . Est autem & rectangulum sub  $AH$ ,  $KI$ , duplum rectanguli sub  $AH$ ,  $IE$ ; propterea quod & basis  $KI$ , dupla sit basis  $IE$ , (continet. n.  $KI$ , duas sextas partes ipsius  $BE$ , &  $IE$ , unam) eademque semper altitudo  $AH$ . Igitur æqualia sunt triangulum  $ABF$ , & rectangulum sub  $AH$ ,  $IE$ ; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At uero pentagonum  $ABCDE$ , quintuplum est trianguli  $ABF$ , quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluat, ductis rectis e centro. Fuit propof. 8. huius libri docuimus; Rectangulum uero sub  $AH$ ,  $BI$ , quintuplum est rectanguli sub  $AH$ ,  $IE$ , quod & basis  $BI$ , quintupla sit basis  $IE$ , eademque semper altitudo  $AH$ . Igitur pentagonum  $ABCDE$ , & rectangulum sub  $AH$ ,  $BI$ , æqualia sunt. Rectangulum ergo eorum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam autem patet, si pentagonum  $ABCDE$ , statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphaera descripti;  $BE$ , est latus cubi in eadem sphaera descripti, ex coroll. 2. propof. 17. lib. 13. & unum latus trianguli Icosaedri in eadem sphaera constituti (comprehensum uidelicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum  $AG$ , in  $H$ .

(cum

5. quartide.

(cum ex coroll. propos. 12. lib. 13. fecerit semidiametrum  $FG$ , bisariam, quemadmodum & punctum  $H$ , eandem semidiametrum  $FG$ , bisariam diuidit). Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ad angulo trianguli Icosædri ad unum eius latus ducta, nempe sub  $AH$ , & sub quinque sexus partibus lateris cubi eidem sphaera, in qua Icosædron, inscripti, nimirum sub  $B I$ , æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphaera contenti.

4.  
8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

**SUPERFICIES** Dodecaedri ad superficiem Icosædri in eadem sphaera descripti, eandem proportionem habet, quam, latus cubi ad latus Icosædri.

5. quæstide.

3. tertij.

IN circulo  $ABCD$ , circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icosædri, sit latus pentagoni  $BD$ , & trianguli  $A D$ , & extensio  $E$ , ducantur ad  $AD, BD$ , perpendiculares  $EF, EG$ , secabunturque  $AD, BD$ , bisariam; &  $EG$ , protracta secabit quoque arcum  $BD$ , bisariam in  $C$ , ex coroll. 1. propos. 1. huius lib. atque adeo



connexa recta  $CD$ , latus erit decagoni eiusdem circuli. Sit denique  $H$  latus cubi in eadem sphaera cum Dodecaedro, & Icosædro descripti. Dico esse ut  $H$ , latus cubi, ad  $AD$ , latus Icosædri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosædri. Quoniam lateris cubi  $H$ , secti extrema ac media ratione, maius segmentum est  $HD$ , latus Dodecaedri, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. Rect. autem  $EG$ , secta quoque extrema ac media ratione, maius segmentum est  $EF$ , ex coroll. propos. 2. huius lib. Erit, ut  $H$ , tota ad  $BD$ , maius sui segmentum, ita  $EG$ , tota ad  $EF$ , maius sui segmentum; Ac proinde rectangulum sub extremis  $H, EF$ , æquale erit rectangulo sub medijs  $BD, EG$ . Quia uero est, ut  $H$ , ad  $AD$ , ita rectangulum sub  $H, EF$ , ad rectangulum sub  $A D, E F$ , cum bases sint  $H, A D$ , altitudo uero semper eadem  $EF$ ; Ita quoque ut  $H$ , ad  $AD$ , ita rectangulum sub

2. quæstide.

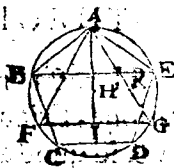
16. sexti.

1. sexti.

sub

sub B D, E G, (quod ostensum est aequale rectangulo sub H, E F,) ad idem rectangulum sub A D, E F. Quare cum ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, ut rectangulum sub B D, E G, ad rectangulum sub A D, E F, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ita quoque, ut A, latus cubi, ad A D, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ita, quod ostendendum erat.

At, ut T. 1. 1. 1. Quoniam scribitur pentagonum Dodecaedri A B C D E, & triangulum Icosaedri A F G, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quae per coroll. 2. propos. 10. lib. 1. 3. diuidet latus E G, in aequales, & ad angulos rectos. Constructatur denique recta B E, quae latus cubi, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 1. 3. diuidet quinque sextae partes sint B K. Dico rursus esse, ut B E, latus cubi ad F G, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam rectangulum sub A I, B K, aequale est pentagono A B C D E, ex coroll. propos. 7. huius lib. Item rectangulum sub A I, I F, aequale est triangulo A F G, ex scholio propos. 11. lib. 1. cum F G, basis trianguli dupla sit ipsius I F, basis rectanguli: Erit ut rectangulum sub A I, B K, ad rectangulum sub A I, I F, ita pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G: Est autem ut rectangulum sub A I, B K, ad rectangulum sub A I, I F, ita B K, ad I F, cum bases sint B K, I F, & altitudo eadem semper A I. Erit igitur quoque ut pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G, ita B K, ad I F. Aequi prout, & primum, & tertium, nimirum pentagonum A B C D E, & recta B K, aequemultiplicentur per numerum 2. Item secundum, & quartum, nempe triangulum A F G, & recta I F, aequemultiplicentur per numerum 10. erit quoque ut pentagonum A B C D E, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum A F G, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta B K, duodecies sumpta ad rectam I F, vigesies sumptam: Atqui recta B K, duodecies sumpta aequiualet lateri cubi B E, decies sumpto; (Nam cum B K, continet quinque sextas per



5. quartide.

1. sexti.

4. quinti.

Gg

tes

tes ipsius BE, continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE. Recta uero IF, uigies sumpta æqualis est lateri Icosædri FG, decies sumpto (eo quod FG, sit ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecædri ad superficiem Icosædri, ut latus cubi BB, decies sumptum ad latus Icosædri FG; decies



25. quinti

sumptum; Ac propterea, cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosædri, quæ unū latus cubi ad unum latus Icosædri, perspicuum est, ita esse superficiem Dodecædri ad superficiem Icosædri, ut latus cubi ad latus Icosædri. Quod est propositum.

4.  
9.

# THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit ut recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori segmento, ad rectam potentē id, quod a tota, & id quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosædri eidem sphaeræ cum cubo inscripti.

SECETUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosædri in sphaera eadem cum cubo descripti. Ex



A, centro; ad intervallum A B, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triagulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecædri alicuius sphaeræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphaera descripti, ex coroll. 2. proposit. 17. lib. 1. Quoniam uero AC, maius segmentum semidiametri AB, secatur extrema ac media

dia

dia ratione, est latus Decagoni in circulo B F G H I, in quo  
 nimirum A B, latus est Hexagoni; poterit B F, latus penta-  
 gonu & totam A B, latus uidelicet hexagoni, & maius seg-  
 mentum A C, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Pos-  
 sibile iam & recta M, totam A B, & minus segmentum B C,  
 per ea, quæ ad propof. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico  
 sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Ico-  
 saedri, ut est B F, potens totam A B, & maius segmentum  
 A C, ad M, potentem totam A B, & minus segmentum  
 B C. Quoniam quadratum lateris trianguli æquilateri  
 B K, triplum est quadrati semidiametri A B: Item quadrata  
 rectarum A B, B C, tripla sunt quadrati rectæ A C: Erit  
 ut quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ A B, ita  
 quadrata rectarum A B, B C, hoc est, quadratum rectæ M,  
 ipsis æquale, ad quadratum rectæ A C. Vtrobique enim  
 proportio est tripla. Permutando ergo erit, ut quadratum  
 rectæ B K, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ  
 A B, ad quadratum rectæ A C: Est autem ut quadratum rectæ  
 A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad  
 quadratum rectæ B F. (Nam cum rectæ B G, sectæ extre-  
 ma ac media ratione, maius segmentum sit B F, ex coroll.  
 1. propof. 7. lib. 13, eo quod B G, est latus cubi, & B F, latus Do-  
 decaedri eiusdem sphaeræ; Erit ut tota A B, ad maius seg-  
 mentum A C, ita tota B G, ad maius segmentum B F: Ac  
 proinde ut quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C,  
 ita quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F. ) Igitur  
 erit quoque, ut quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ  
 B F, ita quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ M: Et  
 permutando, ut quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B K,  
 ita quadratum rectæ B F, ad quadratum rectæ M: Ac propter  
 ea erit ut recta B G, ad rectam B K, ita recta B F, potens to-  
 tam A B, & maius segmentum A C, ad rectam M, potentem  
 totam A B, & minus segmentum B C. Cum igitur propo-  
 sita latera D, E, cubi, & Icosaedri, eandem habeant propor-  
 tionem, quam rectæ B G, B K, ut mox ostendemus; perspi-  
 cuum est, ut se habeat recta B F, potens totam A B, & maius  
 segmentum A C, ad rectam M, potentem totam A B, & mi-  
 nus segmentum B C, ita se habere propositum cubi latus D,  
 ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaq; linea secetur  
 G g 2 extrema

4. quartidec.

10. septidec.

12. septidec.

4. septidec.

2. quartidec.

22. sexui.

22. sexui.



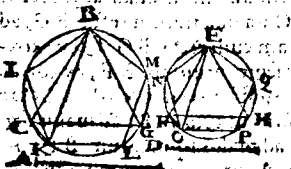
extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Quod vero proposita latera cubi & Icosaedri  $DG$  &  $E$ , eiusdem sphaerae eandem habeas proportionem, quam recta  $BG$ ,  $EK$ ; demonstrabimus hoc propositum theorema.

Quam proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphaerae, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quavis alia sphaera descriptorum.

Sit enim  $A$ , latus cubi, &  $BC$ , latus Icosaedri eiusdem sphaerae. Item  $D$ , latus cubi, &  $E, F$ , latus Icosaedri in quavis alia sphaera. Dico esse ut  $A$ , ad  $B$  quia  $D$ , ad  $E, F$ . Perfectis



damque triangulis Icosaedrum  $BGG, EFH$ , & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis perungulae similares  $EIKLM, ENOPQ$ , connectanturque rectae  $BK, CB$  &  $EQ, FO$ . Quoniam ergo idem circulus

comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphaerae, & ponitur  $BGG$ ; triangulum Icosaedri eandem sphaerae descripti; in qua cubus lateris  $A$ ; & Icosaedri lateris  $E$ ; pentagonum Dodecaedri eandem sphaerae descripti; & propterea ex coroll. 1. propof. 17. lib. 1. recta  $BK$  statim erit cubi eiusdem sphaerae, idemque ipsi  $A$ , & similis. Similiter argumentando aequalis erit recta  $EO$ ; latus cubi  $D$ . & usque quia arcus  $EIK, ENO$ , similes sunt. Manetque constanter duo quinquiespartes suo circumferentiae. Item arcus  $BCK, EQP$ ; (utroque enim tres quatuor partes totius circumferentiae comprehendit). Perunt enim anguli  $BCK, EQP$  ex definitione segmentorum similium, aequales inter se; quatuor anguli  $BKE, EOP$ , inter se, cum cum illis, quatuor his segmentis circulo similibus existant. Itaque proinde, ex coroll. 5. propof.

32. lib. 1. reliquus angulus  $C B K$ , trianguli  $BCK$ , reliquo angulo  $F E O$ , trianguli  $EFO$ , equalis erit, & totum triangulum  $BCK$ , toti triangulo  $EFO$ , equiangulum. Quare erit, ut  $BK$ , hoc est, recta  $A$ , illi equalis, nempe latus cubi, ad  $BC$ , latus Icosædri, ita  $E O$ , hoc est, recta  $D$ , illi equalis, latus scilicet alterius cubi, ad  $EF$ , latus Icosædri. Quod est propositum.

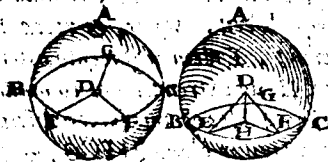
P E R S P I C I V M effigitur id, quod in demonstratione assumelatur, nimirum eandem habere proportionem  $D$ , &  $E$ , latera cubi & Icosædri in una sphaera, quam habent  $A G$ ,  $B K$ , latera cubi & Icosædri in alia sphaera.

E x hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecædri ad superficiem Icosædri non solum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosædri in eadem sphaera cum ipsis, ut vult proposit. 9. habet lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosædri in quacunque alia sphaera.

# L E M M A. I.

S i sphaera plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

S E C U N D U M sphaera  $A B C$ , cuius centrum  $D$ , plano aliquo faciente communem sectionem planum  $B E F C G$ . Dico  $B E F C G$ , esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphaerae, ita ut centrum  $D$ , sit in plano, seu communis sectione  $B E F C G$ ,

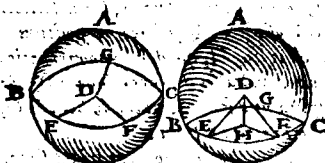


duoquaque ex  $D$ , centro sphaera ad extremitatem communis sectionis, sunt rectae quotcunque  $D E$ ,  $D F$ ,  $D G$ . Quoniam igitur omnes hae lineae ductae, quotcunque fuerint, aequales sunt, ex definitione sphaerae, cum ex eius centro ad superficiem cadant, erit figura plana

# E U C L I D . G E O M .

**B E F C G**, unica linea contenta, circulus, eiusque centrum **D**, idem cum centro sphaerae.

**TRANS**eat secundo planum secans non per centrum sphaerae :



Diratur autē ex **D**, centro sphaerae ad planum secans perpendicularis **DH**, emittaturq;

ex **H**, rectae utrumque **HE**, **HF**, ad extremitatem usq; communis sectionis ; & connectantur rectae **DE**, **DF**. Quoniam igitur anguli **DHE**, **DHF**, ex defn. 3. lib. 11. recti sunt ; erit, tam quadratum rectae **DE**, quadratis rectarum **DH**, **HE**, quam quadratum rectae **DF**, quadratis rectarum **DH**, **HF**, aequale : Sunt autem quadrata rectarum **DE**, **DF**, aequalium ex centro sphaerae ad eius superficiem cadentium, aequalia . Igitur & quadrata rectarum **DH**, **HE**, quadratis rectarum **DH**, **HF**, aequalia erunt ; & proinde, dempto communi quadrato rectae **DH**, reliquum quadratum rectae **AE**, reliquo quadrato rectae **HF**, aequale erit . Quare & rectae **HE**, **HF**, aequales erunt . Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex **H**, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse aequales & inter se, & dictis duabus **HE**, **HF**. Figura igitur plana **B E F C G**, unica linea contenta, circulus erit ; eiusque centrum, punctum **H**, in quod perpendicularis **DH**, cadit . Quod est propositum .

## C O R O L L A R I U M .

**IT A Q U E** si planum secans transierit per centrum sphaerae, efficitur circulus idem centrum habens, quod sphaera . Si uero planum secans

secans per sphaeræ centrum non tranſierit, efficitur circulus habens aliud centrum, quam ſphaera; illud uidelicet punctum, in quod ca- dit perpendicularis ex centro ſphaeræ ad planum ſecans ducta. Nam ſemper demonſtrabuntur, lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli eſſe æquales, ut perſpicuum eſt.

LEMMA II.

CIRCULI in ſphaera æquales, æqualiter diſtant a centro ſphaeræ: & circuli æqualiter di- ſtantes a centro ſphaeræ, æquales ſunt.

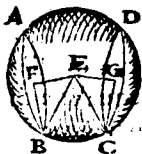
IN ſphaera  $ABCD$ , cuius centrum  $E$ , ſint circuli æquales  $AB, DC$ . Dico ipſos æqualiter a centro  $E$ , diſtare. Ducantur enim ex  $E$ , ad eorum plana per- pendiculares  $EF, EG$ , quæ per coroll. præceden- tis lemmatis in ipſorum centra ca- dent, ex quibus ducantur rectæ  $FB, GC$ , ad circumferentias cir- culorum utcuſque, connectan- turque rectæ  $EB, EC$ . Quo- niam igitur anguli  $EFB, EGC$ , recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ  $EB$ , quadra- tis rectarum  $EF, FB$ , quam quadratum rectæ  $EC$ , qua- dratis rectarum  $EG, GC$ , æquale: Sunt autem qua- drata rectarum  $EB, EC$ , æqualium, cum cadant ex cen- tro ſphaeræ ad eius ſuperficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum  $EF, FB$ , quadratis rectarum  $EG, GC$ , æqualia erunt. Et proinde demptis qua- dratis æqualibus rectarum æqualium  $FB, GC$ , cum ſint ſemidiametri circulorum æqualium, erit re- liquum quadratum rectæ  $EF$ , reliquo quadrato



47. primi

rectæ  $EG$ , æquales; Atque adeo æquales erunt rectæ  
perpendiculares  $EF$ ,  $EG$ . Quam ob rem circuli  $AB$ ,  
 $DC$ , æqualiter distant a centro  $E$ .

$S$  &  $D$  iam æqualiter distant circuli  $AB$ ,  $DC$ , a  
centro sphaerae  $E$ . Dico ipsos esse  
æquales. Constructa enim figura,  
ut prius, stando eodem modo,  
quadrata rectarum  $EF$ ,  $EG$ , æqua-  
lia esse quadratis rectarum  $EG$ ,  $GC$ .  
Ac proinde, deceptis quadratis æ-  
qualibus rectarum æqualium  $EF$ , &  $GC$ , cum circuli  
æqualiter ponantur distare a centro, reliquum qua-  
dratum rectæ  $FB$ , reliquo quadrato rectæ  $GC$ , atque  
adeo æquales erunt rectæ  $FB$ ,  $GC$  semidiametri, scilicet  
circularum  $AB$ ,  $DC$ . Circuli igitur  $AB$ ,  $DC$ , æqua-  
les sunt. Quod est propositum.



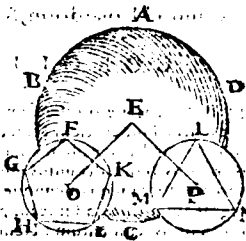
4.  
I O.

THEOR. II. PROPOS. II.

DODECAEDRYM ad Icosaedrū  
in eadem cum ipso sphaera descriptum, est  
ut cubi latus ad latus Icosædri, in una ea-  
demque sphaera.

IN sphaera  $ABCD$ , cuius centrum  $E$ , inscriptum sit Do-  
decaedrum, cuius unum pentagonum  $FGHIK$ . Item  
Icosaedrum, cuius unum triangulum  $LMN$ . Dico esse  
Dodecaedrum ad Icosaedrum, ut latus cubi ad latus Icosæ-  
dri, in una eademque sphaera. Hæc hæc eadem sit, quæ sphae-  
ra  $ABCD$ , siue non. Quoniam omnes anguli tam pen-  
tagoni, quam trianguli, superficiem sphaerae tangunt; si per  
pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficiuntur,  
per unamque præcedens, duo circuli in sphaera  $FGHIK$ ,  
 $LMN$ ,

L M N, comprehedentes pentagonum, & triangulum.  
Quia ut in idem Socius comprehendit & Dodecaedri pen-  
tagonum, & Icosaedri tri-  
gulum, & æquales erunt id-  
circo circuli F G H I K,  
L M N, Ac propterea per  
lemma: præcedens, equa-  
liter ab E, centro sphaeræ  
distabunt; ideoque perpẽ-  
diculares ex E, in plana cir-  
culorum deducẽ, & in eo-  
rum centra, per coroll. lem-  
matis r. cadentes, quales  
sunt EO, EP, æquales erũt.



Non aliter ostendetur perpendiculares ex E, ad omnia pẽ-  
tagona Dodecaedri, & ad omnia triagula Icosaedri dedu-  
ci æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad  
E, ducantur rectæ lineæ, resolvetur Dodecaedrum in 12 py-  
ramides æqualium altitudinum: Ac proinde cum & bases  
ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, equa-  
les inter se, ex coroll. propof. lib. I. Eodemque modo, si  
ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, re-  
solvetur Icosaedrum in 20 pyramides inter se æquales; qua-  
rum altitudines æquales erunt altitudinib; pyramidem Ico-  
sædri. Quoniam autem est, ut basis F G H I K, ad basin  
L M N, ita pyramis P G H I K E, ad pyramidem L M N E, cum  
utriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in  
scholio propof. lib. 3 demonstrauimus, ut duodecim bases  
Dodecaedri, tota uidebitur superficies Icosaedri, ad basin  
L M N, ita quoddecim pyramides Dodecaedri, hoc est totum  
solidum Dodecaedri, ad pyramidem L M N E. Rursum quis  
est, ut tota superficies Dodecaedri, ad Icosædri basin L M N,  
ita Dodecaedrum, ad pyramidem L M N E; erit, per idem  
scholion, ut tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Ico-  
sædri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum  
ad 20 pyramides Icosædri, nempe, ad totum solidum Ico-  
sædri. Atque ita est Dodecaedri superficies ad Icosædri su-  
perficiẽ, ut cubi latus ad Icosædri latus eiusdẽ cũ ipsi sphae-  
ræ, atque gæo, ex scholio propof. 1. o. huius lib. ut latus cu-  
bi ad

6. duodec.

9. quater de

bi ad latus Icofaedri cuiuscunque alterius sphaerae unitis. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icofaedrum, ut latus cubi ad latus Icofaedri cuiuscunque sphaerae. Quapropter Dodecaedrum ad Icofaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

9. quartide.

10. quarti.  
decimi.

11. quarti.  
decimi.

QVONIAM vero ostensum est quoque, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icofaedri eiusdem sphaerae, ut latus cubi ad latus Icofaedri in eadem cum ipsis sphaera: Item ita esse cubi latus ad latus Icofaedri unius eiusdemque sphaerae, ut est linea potens totam diuisam quamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: Item ita esse Dodecaedrum ad Icofaedrum eiusdem sphaerae, ut latus cubi ad latus Icofaedri in una eademque sphaera: Perspicuum est, has quatuor proportionibus, nimirum lateris cubi ad latus Icofaedri; & superficiem Dodecaedri, ad superficiem Icofaedri; & lineam potentis totam quamcunque secunda extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icofaedrum eiusdem sphaerae, esse inter se aequales.

0.  
12

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab uno angulo ad latus oppositum deductæ.

9. primi.

IN triangulo æquilatere ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, sesquitertium esse quadrati perpendicularis AD. Quoniam ob æqualitatem laterum AB, AC, anguli B, & C, æquales sunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autem & latus AD, commune, uel AB, AC, æqualia. Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia sunt; ac propterea latus BC, hoc est, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco



26. primi.

circò quadratum lateris  $AB$ , quadruplum quadrati recte  $B D$ , ex scholio propof. 4. lib 2. Cum igitur quadrato recte  $AB$ , æqualia sint quadrata rectarum  $AD$ ,  $B D$ , erunt quoque quadrata rectarum  $AD$ ,  $B D$ , quadrupla quadrati recte  $B D$ ;  $Ac$  proinde, qualium partium 4 est quadratum recte  $AB$ , uel quadrata rectarum  $AD$ ,  $B D$  trahum: 1. erit quadratum recte  $B D$ , ideoque talium 3. quadratum reliquum recte  $AD$ . Quare quadratum recte  $AB$ , partium 4. fequitertium est quadrati recte  $AD$ , partium 3. Latus igitur trianguli æquilateralis potentia fequitertium est, &c. Quod ostendendum erat.

47. primi.

## COROLLARIUM.

Hæc manifestum est, lineam perpendicularem ex uno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est  $B D$ , &  $C D$ , rectas æquales esse, hoc est, latus  $BC$ , secari bifariam a perpendiculari  $AD$ . Quæ cum latera  $AB$ ,  $AD$ , trianguli  $ABD$ , æqualia sint lateribus  $AC$ ,  $AD$ , trianguli  $ACD$ , & basis  $BD$ , basi  $CD$ , æqualis; Erunt & anguli  $BAD$ ,  $CAD$ , æquales, id est, angulus  $BAC$ , bifariam secabitur ab eadem perpendiculari  $AD$ .

2. primi.

## THEOR. 13. PROPOS. 13.

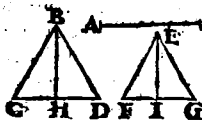
O.

13.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis;  
Erit tam superficies Tetraedri, quam Octæedri in ea sphæra, Media.

SIT sphæræ diameter Rationalis  $A$ . Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octæedri in dicta sphæra, esse Media.

Sit enim  $BCD$ , unum triangulum Tetraedri, &  $EFG$ , Octæedri illius sphæræ, ducaturque ex angulis  $B$ , &  $E$ , ad latera opposita  $CD$ ,  $FG$ , perpendiculares  $BH$ ,  $EF$ . Quoniam igitur quadratæ diametri  $A$ , fequal



terum est quadrati lateris Tetraedri  $BC$ , & duplū quadrati lateris Octæedri  $EF$ , habebūt quadrata recta  $u$   $A$ ,  $BC$ ,  $EF$ , proportionē, quā numeri 6.4. 3. ideoque commensu-

14. tertij dec

14. tertij dec

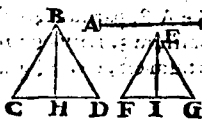


6. decimi.

commensurabilia erunt. Quare & lineę ipse  $A, BC, EF$ , commensurabiles existent, saltem potentia. Atque adeo, cum  $A$  ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales  $BC, EF$ , & idcirco & earum dimidia Rationales erunt  $CH, FI$ .

12. quarti-decimi.

R. P. R. S. V. S., quia tam quadratum rectę  $BG$ , quadrati rectę  $BH$ , quam quadratum rectę  $EF$ , quadrati rectę  $EI$ ,



6. decimi.

scilicet utrumque est; habebunt, tam quadrata rectarum  $BG, BH$ , quam quadrata rectarum  $EF, EI$ , proportionem inter se, quam numeri 4, 3. ideoque tam illa, quam hæc inter se commensurabilia erunt.

12. decimi

Quare & tam lineę ipse  $BC, BH$ , quam lineę  $E, F, EI$ , commensurabiles existent. Est autem & tam  $CH$ , ipsi  $BC$ , quam  $FI$ , ipsi  $EF$ , dimidia videlicet totius, commensurabiles. Igitur & tam  $BH, CH$ , quam  $EI, FI$ , commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum  $CH, FI$ , ostensæ sint Rationales, erunt quoque  $BH, EI$ , Rationales. Quoniam vero tam  $CH, BH$ , quam  $FI, EI$ , longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propof. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quā 1, ad 3, cum ostensum sit talium partium 1. esse tam  $CH$ , quam  $FI$ , qualium 3. est tam  $BH$ , quam  $EI$ .) Erunt tam  $CH, BH$ , quam  $FI, EI$ , Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac proinde tam rectangulum sub  $CH, BH$ , Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub  $FI, EI$ , Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula  $BCD, EFG$ , æqualia rectangulis sub  $CH, BH$ , & sub  $FI, EI$ , ex scholia propof. 41. lib. 1. cum bases, triangulorum  $CD, FG$ , duplæ sint basiū rectangulorum  $CH, FI$ . Igitur & triangula  $BCD, EFG$ , Media erunt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri triangulo  $BCD$ , sit commensurabilis, (est enim triangulum  $BCD$ , totius superficiæ quarta pars.) Item tota superficies Octaedri triangulo  $EFG$ , commensurabilis; (Est enim triangulum  $EFG$ , totius superficiæ quarta pars.) Erunt quoque, ex coroll. propof. 24. lib. 10. superficies Te-

9. decimi.

12. quarti-decimi

12. decimi.

trac-

tracdr, & Octaedri, Medie. Si igitur sphaerae diameter sit  
Rationalis, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

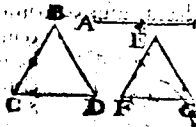
De p[ro]p[ri]etate demonstratione huius propositionis, omne  
triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse Super-  
ficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera  $BC$ ,  $EF$ , & ob id eorum  
dimidia  $CH$ ,  $FI$ , Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tan-  
to rectius  $CH$ ,  $BH$ , quam  $FI$ ,  $HI$ , esse Rationales potentia tantum  
æquivalentes, ut promissa triangula sub  $CH$ ,  $BH$ , & sub  
 $FI$ ,  $HI$ , hoc est, triangula  $BCD$ ,  $EFG$ , ipsæ æqualia, esse media.  
Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius  
unum latus sit Rationale, perspicuum est, quod niliterur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum ei-  
dem sphaerae inscribuntur, erit: basis Tetrae-  
dri sesquiertia basis Octaedri: Superficies  
autem Octaedri sesquialtera superficier Te-  
traedri.

S i 7. sphaerae diameter  $A$ , in qua descripti Tetraedri ba-  
sis sit triangulum  $BCD$ , Octaedri vero basis triangulum  
 $EFG$ . Dico triangulum  $BCD$ , sesquiertium esse triangu-  
lo  $EFG$ ; At vero superficiem Octaedri esse sesquialteram  
superfici Tetraedri. Quoniam.

quadratum diametri  $A$ , sit quod-  
libet est quadratum lateris Tetrae-  
dri  $CD$ ; duplum vero quadrati  
lateris Octaedri  $FG$ ; sit, ut qua-  
dratum patrum 6. fuerit quadratum  
diametri  $A$ , talium 4. sit quadra-



trum lateris  $CD$ , & talium 2. quadratum lateris  $FG$ . Qua-  
se quadratum rectæ  $CD$ , sesquiertium est quadratum rectæ  
 $FG$ : Vt autem quadratum rectæ  $CD$ , ad quadratum rectæ  
 $FG$ , ita est: triangulum  $BCD$ , ad triangulum  $EFG$ . quia

13. tersyder.

14. tersyder.

tam

10. & 19.  
sexti.

tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum CD, FG, duplicatam, cum sint similia. Igitur & triangulum BCD, sesquitergium est trianguli EFG.



R V R S V 3, quoniam ostensum est triangulū BCD, sesquitergium trianguli EFG; Ac propterea qualem partem 2. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulū EFG; Efficitur, ut, triangulū EFG, octies semper, hoc est, som

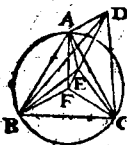
superficies Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulū BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiē Tetraedri eiusdem sphaerae. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphaerae inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

0.  
I 5.

### THEOR. 15. PROPOS. 15.

**R E C T A** linea ex angulo quouis Tetraedri in sphaera descripti per centrum sphaerae ducta, cadit in centrum basis oppositae, estque perpendicularis ad dictam basim.

S i t Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis aequaliteris, & aequalibus ABC, DAB, DBC, DCA, in sphaera, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E, centrum sphaerae recta D E F, in eadem in basim ABC, circulo inscriptam, ad punctum F. Dico F, esse centrum basis ABC, & D F, perpendicularē esse ad eandem basim.



Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictae basis rectis EA, EB, EC, FA, FB, FC, quoniam rectae EA, EB, EC, ductae ex centro sphaerae ad eius superficiem, aequales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, aequalia duobus lateribus

bas EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli AED, CED, æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt; eo quod ita AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquivalent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, equalia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF; & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, si considerentur triangula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; erit F, centrum basis ABC, seu circuli eam circumferentis.

2. primi.

3. primi.

4. primi.

9. 1. 1. 1.

Quæritur autem ex coroll. lemmatis. 1. propof. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli ABC, ducta in centrum circuli cadit; efficitur, ut recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli; haberet unus idemque circulus duo centra; quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

0.  
16.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis uero utriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ.

Sit Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & equalibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in sphæra descriptum, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium



ergo EG, FG, sint semidiametri sphaerae aequales, perspicuum est, dictas pyramides esse aequalium altitudinum. Rursus quia AC, est diameter sphaerae; erit eius quadratum duplum quadrati lateris AD; Ac propterea aequale duobus quadratis laterum AD, DC. Quare angulus ADC, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est: Sed & aequilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere octaedri AB, constat, ipsum esse subduplum quadrati diametri sphaerae. Octaedrum ergo in sphaera descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

14. terijde.

18. prima.

14. terijde.

SCHOLION.

MULTO breuius hanc propositionem demonstramus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione octaedri. Veruntamen quia hic demonstratur a Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

o.

17.

TETRAEDRVM sphaerae impositum ad Octaedrum in eadem sphaera descriptum se habet, ut rectangulum sub linea potente uigintisepte sexagesimas quartas partes quadrilateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum ad quadratum diametri sphaerae.

V. R. L. Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphaerae impositum

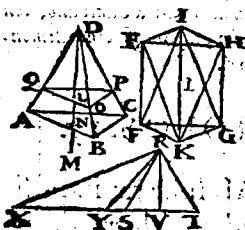
H h

tum

tum ad octaedrum in eadem sphaera descri-  
ptum se habet, ut rectangulum sub linea,  
quæ potentia est subsesquitercia triū quar-  
tarum partium lateris tetraedri, & sub li-  
nea superquintupartiente uigessimis septi-  
mas partes earundem trium quartarum par-  
tium lateris tetraedri contentum, ad qua-  
dratum diametri sphaeræ.

SIT Tetraedrum ABCD, & octaedrum EFGHIK, in  
una eademque sphaera, cuius centrum L. Ducatur ex an-  
gulo D, per centrum L, diameter sphaeræ DM, incidens in  
basin ABC, ad punctum N. Erit igitur N, centrū basis A. B. C,

15. quar-  
tidecimi.



& DN, perpendicularis ad eā  
dem basin. Quia uero pars  
diametri LN, inter centrum  
sphaeræ & basin tetraedri, est  
sexta pars diametri, & tertia  
pars semidiametri, per co-  
roll. 2. propos. 13. lib. 13. Erit  
DL, semidiameter talium par-  
tium 3. qualium 7. est LN;  
Ac propterea DN, talium 4.

Ducatur deinde, ex scholio propos. 14. lib. 11. per centrum  
L, planum OPQ, parallelum plano ABC; eruntque rectæ  
QQ, OP, PQ, parallelæ rectis AB, BC, CA; Ac propter ea  
triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquila tero  
ABC, cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli  
singulis; At ABC, est æquiangulum, ex coroll. propos. 5. lib.  
1. Igitur & QOP, æquiangulum erit; Ac propterea & equi-  
laterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi A B C;  
Sunt autem & trianguia DQO, DOP, DQP, triangulis  
DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4.  
lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt, ex de-  
fin. 9. lib. 11. Rursus quia plana parallelæ ABC, QOP, secant  
rectas DN, DC, proportionaliter; erit ut DN, ad DL, ita  
DC,

16. undec.

10. undec.

17. undec.

DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, ut 4 ad 3. (cum ostē-  
sum sit DN, esse altum partium 4. qualium 3. est DL.) Igi-  
tur & DC, ad DP, erit ut 4. ad 3. Ac proinde, cum pyrami-  
des similes habeant proportionem laterum triplicatam; erit  
pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, ut 64. ad 27. hęc  
enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. ut constat  
in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi  
in proportionē 4. ad 3. ut constat ex 2. propos. lib. 2. Rursus  
quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam;  
erit quadratum rectę DC, ad quadratum rectę DP, ut  
64. ad 36. ut in iisdem numeris constat.

8. duodec.

10. sexti.

Si igitur triangulum æquilaterum RST, æquale trian-  
gulo DQP, demittaturq; ex R, ad ST, perpendicularis RX.  
Eritq; latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquiter-  
cium perpendi. uaris RV. Ac proinde qualium partium 36.  
fuit quadratum rectę DP; talium 27. erit quadratum rectę  
RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectę  
DC. Igitur linea RV, est potens uigintiseptem sexagesimas  
quartas partes quadrati lateris tetraedri.

12. quarti  
decimi.

Reversus uero extensa TS, fiat TX, ad TS, ut 64. ad 27. ex  
coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bisariam in Y, ut sit  
TY, talium partium 32. qualiū 27. est TS, seu illi æqualis DP.  
Quoniam uero proportio DC, ad DP erat, ut 4. ad 3. nempe  
sesquitercia, erit DC, talium partium 36. qualiū DP, est 27. (pro-  
portio enim 6. ad 27. est sesquitercia) Ac propterea qualiū  
partium TY, est 32. Quare linea TY, continet octo nonas par-  
tes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedrum A B.  
CD, ad octaedrum EFGHIK, ut rectangulū contentū sub rec-  
tę RV, (quę potest uigintiseptē sexagesimas quartas partes  
quadrati lateris DC) & sub rectę TY, (quę continet octo no-  
nas partes eiusdē lateris) ad quadratū diametri spherę DM.

1. sexti.

Cum enim ductis rectis RX, RY, triangulum RTX, du-  
plum sit trianguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis  
TY: Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum  
eiusdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æqua-  
le rectangulo sub RV, TY. Ac propterea erit ut trian-  
gulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulū sub RV,  
TY, ad idem triangulū RST: Est autem triangulum RTX,  
ad triangulum RST, ut basis TX, ad basin ST, nimirum

41. primi.

7. quinti.

1. sexti.

Hh 2

ut 64.





tas partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, cum recta RT, sit potentia sesquitercia recte RV, erit RV, potentia subse-  
 quitercia ipsius RT, nempe trium quartarum partium late-  
 ris Tetraedri. Rursus quia TY, fuit aliud partium 32. qua-  
 lium 27. ST, seu DP, (tres videlicet quarta partes lateris te-  
 traedri.) erit TY, superquintipartiens vigesima septimas par-  
 tes ipsius ST, nimirum triam quartarum partium lateris te-  
 traedri. Quare constat, esse quoque tetraedrum ABCD, ad  
 octaedrum EFGHIK, ut rectangulum sub RV, qua potentia  
 subsequitercia est trium quartarum partium lateris tetraedri,  
 et sub TY, quæ superquintipartiens est vigesima septimas  
 partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri,  
 ut volebat Campanus.

12. quarti-  
decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppo- sitam demissa; tripla est eius perpendicula- ris, quæ ex centro trianguli ad eandem ba- sin deducitur.

o.  
17,

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamq; bisariam dividet, ex coroll. 2. propof. 10. lib. 13. Dico AE, triplam esse rectæ DE, quæ scilicet perpendicularis est e centro ad basin du- cta. Ductis enim rectis BD, CD, cum late- ra DA, DB, trianguli ADB, æqualia sint la- teribus DB, DC, trianguli BDC, e centro e- nim ducuntur; sit autem & basis AB, basi BC, æqualis & erunt triangula ADB, BDC, æqualia ex co- roll. propof. 2. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare, ob æqualitatem trium trian- gulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum est trianguli BDC. Quoniam uero rectangulum sub AE, EB,



triangulo ABC, & rectangulū sub DE, EB, triagulo BDC, æquale est, ex scholio propof. 4. lib. 1. cū basis triaguli BC, dupla sit basis BE, utriusq; rectanguli: Erit quoq; rectangulum sub AE, EB, triplum rectanguli sub DE, EB: Est autē ut rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub DE, EB, eiusdem altitudinis EB, ita basis AE, ad basin DE. Igitur & AE, tripla est ipsius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

1. sexti.

## COROLLARIUM.

ITAEQUE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliquæ rectæ AD, inter angulum, & ceterum comprehensæ. Cum enim AB, tripla sit ipsius DE, qualem partium 3. ponetur AB, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AB, sesquialtera erit ipsius AD.

Ex quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

o.

## THEOR. 19. PROPOS. 19.

17.

SI octaedrum sphaeræ inscribatur; erit semidiameter sphaeræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphaeræ in basin quamcunq; octaedri deducitur.

SEI basis aliqua octaedri in sphaera, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro sphaeræ D, perpendicularis demittatur DE, ducaturq; semidiameter sphaeræ DB. Dico semidimetrum DB, potentia tri-



plam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphaeræ, qui triangulum ABC, circū scribit, cadat, erit E, centrum trianguli.

Ducta igitur recta BE; quoniam qua-

14. serij de.

dratum diametri sphaeræ duplum est quadrati lateris octaedri AB, & quadruplum quadrati semidiametri sphaeræ DB, ex scholio propof. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6, & quadratum semidiametri

semidiametri

midiametri sphaeræ DB, 3. Quia uero quadratū lateris AB tripulum est quadrati semidiametri circuli triagulum ambiē-  
tis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium par-  
tium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare cum  
quadratum rectæ DB, æquale sit quadratis rectarū BE, DE;  
sit autem quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit  
reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium  
1. Ac proinde quadratum rectæ DB, tripulum est quadrati  
rectæ DE. Si igitur octaedrum sphaeræ inscribatur, &c.  
Quod demonstrandum erat.

12. scrij de.

47. primi.

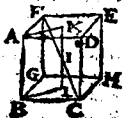
THEOR. 20. PROPOS. 20.

o.

18.

DVPLVM quadrati ex diametro cu-  
iuslibet sphaeræ descripti, æquale est super-  
ficie cubi in illa sphaera collocati: Perpen-  
dicularis autem a centro sphaeræ in aliquam  
basin cubi demissa, æqualis est dimidio late-  
ris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphaera descriptus, cuius  
centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad unam  
basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati dia-  
metri sphaeræ æquale esse superficiei cubi;  
& perpendicularem IK, æqualem esse dimi-  
dio lateris cubi. Cum enim quadratum dia-  
metri sphaeræ tripulum sit quadrati lateris cu-  
bi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi;  
Erit duplum eiusdem quadrati ex diame-  
tro sphaeræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti su-  
perficie cubi.



15. scrij de.

PRODVCTA autem HI, ad basin oppositam BC-  
HG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad pla-  
num AE, recta quoque erit ad planum BH, illi pa-  
rallelum, per scholion propos. 14. lib. 11. Rursus, quia  
AB, KL, parallelae sunt, quod rectæ sint ad planum AE,

6. undec.

Hh 4

ducatur

16. undec.

ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis A E, B H, communes sectiones, lineas rectas A K, B L, quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit A B L K; atque adeo recta K L, æqualis lateri cubi A B. Quoniam uero perpendicularis K L, e centro sphaeræ I, cadit in bases A E, B H, ad puncta K, & L; erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambiensium in sphaera, per coroll. lemmatis 1. propof. 10. huius libi. Quare K L, in centro I, bifariam secabitur a dicta diametro C F, ut in coroll. 1. propof. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea, cum K L, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit I K, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphaeræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.



### C O L L A R I U M

15. terijde.

31. undec.

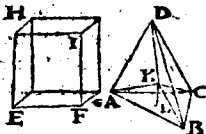
Ex dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphaeræ dictum cubum comprehendens, æquale esse cubo. Cum enim quadratum diametri sphaeræ triplum sit quadrati lateris cubi; erunt duo quadrata A E, B H, duæ tertie partes quadrati diametri sphaeræ: Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex I K, dimidio lateris cubi in A B, tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, æquale esse solido, quod fit ex I L, dimidio lateris cubi in B H, tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphaeræ, æquale esse toti cubo: Quod est propositum.

ALITER proponi potest hoc corollarium, ut dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, æquale esse cubo. Nam cubus B B, producit ex B A, latere cubi in quadratum A B, quod est tertia pars quadrati diametri sphaeræ: Ut perspicuum est.

### S C H O L I O N

UNIVERSE autem Solidum, quod fit ex perpendiculari a centro cuiusvis corporis regularis ad aliquam eius basim ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. Sin enim corpus, regulare quod-

quodcunque  $ABCD$ , contentum planis  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$ ,  $BCD$ , solidum autem  $EFGH$ , contentum sub  $E, I$ , tertia parte superficiæ corporis  $ABCD$ , & sub altitudine  $FG$ , quæ æqualis sit perpendiculari  $KL$ , ducta ex centro  $K$ , ad basim  $ABC$ . Dico solidum  $EFGH$ , æquale esse dato corpori regulari  $ABCD$ . Nam ductis ex centro  $K$ , rectis  $KA, KB, KC, KD$ , ad omnes angulos corporis, resolvetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant bases, & altitudines. Cum enim circuli distas bases ambientes, æquales sint, ipsi æqualiter a centro distabunt, per lemma 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex  $K$ , centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam uero prisma contentum sub basi  $ABC$ , & altitudine  $KL$ , triplum est pyramidis  $ABCK$ , per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine  $KL$ , tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine  $KL$ , (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis  $ABCD$ . Quamobrem, cum idem prisma triplum sit prismatis  $EFGH$ , quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida  $EFGH, ABCD$ , æqualia. Quod est propositum.



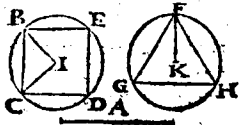
. THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphaeræ.

IN sphaera, cuius diameter  $A$ , intelligatur descriptus cubus, cuius unum quadratum  $BCDE$ , & octaedrum, cuius unum triangulum  $FGH$ . Dico eundem circulum circumscribere & quadratum  $BCDE$ , & triangulum  $FGH$ , hoc est, circulos  $BCDE, FGH$ , ipsa circumscribentes, esse æquales.

15. *serijde.*47. *primi.*

les. Sint enim rectæ e centrīs IB, KF. Quia igitur quadratū diametri A, triplum est quadrati lateris cubi BC; & quadratum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; ( Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum subtendat quadrantē; Ac proinde quadratum rectæ BC, æquale erit quadratis restarum BI, IC. Quare cū restarum equalium BI, IC, equalia sint quadrata; duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BI. ) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rursus quia quadratum diame-

14. *serijde.*12. *serijde.*

tri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG; & quadratū lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI; equalia erunt quadrata restarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

## COROLLARIUM

21. *quarti  
decimi.*

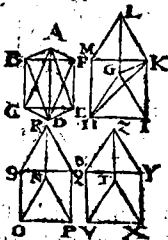
Hæc fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulo- rum, qui bases oppositas tam cubi quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphaeræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæc in centra circulo- rum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt a centro sphaeræ, ex lem- mate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes restarum, quæ centra oppositarum basium connectunt ( Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. ) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. Quod est propositū.

## THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem sphaeræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum

plum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphaera inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHK. Dico ita esse octaedri ad triplū tetraedri, ut latus BF, ad latus H I. Ducta enim in octaedro diametro AD, dividetur octaedri in quatuor pyramides, quarum latus cōmune est ipsa diameter AD, & uertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD in BDF, cuius basis BDF; in CDEA, cuius basis CDA; & in DEF A, cuius basis DEF; quae quidem omnes bases infra quadratū BCEF, existunt continentes cum ipso dimidiatam partem octaedri. Quoniam uero quolibet harum pyramidū constat duobus triangulis equi-



lateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quę qm latus ipsorū commune est AD, diameter, & reliqua latera ipsius octaedri latera existunt, inter se quales sunt; efficitur has quatuor pyramides æquales esse inter se, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Constituantur super GHI, basin tetraedri, prisma GHIKLM, eiusdem cū tetraedro altitudinis; quod ipsius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propof. 7. lib. 1. 2. Rursus; super basin octaedri NOP, & TVX, basi tetraedri æqualem, constituentur duo prismata NOPQRS, TVXYZ, eiusdem cum octaedro, seu pyramide ACDE, altitudinis. Quę igitur GHI, hoc est, TVX, basis tetraedri sesquitertia est ipsius NOP, basis octae-

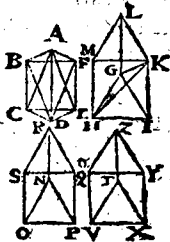
8. primi.

dri: Erit quoq; prisma TVXYZ, prismatis NOPQRS, sesquitertiu, cū prismata eiusdem altitudinis sint, ut bases, ex ijs, quę ad propof. 7. lib. 1. 2. demonstrauimus. Est aut & octaedri ABCDEF, eiusdem prismatis NOPQRS, sesquitertiu; (Nā prisma æquale est tribus pyramidibus, ex coroll. 1. propof. 7. lib. 1. 2. qualiū quatuor continere dixim⁹ octaedri) Igitur æquale est octaedrum prismati TVXYZ. Quia uero prisma TVXYZ, ad prisma GHIKLM, proportionē habet, quā altitudo illius ad altitudinē hui⁹, ex s. holiō. p. propof. 14. lib. 1. 2. Est aut altitudo prismatis TVXYZ, quod octaedro

14. quartū.  
decimi.



octaedro æquale est, eadem quæ octaedri, ex constructione : Erit quoque octaedrum ad prismam  $GHIKLM$ , hoc est, ad triplum tetraedri  $GHIK$ , ut altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Est autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra basium oppositarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra basium oppositarum connectenti, per coroll. propos. 21. huius lib. Atque ut latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita est latus octaedri ad latus tetraedri. ( Nam tam quadratū lateris cubi ad quadratū altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, est, ut 3. ad 4. Posito enim quadrato diametri sphaeræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propos. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, est ut 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphaeræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratū lateris tetraedri 4. &c. ) Est igitur octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque tetraedrum eidem sphaeræ inscribantur, &c. Quid demonstrandum erat.



18. tersi de.

COROLLARIUM.

Ex dictis inferitur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphaeræ ad latus tetraedri, ut latus octaedri ad latus cubi. Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram.

18. tersi de.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

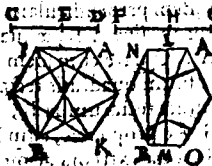
SI recta linea proposita potuerit totam aliquam

aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosædri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphaeræ, cuius recta linea proposita diametèr existit.

POSSIT recta  $AB$ , rectam  $CD$ , & eius segmentum maius  $CE$ ; Item rectam  $FG$ , & eius segmentum minus  $HG$ . Dico  $CE$ , esse latus Icosædri, &  $HG$ , latus Dodecaedri eius sphaeræ, cuius  $AB$ , diametèr existit. Intelligitur enim in sphaera, cuius diametèr  $AB$ , descriptum Icosædron  $AI BK$ , & Dodecaedron  $AN O$ . Lateralibus deinde Icosædri oppositis  $AI$ ,  $BK$ , connectantur rectæ  $IB$ , quæ subcendit unum angulum pentagoni ex Icosædri lateralibus compositi, ut eò fiat ex propo. 16. lib. 13. quod etiam uidere licet in aliquo Icosædro materiali. Quia uero  $AI BK$ , latera opposita parallela sunt, per coroll. 2. propo. 15. lib. 13. erunt anguli

$AIB$ ,  $IBK$ , æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametèr  $IK$ , cum latera  $AI$ ,  $IB$ , trianguli  $AIB$ , æqualia sint lateribus  $KB$ ,  $BI$ , & bases quoque  $AB$ ,  $IK$ , æquales; Erunt anguli  $AIB$ ,  $IBK$ , æquales) recti erunt, ideoque quadratum rectæ propositæ  $AB$ , æquale

erit quadratis rectarum  $AI$ ,  $IB$ . Erat autem idem quadratum rectæ  $AB$ , æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum  $CD$ ,  $CE$ . Igitur quadrata rectarum  $IB$ ,  $IA$ , æqualia sunt quadratis rectarum  $CD$ ,  $CE$ ; Ac propterea cum  $CE$ , sit maius segmentum ipsius  $CD$ , diuisæ extrema ac media ratione; Item  $IA$ , maius segmentum ipsius  $IB$ , similiter diuisæ; (Nam  $IB$ , subcendit angulum pentagoni, cuius latus est,  $IA$ , latus Icosædri. Constare autem, rectæ subcendentis angulum pentagoni,



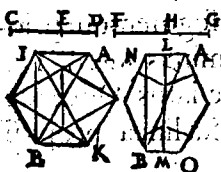
29. primi.

8. primi.

47. primi.

8. *versijdec.* tagoni, si secetur extrema ac media ratione, maius segmen-  
tum esse equale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit CE,  
2. *quartide.* ut CD, ad CE, ita IB, ad IA, erit quoque ut quadratum

22. *sexti.*



14. *quinti.*

rectæ CD, ad quadratum re-  
ctæ CE, ita quadratum rectæ  
IB, ad quadratum rectæ IA;  
Ac componendo, ut quadrata  
rectarum CD, CE, ad qua-  
dratum rectæ CE, ita quadra-  
ta rectarum IB, IA, ad quadra-  
tum rectæ IA: Ostensa sunt

autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata re-  
ctarum IB, IA: Igitur & quadrato rectæ CE, æquale est  
quadratum rectæ IA: Idcirco rectæ CE, IA, æquales  
sunt. Quod est propositum.

33. *primi.*

R. V. N. B. V. S. latera Dodecaedri opposita AN, BO, secen-  
tur bisariam in L, & M, punctis, quæ recta LM, & ipsa la-  
tera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM,  
æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3, propol. 17. lib. 13.  
erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Est autem  
recta LM, secans latera opposita bisariam, perpendiculari-  
tis ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & NB,  
ad eadem perpendicularis erit; Ac proxime quadratum re-  
ctæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB,  
NA.

47. *primi.*

Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale  
sit positum quadratis rectarum FG, HG, æqualia erunt  
quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG,  
HG. Ac propterea, cum HG, sit minus segmentum ipsius  
FG (secetur extrema ac media ratione; Item NA, minus  
segmentum ipsius NB, hoc est, ipsius LM, similiter divi-  
se, per coroll. 4: propol. 17. lib. 13. æquale erit HG, mi-  
nus segmentum ipsius NA, lateri Dodecaedri. Quod qui-  
dem non aliter ostendimus, ac supra demonstravimus CB,  
maius segmentum æquale esse ipsi IA, lateri Icosaedri. Si  
recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam  
sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmen-  
tum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius seg-  
mentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Ico-  
sædri;

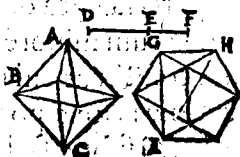
saedri; minus autem segmentum posterioris, &c. Quod erat ostendendum:

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphaera descripti duplum minoris segmenti.

P. 24. 1. latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem sphaeræ inscriptum Icosaedrum GH, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF.

Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius unum angulum subtendit recta GI, erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuise extrema ac media ratione; Ad proinde composita recta ex GI, GH, scabitur similiter in G, puncto, extrema ac media ratione. Quia uero quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, ut in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, ut quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: Est autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam cum sit ut GI, ad GH, ita DE, ad EF: Erit quoq;



8. tertijdec.

5. tertijdec.

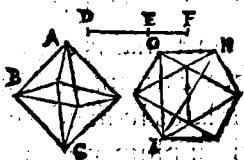
47. primi.

14. tertijdec.

2. quattide.

ut qua-

21. *secuti.* ut quadratum rectæ G I, ad quadratum rectæ G H, ita quadratum rectæ D E, ad quadratum rectæ E F, & componendo, ut quadrata rectarum G I, G H, ad quadratū rectæ G H,



ita quadrata rectarum D E, E F, ad quadratū rectæ E F. Et permutando, ut quadrata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum D E, E F, ita quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ E F.) Quadratum igitur rectæ G H, du-

plum quoque est quadrati rectæ E F. Quare si latus Octaedri ponere maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.

### THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subduple ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphaeræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta A B, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta A D, quæ æqualis sit minori segmento A C, angulum rectum A, cui recta subtendatur B D, sitq; recta E, potentia subduple ipsius B D. Dico E, latus esse octaedri illius sphaeræ, in qua A D, uel A C, latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propof. 17. lib. 13. maius segmentum B C, latus sit cubi illius sphaeræ, cuius minus segmentum A C, uel A D, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphaeræ potentia tripla maioris seg-



ris segmenti BC, nempe lateris cubi: Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadrata igitur diametri sphaeræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphaeræ. Quare cum diameter sphaeræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD. Erit E, latus Octaedri eiusdem sphaeræ, cuius AD latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

4. tertijdec.

14. tertijdec.

## COROLLARIUM.

QUONIAM uero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri; ut constat ex his, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC sit maius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisa: Peripicuum est, si linea quæuis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum esse latus Dodecaedri eiusdem sphaeræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

18. tertijdec.

## THEOR. 26. PROPOS. 26.

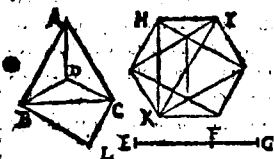
SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: latus Icosaedri eidem sphaeræ inscripti sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuisæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icosaedri HI K, eiusdem sphaeræ. Dico HI, rectam potentia esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, unum angulum peritagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta I K, diameter. Quia igitur HI, est maius segmentum re-

8. tertijdec.

5. *tertydec.*  
22. *primi.*  
48. *primi.*

At  $H K$ , diuise extrema ac media ratione; Erit quoque composita  $K H I$ , diuisa eodem modo in  $H$ , maiusque segmentum  $H K$ , & minus  $H I$ . Fiat ex rectis  $B C$ ,  $E F$ ,  $F G$ , triangulum  $B C L$ , ita ut  $B L$ , recta ipsi  $E F$ , &  $C L$ , ipsi  $F G$ ,



2. *quartide.*

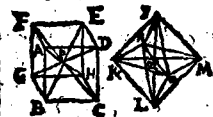
6. *sexti.*  
4. *sexti.*  
13. *tertydec.*

sit æqualis: Eritque angulus  $L$ , rectus, quod recta  $B C$ , ponatur posse rectas  $B L$ ,  $C L$ , hoc est, rectas  $E F$ ,  $F G$ . Est autem & angulus  $I H K$ , rectus, ut propos. 23. huius lib. ostendimus; Estq; ut  $B L$ , ad  $L C$ , ita  $K H$ , ad  $H I$ . Igitur triangula  $B L C$ ,  $K H I$ , equiangula sunt: Ac propterea ut  $K I$ , ad  $I H$ , ita  $B C$ , ad  $C L$ ; & permutando, ut  $K I$ , ad  $B C$ , ita  $H I$ , ad  $C L$ . Atqui  $I K$ , diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri  $B C$ . Ergo &  $H I$ , latus Icosaedri erit potentia sesquialtera ipsius  $C L$ , hoc est, minoris segmenti  $F G$ . Si latus itaq; Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

## THEOR. 27. PROPOS. 27.

$C V B V S$  ad Octaedrum in eadē cum ipso sphaera descriptum est, ut superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item ut latus cubi ad semidiametrum sphaeræ.

**S I N T** in eadem sphaera cubus  $A B C D E F G H$ , & Octaedrum  $I K L M N O$ , quorum centra  $P$ , &  $Q$ . Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiē Octaedri; nec



non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphaeræ. Ductis enim ex centrīs  $P$ , &  $Q$ , ad omnes angulos

cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines: (cum enim circuli descripti circa pyramides, seu cubi bases æquales, sint æquales,

ac

ac propterea æqualiter a centro sphaeræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulatorum, seu basium distarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales. per lemma 2. propof. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. Quoniam autem idem circulus cõplectitur & cubi quadratum, & Octaedri triangulum; æqualiter distant bases pyramidum cubi, & Octaedri a centro sphaeræ; per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, ut una pyramis cubi ad unam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propof. 6. lib. 12. Ac proinde, ex ijs, quæ in scholio propof. 4. lib. 3. demonstravimus, ut sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoq; rursus, ex eodẽ scholio, ut cubus ad octuplũ pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrũ, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

st. quæri-  
decimi.

SINT rursus in eadem sphaera cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK, sitque diameter sphaeræ, seu Octaedri EG, & centrũ L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM; Item ex semidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam uero quadratũ IFKH, lateris Octaedri, basis existens duarũ pyramidum, in quas Octaedrum scari diximus propof. 16. huius lib. sesquialterum est quadrati BD, lateris cubi BCD. Est autem & recta AB, rectæ BM, sesquialtera, ex constructione; recipiuntur bases IFKH, BD, & altitudines AB, BM: Ac propterea parallelepipedũ super basim IFKH, & sub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo super basim BD, & sub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rursus quia recta EL, rectæ EN, tripla esset & parallelepipedũ super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplũ parallelepipedũ super eandem basim, & sub altitudine EN, ut in scholio propof. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplum est pyramidis IFKHE, ex corollario 1. propof. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo

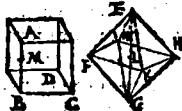
18. sesq; dec.

34. undec.

I 1 2 super



16. quæritur



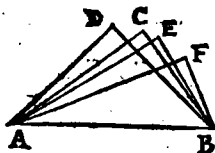
super basim I F K H, & sub altitudine E N : Atqui huius parallelepipedum duplum est parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ex scholio prop. 14. lib. 2. quod, & altitudo L N, dupla sit altitudinis E N ; Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E . Aequale igitur erit parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterum quia parallelepipedum super basim I F K H, & altitudinis B M, est ad parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ut altitudo B M, ad altitudinem L N, ex scholio prop. 14. lib. 12. Ut autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L. ( Cum enim sit ut A M, ad M B, ita E N, ad N L ; & componendo, ut A B, ad B M, ita E L, ad L N ; erit quoque permutando, ut A B, ad E L, ita B M, ad L N. ) Et parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale est, ostensum cubo A B C D ; Et parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, æquale Octaedro E F G H I K . Igitur erit quoque ut cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, semidiametrum sphaeræ . Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quod circa eubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphaera descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

13. scribitur

Quæritur 1. demonstratur, diametrum sphaeræ, in qua omnia quinque corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita ut, si quadratum diametri ponatur 3. partium, eundem 2. sit quadratum lateris Tetraedri ; per se ipsum est ; si ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in scholio prop. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam, si quadrato diametri constituentur duo quadrata aequalia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem scholio ; maioris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, reliquumque necesse est quadratum 1. partis, da

ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. *U*t si diameter sphaera ponatur  $AB$ , ex cuius quadrato detraxatur quadratum rectae  $AC$ , continens duas tertius partes quadrati diametri  $AB$ ; Vel si constituantur duo quadrata rectarum  $AC$ ,  $BC$ , quadrato diametri  $AB$ , equalia, ita ut quadratum rectae  $AC$ , duplum sit quadrati rectae  $BC$ ; Erit recta  $AC$ , latus Tetraedri.



*R*URSUS cum ostensum sit, diametrum sphaera potentia esse lateris Octaedri; *F*is, si ex quadrato diametri  $AB$ , dematur quadratum rectae  $AD$ , quod dimidium sit quadrati diametri  $AB$ ; Vel si constituantur duo quadrata rectarum  $AD$ ,  $BD$ , quadrato diametri  $AB$ , equalia, & inter se proportionem habentia aequalitatis, secundum doctrinam scholij propof. 33. lib. 6. rectam  $AD$ , latus esse Octaedri.

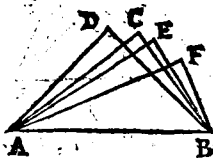
*D*EINDE, quoniam decimus diametrum sphaera potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri  $AB$ , auferatur quadratum rectae  $BC$ , quod tertia pars sit quadrati diametri  $AB$ ; Vel si quadrato diametri  $AB$ , constituantur duo quadrata equalia rectarum  $AC$ ,  $BC$ , ita ut quadratum rectae  $AC$ , duplum sit quadrati rectae  $BC$ , iuxta doctrinam eiusdem scholij propof. 33. lib. 6. Lineam rectam  $BC$ , cubi latus existere. Vel certe cum diameter  $AB$ , possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri  $AB$ , auferatur quadratum lateris Tetraedri  $AC$ , relinqui quadratum lateris cubi  $BC$ : Quemadmodum e contrario, si ex quadrato diametri  $AB$ , tollatur quadratum lateris cubi  $BC$ , remanet quadratum lateris Tetraedri  $AC$ .

*P*RAETEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum; Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphaerae, cuius diameter est recta prior linea; Constat, si quadrato diametri  $AB$ , exhibeantur, iuxta ea, quae in scholio propof. 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata equalia rectarum  $AE$ ,  $BE$ , proportionem habentium; quam recta quavis extre-

23. quarti-  
decimi.

maius media ratione diuisa ad maius segmentum: Rectam mi-  
norem BE, esse Icoaedri latus.

POSTERIOR, quoniam si recta quapiam potuerit totā  
aliquam rectam diuisam extrema  
ac media ratione, & minus illius  
segmentum; Minus segmentum  
latus est Dodecaedri eius spha-  
rae, cuius diameter prior linea;  
Liquet, si quadrato diametri AB,  
constituantur duo quadrata equa-  
lia rectorum AF, BF, propor-



tionem habentium, quam quacunque recta linea extrema ac  
media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam  
BF, latus esse Dodecaedri.

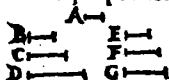
HACTENUS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus  
Candalla de comparatione solidorum regularium eidem spha-  
rae impossibilium scripserunt: Sequentes autem quinque pro-  
pos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5.  
de proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum.

## THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue  
proportionales, nec non & aliæ quatuor;  
ita ut sit eadem antecedens omnium. Erit  
proportio tertiæ ad tertiam proportionis se-  
cundæ ad secundam duplicata; & propor-  
tio quartæ ad quartam eiusdem proportio-  
nis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continue proportio-  
nales; nec non quatuor A, E, F, G, ita ut A, recta antece-  
dens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad  
tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad  
secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam;  
esse

esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundę ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectę B, ad rectam A; habeat autem & quadratum rectę B, ad quadratum rectę A, duplicatam proportionem eiusdem proportionis rectę B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita quadratum rectę B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, ut recta F ad rectam A, ita quadratum rectę E, ad quadratum rectę A: Et conuertendo, ut recta A, ad rectam F, ita quadratum rectę A, ad quadratum rectę E. Quoniam igitur est quadratum rectę B, ad



20. sexti.

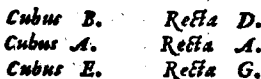
quadratum rectę A, ut recta C, ad rectam A; & quadratum rectę A, ad quadratum rectę E, ut recta A, ad rectam F; Erit ex æquo, quadratum rectę B, ad quadratum rectę E, ut recta C, ad rectam F: Est autem proportio quadrati rectę B, ad quadratum rectę E, duplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & proportio rectę C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectę B, ad rectam E. Quod est primum.

R v n s v s cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectę B, ad rectam A; habeat autem & cubus rectę B, ad cubum rectę A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectę B, ad rectam A; Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus rectę B, ad cubum rectę A.

20. sexti.

Eadem ratione erit ut recta G, ad rectam A, ita cubus rectę E, ad cubum rectę A; Et conuertendo ut recta A, ad rectam G, ita cubus rectę A, ad cubum rectę E. Quia ergo est cubus rectę B, ad cubum rectę A, ut recta D, ad rectam A; & cubus rectę A, ad cubum rectę E, ut recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectę B, ad cubum rectę E, ut recta D, ad rectam G: Est autem proportio cubi rectę B, ad cubum rectę E, triplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & proportio rectę D, ad rectam G,

33. undec.



Eadem ratione erit ut recta G, ad rectam A, ita cubus rectę E, ad cubum rectę A; Et conuertendo ut recta A, ad rectam G, ita cubus rectę A, ad cubum rectę E.

Quia ergo est cubus rectę B, ad cubum rectę A, ut recta D, ad rectam A; & cubus rectę A, ad cubum rectę E, ut recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectę B, ad cubum rectę E, ut recta D, ad rectam G: Est autem proportio cubi rectę B, ad cubum rectę E, triplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & proportio rectę D, ad rectam G,

33. undec.

triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I O N.

*Hoc idem demonstramus ad propos. lib. 2 de quocunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab uno aliquo, eodemque numero incipientium.*

THEOR. 29. PROPOS. 29.

**Q V A D R A T V M** lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

**I N** triangulo æquilatere A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, recta perpendicularis A D, quæ bisariam fecabit latus B C, ut in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. Invenitur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E.

Cum enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, ut perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E. Aequalia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. Quoniam vero quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam late-

13. sexti.



17. septi.

20. sexi.

ris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

ITAEQUE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter AD, & DB, æquale esse triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadē sphæra describantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

SIT quadratum cubicus suis ABCD, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E, ad latus oppositum FG, deducta diuidens FG, latus b fariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum AC ad triangulum EFG, ut latus trianguli EF, ad perpendicularem EH.



Posita epim inter EH, FH, media proportionali IK, cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum sit quadrati lateris cubi AB; sit autem & duplum rectanguli sub latere EF, & dimidio eius FH, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe EF: Erit rectangulum sub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; Ac propterea AB, media proportionalis erit inter EF, FH, hoc est, tres rectæ FH, AB, EF, continue erunt proportionales: Sūt autem & tres rectæ FH, IK, EH, continue proportionales,

18. tertij dec.  
1. sexti.

17. sexti.

ex

28. quarti.  
decimi.

ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit  $FH$ , erit proportio rectæ  $EF$ , ad rectam  $EH$ , tertiæ ad tertiam, p. oportionis rectæ  $AB$ , ad rectam  $IK$ , secundæ ad secundam duplicata. Quare cum & quadratum  $AC$ , rectæ  $AB$ , ad quadratum rectæ  $IK$ , hoc est, ad triangulum  $EFG$ , (est enim ex coroll. propos. 29. huius lib. quadratum rectæ  $IK$ , æquale triangulo  $EFG$ ,) proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ  $AB$ , ad rectam  $IK$ ; Erit quadratum cubi  $AC$ , ad triangulum Tetraedri  $EFG$ , ut latus  $EF$ , ad perpendicularem  $EH$ . Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphaera describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

10. sexti.

# THEOR. 31. PROPOS. 31.

**LATVS** Tetraedri potentia sesquialterū est axis, seu altitudinis ipsius: Axis uero, siue altitudo Tetraedri potētia sesquiter tia est lateris cubi in eadē sphaera descripti.

**SIT** Tetraedri triangulum  $ABC$ , & altitudo, seu axis Tetraedri  $DE$ , latusque cubi eiusdem sphaeræ  $F$ . Dico latus Tetraedri  $AB$ , esse potentia sesquialterum axis  $DE$ : Axem uero  $DE$ , potentia sesquitergium lateris cubi  $F$ . Nam circa

5. quarti.



47. primi.

12. vertydec.

triangulum descripto circulo  $ABC$ , ad centrū  $D$ , in quod uidelicet cadit axis  $DE$ , ut cōstat ex propos. 15. huius lib. ducatur  $AD$ , semidiameter, &  $AE$ , latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris  $AE$ , hoc est, lateris  $AB$ , æquale est quadratis rectarum  $AD$ ,  $DE$ , & triplū quadrati semidiametri  $AD$ ; Fit, ut posito quadrato lateris  $AB$ , seu  $AE$ , partium 6. quadratum rectæ  $AD$ , sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis  $DE$ , talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.

Qvō.

QVONIAM uero latus Tetraedri A B, potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris A B; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, sesquitergium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

18. tertijdec.

COROLLARIUM I.

QVIA uero, posito quadrato lateris A B, partium 6. quadratum diametri sphaerae talium partium est 9. quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem uero partium 4. ostensum est quadratum axis D E; perspicuum est, diametrum sphaerae potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde, cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialtera enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, ut in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

13. tertijdec.

20. sexti.

COROLLARIUM II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphaerae inscripti, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia uidelicet tam latus trianguli aequilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitergium est perpendicularis ex uno angulo ad latus oppositum deductae; quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

12. quartidecimi.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphaerae inscripti.

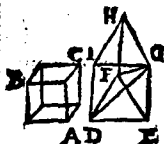
DESCRIBANTVR in eadem sphaera cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatursuper DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habes cum Tetraedro altitudinem. Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Ut autem latus Tetraedri

10. quartidecimi.

ad



ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2. propof. 3. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis D E F-



G H I, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis D E F G H I, ut huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propof. 9. lib. 12. demonstrauiamus, æqualia erunt prismata A B C, D E F G H I,

cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma D E F G H I, triplum est pyramidis, seu Tetraedri D E F G; ex coroll. 1. propof. 7. lib. 12. Cubus ergo A B C, triplus quoque erit eiusdem Tetraedri D E F G. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphaeræ inscripti. Quod ostendendum erat.

### COROLLARIUM.

Vnde prismas eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphaera, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum A B C, æqualem esse prismati D E F G H I, &c.

ELEMENTI DECIMIQUARTI FINIS.



# E V C L I D I S

## E L E M E N T V M XV.

ET SOLIDORVM QVINTVM,  
ut nonnulli putant. Vt uero alij, Hyp-  
siclis Alexandrini de quin-  
que corporibus.

### L I B E R S E C V N D V S.

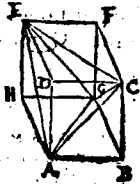


#### PROBL. I. PROPOS. I.

IN dato cubo pyramidem describere.



**I**N cubo dato  $A B C D E F G H$ , oportet describere pyramidem, seu Tetrædrum. Ab uno eius angulo, nempe ab  $E$ , ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri  $EA, EG, EC$ , a quarum extremitatibus  $A, G, C$ , similiter diametri ducantur  $AG, GC, CA$ , in reliquis tribus basibus. Quoniam igitur diametri quadratorum equalium equalis sunt, quod potentia duplæ sint laterum equalium quadratorum, ut in scholio propof. 47. lib. I. demonftr animus; perfpicium eft, quatuor triangula  $ACE, GAC, GAE, GCE$ , ex dictis diametris compofita, æquilatera eſſe, & inter ſe æqualia; Ac propterea pyramidem,



dem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quis vero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 3. lib. 1. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

2.

## PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro ABCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bisariis in E, F, G, H, I, K, & duobus duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, BL, LF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor BHI, HKI, KHG, GHE, supra planum E I-



KG, quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera AE, AH, trianguli AEH, aequalia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod sint dimidia rectarum equalium AB, AD, AC, item & anguli contenti EAH, GAH, aequa-

4. primi.

les, quod sint anguli triangulorum aequaliterum ABD, ACD: aequales erunt bases EH, GH. Eademque ratione aequales erunt rectae EH, HI, & reliquae eodem modo. Quare dicta octo triangula equilatera sunt, & aequalia inter se; ideoque octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex definitione 3. lib. 1. intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

## COROLLARIUM.

QUONIAM uero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt equalia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, ut in coroll. 1. propol. 14. lib. 13. demonstrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bisariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prismam HIKGAE; nec non

non in pyramidem  $B B F$ , & prismam  $E F C G K I$ ; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prismam prismati: Eodemque modo reliqua quadrata  $G H I F$ ,  $P K H E$ , dividunt bifariam eandem pyramidem  $A B C D$ . Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribitur, tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

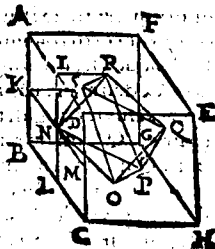
3. duodec.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo octaedrum describere.

3.

DESCRIBENDUM sit octaedrum in cubo dato  $A H$ . Dividantur latera basis  $A B C D$ , bifariam in punctis  $I, K, L, M$ , quæ connectantur rectis  $I L, K M$ , secantibus sese in  $N$ , puncto, quod quidem centrū est quadrati  $A B C D$ , ut constat ex demonstratione propof. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inveniuntur reliquarum basis centrū  $O, P, Q, R, S$ . Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basis, cuiusmodi sunt  $N I, R I, N K, S K$ , &c. æquales dimidijs lateribus cubi, seu quadratorum, ut perspicuum est ex prædicta demonstratione propof. 8. lib. 4.

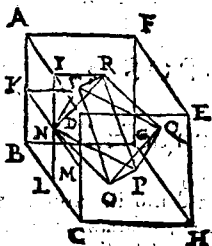


Postremo si præfata centra coniungantur duodecim rectis  $N O, O P, P Q, Q R, R S, S N, N P, P R, R N, S O, O Q, Q S$ ; constituta erunt octo triângula, quorū quidē quatuor  $NSR, RSQ, QSO, OSN$ , supra planum  $N O Q R$ ; quatuor autem  $O P Q, Q P R, R P N, N P O$ , infra idem planum consistunt. Quoniā uero latera  $I N, I R$ , triânguli  $I N R$ , æqualia sunt lateribus  $K N, K S$ , triânguli  $K N S$ , quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, ut dictum est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum  $N I, I R$ , parallelæ sint rectis  $B A, A F$ ; angulus  $N I R$ , æqualis sit recto angulo  $K A F$ , in quadrato  $A G$ , eademque ratione angulus  $N K S$ , angulo

10. undec.

4. primi

gulo recto  $I A F$ , in quadrato  $A E$ , Erunt bases  $N R$ ,  $N S$ , æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse, si nimirum e centrīs ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, ut quælibet dux



ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim uides duas rectas  $N I$ ,  $R I$ , ductas esse ad  $I$ , dimidium lateris  $A D$ , quod commune est quadratis  $A C$ ,  $A E$ , quorum centra sunt puncta  $N$ , &  $R$ : Ita quoque dux rectæ  $N K$ ,  $S K$ , ductæ sunt ad  $K$ , dimidium lateris  $A B$ , quod commune est quadratis  $A C$ ,  $A G$ , quorum centra existunt puncta  $N$ , &  $S$ , &c. Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatæ sunt, & equalia inter se; ideoque Octaedrum constituitur  $N O Q R S P$ ; Quod quidem ex defin. 3. 1. lib. 11. intra cubum est descriptum, cum omnes eius sex anguli tangerent cubi omnes sex bases in earum centrīs. Quam ob rem in dato cubo Octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

*1. quintide*  
*2. quintide*  
A  $L I F E K$ . In cubo dato inscribatur pyramis; In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonstratione propof. 1. huius lib. anguli Octaedri tangerent latera pyramidis; Latera uero pyramidis, ex demonstratione propof. 1. huius lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri, perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi, atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

### COROLLARIUM.

Quia uero diametri Octaedri in cubo descripti  $N Q$ ,  $R O$ , si ducerentur, se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. propof. 14. lib. 13. que quidē coniungūt centra basium cubi oppositarū; Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarū connectentes nō solum se se mutuo bisariam, ut docuimus coroll. 1. propof. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, ut hic ostendimus, diuidere.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

IN dato octaedro cubum inscribere.

Datum octaedrum sit  $ABCDEF$ , in quo oporteat describere cubum. Quoniam in octaedro sex pyramides quadrangula continentur, quarum uidelicet uertices sunt sex anguli octaedri, & quilibet duæ octaedrum constituunt, sit una earum pyramis  $ABCDE$ , cuius basis  $ABCD$ , quadratum, triângula uero æquilatæ  $ABE$ ,  $EBC$ ,  $CED$ ,  $DEA$ , sintque horum triángulorum centra  $G, H, I, K$ , per quæ ducantur rectæ  $LM, MN, NO, OL$ , parallelæ lateribus  $AB, BC, CD, DA$ . Erunt igitur & triângula  $LME, EMN, NBO, ODL$ , æquilatæ, cum similia sint triángulis æquilateris  $ABE, EBC, CED, DEA$ , ex coroll. propof. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habeant communia. Est enim  $EM$ , latus commune triángulis  $LME, EMN$ ; Et  $EN$ , commune triángulis  $EMN, NEO$ ; Et denique  $EO$ , commune triángulis  $NEO, OEL$ . Hinc enim fit, triángulum  $LME$ , triángulo  $EMN$ ; hoc uero ipsi  $NEO$ ; & hoc ipsi  $OEL$ , æquale esse. Quocirca & quatuor rectæ  $LM, MN, NO, OL$ , inter se æquales sunt. Quia uero ducta recta  $EK$ , tripla est rectæ  $KP$ ; Est autem ut  $EP$ , ad  $KP$ , ita  $EA$ , ad  $LA$ ; Erit quoque  $EA$ , tripla rectæ  $LA$ . Eademque ratione  $EB, EC, ED$ , triplæ erunt rectarum  $MB, NC, OD$ . Quocirca rectæ  $LM, MN, NO, OL$ , conueniunt in punctis  $L, M, N, O$ , in quibus latera ea proportionem ferantur, quadrilaterumque constituent  $LMNO$ . Rursum quia  $LO, LM$ , parallelæ sunt rectis  $AD, AB$ , non in eodem cum ipsis existentibus plano, æqualis erit angulus  $MLO$ , angulo  $BAD$ , qui rectus est, cum  $ABCD$ , quadratum sit, ut ostendimus in coroll. 1. propof. 14. lib. 13. & in propof. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus  $MLO$ , rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos  $LMN, MNO, NO L$ , rectos esse. Quoniam uero tam planum per  $LO, LM$ , quam per  $NM, NO$ , ductum, parallelum est plano



18. quattide  
2. sexti.

10. undec.

15. undec.

$KK$   $ABCD$

A B C D, ipsa quoque inter se parallela erunt, atque adeo, cum conueniant in punctis M. & O, unum planum efficiet, ex scholio propos. 16. lib. 1. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera aequalia, & angulos rectos. Deinde, cum latera E L, E K, trianguli E L K, aequalia sint lateribus E O, E K, trianguli E O K, & anguli quoque ipsis communi, & aequales, quod recta E K, ex angulo E, per centrum K, trianguli aequilateri E A D, ducta bisariam secet angulum A E D, per coroll. propos. 12. lib. 3. Erunt & bases K L, K O, & aequales, hoc est, recta L O, bisariam secabitur in K.



4. primi.

Eadem ratione LM, MN, NO, bisariam stabuntur in G, H, I. Ac proinde rectae GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum sint laterum quadrati LN, dimidia, & aequales inter se erunt; Ideoque, cum & angulos contingant aequales, nimirum rectos, & aequales erunt & rectae GH, HI, IK, AG, contra G, H, I, K, conuergentes. Quia uero haec rectae in plano existunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; (cum enim anguli L K G, G K I, I K O, duobus sint rectis aequales; Sint autem L K G, I K O, per coroll. 2. propos. 32. lib. 1. semirectus, rectus erit angulus G K I; Eademque ratione recti erunt anguli K G H, G H I, H I K.) quadratum erit G H I K, cum habeat & latera aequalia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata; quae cum latera habeant communia, aequalia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component; qui quidem ex definit. 31. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in earum centrīs. Quare in dato Octaedro, cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

4. primi.

13. primi

5.

6.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.

S. I. T. ex duodecim pyramidibus pentagonis, quae in Icosaedro continentur, quarum uelut bases sunt pentagona

ex

ex quinque Icosædri lateribus composita, uertices uero, duodecim anguli Icosædri, una pyramis  $ABCDEF$ , cuius basis pentagonum  $ABCDE$ , triangula uero æquilateta  $ABF, BCF, CDF, DEF, EAF$ , sintque horum triangulorum centra  $G, H, I, K, L$ , quæ rectis connectantur lineis  $GH, HI, IK, KL, LG$ . Rursus ex uertice  $F$ , per centra triangulorum rectæ desinantur  $FM, FN, FO, FP, FQ$ , quæ ex scholio propof. 12 lib. 3 bisectantur secabunt latera  $AB, BC, CD, DE, EA$  in  $M, N, O, P, Q$ ; ita ut decem rectæ  $MA, MB, NE, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA$ , æquales sint: quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos peragoni, æquales quodque erunt rectæ  $MN, NO, OP, PQ, QM$ , puncta  $M, N, O, P, Q$ , connectentes, Ac proinde & anguli  $MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM$ , æquales erunt, quod & latera  $FM, FN, FO, FP, FQ$ , æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum, equalium ad bases oppositas demisse. Cum enim latera  $FB, BM$ , trianguli  $FBM$ , lateribus  $FB, BN$ , trianguli  $FBN$ , equalia sint, contineantq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; erunt bases  $FM, FN$ , æquales; & sic de reliquis. Quoniam uero & rectæ  $FG, FH, FI, FK, FL$ , nimirum semidiametri circulorū equalium, triangula æquilateta equalia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, ut demonstratum est; Erunt & rectæ  $GH, HI, IK, KL, LG$ , æquales. Rursus quia tam anguli  $AMQ, QMN, NMB$ , quæ anguli  $BNM, MNO, ONC$ , æquales sunt duobus rectis, Sunt autē anguli  $AMQ, NMB$ , anguli  $BNM, ONC$ , æquales; Erunt reliqui anguli  $QMN, MNO$ , æquales; Eademq; ratione reliqui anguli  $NOP, OPQ, PQM$ , & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterū & equiangulum  $MNOPQ$ , in plano pentagoni  $ABCDE$ , existens. Deniq; cum rectæ  $FM, FN, FO, FP, FQ$ , æquales proportionaliter secantur in  $G, H, I, K, L$ , quod &  $FG, FH, FI, FK, FL$ , ex centris, æquales sint; Vel certe quia  $FG, FH, FI, FK, FL$ , duplæ sunt ipsarum



4. primi.

8. primi

4. primi.

4. primi

13. primi.

4. primi

$Kk \ 2 \ GM$



2. *sexti.* GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propof. 1. lib. 14. paralle-  
lae erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ,  
10. *undec.* QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG,  
angulis aequalibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM,  
ideoque & inter fe aequales erunt. Quia uero plana per rec-  
tas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela sunt plano penta-  
goni MNO PQ, & rectas MN, NO, OP, ducto, conueniuntq;  
15. *undec.* in recta H I, ipsa unum planum efficiunt, ex scholio propof.  
1. lib. 1. Eodemque modo ostendemus plana per IK, KL,  
& per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum  
constituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca  
GHIKL pentagonum, est aequilaterum & aequiangulum,  
cum & latera habeat aequalia & angulos. Quod si eadem ar-  
te in reliquis undecim pyramidibus Icofaedri, centra trian-  
gulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter  
pentagona aequilatera & aequiangula: quae cum latera ha-  
beant communia, aequalia inter fe erunt. Quamobrem  
duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituunt:  
quod quidem ex defin. 3. 1. lib. 11. in Icofaedro, erit descri-  
ptum, cum uiginti anguli Dodecaedri in centris uiginti ba-  
sium Icofaedri consistant. Quapropter in dato Icofaedro  
Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

1. 1. 1. 1. 1. cum omnes rectae a centro Icofaedri ad centra ba-  
sium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint aequales;  
(Cum enim ex coroll. lemm. 1. propof. 1. lib. 14. perpendiculares  
sint ad plana circulorum aequalium bases Icofaedri circumscriben-  
tium, & quae adeo eorundem distantiae existant a centro sphaerae  
sive Icofaedri, aequales erunt inter se, ex lemm. 2. eiusdem propof.  
10. lib. 14.) Idem erit centrum Icofaedri, atque sibi inscripti Do-  
decaedri.

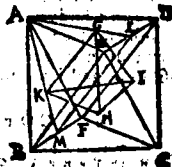
PROBL. 6. PROPOS. 6.

5. IN dato octaedro pyramidē describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro ABCDEF.  
In pyramide octaedri superiori ABCDE, sumantur G, &  
H, cen-

H, centra triangulorū ex aduerso sibi respondentū A E D, B E C; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiuntur I, & K, centra triangulorū ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AFB: quę quidem centra coniungantur sex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, ut fiat pyramis H I K G.

Deinde ex A, dem trantur per centra G, K, rectę AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M per scholiū propof. 12. lib. 13. coniungaturq; recta LM, quę ip si BE, uel FD, equalis & parallela erit, cum EL, BM, Item DL, FM, rectę æquales sint, & parallele, nimirū



dimidia laterum DE, BF, oppositorum in quadrato EF. Quoniam uero rectę AL, AM, secę sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod AG, AK, duplę sint ipsarum GL, KM, ex coroll. propof. 13. lib. 14. Erunt GK, LM, parallele; Ac propterea, per coroll. propof. 4. lib. 6. triangula ALM, AGK, similia. Quare erit ut AL ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, ut AL, ad AG, ita LM, ad GK: Est autem AL, ipsius AG, sesquialtera, quod GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, duę tertię. Item & LM, hoc est ipsę æqualis DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentium sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem H I K G, componentēs inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoque Tetraedrum constitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex def. 3. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem descriptimus. Quod erat faciendum.

**ALITER.** In octaedro dato inscribatur cubus, & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; Et in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

33. primi.

2. sexti.

4. sexti.

18. quarti decimi.

1. quintide.  
1. quintide.

COROLLARIUM. I.

9. undec.

15. undec.

Quia vero ostensum est, utramque  $GK$ ,  $DF$ , parallelam esse ipsi  $LM$ ; ac propterea &  $GK$ , ipsi  $DP$ , atque adeo ipsi  $BE$ , parallelam esse: Atque eadem ratione  $KH$ , ipsi  $FC$ , &  $EA$ , parallelam esse; Atque ideo planum  $GKH$ , per  $GK$ ,  $KH$ , ductum, parallelum esse plano  $DFC$ , per  $DF$ ,  $FC$ , necnon & plano  $BEA$ , per  $BE$ ,  $EA$ , ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallela, binis hincum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singulas uidelicet binis oppositis.

COROLLARIUM. II.

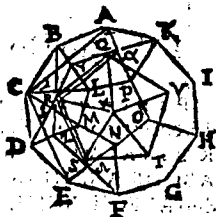
PRÆTEREA, cum octaedrum circumscribat & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium octaedri constituantur; Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri, opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphaerae circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, ut constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphaerae sesquialtera axis tetraedri in ea sphaera descripti, per coroll. 1. propos. 11. lib. 14. uel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quæ centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri; hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis  $ABLPK$ ,  $PKIHO$ ,  $OHGFN$ ,  $NFEDM$ ,  $MDCBL$ ,  $LMNOP$ , quorum centra  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $V$ ,  $X$ , quæ inter duo proxima, rectis iungantur  $QR$ ,  $RS$ ,  $ST$ ,  $TV$ ,  $VQ$ ,  $QX$ ,  $RX$ ,  $SX$ ,  $TX$ ,  $VX$ : Et ex angulis  $K$ ,  $D$ , quos subtendant rectæ  $AP$ ,  $CM$ , per centra  $Q$ ,  $R$ , rectæ ducantur  $KY$ ,  $DY$ , quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bisariam diuident latus oppositum  $BL$ , & ad angulos rectos, ideoque in puncto  $Y$ , conuenient: Diuidunt autem & rectæ eadem  $YK$ ,  $YD$ , rectas  $AP$ ,  $CM$ , bisariam & ad angulos rectos in  $a, \beta$ , ex 1. coroll. eiusdè propositionis, quod & arcus

Arcus AKP, CDM, circulatorum circa pentagona descri-  
 ptorum bifariam diuidant, (constat enim rectas AK, PK;  
 Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) Igitur A $\alpha$ , C $\beta$ ,  
 parallelæ sunt rectæ BY; atque adeo & inter se parallelæ :  
 Sunt autem & æquales nempe di-  
 midia rectarum AP, CM, quæ æ-  
 quales sunt, cum late. a KA, KP,  
 lateribus DC, DM, æqualia sint,  
 angulosque contineant, æquales.  
 Rectæ ergo ipsas connectentes  
 AC $\alpha\beta$ , æquales erunt, & paral-  
 lelæ. Non aliter ostendemus, si  
 ex angulis B, E; quos subtendant  
 rectæ CL, EN, per centra R, S, re-  
 ctæ ducantur BZ, EZ, connectanturque rectæ CE, & æqua-  
 les esse ipsas CE, & : Sunt autem AC, CE, inter se æquales,  
 cum contineant angulos æquales æqualibus lineis compre-  
 henso. Igitur &  $\alpha\beta$ ,  $\gamma\delta$ , æquales erunt. Quapropter, cu-  
 & rectæ Y $\alpha$ , Y $\beta$ , Z $\gamma$ , Z $\delta$ , æquales sint. (Nam YQ, YR,  
 ZR, ZS, perpendicularæ, distantia sunt æqualium recta-  
 rum BL, DM, a centris Q, R, S, circulatorum æqualium,  
 qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, atq; adeo  
 æquales. Item Q $\gamma$ , R $\beta$ , R $\gamma$ , S $\delta$ , distantia sunt rectarum  
 æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulo-  
 rum æqualium, idcircoque æquales; Ac proinde & totæ Y $\alpha$ ,  
 Y $\beta$ , Z $\gamma$ , Z $\delta$ , æquales erunt.) Erunt quoque anguli  $\alpha\gamma\beta$ ,  
 $\gamma\delta\delta$ , æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR,  
 ZS, æquales sint; æquales quoque erunt rectæ Q, R, S,  
 centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales  
 demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum co-  
 pulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV,  
 VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N,  
 O, P, constituta; æquilatera erunt, & equalia. Quod  
 si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dode-  
 caedri, similia triangula construantur; (Habet enim  
 Dodecaedrum viginti angulos solidos.) quæ quidem latera  
 habent communia, descriptum erit Icosædruum intra  
 Dodecaedrum, cum duodecim anguli solida Icosædri  
 consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In daro



28. tertij.

28. primi.

4. primi.

33. primi.

4. primi.

14. tertij.

14. tertij.

8. primi.

4. primi.

ergo Dodecaedro Icoaedrum descriptum: Quod faciendum erat.

8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubū describere.

PROPONANTUR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus;  $ABCDE$ ,  $BFGHA$ ,  $AHIK$ ,  $BKLMC$ , conveniunt ad latera  $AB$ ; duo quidem  $ABCDE$ ,  $ABKIH$ , fm lateris idem commune  $AB$ ; alia autē duo  $AEGH$ ,  $BCMLK$ , fm angulos  $EAH$ ,  $CBK$ . In his uero pentagonis subtendantur angulis  $A, B, D, I$ , rectae  $EH$ ,  $CK$ ,  $CE$ ,  $HK$ , quadrilaterum efficientes  $EHC$ . Quoniam igitur rectae  $AE$ ,  $BC$ , aequales, aufertur ex circulo pentagonum  $ABCDE$ , circumscribente arcus aequales; Erunt, ex scholio propof. 27. lib. 3. rectae  $AB$ ,  $CE$ , parallelae. Eademque ratione parallelae erunt  $AB$ ,  $HK$ . Quare, &  $EC$ ,  $HK$ , inter se parallelae erunt; Ac propterea rectae  $BH$ ,  $CK$ , quae ipsas connectunt, parallelae erunt, in eodemque cum ipsis plano; Ideoque parallelogrammum erit  $EHC$ ; quod dico esse aequilaterum. Cum enim omnia latera  $AE$ ,  $AH$ ,  $DE$ ,  $DC$ ,  $BK$ ,  $IH$ ,  $IK$ , aequalia sint, angulosque contineant aequales, ex hypothesi; aequales erunt bases  $EH$ ,  $HK$ ,  $KC$ ,  $CE$ .

Quia uero planum  $ECKH$ , productum communem sectionem in sphaera facit circulum, per lemma e. propof. 10. lib. 14. circa quadrilaterum  $EK$ , descriptum; Erunt tam anguli oppositi  $E, K$ , quam  $C, H$ , duobus rectis aequales; Ac propterea cum oppositi  $E$ , &  $K$ , sint aequales, nec non & oppositi  $C$ , &  $H$ ; erunt omnes quatuor anguli  $E, C, K, H$ , recti. Quare  $EK$ , quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo sint rectae subtendantur eodem ordine; constitutum erit solidum sex quadratis contentum; quae cum sint aequalia, eo quod eorum latera aequales angulos pen-



28. tercij.

9. undec.

33. primi.

7. undec.

4. primi.

22. tercij.

34. primi.

los pentagonorum aequalibus rectis comprehensos subtendunt aequalia sint, cubum constituent intra Dodecaedri descriptum, propterea quod duodecim eius latera iaceant in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis resideant. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.

4. primi.

COROLLARIUM.

Hinc fit, rectam, quae subtendit unum angulum pentagoni aequaliteri, & equianguli, parallelam esse opposito lateri. Oñsum enim est,  $GH$ , ipsi  $AB$ , esse parallelam.

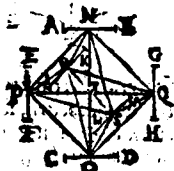
PROBL. 9. PROPOS. 9.

o.

9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SYMMETRIC in Dodecaedro, cui inscribendum. fit octaedrum, sex illa latera, quae opposita esse diximus in corollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum  $AB, CD, EF, GH, IK, LM$ , quae bifariam secantur in  $N, O, P, Q, R, S$ . Rectae igitur  $NQ, PQ, RS$ , sectiones oppositorum laterum coniungentes aequales erunt, sequae inscribuntur in T, centro sphaerae bifariam, & ad angulos rectos dividunt, per coroll. 1. propos. 17. lib. 13. atque adeo aequales quoque, erunt earum dimidiae partes  $NT, OT, PT, QT, RT, ST$ . Quo



circa duodecim rectis subtendentes duodecim angulos rectos  $NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, QTS, STQ$ , quales sunt  $NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN$ , quales erunt, cum dicti anguli aequalibus rectis contineantur. Ac proximè octo triangula  $NBP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO$ , equilatera, & aequalia erunt, constituent quæ octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex an-

4. primi.

gula

guli octaedri tangant sex latera. Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum descripsi-  
mus. Quod faciendum erat.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem de-  
scribere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis  
ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MOQ-  
SV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV,  
LNPRT, in quo describenda sunt y. anguli, sive tetradrum.  
Sumentur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, an-  
gulum solidum L, compoenientia, in quibus tres anguli C,



K, R, (quorum quidem C, oppo-  
nitur lateri AL, communi penta-  
gonis CAL, ALI; At uero K, la-  
teri LIT, communi pentagonis  
KLT, LIT; Denique R, lateri  
LN, communi pentagonis RLN,  
LNB;) rectis connectantur CK,  
CR, KB; & ex punctis C, K, R, ad  
angulum Q, ipsi L. oppositum re-  
stingantur CQ, KQ, RQ, ut

fit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diame-  
tris Dodecaedri, seu sphaerae OH, KE, RM, & connectis, re-  
ctis KH, RH, RE, QE, QM, QH; quoniam Dodecaedrum  
in sphaera describitur; si planum trianguli GHK, excipia-  
tur, fiet communis eius sectio cum sphaera circulus, peritem-  
ma 2. propositi exhibi. 4. Ac propterea angulus OHK, in se-  
micirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus re-  
ctos esse angulos GRH, ARE, KQE, RQM, CQH; Quod  
quicquid in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto  
angulo oppositi aequale sit quadrato laterum circa rectum  
angulum; sine autem quadrata diametrorum aequantur  
CH, KE, RM, aequalia erunt quadrata rectarum  
CK, KH, quadrata rectarum CR, RH, & quadratus rectarum  
KR,

17. verside.

32. versu.

47. primi.

KR, RE, & quadratis rectarum K Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectæ cum sub tendant angulos pentagonorum æquales æqualibus, rectis comprehensos, æquales sunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, K Q, R Q, & C Q; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt C K R Q: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum. Itaque in dato Dodecaedro Pyramidē descripsimus. Quod faciendū erat.

4. primi.

**ALITER.** In proposito Dodecaedro cubus describitur, & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit.

8. quintide.

1. quintide.

## PROBL. II. PROPOS. II.

O.

II.

IN dato Icosaedro cubum describere.

**DESCRIPTUR** in dato Icosaedro Dodecaedri; & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; anguli uero Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: At propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam obrem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendū erat.

5. quintide.

8. quintide.

## PROBL. 12. PROPOS. 12.

O.

12.

IN dato Icosaedro Pyramidē describere.

IN dato Icosaedro cubus describitur, & huic cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur.

11. quintide.

decimi.



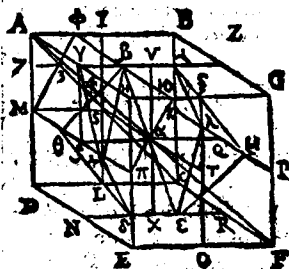
11. quinside  
1. quinside.

Cumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi tangent centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi uniantur, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri; Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bisariam in I, K, L, M, N, O, P, R,  $\pi$ ,  $\xi$ , Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ,  $\xi$ O, M $\pi$ , KP, NR, nusquam



inter se cocuntibus, quæ rursus bisariam secentur in S, V, T,  $\rho$ , Q, X, connexis rectis ST, VX,  $\rho$ Q, quæ se mutuo in centro a, bisariam secant, & ad angulos rectos, ut in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, suntque lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, M $\pi$ , secentur

extrema ac media ratione in  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\kappa$ , ut sint maiora segmenta, Y $\beta$ , Z $\gamma$ , M $\delta$ ,  $\pi\kappa$ , ductis rectis Y $\rho$ , Y $\kappa$ ,  $\beta\delta$ ,  $\beta\kappa$ . Quoniam ergo Y $\rho$ , YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; &  $\rho\kappa$ ,  $\beta V$ , segmenta minora rectarum equalium YV,  $\rho\pi$ , æqualia quoque: Sunt autem quadrata rectarum YV,  $\beta V$ , tripla quadrati rectæ Y $\beta$ ; Erunt & quadrata rectarum Y $\rho$ ,  $\rho\kappa$ , tripla eiusdem quadrati rectæ Y $\beta$ . Quare, cum quadratis rectarum Y $\rho$ ,  $\rho\kappa$ , æquale sit quadratum rectæ Y $\kappa$ , quod angulus Y $\rho\kappa$ , rectus sit; Erunt & quadratum rectæ Y $\kappa$ , triplum quadrati rectæ Y $\beta$ . Rursus, quia YV, perpendicularis ad AY, Y $\rho$ , recta est ad planum AE, per rectas AY, Y $\rho$ , ductum; rectus erit angulus.

4. versu dec.

47. primi

29. primi

4. dñec.

gulus  $\beta\gamma$ , ex defin. 3. lib. 14. Ac propter quadratum recte  $\beta\gamma$ , æquale quadrans rectarum  $\gamma\kappa$ ,  $\gamma\beta$ , existens, quadruplum erit quadrati recte  $\gamma\beta$ . (quia nimirum quadrata rectarum  $\gamma\kappa$ ,  $\gamma\beta$ , quadrupla etiam sunt quadrati recte  $\gamma\beta$ , cum quadratum recte  $\gamma\kappa$ , triplum sit ostensum quadrati recte  $\gamma\beta$ .) Ideoque cum quadrata proportionem habeant laterum duplicata, dupla erit recta  $\beta\gamma$ , recte  $\gamma\beta$ . Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut in his numeris 1. 4. apparet: Est autem  $\beta\gamma$ , dupla ipsius  $\beta\kappa$ , quod minora segmenta  $\beta\gamma$ ,  $\beta\kappa$ , rectarum æqualium  $M\beta$ ,  $\gamma\beta$ , quæ sunt. Et ut igitur ut  $\gamma\beta$ , ad  $\beta\kappa$ , ita  $\beta\gamma$ , dupla ipsius  $\gamma\beta$ , ad  $\beta\kappa$ , duplam ipsius  $\beta\kappa$ : Est autem  $\gamma\beta$ , maius segmentum ad  $\beta\kappa$ , rectam minori segmento  $\beta\gamma$ , æqualem, ut recta ad maius segmentum. Ergo  $\beta\gamma$ , ad  $\beta\kappa$ , erit ut tota ad maius segmentum. Ac proinde  $\beta\gamma$ , erit maius segmentum recte  $\beta\gamma$ , sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus  $\beta\gamma$ , maius esse segmentum recte  $\beta\gamma$ , extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta  $\gamma\delta$ , quæ æquales erunt  $\beta\delta$ ,  $\beta\gamma$ , cognoscuntur triangulum isosceles  $\beta\gamma\delta$ , simile illi, quod ab Euclyde constructum est propo. 10. lib. 14. ut postea demonstrabimus. Ac proinde  $\beta\gamma$ , erit latus pentagani in circulo trianguli  $\beta\gamma\delta$ , circumscripti descripti, ut perspicuum est ex 11. propo. lib. 4. Iam  $\beta\gamma$ ,  $\beta\kappa$ ,  $\gamma\delta$ ,  $\gamma\beta$ , iam planum trianguli  $\beta\gamma\delta$ , extendi, (ducta per  $\beta\gamma$ , recta  $\beta\theta$ , ipsi  $M\gamma$ , parallela,) per parallelas  $M\gamma$ ,  $\theta\gamma$ , ut sit planum extensum  $\theta\gamma$ , occurrat diametro  $AC$ , quadrati  $ABCD$ , in puncto 3. cubi utq; diametro  $AF$ , in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi  $A\theta$ , parallela, connectaturque  $M\theta$ , quæ parallela est utriusque  $A\theta$ , 73. Quoniam igitur, per coroll. propo. 4. lib. 6. triangulum  $A\theta\gamma$ , simile est triangulo  $AMS$ , ac proinde, ut  $AM$ , ad  $M\theta$ , ita est  $A\theta$ , ad 73. Sunt autem  $AM$ ,  $M\theta$ , æquales, ut per dimidia cubi latera; Erunt quoque  $A\theta$ , 73. æquales. Eadem ratione erit ut  $MA$ , ad  $A\theta$ , ita  $M\gamma$ , ad 73. Est autem  $A\theta$ , maius segmentum recte  $MA$ , diuisæ extrema ac media ratione. (quod æquales sint,  $A\theta$ ,  $\gamma\delta$ , nec non  $MA$ ,  $\gamma\gamma$ , dimidia cubi latera. Igitur & 73. hoc est,  $\theta\gamma$ , maius segmentum erit recte  $M\gamma$  extrema ac media ratione sectæ; Ac propterea tota  $MA$ , diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maius

47. primi.

20. sexti.

13. quinti.

13. primi.

13. sexti.

13. septimi.

13. octavi.

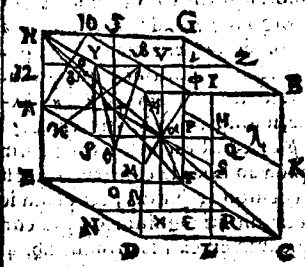
que

2. sexti.

33. primi.

17. undec.

Ique segmentum est  $M\gamma$ . Atqui ut  $M\gamma$  ad  $\gamma A$ , ita est  $S\lambda$  ad  $3 A$ . Secta est ergo &  $S A$ , extrema ac media ratione in maiusque segmentum est  $S\lambda$ . Quia uero  $S\alpha T$ , parallela est ipsi  $M\gamma$ , quod & recta ducta  $\gamma T$ , & qualis & parallela sit ipsi  $MS$ ; si per  $S\alpha T$ , planum ducatur parallelum plano  $\gamma\pi$ , ducto per  $M\gamma$ , secabuntur rectae  $AS, A\alpha$ , in eisdem rationes, in punctis  $3$ . &  $4$ . Atque idcirco cum  $AS$  secta sit in extrema ac media ratione, secta erit eodem modo  $A\alpha$ , semidiameter cubi, in  $4$ . maiusque segmentum est  $\alpha\gamma$ . Iisdem argumentis ostendimus ducta diametro  $H F$ , quadrati  $EFGH$ , & diametro cubi  $HC$ , semidiametrum cubi secari in puncto extrema ac media ratione a plano  $\gamma\pi$ , ut perspicuum est, si cubus inuertatur, ut in hac figura secunda apparet. Sunt enim dimensio omnia similia lineamentis prioris figurae, licet bases cubi sedes mutauerint, ita ut quadratum  $AC$ , locum quadrati  $H F$ , & quadratum  $H F$ , locum quadrati  $AC$ , obtineat in hac secunda figura. Ostendamus nunc,



si rectae iungantur  $\theta 4. \beta 4. \beta 9. \alpha 9$ . rectilinei  $\beta 4. \alpha 9$ . in plano  $\gamma\pi$ , existēs, pentagonum esse equilaterū, & equilaterū. Per uero  $\alpha\gamma$  rursus cubus, ut quadrati  $ADEH, ABGH$ , quae nimirum continent triangulū  $\beta 9\alpha$ , siue planum  $\gamma\pi$ , tunc situm habeant, quae monstrat tertia hęc figura. Deinde in plano  $\gamma\pi$ , recta coniuncta  $\theta 4$  extendatur usque ad rectam  $\gamma\pi$  in punctū  $13$ . Quoniam igitur ducta recta  $K P$ , & iunctis rectis  $M K, \pi P$ , planū  $M P$ , parallelū est plano  $A G$ ; (quod & recte  $P K, K M$ , parallelae sunt rectis  $G B, B A$ .) secatque cubū bifatiā, ideoque per ectrū  $\alpha$ , trāsit; per ea, quae in scholio propos. 19 lib. 11. ostensa sunt; si per rectas  $\alpha 4. A, S 4. 19$ . planū extendatur, sicut  $\alpha\theta, A 13$ . communes sectiones planorū  $M P, A G$ , parallelae, & proinde triangula  $\alpha 4. A 13. 4$ . & quadrilatera erūt; Eritque ut  $\alpha 4$  ad  $4 A$ , ita  $4. ad 4. 13$ . Quare cum  $\alpha A$ , in  $4$ . secta sit extrema ac media rōne, ut ostēdimus eodem modo cit

19. undec.

32. undec.

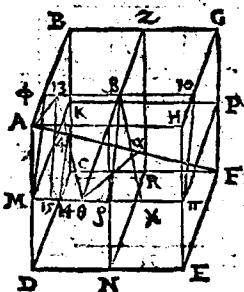
16. undec.

4. sexti.

de  
sei  
pe  
N  
R  
ea  
in  
ca  
ex  
m  
M  
p  
ex  
flu  
au  
m  
i  
leg  
pa  
me  
leg  
ad  
d  
cri  
cia  
pla  
cō  
la  
C  
A  
leg  
tū  
fi  
tu  
u  
qu  
So  
tri  
bu

de erit secta  $\delta$  13; in 4. Rursus plano NZ, per centrū  $\alpha$ , tran-  
seunt; parallelū ducatur planū per punctū 4. ex scholio pro-  
pos 15, ab 11. secans planū  $\phi\pi$ , recta 4 14. Est aut eidē plano  
NZ, parallelū planum DB.

Rectæ igitur  $\alpha A$  &  $p M$ , in  
eandem rationes secabūtur  
in punctis 4 & 14. Quocir-  
ca &  $p M$ ; in 14. secta erit  
extrema ac media ratione,  
minusq; erit segmentū 14  
M, adeoque æquale minori  
 $p$  ipsius  $M p$ . Quare cum  
ex  $p$  14. maiori segmēto ip-  
sius  $p M$ , auferatur  $p$ , mi-  
nus segmentū; Erit, ut de-  
monstrauimus ad propo-



15. undec.

17. undec.

5. lib. 1. 11. p. 14. diuisa in 2 extrema ac media ratione, maiusq;  
segmētū erit  $p$  Postremo acta  $p$  13. recta 4 13. recte 4 14.  
parallela, secabūt. recte  $\delta$  13. Si 5. proportionaliter; Ac pro-  
inde  $\delta$  13. recta erit in 14. extrema ac media rōne, maiusq;  
segmētū erit  $\delta$  14. Quapropter erit ut  $p$ , maius segmētū  
ad  $\delta$ , 4. minus, ita  $\delta$  14. maius ad 14. 15. minus. Ut autem  
 $\delta$  14. ad 14. 15. ita est tota  $\delta$  15. ad  $\delta$  14. maius segmētū. Igit  
erit ut  $p$ , ad  $\delta$  14. ita  $\delta$  15. ad eandē  $\delta$  14. Ac propterea re-  
ctæ  $p$ , uel  $p x$ , &  $\delta$  15. æquales erūt. Quā uero planū NZ, &  
planū illi parallelū per 4 14. ductū, secatur plano  $\phi\pi$ ; erunt  
cōes sectiones  $\beta p$ , 14. parallele, ideoq; & 13 15.  $\beta p$ , paralle-  
le erūt, angulūq; externus  $\beta p x$ , interno  $\gamma$  15. 2. æqualis.

2. sexti.

1. quarside.

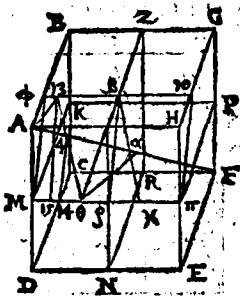
Quā igitur & latera  $\beta p$ ,  $p x$ , lateribus  $\gamma$  15. 13. 15, sint equalia  
A Equales erūt quoq; rectæ  $\beta x$ , 13. 15; Ac proinde & earum  
segmēta maiora  $x$ , 24. (Ostēsum n. est  $\delta x$ , esse maius segmē-  
tū ipsius  $\beta x$ .) æqualia erūt. Eadē artē &  $\beta$  4. ipsi  $\beta \gamma$ , in prima  
figura ostēdet equalis, si simili situ triagulū Hsccles forme-  
tur sup basī  $\beta \gamma$ , cui<sup>9</sup> uertex cōstitat in pūcto, qđ rectā IS. di-  
uidit extrema ac media rōne, Eodēq; modo eisdē  $\delta x$ ,  $\beta \gamma$ , æ-  
quales erūt  $x$   $\beta$  9. A Equilaterū igitur est pētagonū  $\beta$  4.  $x$  9.  
Sed & equiagulū, ut mox ostēdem<sup>9</sup>. Si igitur hæc artē duodecim  
triagula, nōstrūd singulas rectas  $M\pi$ ,  $YZ$ ,  $NR$ ,  $IL$ ,  $\xi Q$ ,  $KP$ ,  
bina ipsi  $\beta$   $x$ , simili, & equalia cōstruāt. Ita. In ad  $M\pi$ , duō  
hu usmodi

16. undec.

29. primi.

4. primi

huiusmodi triangula vides  $\beta\theta\kappa$ ,  $\delta\theta\kappa$  & ipsorum officio duodecim pentagona ipsi  $\beta$  4. & 9. similia & aequalia fabricentur, constituitur Dodecaedrum, cuius duodecim

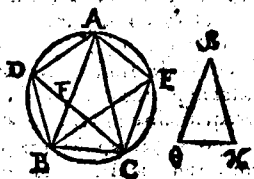


quidem anguli in sex rectis lineis,  $M\pi$ ,  $YZ$ ,  $NR$ ,  $IL$ ,  $\xi O$ ,  $KP$ , bini nimirum in singulis; octo vero reliqui in octo semidiаметris cubi consistunt, nempe in punctis, quae ipsas extrema ac media ratione diuidunt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiаметris  $A\pi$ ,  $H\alpha$ , secundae si-

guræ; Ac propterea quodammodo incipitum esse dicitur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cū non omnes eius anguli uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis cubi constituentur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo uero in punctis, quae octo semidiámetros cubi extrema ac media ratione secant, residuant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem triangulum  $\beta\theta\kappa$ , cuius basis  $\beta\theta$ , maius segmentum existit utrinque lateris  $\beta\theta$ ,



$\beta\kappa$ , extrema ac media ratione diuisi, simile sit illi, quod Euclides construxit propof. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles  $ABC$ , quale Euclides construere docet propof. 10. lib. 4. circulus  $ADBC$ , diuisiq;

diuisis que angulis  $ABC$ ,  $ACB$ , hisziam rectis  $BE$ ,  
 $CD$ , perficiatur pentagonum equilaterum, & equi-  
angulum  $ADBCE$ , ut propos. i. l. 4. tradidimus  
secentque se mutuo recta  $AB$ ,  $CD$ , in  $F$ . Quoniam  
ergo  $AB$ , in  $F$ , secatur extrema ac media ratione, ma-  
iusque eius segmentum est  $AF$ , equale lateri  $BC$ ;  
Erit ut  $AB$ , tota ad maius suum segmentum  $BC$ , ita  
 $BC$ , tota ad maius suum segmentum  $CA$ ; Eodemque  
modo, ut tota  $AC$  ad maius segmentum  $CB$ , ita  $BC$ ,  
tota ad maius segmentum  $CA$ : Est autem quoque ut  
 $AB$ , ad  $AC$ , ita si  $g$ , ad si  $x$ , utrobique enim est propor-  
tio equalitatis. Triangula igitur si  $g$ ,  $ABC$ , pro-  
portionalia habentia latera, equiangula sunt, equa-  
lesque erunt anguli,  $B$ ; Item  $x$ ,  $C$ , &  $\beta$ ,  $A$ ; pro-  
pterea que uterque angulorum  $g$ ,  $x$ , duplus erit anguli  
 $\beta$ ; & triangula  $\beta\theta x$ ,  $ABC$ , similia.

PENTAGONVM vero  $\beta 45 \times 9$ , æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendimus. Describatur circa triangulam  $\beta D \bar{x}$ , circulus




 β A δ x B, qui si transeat per puncta 4, et 9, perspicuum est ex hys, quæ ad proposi. 1 6. lib. 4. deducimus, pentagonum æquiangulum esse. Si uero non incedat per puncta 4, et 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam proposi. 1 2. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A δ x B. Quoniam igitur tam rectæ A δ, A β, quam rectæ 4 δ & 4 β, æquales sunt rectæ δ x, cum & β 4 δ x 9, & β A δ x B, pentagonum sit æquilaterum; Erunt tam due rectæ δ A, & 4 β quam due β A, β 4, æquales, quod fieri non posse demonstratum est proposi. 7. lib. 1. Transsit ergo cir-

**8.tertjdec.**

*a. quartide.*

5. Exercises

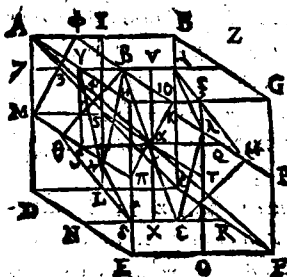
115

culus triangulo  $\beta \gamma \kappa$ , circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonus  $\beta \alpha \delta \kappa \gamma$ , equiangularis est.

SCHOLIUM.

Ex his colligere licebit sequentes propositiones.

I. DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quod decedrum describitur.



DUCATUR enim in prima figura diameter Dodecaedri  $\beta \epsilon$ , intelligaturque coniuncta recta  $\gamma \epsilon$ , equalis existens & parallela lateri cubi  $V X$ , quod &  $V \gamma$ ,  $X \epsilon$ , aequales sunt, & parallela. Quoniam igitur angulus  $\beta V X$ , rectus est; rectus quoque erit angulus  $\beta \gamma \epsilon$ , ad  $\gamma$  constitutus; Ac proinde quadratum diametri  $\beta \epsilon$ , aequale erit quadratis

lateralum  $\beta \gamma$ ,  $\gamma \epsilon$ , nempe Dodecaedri, & cubi.

II. Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius uero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

In eadem enim prima figura, cum sit ut  $\gamma V$ , ad  $\beta V$ , ita  $\gamma Z$ , dupla ipsius  $\gamma V$ , ad  $\beta \gamma$ , duplam ipsius  $\beta V$ . Sit autem  $\beta V$ , minus segmentum ipsius  $\gamma V$ , secta extrema ac media ratione: Erit &  $\beta \gamma$ , minus segmentum lateris cubi  $\gamma Z$ , secti extrema ac media ratione; composita vero ex  $\gamma \beta$ ,  $\gamma Z$ , hoc est, recta  $\beta \kappa$ , (que dupla fuit ipsius  $\gamma \beta$ , idcirco composita ex  $\gamma \beta$ ,  $\gamma Z$ , aequalis) maius segmentum. Constat autem ex constructione  $\beta \gamma$ , esse latus Dodecaedri, &  $\beta \kappa$ , seu  $\beta \gamma$ , esse

esse latus cubi in dictis Dodecaedro descripti, cum subtenat angulum pentagoni  $\beta$   $\gamma$   $\chi$ , vel  $\beta$   $\gamma$   $\delta$ .

**L A T V S** cubi aequalis est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

III.

**N A M** in prima rursus figura, latus cubi  $TZ$ , componitur ex latere Dodecaedri  $\beta$   $\gamma$  in ipsa descripti, & ex rectis, compositis ex  $\gamma$   $\beta$ ,  $\gamma$   $\delta$  quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim  $TZ$ , cubi latus subtenat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, ut perspicuum est ex 8. propos. huius lib. Sic autem latus dicti pentagoni maius segmentum lateris  $TZ$ , secti extrema ac media ratione: Erit  $\beta$   $\theta$ , existens quoque maius segmentum eiusdem lateris  $TZ$ , ut iam demonstravimus, latus Dodecaedri cubo lateris  $TZ$ , circumscripti.

2. tersidéc.

**R E C T A** duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est aequalis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IIII.

**I N** prima enim figura, recta connectens puncta  $\beta$ ,  $\delta$ , in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri  $\beta$   $\chi$ , oppositi, equalis est rectae  $VX$ , (quod est  $\beta V$ ,  $\delta X$ , aequales sint, & parallelae) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

33. primi.

# PROBL. 14. PROPOS. 14.

**I N** dato cubo Icosaedrum describere.

**C V B V S** datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit  $A B$ , per cuius basium centra  $C, D, E, F, G, H$ , lateribus cubi rectae lineae parallelae agantur usque inter se convenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secantur, ita ut maiora segmenta prope centra sint, in punctis  $I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V$ ; quorum quodlibet cum quatuor

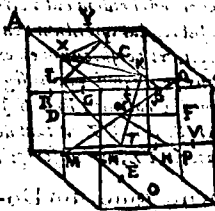


111

29. primi.

4. primi.

monstrabitur connectaturque L, cum I, K, T, & R. R, cum L, M, I, & N, &c. ut constituantur viginti triacula I K L, I K Q, L M R, L M T, N O M, N O P, P Q V, P Q S, R S I, R S N, T V K, T V O, I L B, I S Q, K T L, K Q V, O P V, O T M, N S P, N M R, quorum priora duodecim subtrahuntur duodecim cubi lateribus, posteriora uero octo eiusdem cubi octo angulis subtrahuntur. Connectantur iam rectæ X C, X I, X K. Quoniam igitur latera X C, C I, trianguli X C I, æqualia sunt lateribus X C, C K, trianguli X C K; & anguli communi, recti, quod X C, parallela sit ipsi



4. primi.

47. primi.

A Y; Eruntque bases X I, X K, æquales. Deinde quia linea L X, recta est ad planum A Z, per definit. 4. lib. 1. rectæ quoque est ad lineas X I, X K; & propterea cum latera L X, X I, trianguli L X I, æqualia sint lateribus L X, X K, trianguli L X K, & anguli contenti, recti; æquales erunt bases L I, L K. Quibus quæ sitam quadratum rectæ L I, æquale est quadrato rectarum L X, X I; Et quadratum rectæ L X, quadrato rectæ I Y; quadratum uero rectæ X I, quadratis rectarum X C, C I, est æquale; Æquale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis rectarum X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Totum quadratum rectæ L I, æquale est tribus quadratis rectarum C Y, C I, I Y: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ C I. (Cum enim quadrata rectarum C Y, I Y, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ C I, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ C I, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum C Y, C I, I Y, quæ supra eiusdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergo rectæ L I, quadruplum est quoque quadrato rectæ C I; & propterea, cum eiusdem quadrati rectæ C I, quadruplum sit quadratum rectæ K I, ex scholio propos. 4. lib. 2. æqualia erunt quadrata rectarum L I, I K, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Æquilaterum igitur est triangulum I K L, lateri cubi A G, sub-

4. terzidec.

Non

Non aliter ostendimus, reliqua undecim triangula, undecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Ad quæ adeo inter se æqualia, cum eorum latera  $IK, LM, NO, PQ, RS, TV$ , æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; ut in triangulo  $KTL$ , latus  $KL$ , commune est triangulo  $IKL$ ; & latus  $KT$ , triangulo  $TVK$ ; & latus  $TL$ , triangulo  $LMT$ ; perspicuum est; ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosædri component cubo inscriptum, cum duodecim angulis undecim duodecim inscriptis habebit, & totidem in singulis. Itaque in dato cubo Icosædri describimus. Quod erat faciendum.

...  $S, O, H, O, I, F, O, R$  ...  
...  $S, O, H, O, I, F, O, R$  ...

**DIAMETER** Icosædri potest & latus Icosædri, & cubi Icosædri ambientis.

**D.V.C.T.A.** enim, recta  $LQ$ , quæ lateri cubi  $DF$ , parallela est, & æqualis, quod &  $D, L, F, Q$ , parallele sint, & æquales; manifestum est, quadratum diametri  $Q, M$ , æquale esse quadrato rectarum  $L, M$ , lateris Icosædri, &  $L, Q$ , lateris cubi, in quo Icosædri describitur, cum angulus  $MLQ$ , sit rectus, quod &  $L, DF$  rectus sit, per coroll. 1. propof. 15. lib. 1.

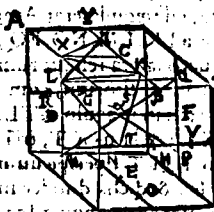
33. primi  
47. primi  
29. primi

**BIFARIÆ** sectiones sex oppositorum laterum Icosædri tribus sunt, & tribus rectis æqualibus, se se in centro Icosædri bifariam, & ad angulos rectos, secantibus.

II.

... huiusmodi, & ...  $DF, CE, GH$ , cum ...  
... huiusmodi, & ...  $DF, CE, GH$ , cum ...  
... huiusmodi, & ...  $DF, CE, GH$ , cum ...

dem et contrarium esse Icosaedri, ita ostenditur, ducta recta  $\alpha P$ .



Quoniam latera  $\alpha F$ ,  $F Q$ , trianguli  $\alpha F Q$ , equalia sunt lateribus  $\alpha F$ ,  $F P$ , trianguli  $\alpha F P$ , angulosque comprehendunt, rectos, aequales erunt rectus  $\alpha Q$ ,  $\alpha P$ . Eademque ratione aequales erunt omnes recti. Hinc  $\alpha$ , ad angulos Icosaedri quadrangulos. Igitur  $\alpha$ , centrum est Icosaedri.

4. primi

III.

Si latus cubi extremum ac media ratione sectur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

15. quinti  
2. quartide.

Cum enim  $C I$ , sit maius segmentum rectae  $C T$ ; sitque in  $C I$ , ad  $C T$ , ita  $K I$ , dupla ipsius  $C I$ , ad  $\beta T$ , duplam ipsius  $C T$ ; erit quoque  $K I$ , latus Icosaedri; segmentum minus lateris cubi  $\beta T$ .

III.

Icosaedri latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

15. undec.

Si enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, sunt duo triangula inter se equalia, angulosque alternos habentia aequales; ex 4. propos. lib. 1. quae quidem in centro conveniunt. Quare qualibet latera opposita parallela erunt; Atque idcirco, et triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.

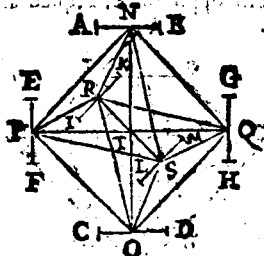
II

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrum describere.

Et si quoniam in dato Icosaedro, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita,  $A E$ ,  $G D$ ,  $E F$ ,  $G H$ ,  $I K$ ,  $L M$ , quorum bisarias sectiones  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ , ingant tres rectae  $N O$ ,  $P Q$ ,  $R S$ , aequales se se in centro  $T$ , bifariam, & ad angulos

angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos præce-  
dentis ostensa sunt, ducantur quæ rectæ NP, NR, NS, NQ,  
OP, OR, OS, OQ, PR,  
PS, QR, QS, constituen-  
tes octo triagula SNP, SPO,  
SOQ, SQN, RNP, RPO,  
ROQ, RQN. Quia, gigitur la-  
teræ TN, TS, triaguli TNS,  
æqualia sunt lateribus TN,  
TP, triaguli TNP, (cum sint  
rectarum æqualium dimidia)  
angulosq; continent rectos,  
ut dictum est; Acquales erūt  
bases NS, NP. Eodemq; mo-  
do reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hisce duabus, & in-  
ter se. Octo ergo dicta triagula æquilatera sunt, & inter se  
æqualia; Ideoq; Octaedrum constituunt. Quod in Icosæ-  
dro descriptum est, cum eius anguli resideant in bisariis se-  
ctionibus sex laterum Icosædri, oppositorum. In dato itaq;  
Icosædro, Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.



4. primi

COROLLARIUM.

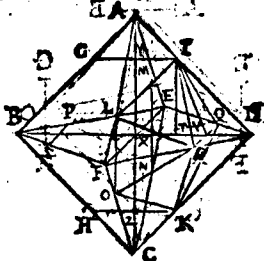
Scilicet hinc idem esse centrum Icosædri, & Octædri in  
ea descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrū Ico-  
sædri incidentes, diametri sunt Octædri NPOQRS, sibi inscripti.  
Quare T, centrū Icosædri, ubi se intersectat, centrū quoq; est Octædri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosædru describere.

DATUM Octaedrum, in quo describendum est Icosæ-  
dru, sit ABCDEF. Cum a quolibet angulo quatuor  
latera exeat, sumantur singulis binæ non proxima, sed  
sibi regionis respondentia, hoc est, quæ ad angulos qua-  
dratorum Octædri oppositos cadunt, sumendo semper bi-  
næ iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt  
BA, BG, DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D;  
quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta an-  
gulos oppositos A, C, quadrati AECF. (Nam la-

tera  $AB, AD, CB, CD$ , quadrati  $ABCD$ , iuxta eisdem an-  
gulos  $A, C$ , iam sumpta fuerit,  $EB, ED, EF$ , iuxta an-  
gulos oppositos  $E, F$ , quadrati  $EBFD$ . Nam latera  $BA,$



$EC, FC, FA$ , quadrati  $AECF$ , iuxta eisdem angulos  
 $E, F$ , iam accepta sunt, )  
que omnia secantur extre-  
ma ac media ratione, hae-  
cege, ut maiora segmenta  
sint prope angulos in qui-  
bus erecti sunt, in duode-  
cim punctis  $G, H, I, K, L,$   
 $M, N, O, P, Q, R, S, & A$   
singulis ad quinque proxi-

mas sectiones quinque lineae rectae ducantur, ut ex  $R$ , rectae  
 $RQ, RI, RL, RO, RK$ . Et ex  $I$ , rectae  $IQ, IR, IM, IL,$   
 $IG$ , & sic de ceteris, quamvis non omnes ductae sint in figu-  
ra, ad evitandam linearum confusionem. Post haec, ductis  
tribus Octaedri diametris  $AC, BD, EF$ , se se in centro  $X$ ,  
secantibus bisariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. pro-  
pos. 14 lib. 13. quarum  $AC, BD$ , secant rectas  $GI, RQ$ , in  
 $Y$ , &  $V$ ; connectaturque recta  $IV$ , agaturque  $IT$ , parallela  
ipsi  $YX$ . Quoniam ergo latera  $DQ, DI$ , trianguli  $DQI$ ,  
aequalia sunt lateribus  $DR, DI$ ; (Sunt enim  $DQ, DR$ ,  
minora segmenta rectarum equalium  $DE, DF$ .) & angulos  
comprehendunt aequales, nempe triangulorum Octaedri  
 $ADE, ADF$ , sunt bases  $IQ, IR$ , aequales. Deinde cum  
sit, ut  $BG$ , ad  $GA$ , ita  $DI$ , ad  $IA$ ; erit  $GI$ , rectae  $BD$ , pa-  
rallala. Eademque ratione  $QR$ , ipsi  $EF$ , parallela; Ac  
proinde ut  $DI$ , ad  $IA$ , ita  $XY$ , ad  $YA$ . Recta igitur  $XA$ ,  
secta tria in  $Y$ , externa ac media ratione. Rursus quia est ut  
 $AX$ , ad  $XD$ , ita  $AY$ , ad  $YI$ , (quod triangulum  $AYI$ , simile  
sit triangulo  $AXD$ , per coroll. propos. 14 lib. 6.) Est autem  
 $AX$ , ipsi  $XD$  aequalis; Erit. &  $AY$ , ipsi  $YI$ , aequalis. Quare  
 $YI$ , minus segmentum est rectae  $XA$ . Non aliter ostende-  
mus  $AY$ , ipsi  $YG$ , esse aequalem; ideoque  $GI$ , rectam bi-  
sariam in  $Y$ , similiterque  $QR$ , in  $V$ , secari. Cum vero la-  
tera  $AG, AI$ , trianguli  $AGI$ , aequalia sint lateribus  $DQ,$   
 $DI$ , trianguli  $DQR$ , similitam minora segmenta minoribus

4. primi.  
2. quartide.  
2. sexti.  
4. sexti.

bua

bus segmentis equalium rectarum) angulosque comprehen-  
dunt rectos, nempe quadratorum  $ABCD$ ,  $DEBF$ . Aequa-  
les erunt bases  $GT$ ,  $QR$ . Eadem ratione his aequales ostenduntur rectae  $HK$ ,  $PS$ ,  $MN$ ,  $LO$ , quae nimirum subtrahuntur  
reliquos quadratorum  $ABCD$ ,  $DEBF$ . Aequos angulos, in  
singulis uidelicet quadratis binos oppositos, comprehendunturque duo  
segmenta laterum minora. Deinde quia  $YI$ , minus segmentum ipsius  $XA$ , ostensum, maius est segmen-  
tum maioris segmenti  $XY$ , diuisa extrema ac media ratione,  
ut demonstrauimus ad propof. lib. 13. Est autem  $XY$  recta  
 $XY$ , aequalis cum ambae sint maiora segmenta aequalium  
rectarum  $XA$ ,  $AI$ ,  $YI$  &  $YI$ , recta  $XT$ ; erit  $XT$ , maius  
segmentum ipsius  $XY$ , deinde  $TV$ , segmentum minus  
eiusdem  $XY$ . Quare quadrata rectarum  $XY$ , totius, hoc  
est, ipsius  $IT$ , (cum & recta  $IT$ , aequalis ipsi  $XY$ ) &  $TV$ ,  
minoris segmenti, tripla sunt quadrata rectae  $XT$ , maioris  
segmenti. Atque addo quadratum ipsius  $TV$  aequalis, qui  
stans quadrato rectae  $IT$ , &  $TV$ , triplicem est eundem qua-  
drati rectae  $XT$ , hoc est, rectae  $RV$ , quae, eademque, est, ipsi  
 $XT$ , semiplici  $YI$ , eademque demonstratis, cum  $BY$ ,  $YI$ , dimidia  
sint equalium rectarum,  $RQ$ ,  $GI$ . Addo igitur quadrat-  
um rectae  $RV$ , ipsi quadrato rectae  $IT$ , utrumque quadrata recta-  
rum  $IV$ ,  $VR$ , quod dupla quadrati rectae  $RV$ . At quadra-  
tis rectarum  $IV$ ,  $VR$  aequale est quadratum rectae  $IR$ , quod  
anguli  $IVR$ , &  $EVQ$ , comprehendi lateribus aequalibus  
 $IV$ ,  $VR$ ,  $IV$ ,  $VR$ , & subtrahi basibus aequalibus  $IR$ ,  $IQ$ ,  
aequales sunt, ideoque recti. Ergo & quadratum rectae  $IR$ ,  
quadruplum est quadrati rectae  $VR$ . Ac propterea cum eius-  
dem quadrati rectae  $VR$ , quadruplum quoque sit, per se ho-  
lium propof. 4. lib. 1. quadratum rectae  $QR$ . Aequalia erunt  
quadrata rectarum  $IR$ ,  $QR$ , ideoque & rectae ipsae, aequa-  
les. Etiam autem  $Q$ , ipsi  $IR$ , aequalis. Triangulum igitur  
equilaterum est  $IRQ$ . Non solum demonstrabimus, equi-  
laterum esse triangula similem situm, cum  $IRQ$ , habentia,  
nempe  $KQ$ ,  $BA$ ,  $GI$ ,  $LM$ ,  $GR$ ,  $PS$ ,  $NH$ ,  $K$ ,  $OK$ ,  
 $RL$ ,  $QS$ ,  $LQ$ ,  $PM$ ,  $N$ ,  $QMN$ , &c. adeo triangulo  $IRQ$ ,  
aequalia, cum latera omnium sint equalia inter se. Cum enim  
in quolibet horum triangulorum unum, latus subtrahat an-  
gulum rectum quadrati comprehensum duobus segmentis  
minoribus

4. primi.

4. primi.

4. primi.

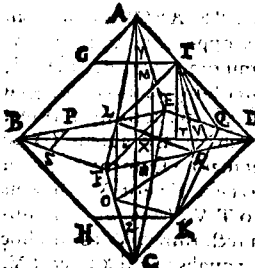
4. septi dec.

7. primi.

47. primi.

8. primi.

minoribus laterū Octaedri; Duo uero reliqua subtendunt duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos singulos duobus segmentis laterū Octaedri, maiore & minore: Erunt latera unius trianguli lateribus aliorū æqua-



lia; æque præterea & ipsa triangula æqualia, per coroll. propof. 8. lib. 1. Vt in triangulis IQ R, GIL, latera KQ, GI, subtendentes angulos rectos QDR, GAL, quadratorū DEBF, ABCD, comprehensos minoribus segmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia sunt. Eodem modo latera IQ,

IT, æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic uero segmentis AL, AI, maiore & minore quoque. Non secus latera IR, GL, æqualia erunt. Acqualia igitur sunt triangula IQ R, GIL, per coroll. propof. 8. lib. 2. Atqui IQ R, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina uidelicet singulis. Ex his consequitur reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, uidelicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ, in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorū lateribus communia sint. Vigniti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum Octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi, (ut uides, in quinque RQL, RIL, RLO, ROK, R KQ, solidum angulum R, componentibus.) Icosædru[m] componunt Octaedro inscriptum, cum Icosædri duodecim anguli duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaque Octaedro Icosædru[m] descripsimus. Quod

faciendum erat.

COROL.

## COROLLARIUM. I.

**COLLIGITUR** ex demonstratis, si duo latera trianguli aequi lateri segmentis extremae a media ratione, ita ut unus maior segmentum, alterius uero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cum enim in triangulo aequilatero  $ADE$ , maior segmentum lateris  $AD$ , sit  $DI$ , &  $DQ$ , minus lateris  $DE$ ; Sit autem recta  $IQ$ , ostensa aequalis rectae  $GI$ , quae duplum potest minoris segmenti  $AI$ , cum quadratum rectae  $GI$ , aequale sit duobus quadratis aequalibus rectarum aequalium  $AG$ ,  $AI$ . Perspicuum est, & rectam  $IQ$ , duplum posse eiusdem segmenti minoris  $AI$ .

47. primi.

## COROLLARIUM. II.

**RYBAVS** sit, cum octo Icosaedri bases collocatae sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namque Octaedri superioris triangulum  $AED$ , in quo collocatum est triangulum Icosaedri  $IMQ$ , sequetur  $C$ , centrum trianguli  $AED$ , ex quo rectae educantur  $CA$ ,  $CE$ ,  $CD$ ,  $CL$ ,  $CM$ ,  $CQ$ . Quoniam igitur latera  $CA$ ,  $AM$ , trianguli  $CAM$ , aequalia sunt lateribus  $CE$ ,  $EQ$ , trianguli  $CEQ$ , (quod hac latera sunt ex centro, & maiora segmenta aequalium rectarum) angulosque comprehendunt aequales, nempe dimidios angulorum trianguli aequilateri, ut in scholio propositi 2. lib. 13. ostendimus. Erunt bases  $CM$ ,  $CQ$ , aequales. Non solum demonstrabimus  $CI$ , aequalem esse lineis  $CM$ ,  $CQ$ . Quare  $C$ , centrum erit trianguli  $IMQ$ .



## COROLLARIUM. III.

**NON** difficile est denique ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque abscrispti Icosaedri. Ductis enim ex  $X$ , centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, huiusmodi rectis  $XG$ ,  $XO$ , ad angulos  $G$ , &  $O$ ; cum latera  $XA$ ,  $AG$ , trianguli  $XAG$ , aequalia sint lateribus  $XF$ ,  $FO$ , trianguli  $XFO$ . (Nam  $XA$ ,  $XF$ , semidiametri sunt Octaedri, &  $AG$ ,  $FO$ , segmenta minora laterum aequalium Octaedri sectorum extrema a media ratione.) angulosque complectantur aequales, semirectos uidelicet; (cum  $AC$ ,  $EF$ , diametri sint quadratorum  $ABCD$ ,  $BAFC$ ; ac proinde, per demostrata in scholio propositi 14. lib. 1. angulos quadratorum biniariam secant.) Aequales erunt & bases  $XG$ ,  $XO$ . Eodemque argumento ostenduntur omnes aliae rectae ex  $X$ , ductae ad angulos Icosaedri aequales esse. Igitur  $X$ , centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

4. primi.

PROBL.



PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

16. quinside  
5. quinside.

INScribatur dato Octaedro Icosaedrum; & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centrīs basium Icosaedri, quālibet concentricē sunt basibus Octaedri, ex coroll. 1. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centrīs occupare basium Octaedri, reliquos autē duodecim in centrīs duodecim basium Icosaedri, quarum binę singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicitur, quamquam non proprius ex definitione 31. lib. 1. appareat potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

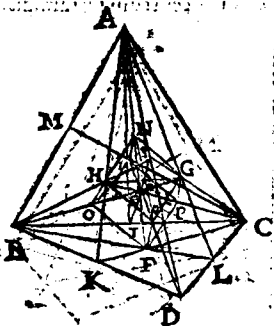
IN data Pyramide cubum describere.

15. quartidecimi.

DETERMINATUR Pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque elus centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur AEF, BEG, CEH, DEI, quę cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectę educantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectę in solidis angulis per centrum E, demissę AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centrīs basium rectis lineis coniungantur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H.

Dico

Dico solidum N.F., contentum quadrilateris N.O., N.P., N.Q., F.G., F.H., F.I., eubum esse: Cum enim latera A.F., F.K., trianguli A.F.K., equalia sint lateribus A.E., F.L., trianguli A.F.L., (quod F.K., F.L., cum perpendiculares sint ad B.D., G.D., ex centro F., ductis, ostendat equalis distantias rectarum equalium B.D., C.D., a centro F.) angulosque contineat rectos, ex 3. defin. lib. 11. Aequales erunt & bases A.K., A.L. & anguli K.A.F., L.A.F. Rursus quia latera A.N., A.H., trianguli A.N.H., equalia sunt lateribus A.N., A.G., trianguli A.N.G., (sunt etenim A.H., A.G., semidiametri triangulorum equilateralium equalium A.B.D., A.C.D.,) angulos



4. primi.

4. primi.

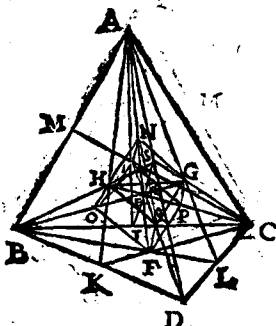
4. primi.

item comprehendunt equalis, ut demonstravimus: Aequales erunt bases N.H., N.G. Haec scens ostendentur equalis rectae Q.G., Q.H., si recte ducantur D.G., D.H., nec non & reliquae cum omnes subendant equalis angulos equalibus lateribus comprehensos, ut perspicuum est. Si enim recta ducatur F.T. cum latera A.F., F.T., equalia sint lateribus A.F., F.K., (Sunt etenim F.T., F.K., distantiae rectarum equalium B.C., B.D., a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli T.A.F., K.A.F. Ac proinde etiam latera A.N., A.L., equalia sint lateribus A.N., A.H., (Sunt etenim A.L., A.H., semidiametri triangulorum equilateralium equalium A.B.C., A.B.D.,) angulosque contineant equalis: Aequales erunt bases N.I., N.H., &c. Subtingitur ex dicta quadrilatera, equaliter. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangula, ut tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum N.F.

A. S. V. M. A. T. F. R. quadrilaterum N.Q., duobus rectis G.H., N.Q. Quoniam in pyramide latera B.C., A.D., opposita sunt, hoc est, non coeunt in aliquo puncto, si eorum puncta semper S., & T., coniungantur recta S.T., erit ea diameter octaedri in pyramide descripti, ut constet ex figura proposita.

huius

huius lib. Nam punctum S, huius figuræ, responder puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint latera opposita, siue non coeuntia B C, A D. Quæritur cum idem sit centrum pyramidis, & Octaedri ipsa descripi, ut



mox demonstrabimus, transibit ST, per E, centrum Pyramidis, æqualesque erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, scholiū, propof. 12. lib. 13. erunt HS, GS, ex centris H, G, tertias partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionally fecantur, atque idcirco HG, parallela est lateri BC,

fecatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC,) proportionaliter, Idcirco & SR, tertia pars est ipsius ST, Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rursum quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC, erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propof. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talem 1. erit EI, ac proinde talem 4. recta DI, ideoque eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1, atque idcirco BQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadem ratione, EN, tertia pars erit ipsius AE, Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter fecantur, recta NQ, parallela erit lateri AD, fecabitque latera BS, ED, trianguli DES, (quod quidem pars est trianguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE, tertia pars erit ER, ipsius SE, Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiusdem SE. Quoniam igitur utraque HG, NQ, ex SE, duas tertiæ partes abstulit, in eodem puncto R, fecabitur SE, a rectis HG, NQ. Ac idcirco & ipsæ HG, NQ, in eodem se se puncto interfecabunt. Quare in eodem sunt plano, proptereaque & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum

17. quarti  
decimi.

2. sexti.

19. quarti  
decimi.

2. sexti.

2. undec.

cul  
Ea  
ref  
tri  
poi  
ma  
S I  
late  
par  
æqu  
les  
H I  
les  
Q  
mu  
cre  
dril  
ran  
ciu  
qu  
per  
da  
de

bi  
cun  
dis  
mic

I  
nes  
trip  
ex  
mid

cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum  $NQ$ . Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum, nunc demonstramus.

4. *sexti.*

Cum ostensa sit  $HG$ , ipsi  $BC$ , parallela, atque adeo triangulum  $SHG$ , simile triangulo  $SBG$ , ex coroll. prop. 4. lib. 6. Erit ut  $SH$ , ad  $HG$ , ita  $SB$ , ad  $BC$ ; & permutando, ut  $SH$ , ad  $SB$ , ita  $HG$ , ad  $BC$ : Est autem  $SH$ , tertia pars ipsius  $SB$ : Igitur &  $HG$ , tertia pars erit lateris  $BC$ . Haud secus ostendemus  $NQ$ , tertiam esse partem lateris  $AD$ . Cum ergo latera  $BC$ ,  $AD$ , sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes  $HG$ ,  $NQ$ , æquales. Ac proinde cum subtrahantur æqualibus lateribus  $HN$ ,  $GN$ ;  $GQ$ ,  $HQ$ ;  $NG$ ,  $QG$ ;  $NH$ ,  $QH$ ; Acquales erunt quatuor anguli  $HNG$ ,  $NGQ$ ,  $GQH$ ,  $QHN$ . Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis æquales, ut ostendimus ad prop. 32. lib. 1. recti erunt; ideoque quadratum erit  $NQ$ . Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent: qui ideo Pyramidi dicitur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$ , in centris quatuor basium pyramidis, quatuor uero reliqui  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $Q$ , in bifarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, ut constet. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

8. *primi.*

### COROLLARIUM. I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi  $NF$ ,  $OG$ ,  $PH$ ,  $QI$ , cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per  $B$ , centrum pyramidis transeunt.

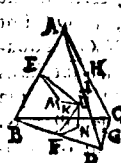
### COROLLARIUM. II.

INSERATUR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim  $ER$ , ex  $E$ , centro cubi, in  $R$ , centrum basis  $GNHQ$ , ducta dimidium sit lateris cubi, ut constet; Recta  $RS$ , dupla ipsius  $ER$ ,

E R, equalis erit lateri cubi, Cum igitur R S, ostensa sit terra pars ipsius S T, & perspicuum est, rectam S T, coniungentem, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis A D, B C, transire per centrum pyramidis, triptamque esse lateri cubi R S.

E B M M A.

I D E M autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit Pyramis



A B C D, cuius omnia sex latera bifariam secantur in E, F, G, H, I, K, & ex L, centro Pyramidis in bases A B D, B C D, perpendiculares demittantur L M, L N, quae in centra circulo-

rum doctas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis L E, E M, L F, F N; quoniam latera L M, M E, trianguli L M E, equalia sunt lateribus L N, N F, trianguli L N F. (cum enim circuli bases A B D, B C D, circumscribentes sint aequales, aequaliter distabunt ipsi a centro L, per lemma 2. propof. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantiae L M, L N, aequales erunt, sic quoque aequales erunt M E, N F, distantiae rectarum aequalium A B, B D, a centris M, & N, circumtorum aequalium) angulosque comprehendunt rectos, per defin. 3. lib. 11. Ac aequales erunt rectae L E, L F. Eademque ratione haec aequales erunt, & inter se rectae L G, L H, L I, L K. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti, constriuantur in punctis E, F, G, H, I, K, ut ex 2. propof. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineae cadentes in eius angulos sint aequales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum

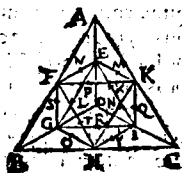
4. primi

trum pyramidis, & octaedri in ea descripti.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATAE Pyramidi ABCD, inscribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secantur extrema ac media ratione, hac lege, ut bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum octaedri cadentia, ut in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, ut M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrum in dicto octaedro, ut constat



2. quintide.

ex propos. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim praefatis sectionibus duodecim laterum octaedri. Cum ergo haec ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK, KE; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 3. lib. 11. cuius quidem quatuor bases

MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor

basibus Pyramidis existunt, ut constat. In data igitur Pyramide

Icosaedrum descriptum.

mus. Quod erat faciendum.

M m

POR.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum describere.

19. quinside.  
5. quinside.

8. quinside.

12. quinside.

Pyramidi datæ inscribatur Icosaedrum, & in hoc Dodecaedrum habens uiginti suos angulos in centris uiginti basium Icosaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, ut in præcedenti propos. diximus; consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum ceteris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ; ut constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat; Item cubus pyramidi inscriptus, quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bisarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bisarijs sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiam si non proprie. Quamobrem in data Pyramide Dodecaedrum descriptimus. Quod faciendum erat.

13.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato solido regulari sphaeram describere.

Ex centro sphaeræ datum solidum complectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulo-

rum

rum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter a centro distent, ex lemma 2. eiusdem propos. Quapropter sphaera, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa singulas bases in eorum centris contingat.

SCHOLIUM.

ITAEQUE, cum quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, ut sint in uniuersum uiginti inscriptiones; unam duntaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, octaedro, atque Pyramide, ut perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter unus tantummodo cubus non proprie in Pyramide describitur, ut ex propos. 18. huius lib. est manifestum. Nam, ut proprie solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constitui uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, ut desin. 31. lib. 11. exposuimus. Quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.

CAETERVM inter omnia quinque solida regularia; unum octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipiunt inscripta. In octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro inscriptum est, ut constat ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodecaedro describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est. Deniq; in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicitur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

NEQUE uero præterendum est, Dodecaedrum, sibiq;

M m 2

inscriptum

6. quinside

5. quinside.

2. quinside.

1. quinside.



1. quintide. inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, & a-  
8. quintide. dem sphaera comprehendendi. Cum enim quatuor anguli Pyrami-  
dis ex octo angulis cubi quatuor possideant, conveniantq3 om-  
nes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat,  
sphaeram Dodecaedro circumscripam complecti quoque cubum  
atque Pyramidem, cum sphaera illius superficies per horum so-  
lidorum angulos incedat.

**P A R I** ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum,  
cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octae-  
dro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium cen-  
tris constituuntur, ut demonstratum est: In centris quidem  
basium Icsaedri, propof. 5. 11. & 12. In centris vero basium  
octaedri, propof. 17. 4. & 6. In centris denique basium Pyra-  
midis, propof. 20. & 18. huius lib.

**V I G I N T I** porro prioribus huius lib. propositionibus  
omnes delineationes inscriptionesque quinque solidorum regula-  
rium, unius in alio, quotquot excogitari possunt, absolvimus,  
cum in qualibet reliqua quatuor designaverimus. In pyrami-  
de enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum,  
propof. 2. 18. 19. 20: In octaedro vero, Pyramidem, cubum,  
Icosaedrum, & Dodecaedrum, propof. 5. 4. 16. 17. In cubo da-  
inde, Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, & Dodecaedrum,  
propof. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum,  
cubum, atque Dodecaedrum, propof. 12. 15. 14. 5. In Dodecae-  
dro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum,  
propof. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori unica pro-  
positione, qua arte in quovis solido regulari sphaera depinga-  
tur, docuimus.

**ELEMENTI DECIMI QUINTI FINIS.**



# ELEMENTVM

## DECIMVMSEXTVM,

*Quo uaria solidorum regularium sibi mutuo inscrip-  
torum, & laterum eorundem comparationes  
explicantur, a Francisco Flussate Candalla  
adiectum, & de quinq; corporibus.*

### LIBER TERTIVS.



*VENIAMODVM in lib. 14. tra-  
dita sunt comparationes quam plurime  
figurarum regularium, & laterum ea-  
rundem in eadem sphaera descriptarum,  
quarum quidem descriptione in lib. 13.  
exposuit Euclides; ita etiam Franciscus  
Flussas Candalla in hoc lib. 16. inter se  
comparat easdem figuras regulares sibi*

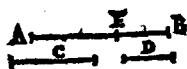
*mutuo inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem  
inscriptionem in precedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam  
connexionem habet hic liber 16. cum precedenti 15. quam quar-  
tusdecimus cum terçiodecimo habuit; ut imperfecta quodam-  
modo uideri possit tractatio hac quinq; corporum regularium,  
scilicet liber hic decimus sextus non adiungatur.*

### THEOR. I. PROPOS. I.

*SI in Dodecaedro cubus describatur,  
& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit  
proportio Dodecaedri exterioris ad Do-*

dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.

L A T V S cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis,



quam habet AE, maius segmentum ad EB, minus. Cum enim, ut in scholio ultimæ propos. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusq;

in illo descriptus, eadē comprehendantur sphaera; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphaera cum cubo descripti, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphaera, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit ut C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, ut AE, maius segmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris segmenti AE, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.

## THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo

gulo

gulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in  
latus oppositum demissa, secatur a recta illū  
angulum subtendente, extrema ac media ra-  
tione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo  $ABCDE$ , ex  
angulo  $A$ , ad latus oppositum  $CD$ , perpendicularis demit-  
tatur  $AF$ . Dico  $AF$ , a recta  $BE$ , subtendente angulum  $A$ , se-  
cari in  $G$ , extrema ac media ratione. Du-  
cta enim recta  $AD$ , que secet  $BE$ , in  $H$ ;  
quoniam  $BE$ , recta lateri  $CD$ , per coroll.  
propof. 8. lib. 15. est parallela; secabun-  
tur rectæ  $AF$ ,  $AD$ , proportionaliter:  
Atqui  $AD$ , in  $H$ , secta est extrema ac me-  
dia ratione, estque maius segmentū  $DH$ .  
Igitur &  $AF$ , in  $G$ , similiter erit secta. Quocirca linea per-  
pendicularis ex quouis angulo, &c, Quod erat demon-  
strandum.



2. sexti.  
8. tertijdec.

### THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducan-  
tur rectæ opposita latera secantes extrema  
ac media ratione, ita ut prope quemuis an-  
gulum sit maius segmentum unius lateris,  
& minus alterius: Hæ sectionibus suis in me-  
dio producent basin Icosaedri in dicta pyra-  
mide descripti, inscriptam quidem alij trian-  
gulo æquilatero, cuius anguli latera trian-  
guli pyramidis secant extrema ac media ra-  
tione, & latera ipsa bifariam secantur ab an-  
gulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit  $ABC$ , cuius latera secantur bifariam in  $D, E, F$ , iunctis rectis  $DE, EF, FD$ , quibus rursus sectis extrema ac media ratione in  $G, H, I$ , iungantur rectæ  $GH, HI, IG$ , constituentes  $GH I$ , triangulum Icosædri in dicta pyramide descripti, ut constet ex propof. 19. lib. 15. Secantur deinde latera trianguli  $ABC$ , extrema ac media ratione in  $K, L, M$ , iunctis rectis  $BK, CL, AM$ . Di-



to has rectas suis sectionibus producere triangulum Icosædri  $GHI$ , hoc est, rectam  $BK$ , transire per puncta  $G, I$ ; & rectam  $CL$ , per puncta  $H, I$ ; & rectam  $AM$ , per puncta  $G, H$ . Ducta enim per  $H$ , recta  $NO$ , ipsi  $BC$ , parallela; erit triangulum  $FHO$ , triangulo  $FEC$ , simile, ex coroll. propof. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum &  $FEC$ , æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo  $ABC$ , per idem coroll. Quare  $HO$ , recta æqualis est rectæ  $FE$ , maiori

segmento rectæ  $FE$ , seu  $DF$ , ipsi æqualis: (Est enim &  $DEF$ , triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendat angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidijs scilicet æqualium laterum eiusdem trianguli comprehensos, ideoque equalia sint.) Est autem &  $NH$ , æqualis toti  $DF$ , in parallelogrammo  $DH$ , propterea quod  $FH, DE$ , parallelæ sint rectis  $AB, BC$ , seu  $NO$ . Igitur recta  $NO$ , composita ex  $NH$ , tota, &  $HO$ , maiori segmento, secta erit in  $H$ , extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ  $BC, NO, DE$ , similiter sint sectæ in  $M, H, G$ , nimirum extrema ac media ratione; Recta autem  $AM$ , ex ijs, quæ demonstrauimus ad propof. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constat, ipsam  $AM$ , transire per puncta  $G, H$ . Haud secus ostendemus  $BK$ , per puncta  $G, I$ ; &  $CL$ , per puncta  $H, I$ , transire, si per  $G, I$ , rectæ ducantur parallelæ lateribus  $AC, AB$ ; Atque idcirco rectæ  $BK, CL, AM$ , suis sectionibus producent triangulum Icosædri  $GHI$ .

AGATVR iam per  $G$ , recta  $PQ$ , rectæ  $CL$ , parallela. Quoniam igitur  $AF$ , æqualis est rectæ  $DF$ , seu rectæ  $FE$ , cuius maius segmentum fuit  $FH$ , hoc est,  $FO$ , illi æqualis; Erit quoque  $FO$ , maius segmentum rectæ  $AF$ ; ac proinde, tota  $AO$ , secta in  $F$ , extre-

4. primi.  
34. primi.  
2. sexti.  
5. tertijdec.

tertijdec.

F  
A  
A  
ti  
n  
F  
A  
n  
ti  
E  
en  
P  
d  
se  
p  
le  
ti  
fi  
qu  
n  
te  
qu  
li  
re  
di  
m  
A  
lin  
de  
gr  
P  
m  
H  
gr

ma  
ab

F, extrema ac media ratione : Est autem ut AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO ; & ut AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectę AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntque maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectę ergo AQ, AL, segmenta maiora restarum æqualiū AC, AB, æquales erunt. Quia uero est ut AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum ; Et est AQ, recta rectę AL, æqualis : Erit & QC, recta æqualis rectę AP. Quare & recta AP, minus segmentū erit lateris AB, maiusque reliqua AP ; ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadē ratione recta PR, quę per I, ducitur parallela rectę AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectę BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione, atque adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam uero singula latera trianguli PQR, cum subtendant anguloa æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, æqualia inter se sunt ; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bisariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri GHI : (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL, secabuntur PQ, LC, in eadem rationes, ex ijs, quę ad propos. 4. lib. 6. demonstrauimus : Diniditur autem CL, bisariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela est lateri AL, secans proportionally latera CA, CL. Igitur & PQ, bisariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP.) Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bisariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

2. sexti.

2. quartide.

4. primi.

2. sexti.

COROLLARIUM

Ex his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectę diuisę extrema ac media ratione, quę ab uno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque

2. sexti.

34. primi.



2. sexti.

34. primi.

quoque ac media ratione. Cum enim, ut constat ex propof. 16. lib. 15.  $GHI$ , triangulum fit Icofaedri in octaedro, cuius basis  $DEF$ , descripti; ducatur ex angulo  $F$ , trianguli  $FEC$ , quod triangulo  $DEF$ , est aequale, recta  $FS$ , parallela rectae  $AM$ , secans  $EC$ ,  $HO$ , in  $S$ , &  $T$ . Cum igitur  $MC$ , bifariam secetur in  $S$ , ob triangulum  $AMC$ ; sitque  $MS$ , ipsi  $GF$ , aequalis, ob parallelogrammum  $GS$ ; erit &  $SC$ , aequalis eidem  $GF$ , minori segmento rectae  $DF$ ; Ac propterea cum totae  $DF$ ,  $EC$ , aequales sint; erit quoque; reliqua  $ES$ , reliquae  $DG$ , maiori segmento aequalis: Ideoque;  $EC$ , in  $S$ , secta erit extrema ac media ratione. Deinde quia  $FE$ ,  $FS$ , similiter secantur; secatur autem  $FE$ , extrema ac media ratione; secabitur &  $FS$ , in  $T$ , extrema ac media ratione; maiusque segmentum erit  $FT$ , recta aequalis existens lateri Icofaedri  $GH$ , ob parallelogrammum  $GT$ . Igitur  $FT$ , latus Icofaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectae  $FS$ , quae diuidit  $EC$ , latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo  $F$ , demissa. Quod est propofitum.

## THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icofaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit  $ABC$ , cuius latera extrema ac media ratione secantur in  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , & ductis rectis  $BK$ ,  $CL$ ,  $AM$ , producentibus  $GHI$ , basim Icofaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo aequilatero  $PQR$ , cuius anguli latera trianguli  $ABC$ , secant extrema ac media ratione in  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , & ipsa latera  $PQ$ ,  $QR$ ,  $RP$ , bifariam diuidantur in  $G$ ,  $H$ ,  $I$ , ut in propof. praecedenti demonstratum est. Dico  $AP$ , minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icofaedri  $HI$ . Cum  $n. PQ$ , dupla sit potentia minoris segmenti  $AP$ , ex coroll. 1. propof. 16. lib. 1. quadrupla uero potentia rectae  $HI$ , ex scholio propof. 4. lib. 2. quod  $PQ$ , recta dupla sit rectae  $PG$ , hoc est, sibi aequalis  $HI$ , ob parallelogrammum  $PH$ ; erit  $PQ$ , potentia 4. &

$AP$  2.

AP, 2. & HI, 1. Quāobrē AP, dupla erit potētia rectæ HL Minus ergo segmentū lateris, &c. Quod erat demonstrādū.

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex his latus Icosædri in pyramide descriptū esse Apotomen. Cum enim diameter sphaeræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis; si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rōnale, cū diametro potētia sit cōmēsurabile. Quare minus segmētū lateris Pyramidis extrema ac media ratione scēti Apotome erit; Atq; adeo cū minori segmēto lateris Pyramidis latus Icosædri potentia sit cōmēsurabile; (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosædri.) Erit & latus Icosædri, ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

13. serijde.

5. decimi.

6. serijdec.

6. decimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATUS cubi potētia dimidiū est lateris Pyramidis ī eo descriptæ: Latus uero Pyramidis duplū est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus deniq; cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CUM enim latus Pyramidis in cubo descriptę diameter sit basis cubi, ut cōstat ex propos. 1. lib. 15. Sit autē quadratū huius diametri duplū basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potētia lateris Pyramidis in cubo illo descriptę.

RYRVS, quia rectę coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, ut liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectę coniungētis bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, ut constat ex 4. propos. lib. 4. Perspicuum est, latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.

DENIQUE quia diameter sphaerę, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro octaedri sibi inscripti, cū diameter octaedri cōiungat cētra basiū cubi oppositarū, ut in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, lat<sup>9</sup> cubi potētia esse duplū lateris octaedri in eo de-

14. serijde.

eo de.



eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

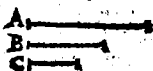
LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

*5. sextidec.* CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoq; in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, ut docuimus propof. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propof. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; existat denique latus cubi dimidium potentia lateris Pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico



B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex ijs, quæ in scholio propof. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propof. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit

fit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, ut B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

Cum enim per ea, quæ propos. 18. lib. 13. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti; (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramidis BC,) Et quadrata proportionē habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cum noncupla proportio sit triple duplicata, ut in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare, cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, ut si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiusdem basis diametri sit 2. & quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

10. sexsi.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maior segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

Cum enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inscribitur, ut docuimus in scholio propos. ultime lib. 13. Erit latus Pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi. & Dodecaedro inscripti:

8. sexsidec.

inſcripti : Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus ſyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat.

### THEOR. 10. PROPOS. 10.

**S**I in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuifi.

**V**T enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta coniungens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentium prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi recta GI, ſubtendens angulum rectum GAI, minoribus ſegmentis AG, AI, comprehenſum;) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare, cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſſit duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit ſuius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

47. primi.

### THEOR. 11. PROPOS. 11.

**L**ATVS octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

**S**I T una ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis quadratum ABCD, triangula uero ad E, uerticem, ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod ſi coniungantur rectæ FG,

F  
d  
t  
E  
p  
A  
ti  
2  
re  
di  
&  
ti  
bi  
m  
qt  
a  
te  
co  
igi  
m

fici  
rol  
bus  
poſ  
dru  
ſa,  
Eſt  
dru

eſſi  
ſta  
in

FG, GH, HI, IF; erit FGH, quadratum cubi in octaedro  
descripti, ut demonstrauius propos. 4. lib. 15. Quoniam au-  
tem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ  
EH, per coroll. propos. 18. lib. 14. quatum A  
partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH:  
Atqui ut EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igi-  
tur quatum partium 3. continet EB, talium  
2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac propte-  
rea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & qua-  
dratum rectæ LM, nimirum KLMN, partium 4. ideoque  
& quadratum lateris cubi GH, uidelicet FGH, talium par-  
tium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, si-  
bi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. de-  
monstrauius. Est enim LN, quadratum ex diametro  
quadrati GI, descriptum; cum GI, diameter (si ducatur)  
æqualis sit lateri LM. Quapropter, latus octaedri EB, po-  
tentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum  
eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus  
igitur octaedri potentia quadruplum, &c. Quod erat de-  
monstrandum.



2. sexti.

33. primi.

COROLLARIUM.

QVIA uero latus cubi extrema ac media ratione diuisum ef-  
ficat maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per co-  
roll. 1. propos. 13. lib. 13. Inscribunturque Dodecaedrum, & cu-  
bus sibi inscriptus, eidem octaedro, ut docuimus in scholio pro-  
pos. ultimæ lib. 13. Perspicuum fit, octaedri latus esse potentia qua-  
druplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diui-  
sæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti.  
Est, enim eiusmodi recta latus cubi eidem octaedro inscripti, cuius qua-  
druplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosædri maius segmentum  
est eius rectæ extrema ac media ratione se-  
ctæ, quæ potentia dupla est lateris. octaedri  
in Icosædro descripti.

QVO.

14.tertijs de.

Q U O N I A M Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex bassibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres recte lateri cubi aequales, ut constat ex propos. 14. lib. 15. eiusque scholio. Et in bifarijs sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri resident sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit, diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti aequalem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cum per ea, quae ad propos. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi praedicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti: Atqui diameter sphaerae, seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectae extrema ac media ratione sectae, quae potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

### THEOR. 13. PROPOS. 13.

L A T V S cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectae lineae diuisae extrema ac media ratione. Latus uero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectae lineae.

O S T E N S U M est in scholio propos. 13. lib. 15. Minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineae ad maius segmentum, uel maioris segmenti ad minus, (quod

tota

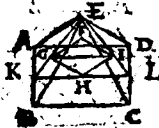
tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continue proportionales: ) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus Icosaedri in ipso descriptæ esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

**PRÆTEREA**, cum constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 12. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse ut latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, ut tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, ut maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

### THEOR. 14. PROPOS. 14.

**LATVS** Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

**SIT** una sex pyramidum Octaedri  $ABCDE$ , cuius basis quadratum  $ABCD$ , triangula autem ad uerticem  $E$ , sint  $ABE$ ,  $EBC$ ,  $CED$ ,  $DEA$ , sinæque horum triangulorum centra  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$ , quæ rectis iungantur  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ ,  $IF$ , quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, ut docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam uero Pyramis in cubo descriptæ, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, ut in scholio propos. ultimæ lib. 15. exposuimus; Etque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, ut constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter  $GI$ , latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri  $BC$ , sesquialterum esse lateris Pyramidis  $GI$ . Duobis enim rectis  $E G K$ ,  $E I L$ , diuidentur latera  $AB$ ,  $CD$ , bisariam in  $K$ ,  $L$ , ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque  $E K$ ,  $E L$ , sesquialteræ erunt rectæ cum  $EG$ ,  $EI$ , per coroll. propos. 18.

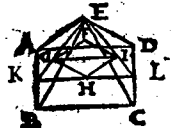


N n lib.

2. sexi.

lib. 14. Ac propterea  $GI$ , parallela erit rectæ  $KL$ , auferens, per coroll. propof. 4. lib. 6. triangulum  $EGI$ , fimile triangulo  $EKL$ . Quare erit, ut  $EK$ , ad  $KL$ , ita  $EG$ , ad  $GI$ ; & permu-

33. primi



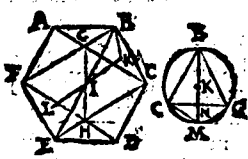
tando, ut  $EK$ , ad  $EG$ , ita  $KL$ , ad  $GI$ ; ideoque cum  $EK$ , fefquialtera fit ip-  
fius  $EG$ , erit &  $KL$ , fefquialtera ipfius  
 $GI$ . Cum ergo  $BC$ , æqualis fit ipfi  
 $KL$ , quod &  $BK$ ,  $CL$ , æquales fint,  
& parallelæ; Brit.  $BC$ , latus octaedri

fefquialterum lateris Pyramidis  $GI$ , fibi infcriptæ. Quod  
erat demonftrandum.

## THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icofaedri au-  
feratur triplum quadrati lateris cubi in eo  
descripti; relinquitur quadratum fefquiter-  
tium quadrati lateris Icofaedri.

SIT Icofaedrum  $ABCDEFGH$ , cuius diameter  
 $BE$ , & centrum  $I$ ; triangula uero oppofita & parallelæ, per  
coroll. 4. propof. 14. lib. 13.  $BGG$ ,  $EFH$ , quorum centra



$KL$ . Ducatur ex centro  $I$ , ad  
planū  $BCG$ , perpendicularis  
 $IK$ , cadens. ex coroll. lem-  
matis 1. propof. 10. lib. 14. in  
cētū  $K$ . Producta igitur  $KI$ ,  
perpendicularis quoque erit  
ad planum  $EFH$ , parallelum  
plano  $BCG$ , per fcholiū pro-  
pof. 14. lib. 14. caderque

idecirco in centrum  $L$ , per coroll. præfati lemmatis. Quā ob-  
rem, cum cubus in Icofaedro defcriptus ftatuat fuos angu-  
los in centris bafium Icofaedri, ut conftat ex propof. 11. lib.  
15. atque adeo angulos oppofitos in centris bafium oppo-  
fitarum; Erit  $KL$ , diameter cubi in Icofaedro defcripti, tran-  
fiens per  $I$ , centrum Icofaedri. Cum ergo eadē ratione reli-  
que-

quæ diametri cubi per idem centrū I, tranſeant, erit I, quoq;  
centrum cubi inſcripti, ideoque I K, I L, ſemidiametri æqua-  
les: Coniuñta autem K B, ſemidiametro circuli triangulum  
B C G, circunſcribentis, erit angulus B K I, reſtus, ex deſin.  
3. lib. 1. Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadra-  
tis reſtarum B K, K I. Igitur & quadratum diametri B E,  
quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri B I, ut in ſcho-  
lio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis dua-  
rum reſtarum, nempe diametri circuli triangulum B C G,  
circunſcribentis, & K L. Sunt enim & hæc quadrata, per  
idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris  
B K, K I, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri  
cubi K L, (quod triplum eſt quadrati lateris cubi,) ex  
quadrato diametri Icoſaedri B E, remanet quadratum dia-  
metri circuli triangulum B C G, circunſcribentis. Hoc  
igitur dico ſeſquitergium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C.  
Deſcribatut enim ex centro K, circa triangulum æquale-  
rum B C G, circulus, extenſaque B K, uſque ad M, quæ  
ſecet C G, in N, ducatur quoque recta C M. Quoniam igitur  
B N, per centrum K, ducta perpendicularis eſt ad C G,  
per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. erit  
recta B C, potentia ſeſquitergia rectæ B N; Vt autem B C,  
ad B N, ita eſt B M, ad B C, quod B C, ſit media proportio-  
nalis inter B M, & B N, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. cum angu-  
lus B C M, reſtus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur  
B M, potentia quoque ſeſquitergia eſt rectæ B C; Ac pro-  
pterea quadratum diametri B M, ſeſquitergium eſt quadra-  
ti lateris B C. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſae-  
dri, &c. Quod erat demonſtrandum.

47. primi.

15. ſexti dec.

12. quarti.  
decimi.

31. ſexti.

## COROLLARIUM.

Hinc fit diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diame-  
trum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangu-  
lum Icoſaedri ambientis. oſenſum ſiquidem eſt, quadra-  
tum diametri Icoſaedri B E, æquale eſſe quadra-  
to diametri cubi K L, & diametri circuli  
triangulum B C G, cir-  
cunſcribentis.



**THEOR. 16. PROPOS. 16.**

**L**ATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

*11. serij dec.* **Q**UONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, ut manifestum est ex propos. 9. lib. 13. Est autem rectæ dictas sectiones coniungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. lib. 13. Liqueat, latus Dodecaedri minus segmentum efficere rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris octaedri in eo descripti, cum huiusmodi recta. coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidam minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est, &c. Quod erat demonstrandum.

**THEOR. 17. PROPOS. 17.**

**D**IAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitergium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

*13. serij dec.* **C**UM cubus & Pyramis iure descripta, in eodem Icosaedro describantur, ut docuimus in scholio propos. ultime lib. 13. eademque sphaera comprehendantur, eadem erit diameter cubi, & diameter sphaeræ pyramidem circundantis: potest autem diameter sphaeræ sesquialterum lateris pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris Pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basim Icosaedri circumscribentis sesquitergium potest lateris

lat  
de  
m  
sa  
su  
cu  
de  
en

Io  
tu  
p  
e  
ci  
la

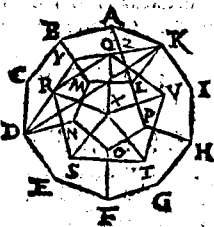
A  
L  
di  
re  
C  
fi  
gi  
sc  
d  
N  
fi  
b  
ir  
tu  
se  
in

latus Icoſaedri, ut in demonſtratione propoſ. 15. huius lib. demonſtravimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diameter cubi in ipſo deſcripi, & diameter circuli baſin Icoſaedri circumscribitis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſuſcipiſſus lateris ſeſquitercium, nimirum diameter circuli circa baſim Icoſaedri deſcripi, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diameter cubi. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATUS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, ut minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione diviſæ, ad partem eiſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiſdem poſitæ.

SIT dimidium Dodecaedri contentum ſex pentagonis A B M L K, L K I H P, P H G F O, O F E D N, N D C B M, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quolibet videlicet duo proxima) iungantur rectis Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X. Conſtituta ſunt igitur quinque trianguſa Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni L M N O P, ut oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſim B M, per centra R, Q, rectæ demittantur D Y, K Y, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus B M, per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 12. conveniunt in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta A L, angulo K; ſecabitur



2. sextidec.

abitur perpendicularis  $KY$ , in  $Z$ , extrema ac media ratio-  
ne. Dico ita esse latus Dodecaedri  $LM$ , ad latus Icosaedri  
sibi inscripti  $QB$ , ut  $KZ$ , minus segmentum perpendicu-  
laris  $KY$ , ad rectam  $QY$ , inter centrum  $Q$ , & latus  $BM$ ,  
interceptam. Subtrahenda enim recta



$DK$ , quæ, per demonstrata in  
scholio. propof. 13. lib. 13, latus est  
cubi, in quo Dodecaedrum propo-  
fitum describitur; erit  $LM$ , latus  
Dodecaedri, minus segmentum ip-  
sius  $DK$ , si extrema ac media ra-  
tione secetur, ex eodẽ scholio pro-  
pof. 3. lib. 13. Quoniam uero late-  
ra  $YD$ ,  $YK$ , trianguli  $YDK$ , pro-

portionaliter secantur in  $R$ , &  $Q$ , (sunt enim  $RD$ ,  $QK$ , se-  
midiametri circulorum æqualium æquales; necnon &  $YR$ ,  
 $YQ$ , distantie nimirum rectæ  $BM$ , a centeris  $R$ , &  $Q$ , eorun-  
dem circulorum æqualium) parallela erit  $QR$ , ipsi  $DK$ ; Ideoque  
triangulū  $YRQ$ , triangulū  $YDK$ , simile, per coroll. pro-  
pof. 4. lib. 6. Quia ob id erit, ut  $DK$ , ad  $KY$ , ita  $QR$ , ad  $QY$ .  
Vt autē  $DK$ , tota ad totā  $KY$ , ita est  $LM$ , minus segmentū  
ad minus  $KZ$ . Vt igitur  $LM$ , ad  $KZ$ , ita erit  $QR$ , ad  $QY$ .  
Et permutando, ut  $LM$ , latus Dodecaedri, ad  $QB$ , latus Ico-  
saedri sibi inscripti, ita  $KZ$ , minus segmentum perpendicu-  
laris  $KY$ , ad  $QY$ , inter centrum  $Q$ , & latus  $BM$ , interposi-  
tam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri la-  
tus, &c. Quod erat demonstrandum.

2. sexti.

4. sexti.

2. quartidec.

# THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icosaedri extrema  
ac media ratione sectum fuerit, minusque  
eius segmentum a toto latere Icosaedri sub-  
latum; A reliqua quoque recta pars rursus  
tertia detracta: Relinquetur latus Dode-  
caedri in Icosaedro descripti.

CIRCA

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinquelateribus Icofaedri compositum circulus describitur, cuius centrum F; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excidentur constituenta angulum solidum Icofaedri G, ex ijs, quæ in propof. 6. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribitur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cum sint tertiæ partes eiusdem circumferentiæ, erunt reliqui arcus HC, ID, æquales, proptereaque rectæ HI, CD, parallelæ, per scholium propof. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, secans rectas



HI, CD, bisariam in K, & L; coniunganturque rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per scholium propof. 12. lib. 13. latera opposita BC, CD, bisariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bisariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, ut constat ex demonstratis in propof. 5. lib. 15. latus erit Dodecaedri in Icofaedro descripti. Denique BP, dimidium lateris Icofaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem esse lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere trianguli æquilateri HI, secetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propositionis 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento FK, æqualis recta KM, per corollarium propof. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonstrauius ad propof. 3. lib. 13. maius segmentum KM, sectum quoque in L, a minori segmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ fauipisus

4. sexti.



2. sexti.

segmento L M. Quoniam uero iuncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio ultimo lib. 4.

ideoque similis illi; erunt triangula F C D, F P L, (si recta duceretur FP,) similia, per scholium propos. 20 lib. 6. Quare ut FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, ut FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmento dimidij ipsius FM, nempe minore segmento rectæ KM, ut ostendimus. Recta igitur CD,

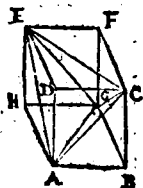
uel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmento dimidij ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18 lib. 4.) parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum G N O, triangulo G P L, simile, ex coroll. propos. 4 lib. 6. Igitur erit ut GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, ut GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18 lib. 4. Quare & PL, hoc est, sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cum CQ, sesquialtera quoque sit rectæ QR. (Nam qualium partium 3. est CQ, talium 1. est CR, per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR,) æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Ico saedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

## THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ Pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyrami-

pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilatram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, uertices uero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non resident quatuor anguli pyramidis æquilatæ inscriptæ: (Nam super basin AGE, fundatur pyramis ACE D; super basin AEG, pyramis AEGH; super basin CEG, pyramis CEGF; & super basin ACG, pyramis ACG B: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. defin. lib. 11.



cum contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine, & magnitudine, Quælibet enim constat tribus æqualibus, & similibus triangulis, dimidijs scilicet quadratorum cubi, ut patet, & uno triangulo pyramidis æquilatæ inscriptæ. ) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nam exempli causa, pyramis ABCG, basin habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem uero eandem, quam cubus, rectam uidelicet BG, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi, proptereaque cubum pyramidis illius esse sextuplum. ) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Atque proinde reliquam pyramidem æquilatram AEG, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.

**ALITER.** Cum cubus, & in eo descripta pyramides eadem sphaera comprehendantur, ut docuimus in scholio propos. ultimæ lib. 15. Cubus uero triplus sit pyramidis in eadem sphaera descriptæ, ut demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis; quandoquidem hæc in eadem sphaera, in qua cubus, continetur.

THEOR.

32. vides.

32. quart. descript.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum E I K G H F. Dico Pyramidem octaedri esse duplam. Cum enim octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi A B C D, similes, ut propof. 3. lib. 12. demon-



stratum est fundatæ super quatuor bases octaedri E G H, E F I, F G K, H I K; quales sunt pyramides E G H A, E F I B, F G K C, H I K D: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis similibus, equali-

busque numero & magnitudine, quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propof. 4. lib. 6. lateraque habeant equalia, nempe dimidia laterum æqualium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione propof. 2. lib. 13.) Habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatâ; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum, (cum octupla proportio, sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, ut in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octava pyramidis ABCD; Ac idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octavas, id est, dimidium pyramidis ABCD, constituent. Quare & reliquum octaedrum E I K G H F, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.

8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

Q. VONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, ut constat ex secunda demonstratione propos. 3. lib. 15. Est autem cubus pyramidis in eo descripte triplus, & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, ut qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri sit sexuplus. Quare cubus sibi inscripti Octaedri sexuplus est. Quod erat ostendendum.

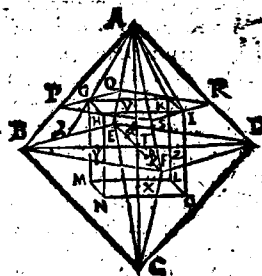
10. sextide.  
11. sextide.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum.

Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FG, parallelæ, quadratum constituentes PQRS, ut in propos. 4. lib. 15. est demonstratum; quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC,



15. undec.

perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholion propos. 14. lib. 1. Est autem V, centrū quadrati PQRS: (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales.

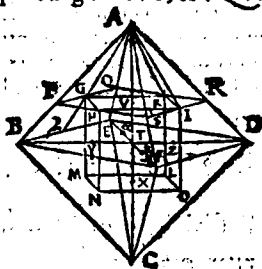
17. undec.

Intelli-



47. primi.

Intelligentur ductæ rectæ  $VP, VQ, VR, VS$ . Quoniam gitor æqualia quadrata rectarum æqualium  $AP, AQ$ , æqualia sunt quadratis rectarum  $AV, VP; AV, VQ$ , quod anguli  $AVP, AVQ$ , recti sint, per defin. 3. lib. 1. dem



pro communi quadrato rectæ  $AV$ ; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum  $VP, VQ$ , propterea quæ & rectæ ipsæ  $VP, VQ$ , æquales. Non aliter ostendimus de hæcæ, & inter se æquales esse rectas  $VR, VS$ . Quare  $V$ , centrum est quadrati  $PQRS$ .

Igitur & centrum erit qua

drati  $GHIK$ , in illo descripti, per scholium ultimum lib. 4. Secantur enim latera  $PQ, QR, RS, SP$ , bisariam in  $G, K, I, H$ , ut constat ex demonstratis in propos. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus  $X$ , centrum esse basis  $LMNO$ ; Nec non & alias diametros ductas  $BD, EF$ , per  $Y, Z, \alpha, \beta$ , centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta  $AY$ , per  $G$ , centrum trianguli æquilateri  $ABE$ ; erit  $AG$ , dupla ipsius  $Gy$ , per coroll. propos. 1. 8. lib. 14. Cum ergo plana  $PR, BD$ , parallela secant rectas  $AY, AT$ , proportionaliter; dupla quoque erit  $AV$ , ipsius  $VT$ . Eodem modo dupla probabitur  $CX$ , ipsius  $XT$ ; Ac proinde cum æquales  $AT, CT$ , similiter secantur in  $V$ , &  $X$ ; æquales erunt  $AV, CX$ ; nec non  $VT, XT$ . Recta igitur  $VX$ , coniungens centra basium cubi oppositarum bisariam secatur in  $T$ . Quare cum ad eundem modum  $YZ, \alpha\beta$ , bisariam secantur in  $T$ ; erit  $T$ , centrum cubi; cum, per coroll. 1. propos. 5. lib. 13. rectæ centra basium cubi oppositarum connectentes se se bisariam secant in centro. Iam uero, quoniam  $VX$ , ipsius  $VT$ , dupla est; dupla autem fuit &  $AV$ , eiusdem  $VT$ ; æqualis erit  $AV$ , ipsi  $VX$ , nempe altitudini cubi. Quare pyramis  $GHIK A$ , ductis rectis  $AI, AK$ , tertia pars est cubi, seu prismatis  $G O$ , per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. cum utriusque eadem sit basis  $GI$ , & altitudines æquales  $AV, VX$ : Est autem pyramis  $PQRSA$ , pyramidis  $GHIKA$ , dupla, quod & basis

17. undec.

6. duodec

basis  $PQR S$ , dupla sit basis  $GHIK$ , illi inscriptæ. Igitur pyramidis  $PQRSA$ , duas tertias partes cubi  $G O$ , continet. Quia vero pyramides  $BEDFA$ ,  $PQRSA$ , similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulus illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem laterus  $AB$ , lateris  $AP$ , sesquialterum, quod & recta  $A \gamma$ , proportionaliter secta ipsi  $AB$ , sesquialtera sit ipsius  $AG$ ; Erit pyramis  $BEDFA$ , ad pyramidem  $PQRSA$ , ut 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. ut in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum  $ABCDEFG$ , duplum existens pyramidis  $BEDFA$ , proportionem habebit ad eandem pyramidem  $PQRSA$ , quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis  $PQRSA$ , talium 12. esse cubum  $G O$ , iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum  $ABCDEFG$ , ad cubum  $G O$ , proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

8. duodec.  
2. sexti.

COROLLARIUM I.

Idem ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. ostendimus enim  $T$ , utriusque esse centrum.

COROLLARIUM II.

Perspiciat etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem uidelicet demonstramus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

1. sexti.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRUM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVO-

23. *sexide.* Q U O N I A M ut ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibi; inscripta Pyramis in eodē octaedro describuntur; Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesqui-  
20. *sexide.* alterum; Et cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis triplus: Qualem partem 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est tredecuplam sesquialteram: Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

I N Pyramide A B D C, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G, H, centra duarum basium A C D, A B D, commune  
latus A D, habentium; per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diuidentes latus A D, bisariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio pun-



cto S. Connexa uero recta GH; cum B H, C G, duplæ sint rectarum H S, G S, ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secantur B S, C S, parallelæ erunt B C, H G, & per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum H G S, triangulo B C S, simile. Erat ergo ut B C, ad C S, ita H G, ad G S; & permutando, ut B C, ad H G, ita C S, ad G S: Est autem C S, ipsius G S, tripla. Igitur & B C, tripla erit ipsius H G. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, ut in propos. 1. lib. 15. demonstratum est; Recta uero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, ut perspicuum est ex demonstratis in propos.

2. *terrij.*

4. *sesti.*

18. *quartidecimi.*

pos. 18. lib. 15. (ibi enim recta  $GH$ , iungens centra  $G, H$ , basium  $ACD, ABD$ , commune latus  $AD$ , habentium diameter fuit basis  $GNHQ$ , cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis  $BC$ , diameter basis cubi pyramidem  $ABDC$ , circumscribentis,  $GH$ , uero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Est enim ut diameter unius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio utraque sit potentia dupla: Permutando ergo, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem  $BC$ , diameter basis cubi circumscripti ad  $GH$ , diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, ut ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At uero cubi, cum sint parallelepipeda similia, proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi  $ABDC$ , proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est triplæ proportionis, ut hic 1. 3. 9. 27. uidere licet. Quam ob rem, cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat, quam 27. ad 9. uidelicet triplam; Habebit pyramis  $ABDC$ , ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

33. undec.

20. sexide.

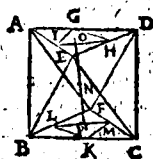
# THEOR. 26. PROPOS. 26.

**OCTAEDRVM** ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quâ duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN octaedro  $ABCDEFG$ , concipiatur descriptum Icosaedrum. Dico Octaedrum esse ad Icosaedrum, ut sunt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Cum enim ut ex demonstratis in propof. 16. lib. 15, liquet, octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri reponantur; Sint duæ bases Icosaedri  $GHI, KLM$ , in duabus basibus oppositis octaedri  $ADE, BCF$

BCF

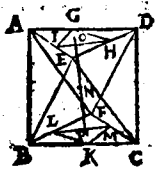
B C F, Atque ex N, centro octaedri, nec non & Icosaedri (idem enim utriusque est centrum, per coroll. 3. propos. 16. lib. 15.) ad basim A D E, perpendicularis ducatur N O, cadēs in centrum O, trianguli A D E, seu circuli ipsum ambientis,



ex coroll. lemm. 1. propos. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque est trianguli G H I, per coroll. 2. propos. 16. lib. 15. Cū ergo plana opposita A D E, B C F, parallela sint, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. Recta ON, producta perpendicularis quoque erit, per

scholion propos. 14. lib. 11. ad planum B C F, in eiusque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, caderet. Quare O P, recta altitudo est & octaedri, & Icosaedri sibi inscripti. Quia uero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo est N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icosaedrum in 20. pyramides æquales eiusdem altitudinis N O: Est autem prisma triplum pyramidis eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Erit prisma, cuius basis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At uero prisma, cuius eadem basis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum est prismatis, cuius basis eadem A D E, altitudo uero O N, per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cuius basis A D E, & altitudo O P, æquale est sex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basim A D E, & sub altitudine O P, constitui; prisma uidelicet, cuius basis tertia pars est trianguli A D E, altitudo uero eadem O P. Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super basim A D E, & sub altitudine O P, cum per ea, quæ docuimus ad propos. 7. lib. 12. prismata eiusdem altitudinis inter se sint, ut bases. Quare duo prismata, quarum unus basis A D E, & altitudo O P, alterius autem basis tertia pars basis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia sunt octaedro A B C D E F. Non secus demonstrabimus prisma, cuius basis G H I, altitudo uero O P, æquale esse

esse sex pyramidibus Icosædri: proptereaque triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis  $GHI$ , altitudo autem eadem  $OP$ , æquale esse 18. pyramidibus Icosædri. Reliquis igitur duabus Icosædri pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icosædri constituent, æqualis erit tertia pars prismatis super basem  $GHI$ , & sub altitudine  $OP$ , constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli  $GHI$ , altitudo uero eadem  $OP$ ; Atque ideo duo prismata, quorum unius basis tripla sit trianguli  $GHI$ , altitudo autem  $OP$ , alterius uero basis tertia pars basis  $GHI$ , & altitudo eadem  $OP$ , æqualia erunt Icosædro in dicto octaedro descripto. Iam uero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc primata, Icosædro æqualia, sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. ut bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli  $ADE$ , continentes, (cum unius basis sit  $ADE$ , nempe tres tertie partes ipsius  $ADE$ , completens, alterius uero basis tertia pars ipsius  $ADE$ , ad bases prismatum Icosædro æqualium, decem tertias partes trianguli  $GHI$ , comprehendentes; (cum unius basis tripla sit trianguli  $GHI$ , nimirum nouem tertias partes ipsius  $GHI$ , continens, alterius uero basis tertia pars ipsius  $GHI$ .) Sint autem, ut quatuor tertie partes trianguli  $ADE$ , ad decem partes tertias trianguli  $GHI$ , ita duæ tertie partes ipsius  $ADE$ , nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius  $GHI$ , hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et ut duæ tertie partes ipsius  $ADE$ , ad quinque tertias partes ipsius  $GHI$ , ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 1. sex tertie partes ipsius  $ADE$ , (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum unius basis constituentes, cum sex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius  $GHI$ , (id est, ad quinque bases Icosædri, triplum quinque tertiarum unius basis completentes, cum quindecim tertias complectantur; Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsum octaedrum, ad duo hæc prismata Icosædro æqualia, nempe ad ipsum Icosædru, ut



15. quinti.

duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri . Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum , &c. Quod erat demonstrandum .

## THEOR. 27. PROPOS. 27.

**ICOSAEDRVM** ad sibi inscriptū Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportionē lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportionē triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem .

**EXHIBEATUR** Icosaedrum  $ABC$ , in quo recta  $DE$ , coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit  $AC$ , &  $F$ , sit latus Icosaedri, &  $G$ , latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionē Icosaedri  $ABC$ , ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportionē  $F$ , lateris Icosaedri ad  $G$ , latus cubi, & ex



proportionē triplicata diametri  $AC$ , ad rectam  $DE$ . Cum enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeo oppositos angulos in centris basium oppositarum; Erit  $DE$ , diameter dodecaedri in Icosaedro  $ABC$ , descripti, cum copulet angulos ipsius oppositos in  $D$ , &  $E$ , centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet  $ABC$ , Dodecaedro diametri  $AC$ , hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum  $ABC$ , descripto, cum utriusque eadem sit diameter, & Dodecaedro diametri  $DE$ , intra Icosaedrum uidelicet,

ijcet, ABC, constructos, Proportio primæ magnitudinis, nēpe Icosædri ABC, ad tertiam, uidelicet ad Dodecaedrum diametri DE, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defn. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosædri ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadem sphaera cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE, in Icosædro ABC, descriptum. Cum ergo Icosædru ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem sphaera comprehensum sit ut F, latus Icosædri ad G, latus cubi. ( Nam Dodecaedrum diametri AC, ad Icosædram ABC, eiusdem diametri est, ut G, latus cubi ad F, latus Icosædri. Conuertendo igitur erit Icosædru ABC, ad Dodecaedru diametri AC, ut F, latus Icosædri ad G, latus cubi. ) At uero Dodecaedrum eiusdem diametri AC, ad Dodecaedru diametri DE, in Icosædro uidelicet ABC, descriptum proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, id est, ad rectam, centra basium Icosædri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 11. Manifestum est, proportionem Icosædri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedru diametri DE, componi quoque ex proportionem F, lateris Icosædri, ad G, latus cubi, & ex proportionem triplicatam proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icosædru ad sibi inscriptum Dodecaedru proportionem habet composuam, &c. Quod erat demonstrandum.

st. quarti  
decimi.

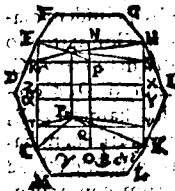
### THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At uero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ,



quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

Q UONIAM ex demonstratis propof. 8. lib. 1. quatuor latera basis cubi in Dodæcaedro defcripti subterdunt quatuor angulos quatuor basium Dodæcaedri ad unam latius convenientium; sunt huiusmodi pentagona  $ABCDE$ ,  $EF GHA$ ,  $AHIKB$ ;  $BKLMC$ , convenientia ad latus  $AB$ ; duo quidem  $ABCDE$ ,  $AHIKB$ , secundum latus idem commune  $A B$ , alia autem duo  $A EFGH$ ,  $BCMLK$ , secundum angulos  $B A H$ ,  $C B K$ . His vero pentagonis inscriptum sit quadratum cubi  $E C K H$ , super quod consistat pars Dodæcaedri cubum circumscribentis, solidam scilicet  $CBKHA E$ , constans quinque planis  $CBK$ ,  $E A H$ ,  $A B C E$ ,  $A B K H$ ,  $E C K H$ ; quorum duo  $CBK$ ,



4. primi.

$E A H$ , triangula sunt æqualia; cum latera pentagoni  $B C$ ,  $B K$ , æqualia sint lateribus pentagoni  $A E$ ,  $A H$ , angulosque comprehendant æquales pentagonorum  $E A H$ ,  $C B K$ . Duo vero  $A B C E$ ,  $A B K H$ , trapezia sunt æqualia quoque (cum enim & pentagona  $A B C D E$ ,  $A B K H$ , per hypotensin, & triangula ex ipsis ablata  $C D E$ ,  $H I K$ , æqualia existant; æqualia erunt & reliqua trapezia  $A B C E$ ,  $A B K H$ ). Quantum denique est basis cubi inscripti  $E C K H$ . Simili modo reperientur alia quinque solida huiusmodi & æqualia, per 10. defin. lib. 1. super reliquas quinque cubi bases; ita ut Dodæcaedrum superet cubum sibi inscriptum sex huiusmodi solidis. Dico igitur hunc totam excessum ex sex illis solidis cubum inscriptum circumstantibus constare, & quale esse parallelepipedo, cuius quidem basis deficit a  $C E H K$ , base cubi, rectangulo contento sub latere cubi  $C K$ , tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Sectis enim lateribus  $E H$ ,  $C K$ , bifariam in  $N$ ,  $O$ , iunctaque recta  $N O$ , quæ parallela est lateri pentagoni  $A B$ , & in quâ cadunt

4. primi.

cadunt perpendiculares  $AP$ ,  $BQ$ , demissæ in planum  $EK$ , ut constat ex demonstratis propof. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ  $NO$ ,  $AB$ ,  $AP$ ,  $BQ$ , huius figure lineas  $LN$ ,  $VX$ ,  $VR$ ,  $XS$ , figmæ propof. 17. lib. 13.) Erunt utraque rectæ  $AB$ ,  $PQ$ , maius segmentum lateris cubi  $NO$ , uel  $HQ$ , & utraque  $AP$ ,  $BQ$ , æqualis dimidio lateris pentagoni  $AB$ , seu maioris segmenti lateris cubi, ut liquet ex eadem propof. 17. lib. 13. Ac propterea si per  $P$ ,  $Q$ , ducantur rectæ  $RS$ ,  $TV$ , rectis  $EH$ ,  $CK$ , parallelæ; erunt quoque  $RT$ ,  $SV$ , maiora segmenta laterum  $EC$ ,  $HK$ ; atque adeo  $ER$ ,  $CT$ , simul, &  $HS$ ,  $KV$ , simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis  $AR$ ,  $AS$ ,  $BT$ ,  $BV$ , constituentur duæ pyramides  $ERSHA$ ,  $CTVKB$ , quæ per coroll. propof. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cum & earum bases  $ERSH$ ,  $TCKV$ , & altitudines  $PA$ ,  $QB$ , æquales sint; consistentque extra solidum  $ABTVSR$ . Quoniam autem  $AS$ , ipsi  $BV$ , &  $AR$ , ipsi  $BT$ , æqualis est, & parallelæ, cum coniungant æquales rectas, & parallelas  $AB$ ,  $SV$ ,  $RT$ ; parallelæ erunt plana triangulorum  $ARS$ ,  $BTV$ , atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propof. 8. lib. 1. cum latera unius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum  $ABTVSR$ , contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis  $ARS$ ,  $BTV$ , & tribus parallelogrammis  $RV$ ,  $AT$ ,  $AV$ , prisma est, ex definitione.

Iam uero, cum ostensum sit, rectas  $HS$ ,  $KV$ , minus segmentum efficere lateris  $HK$ , fiat illis æqualis  $VX$ , dupla nimirum utriusque  $HS$ , &  $KV$ ; & ipsius  $VX$ , minoris segmenti lateris  $HK$ , duas tertias partes contineat  $VY$ , tertia uero pars sit  $XY$ , ducanturque  $XZ$ ,  $YA$ , rectæ  $TV$ , parallelæ. Quoniam igitur pyramides  $ERSHA$ ,  $CTVKB$ , æquales sunt ostense; utriusque uero earum dupla est pyramis super basem  $TX$ , & sub eadem altitudine  $PA$ , uel  $QB$ , constituta, quod & basis  $TX$ , dupla sit basis  $CV$ , uel  $RH$ ; &  $A$  Equalis erit pyramis  $TVXZB$ , utrique pyramidi  $ERSHA$ ,  $CTVKB$ , simul: At pyramis  $TVXZB$ , duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem  $TX$ , & altitudo eadem  $QB$ , uertex uero linea recta, pars uidelicet rectæ  $AB$ , quæ æqualis sit ipsi  $VX$ , ut demonstraui in scholio

33. primi.

15. undec.

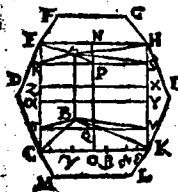
6. duodec.

1. sexti.

# EUCLED. GEOM.

6. sexii.

propof. 7. lib. 12. Item eiusdem prifmatis, cuius basis  $TX$ , & altitudo  $QB$ , uertex uero pars rectæ  $AB$ , æqualis ipfi  $VX$ , duas tertias partes continet prifmâ, cuius basis  $TY$ , & altitudo eadem  $QB$ , uertex uero pars rectæ  $AB$ , æqualis ipfi  $VY$ , ex fcholio propof. 25. lib. 11. quod & basis  $TY$ , duas partes tertias complectatur basis  $TX$ . Igitur & prifmâ, cuius basis  $TY$ , & altitudo  $QB$ , uertex uero pars rectæ  $AB$ , æqualis ipfi  $VY$ , æquale erit duabus pyramidibus  $ERSHA$ ,  $CTVKB$ ; Ac proinde hoc prisma appositum prifmati  $ABTVS.R$ , efficiet prisma æquale folido  $CBKHA.E$ , habens bafin rectangulum contentum sub latere cubi  $TV$ , & sub recta cõpofita ex  $VY$ , duas tertias partes minoris segmenti  $VX$ , cõprehendente, & ex  $VS$ , maiore segmento, ideoque a bafe cubi deficientem rectangulo  $\alpha X$ , contento sub latere cubi  $\alpha Y$ , & sub  $XY$ , tertia parte minoris segmenti  $VX$ .



Nõ diffimili ratione inueftigabimus alia fimilia quinque prifmata æqualia & proxime dicto prifmati. & reliquis quinque folidis fuper reliquas quinque cubi bafes conftituitis. Sex igitur huiusmodi prifmata æqualia

erunt fex illis folidis, exceffui nimirum Dodecaedri fupra cubum fibi infcriptum. Quia autem duo quilibet prifmata illiusmodi inter fe aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; conftituentur ex fex illis prifmatis tria parallelepipeda fub eadem altitudine  $QB$ , quæ æqualis eft dimidio lateris pentagoni  $AB$ , feu maioris segmenti lateris cubi, & fuper bafes a bafe cubi deficientes fingulas rectangulo contento fub latere cubi, & fub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter fe compofitis exurget parallelepipedum exceffui eidem Dodecaedri fupra cubum fibi infcriptum æquale, cuius bafis a bafe cubi deficit rectangulo contento fub latere cubi, & fub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo uero æqualis eft tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc eft, altitudini  $QB$ , quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi ter fumptæ. Hanc igitur altitudinẽ dico ab altitudine, feu latere cubi deficere

ficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in  $\beta$ : Itemq; C $\beta$ , maius segmentum, &  $\beta$  K, minus bifariam in  $\gamma$ ,  $\delta$ ; atq; ex  $\beta$  K, abscindatur  $\beta$  e, æqualis ipsi  $\beta$   $\gamma$ , seu C  $\gamma$ , ita ut C  $\gamma$ , uel  $\gamma$   $\beta$ , uel  $\beta$  e, dimidia pars maioris segmenti C $\beta$ , æqualis sit ipsi Q  $\delta$ , & C $\delta$ , toti altitudini præfati parallelepipedii. Quoniam igitur est, ut tota CK, ad maius segmentum C $\beta$ , ita maius segmentum C $\beta$ , ad minus  $\beta$  K; erit quoque ut CO, dimidia ipsius CK, ad C  $\gamma$ , uel  $\beta$  e, dimidia ipsius C $\beta$ , ita C  $\gamma$ , uel  $\beta$  e, ad  $\beta$   $\delta$ , dimidia ipsius  $\beta$  K; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C  $\gamma$ , uel  $\beta$  e, & minus  $\beta$   $\delta$ . Quare &  $\beta$   $\delta$ , minus segmentum secabit  $\beta$  e, maius segmentum extrema ac media ratione, ut demonstrauimus ad propos. 5. lib. 3. eritq; maius segmentum  $\beta$   $\delta$ , minus autem  $\delta$  e; Ac propterea rursus  $\delta$  e, minus segmentum secabit rectam  $\delta$  K, maiori segmento  $\beta$   $\delta$ , æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit e K. Deficit igitur C $\delta$ , altitudo præfati parallelepipedii ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmento e K, rectæ  $\delta$  K, uel sibi æqualis rectæ  $\beta$   $\delta$ , quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostenta. Constat ergo basem parallelepipedii, quo dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum a base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem uero ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

15. quini

COROLLARIUM.

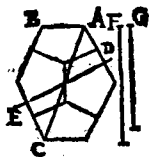
VND e elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiae parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit; Alterius uero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum

addatur illi parallelepipedo, quo cubum a Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, quā cubus, altitudo uero a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque ideo, ut Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituitur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo uero alter cubus, ut demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportionem triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportionem lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphaera cum cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphaera cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportionem triplicatam proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportionem F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum, erit recta DE,



centra

centra basium Dodecaedri oppositarum connectens , diameter Icosaedri inscripti ; Ac propterea Dodecaedrum , cuius diameter D E , in eadem sphaera cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C , collocato describetur , cum eandem habeant diametrum D E . Intellectis iam tribus magnitudinibus , Dodecaedro scilicet A B C , Dodecaedro diametri D E , & Icosaedro eiusdem diametri D E , intra Dodecaedrum uidelicet A B C , descripto ; Proportio Dodecaedri A B C , primae magnitudinis , ad Icosaedrum sibi inscriptum , tertiam magnitudinem , componetur per ea , quae ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata , ex proportionibus Dodecaedri A B C , primae magnitudinis , ad Dodecaedrum diametri D E , secundam magnitudinem , & Dodecaedri ex diametro D E , descripti secundae magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C , descriptum , tertiam magnitudinem . Cum ergo Dodecaedrum A B C , ad Dodecaedrum diametri D E , proportionem habeat triplicatam diametri A C , ad diametrum D E , ex coroll. propos. 17. lib. 12. Dodecaedrum uero diametri D E , ad Icosaedrum eiusdem diametri D E , quod nimirum in Dodecaedro A B C , describitur , proportionem habeat , quam F , latus cubi ad G , latus Icosaedri ; liquido constat proportionem Dodecaedri A B C , ad Icosaedrum sibi inscriptum , cuius scilicet diameter D E , componi quoque ex triplicata proportionem proportionis diametri A C , ad diametrum D E , rectam uidelicet centra oppositarum Dodecaedri copulantiem , & ex proportionem F , lateris cubi , ad G , latus Icosaedri , in eadem sphaera cum cubo descripti . Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam , &c. Quod erat demonstrandum .

11. quarti  
decimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis ,  
in qua describitur , duas novas partes continet , minus duobus parallelepipedis , quo-

tum

rum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo uero tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo uero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

25. sextide.

Q U O N T I A M si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, ut ad finem lib. 13. tradidimus; Cubus autem pyramidis in qua describitur, nona pars est, cum pyramidis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, ut magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propof. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in uerbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis, adeo ut si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

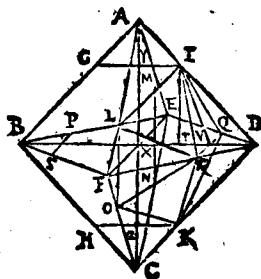
THEOR.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, repetita figura propof. 16. lib. 15. ubi demonstratum est, uiginti triangula Icosaedrum inscriptum componenti esse IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HP-

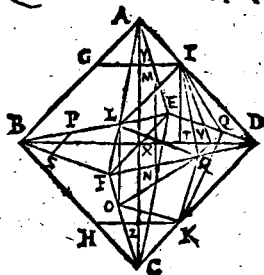
S, NHK, OHM, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantiâ uidelicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT,



perpendicularem ad BD, æqualem esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrū ABCDEF, superare Icosaedrū sibi inscriptū parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri QR, altitudo uero IT, maius segmentum semidiametri AX. Cū enim in quatuor basibus octaedri DEA, DFA, DBC, DFC, angulū solidū octaedri D, cōstituentibus positæ sine quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri, IQR, KQR, & commune triangulum DQR, constituentur duæ pyramides super communē basem DQR, nempe IQDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. propof. 31. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem IT, maius uidelicet segmentum semidiametri octaedri. (Nam quemad-



34. primi.



quemadmodum  $AX$ , secta est a recta  $GI$ , in  $Y$ , extrema ac media ratione, ita quoque secta est  $CX$ , a recta  $HK$ , in  $Z$ . Quare si ex  $K$ , ad  $B D$ , perpendicularis ducatur, altitudo

nimirum pyramidis  $K D$   $QR$ ; erit ea æqualis rectæ  $ZX$ , maiori segmento semidiametri  $CX$ , hoc est ipsi  $IT$ . Quæ quidem pyramides extra Icosædron in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se & dictis duabus

æquales, extra Icosædron prædictum: Ita ut octaedrum superet Icosædron sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia uero triangulum  $DQR$ , dimidium est quadrati lateris  $DQ$ ; (cum  $DQ$ ,  $DR$ , rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumque contineant rectum.) erit recta  $QR$ , diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius  $QR$ , duplum erit quadrati lateris  $DQ$ , ideoque quadruplum trianguli  $DQR$ . Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ  $QR$ , & altitudo  $IT$ , quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum  $DQR$ , & altitudo eadē  $IT$ , per ea, quæ demonstrauimus ad propof. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis  $DQR$ , & altitudo  $IT$ , triplum existens, ex coroll. 1. propof. 7. lib. 12. pyramidis  $IDQR$ , æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosædron consistere diximus. Prisma ergo, uel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ  $QR$ , & altitudo  $IT$ , quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadrupla sint omnes duodecim pyramides simul Icosædron ambiens; A Equale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ  $QR$ , lateris nimirum Icosædri, & altitudo  $IT$ , maius segmentum semidiametri  $AX$ , duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessus octaedri su-

pra

pra Icofaedrum sibi inſcriptum; Ac proinde octaedrum ſuperabit Icofaedrum dicto priſmate, uel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit ſibi inſcriptum Icofaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icofaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Hinc inferitur, Pyramidem excedere duplum Icofaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icofaedri, altitudo uero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icofaedri coniungens. Cum enim ex demonſtratis propoſ. 19. lib. 15. conſtet, ſi Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icofaedrum imponatur, Icofaedrum eidem Pyramidi eſſe inſcriptum; octaedrum autem ſuperet Icofaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icofaedri, nempe recta Q R, altitudo uero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri, recta uide licet I T, ſeu Y X: Fit, ut octaedrum bis ſumptum, nempe pyramis, cui inſcribitur, (quod Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti octaedri) ſuperet idem Icofaedrum in octaedro, ideoque & in pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedo, nimirum parallelepipedo, cuius baſis idem quadratum lateris Icofaedri, altitudo uero recta Y Z, coniungens bitarias ſectiones laterum Icofaedri oppoſitorum G I, H K. Hoc enim parallelepipedum illius duplum eſt, per demonſtrata a nobis in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icofaedri, altitudo uero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icofaedri copulans, Pyramis duplum Icofaedri ſibi inſcripti excedit.

31. ſextide.

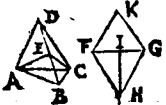
21. ſextide.

INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS duarum baſium cuiuſcunq; ſolidi regularis, unius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis baſium, unius ad alteram, inuenire.

I.

SIT Pyramis ABCD, cuius latere BD, bisariam  
secto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppositis re-  
cta ducantur AE, CE; quæ cum perpendiculares sint



ad BD, communem sectionem pla-  
norum ABD, CBD, in quibus exi-  
stunt, ut ostensum est in scholio pro-  
pos. 12. huius lib. angulum incli-  
nationis AEC, basium ABD, CBD,

continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem  
exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assum-  
tur FGH, triangulum æquilaterum super rectam FG,  
lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco  
triangulo cuiusque pyramidis proposita, ipsi nimi-  
rum ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendicu-  
lari ad FG, constituitur super FG, triangulum FGH, habes  
utrumque latus FK, GK, æquale perpendiculari HI, hoc est,  
utrique perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI,  
AE, CE, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico an-  
gulum FKG, æqualem esse angulo inclinationis AEC, ba-  
sium ABD, CBD. Cum. n. latera KF, KG, æqualia sint la-  
teribus EA, EC; & basis FG, basi AC: Æquales erunt

3. primi. anguli FKG, AEC. Dico insuper angulum inclinatio-  
nis AEC, acutum esse. Cum. n. latus AD, vel illi aqua-

12. quarti  
decimi,

le AC, sesquitergium sit potentia utriusque perpendicu-  
laris AE, CE; qualium partium 4. ponitur quadratum  
rectæ AC, talium 3. erit quadratum utriusque rectæ AE,  
CE; ideoque earundem partium 6. erunt ambo simul qua-  
drata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC,  
quadratum lateris AC, minus sit quadratis simul la-  
terum AE, CE, acutus erit angulus AEC, ut in  
scholio propos. 13. lib. 2. demonstrauimus.

COROL.

COROLLARIUM.

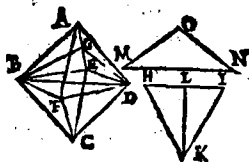
FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum continentur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt  $AE$ ,  $CE$ , subtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit  $AC$ ; omnes erunt inter se æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & latera pyramidis eosdem subtendentia.

8. primi

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri basium, unius ad alteram, reperire.

II.

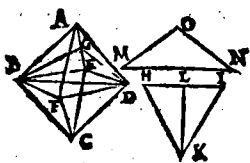
EXHIBEATUR Octaedrum  $ABCDEFG$ , cuius diameter  $BD$ . Ex angulis  $B$ , &  $D$ , ad latus  $AE$ , triangulis  $ABE$ ,  $ADE$ , commune, bisariamque sectionem in  $G$ , rectæ ducantur  $BG$ ,  $DG$ ; quæ cū perpendiculares sint ad  $AE$ , communem sectionem planorum  $ABE$ ,  $ADE$ , in quibus existunt (quod in triangulis  $BGA$ ,  $BGE$ , anguli ad  $G$ , æquales sint, &c.)



8. primi

continebunt angulum  $BGD$ , inclinationis basium  $ABE$ ,  $ADE$ , per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur  $HIK$ , triangulum æquilaterum super rectam  $HI$ , lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuiunque octaedri propositi, triangulo scilicet  $ABE$ , æquale, in quo ducta  $KL$ , perpendiculari ad  $HI$ , constituitur super recta  $MN$ , quæ æqualis sit diametro octaedri  $BD$ , hoc est, diametro quadrati  $ABCD$ , ex  $AB$ , latere octaedri descripti trianguli  $OMN$ , habes utrumque; latus  $MO$ ,  $NO$ , perpendiculari  $KL$ , æquale,

aequale, hoc est, utrique perpendiculari BG, DG, cum perpendicularibus KL, BG, DG, in triangulis aequalibus aequales sint. Dico angulum MON, aequalem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON, aequalia sunt lateribus GB, GD; & basis MN, basi



BD; Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico praeterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum. Cum enim diameter

8. primi.

14. tertijde.  
12. quarti  
decimi.

octaedri BD, dupla fit potentia lateris AB; latus vero AB, potentia sesquitertium rectae BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemque 3. quadratum rectae BG; ideoque ambo simul quadrata rectorum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius est quadratis simul laterum GB, GD; Ac propterea angulus BGD, obtusus erit, ut in scholio propof. 12. lib. 2. ostendimus.

### COROLLARIUM.

Hinc fit, omnes inclinationes basium octaedri aequales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, DG, subtrendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est BD; omnes inter se aequales erunt, quod & omnes illae perpendiculares, quae ipsos continent, aequales sint, necnon & diametri octaedri eisdem subtendentes.

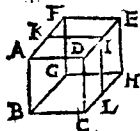
8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, unius ad alteram, inuenire.

SIT

SIT cubus  $ABCDEFGH$ , in quo secetur latus  $DE$ , bisariam in  $I$ , nec non & latera illi opposita in quadratis  $AE$ ,  $EC$ , commune latus illud  $DE$ , habentibus, in punctis  $K$ ,  $L$ . Deinde rectæ ducantur  $IK$ ,  $IL$ ; quæ cum æquales, ac parallelæ sint lateribus  $EF$ ,  $EH$ , (quod &  $KF$ ,  $IE$ , inter se, nec non &  $IE$ ,  $LH$ , inter se æquales existant, et parallelæ) ideoque angulos rectos ad latus  $DE$ , efficiant, continebunt  $KIL$ , angulum inclinationis basium  $AE$ ,  $EC$ , x defn. 6. lib. 11. Quoniam uero rectæ  $IK$ ,  $IL$ , parallelæ existentes rectis  $EF$ ,  $EH$ , & non in eodem cum illis plano, angulum  $KIL$ , æqualem continent angulo recto  $FEH$ ; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare ut angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, ut modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



33. primi.

10. undec.

### COROLLARIUM.

QUOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum; perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

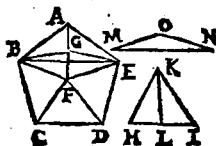
ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosædri, unius ad alteram, inuenire.

IIII.

ESTO pyramis  $ABCDE$ , una ex 12. pyramidibus Icosædri, cuius basis pentagonum  $ABCDE$ , ex quinque Icosædri lateribus cōpositum, uertex autem  $F$ . Diuiso itaque latere  $AF$ , bisariam in  $G$ , ducantur ex triangulorum  $ABF$ ,  $AEC$ , latus  $AF$ , commune ha-

Pp bentium

bentium, angulis B, & E, lateri AF, oppositis recta  
BG, EG, quæ cum ex demonstratis in problemate 2.  
huius scholæ perpendiculares sint ad AF, communem  
sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur,  
comprehendent BGE, angulum inclinationis basium



ABF, AEF, per 6. defin.  
lib. 11. Huic igitur in pla  
no quovis exhibebimus  
equalem, hac arte. Acci  
piatur triangulum equi  
laterum HIK, super re

ctam HI, lateri Icosaedri equalem fabricatum, hoc  
est, cuius triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, equa  
le, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, con  
struatur super recta MN, quæ recta BE, angulum pen  
tagoni A, subtendenti sit equalis, triangulum OMN,  
habens utrumque latus MO, NO, perpendiculari KL,  
equale, hoc est, utrique perpendiculari BG, EG, cum  
perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis equalibus  
sint equales. Dico angulum MON, angulo BGE, in  
inclinationis basium ABF, AEF, equalem esse. Cum  
enim latera OM, ON, equalia sint lateribus GB, GE,  
& basis MN, basi BE; æquales erunt anguli MON,  
BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE,  
esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat  
AGB; erit recta AB, maior quam recta BG; ad eun  
demque modum AE, maior erit quam EG. Quare re  
cta AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON,  
cum hæ rectis GB, GE, posita sint equales. Si itaque  
recta BE, super rectam sibi equalem MN, intelliga  
tur ponis cadet angulus A, extra triangulum MON,

ita

3. primi.

19. primi.

ita ut rectæ  $AB, AE$ , rectas  $OM, ON$ , prorsus includant. Angulus ergo  $O$ , maior erit angulo  $BAE$ : At hic obtusus est. (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ a nobis sunt demonstrata in scholio propof. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum unum, ac insuper unius recti partem quintam. obtusus. ergo erit, cum recto sit maior) multo igitur magis obtusus erit angulus  $MON$ , hoc est, sibi æqualis  $BGE$ .

21. primi.

### COROLLARIUM.

NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosædri inclinationes inter se æquales esse: Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt  $BG, EG$ , subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est  $BE$ ; omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendant æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales existant.

8. primi.

4 primi

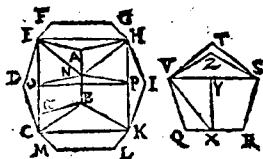
ANGVLVM inclinationis duarum basium Dodecaedri, unius ad alteram, reperire.

V.

CUM per ea, quæ ostendimus in propof. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus coeuntium; sint huiusmodi pentagona  $ABCDE, EFGH, AHIKB, BKL MC$ , ad latus  $AB$ , conuenientia; duo quidem  $ABCDE, AHIKB$ , secundum idem latus commune  $AB$ ; alia autem duo  $A EFGH, BCMLK$ , secundum angulos  $EAH, CBK$ . His porro pentagonis inscriptum sit



quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera sub-  
tendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A.



Diuiso autem latere AB,  
b faciam in N, descantur  
ex N, in planis pentago-  
norum ABCDE, AB-  
KIH, ad AB, perpen-  
diculares NO, NP, se-

cantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque  
rectos, cum recte EC, HK, ipsi AB, sint parallele,  
per coroll. propos. 8. lib. 15. Comprehendunt igitur  
NO, NP, angulum ONP, inclinationis basium  
ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis pla-  
no hac arte construemus. Super rectam QR, late-  
ri Dodecaedri AB, æqualem constituatur pentagonum  
æquilaterum & equiangulum QRSTV, hoc est,  
cuius pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi ABCDE,  
æquale, cuius angulo T, recta subtendatur VS, æqua-  
lis existens recta EC, cum & latera TV, TS, lateri-

4. primi.

bus DC, DE, æqualia sint, angulosque contineant  
æquales. Diuisa deinde recta QR, bifariam in X,  
ducatur a puncto X, ad QR, perpendicularis XY:  
proptereaque perpendicularis ad VS, cum VS, sit pa-  
rallèle ipsi QR, per coroll. propos. 8. lib. 15. Ac po-  
stremo super recta VS, triangulum fabricetur VZS,  
habens utrumque latus ZV, ZS, perpendiculari XY,  
æquale. Dico angulum VZS, æqualem esse angulo in-  
clinationis ONP. Duclis enim rectis NE, NH,  
VX; cum latera EA, AN, æqualia sint lateribus  
HA, AN; Item lateribus VQ, QX, angulosque com-  
prehendant æquales; Æquales erunt & bases NE,  
NH,

$NH, VX$ , & anguli  $ANE, ANH, QXV$ ; 4. primi  
 ideoque & residui ex rectis, anguli uidelicet  $ENO$ ,  
 $HNP, VXY$ , aequales erunt. Quoniam igitur an-  
 guli  $ENO, EON$ , trianguli  $ENO$ , aequales sunt  
 angulis  $HNP, HPN$ , trianguli  $HNP$ ; nec non  
 & angulis  $VXY, VYX$ , trianguli  $VXY$ ; (sunt  
 enim  $EON, HPN, VYX$ , ostensi recti.) Et la-  
 tus  $NE$ , lateribus  $NH, VX$ , aequale demonstratum;  
 Aequalia erunt reliqua latera  $NO, OE$ , reliquis la- 26. primi.  
 teribus  $NP, PH$ ; Item lateribus  $XY, YV$ . Quare  
 rectae  $ZV, ZS$ , aequales existentes ipsi  $XT$ , rectis  
 $NO, NP$ , aequales erunt. Iam uero, quia  $OE, PH$ ,  
 aequales sunt, ac parallelae; erit quoque recta comun- 33. primi.  
 eta  $OP$ , aequalis & parallela ipsi  $EH$ , ideoque aequa-  
 lis ipsi  $EC$ , hoc est, rectae  $VS$ . Quam ob rem, cum  
 latera  $ZV, ZS$ , lateribus  $NO, NP$ , aequalia sint; ba- 8. primi.  
 sis item  $VS$ , basi  $OP$ ; Aequalis erit angulus  $VZS$ , an-  
 gulo inclinationis  $ONP$ . Dico etiam, angulum hunc  
 $ONP$ , inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta  
 $Ba$ , ipsi  $NO$ , parallela; cum sit quoque  $NB$ , ipsi  
 $Ox$ , parallela, per coroll. propos. 8. lib. 15. Paralle-  
 logrammum erit  $NOaB$ , ideoque recta  $Ba$ , ipsi  $NO$ , 34. primi.  
 aequalis. Quia uero  $BC$ , latus pentagoni oppositum  
 angulo  $CaB$ , qui rectus est, (aqualis nimirum interno 29. primi  
 $CON$ ,) maius est latere  $Ba$ , hoc est, recta  $NO$ , 19. primi  
 uel utraque  $ZV, ZS$ , quae ipsi  $NO$ , ostensa sunt  
 aequales; Erunt duae rectae  $TV, TS$ , maiores duabus  
 rectis  $ZV, ZS$ . Cedit igitur punctum  $Z$ , intra trian-  
 gulum  $TVS$ , ita ut rectae  $TV, TS$ , rectas  $ZV, ZS$ ,  
 includant omnino; Atque proinde angulus  $VZS$ ,  
 ideoque illi aequalis  $ONP$ , maior est angulo pentago 22. primi.

ni T: Hic uero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

COROLLARIUM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri equales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis, quales sunt NO, NP, subtendanturque a rectis, quae cubi inscripti lateribus sunt aequales, uel certe, quae rectis subtendentibus angulos pentagonorum equales sunt, cuiusmodi est, recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni BAH,

subtendit, aequalis; Erunt omnes inter

se aequales, cum & omnes illae perpendiculares, quae ipsos continent, aequales sint, nec non & rectae illae omnes, quae eosdem subtendunt, latera uidelicet cubi, inter se etiam

sint aequales.

se aequales, cum & omnes illae perpendiculares, quae ipsos continent, aequales sint, nec non & rectae illae omnes, quae eosdem subtendunt, latera uidelicet cubi, inter se etiam sunt aequales.

8. primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.





R O M A E,

Apud Vincentium Accoltum .

M. D. LXXIII.

Cum licentia Superiorum .