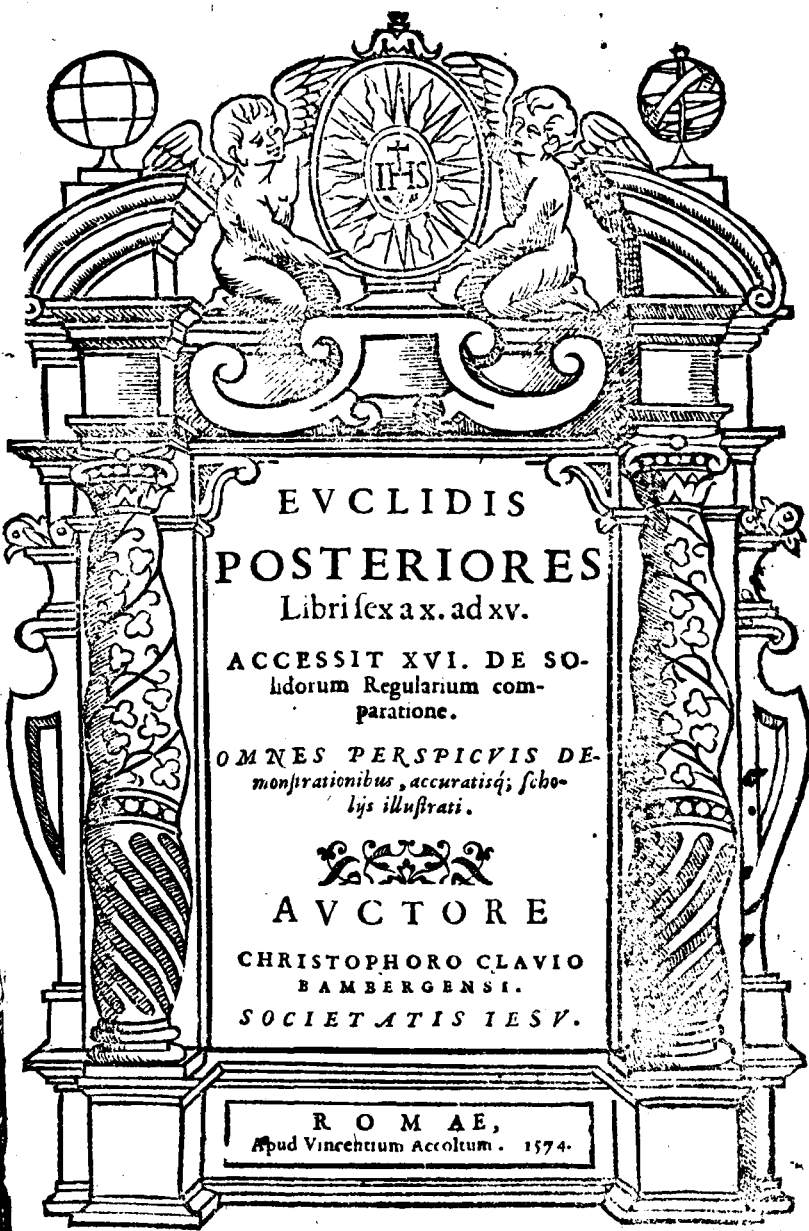


Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres



EVCLIDIS
POSTERIORES

Libri sex a x. ad xv.

ACCESSIT XVI. DE SO-
lidorum Regularium com-
paratione.

OMNES PERSPICVIS DE-
monstrationibus, accuratisq; scho-
lyis illustrati.



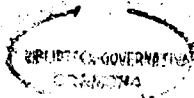
AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI.

SOCIETATIS IESV.

R O M A E,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

1.1.1



EVLIDIS

ELEMENTVM X.



DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

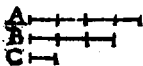


RESOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quae ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc de cimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse

superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum coplures magnitudines cum solide, tum plana, neque perfecte intelligi possunt, neque cum res tulerit, in opus atque usum conferri; propterea quod plerumque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & haec incommensurabilia saepe numero existant, ut ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus differis, obscuritatem; omnes nervos industria mea in eo contendam, ut ex his, quae hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, ut sine multo labore a quovis, qui praecedentium tamen librorum demonstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neque enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices,

metices, quæ de radicibus numerorū, tam rationalibus quàm irrationalibus, ut vocat, sermonē instituit: Immo cōtra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionē p̄fectā illius partis Arithmetices p̄dere ex hoc 10. lib. 1. aī tū abest, ut existimē tractationē illam radicem requiri, & facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum qui rationem radicem atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quā qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad usum potest reuocare, hic vero nullo modo. Hac enim de causa & nos priora decem theorematum secundi lib. numeris accommodauimus, ut oblectationem animi maiorem ex eo studiōsus caperet, ac fructum; non autem ut ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitramur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicit aliquis) ut in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vititur, usurpasti, ut ea rei & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebra vers sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs asferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ sola necessariæ ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante a Michaelē Scisfelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQUE, ut ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus utendum erit; declarat primo loco, quam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Ut duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicantur commensurabiles. Eodem



dem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum quia eas linea tam unius palmi; quam dimidiati palmi, quam tertia partis unius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas una, & eadem superficies metitur; Necnon corpora, solida autem commensurabilia, qua metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSURABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusvis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, ut propositione ultima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimae aliae lineae incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque quam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicuntur incommensurabiles, nec non, & solida, quae nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineae potentia commensurabiles sunt; cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARUM rectarum quaedam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum aliae lineae, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illae, quas in expositione definitae commensurabiles simpliciter diximus: quaedam vero longitudine incommensurabiles, quae scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quae sunt incommensurabiles longitudine, aliae sunt eiusmodi, ut earum quadrata sint commensurabilia; aliae vero ita se habent, ut & quadrata

drata earum incommensurabilia sint . Lineæ ergo illæ longitu-
dine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensura-
bilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles ;
quia videlicet secundum earum potentias, hoc est secundum ea-
rum quadrata (est enim, ut ad propof. 47. lib. 1. diximus, po-
tentia cuiusq; lineæ, quadratum ab ea descriptum) commen-
surabiles sunt, licet ipsa secundum longitudinem sint prorsus
incommensurabiles .

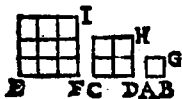
Q U O D si quis roget, cur Euclides definierit seorsum li-
neas potentia cõmensurabiles, nõ autẽ cõmensurabiles longitu-
dine ; respondendũ est, lineas longitudine cõmensurabiles satis
superq; esse explicatas in definitione cõmensurabilium magnitu-
dinũ, cũ huiusmodi lineas una cõmunis mensura metiatur, ut
dictũ est : At vero quoniã lineas potẽtia cõmensurabiles nulla
cõmunis mensura metiri potest, sed tantũmodo earum quadra-
ta idem spaciũ metitur, ideo necessarium omnino fuit, ut ea
propria definitione explicarentur .

III.

INCOMMENSURABILES au-
tem, cum quadratis earum nullum spatium,
quod sit communis eorum mensura, con-
tingit reperiri .

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, qua-
rum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommen-
surabiles potentia .

HABENT autem lineæ cõmensurabiles tã longitudine
quã potẽtia, hãc quasi convenientiã inter se, & connexionẽ,
ut lineæ longitudine cõmensurabiles, sint etiã cõmensurabiles
potentia, ita ut nulla lineæ dari possint cõmensurabiles longitu-



dine, quin earũ quadrata cõmensura-
bilia quoq; sint ; quoniam quadratum
ex cõmuni earum mensura descriptum
metitur sanquã mensura cõmunis ea-
rũ quadrata, ut in subiecta figura ap-
paret :

paret :

paret: sicut enim recta AB , metitur rectas CD, EF , ita quoque quadrata AG , quadrata CH, EI , metitur: Non autem, ut omnes lineae potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multa enim lineae sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quae tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, ut in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, ut omnes lineae potentia incommensurabiles, sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, ut omnes lineae longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multa lineae reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quae quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propof. 9. huius libri.

V.

HIS positis, ostenditur, cuicumque rectae lineae propositae rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

Si proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erunt omnium aliarum, quae cum ipsa comparantur, quaedam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quaedam vero potentia tantum: Item quaedam illi incommensurabiles longitudine tantum; quaedam vero longitudine, & potentia, ut hoc decimo libro demonstrabitur varijs in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quamvis eius verba hoc sonare videantur) hac ita se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse proposita recta linea commensurabiles longitudine,

et potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, ut diximus.

L I N E A autem illa proposita, ratione cuius alie commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis *ῥατιον*; Latinis vero Rationalis; quoniam ea ponitur, semper certa, et nota, alie vero cum illa comparata non semper nota sunt, quamvis singule seorsum sumptæ existant certe quoque, ac notæ; cum qualibet in quocunque partes æquales possit dividi.

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex positione, ut illa, sed quia cum illa comparata reperiuntur ei commensurabiles longitudine et potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, quamvis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmeticæ non pauci, qui eam Irrationalem vocant, eo quod numero non possit exprimi.

VII.

HVIC vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QUONIAM in antecedenti desin. Euclides lineas illas, quæ longitudine et potentia, vel quæ potentia tantum sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellavit Rationales.

les; liquido constat, eum hic esse dicere Irrationales, quæ propositæ recte Rationali incommensurabiles sunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tantum Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod a proposita recta fit, dicatur Rationale.

QUEMADMODUM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeque illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilesque dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur, non quidem ex positione, ut illud, sed quia cum eo collata reperiuntur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocumque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QUONIAM vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies plana quadrato a Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propofita prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixi Irrationalia: Ita ut si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si vero non fuerint quadrata, sed alia quæcunq; figura rectilinea, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITUR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus, lineas quæ possunt spatia commensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles longitudine, ut ad defin. 4. diximus, demonstrabiturq; in coroll. propof. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas,

illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRAETEREUNDUM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantum: apponere sepe semper vocibus istis: commensurabiles, ac incommensurabiles: Vix autem, & rarissime his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animadvertit, occasionem multis præbuit, ut varie, & obscure in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque sint locuti.

CETERUM his definitionibus adiungemus postulatam unum, & nonnulla pronunciata, quorum usus in hoc libro reperitur.

POSTULATUM, sive Petitio.

POSTULETUR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor vero infinite possit augeri; perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superes maiorem.

AXIOMATA, SIVE
Pronunciata .

I.

MAGNITVDO quotcunq; magnitudines metiens, compositam quoq; ex ipsis metitur .

II.

MAGNITVDO quamcunq; magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur .

III.

MAGNITVDO metiens totā magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquā.

HÆC axiomata, ut ad numeros pertinent, ostensa sunt a nobis in ultimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, praesertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce numeri in vocē magnitudinis.

CÆTERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit a numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, ut ad propos. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus, ut docuimus ad initium primi libri; curauimus, ut duplex numerus in margine e regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstrat. Quod si vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter
Theonē

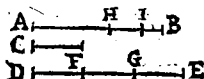
Theorem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

THEOR. I. PROPOS. I.

I.

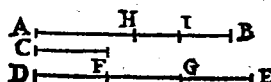
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quam dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITAE sint duæ magnitudines inæquales A B, & C, quarum A B, sit maior. Dico si ex A B, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinquetur tandem magnitudinem quædam, quæ minor sit quam C. Multiplicetur C, toties, donec magnitudo facta D E, maior sit quam A B, ita ut D E, sit multiplex ipsius C, proxime maior quam A B. Diuisa autem D E, in partes D F, F G, G E, ipsi C, æquales; detrahatur ex A B, maius quam dimidium A H, & ex reliqua H B, maius quam dimidium H I; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius A B,



multitudine æquales sint partibus ipsius D E. Sint ergo jam partes A H, H I, I B, tot, quot sunt ipsæ D F, F G, G E. Quia igitur D E, maior est quam A B; At ex D E, ablatum est D F, minus quam dimidium, vel certe dimidium, si D E, ipsius C, sit duplex; ex A B, vero maius quam dimidium A H: Erit reliquum F E, reliquo H B; maius (Cum enim D E, maior sit quam A B; si ex D E, dimidium auferretur, nec non & ex A B, dimidium, esset quoque reliquum ex D E, maius reliquo ex A B. Si ergo ex D E, auferatur minus quàm dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium;

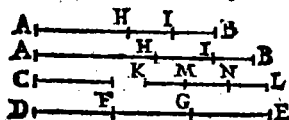
midium ; erit reliquum ex D E , maius reliquo ex A B .)
 Rursus quoniam F E , maior est quàm H B , auferaturq; ex
 F E , dimidium F G , vel certe minus quam dimidium , si F E ,
 maior sit quam duplex ipsius C ; at ex H B , maius quam di-
 midium H I ; erit eodem modo reliquum G E , maius reli-
 quo I B : atque ita procedendo ostendemus tandem po-
 stremam partem ipsius D E , qualis hic est G E , maiorem
 esse postrema parte ipsius A B , qualis hic est I B . Cum ergo
 G E , postrema pars ipsius D E , æqualis sit ipsi C ; erit quoq;
 C , maior quam I B , postrema pars ipsius A B . Relicta igitur
 est I B , magnitudo , quæ minor est magnitudine C . Qua
 reduabus magnitudinibus inæqualibus propositis , si a ma-
 iori auferatur maius , &c. Quod erat demonstrandum .



Idem demonstrabitur , si ex
 A B , auferatur dimidiū A H ,
 & ex reliquo H B , rursus di-
 midium H I , &c. Næcadêrōne

erit reliquū F E , mai⁹ reliquo H B , nec nō & reliquū G E , ma-
 ius reliquo I B ; Cū ex maiori D E , ablatū sit D F , min⁹ q̃ di-
 midium , vel certe dimidiū ; & ex minori A B , dimidiū A H , &c.

A L I T E R . Facta constructione , ut prius , sumatur h L ,
 ita multiplex ipsius I B , ut est multiplex D E , ipsius C . Di-
 uisa ergo K L , in partes K M , M N , N L , ipsi I B , æquales ,
 erunt tot partes in K L , quot in D E . Quoniam vero A H ,



maior est quam H B , vel
 certe illi æqualis , si ablatū
 sit dimidiū ex A B ; &
 H B , maior est , quam I B ;
 erit quoq; A H , maior
 quam I B , hoc est , quam

K M . Rursus quia H I . maior est quàm I B , vel certe illi æqua-
 lis ; est autē I B , ipsi M N , æqualis : erit quoq; H I , maior quàm
 M N , vel illi æqualis ; atq; adeo tota A I , maior , quàm tota K N .
 Additis ergo æqualib⁹ I B , N L , erit tota A B , maior quàm tota
 K L : Est autē D E , maior adhuc , quàm A B . Multo ergo maior
 erit D E , quàm K L . Quare cū sit ut D E , ad C , ita K L , ad I B ;
 (Sumpta . n . fuit K L , ipsius I B , ita multiplex , quàm multiplex
 est D E , ipsius C ,) erit quoq; C , maior quàm I B . Ac proinde
 relictæ est I B , minor quam C . Quod erat demonstrandum .

14. quinti.

S C H O

SCHOLIION.

LVCB clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, ut minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Pelesarium ageremus.

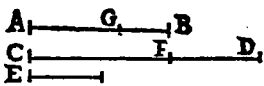
THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractiōe, & reliqua minime præcedentem meriatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis A B, C D, quarum minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B, & sic deinceps, alterna quadam detractiōe, auferatur semper minor de maiore, & nunquā reliqua metiatur præcedentē. Dico magnitudines A B, C D, incommensurabiles esse. Si. n. non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mēsurā cō-

munis. Metiatur eas si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi A B, vel



minor. Detracta autē A B, ex C D, quoties pōt, relinquat F D, se minorē, ita ut A B, ipsam C F, metiatur. Rursus detracta F D, ex A B, relinquat se minorē G B, ita ut F D, metiatur ipsam A G, atq; hoc semper fiat. Relinquetur ergo tādē ex C D, vel A B, magnitudo quēdā minor quā E. (Quia cū A B, ablata ex C D, relinquat F D, se minorem, erit C F, ablata maior, quā dimidia ipsius C D, alias si esset dimidia, vel minor quā dimidia, posset adhuc A B, detrahi ex C D. Eodē modo erit A G, ablata ex A B, maior quam dimidia ipsius A B: Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maius,

1. decimi.

quam

1. idicimi

quam dimidium ; relinquetur tandem magnitudo quædā minor quam E.) Sic ergo iam relicta G B, minor quam E.

A ——— G ——— B

Quoniam igitur E, meti-

2. pron.

C ——— F ——— D
E ———

tur AB; & AB, metitur CF;

metietur quoque E, ipsam

C F: Metitur autem E, &

3. pron.

totam C D. Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At

2. pron.

F D, metitur A G: quare & E, ipsam A G, metietur. Meti-

3. pron.

tur autem E, & totam A B: ergo E, reliquam etiam G B,

metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non er-

go A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur.

Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitu-

dinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat osten-

dendum.

S C H O L I O N.

H o c Theorema conuertemus ad hunc modum.

Si duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractio: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturq; minor A B, ex D, & reliqua sit E D. Item E D, ex A B, auferatur, relinquiturq; F B, & sic deinceps. Dico in hac

A ——— F ——— B

alterna detractioe nunquā

C ——— E ——— D

reliquam metiri præcedentē.

Si enim fieri potest, metiatur

F B, præcedentem E D. Quo-

niam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur

2. pron.

quoque F B, ipsam A F: Metitur autem & se ipsam: Igitur

1. pron.

F B, & totam A B, metietur: Metitur autem A B, ipsam C E.

2. pron.

Igitur & F B, ipsam C E, metietur. Ponitur autem & F B, me-

1. pron.

tiri ipsam E D: Igitur & F B, totam C D, metietur. Osen-

sa est autem & F B, ipsam A B, metiri. Quare F B, viranq; A B,

C D, metitur, quod est absurdum. ponuntur enim A B, C D,

incommen-

incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua precedentem magnitudinem metiatur. Quod est propositum.

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quedam reliqua precedentem.

NAM si nunquam reliqua metiatur precedentem, essent proposita magnitudines, incommensurabiles, ut demonstratis hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum: ponuntur enim commensurabiles.

ITAQUE facile ex his dignoscitur, an duae quaecunque magnitudines propositae, sint commensurabiles; nec no. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quaequam metiatur precedentem, erunt magnitudines propositae commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur utramque magnitudinem propositam, ut constet ex demonstratione primi theorematism huius scholii: Ex eo enim, quod reliqua magnitudo FB , metri dicebatur precedentem ED , ostensum est, eandem reliquam FB , metri utramque magnitudinem AB, CD . Si vero nunquam reliqua magnitudo precedentem metiatur, propositae magnitudines incommensurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonstratis.

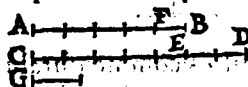
PROBL. I. PROPOS. 3.

3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

DATAE duae magnitudines commensurabiles sint AB, CD , quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam AB, CD , commensurabiles sunt, sit ut si minor AB , ex maiore CD , detracta, quoties potest, relinquat $E D$;
 B
 $\& E D$,

& E D, detracta ex A B, quonies potest, relinquat F B, & hoc semper fiat alterna quadam detractio; tandē reliqua quę-



piam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theore.

præcedentis scholij. Metiatur iam F B, reliqua præcedentē

E D. Dico F B, esse maximam mensuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim utraq; metiatur, ita ostendemus. Quoniam F B, metitur E D, & E D, metitur A F;

2. pron.

1. & 2.

pron.

1. pron.

metiatur quoq; F B, ipsam A F. At metitur F B, & se ipsam: Igitur F B, totam A B, metiatur, itaque eadem & ipsam C E, quā A B, metitur. Cū ergo, & ipsam E D, metiatur, metietur quoq; F B, totā C D. Metitur ergo F B, utranq; A B, C D. Quare utriusque A B, C D, communis mensura est F B.

Q U O D autem F B, sit maxima earum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earum mensura, maior quam F B. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, maior quam F B. Quia igitur G, metitur, utranque A B, C B; metitur autem & A B, ipsam C E; metitur quoque G, ipsam C E. At metitur quoque totam C D. Igitur G, reliquam quoque E D, metietur. Metitur autem E D, ipsam A F. Ergo, & G, ipsam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam F B, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis mensura est ipsarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis mensura est.

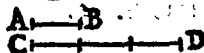
2. pron.

3. pron.

2. pron.

3. pron.

Q U O D si minor magnitudo A B, metiatur maiorem



C D, ita ut detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipsa A B, am-

barum maxima mensura communis, cū & se ipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

C O R O L L A R I U M .

Ex hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

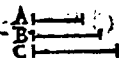
H A I C I R R A hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est F B, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D.

Demon-

Demonstratum enim est ibi, magnitudinem G, si metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam mensuram F B. Et demque est ratio de cæteris.

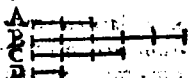
SCHOLIUM.

Ex his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quolibet magnitudines proposita sint commensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum exporior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non.



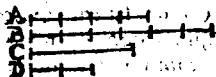
Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, quæ tres A, B, C, esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

Si vero A, & B, fuerint commensurabiles; sit earum maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.

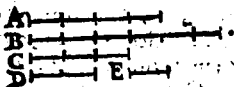


3. decimi.

Quod si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesein.



Si vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoque tres A, B, C, commensurabiles. Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipsas A, & B, metietur quoque



3. decimi.

2. pron.

B 2 E, ipsas

E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiantur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

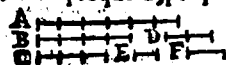
SIMILITER explorabimus, an plures datae magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datae sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

4.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datae tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam



si maior magnitudo quā D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximā mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si uero D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur qualibet earum mensura communis ipsam D; maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. precedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C.

Quod autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo

3. decimi

3. decimi

2. primi

do

do confirmari potest. Si non est maxima, sit F , maior quam E , si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F , metitur A , & B ; metitur quoque D , earum maximam mensuram, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C : Igitur F , metiens D , & C , metitur quoque E , earum mensuram maximam, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E , magnitudines A, B, C , metitur; Ac propterea E , maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

APERTUM quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

INVERTITUR autem hoc ex ultima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F , si metiatur ipsas A, B, C , metiri quoque B , maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

SIMILITER modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inuenimus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua uero omnia absolueda erunt, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

SI sint quotcumque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Er ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcumque magnitudines A, B, C , Dyn eisdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H : Ut quidem A , ad B , ita E , ad F ; & ut B , ad C , ita F , ad G ; &

G; & ut C, ad D, ita G, ad H. Dico, ex æquo esse, ut A, ad D, ita E, ad H. Quoniam ex us., quæ ad de

A		E, 3.	fin. 5. lib. 6. a nobis demon
B		F, 4.	strata sunt; tam propor
C		G, 1.	tio A, ad D, componitur
D		H, 2.	ex proportionibus A, ad

B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspicuum est, cum proportionibus componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compositas proportionibus, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse ut A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.

Idem sequitur, si magnitudinum, & numero-

A		E, 3.	rum proportio fuerit per
B		F, 12.	turbata, ut in hoc exem
C		G, 4.	plo apparet, in quo est, ut
D		H, 6.	A, ad B, ita G, ad H; &

ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita E, ad F. Exde enim prorsus est demonstratio.

S C H O L I O N.

Q U O N I A M precedenti lemma & in propositione, quæ sequitur, & in alijs multis, utendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in precedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro uero 5. in magnitudinibus, quæquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri numeris quoque cõueniant. Vel certe demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D,

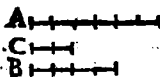
C, D, quæ proportionem habent eandem, quæ numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

COMMENSURABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINTE magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties unitas repetita metiatur numerum D: Et quoties ea



D, 3.

Unitas.

E, 2.

dem C, repetita metitur B toties unitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & unitas numerum D, æquè metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinē C, atq; numerus D, unitatem. Quare erit ut A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Est autē & ut C, ad B, ita unitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atq; unitas numerum E, æquè metiatur. Igitur p[ro]p[or]tio p[re]cedēs, erit ex equo, ut A, magnitudo ad B, magnitudinē, ita D, numerus ad E, numerum. Cōmensurabiles ergo magnitudines inter se rationē habent, &c. Quod erat demonstrandum.

3. decimi.

S C H O L I O N.

CUM Eutides ad demonstrationem huius theorematiss assumat maximā cōmunē mensurā p[ro]positarū magnitudinū cōmensurabiliū, qualis fuit C, ipsarū A, & B, perspicuū est, lineas debere esse longitudinē, & ob id p[ot]ētia quoq; cōmensurabiles, ut rationē habeāt inter se, quā numerus ad numerū. Hæc, n[on] s[ed] sole cōmunē recipiūt mēsurā, atq; adeo in eis demonstratio locū, habet.

Q U O D si lineæ sine p[ot]entia tantum commensurabiles, habebunt quiddē earū quadrata, inter se rationē, quā numeri ad numerū, quia cōmensurabilia sunt, atq; p[er]circa mensurā habent cōmunē, ipsiq; demonstratio huius theorematiss cōuenit: At ipse lineæ nequaquā, quia lōgitudine incōmensurabiles cū sint,

communis mensura sunt expertes, ac propterea huius theoremat
tis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.

Ex demonstratione porro eiusdem huius theoremat is liqui
do constas, commensurabilium magnitudinum proportionem
esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis men
sura maxima ipsas metitur. Offensum enim est, eam habere

A

D, 3.

C

Vni- . . . tas.

B

E, 2.

proportionē magnitudines
A, & B, quam habent nu
meri D, & E; per quas sci
licet earum mensura com

munis maxima C, ipsas metitur.

Vnde si propositis duabus magnitudinibus commensura
bilibus A, & B, libeat inuenire quam proportionem habeant
in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas
aeque, ac communis magnitudinum commensurabilem A, &
B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam ut
demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habet,
quam numeri D, & E.

Quod si loco maxima mensura C, sumamus aliam quā
cumque communem earum mensuram, nihilo minus hoc theo

A

D, 6.

C

Vni- . . . tas.

B

E, 4.

rema demonstrabimus eodē
argumento. Quāuis enim
numeri D, & E, maiores in
ueniantur in hac posteriori

demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem propor
tionem cum illis, ut ex apposta figura apparet. Quoniam ut
ro in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi om
nium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea
forte Euclides in demonstratione maximam communem mensu
ram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

6

THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duae magnitudines inter se proportio
nem habeant, quam numerus ad numerū:
commensurabiles erunt magnitudines.

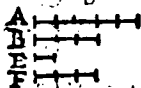
HABEANT duae magnitudines A, B, eam proportio
nem

nem quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse cō-
mensurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero
C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A,
quarum partiū uni equa-
lis sit magnitudo E. Deinde
quoties unitas repetita
metitur numerum D, to-
ties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandā
aliā F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, conti-
netur, quoties unitas in C; continebit æqualiter A, ipsam
E, & C, numerus unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad
unitatem: Est autem & ut E, ad F, ita unitas ad D, quod
E, ipsam F, & unitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per
lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, ut A, ad F, ita C, ad
D: Erit autem etiam ut C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit ut
A, ad B, ita A, ad F; ac propterea B, & F, magnitudines
æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsam F, metia-
tur, metietur quoque eadem E, ipsam B: Metiebatur autem
& ipsam A. Igitur magnitudo E, utranque A, & B, meti-
tur; Ac proinde A, & B, commensurabiles sunt. Si igitur
duæ magnitudines inter se proportionē habeant, &c. Quod
erat demonstrandum.

A L I T E R. Quot sunt unitates in C, in tot partes equa-
les intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium uni
æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est ut E, ad A,
ita unitas ad C, quod E, ip-
sam A, & unitas ipsum C,
æque metiantur; poniturque
ut A, ad B, ita C, ad D; erit
per idem lemma superius,
ex æquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metitur autem unitas
numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B,
metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, &
B, habentes eandem communem mensuram E, commensu-
rabiles sunt. Quod est propositum.

COROLLARIUM.

Ex priori autem demonstratione theorematibus sapientia est nobis
uia qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quouis
alia



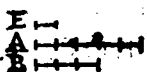
C, 5.

Uni tas.

D, 3.

9. quinti.

1. desin.

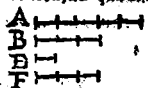


Uni. - tas.

C, 5.

D, 3.

alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam si inveniendā sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; dividenda erit A,

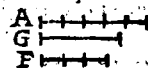


C, 5.
Vni- . tas.
D, 3.

in tot æquales partes, quot unitates sunt in C; & sumenda alia linea B, tot earundem partium, quot unitates sunt

in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, ut C, ad D, ut demonstratū est.

Hinc rursus appareat, quam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ,



C, 5.
D, 3.

ut numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ A, ut numerus C, ad numerum D, inueniē-

da erit primum linea F; ex ijs, quæ modo diximus, ad quā sic se habeat A, ut C, ad D; Deinde accipienda inter A, & F, mediā proportionālis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, ut C, ad numerum D. Cum enim rectæ A, G, F, sint continuæ proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6, ut A, ad F, atque adeo ut numerus C, ad numerum D, (cum sit ut A, ad F, ita C, ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.

13. sexti.

SCHOLIION.

IN hoc etiā theoremate manifestum est, lineas proportionalem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, ut ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

7.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

o.

INCOMMENSURABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINTE incōmensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas



proportionē nō habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionē dicantur habere, quam numerus ad numerum; erunt ipse commensurabiles. Quod est absurdum. possunt enim incōmensurabiles. Non igitur

6. decimi

A, &

A, & B, proportionē habēt, quā numerus ad numerū. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

QUOCUNQUE modo lineę incommensurabiles sint, siue longitudine & potenti, siue longitudine tantum, semper colligimus eas proportionem non habere, quam numerus ad numerū, ut vult theorema. Nam alias, ut demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI duę magnitudines inter se proportionē nō habeant, quā numerus ad numerū: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NO N habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quā numerus ad numerū. Dico eas incommensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse commensurabiles, erit earū proportio, quę numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerū. Nō igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duę magnitudines inter se proportionē habeāt, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

QUOD si lineę proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipse necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionē haberēt, quam numerus ad numerum, ut ad propos. 7. huius lib. demonstramus. quod est contra hypothesin. Non autē colligendū est ex hoc theoremate, lineas, quę proportionē nō habent, quā numerus ad numerū, necessario & potenti incommensurabiles esse, ut manifestū est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantū sint commensurabiles, eas proportionē habere, quā numerus ad numerum, ut in demonstratione theorematum assumitur; immo nullū modo talem proportionem habere possunt, ut in scholio propos.

8.
o.

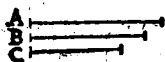
s. decimi

propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur inferatur ex huius theorematibus demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

L E M M A.

Si sint tres quantitates continue proportionales, & aliz tres continue quoque proportionales; sitque ut prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

Sint continue proportionales tam quantitates A, B, C , quam D, E, F ; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non; sitque ut A , ad



$D, 35$. C , ita D , ad F . Dico $E, 28$. quoque esse ut A , ad $F, 21$. B , ita D , ad E . Quo-

niam tam proportio A , ad C , proportionis A , ad B , quam proportio D , ad F , proportionem D , ad E , duplicata est; ponunturque proportionem A , ad C , & D , ad F , æquales; Erunt quoque proportionem A , ad B , & D , ad E , æquales, quandoquidem earum proportionem duplicata æquales sunt.

Idem sequitur, si plures quantitates sint, quãtres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicata, ad demonstrationem; & in quinque, quadruplicatam, &c.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine commensu-

menſurabilibus ſunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ uero a rectis lineis longitudine incommenſurabilibus ſunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam rectæ AB, CD, longitudine ſunt commenſurabiles; erit AB, ad CD, ut numerus ad numerum: Sit ut E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt AB, ad CD, ut E, numerus ad numerum F: habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportionem, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitum.



E, 2, F, 3.
G, 4 H, 9.

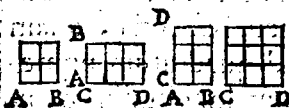
¶ decimi.

¶ sexti.

¶ octavi.

ALITER.

ALISTER. Posita eadem constructione, contineatur rectangulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter



E, 2. F, 3.

G, 4. I, 6. H, 9.

ter quadratos G, H, ut constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atq; adeo in proportione lateris E, ad latus F, ut diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est AB, ad CD, ut E, ad F: Vt autem AB, ad CD,

1. sexti.

ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD, ponatur basis rectanguli; Item ut E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum BD, ut quadratus numerus G, ad numerum I.

1. sexti.

Rursus quia est AB, ad CD, ut E, ad F: Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item ut E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ut I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, in eadem ratione sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

S. I. T. secundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas



E, 2. F, 3.

G, 4. H, 9.

AB, CD, esse longitudine cõmensurabiles. Sint numeri E, & F, latera quadratorum G, & H, ut in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, ut quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: Habet autem quadratum ex AB ad quadratum

10. sexti.

ex CD, proportionem duplicatam lateris AB, ad latus CD; Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit pro-

11. octavi

portio

portio lateris A B, ad latūs C D, quæ lateris E, ad latūs F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportionēs, æquales sūt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant, quā numeri E, F, ipsæ cōmensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

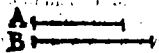
6. decimi

A L I T E R. Repetatur constructio figuræ posterioris. Quia igitur est ut A B, ad C D, ita quadratū ex A B, ad rectangulū B D; ita ut A B, rursum ad C D, ita rectangulū B D, ad quadratū ex C D, ut supra diximus; erunt quadratū ex A B, rectangulū B D, & quadratū ex C D, continue proportionalia in ratione lineæ A B, ad lineā C D: Sūt autem & numeri G, I, H, continue proportionales in ratione numeri E, ad numerū F, ut supra ostendimus; ponaturq; quadratū ex A B, ad quadratū ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratū numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, ut G, ad H, hoc est, ut E, ad F; Ac propterea A B, C D, rectæ, proportionem habentes, quā numeri E, F, cōmensurabiles sūt longitudine. Quod est propositū.

1. sexti.

6. decimi.

S I N T tertio rectæ A B, longitudine incommensurabiles. Dico earū quadratā proportionē non habere, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Si enim quadratū ex A, ad quadratū ex B, proportionē dicatur habere, quā numerus quadratus



ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine cōmensurabiles, ut iam est demonstratū. Quod est absurdū. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratū ex A, ad quadratū ex B, proportionē habet, quā numerus quadratus ad numerū quadratum. Quod est propositum.

Q U A R T O, ac postremo quadratū ex A, ad quadratū ex B, nō habeat proportionē, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Dico eas longitudine esse incōmensurabiles. Si enim longitudine cōmensurabiles credantur; habebūt earū quadrata, ut est demonstratū, proportionē quā quadratus numerus ad quadratū numerū. Quod est absurdū. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine cōmensurabiles sūt A, & B. Quod est propositum. Quapropter quæ a rectis lineis longitudine cōmensurabilibus sūt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROL.

Ex his manifestum est, rectas lineas, quae longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quae uero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quae longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quae uero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

6. decimi
3. defin.

Quia quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; ipsa commensurabilia erunt. Ac propterea & tamen ipsorum potentia commensurabilia erunt. Quare lineae longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

3. defin.
6. decimi

Quia lineae, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam numerus simpliciter ad numerum, potentia quidem commensurabiles sunt, cum earum quadrata commensurabilia sint; at longitudine nequaquam, ut in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim ex lineis potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, ut constat ex secunda parte huius theorematum.

4. defin.
8. decimi.

Rursus quia lineae, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, ut modo diximus; liquet, ut constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse. Solum enim ex lineis longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, potentia quoque incommensurabiles sunt, cum earum quadrata incommensurabilia sint.

Postremo lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, ut patet ex prima parte corollarii. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineae potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIUM.

Per autem scopum priorum duarum partium huius theore-

matum

mas in planis perfectissq; percipiatur, diligenter consideran-
 da sunt hec, quae sequuntur. Primum lineas rectas longitu-
 dine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theo-
 rematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad
 quadratum numerum, non solum esse eas, quae numeris ex-
 primi possunt, sed cum linea Rationali proposita comparentur; qua-
 les sunt illae, quae in demonstratione sunt posita: (est enim re-
 cta $A B$ 2. & $C D$, 3.) verum etiam illas, quae multis pos-
 sunt numeris expressi, si cum Rationali linea proposita con-
 ferantur: Deinde e contrario, quadrata inter se proportionem ha-
 bentia, quorum quadratus autem non ad quadratum numerum,
 quarum linea, seu latera, ex secunda theorematum parte lon-
 gitudine sunt commensurabilia non solum ea esse intelligenda
 quae continent eundem quadratus mensuras aequales illis, in
 quas quadratum Rationalis linea resolvitur, quos sunt unita-
 tes in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem ha-
 bentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione defec-
 torum: (continent enim quadratum ex $A B$, quatuor mensuras
 quadratas, ex quadrato vero $C D$, novem; quos nimirum uni-
 tates sunt in quadratis numeris G, H .) Sed etiam, quae vel
 pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quae
 sunt unitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato li-
 nea Rationalis conferantur. Saepenumero enim lineae datae com-
 mensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris expressi
 non possunt, propterea quod Rationali linea proposita sunt lon-
 gitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum
 proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad
 quadratum numerum, ut in hoc theoremate est ostensum, ad
 pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quae
 sunt in quadratis illis numeris unitates. Hac autem omnia per-
 spicua faciemus hac demonstratione.

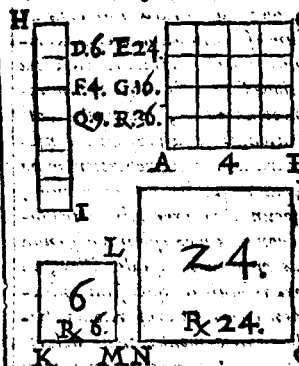
EXPONATUR linea Rationalis $A B$, expressa nume-
 ro 4. cuius quadratum $A C$, continebit mensuras quadratas 16.
 Sint quoque numeri D, E , plani similes non quadrati, habenti-
 es tamen proportionem, ut in Arithmetice est demonstra-
 tum, quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum
 G , nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum $H I$, com-
 planans ex sex quadratis mensuris quadrati $A C$, quos nimirum
 unitates in D , numero continetur; atque ipsi $H I$, quadratus
 C equala

16. ostendit

14. secunda

14. septimi.

equale constituatur KL , cuius later KM . Restituta per eam, quae i coroll. propof. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta NO , ad cuius quadratum NP , ita se habeat KL , quadratum



rectae KM , et numerus D , ad numerum E ; vel ut quadratus F , ad quadratum G . Quoniam igitur est ut quadratus numeri F , ad quadratum numerum G , vel ut numerus D , ad numerum E , videlicet 6. ad 24. ita quadratum KL , ad quadratum NP , per constructionem 3. Construat autem quadratum KL , mensuras quadratas, quarum 16. continet quadratum $Rationale AC$: (con-

structum enim est quadratum KL , equale rectangulo AB , constructi ex 6. huiusmodi quadratis mensuris.) continebit quadratum NP , earundem mensurarum quadratorum 24. ac propterea M , NO ; latera quadratorum KL , NP , erunt $R. 6.$ & $24.$ quae numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntq; linea Rationali AB , longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum G . Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata KL , NP , proportionem habeant, ex coroll. propof. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM , NO ; sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum subdupla videlicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata est, ut hic apparet 1. 2. 4. Quare longitudine commensurabiles sunt rectae KM , NO , cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda sunt ergo in hoc theoremate lineae etiam illa longitudine commensurabiles, quae numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si considerentur eadem lineae KM , NO , simpliciter, & absolute, nulla habita ratione lineae Rationalis AB , numeris poterunt efferr.

6. decimi.

ri. Cum

18. Tam enim proportionem habeant subduplam, si $K M$; diuidatur in duas partes equales, diuidetur $N O$; in eiusdem magnitudinis partes 2. si illam 2. secabitur hac in 6. $G C$. At uero haec partes nullo modo equales sunt partibus lineae Rationalis $A B$; immo illis omnino sunt longitudine incommensurabiles.

$R V R S V S$, quia quadrata $K L$, $N P$; proportionem habentia quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum G ; plures quadratus mensuras continent equales illis; in quas $A C$, quadratum Rationalis lineae $A B$, resoluitur, quatuor unitates sunt in dictis numeris quadratis F , G ; (Nam $K L$, aequale est sexhinsimam mensuras; & $N P$, continet 24. ad numerum quadratus F , componitur ex quatuor unitatibus; & G , ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportionem sumantur Q , R ; pauciores tales mensuras complectuntur quadrata $K L$, $N P$, quam sunt unitates in numeris quadratis Q , R , cum adierit ex 9. aliter uero ex 36. unitatibus constituantur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quae numerus quadratus ad numerum quadratum, quod pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendit, quae unitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cum quadrato lineae Rationalis propositae. Quod si eadem quadrata $K L$, $N P$; considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati $A C$, ex Rationali lineae $A B$, descripti, res solui poterit in totidem mensuras quadratas, quot unitates in quadratis numeris F , G , vel Q , R , continentur. Nam si recta $K M$, diuidatur in duas partes, & $N O$, in quatuor, ut dictum est, continebit quadratum $K L$, quatuor mensuras quadratas, & quadratum $N P$; sexdecim, quot scilicet unitates reperiuntur in quadratis numeris F , G . Item, si eadem lineae secantur in partes tres, & sex, habebunt eam quadrata mensuras quadratas 9. & 36. quae nimirum unitates comprehenduntur in numeris quadratis Q , R , &c. At huiusmodi quae nullo modo equales sunt quadrata in quibus, in quas quadratum $A C$, Rationalis lineae $A B$, resoluitur.

$I D E M$ dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorum superficies non exprimentur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12, & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16, ad quadratum numerum 4. &c.

.II
.OI

II. PROPOS. 8. theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamvis interdum Rationali linea incommensurabiles sint, ut sit sensus. Quadrataque describuntur a rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sine incommensurabilibus linea Rationali proposita, proportionem inter se habent, quam quadratum numerus ad quadratum numerum, quamvis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis linea conferantur, saepe numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratum numerus ad quadratum numerum, seu hoc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparantur cum quadrato Rationalis linea, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiam si linea Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLL. I. G. I. X. Campanus ex hac theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, ut ad, propos. 47. lib. 1. demonstravimus. Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, que quadratum numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius eadque proportionalis, ut in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex ultima parte huius theorematum eorum latera, nempe diameter & lateris in vno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstravimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendit Euclides propos. ultima huius lib.

II.

Io.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

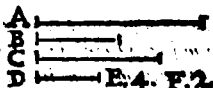
SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundae fuerit commensurabilis; & tertia quartae commensurabilis erit. Et si prima secundae fuerit in-

commen-

commensurabilis; & tertia quartæ incom-
mensurabilis erit.

S I N T proportionales quatuor magnitudines A, B, C,
D, sitq; A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & ter-
tiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam A,

& B, inter se commensurabi-
les sunt, habebit A, ad B, pro-
portionem quam numerus ad
numerus, nempe quam E,



5. decimi.

ad F: Ponitur autē ut A, ad B,
ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam
numerus E, ad numerū F. Quare C, & D, commensura-
biles inter se sunt.

6. decimi.

S I D sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C,
ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam A, & B, incom-
mensurabiles sunt, non habebit A, ad B, proportionē quā
numerus ad numerum: Ponitur autem ut A, ad B, ita C,
ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet quam nu-
merus ad numerum. Quare C, & D, incommensurabiles
sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales
fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

7. decimi.

8. decimi.

SCHOLIUM. I.

Q U O D si quatuor proposita magnitudines fuerint lineæ,
prima autem secunda commensurabilis fuerit longitudine,
erit & tertia quarta longitudine commensurabilis, ut ex de-
monstratione huius theorematidis apparet. Eodem enim modo
ostendimus posterius duas proportionē habere numeri ad nu-
merum. Quare, ut in scholia propof. 3. huius lib. diximus, lon-
gitudine commensurabiles sunt.

S I autem prima secunda fuerit commensurabilia potentia
tantum, erit & tertia quarta potentia tantum commensurabi-
lis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, com-
mensurabilis est potentia ipsi B, erunt earum quadrata com-
mensurabilia; ac propterea proportionem habebunt, quam nu-
merus ad numerum. Si autem, ut quadratum ex A, ad qua-

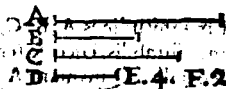
3. defin.

5. decimi.

22. sexti.

dratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D: (quod
quatuor lineae propositae A, B, C, D, proportionales sint, & earum
quadrata a figura similes similiterq; descripiantur) Igitur & qua-
drata ex C, D, proportionem ha-

6. decimi.



bebunt, quam numeri ad nu-
merum. Quare commensurabiles
habebunt; & expropterea lineae
C, D potentia commensurabiles.

3. defin.

Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita mani-
festum fiet. Quoniam rectae A, B, rectae sine commensurabilibus
potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt; non
erit earum proportio, quae numeri ad numerum, ut in scholio
propos. 7 huius lib. docuimus; & expropterea neque C, D, propor-
tionem habebunt, quam numeri ad numerum. Longitudine ergo
incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib.
Sunt autem potentia commensurabiles, ut ostendimus. Igitur
potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.
Eadem ratio, si prima secunda sit incommensurabilis longitudi-
dine rectarum, erit & tertia quarta longitudine tantum incommensura-
bilis. Quia si A, & B, sint longitudine rectarum incommensurabiles, per
ipsarum potentia commensurabiles; ac propterea ipsae potentiae tantum
commensurabiles erunt. Igitur, ut hic ostendimus, erant quoque rectae
C, D, potentia tantum commensurabiles; & ideo longitudine
tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

6. decimi.

R V R S V S. Si quatuor magnitudinum priores duae fuerint
lineae, duae vero reliquae superficies, vel solida; sequetur nihilo
minus, si lineae sint longitudine commensurabiles, vel incommen-
surabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles
vel incommensurabiles esse. Si enim lineae longitudine sint
commensurabiles, erit earum proportio, quae numeri ad nu-
merum, ex 11. quae in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cum
ergo habeant reliquae duae magnitudines proportionem eandem
quam lineae, erit quoque illarum proportio, quae numeri ad nu-
merum; atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineae longi-
tudine incommensurabiles sint, sine potentia commensurabiles
existant, sine non non erit earum proportio, quae numeri ad nu-
merum, ut constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque re-
liquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem
habebunt; proportio erit, quae numeri ad numerum. Quae
re in

re incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

EODEM modo, si priores duae magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero duae, linea, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineae longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidaue commensurabilia sint, habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur et linea eandem cum ipsis rationem habebit, proportionem habebit, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudo commensurabiles erunt, ut diximus in scholio propositi 6 huius libri. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque linea eandem cum ipsis proportionem habebit, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, quae docuimus in scholio propositi 8 huius libri. Quod est propositum.

8. decimi.

5. decimi.

L E M M A.

Duos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENTIANTUR duo plani numeri non similes, per ea, quae ad finem libri 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in scholio propositi 26. libri 8. demonstrauiamus. Quod est propositum.

Quod si plures numeros inuenire uelimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quoscunque numeros primos, per ea, quae in A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. scholio propositi 20.

lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habet, ex scholio propositi 26. libri 8. quia numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, ut ad finem libri 8. docuimus.

PROBL. 3. inuentione numerorū planorū nō similium, qui uidelicet proportionē nō habent, quam quadratus numerus ad quadratū numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco. Quod ut ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conatur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTUR quatuor numeri A, B, C, D, ita ut non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Peripicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia nō sūt, qđ facere oportebat.

HÆC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia sepe numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48 sunt plani similes, cum proportionem habeant, quā quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. ut pō stat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6, non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim est, ut duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, ut quocunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio prop. 23. lib. 8.

IO.

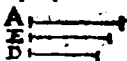
II.

PROBL. 3. PROPOS. II.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per

per lemnis procedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Deinde ex corollario propof. 6. huius lib. reperiatum linea D, ad cuius qua



B, 16

C, 6

ad numerum C: Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, ut numerus B, ad numerum C non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autē tantū longitudine sint incōmensurabiles, pater. Cū enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantū incōmensurabiles sunt.

9. decimi.

6. decimi.

S 1. r. iam eidem rectæ proposiæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propof. 20. lib. 6. ut A, ad D, & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, ut iam est ostentum; erit & quadratum ex A, incōmensurable quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propof. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca proposiæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas lineas, &c. Quod erat demonstrandū.

13. sexti.

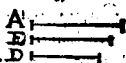
10. decimi.

S C H O L I O N.

S 1. igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita ut ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per definitionem.

fini 6. Rationalis quia potentia illa est commensurabilis, licet eidem longitudini incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis, ex desin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM, ex demonstratione huius theoremati liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentiarum commensurabiles, vel quod illa est, inter duas longitudines tantum incommensurabiles, esse virulibet illarum commensurabilem longitudine, & potentia, atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum fiat Irrationalis. Ex eodem, quod



B, 10. recta A, D, sum longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum; de-

mōstravimus recta E, inter illas media proportionalis, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine, & potentia: Eodemq; Argumento ostendemus eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cū.n. recta D, E, A, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad recta A: Est ubi recta D, recta A, incommensurabilis longitudine: Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta D, & E, ex desin. incommensurabiles sunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.

IN codicibus vulgatis preponitur hæc undecima propositio a Theone propositioni decima præcedenti: quod errore librarium factum esse puto; cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstretur, ut ex dictis apparet.

12.

8.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVAE eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT utraq; magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis: Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cū.n. A, & C, sint commensurabiles, habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quā numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoq; C, ad B, proportionem, quā numerus ad numerum: habeat quā numerus F, ad numerum G. sumanturq; tres numeri H, I, K, minimi de-

5. decimi.

4. octavi.

At deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F,
ad G; sitq; H, ad I, ut A ——— D, 10. E, 8.
D, ad E, hoc est, ut A, C ——— F, 2. G, 3.
ad C, & I, ad K, ut F, B ——— H, 5. I, 4. K, 6.
ad G, hoc est, ut C, ad

B. Quoniam igitur est A, ad C, ut H, ad I; & C, ad B, ut I, ad K; erit ex æquo A; ad B; ut H, ad K, numerus ad numerum.
Quare A, B, proportionē habētes, quam numeri H, K, inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini cōmensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

6. decimi.

SCHOLIUM.

Quoniam si magnitudines A, B, C, sine linea, atq; A, & B, ipsi C, longitudine cōmensurabiles existant, erunt quoq; A, & B, inter se longitudine commensurabiles, ut constat ex demonstratione theorematum, quia eodem modo ostendimus, lineas A, & B, proportionē non habere, quam numerus H, ad numerum K: Quare longitudine commensurabiles erunt, ut ad propof. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eisdem longitudine sine incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo, & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cum enim A, & C, sine potentia commensurabiles, erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, ut numerus ad numerum, nempe, ut D, ad E, cum quadrata ex A, C, per definit. sine commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, ut numerus ad numerum, nimirum ut F, ad G. Sumptis ergo in eis de rationibus D; ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus erit. rursus ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, ut numerus H, ad numerum K. Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atq; adeo linea A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse dua linea longitudine inter se commensurabiles, licet utraque cuiuspiam alteri linea potentia tantum sit commensurabilis, quales sunt dua Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia vero tantum Rationali exposita commensurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propof. 19. huius lib.

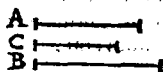
5. decimi.

4. octavi

6. decimi.

SED & conuersum quodammodo huius theoremati demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuiuspiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.



SINT enim *A*, & *B*, commensurabiles, sitq; *A*, ipsi *C*, commensurabilis. Dico & *B*, eidem *C*, commensurabilem esse. Cum enim tam *B*, quam *C*, ipsi *A*, sit commensurabilis; erunt quoque *B*, & *C*, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

QUOD si magnitudines *A*, *B*, *C*, sint lineæ, & *A*, *B*, commensurabiles longitudine, sit autem *A*, ipsi *C*, commensurabilis longitudine; erit & *B*, reliqua eidem *C*, longitudine commensurabilis. Nam cum tam *B*, quam *C*, ipsi *A*, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam *B*, *C*, inter se commensurabiles longitudine, ut ostendimus. At vero si lineæ *A*, & *B*, potentia tantum sint commensurabiles, & *A*, ipsi *C*, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam *B*, eidem *C*, potentia esse commensurabilem; quia utraq; *B*, *C*, ipsi *A*, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si *A*, ipsi *C*, commensurabilis sit longitudine, reliquam *B*, eidem *C*, longitudine commensurabilem esse, quia non utraq; *B*, *C*, ipsi *A*, longitudine commensurabilis est, sed *C*, quidem longitudine, at vero *B*, potentia tantum, ut ex hypothesis constat.

13.

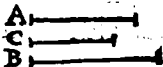
o.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim



B, dicatur esse commensurabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

12. decimi

S C H O L I O N.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, & C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine.) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis sine tantum, sine etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.

12. decimi

12. decimi

12. decimi

QVONIAM vero hac propositio 13. apud Theonem Lemma est, sit, ut post hac in nostra editione numerus propositionis Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Relinquimus, n. dedita opera ordinem ac sortem Theonis hoc loco, quia a junioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascriptum.

13.

8.

THEOR. II. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini

a cuius

cuius incommensurabilis fuerit: Et reli-
qua eidem incommensurabilis erit.

SINT due magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A incommensurabilis sit alteri cuiuspiam C. Dico & B eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse

commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B, cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis, equat & A, C, inter se commensurabiles.

Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint due magnitudines commensurabiles, seu quod definiendum erat.

SCHOLIUM.

Hic quoque, si magnitudines A, & B, sint longitudo, & C, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, sine longitudine tantum, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (Cum hoc posito, utraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum, ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, commensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligimus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, & C, potentia essent commensurabiles, & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

COLLIGUNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad 10, quod in hoc lib. demonstratur, perutile.

QUAE incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

SINT due magnitudines incommensurabiles A, & B, quibus

12. decimi.

12. decimi.

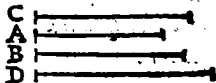
12. decimi.

12. decimi.

1.

8.

bas commensurabiles sint C , & D , nempe C , ipsi A , & D , ipsi B . Dico C , & D , inter se incommensurabiles esse. Quoniam A , & C , commensurabiles ponuntur, & est A , ipsi B , incommensurabilis; erit quodque reliqua C , eidem B , incommensurabilis.



Rursus quia D , & B , commensurabiles ponuntur, & est B , ipsi C , incommensurabilis; erit & D , reliqua eidem C , incommensurabilis. Quod est propositum.

Si autem magnitudines A , B , C , D , sint lineae, & A , B , vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C , D , ipsi A , B , longitudine commensurabiles; erunt C , & D , eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si vero A , & B , incommensurabiles sint potentia, & ipsi potentia tantum commensurabiles C , & D ; ostendemus similiter C , & D , potentia esse incommensurabiles; & perspicuum est.

LEMMA.

DYABVS data rectis lineis inaequalibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QUAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propof. 47. lib. 1, tamē quia hic breuius ex ijs, quae tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficerē. Sin ergo datae duae rectae lineae inaequales AB , & C , quarū AB , maior: oporteat, inuenire, quō AB , plus possit quā C . Diuisa AB , bisaria in D , describatur ex centro D , & inter-



uallo DA , uel DB , semicirculus AEB , in quo aptetur recta AE , ipsi C , aequalis, iungaturque recta EB . Dico rectam AB , plus posse quā C , quadrato rectae EB . Cum enim angulus E , in semicirculo

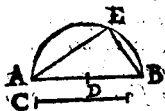
rectus

47. primi.

rectus sit; erit quadratum ex AB , aequale quadratis ex AE , EB ; atq; idcirco AB , plus poterit quam AE , hoc est, quam C , quadrato rectæ EB . Quod est propositum. Similiter

DE ABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

Hoc etiam aliter tradidimus ad propof. 47.



lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ AE , EB ; quæ si coniungantur ad angulum rectum E , poterit eas recta ducta AB , quippe cū

47. primi.

quadratum ex AB , aequale sit quadratis ex AE , EB .

14.

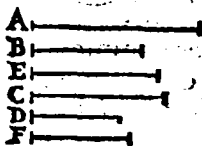
12.

THEOR. 15. PROPOS. 12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ

rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINTE quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D; possitque A, prima plus quam B, secundâ, quadrato rectæ E, & C, tertiâ plus possit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dicō, si E, commenturabilis sit longitudine ipsi A; & F, commenturabilem esse longitudine ipsi C: Si uero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniā est ut A, ad B, ita C, ad D; erit quoque ut quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesein; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, ut quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, ut quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; Ac propterea erit etiam ut recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque ut B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est ut A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, ut A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



22. sexti.

22. sexti.

SCHOLION.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantum commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantum ipsi C, esse commensurabilem, ut constat ex
 22. quæ in scholio propos. 10.
 huius lib. scripsi.

mus.

D

THEOR.

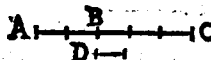
15.

9.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo utriusque ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

COMPONENTUR duæ magnitudines commensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, utriusque ipsarum A B, B C, commensurabilem esse. Sit enim ipsarum A B, B C, communis mensura D. Quonia



1. decimi

2. pron.

mia migitur D, ipsas A B, B C, metietur, metietur quoque D, totam A C, ex ipsis cõpositam. Cum ergo D, metiatur A C, & A B; erunt A C, A B, commensurabiles. Similiter cum D, metiatur A C, & B C; erunt & A C, B C, cõmensurabiles; A c propterea A C, utriusque ipsarum A B, B C, cõmensurabilis erit.

S s d iam tota A C, ex A B, B C, composita commensurabilis sit alteri ipsarum A B, B C, nempe ipsi A B. Dico & A B, B C, inter se commensurabiles esse. Sit enim D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metietur totam A C, & ablatâ A B; metietur quoque D, reliquâ B C. Quare cum D, metiatur A B, B C; cõmensurabiles erunt A B, B C, inter se. Eodem argumento ostendemus A B, B C, esse commensurabiles, si A C, ipsi B C, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

3. decimi

3. pron.

COROLLARIUM.

Hic sequitur, si tota magnitudo, ex duabus cõposita, cõmensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ cõmensurabile esse. Vt si A C, ipsi A B, sit cõmensurabilis, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, cõmensurabile. Nâ ut in posteriori parte theorematũ ostensum est, semper D, communis mensura totius A C, & ablatæ A B, cum metiatur totâ A C, & ablatâ A B, metietur, quoque reliquâ B C, ex 3. pronunciatõ. Quare cõmensurabiles sunt A C, B C. Quod est propositũ.

THEOR.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

16.

9.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo utriusque ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONENTUR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinē AC, utriusque ipsarum AB, BC, incommensurabilē esse. Si enim non est utrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri A — B — C
D — I
potest, nempe ipsi AB, sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur utraq; AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB; Eademque ratione neque ipsi BC, commensurabilis erit. Quare utriusque ipsarum AB, BC, incommensurabilis est.

3. decimi
3. pron.

SED, iā tota AC, cōposita ex AB, BC, incommensurabilis sit uni ipsarū cōponentium, nempe ipsi AB. Dico quoque AB, BC, incommensurabiles esse. Si enim sint cōmensurabiles, erit quoque tota AC, utriusque ipsarū AB, BC, cōmensurabilis. Quod est absurdū. Ponitur enim AC, alteri ipsarū, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo cōmensurabiles sunt AB, BC. Eodē argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

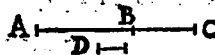
16. decimi.

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reli-

D 2 quæ

quæ incommensurabilem esse. Nempe si $A C$, incommensurabilis sit ipsi $A B$, esse quoque eandem $A C$, reliquæ $B C$, incommensurabilem. Si enim $A C$, ipsi $B C$, foret commensurabilis, esset quoque $A C$, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ $A B$, commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo $A C$, ipsi $B C$, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.



S C H O L I O N. I.

P E R S P I C I V M est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendus esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad utriusque propositionis demonstrationem communis mensura D , &c. quam quidem solum linea longitudine inter se commensurabiles habent, ut ex defn. apparet.

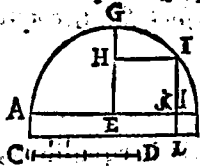
L E M M A I.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

Ad rectam $A B$, applicetur parallelogrammum $A D$, deficiens figura quadrata $B D$. Dico parallelogrammum $A D$, æquale esse rectangulo sub segmentis $A C, C B$, comprehenso. Cum enim $B D$, quadratum sit, erit angulus $A C D$, rectus. Parallelogrammum igitur rectangulum est $A D$, contentum sub $A C, C D$, rectis. Quare cum $C D$, æqualis sit rectæ $C B$, ob quadratum $B D$; continebitur idem parallelogrammum rectangulum $A D$, sub segmentis $A C$,



applicatum ad rectam AB , deficiens figura quadrata BL , aequale esse quartae parti quadrati rectae CD .



17. sexti.
34. primi

Quoniam KI , media proportionalis est inter AK, KB , ut in scholio propos. 13. lib. 6. tra didimus, erit rectangulum sub AK, KB , hoc est, rectangulum AL , aequale quadrato ex KI , hoc est, quadrato ex EH : (est enim KI , ipsi EH , aequalis, ob parallelogrammum EI ,) hoc est, quadrato ex CF : Est autem quadratum ex C, F , quarta pars quadrati ex CD ; quod quadratum ex CD , per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex C, F . Igitur parallelogrammum AL , ad rectam AB , applicatum deficiensq; quadrato BL , aequale est quarta parti quadrati ex CD , descripti. Quod est propositum.

SCHOLIUM.

Ex hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, aequale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

SIT enim recta data AB , & rectilineum quodcunque, cui aequale ponatur quadratum ex CF , nō maius quam quadratum ex dimidia AE , ita ut latus CF , non maius sit latere AE . Educta ergo ad AB , perpendiculari EG , sit EH , aequalis ipsi CF . Deinde acta HI , parallela ipsi AB , demittatur IK , perpendicularis ad AB . Quibus peractis ostendemus, ut prius, rectangulum sub partibus AK, KB , aequale esse quadrato ex IK ,
hoc

hoc est, quadrato ex CF , atque adeo & rectilineo dato, qui aequale est positum quadratum ex CF , Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF maior quam recta EG . Quare ex EG , abscindendum posset recta ipsi CF , equalis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, ut ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

Si sint duae rectae inaequales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quae ex applicatione fiunt, aequalia.

SINT duae rectae inaequales AB , & C ; & ad maiorem AB , applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud aequale quarta parti quadrati ex minore C , descripti, ita ut DB , latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmentum AD , DB , inaequalia esse. Si enim AD , DB , segmenta dicantur esse aequalia; cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB , deficiensque figura quadrata ex DB , descripta, aequale sit rectangulo sub AD , DB ; sit autem quod sub aequalibus AD , DB , quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD , dimidio ipsius AB , descriptum; atque adeo ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB , quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex C , per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartae partis quadrati ex C . Igitur quadrata rectarum ex AB , et C , aequalia sunt, atque rectae AB , et C , aequales.

Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD , DB . Quod est propositum.

Hoc facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem, EH , æqualis dimidiata parti ipsius CD , nempe ipsi CF , ductaque HI , parallela ipsi AB , & tandem demissa perpendicularis IK , ut partes factæ ex applicatione sint AK , KB ; manifestum est AK , KB , segmenta esse inæqualia, cum AB , in E , secta sit bisariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

17.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

13.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale pa-

rallelo-

rallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

S I N T. duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B, quartæ autem parti quadrati ex minori C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum deficiens figura quadrata, faciatque segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse quam C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis.

A — F — E — D — B

Quoniam per 3. lemma præceden

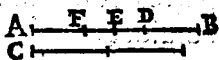
C
tis propos. A D, maior est, quam D B; diuidatur A B, bisariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cum totæ E A, E B, æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D, erunt & reliquæ A F, B D, æquales. Et quia recta A B, diuisa est bisariam in E, & non bisariam in D; erit rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadruplum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B. Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cum F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B. (quod quadratum ex A B, quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus potest quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles; erit quoque tota A B, parti D B, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi D B, composita ex D B, A F, longitudine commensurabilis: (quod composita ex D B, A F, dupla sit ipsius D B) Igitur cum utraque A B, & composita ex D B, A F, longitudine

secundi

16. decimi.

12. decimi.

dine sit cōmmensurabilis ipsi DB , erunt quoque AB , & $c\delta$.
posita ex DB , AF , longitudine inter se cōmmensurabiles;



Ac propterea cum AB , composita
ex AE , ED , tanquam una, & ex
 ED , commensurabilis sit longitu-

Sed iam AB, plus possit quam C, quadrato lineæ. sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine, esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta A B, ipsi FD, longitudine commensurabilis. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquã una, cõmensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem A B, longitudine cõmensurabilis reliquæ compositæ ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autẽ & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cum utraq; AB, DB, longitudine sit commensurabilis compositæ ex AF, DB; erunt quoque AB, DB, longitudine inter se commensurabiles: Atque adeo cũ tota A B, composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine ipsi DB; erunt ipsæ A D, DB, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

12. decimi.

16. decimi.

18.

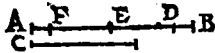
14.

THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in

in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat ; maior tanto plus poterit, quam minor, quātum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis . Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratū rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod sit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficientis figura quadrata ; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet .

SINT duæ rectæ inæquales AB , & C , quarū maior AB ; quartæ autem parti quadrati ex C , minori descripti applicetur ad AB , per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficientis figura quadrata, quod faciat in recta AB , partes AD , DB , longitudine incommensurabiles . Di-



co AB , plus posse quam C , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis . Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus AB , plus posse quam C , quadrato rectæ FD . Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A , longitudine esse incommensurabilem . Quoniam rectæ AD , DB , ponuntur longitudine incommensurabiles ; erit quoque tota AB , parti DB , longitudine incommensurabilis . Sed DB , longitudine commensurabilis est compositæ ex DB , AF , cum hæc illius sit dupla . Igitur cum duarum linearum commensurabilium DB , & quæ componitur ex DB , AF , ipsa DB , longitudine sit incommensurabilis rectæ AB : erit quoque reliqua composita ex DB , AF , eidem AB , longitudine incommensurabilis : Ac propterea cum AB , composita ex AF , DB , tanquam una, & ex FD , incommensurabilis sit longitudine compositæ ex AF , DB , erit eadem AB , per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ FD , longitudi-

17. decimi.

14. decimi.

ne

ne incommensurabilis. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi incommensurabilis.

I A M uero A B, plus possit quam C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati

ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B,

partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus

ut prius, rectam A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus posse, quam C, quadrato

rectæ longitudine sibi incommensurabilis, erit A B, ipsi F D incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota A B,

composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam una, longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ compositæ ex A F,

D B, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cum illa huius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur, & D B,

ipsa composita ex A F, D B, longitudine incommensurabilis sit rectæ A B; erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommensurabilis; Ac proinde cum tota A B, composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, longitudine;

erunt & ipsæ A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

14. decimi

17. decimi

SCHOLIUM I.

EGIT hætenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA I.

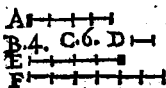
QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles.

rabiles esse, potentia uero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si exposita Rationali aliqua linea cōmensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem uocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si uero exposita Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si exposita Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

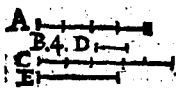
LEMMA II.

EX PROCLIO. Rationales uocantur eas lineas, quæ exposita Rationali uel longitudine & potentia commensurabiles sunt, uel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem exposita Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales, commensurabiles, inquam, inter se uel longitudine & potentia, uel potentia solum. Ex si quidē longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se cōmensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si uero potentia inter se solum sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

ITAQUE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera aequalis est expōitæ Rationali; ac proinde utraque Rationali commensurabilis: quoque longitudine: Aut neutra Rationali expōitæ aequalis est, longitudine tamen ei utraque est commensurabilis: Aut denique utraque expōitæ Rationali commensurabilis est solum potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expōitæ Rationalis A , diuisa in quatuor partes, quot nimirum unitates sunt in numero B . Sumpto deinde quolibet alio numero C , sit D , recta vna partium rectæ A ; & quoties D , metitur lineam A , toties metiatur quandam aliam E . Item quoties unitas est in C , toties eadem D , metiatur quampiam aliam lineam F . Quoniam igitur A , & E , componuntur ex partibus multitudine equalibus; quæ quidem magnitudine æquales sunt ipsi D ; ipsæ æquales erunt. Rursus quia D , metitur omnes tres A , E , & F , erunt omnes tres A , E , & F , longitudine commensurabiles. Quare E , & F , Rationali A , commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensa longitudine inter se commensurabiles, cum habeant D , communem mensuram. Inueniunt ergo sunt duæ Rationales E , F , longitudine cōmensurabiles & inter se, & expōitæ Rationali A , & quarū una, nempe E , æqualis est Rationali expōitæ A .



I AM uero D , metiatur duas lineas quasdam C , E , per duos numeros F , G , quorum neuter idem sit, quæ B , ita ut utraque linea C , & E , inæqualis sit ipsi A . Erunt igitur ut prius, tres rectæ A , C , E , mensuram habentes communem D , longitudine commensurabiles. Quare C , E , Rationali A , longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inueniuntur erunt duæ Rationales C , E , longitudine commensurabiles & inter se, & expōitæ Rationali A ,

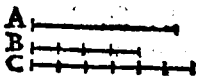


F , 5. G , 3.

li A ,

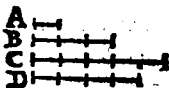
li A , quarum neutra aequalis est Rationali exposita A .

POSTREMO exposita Rationali A , inueniatur recta B , longitudine tantum incommensurabilis, qua secetur in quos-
cunque partes aequales, & sumatur C , composita ex alijs quocumque partibus, qua magnitudine aequales sint partibus rectae B . Quo facto, erunt B , & C , longitudine



commensurabiles. Dico easdem exposita Rationali A , potentia solum esse commensurabiles. Quoniam A , B , potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A , quadrato ex B , commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B , commensurabile quadratum ex C , quod B , C , longitudine sint commensurabiles, atque adeo, & potentia. Igitur quadrata rectarum A , & C , commensurabilia quaeque inter se sunt. Quare C , ipsa A , potentia est commensurabilis. Ex quibus duarum rectarum B , C , longitudine commensurabilium B , est ipsa A , longitudine incommensurabilis; erit quoque reliqua C , eidem A , longitudine incommensurabilis. Est ergo C , solum potentia ipsi A , commensurabilis. Et quia B , & C , Rationali exposita A , potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuenta erunt duae Rationales B , C , longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia uero tantum commensurabiles expositae Rationali A . Quod est propositum.

QUOD si quis optet inuenire quocunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mensura quantus A , componantur quotlibet lineae B , C , D , ex tot partibus ipsi A , aequalibus, quot sunt unitates in totidem numeris inaequalibus E , F , G . Nam lineae B , C , D , habentes communem mensuram A , longitudine commensurabiles erunt.



$E, 3.$
 $F, 5.$
 $G, 4.$

CERTUM & omnes lineas Rationales, non solum exposita Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles, facile hoc modo demonstrabimus. Quoniam Rationales lineae sunt, quae exposita Rationali sunt commensurabiles uel longitudine, & potentia, uel potentia tantum; quae autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est,

Ration-

1. decimi.

2. decimi.

4. decimi.

6. defin.

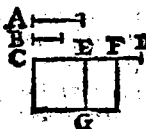
12. decimi.

Rationales lineas quasunque inter se commensurabiles esse.

L E M M A . III.

Si sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod sit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratū ex prima.

S I N T duæ rectæ A, & B. Dico esse ut A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque linea recta CD, abscindatur CE, ipsi A, æqualis, & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum sub CE, & EF, hoc est, sub A, & B. Quo-



1. sexii.

niam igitur est ut CE, ad EF, hoc est, ut A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, ut quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.

EODEM modo erit, ut B, ad A, ita rectangulū FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

L E M M A . IIII.

S P A T I U M Rationali spatium commensurable, & ipsum Rationale est.

S I T spatium A, commensurable Rationali spa-

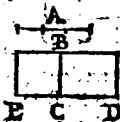
tio B. Dico & A, Rationale esse. Sit C, quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, uel irrationalia, quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quoniā igitur B, Rationale est, erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cum commensurabilia sint ipsi B, inter se quoque commensurabilia erunt; at proinde A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea exposita descripto commensurabile, Rationale est. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.

SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulum B D, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus B C, C D, secundum aliquem prædictorum modorum (hoc est, secundum aliquem trium modorum, quos in scholio. antecedentis propos. explicuimus; ita ut vel altera ipsarum B C, C D, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei utraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantum.) Dico B D, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solum; erit quoque quadratum B E, ex B C, descriptum quadrato ex A, commensurabile: Est autem quadra-



E tum

8. defn.
9. defn.

8. sexti.
10. decimi.

20.

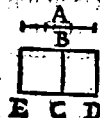
16.

tum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. Igitur & B E, illi commensurabile, Rationale est. Quia vero B C, hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine commensurabiles.) & est vt E C, ad C D, ita E B, ad B D; erunt quoq; E B, B D, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. B D, Rationali B E, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

Si rursus exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propos. precedentis exposuimus, hoc est, siue B C, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis ta-



men ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur ex B C, quadratum B E; quod similiter, vt in

antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: Est autem vt B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur, & B C, C D, commensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi B C, commensurabilis longitudine: sed & Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atq; idcirco Rationali expositæ A, com-

9. defn.
12. decimi.
1. sexti.

6. defn.

mensu-

incommensurabilis sit, ut in scholio propoſ. 2. huius lib. demonſtrauiſimus. Quare latitudo CD , Rationalis eſt, & longitudine commensurabilis ipſi BC . Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

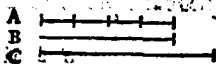
POSSIT recta A , ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A , æquale ſit ſpatio cuiuspiam Irrationaliſ. Dico A , Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis, erit eius quæ A quadratum Rationale quoque, ut in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A , Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

HOC idem conſtat ex definitione 11. huius lib. ubi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, uocantur Irrationales.

LEMMA. II.

DUAS rectas Rationales potentia ſolum commensurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tantum inter ſe commensurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ



Rationali, aut neutra. Prioris generis lineæ ſita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A , cui æqualis ſumatur B . Deinde ipſi B , inueniatur C , longitudine tantum incommensurabilis, ſeu (quod idem eſt)

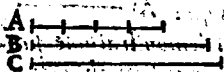
E 2 poten-

1. decimi.

potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt; (B, quidem, quod ei sit equalis; at C, ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum commensurabilis ipsi B, atque adeo ipsi A.) Rationales erunt B, & C. Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuenta ergo sunt due Rationales B, C, potentia tantum commensurabiles, quarum altera, nempe B, exposita Rationali A, equalis est.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus exposita Rationalis A, cui

11. decimi.



longitudine tantum incommensurabilis inueniatur B; & huius rursus longitudine tantum incommensurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, ut in scholio propof. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare eum utraque B, C, exposita Rationali A, sit potentia commensurabilis; erunt B, C, Rationales. Inuenta ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles.

6. defn.

SCHOLIUM.

QVOD si inueniendi sint quotcumque lineae Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

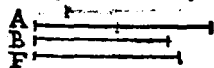
SUMAMUS per ea, quae in scholio propof. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineae Rationales quæruntur.

tur, nempe, A, B, C, D . Deinde sumpta linea Rationali E ,
fiat ut A , ad B , ita quadratum ex E , ad quadratum ex F , ut in
coroll. propof. 6. huius lib. ostendimus. Item ut B , ad C , ita
quadratum ex F , ad qua- $A, 5$. E —————
dratum ex G , & deniq; $B, 7$. F —————
ut C , ad D , ita quadra- $C, 3$. G —————
tum ex G , ad quadratum $D, 2$. H —————

ex H . Dico rectas E, F, G, H , Rationales esse, & potentia tan-
tum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint,
manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem ha-
beant, quam numeri A, B, C, D , (nempe quadratum ex E , ad
quadratum ex F , ut numerus A , ad numerum B , ex constru-
ctione; similiterq; quadratum ex F , ad quadratum ex G , ut B ,
ad C ; & quadratum ex G , ad quadratum ex H , ut C , ad D . At
vero ex aequo quadratum ex E , ad quadratum ex G , ut A , ad
 C ; similiterque quadratum ex E , ad quadratum ex H , ut
 A , ad D ; & denique quadratum ex F , ad quadratum ex
 H , ut B , ad D .) erunt ipsa inter se commensurabilia; ac pro-
pterea & recte ipse potentia saltem commensurabiles. Existen-
te ergo E , Rationali, erunt & reliqua F, G, H , Rationales.
Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, id osten-
demus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt nume-
ris primis A, B, C, D : numeri autem primi proportionem non
habent, quam quadrati numeri, ut ad finem lib. 8. docuimus;
non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H , proportio-
nem, quam numeri quadrati. Quare recte F, G, H , longitu-
dine incommensurabiles sunt: Offensa sunt autem Rationales,
& potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & poten-
tia tantum commensurabiles. Quod est propositum.

Q V O D si propositis quocunque Rationalibus potentia so-
lum commensurabilibus, invenienda sit adhuc alia, qua om-
nibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiat id hoc mo-
do. Sint proposita duae Ra- A ————— $C, 10$.
tionales potentia tantum B ————— $D, 6$.
commensurabiles A, B , E ————— $E, 7$.
quarum quadrata propor-
tionem habeant, quam numerus C , ad numerum D : Sumpto
autem alio numero, qui ad quemlibet ipsorum C, D primus sit;
(Invenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur pri-

mus, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur.) fiat ut D, ad E, ita quadratum linea B, ad quadratum linea F, per coroll. prop. 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsi A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit,



C, 16. ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, E, 7. saltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, commensurabilia sint.

6. decimi.

9. decimi.

Cum ergo proportio D, ad E, non sit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, ut ad finem lib. 8. ostendimus, quod D, & E, sint inter se primi; erunt rectæ B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erant A, & F, potentia solum commensurabiles. Nam ex aequo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, ut C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.

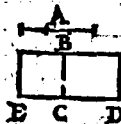
21.

19.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVO D sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT exposita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum sub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modum, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali expositæ A, siue non.)



Dico rectangulum B D, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi B D, æquale est, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, ut ex B C, quadratum B B, quod

quod erit Rationale, ut in demonstratione propos. 20. diximus. Et quoniam est ut EC, hoc est, BC, ad CD, ut BE, ad BD: Est autem BC, ipsi CD, longitudine incommensurabilis, ex hypothese; erit ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipsi BD, incommensurabile. Quare cum BE, commenturabile sit quadrato ex Rationali exposita A: Sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile; erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eadem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationali expositæ incommensurabile existens, Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.

VOCATUR autem hæc linea potens ipsum BD, Media; propterea quod media proportionalis sit inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

ITAQUE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latius ipseus, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, qua Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se incommensurabiles. Vel quæ potest rectangulo sub duabus Rationalibus potenteria tantum inter se commensurabilibus cõsentire. Nã sola hac linea Media hoc loco appellatur.

UT autem recte hoc loco monet Campanus, nõ solũ recta potens rectangulo Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potenteria tantum commensurabilibus cõsentire, Irrationalis est, vocaturq; Media: Verũ etiã quadratum ipseus, vel rectangulum illud Mediũ diciũ, quia medio loco proportionale est inter quadrata

1. sexti.

9. defn.

14. decimi.

10. defn.

17. sexti.

87. sexti.

illarum rectarum Rationalium potentia subum contentenfurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineae sine continua proportionales, quales sunt BC , & recta irrationalis, quae Media dicitur, & CD erunt quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, ut in scholio propof. 2. lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum proportionale est inter quadrata rectarum BC , CD , ideoque Medium appellari potest.

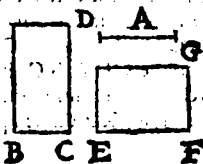
Hoc autem non ita intelligas, ut putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD . Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, ut ex propof. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, ut ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuersae tamen omne spatium Medium aequale est alteri cuiuspiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

Vnde Medium describi sic poterit, ut dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuiuspiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehenso aequale est, ita ut ipsum possit linea recta, quae Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus traucari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt quae linea Rationales potentia tantum commensurabiles, ut in scholio sequentis theorematibus ostendemus.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis B C, siue ea sit exposita, siue exposita commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; appliceturq; ad B C, rectangulū BD, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatq; latitudinem C D. Dico C D, Rationalem esse; & ipsi B C, longitudine incommensurabilem. Quoniam A, Media est, ipsa poterit rectangulum sub duobus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus inter se contentum, alius non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulū E G, sub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et



quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum B D; æqualia erunt B D, & E G, lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit ut B C, ad E F, ita F G, ad ad C D; Ac propterea quoque ut quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratum ex B C, commensurabile est quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F, ponantur Rationales; atq; adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D; proptereaq; & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cū F G, Rationalis exposita Rationali sit commensurabilis, si ipsa nō sit exposita Rationalis, erit quoq; C D, expositæ Rationali commensurabilis, ut ostendimus in scholio propos. 1. a. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quo-

niam

22.

20.

45. primi

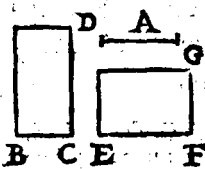
14. sexti.

22. sexti.

10. decimi.

niam E F, F G, Rationales sunt potentia tantum commen-
surabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt
E F, ad F G, ita quadratum ex E F, ad rectangulum E G, sub
E F, F B, contentum, ex lemma 3. propof. 19. huius lib. erit

10. decimi.



quadratum ex E F, incommensu-
rabile rectangulo E G, atq; adeo
rectangulo B D, quod huic æqua-
le est. Atqui quadratum ex E F,
commensurabile est quadrato ex
C D. (quod E F, C D, Rationales
sunt, atq; idcirco saltem potentia
commensurabiles.) Igitur cum

quadratum ex C D, commensurabile sit quadrato ex
E F; at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incom-

13. decimi.

mensurabile; incommensurabilia erunt quadratū ex C D,
& rectangulum B D. Est autem ex lemma 3. propof. 19.
huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt re-

10. decimi.

ctā C D, ad rectā B C. Incommensurabiles ergo sunt lon-
gitudine C D, & B C. Rationalis ergo est C D, & Rationali
B C, longitudine incommensurabilis. Quamobrē, quod a Me-
dia sit, ad Rationale applicatū, &c. Quod demonstrandū
erat.

S C H O L I O N.

11. sexti.

FACILIVS quam ex propof. 45. lib. 1. applicabimus
ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale si ipsis B C, & A,
sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim B C, A,
& C D, proportionales sint; erit rectangulū B D, sub extremo
B C, C D, contentum æquale quadrato medio proportionalis A.

17. sexti.

H A C arte ritendum erit & in sequentibus, quando ad ali-
quam rectam applicandum eris rectangulum æquale quadra-
to cuiuspiam linea recte.

PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Mediū,
hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuiāz
alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia
santum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationale
lineam applicetur æquale rectangulum, facies id, per hoc theo-
rema, alterum latus Rationale, longitudine linea Rationa-
li incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Me-
dio

dio

dio aequale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia so-
lum commensurabilibus contentum. Atque hoc modo quod-
cunque Medium reduci poteris ad Medium contentum sub
duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

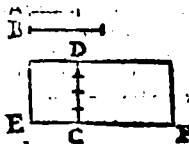
23.

21.

MEDIAE cōmensurabilis, Media est.

Si τ Medie A, recta B, commensurabilis siue longitudi-
ne & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam
esse. Exposita enim sit Rationalis C D, ad quam applicetur

rectangulum D E, æquale quadra-
to ex A, Media. Quoniam igitur
D E, Medium ad Rationalem C D,
applicatum, facit C E, latitudinē;
erit C E, Rationalis ipsi C D, lon-
gitudine incommensurabilis. Rur-
sus ad C D, Rationalem applicetur



rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia re-
cta A, B, ponitur commensurabilis, erunt quoque eo-
rum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F,
commensurabilia. Est autem ut D E, ad D F, ita recta E C,
ad rectam C F. Igitur E C, C F, longitudine sunt cōmmen-
surabiles. Sed & C, ostensa est Rationalis, & longitudine
ipsi C D, incommensurabilis. Igitur & C F, longitudine
eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationa-
lis sit, propterea quod Rationali expositæ C D, sit cōmmen-
surabilis; (Nam cum E C, C F, sint longitudine ostensæ
cōmmensurabiles, & E C, ipsi C D, cōmmensurabilis factæ
potentia, quod Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, cōm-
mensurabilis potentia, ex ijs, quæ in scholio propos. 12.
huius lib. scripsimus.) erunt C D, C F, Rationales poten-
tia tantum commensurabiles; Ac proinde recta B,

45. primi.

23. decimi.

45. primi.

1. sexti.

10. decimi.

14. decimi.

potens rectangulum D F, sub Rationalibus po-
tentia tantum cōmmensurabilibus C D, C F,

22. decimi.

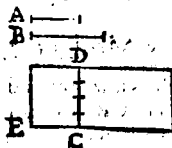
Media est. Medie igitur cōmmensura-
bilis, Media est. Quod osten-
dendum erat.

COROL.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoniam Medium. Eademque ratio est in ceteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

Si r. spatium, D F, spatio Medio D E, commensurabile. Dico



& D F, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cum D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quae Media dicitur, ut in scholio propol. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipsum D F, Quoniam D E, D F, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis aequalia, commensurabilia. Quare

A, B, recta potentia saltem sunt commensurabiles; Ac idcirco existente A, Media; erit & B, illi commensurabilis Media, ut in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, ut in scholio propol. 22. huius lib. docuimus.

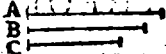
L E M M A. I.

QVEMADMODVM autem in Lemmate 1. propol. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediae longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; Vniuersae enim quae longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si uero recta quaedam linea Mediae potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Media rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEM.

LEMMA. II.

Duas rectas Medias longitudine commen-
surabiles; Item duas potentia tantum commen-
surabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inuoniantur due
recte commensurabiles B, C; illa quidem longitudine,
has uero potentia tantum; erit 
utraq; B, C, Media A, com-
mensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitu-
dine commensurabiles; & A, C, potentia tantum;
erunt inuenta A, B, Media longitudine commensura-
biles; & A, C, Media potentia solum commensura-
biles. Quod est propositum.

24. decima

SEHOLLON.

QUAMVIS omnis linea recta Media commensurabilis,
Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Media est com-
mensurabilis; cum due Media dari possint prorsus incommen-
surabiles, longitudine uidelicet, & potentia, ut ex propof. 36.
huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, qua nam via in-
uenienda sint due Media longitudine & potentia incommensu-
rabiles.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QUOD sub Medijs longitudine com-
mensurabilibus rectis lineis continetur re-
ctangulum, Medium est.

CONTINUATUR rectangulum AD, sub Medijs
A C, CD, longitudine commensurabilibus. Dico AD, Me-
dium

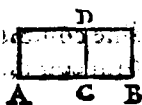
24.

23.

1. sexti

10. decimi

dium esse. Describatur ex CB , Media quadratū BD , quod erit Mediū. Et quoniam est ut AC , ad CB , ita AD , ad DB :



Sunt autem AC, CB , hoc est, AC, CD , longitudine cōmensurabiles, erunt AD, DB , cōmensurabiles. Quare spatium AD, DB , cōmensurabile, Mediū est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Medijs longitudine cōmensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

25.

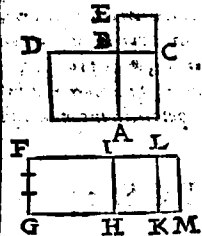
23.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

Q U O D sub Medijs potentia tantum cōmensurabilibus rectis lineis cōtinetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

S i rectangulum AC , comprehensum sub Medijs AB, BC , potentia tantum cōmensurabilibus. Dico AC , esse vel Rationale, vel Medium. Describatur ex AB, BC , quadrata AD, CE , quæ Media erunt, ut in scholio propos. 22. huius lib docuimus; cum rectæ AB, BC , Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG , ad quam applicetur

45. primi.



rectangulum FH , quadrato AD , ex AB , descripto æquale; & ad HI , rectangulum IK , rectangulo AC , æquale; & denique ad KL , rectangulum LM , æquale quadrato CE , ex BC , descripto; eritque totum FM , unum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib 1. est ostensum. Quia vero AD, CE , Media sunt, erunt & FH, LM , illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL ,

34. primi.

23. decimi.

(est enim & KL , Rationali FG , æqualis, ob parallelogrammum FK , Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM , erunt rectæ GH, KM , Rationales, ipsi FG , seu KL , longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC , potentia inter se sunt cōmensurabiles, erunt & earū quadrata

drata A D, C E, atque adeo ipsis equalia rectangula F H, L M, commensurabilia: Vt autem F H, ad L M, ita est recta G H, ad K M. Igitur G H, K M, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare G H, K M Rationales ostense, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali uero F G, solum commensurabiles potentia, cum ei ostense sint longitudine incommensurabiles: Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, K M, Rationale est. Et quoniam est, ut D B, ad B C, ita A B, ad B E; (quod D B, B C, ipsis A B, B E, sint æquales, utraq; utrique.) & ut D B, ad B C, ita A D, ad A C; & ut A B, ad B E, ita A C, ad C E; erit quoq; ut A D, ad A C, ita A C, ad C E; atq; adeo A D, A C, C E, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia F H, H L, L M, proportionalia erunt: Habent autem rectæ G H, H K, K M, eandem proportionem, quas rectangula F H, H L, L M. Igitur & rectæ G H, H K, K M, proportionales sunt, proptereaq; rectangulum sub G H, K M, quadrato ex H K, æquale est. Est autem rectangulum sub G H, K M, ostensum Rationale. Igitur & quadratū ex H K, Rationale est; ideoq; & recta H K, Rationalis erit; & ob hoc ipsi F G, Rationali exposita, hoc est, ipsi H I, commensurabilis uel longitudine, uel solū potētia: Et si qui dē H K, ipsi H I, longitudine sit commensurabilis; rectangulū H L, sub Rationalibus H I, H K, longitudine commensurabilibus contentū, hoc est, A C, illi æquale, erit Rationale. Si uero H K, ipsi H I, potētia solū commensurabilis sit; erit rectangulū H L, sub Rationalibus H I, H K, potētia tantū commensurabilibus contentū, hoc est, A C, illi æquale, Mediū. Est ergo A C, rectangulū sub Medijs A B, B C, potētia tantū commensurabilibus contentū, uel Rationale, uel Medium. Quocirca, quod sub Medijs potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

FACILIVS quā ex 45. propof. lib. 1. applicabim⁹ ad H I, rectangulū ipsi A C, æquale, si tribus rectis H I, A B, B C, quarta proportionalis sumatur pro latere H K. Nā rectangulū sub extremis H I, H K, æquale erit rectangulo sub medijs A B, B C.

HAC eadē arte uenietur in sequētib⁹, quādo ad aliquā rectā applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

Q V O.

1. sexti
10. decimi.

20. decimi.

1. sexti.

1. sexti

17. sexti

6. defin.

20. decimi.

22. decimi.

12. sexti.

16. sexti.

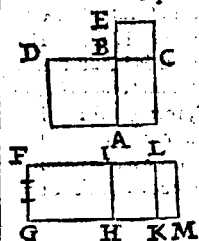
Q V O N I A M vero in hac theoremate demonstratur, re-
ctangulum contentum sub duabus rectis Medijs potentia tan-
tum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium; do-
cebit Euclides propof. 28. quanam ratione inveniendæ sint due
Mediæ potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale
comprehendant: Propof. vero 29. duas Medias potestatem solum
commensurabiles inquiret, quæ spatium Medium contineant.

20. decimi. I T A Q V B. habemus ex his, rectangulum contentum sub
duabus Rationalibus longitudine comensurabilibus esse Ratio-
22. decimi. nales; Subduabus vero Rationalibus potentia tantum commensura-
bilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellaturq;
Medium; & rectam, quæ ipsum potest. Medium. Hæc res ex
demonstratis constat, rectangulum comprehensum sub duabus
25. decimi. Medijs longitudine commensurabilibus esse Medium: Rectan-
gulum autem sub duabus Medijs potentia solum commensura-
26. decimi. bilibus comprehensum esse vel Rationale, vel Medium.

Q V A D S i quis roget, qualenam rectangulum sit illud,
quod sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensu-
rabilibus constituitur: Respondemus illud nec Rationale esse,
nec Medium; sed tertium quoddam genus constituitur; nempe
a quale esse rectangula, quod continetur sub linea Rationali,
& Irrationali, quæ Media appellatur.

S i enim rectangulum A C, com-
prehensum sub duabus Medijs A B, B C,
longitudine & potentia incommensura-
bilibus. Dico A C, neque Rationale ef-
se, neque Medium, &c. Constructis
eisdem, ut in theoremate, ostendemus
similiter, rectas G H, K M, Rationa-
les esse, & ipsæ F G, longitudine in-
commensurabiles. Et quia rectæ A B,
B C, ponuntur incommensurabiles

longitudine & potentia; erunt & earum quadrata A D,
C E, atque adeo ipsi aqualia rectangula F H, L M,
incommensurabilia: Vt autem F H, ad L M, ita est recta
G H, ad rectam K M. Igitur rectæ G H, K M, longitudine
inter se sunt incommensurabiles. Quare G H, K M, offensa
Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles;
Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, K M, Irrationale
est,



1. sexto.

10. decimi.

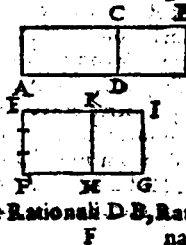
22. decimi.

est, quod Medium appollatur, & recta ipsum potens, Irrationalis, quæ dicitur Medix. Potest autem rectangulum sub ipso GH , KM , recta HK : (Nam, ut prius, ostendimus tres GH , HK , KM , esse proportionales) Igitur HK , Irrationalis est, & Media. Quare IK , Rationale non est: si enim Rationale esset, faceret ipsum ad Rationalem HI , applicatum latitudinem HK , Rationalem, & ipse HI , longitudine commensurabilem. Quod est absurdum. ostensa enim est HK , Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK , Medium est, Si enim esset Medium, faceret ipsum applicatum ad Rationalem HI , latitudinem HK , Rationalem, & ipse HI , longitudine incommensurabilem. quod est absurdum. ostensa est enim HK , Irrationalis, & Media. Itaque cum IK , neque Rationale sit, neque Medium; necessario neque AC , illi æquale, Rationale erit, neque Medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe æquale erit ipsi IK , quod sub Rationali, & Media, continetur, cum HI , Rationalis sit, & HK , ostensa Media. Ex quibus efficitur præterquam quæ sit spatium sub duobus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus (quales ponuntur AB , BC , comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, continetur. Quod est propositum.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIUM non superat Medium Rationali.

SUPERET Medium AB , Medium AC , rectangulo DB . Dico DB , non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB , Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF , ad ipsam applicetur rectangulum EG , Medio AB , æquale; & Medio AC , rectangulum EH , æquale, ut sit reliquum HI , Rationali DB , æquale. Erunt igitur EG , EH , æqualia Medijs AB , AC , Media; & HI , æquale Rationali DB , Rationale.



46. primi

23. *decimi.*

34. *primi*
21. *decimi.*

14. *decimi.*

10. *decimi*

16. *decimi.*

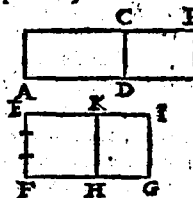
17. *decimi.*

4. *secundi.*

10. *defin.*

11. *defin.*

nale. Quoniam ergo Media E G, E H, ad Rationalem E F, sunt applicata; erunt rectæ F G, F H, Rationales; & ipsi E F, incommensurabiles longitudine. Rursus, quia



Rationale H I, applicatum est ad Rationalem H K; (est enim recta H K, Rationali E F, æqualis) erit recta H G, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabiles. Quare cum H G, E F, longitudine sint commensurabiles; & E F, ipsi F H, longitudine incommensurabiles; ut est

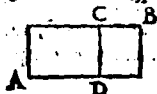
ostensum; erit & H G, eidem F H, longitudine incommensurabilis. Est autem ut F H, ad H G, ita quadratum ex F H, ad rectangulum sub F H, H G, ex tertio lemmate propos. 9. huius lib. Igitur quadratum ex F H, incommensurabile est rectangulo sub F H, H G. Sed quadrato ex F H, commensurabile est quadratum ex H G; (quod sine ambo ex lineis Rationalibus E H, H G, descripta) atque adeo & duo quadrata ex F H, H G, simul, quadrato ex F H, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub F H, H G, commensurabile est id, quod bis continetur sub F H, H G, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex F H, H G, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub F H, H G, bis. Quare & compositum ex quadratis rectarum F H, H G, & ex rectangulo bis sub F H, H G, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum F H, H G. At quadratis ex F H, H G, una cum rectangulo bis sub F H, H G, æquale est quadratum ex F G. Igitur & quadratum F G, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum F H, H G. Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 9. huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex F H. Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex F G, erit quadratum ex F G, Irrationales ac propterea & recta F G, Irrationalis exister. Quod est absurdum. ostensa enim est F G, Rationalis longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Non ergo D B, quo Mediū A B, superat Mediū A C, Rationale est. Quam ob rem Mediū non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Ex diffis & hoc demonstrabimus.

RATIONALIS superat Rationalem Rationalem.

RATIONALIS enim AB , superet Rationalem AC , spatio DB . Dico DB , quoque esse Rationalem. Quoniam AB , AC , Rationales sunt; erunt AB , AC , commensurabiles quadrato Rationali expositis; atque adeo & inter se commensurabiles. Quare cum totum AB , compositum ex AC , DB , commensurabile sit ipsi AC ; erit quoque idem AB , reliquo DB , commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB , Rationale. Igitur & DB , ex lemme 4. propos. 5. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.

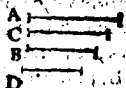


9. definit.
12. decimi.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTUR per lemme 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A , B , potentia tantum commensurabiles, inter quas media proportionalis sumatur C ; fiatque ut A , ad B , ita C , ad D . Dico C , D , esse Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam nam A , B , Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Mediū uocatur; atque adeo eū ipsum possit recta C , erit C , Media. Et quoniam est ut A , ad B , ita C , ad D ; suntque A , B , potentia tantum commensurabiles; erunt quoque C , D , solum commensurabiles potentia, ut in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. Est ergo & D , Media C , commensurabilis, Media. Quare inueniuntur Medie C , D , potentia tantum commensurabiles. Quid iam ipse

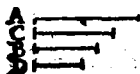


13. sexti.
12. sexti.

22. decimi.
17. sexti.

24. sexti.

fas continere Rationale. Quoniam est ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque ut C, ad B, ita B, ad D; ideoque B, media proportionalis inter C, & D, poterit rectangulum sub ipsis C, D comprehensum.



17. sexti.

Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est, Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

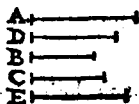
28.

PROBL. 5. PROPOS. 27.

O.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

EXPONANTUR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles; & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. Deinde fiat ut B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quoniam A, B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; erit rectangulum sub A, B, atque adeo & quadratum ex D, quod illi æquale est,



17. sexti.

18. sexti.

17. sexti.

22. decimi.

Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est ut B, ad C, ita D, ad E; sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit, erit & E, illi potentia solum commensurabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediarum sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam est ut B, ad C, ita D, ad E; & permutando ut B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque ut D, ad A, ita C, ad E. Rectangulum igitur sub D, E, æquale est ei, quod sub A, C; Est autem quod sub A, C, Rationibus potentia

24. decimi.

16. sexti.

tentia solum commensurabilibus, Irrationale, & Medium. 22. decimi.
Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo
inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ
Medium continent. Quod faciendum erat.

SCHOLIUM. I.

IN his quæ sequuntur, indigebimus hoc problemate.

Duos numeros planos similes inuenire.

SYMANTVR quatuor quicunque numeri proportiona
les A, B, C, D, ut quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplican
tes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se mul
tiplicantes faciant F. Erunt ergo E, &
F, numeri plani similes, quandoquidem
latera habent proportionalia, ut ex con
structione est manifestum.

A, 6.	C, 21.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

QUONIAM autem in lib. 9. osten
sum est, si impar numerus, vel par parem multiplices, procrea
ri numerum parem; Imparem vero, si impar multiplices im
parem; perspicuum est, quonam modo inueniri possint duo pla
ni similes, quorum uterque par sit, vel impar; Vel unus qui
dem par, aliter vero impar. Si enim latera sumpta, sint nume
ri pares, erunt eorum plani pares etiam: si autem numeri sint
impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnus latera
sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidẽ
planus, impar; horum vero par: Similiter pares erunt plani,
si quilibet habeas unum latus numerum parem, alterum vero
imparem, &c. 28. & 29. noni.

LEMMA I.

Duos numeros quadratos inuenire, ita
ut compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, quæ in scholio pro
ximo dicta sunt, duo plani similes A B, & C, quorum

24 & 26.
noni.

uterque uel par sit, uel impar. Et quoniam, siue a pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto B D, ex AB, qui

A E D B C
aequalis sit ipsi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiso bisariam in E; Dico

1. noni. numerum factum ex AB, in BD, qui quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri ED, facere quadratum. Quoniam numerus AD, bisariam est diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, una cum quadrato numeri DE, equalis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compositi faciunt quadratum, eum uidelicet, qui ex BE, gignitur. quod est propositum.

C O R O L L A R I U M.

Ex his manifestum est, quando AB, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus sit.

Q u o d si numeri sumantur AB, & C, non similes, uterq; tamē par, uel impar; inuenti erūt eodē modo duo quadrati numerorū BE, ED, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex AB, in BD, non est quadratus. Si. n. quadratus esset, numeri AB, BD, hoc est, AB, & C, plani similes essent. Quod est absurdū. ponuntur enim non similes.

2. noni.

S C H O L I O N. II.

I T A Q U E si inbeatur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus ut prius, duos planos similes, quorum uterque par, uel impar sit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, ut in proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex BE, ED,

E D, descripti sunt illi, quos iquarimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratum ex E D, numero, qui produciatur ex A B, in B D, qui etiam quadratus est.

A E D B
C

Si vero inueniendi sint duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non similes, quorum uterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, ut prius. Nam

A ... E ... D B
C

similiter ostendemus, quadratum ex B E, aequale esse quadrato ex D E, una cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare excessus quadratorum ex B E, E D, est numerus factus ex A B, in B D, qui cum non sit quadratus; (Si enim esset quadratus, essent A B, B D, plani similes. quod non ponitur) constat propositum.

Hoc posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Ut si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabis quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de ceteris.

LEMMA II.

Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

Sint duo numeri plani similes A B, & C, pares, vel impares, ut in lemma

A .. H .. I . E . F . G ... D B
C

mate precedenti, fiatque eadem constructio, ita ut rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum A B, D B, inter se,

una cum quadrato ex DH , equalis sit quadrato ex BE . Auferatur deinde ex DE , unitas EF . Erit ergo
 $A..H..I..E..F..G...D.....B$ quadratus ex
 $C.....$ DF , minor
quadrato ex
 DE , quod &
latus DF , latere DE , minus sit. Dico quadratos nu-
meros, quorum alter ex AB , in BD , alter vero ex
 DF , in se fit, compositos non lessicere numerum qua-
dratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus,
erit uel maior quadrato ex BF , uel equalis, uel mi-
nor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstra-
bimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex
 BF ; ac propterea latus ipsius maius latere BF . Erit
ergo latus ipsius uel aequale numero BE , uel maius.
(Minus enim non erit, quoniam inter numeros BE ,
 BF , sola unitate inter se distantes nullus medius est
numerus, ne unitas ipsa secetur; Eset autem dictum
latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam
 BF , minus uero quam BE .) Si dicatur aequale, ita
ut quadrato ex BE , equalis sit quadratus numerus
compositus ex quadrato, qui fit ex AB , in BD , &
ex quadrato numeri DF ; cum eidem quadrato ex
 BE , sit ostensus in precedenti lemmate equalis nume-
rus, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex
 DE ; erit, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato
ex DF , equalis ei, qui fit ex AB , in BD , una cum
quadrato ex DE . Ablato ergo communi, eo scilicet
qui fit ex AB , in BD ; erit reliquus quadratus ex
 DF , equalis reliquo quadrato ex DE ; Ideoque &
latus DF , lateri DE , aequale, pars toti. Quod est
absur-

absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex AB , in BD , alter vero ex DF , in se fit, aequale est numero BE . Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius aequale numero BI , qui maior sit, quam BE , ita ut quadrato ex BI , aequalis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex BI , latere maiori, maior est quadrato ex BE , latere minori; erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex AB , in BD , alter vero ex BF , in se fit, (cum hic compositus aequalis ponatur quadrato ex BI ,) maior quadrato ex BE . Est autem quadrato ex BE , offensus in lemmate precedenti aequalis numerus, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DE . Ablato ergo communi, qui fit ex AB , in BD ; erit reliquus quadratus ex DF , reliquo quadrato ex DE , maior; ac proinde latus DF , latere DE , maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex AB , in BD , alter vero ex DF , in se, maius est latere BE . Sed neque aequale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus, maior est quadrato ex BF .

SIT iam, si fieri potest, numerus qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , aequalis quadrato ex BF ; & ponatur numerus AH , duplus unitatis EF . Quia igitur totus AD , totius ED , duplus est, (dimisus enim est A D , in E , bisariam) & ablatas AH , ablatas unitatis EF ; erit & reliquus HD , reliqui FD , duplus, ex his, quae ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD , in E , bisariam dividitur. Quare ex 6. theorema eorum, quae ad propos. 14. lib.

lib. 9. demonstravimus, erit numerus qui fit ex HB , in BD , una cum quadrato ex DF , æqualis quadrato ex BF . Sed eidem $A \dots H \dots I \dots E \dots F \dots G \dots D \dots B$ quadrato ex $C \dots$ BF , æqualis ponitur nume

18. septimi

rus, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato DF : Igitur qui fit ex HB , in BD , una cum quadrato ex DF , æqualis est ei, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF ; & detracto communi quadrato ex DF , relinquetur, qui fit ex HB , in BD , ei qui fit ex AB , in BD , æqualis. Quare cum HB , AB , multiplicantes eundem BD , producant æquales numeros; habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB , ipsi AB , æqualis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , quadrato ex BF , æqualis.

SIT tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , minor quadrato ex BF , ac propterea & latus eius latere BF , minus, quod sit BG , ita ut qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , æqualis sit quadrato ex BG . Sumatur autem ipsius EG , duplus AI . Quoniam igitur totus AD , totius ED , duplus est, & ablati AI , ablati EG ; erit rursus & reliquus ID , reliqui GD , duplus; ac propterea ID , in G , diuidetur bisariam. Quare ex eodem theor. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus qui fit ex IB , in BD , una cum quadrato ex DG , æqualis quadrato ex BG : ponitur autem eidem quadrato ex BG , æqualis

equalis, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Igitur qui fit ex IB , in BD , una cum quadrato ex DG , equalis est ei, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Ablatis igitur quadratis ex DG , & DF , quorum qui ex DG , minor est, remanebit qui ex IB , in BD , maior eo, qui ex AB , in BD ; pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , minor quadrato ex BF . Sed neque maior est ostensus, neque equalis. Non igitur quadratus est, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Quod est propositum.

SCHOLION. III.

Ex hoc facile inueniemus duos numeros, ita ut ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma precedens inueniantur duo quadrati, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus, habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

Idem obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

29.

17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPO.

EXPONATUR linea Rationalis AB , & inveniatur ex ijs, quæ in scholio 1. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD , CE , quorum excessus DE , non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat ut



31. tercij.

47. primi

4. decimi.

24. offensi

9. decimi.

9. decimi.

CD , numerus ad numerum DE , ita quadratum ex AB , ad aliud quadratum, nempe ad id, quod ex AF ; accommodeturque AF , in semicirculo ABF , circa diametrum AB , descripto: ac denique connectatur recta FB .

Quoniam ergo angulus F , rectus est in semicirculo; erit quadratum ex AB , æquale duobus quadratis ex AF , & FB ; hoc est, recta AB , plus poterit quam AF , quadrato rectæ FB . Et quia est quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , ut numerus CD , ad numerum DE ; erunt quadrata ex AB , AF , commensurabilia; atque adeo cum quadratum ex AB , sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB , descriptum; erit & quadratum ex AF , Rationale, proptereaque & recta AF , ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB , AF , atque adeo commensurabiles saltem potentia. Quia vero quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus CD , ad non quadratum DE , proportionem habeat quam quadratus ad quadratum; alias & DE , quadratus esset, ut in Arithmeticis est demonstratum. quod non ponitur) erunt rectæ AB , AF , longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, ut ostensum est. Igitur AB , AF , Rationales sunt potentia tantum commensurabiles.

Iam uero, quoniam est ut CD , ad DE , ita quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , erit per conversionem rationis, ut quadratus numerus CD , ad quadratum numerum CE , ita quadratum ex AB , ad quadratum ex FB . (sicut enim CD , superat DE , quadrato CE , ita etiam quadratum ex AB , superat quadratum ex AF , quadrato ex FB .) Quare rectæ AB , FB , longitudine commensurabiles sunt. Invenimus ergo duas Rationales AB , AF , potentia tantum commensurabiles, ita ut maior AB , plus possit, quam minor AF .

A F, quadrato lineæ FB; sibi longitudine commensurabilis.
Quod faciendum erat.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

30.
18.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

EXPONATUR Rationalis linea A B, inveniunturque per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita ut ex illis compositus C D non sit quadratus, uel certe numerus aliquis quadratus C D, secetur in duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumvis enim horum fiat, totus C D, ad neutrum ipsorum C E, E D, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, alias secundum priorem modum, esset totus C D, etiam quadratus: iuxta posteriorem uero, quilibet ipsorum C E,



C, 144. E, 16. D C, 60. D
C..... E..... D

E D, quadratus quoque, ut in Arithmetica ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. ut C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, ut ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in semicirculo A F B, circa A B, descripto. Denique connectatur recta F B. Poterit igitur, ut in precedenti, A B, plus quam A F, quadrato rectæ F B; erantque A B, A F, Rationales potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est demonstratio, quæ in precedenti propos. Quoniam uero rursus, ut prius, est per conversionem rationis, ut C D, ad C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B: Non habet autem C D, ad C E, proportionem quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex A B, ad qua-

24. ostensi

I E

22. 23.

9. decimi.

quadratum ex FB , proportionem, quæ quadratus numerus ad numerum quadratum. Quare rectæ AB, FB , longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF , potentia tantum commensurabiles, ita ut maior AB , plus possit quam minor AF , quadrato lineæ FB , sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

Sint duæ rectæ inæquales AB, BC , in rectum constitutæ, quarum AB , maior sit. Dico esse, ut AB , ad BC , ita rectangulum sub AB, BC , ad quadratum ex BC . Describatur ex BC , quadratum BD , compleaturque rectangulum AD ; eritque rectangulum AE , sub AB, BC , contentum; quod BE , ipsi BC , sit æqualis: perspicuum autem est, esse ut AB , ad BC , ita AE , ad BD .

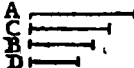
Eodem modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, ut in secunda figura est manifestum, in qua AB , minor est, quam BC .

31.
24. 25.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior plus possit quam minor,

minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudi-
ne commensurabilis.

R E P E R T A E sint duæ Rationales A, B, potentia tan-
tum commensurabiles, ita ut A maior plus possit quam B,
minor, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis;
sitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat ut A,
ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, sunt Rationa-
les potentia solum commensurabiles;
erit rectangulum sub A, B, Irrationale, &  22. *decimi.*
recta C, ipsum potens, linea Media. Et
quia est ut A, ad B, ita C, ad D; sunt au-
tem A, & B, potentia tantum commensurabiles; erunt
quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, ut in
scholio propos. 10. huius libri ostendimus. Quare D,
Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ
ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensura-
biles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim sit
ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad
D; sit autem ut A, ad C, ita C, ad B; erit quoque ut C, ad
B, ita B, ad D; Ac propterea, rectangulum sub C, & D,
æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadra-
tum ex B, Rationale Rationale sit; erit & rectangulum sub
C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C,
D, potentia tantum commensurabiles; Rationale. Quo-
niam uero est ut A, ad B, ita C, ad D: potest autē A, plus
quam B, quadrato lineæ longitudine sibi cōmensurabilis, ex
constructione; poterit quoque C, plus quam D, quadrato
lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur
duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ
Rationale continent, ita ut maior C, plus possit quam mi-
nor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensura-
bilis. Quod faciendum erat.

Q U O D si repertæ sint A, B, Rationales potentia
tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam
B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis;
reliqua autem fiant, ut prius, ostendemus eodem mo-
do, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum
commen-

30. *decimi.*

22. *decimi.*

24. *decimi.*

17. *sexti.*

15. *decimi.*

commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior C, plus possit quam minor D, quadrato linearum longitudine sibi incommensurabilis.

S C H O L I O N.

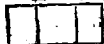
A L I I hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem brevius ac facilius idem sine ipso ostendimus, ac facile indicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

L E M M A.

S I sint tres linearum rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

S I N T tres rectæ *A B, B C, C D*, in rectum constitutæ. Dico esse, ut *A B*, ad *C D*, ita rectangulum sub *A B, B C*, ad rectangulum sub *B C, C D*. Describatur ex *B C*, quadratum *B C D E*, perficiturque rectangulum *A F*; Eruntque *A E*, contentum sub *A B, B C*, & *C F*, sub *B C, C D*; quod *B E, C D*, ipsi *B C*, æquales sint. Perspicuum autem est esse *A B*, ad *C D*, ut *A E*, ad *C F*. Quod est propositum.

E D F



A B C D

1. sexti.

32.

26.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

I N V E N I R E duas Medias potentia solum commensurabiles, quæ Medium contineant

tineant

tineant, ita ut maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

S I N T inuenta tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. Repertis duabus Rationalibus, A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, inueniatur alia B, utrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quæ in scholio propof. 21. huius lib. demonstrauimus. Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; fiatq; ut D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est ut A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: Est autem rectangulum sub A, B, æquale quadratum ex D; & rectangulum sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque ut A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed ut quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propof. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit ut A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, ut in scholio propof. 19. huius lib. ostendimus. Quia uero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectangulo sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Deniq; quia ostendimus esse ut A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solum



30. decimi.

13. sexti.

12. sexti.

17. sexti.

16. sexti.

22. decimi.

24. decimi.

22. decimi.

15. decimi.

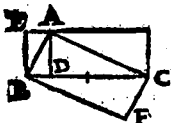
lum commensurabiles, quę Medium continent, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineę rectę longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

Q V O D si reperte fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineę sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, ut prius, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quę Medium contineant, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineę sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile appare-
re poterit ex adducta demonstratione.

L E M M A. I.

S I T triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, a quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum sub C B, B D, æquale esse quadrato ex A B: contentum autem sub B C, C D, æquale quadrato ex A C: & contentum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum denique sub B C, A D, æquale contento sub A B, A C.

16. sexti.



Q V O N I A M ex coroll. propof. 3. lib. 8. recta A B, media proportionalis est inter C B, B D; erit rectangulum sub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.

E A D E M ratione erit rectangulum sub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem co-

roll. A C, media proportionalis est inter B C, C D.

R V R S V S quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media est proportionalis, erit eodem modo.

do rectangulū sub BD, DC, æquale quadrato ex A D.

POSTREMO, quia trianacula ABC, ABD. similia sunt; erit ut BC, ad AC, ita AB, ad AD, Quare rectangulum sub BC, AD, æquale est rectangulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulū CE, contentum sub BC, AD: Item rectangulum AF, sub AB, AC, contentum. Quoniam igitur rectangulum CE, duplum est trianaculi ABC, necnon & rectangulum AF, eiūdem trianaculi est duplum; erunt inter se æqualia rectangula CE, AF. quod est propositum.

8. sexti.

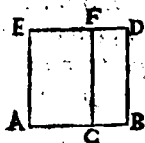
17. sexti.

41. primi

LEMMA. II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales, erit ut maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.

SECETUR recta AB, non bisariam in C, sitq; maior pars AC. Dico esse ut AC, ad CB, ita rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub AB, CB. Describatur enim ipsius AB, quadratum ABDE, ducaturq; CF, ipsi AE, parallela; eritq; AF, contentum sub AB, AC; & CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, æquales sint. Quoniam igitur est ut AC, ad CB, ita AF, ad CD; constat propositū.



1. sexti.

EADEM ratione erit, ut minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales , minor autem secetur bifariam ; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli ; quod sub maiori lineâ & dimidia parte minoris continetur .

S I N T duæ rectæ inæquales AB, BC , angulum rectum constituentes ABC , seceturq; minor BC , bifariam in D . Dico rectangulum sub AB, BC , duplum esse rectangulum sub AB, BD . Complectatur rectangulum AC , sub AB, BC ; ducaturq; DE , ipsi AB , parallela; eritq; BE , contentum sub AB , &



BD , dimidia minoris . Quoniam igitur AC , ipsius BE , duplum est, quod & basis BC , dupla sit basis BD ; constat propositum .

E O D E M modo , si BC , secta bifariam , sit maior , erit quod sub AB, BC , continetur, duplum eius, quod continetur sub AB , minore & BD , dimidia maioris , ut ex secunda figura apparet .

33.
27.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium .

RESPERIANTUR duæ Rationales A B, C D, potentia solum commensurabiles, ita ut maior A B, plus possit, quam minor C D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; sicceturq; C D, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex C B, hoc est, quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud, quod sub A F, F B, continetur. Postremo descripto semicirculo A G B, circa A B, terigatur F G, ad A B, perpendicularis, connectanturq; rectæ A G, G B. Quoniam igitur A B, plus potest, quàm C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumq; est ad A B, rectangulum sub A F, F B, æquale quartæ parti quadrati ex C D, deficiens figura quadrata; erit A F, ipsi F B, longitudine incommensurabilis. Est autem ut A F, ad F B, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub A B, A F, ad rectangulum sub A B, F B; Rectangulum vero sub A B, A F, quadrato ex A G, & rectangulum sub A B, F B, quadrato ex G B, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; quod angulus A G B, rectus sit in semicirculo A G B. Igitur quoque erit ut A F, ad F B, ita quadratum ex A G, ad quadratum ex G B; ac propterea cum A F, F B, longitudine sint incommensurabiles, erunt quadrata ex A G, G B, incommensurabilia. Igitur rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali A B, Rationale est, æqualeq; quadratis ex A G, G B; erit etiam compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmae propositionis præcedentis, rectangulum sub A F, F B, quod quadrato ex C E, æquale est factum, æquale est quadrato ex F G; (propterea quod angulus A G B, rectus est, & F G, ad A B, perpendicularis) erunt quadrata ex F G, C E, æqualia; ac proinde & rectæ F G, C E, æquales. Quare C D, dupla existens ipsius C E, dupla etiam erit ipsius F G. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub A B, C D, duplum erit rectanguli sub A B, F G. (cum F G, dimidia sit minoris C D,)



31. decimi.

39. decimi.

31. tertij.

10. decimi.

4. defin.

47. primi.

22. decimi.

Sed rectangulum sub $A B$, $C D$, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub $A B$, $F G$, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub $A B$, $F G$, per 1. lemma propositionis precedentis, æquale est rectangulum sub $A G$, $G B$. Contentum igitur sub $A G$, $G B$, Medium quoque est: Oñsum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Invenit ergo sunt duæ rectæ $A G$, $G B$, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum



quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

DEMONSTRATUR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, ut duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATUR Rationis linea $A B$, & duo numeri C, D , quorum C , maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum, fiatq; ut C , ad D , ita quadratum ex $A B$, ad quadratum ex $A E$, & eodem descripto quadrato ex $A B$, educatur $E F$, ad $A B$, perpendicularis. Quoniam igitur est ut C , ad D , ita quadratum ex $A B$, ad quadratum ex $A E$. Non habet autem C , ad D , proportionem quam quadratus ad quadratum, erunt latera $A B, A E$, distorum quadratorum



9. decimi.

$C, 6. D, 4.$ longitudo incommensurabilia; Ac propterea cum $A B$, tota longitudo sit incommensurabilis parti $A E$, erit eadem $A B$, & reliqua $E B$, longitudo incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. Vt autem $A B$, ad $A E$, ita est quadratum ex $A B$, ad $A E$. Igitur cum $A B, A E$, incommensurabiles sint longitudo, erunt quadratum ex $A B$, & rectangulum $A E$, incommensurabilia. Quare quadrato ex $A B$, existente Rationali,

1. sexti.

10. decimi.

li,

li, quod & AB , Rationalis ponatur, erit AF , dicto quadrato incommensurable, Irrationale. Eodemq; argumento ostendamus BF , Irrationale esse. Quia vero AF , BF , compositum quadratum Rationale ex AB ; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.

At vero si AF , FB , Rationalia sint, ostendemus & totum AB , ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim utrumq; AF , FB , Rationale sit, erunt ipsa inter se commensurabilia. Igitur & totum AB , ex ipsis compositum utriq; eorum commensurable erit. Quare AB , totum commensurable utrique Rationali AF , FB , Rationale quoque est. Quod est propositum.

6. decimi.

9. defin.

34.

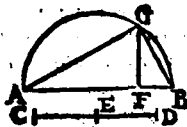
28.

PROBL. II. PROPOS. 35.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

REPERIANTUR duæ Mediæ AB , CD , potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior AB , plus possit quam minor CD , quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, ut in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, ut in propos. antecedenti, rectas AG , GB , potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB , æquale existens quadratis rectarum

32. decimi.

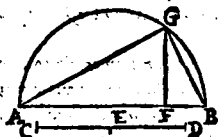


AG , GB , Medium est; erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG , GB , Medium. Rursus ut in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub AB , CD , duplum esse rectanguli sub AB , FG ; atq; adeo

47. primi.

G + illud

illud esse huic commensurabile. Quare cum rectangulum sub $A B$, $O D$, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub $A B$, $F G$, illi commensurabile, Rationale:



Sed per 1. lemma propos. 3; huius lib. rectangulo sub $A B$, $F G$, æquale est rectangulum sub $A G$, $G B$. Igitur & rectangulum sub $A G$, $G B$, Rationale est. O stensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum $A G$, $G B$, esse Medium. Invenitæ ergo sunt duæ

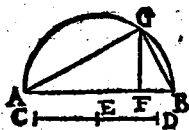
rectæ $A G$, $G B$, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.

33.
29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Mediū, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis.

33. decimi. REPERIANTUR duæ Mediæ $A B$, $C D$, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior $A B$, plus possit quam minor $C D$, quadrato lineæ



sibi longitudine incommensurabilis; fiantq; reliqua, ut in propos. 34. Ostendimus igitur similiter, rectas $A G$, $G B$, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media $A B$, Medium est, & quadratis rectarum $A G$, $G B$, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum $A G$, $G B$, Medium. Rursum, ut in 34. demonstrabimus,

47. primi.

binus, rectangulum sub $A B, C D$, duplum esse rectanguli sub $A B, F G$; atq; adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum ex constructione, rectangulum sub $A B, C D$, Medium sit; erit quoque rectangulum sub $A B, F G$, hoc est, sub $A G, G B$, qd illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam vero $A B$, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi $C D$; Est autem eidem $C D$, ipsa $C E$, longitudine commensurabilis, quod illa huius sit dupla; erunt $A B, C E$, longitudine incommensurabiles: Sed ut $A B$, ad $C E$, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex $A B$, ad rectangulum sub $A B, C E$, hoc est, ad rectangulum sub $A B, F G$, hoc est, sub $A G, G B$. (sunt enim rectangula sub $A B, F G$, & sub $A G, G B$, per 1. lemma propos. 33. huius lib. æqualia.) Igitur quadratum ex $A B$, hoc est, compositum ex quadratis rectarum $A G, G B$, incommensurabile est rectangulo sub $A G, G B$. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ $A G, G B$ potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

19. decimi.

10. decimi.

SCHOLIUM.

Ex hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos. 24. huius lib. nos demonstraturus recepimus, nimirum,

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QUONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum $A G, G B$, quam rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium, Medias, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum $A G, G B$, & rectangulum sub $A G, G B$, commensurabilia, quod

quod non ponitur. Quocirca si sumatur $A B$, potens compositum ex quadratis rectarum $A G$, $G B$, & alia recta potens rectangulum sub $A G$, $G B$, idest, media proportionalis inter $A G$, $G B$; inuenta erunt duæ Media & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

PRINCIPIVM SENARIORVM per compositionem.

36.

30.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales $A B$, $B C$, potentia solum commensurabiles, inuentæ per 2. lemma proposit. 21. huius lib. Dico totam $A C$, Irrationalem esse.



Quoniam $A B$, longitudine incommensurabilis est ipsi $B C$, & ut $A B$, ad $B C$, ita est rectangulum sub $A B$, $B C$, ad quadratum ex $B C$, per lemma

10. decimi.

proposit. 37. huius lib. erit rectangulum sub $A B$, $B C$, quadrato ex $B C$, incommensurable. Sed rectangulo sub $A B$, $B C$, commensurable est eius duplum, nempe quod bis sub $A B$, $B C$, continetur; & quadrato ex $B C$, commensurabilia sunt quadrata rectarum $A B$, $B C$; (omnia enim sunt Rationalia) atque adeo & compositum ex quadratis rectarum $A B$, $B C$, eidem quadrato ex $B C$, commensurable est. Igitur per ea, quæ in scholio proposit. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub $A B$, $B C$, continetur, incommensurable est composito ex quadratis rectarum $A B$, $B C$.

16. decimi

Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub $A B$, $B C$, & ex composito quadratorum rectarum $A B$, $B C$, hoc est, quadratum ex tota $A C$, (Est enim hoc quadratum æquale qua-

le quadratis rectarum AB, BC , una cum rectangulo sub AB, BC , bus composito ex quadratis rectarum AB, BC , incommensurable erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, BC , Rationale, quod commensurable sit ostensum quadrato Rationali ex BC , Rationali. Igitur quadratum ex AC , quadrato Rationali ex BC , incommensurable, Irrationale est; atq; adeo & recta ipsa AC , Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu ut alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC , potentia solum commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commensurabiles, &c. Quod ostendendum erat.

S C H O L I O N.

ITAQUE ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, Irrationalis est, quæ Media vocatur. At vero composita ex ipsis, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTUR duæ Mediæ superius innææ AB, BC , potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC , Irrationalem esse. Quia AB , est

AB, BC , ut rectangulum sub AB, BC , ad quadratum ex BC , ut in lemmate propos. huius lib. est ostensum; sunt autem AB, BC , longitudine incommensurabiles; erunt rectangulum sub AB, BC , & quadratum ex BC , incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, BC , com-

4. secundi.
17. decimi.

10. definit.

22. decimi.

37. decimi.

37.
31.

28. decimi.

10. decimi.

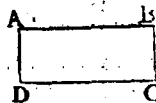
commensurable est, quod sub AB, BC , bis; & quadrato ex BC , commensurable est compositum ex quadratis rectorum AB, BC : (Nam cum AB, BC , potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC , commensurable erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC , bis,

& compositum ex quadratis rectorum AB, BC , incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propof. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectorum AB, BC , una cum rectangulo bis sub AB, BC , hoc est, quadratum ex AC , quod huic composito æquale est, incommensurable quoque est rectangulo sub AB, BC , bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC , commensurable rectangulum semel sub AB, BC , cum hoc sit illius dimidiū. Igitur quadratum ex AC , incommensurable est rectangulo sub AB, BC : Ponitur autem rectangulum sub AB, BC , Rationale. Irrationale ergo est quadratum ex AC ; & ob id recta quoque AC , Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, uel ut alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendū.

L E M M A.

Q U O D sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

C O N T I N E A T U R rectangulum $ABCD$, sub Rationali AB , & Irrationali BC . Dico ipsum



Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, faciet ipsum ad Rationalem AB , applicatum latitudinem BC , Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim BC , Irrationalis. Non ergo AC ,

AC, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.

THEOR. 27. PROPOS. 39.

38.

32.

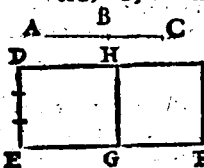
SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit: Vocetur autem ex binis Medijs secunda.

COMPONANTUR duæ Mediæ superius inventæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; & compositio ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, æquale est duobus quadratis ex AB, BC, una cum rectangulo bis sub AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC, continetur. Quoniam uero, ex hypothesi, rectangulum sub AB, BC, Medium est; erit & rectangulum bis sub AB, BC, ei commensurabile, hoc est, HF, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursum quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commensurabilia, commensurabilia sunt; erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum DG, utriusque ipsorum commensurabile: Sed utrumque quadratorum ex Medijs AB, BC, Medium est. Igitur & DG, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE; (est enim GH, Rationali DE, æqualis.) erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursum quia AB, BC, longitudine incommensurabiles.

29. decimi.

45. primi.

4. secunda.

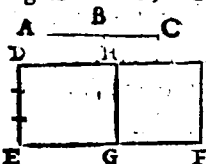


16. decimi.

34. primi.

23. decimi.

mensurabiles sunt; & est ut A, B , ad B, C , ita quadratum ex A, B , ad rectangulum sub A, B, B, C , ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex A, B , incommensurabile rectangulo sub AB, BC , ut in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est: Atqui quadrato ex A, B , ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarum A, B, B, C ; & rectangulo sub A, B, B, C , commensurabile est, quod continetur bis sub A, B, B, C , cum hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quae in scholio propos. 14. huius lib. diximus, erit & compositum ex quadratis rectarum A, B, B, C , hoc est, rectangulum D, G , incommensurabile rectangulo bis sub A, B, B, C , hoc est, rectangulo H, F . Cum ergo sit ut D, G , ad H, F , ita E, G , ad G, F ; erit E, G , ipsi G, F , longitudine incommensurabilis: ostensum autem iam fuit E, G, G, F , esse Rationales. Rationales igitur sunt E, G, G, F , potentia tantum commensurabiles; ac, propterea, & tota E, F , composita, Irrationalis est. Quare, per lemma antecedens, D, F , contentum sub Rationali D, E , & Irrationali E, F , Irrationale est; Ac propterea & quadratum ex A, C , ipsi D, F , æquale, Irrationale est. Quare & recta A, C , Irrationalis est. Vocetur autem ex binis Medijs secunda, seu ut alijs placet, Bimediale secundum. Si duæ ergo Medie potentia tantum commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.



1. sexti.

10. decimi.

37. decimi.

SCHOLION.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineam Irrationalem A, C , quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commensurabilibus, quæ Rationale continent, ex binis Medijs primis: Hic vero lineam Irrationalem A, C , quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commensurabilibus, quæ Mediis continent, ex binis Medijs secundis, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22 huius lib.

LEMMA.

Si recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum

ctangulū sub partibus bis cōprehensum, quadrato eius lineę, quę maior pars minorem superat.

S E C E T V R recta AD , in B , n bifariam, sitq; maior pars AB ; in qua sumatur BC , minori parti BD , equalis, ut sit AC , excessus, quo AB , superat BD , hoc est, BC , ipsi BD , equalem. Dico quadrata rectarū AB , BD , simul maiora esse rectāgulo bis sub AB , BD , quadrato rectę AC . Quo



niā quadrata ex AB , BC , equalia sunt rectangulo bis sub AB , BC , una cum quadrato ex AC ; estq; BC , ipsi BD , equalis: erunt quoq; quadrata ex AB , BD , equalia rectāgulo bis sub AB , BD , una cū quadrato ex AC . Quare quadrata ex AB , BD , maiora sunt, quā rectangulum bis sub AB , BD quadrato rectę AC . quod est propositum.

COROLLARIUM.

Ex hoc sequitur, quadrata partū inæqualiū simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

39.

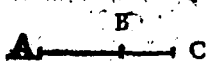
33.

S I duę rectę lineę potētia incōmēsurabiles cōponātur, quę faciāt cōpositū quidē ex ipsarū quadratis Rōnale; quod autē sub ipsis cōtinetur, Mediū: tota recta lineā Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

C O M P O N A N T V R duę rectę superius inuētę AB , BC , potētia incōmēsurabiles, faciētes quidē cōpositū ex ipsarū quadratis Rōnale; rectāgulū vero sub ipsis cōtētū, Mediū. Dico totā AC , esse Irrationālē. Qm rectāgulū sub AB , BC , Mediū ponitur, erit & rectāgulū bis sub AB , BC , illi cōmēsurabile, Mediū, ex coroll. propos. 24. huius lib. atq; adeo Irrationale.

Ponitur

10. *defn.* Ponitur autē cōpositū ex quadratis rectarū AB, BC, Rōnale. Incomēsurabile ergo est rectāgūlū bis sub AB, BC, cōpositū ex quadratis rectarū AB, BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, BC, una cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est cōposito ex quadratis rectarū AB, BC. Cum ergo hoc cōpositum ponatur Rationale; erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia cum possit duo quadrata ex AB, BC, & rectangulū bis sub AB, BC, cōpositum ex quadratis rectarū AB, BC, per lemma antecesses, maius est rectangulo bis sub AB, BC. Quare cum cōpositum ex quadratis rectarū AB, BC, Rationale sit, rectangulum uero bis sub AB, BC, Medium; recte uocabitur AC, Maior, si quidem a Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.



40.
34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant cōpositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

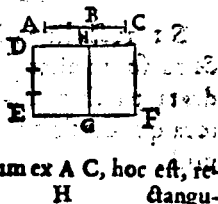
35. *defn.* COMPONANTUR duæ rectæ superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes cōpositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium; rectangulum uero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam cōpositum ex quadratis rectarū AB, BC, Medium est; quod uero continetur bis sub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub AB, BC, semel continetur, Rationale ponatur;

ponatur; erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurable rectangulo bis sub A B, B C. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, una cum rectangulo bis sub A B, B C, hoc est, quadratum ex A C, incommensurable est rectangulo bis sub A B, B C. Cum ergo rectangulum bis sub A B, B C, ut diximus, sit Rationale; erit quadratum ex A C, illi incommensurable, Irrationale; Ac proinde & recta A C, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub A B, B C. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandū erat.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurableque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONENTUR duæ rectæ superius inuenta AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurableque composito ex quadratis ipsarum. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex A C; Et composito ex quadratis rectarum AB, B C, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex A C, hoc est, re-



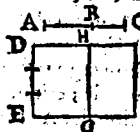
10. defin.
17. decimi.
10. defin.
11. defin.

41.
35.

36. decimi.
45. primi.

4. *secundi.*

Rectangulum D E, æquale est composito ex quadratis rectarum A B, B C, una cum rectangulo bis sub A B, B C, erit reliquum H F, æquale rectangulo bis sub A B, B C. Quoniam uero tam



compositum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc est, rectangulum D G, quam rectangulum sub A B, B C, at-

que adeo ex coroll. propos. 24. huius libri, quod bis sub A B, B C, nempe ipsum H F, (cum illi sit. commenfurabile.) Me-

23. *decimi.*

diu ponitur; facient D G, H F, ad Rationalem D E, applicata latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommenfurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum A B, B C, id est, rectangulum D G, incommenfurabile ponitur rectangulo sub A B, B C: Eidem autem rectangulo sub A B, B C, commenfurabile est ipfius duplum, nempe quod bis continetur sub A B, B C, hoc est, ipsum H F; erunt & D G, H F, incommenfurabilia. Quare cum sit ut D G, ad H F, ita E G, ad G F; erant E G, G F, longitudine incommenfurabiles: Atqui E G, G F, ostense sunt Rationales. Igitur E G, G F, Rationales sunt potentia solum commenfurabiles; Ac propterea tota E F, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, ex lemmae propos. 38. huius lib. Irrationalit est. Igitur & quadratum ex A C, illi æquale, Irrationale est, ideoque & recta ipsa A C, Irrationalis. Voceatur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, & rectangulum bis sub A B, B C. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenfurabiles componantur, &c. Quod erat demonstrandum.

13. *decimi.*

1. *sexti.*

10. *decimi.*

37. *decimi.*

18. *defini.*

L E M M A.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECTUR recta AB , inaequaliter in C , & rursus inaequaliter in D , sintque priores partes AC , CB , magis inaequales, quam posteriores AD , DB . Dico quadrata ex AC , CB , simul maiora esse quadratis ex AD , DB , simul. Diuisa enim AB , bisariam in E ,  cadet punctum D , uel inter E , C , uel inter A , E . Cadat primum inter E , C . Quoniam igitur rectangulum sub AC , CB , una cum quadrato ex EC , aequale est quadrato ex EB : Item rectangulum sub AD , DB , una cum quadrato ex ED , aequale est eidem quadrato ex EB ; erit rectangulum sub AC , CB , una cum quadrato ex EC , aequale rectangulo sub AD , DB , una cum quadrato ex ED . Ablatis igitur quadratis inaequalibus rectarum inaequalium EC , ED , cum quadratis ex EC , maius sit quadrato ex ED ; erit reliquum rectangulum sub AC , CB , minus reliquo rectangulo sub AD , DB ; ac propterea & rectangulum bis sub AC , CB , minus erit rectangulo bis sub AD , DB . Quoniam uero quadratum ex AB , aequale est tam rectangulo bis sub AC , CB , una cum quadratis ex AC , CB , quam rectangulo bis sub AD , DB , una cum quadratis ex AD , DB ; erit rectangulum bis sub AC , CB , una cum quadratis ex AC , CB , aequale rectangulo bis sub AD , DB , una cum quadratis ex AD , DB . Quare cum rectangulum bis sub AC , CB , ostensum sit minus rectangulo bis sub AD , DB ; erunt reliqua quadrata ex AC , CB , maiora reliquis quadratis ex AD , DB . Quod est propositum.

5. secundi

4. secundi

SE D cadat iam D , inter A , E . Quoniam igitur partes AC , CB , magis inaequales ponuntur, quam partes AD , DB ; erit AD ; (qua minor est posteriorum) maior quam

H 2 CB;

1. secundi

CB, (qua priorū minor est) ac proinde cū AE, EB, æ-
quales sint, erit reliqua EC, maior quā reliqua DE.

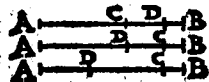
A. $\overline{D E C B}$ Itaque quia rectangulum sub
AC, CB, una cum quadrato ex
EC, æquale est quadrato ex EB. Item rectangulum
sub AD, DB, una cum quadrato ex DE, æquale est
quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB.
erit rectangulum sub AC, CB, una cum quadrato ex
EC, æquale rectangulo sub AD, DB, una cum qua-
drato ex DE. Igitur ut prius, demonstrabimus qua-
drata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD,
DB. Quod est propositum.

42.
36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QV AE ex binis nominibus, ad unum
duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in
sua nomina, ita ut AC, CB, sint Rationales potentia tantū
commensurabiles, ut uult propositio 37. huius libri: Dico



A B, ad aliud punctū diuidi non pos-
se in alia nomina, quæ scilicet sint etiā
Rationales lineæ potentia tantum
commensurabiles. Si enim fieri po-
test, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo
AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuide-
retur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles. quod
est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum
commensurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam seca-
bitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantū
commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad
D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, uel minus
inæquales sunt, quam partes AD, DB, uel magis inæqua-
les; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC,
CB,

C B, uel minora sunt quadratis ex A D, D B, uel maiora. (Neque enim partes A D, D B, ubicunque punctum D, extiterit, partibus A C, C B; æquales erunt, utraque utrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ facta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia uero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, ut in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, una cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, una cum rectangulo bis sub A D, D B, quod tam illa, quam hæc, æqualia sunt quadrato ex A B; fit, ut qui excessus facit ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis Rationale, ex ijs, quæ in scholio propos. 34. huius libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cum Rationale superet Rationale Rationale, ut in scholio propos. 27. huius libri demonstrauius; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est. Quoniam uero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi commensurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. Quare cum Medium non superet Medium Rationale; non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

4. secundi

22. decimi.

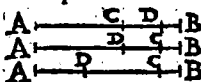
27. decimi.

43.
37.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

QVAE ex binis Medijs prima, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut A C, C B, sine Mediae potentia solum commensurabiles, quae Rationale contineant, ut uult propositio 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quae scilicet sint etiam Mediae lineae potentia tantum commensurabiles, continentesque



Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina A D, D B. Igitur ubicunque punctum D, existat, similiter probabimus,

ut in praecedenti propositione, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B: Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. (Cum enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis sub A C, C B, ei, quod continetur semel sub A C, C B, commensurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis sub A D, D B. Quare cum Rationale superet Rationale Rationale, ut in scholio propos. 27. huius libri ostendimus; perspicuum est, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C D, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. Quia uero rectae A C, C B, Mediae sunt, & potentia commensurabiles; erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. Quare & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum utrunque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo ostendemus compositum ex quadratis rectarum A D, D B. Cum ergo Medium non superet Medium Rationale; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum

16. decimi.

27. decimi.

A C,

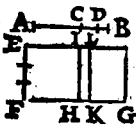
A C, CB, & compositi ex quadratis rectarum A D, DB, spatium Rationale. Ostendimus autē & Rationale esse Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quā ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44.
38.

Q V AE ex binis Medijs secunda, ad unū duntaxat punctū diuiditur in nomina.

S i r ex binis Medijs secunda A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut A C, CB, Mediæ sint potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ut uult propos. 39. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur ubi cunque punctum D, existat, similiter



ostendamus, ut in propositione 43. quadrata ex A C, C B, uel maiora esse quadratis ex A D, D B, uel minora. Exponatur Rationalis E F, ad quam applicetur rectangulū E G, æquale quadrato ex A B. Item E H, æquale quadratis ex A C, C B. Erit igitur reliquum I G, æquale ei, quod continetur bis sub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B, æquale est quadratis ex A C, C B, & rectangulo bis sub A C, C B. Eodem modo si ad E F, applicetur B K, quadratis ex A D, D B, æquales erit reliquum L G, æquale rectangulo bis sub A D, D B, comprehenso. Et quia quadrata ex A C, C B, inæqualia sunt quadratis ex A D, D B; erunt quoque rectangula E H, E K, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectę F H, F K, inæquales erūt. Rursus quia quadrata ex A C, C B, maiora sunt, per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub A C, C B; erit & E H, maius quā I G; ac propterea E H, maius quā dimidium ipsius E G, ideoque & recta F H, maior quā dimidiū ipsius F G. Eadē ratione ostē-

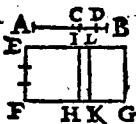
45. primi

4. secundi.

H 4 demus

demus F K, maiorem esse dimidio ipsius F G. Inæquales ergo sunt partes F H, H G, partibus F K, K G, singulæ singulis. Quoniam uero A C, C B, Mediæ sunt, & potentia

16. decimi.



23. decimi.

23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

8. sexti.

10. decimi.

37. decimi.

commensurabiles; erunt & earum quadrata Mediæ, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsius utrique ipsorum commensurabile erit. Cum ergo utrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, E H, per coroll.

propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit F K. Quare E H, E K, ad Rationalem E F, applicata faciunt latitudines F H, F K, Rationales ipsi E F, longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub A C, C B, ponatur Medium, erit & quod bis sub

A C, C B, hoc est, I G, illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem H I, erit H G, Rationalis ipsi H I, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus L G, Medium esse, & K G, Rationalem ipsi K L, longitudine incommensurabile.

Rursus quia A C, C B, longitudine sunt incommensurabiles; & est ut A C, ad C B, ita per lemma 3. propos. 9. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, erit quadratum ex A C, rectangulo sub A C, C B, incommensurabile. Sed quadrato ex A C, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum A C, C B: (cum enim A C, C B, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; erit & compositum ex ipsis utriusque ipsorum, nimirum quadrato ex A C, commensurabile.) Rectangulo uero sub A C, C B, commensurabile est, quod bis sub A C, C B. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectangulum E H, incommensurabile est, per scholion propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub A C, C B, hoc est, ipsi I G. Quocirca cum sit ut E H, ad I G, ita F H, ad H G; erunt F H, H G, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt F H, H G, potentia solum commensurabiles. Igitur F G, tota Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisæque in nomina ad punctum H. Eodem modo ostendemus & F G, ex binis nominibus, diuisam

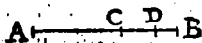
nam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, ut demonstratum est in precedentibus. Igitur 43. decimi.
 A B, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendū.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

45.
39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita ut A C, C B, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadraus Rationale; rectangulum uero sub ipsis Mediū, ut uult propositio 49. huius libri.



Dico A B, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ scilicet lineæ incommensurabiles quoque sint potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Medium. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiterit, demonstrabimus similiter, ut in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, eum esse, qui rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale: (quia cum utrumque compositum ex hypothesi sit Rationale, erit quoque eorum excessus spatium Rationale, ut in scholio propof. 17. huius libri ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. Quoniam uero rectangulum sub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub A C, C B, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit incommensurabile. Atque eodem modo Medium erit, rectangulū bis sub A D, D B. Igitur cum Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, spatium

27. decimi.

spatium Rationale : Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

46.
40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuisa in sua nomina in puncto C, ita ut A C, C B, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum uero sub ipsis Rationale, ut uult propos. 41. huius libri.



Dico A B, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ

nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale : Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbiunque ergo punctum D, existat, ostendimus non aliter, ac in propos. 43 huius libri, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B. Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est, quod ostendimus, ut in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale. Quia uero composita ex his quadratis pōnuntur esse Media : Medium autem non superat Medium Rationale, non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum

27. decimi.

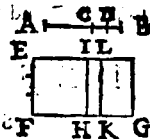
Et diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

47.
41.

BINA Media potens, ad unum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C, ita ut AC, CB, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, ut uult propos. 42. huiuslibri. Dico AB, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ uidelicet sint etiam hinc potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, in-



commensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctum D, existat: Constructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. ostendimusque ut ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplò æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quæ illi commensurabile est. Igitur Media EH, IG, applicata ad Rationalem EF, (est enim IH, ipsi EF, æqualis) faciunt latitudines FH, HG, Rationales, longitudine ipsi EF, incommensurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas FK, KG, Rationales esse, longitudine incommensurabiles ipsi EF. Quæ uero compositum ex quadratis rectarum AC, CB, descriptis, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, ex hypothefi, rectangulo bis sub AC, CB, nempe rectangulo IG, estque ut FH, ad

23. decimi.

1. sexti.

ad I G, ita FH, ad H G; erunt FH, H G, longitudine incommensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius libri ostendimus: Sed & ostensæ sunt Rationales.

A C P B
E IL

37. decimi.



Rationales ergo sunt FH, H G, potentia solum commensurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, iam ante demonstratum est. Igitur A B, bina Media potius non diuiditur ad aliud punctum quàm ad C, in sua nomina. Quocirca ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

43. decimi.

DEFINITIONES

SECUNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ linæ sibi longitudine commensurabilis.

L.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI uero minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

QVOD si neutrum ipforum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali ; Vocetur ex binis nominibus tertia .

Rursus si maius nomen plus possit , quam minus , quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis ,

IIII.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali cōmensurabile sit longitudine ; Vocetur ex binis nominibus quarta .

V.

SI uero minus nomen ; Vocetur quinta .

VI.

QVOD si neutrum ipforum nominum ; Vocetur sexta .

SCHOLION.

NUMERVS distarum sex linearum , quæ ex binis nominibus appellantur , colligitur hac ratione . Quoniam nomina lineæ , quæ ex binis nominibus dicitur , sunt lineæ potentia tantum commensurabiles , non poteris utrunque nomen exposita Rationali commensurabile esse longitudine ; (alias enim nomi-

na ipsa essent linea longitudine inter se commensurabiles, vt in scholio propor. 12. huius libri docuimus. quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, quod minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum; quae ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inequalia sunt; (alii enim essant linea inter se longitudine commensurabiles: quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato linea sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato linea longitudine sibi commensurabilis, consueverunt una cum tribus dictis generibus, tres diuersae lineae ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato linea longitudine sibi incommensurabilis, efficiuntur vna cum eisdem tribus generibus aliae tres diuersae lineae ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, ut ex definitionibus hinc ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersae lineae ex binis nominibus appellatae.

P V I C. R. autem Euclides primas ordinis facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis; Secundam vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile, antecedit incommensurabile.

R V R S V S rectae adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositae lineae Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineae expositae longitudine est commensurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum expositae Rationali longitudine est commensurabile:

Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; & secundam, quintam; & tertiam, sextam.

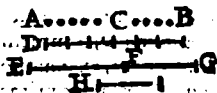
PROBL. 13. PROPOS. 49.

48.

42.

• I N V E N I R E ex binis nominibus primam.

REPERITIS duobus numeris quadratis A B, C B, ex
ijs, quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scriptimus, quo-
rum excessus A C, non sit quadratus, ita ut A B, C B, propor-
tionem quidem habeant, quam
quadratus ad quadratum; at A B, A C, proportionem non habeant;
quam quadratus ad quadratum: Exponatur Rationalis quæpiam



D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F. Erat ergo & E F, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A B, ad A C, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. Dico E G, esse ex binis nominibus primam: Quoniam quadrata ex E F, F G, cum proportionem habeant, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; erunt & rectæ E F, F G, commensurabiles; saltem potentia; Ostensa autem est E F, Rationalis. Igitur & F G, Rationalis est. Quia vero A B, ad A C, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex E F, F G, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, F G. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia solum commensurabiles; Ac idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit ut numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; sit autem A B, maior, quam A C; erit quoque quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit maius, ex lemmate propos. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est ut A B, numerus ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; erit quoque, per conuersionem rationis, ut A B, ad C B, uidelicet ad excessum quo antecedens A B, superat consequentem A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens qua-

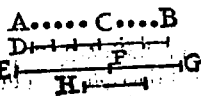
6. decimi.

9. decimi.

37. decimi.

dratum

dratum ex E F, superat consequens quadratum ex F G. Habet autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionē habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; ac proinde rectæ E F, H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen E, h, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sub longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen E, F, expositæ Rationali D, commensurable longitudine; erit & G, per definitionem, ex binis nominibus prima. Invenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.



9. decimi.

49.

43.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

R E P E R T I S: duobus numeris quadratis A B, C B, ut in præcedenti propositione, expositæque Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A C, ad numerum A B, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; erunt & rectæ F G, E F, commensurabiles, saltem potentia: Oportet autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis est. Quia uero A C, A B, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantum commensurabiles; Atque idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit ut numerus A C, ad numerum A B; ita quadratū ex F G, ad quadratū ex E F:

6. decimi.

9. decimi.

37. decimi.

Et

Et conuertendo vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; fit autem A B, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit, per lemma propof. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in præcedenti propof. H, ipſi E F, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, quam minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtq; minus nomen F G, expoſitæ Rationali D, commenſurable longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſecunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſecundam. Quod erat faciendum.

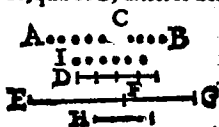
PROBL. 15. PROPOſ. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut in propof. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, ſi ſumatur I, non quadratus numerus proxime maior quam A C. Ita enim, cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quā A C, differet uel ſola unitate ab A C, uel binario.

(Vnitatem quidem, quando A C, numerus fuerit, cui addita unitas non facit quadratum: binario vero, quando unitas addita ad A C, quadratum facit. Vt ſi

A C, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia unitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi A C, ſit 5. erit nō quadratus proxime maior 6. differens a 5. Vnitate, quia unitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare ut in ſcholio propof. 8. lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I, & A C, medius proportionalis. Igitur nō



erunt similes plani; ac propterea neq; proportionem habebunt, quā numeri quadrati. Exposita itā Rationali quapiā D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. ut I, ad AB, ita quadratū

A.....C
I.....B

D.....E

E.....F.....G

H

6. decimi.

ex D, ad quadratum ex EF. Erūt ergo quadrata ex D, & EF, proportionē habentia, quam numerus I, ad numerum AB, cōmensurabilia; atq; adeo & linę D,

EF, cōmensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia uero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum, quadratū;

9. decimi.

erunt D, & EF, rectę inter se longitudine incōmensurabiles. Rursus per dictū coroll. fiat ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG. Erūt ergo quadrata ex EF, FG, proportionē habentia, quā numerus ad numerū, cōmensurabilia; Ideoq; & linę EF, FG, cōmensurabiles saltem potentia. Igitur cū EF, ostensa sit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratū ex EF, ad quadratū ex FG, p-

6. decimi

portionē nō habet, quā numerus quadratus ad numerum quadratū; erūt EF, FG, longitudine incōmensurabiles. Sūt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum cōmensurabiles;

9. decimi.

Atq; idcirco tota EG, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiā esse. Quoniā est ut I, ad AB, ita quadratū ex D, ad quadratū ex EF; Et ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG; erit ex æqualitate ut I, ad AC, ita quadratū ex D, ad quadratū ex FG. Nō habet autē I, ad AC, proportionē, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionē habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; ac propterea rectę D, & FG, longitudine incōmensurabiles sunt. Quoniā autē est ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG: Est autē AB, maior, quā AC; erit & quadratū ex EF, maius quā quadratū ex FG. Sit ergo mai,

37. decimi.

per lēma propos. 14. huius lib. quadrato rectę H. Ostēdem⁹ itā similiter, ut in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine cōmensurabile esse. Quoniā igitur maius nomē EF, plus pōt, quā minus FG, quadrato rectę H, sibi lōgitudine cōmensurabilis; & neutra ipsarū EF, FG, lōgitudine cōmensurabilis est expositę

9. decimi.

Ratio

Rationali D, ut demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiā. Quod erat faciendum.

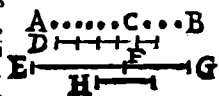
PROBL. 16. PROPOS. 52.

51.

INVENIRE ex binis nominibus quartā.

45.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita ut cōpositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionē habeat, quā quadratus ad quadratū, ex ijs, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine cōmēsurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cū Rationali D, cōmēsurabilis

fit. Quod si reliqua cōstruantur, ut in propos. 49. ostēdemus simili-

ter, ut ibi, totā EG, ex binis nominibus esse. Dico & quartā esse. Erit

enim rursus, ut in 49. propos. quadratū ex EF, maius quam quadratū ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodē modo, ut in 49. propos. per cōuersionē rōnis, est ut AB, ad CB, ita quadratū ex EF, ad quadratum ex H: Nō est aut AB, ad CB, ut quadratus ad quadratū; neq; quadratū ex EF, ad quadratū ex H, erit ut numerus quadratus ad numerū quadratū. Lōgitudine ergo incōmēsurabiles sūt rectę EF, & H. Itaq; cū maius nomē EF, plus possit, quā minus FG, quadrato rectæ H, sibi lōgitudine incōmēsurabilis, & maius rursus nomē EF, lōgitudine cōmēsurabile expositę Rōnali D; erit EG, p. defin. ex binis nominibus quartā. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartā. Q. d. faciendū erat.

9. decimi.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

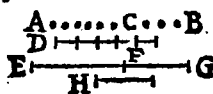
52.

INVENIRE ex binis nominib⁹ quintā.

46.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ut in præcedenti propos. fiat constructio, ut in propos. 50. nēpe sumatur FG, longitudine commensurabilis expositę Rationali D, &c. Ostendemus ergo ut in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico, & quintā esse. Demonstrabimus enim eodem modo, ut in 50. propos. quadratum ex EF, maius

esse, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam uero, ut in propof. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Ostendemus, ut in propositione antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen E F, plus possit, quā minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen F G, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.



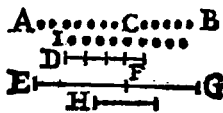
53.
47.

PROBL. 18, PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

30. *septimi*

REPORTIS duobus numeris A C, C B, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis AB, non sit quoque quadratus, habeatque ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. Nam hac ratione & totus ad utrumque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finē lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicumque I, qui nec ad A E, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus: Hic enim ad A B, & A C, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & ut I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propof. 6. huius lib. & reliqua fiant, ut in propof. 51.



pos. 51.

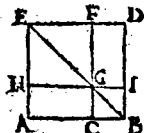
pos. 51. ostendemusq; ut ibi, rectas D, & E F, esse longitudine incommensurabiles, atq; totam E G, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, ut in 51. propos. D, & F G, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoque ut in propos. 49. per conuersionem rationes, esse ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum igitur A B, ad C B, atque adeo quadratū ex E F, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum, et ut rectæ E E, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius nomen E F, plus possit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum E F, F G, longitudine sit commensurable expositæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextā. Quod faciendum erat.

9. decimi.

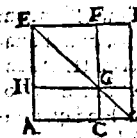
LEMMA.

Si recta linea secta sit utcumque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA sit recta A B, utcumq; in C. Describatur ex A B, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta C F, ipsi B D, parallela, qua diametrum secet in G, agatur per G, ipsi A B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium A C, C B; utrumq; autem rectangulorum



lorum DG, GA , comprehensum sub eisdem parti-
bus: At vero rectangula CD, AI , sub tota AB , &
parte CB , contenta. Dico DG , me-
dium proportionale esse inter quadra-
ta FH, CI : At CD , medium esse
proportionale inter quadrata $AD,$
 CI . Quoniam ut HG , ad GI , ita
est tam FH , ad DG , quam AG , ad CI : erit ut
 FH , ad DG , ita AG , ad CI : Est autem AG , ipsi
 DG , æquale. Igitur erit quoque ut FH , ad DG , ita
 DG , ad CI : Atque adeo DG , medium proportionale
est inter quadrata FH, CI .



1. sexii.
43. primi

1. sexii.

$RVRSVS$ quia est ut AB , ad CB , ita tã AD ,
ad CD , quam AI , ad CI : erit ut AD , ad CD , ita AI ,
ad CI : Est autem AI , ipsi CD , æquale. Igitur erit ut
 AD , ad CD , ita quodq; CD , ad CI : Quare CD , me-
dium proportionale est inter quadrata AD, CI . Eo-
dem modo erit AF , medium proportionale inter qua-
drata AD, FH .

54.
48.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI spatium contineatur sub Rationali,
& ex binis nominibus prima; Recta linea
spatium potens Irrationalis est, quæ ex bi-
nis nominibus appellatur.

CONTINEATUR spatium AC , sub Rationali AB , & ex
binis nominibus prima AD . Dico rectam lineam, quæ po-
test spatium AC , Irrationalem esse, quæ ex binis nomi-
bus appellatur. Sit ipsius AD , maius nomen AE . Erunt
igitur ex defin. AE, ED , Rationales potentia tantum
commensurabiles; & AE , plus poterit, quam ED , qua-
drato

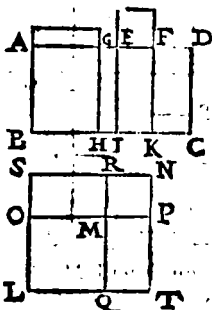
drato rectæ sibi longitudine commensurabilis ; & deniq;
A E, expositæ Rationali AB longitudine commensurabi-
lis erit. Secetur E D, bisariam in F. Quia igitur A E, plus
potest quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis, si quæ tæ parti quadrati ex E D, hoc est, qua-
drato ex E F, æquale parallelogrammum sub A G, G B,
contentum, per 1. lemma propof

17. huius lib. applicetur deficiens fi-
gura quadrata ; in partes longitu-
dine commensurabiles ipsam diui-
det. Quare A G, G E, partes inter
se longitudine cômensurabiles sunt.

Ducantur iam per puncta G, E, F,
ipsas A B, D C, parallelæ G H, E I,
F K. Et parallelogrammo A H,
æquale quadratum fiat L M : At
parallelogrammo G I, æquale fiat
quadratum M N ; coniunganturq;
quadrata L M, M N, ita ad angulû

M, ut latera M O, M P, unam rectam constituant
O P. Facient ergo & latera M Q, M R, unam rectam
Q R, ut demonstratum est a nobis ex Proclo ad propof.
15. lib. 1. propterea quod anguli O M Q, P M R, ad uer-
tice M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem re-
ctangulo L N, cum rectæ O M, M P, rectis Q M, M R,
æquales sint, ideoq; & tota O P, toti Q R; sit autem O P,
ipsis S N, L T; & Q R, ipsis L S, T N, æqualis ; æquila-
terum erit rectangulum L N; ideoq; quadratum.

Quoniam uero rectangulum sub A G, G E, æqua-
le est, per constructionem, quadrato ex E F; erit ut
A G, ad E F, ita E F, ad G E; Ac propterea & ut A H,
ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium propor-
tionale est inter A H, G I; hoc est, inter quadrata L M,
M N, illis æqualia : Sed inter eadem quadrata L M, M N,
medium proportionale est T M, ex antecedenti lemmate.
Æquale igitur est T M, ipsi E K. Cum ergo ipsi T M,
æquale sit M S; & ipsi E K, æquale sit F C; erit & M S, ip-
si F C, æquale. Quocirca totû quadratû L N, toti rectângulo
A C, æquale est; atq; adeo recta O P, potest spatium A C, con-



18. decimi.

14. secundi.

34. primi.

17. sexti.

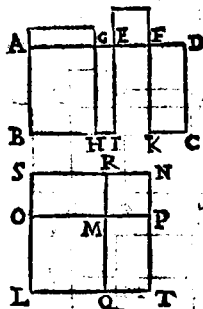
1. sexti.

43. & 36. primi.

tentum sub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico O P, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

Q U O N I A M A G, G E, ostensæ sunt longitudine

16. decimi.



20. decimi.

commensurabiles; erit & tota A E, utrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem A E, cum sit maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex scholio propos. 12. huius lib, longitudine commensurabiles sunt; Atq; adeo cum A B, sit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. Quare rectangula A H, G I, sub Rationalibus cõtecta Rationalia sunt; Ideoq;

& quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

E T quoniam A E, ipsi E D, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis A G; & ipsi E D, commensurabilis est longitudine E F, eius dimidia; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & A G, E F, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & A H, E K, eandem proportionem habentia, quam A G, E F, incommensurabilia sunt; ac proinde & L M, M T, illis æqualia, sunt incommensurabilia. Igitur & rectæ O M, M P, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T: Sunt autem & O M, M P, Rationales ostensæ. Igitur O M, M P, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quapropter tota O P, potens spatium A C, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur: Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

1. sexti

10. decimi.

10. decimi.

1. sexti

37. decimi.

55.

49.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

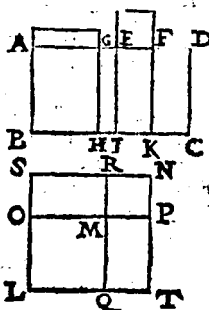
SI spatium contineatur sub Rationali;

& ex

& ex binis nominibus secunda; Recta linea a spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit ipsius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex def. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit quam E D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique E D, Rationali exposita A B, longitudine commensurabilis; Secetur E D, bisariam in F; & reliqua contruantur, ut in antecedenti propositione. Quo facto, deinceps stabimus similiter, ut ibi, rectam O P, posse spatium A C, contentum sub Rationali A B, & ex binis nominibus secunda A D. Dico iam O P, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QUONIAM A E, longitudine incommensurabilis est ipsi E D; & E D, minus nomen existens ipsius A D, ex binis nominibus secunda, longitudine commensurabilis est Rationali A B; eruat A E, A B, longitudine incommensurabiles. Et quia A G, G E, ostense sunt in antecedenti propositione longitudine commensurabiles; erit quoque tota A E, utriusque ipsarum commensurabilis. Quare cum A E, maius nomen existens ipsius A D, ex binis nominibus secunda, linea sit Rationalis; eruat & A G, G E, Rationales: quod cum utraque A G, G E, ipsi A E, sit longitudine commensurabilis; at vero A E, Rationali A B, longitudine incommensurabilis; erit utraque A G, G E, eidem A B, incommensurabilis longitudine. Ac proinde tam A B, A G, quam A B, G E, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Igitur rectangula A H, G I, Media sunt, proptereaque



13. decimi.

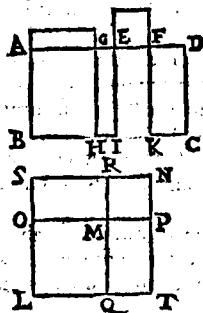
16. decimi.

14. decimi.

12. decimi.

pterea; & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ O M, M P, sunt Mediæ.

10. decimi. Quia uero A G, G E, longitudine sunt commensurabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia, commensurabilia; atq; idcirco & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ O M, M P, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam A E, E D, longitudine incommensurabiles sunt; Ipsi uero A E, ostensa est longitudine commensurabilis A G; & ipsi E D, longitudine commensurabilis est E F, eius dimidia; erunt per scholiū propof. 14. huius lib. A G, E F, longitudine incommensurabiles; Ac proinde A H, E K, eandem habentia proportionem cum ipsis, incommensurabilia sunt. Igitur & L M, M T, ipsis A H, & E K, æqualia, incommensurabilia sunt. Ideoq; & rectæ O M, M P, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T. Cum ergo ostensum sit O M, M P, Medias esse, & commensurabiles; erunt O M, M P, Mediæ



10. decimi.

10. decimi.
1. sexti.

12. decimi.

20. decimi.

38. decimi.

potentia solum commensurabiles. Quoniam deniq; E D, minus nomē ipsius A D, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi A B, hoc est, ipsi E I: Est autem E F, ipsi E D, quoque longitudine commensurabilis; Erunt etiam E I, E F, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum E I, Rationalis sit, erit & E F, Rationalis. Quare E K, rectangulum, Rationale est: Est autem M T, sub O M, M P, contentum ipsi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale est. Quapropter O M, M P, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, Rationalesq; continentes; atq; adeo

O P, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo spatium continetur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 39. PROPOS. 57.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

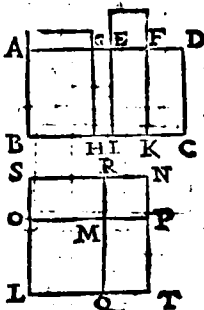
CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico recta, quæ pot spatium AC, Irrationalē esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda. Sit ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantū cō-

mensurabiles; & AE, plus poterit, quā ED, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis; Et denique neutra ipsarum AE, ED, Ratio naturali expositæ AB, longitudine cōmensurabilis est. Secta ED, bifariam in F. reliqua oīa fiāt, ut in propos. 55.

Similiter ergo, ut ibi, ostendemus rectam OP, posse spatium AC: Et ut in antecedenti propos. 56. rectas OM, MP, esse Medias potentia tantū cōmensurabiles; propterea quod

AE, Rationali AB, ponatur longitudine incōmensurabilis, quæadmodū & ibi eadē AE, ipsi AB, longitudine erat incōmensurabilis. Quoniā vero ED, EF, sunt cōmensurabiles longitudines; estq; ED, ipsi AB, Rōnali, hoc est, ipsi EI, longitudine incōmensurabilis; erit quoq; EF, eidē EI, longitudine incōmensurabilis: Sūt autē EF, EI, Rōnales, qđ EF, dimidia sit ipsius EI, Rōnalis; & EI, expositæ Rōnali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rōnales sunt potētia tantū cōmensurabiles; Ac propterea EK, Mediū est; ideoq; & MT, æquale ipsi EK, Mediū est, qđ sub Medijs OM, MP, cōtinetur. Itaq; cū OP, MP, Mediæ sint potētia solū cōmensurabiles, cōtineantq; spatium Mediū; erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Medijs secūda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rōnali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO.



56.

50.

14. decimi.

22. decimi.

39. decimi.

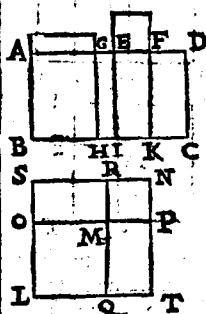
57.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

51.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est; quæ vocatur Maior.

CONTINEATUR spatiū A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit A E, ipsius A D, maius nomen. Erunt ergo ex def. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ



19. decimi.

10. decimi.

20. decimi.

longitudine sibi incommensurabilis; & deoq; A E, ipsa A B, commensurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in F, sunt reliqua omnia, ut in propos. 55. Erunt ergo A G, G E, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus ita eodem modo, ut ibi, O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam A G, G E, longitudine incommensurabiles sunt; erunt & rectangula A H, G I, eadem cum illis ma-

bentia proportionem, incommensurabilia; atq; adeo & quadrata L M, M N, ipsis A H, G I, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali A B; erit & A E, Rationalis; & rectangulum A I, sub ipsis contentum, Rationale. Est autē A I, æquale composito ex quadratis L M, M N; Compositum ergo ex quadratis L M, M N, Rationale est.

E T quoniam E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Ra-

lis Rationali A B, erit & E F, ipsius dimidia eidem A B, longitudo incommensurabilis; Et est E F, Rationalis, cum sit Rationali E D, commensurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quare E K, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & M T, illi æquale, contentumq; sub O M, M P, Medium est. Quocirca cum O M, M P, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis M T, Medium; Irrationalis erit tota O P, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

22. decimi

40. decimi.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

58.

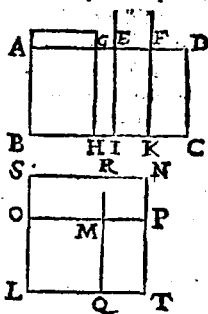
52.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit ipsius A D, maius nomen A E. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus potest, quam E D, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; & denique E D, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali A B. Secta E D, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propof. 55. Erunt igitur rursus A G, G E, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, ut in propof. 55. constabit rectam O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, ut in propof. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles. Et quia A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali A B; erunt;

19. decimi

22. decimi.

erunt AE, AB, Rationales potētia tantū commensurabiles. Quare rectangulū AI, sub ipsis contentū, Mediū est. Et autē AI, æquale cōpositū ex quadratis LM, MN. Igitur & cōpositū hoc, Mediū erit. Rursus quia



ED, Rōnalis ponitur lōgitudine cōmensurabilis Rōnali AB, cū sit minus nomē ipsius AD, ex binis nominibus quintæ; erit & EF, ipsius dimidia, eidē AB, cōmensurabilis lōgitudine, & Rōnalis. Quare & K, sub Rōnālibus EI, EF, lōgitudine cōmensurabilibus, Rationale est; atq; idcirco & MT, sub OM, MP, contentū Rōnale erit, cū ipsi EK, sit æquale. Quāobrē cū rectæ OM, MP, potētia incōmēsurabiles sint,

20. decimi.

41. decimi.

faciantq; cōpositū quidē ex ipsarū quadratis LM, MN, Mediū; Rectangulū vero MT, sub ipsis cōtentū, Rōnale; Irrationalis erit tota OP, quæ dicitur potēs Rationale & Mediū. Si igitur spatium continueatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

59.

53.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI spatium continueatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

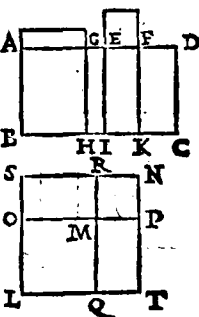
CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectā, quæ spatium AC, potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potens bina Media. Sit ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defn. Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & deniq; neutra ipsarum AE, ED, longitudine erit cōmēsurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quæ in su-

in superioribus; eruntq; AG, GE, longitudine incommensurabiles. Iam uero ostendemus similiter, ut in propof. 55. recta O P, posse spatium AC. Item, ut in propof. 58 rectas OM, MP, potentia esse incommensurabiles. Rursus, ut in antecedenti proposuerit compositum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propof. 58. erit quoq; MT, sub OM, MP, comprehensum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommensurabilis est longitudine ipsi E D; hæc uero eidem commensurabilis; erunt AE, EF, longitudine incommensurabiles. Igitur & A I, E K, incommensurabilia sunt, cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compositum ex quadratis LM, MN, quod ipsi A I, æquale est, & rectangulum MT, quod ipsi E K, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cum rectæ OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantq; & compositum ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis; erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sextæ, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

QUADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus A B, cuius maius nomen AC; & ad Rationale exposita DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex A B, latitudinem facies DG. Dico DG, ex binis nominibus



19. decimi

13. decimi.
10. decimi.
1. sexti.

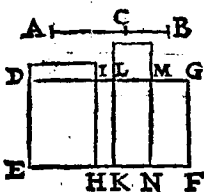
42. decimi

60.

54.

45. primi.

4. *secundi.* nominibus esse primam. Applicetur ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K. æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis sub A C, C B, continetur, cum quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia sint quadrato ex A B, quemadmodum & eidem quadrato ex A B, æquale est, per constructionem, rectangulum D F. Secetur L G, bifariam in M, puncto; per quod ipsi L K, G F, parallela agatur M N: eritque utrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur. Et quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, quod tota A B, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commensurabilia; quorum vtrique cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine commensurabilem.



37. *decimi.* R V R S V S quia A C, C B, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis, Medium; atque adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit, per coroll. propof. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Rationalem, facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudine. Igitur D L, L G, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commensurabiles, Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.
22. *decimi.* Q U O N I A M ex lemmate propof. 54. huius lib. rectangulum sub A C, C B, medium proportionale est inter quadrata ex A C, C B; erit quoque L N, medium proportionale inter D H, I K; atque adeo cum recte D I, L M, I L, eandem
16. *decimi.*
21. *decimi.*
23. *decimi.*
13. *decimi.*
37. *decimi.*

eandem

candem rationem habeant , quam D H , L N , I K ; erit quoque recta L M , media proportionalis inter D I , I L . Quare rectangulum sub D I , I L , æquale est quadrato ex L M . Et quia quadrata ex rectis A C , C B , commensurabilia sunt , quod A C , C B , ponuntur potentia commensurabiles ; erunt & D H , I K , ipsis æqualia , commensurabilia . Igitur & rectæ D I , I L , eandem cum illis habentes rationem longitudine commensurabiles sunt . Quoniam autem D K , maius est , quam L F , quod & quadrata ex A C , C B , maiora sint , per lemma propos. 39 huius libri , quam rectangulum bis sub A C , C B ; erit & recta D L , maior quam L G , cum D L , L G , eandem rationem habeant , quam D K , L F . Itaque quoniam D L , maior est , quam L G ; & ad D L , applicatur rectangulum sub D I , I L , deficiens figura quadrata , æquale quadrato ex L M , hoc est , quartæ parti quadrati ex minore L G , descripti ; (ostensum enim est rectangulum sub D I , I L , æquale quadrato ex L M .) diuiditurque D L , ad I , in partes D I , I L , longitudine commensurabiles , ut est demonstratum ; poterit D L , maior plus quam L G , minor , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis . Quare cum D G , ostensa sit ex binis nominibus , & D L , maius nomen plus posse , quam L G , minus nomen , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis , atque idem maius nomen D L , longitudine commensurabile Rationali exposita D E ; erit ex defin. D G , ex binis nominibus prima . Quadratum ergo eius , quæ est ex binis nominibus , &c . Quod ostendendum erat .

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius , quæ est ex binis Medijs prima , ad Rationalem applicatum , latitudinem facit ex binis nominibus secundam .

SIT ex binis Medijs prima A B , cuius maius nomen A C ; & ad Rationalem D E , applicetur rectangulum D F ,
K æquale

1. se. xxi.

17. sexti.

10. decimi.

1. sexti.

18. decimi.

62.

55.

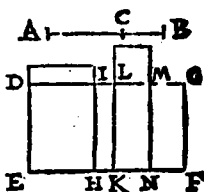
45. primi

æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse secundam. Construantur eadem, quæ in propos. præcedenti, ita ut rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, C B, & utrumque ipsorū L N, M F, ei quod sub A C, C B, continetur. Quoniam igitur A C, C B, ex binis Medijs primam A B, componentes, Mediæ sunt

38. decimi.

potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex A C, C B; atque adeo rectangula ipsis æqualia D H, I K, commensurabilia, atque Media. Cum ergo propterea

16. decimi.



& totum D K, utrique ipsorum D H, I K, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. D K, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E; erit eius latitudo D L, Rationalis

23. decimi.

ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est; erit & eius duplum, nempe L F, Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem L K; erit eius latitudo L G, Rationalis ipsi

21. decimi.

L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis;

13. decimi.

erunt D L, L G, longitudine incommensurabiles. Quod cum D L, L G, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in antecedenti propos. demonstrabimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defn. D G, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo

37. decimi.

eius, quæ est ex binis Medijs prima, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalē applicatū, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Medijs secunda A B, cuius maius nomen A C; & ad Rationalē D E, applicetur rectangulū D F, æquale quadrato ex A B, latitudinē faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis iisdē, quæ in propos. 61. quoniā A C, C B, ex binis Medijs secundā A B, cōponētes, Mediæ sunt potentia solū cōmensurabiles, quæ Mediū cōtinent; Erūt quadrata ex A C, C B, atq; adeo rectangula ipsius æqualia D H, I K, cōmensurabilia, & Media. Cum ergo propterea & totum D K, utriq; ipsorū D H, I K, sit cōmensurabile; erit & ex coroll. propos. 24. huius libri D K, Mediū; quod cum applicatū sit ad Rationalē D E; erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Rursus quia rectangulū sub A C, C B, Mediū est; erit & eius duplū L F, Mediū; quod cū applicatū sit ad Rationalē L K; erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Et quia A C, ipsi C B, lōgitudine est incōmensurabilis; estq; ut A C, ad C B, ita per lēma 3. propos. 19. huius libri, quadratū ex A C, ad rectangulū sub A C, C B; erit quoque quadratū ex A C, rectangulo sub A C, C B, incōmensurabile. Est autē quadrato ex A C, cōmensurabile cōpositum ex quadratis rectarum A C, C B, quod quadrata ex A C, C B, cōmensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia ponantur cōmensurabiles; & rectangulo sub A C, C B, cōmensurabile est eius duplum, nimirū rectangulum bis sub A C, C B. Igitur cōpositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectagulū D K, incōmensurabile est rectagulo bis sub A C, C B, hoc est, rectagulo L F, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius libri conscripsimus. Quare rectæ D L, L G, eandem

K rationem

62.

56.

45. primi

39. decimi.

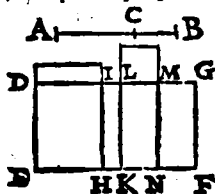
16. decimi.

23. decimi.

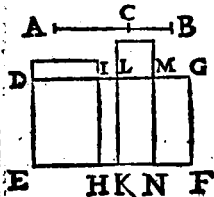
23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.



10. *decimi.* rationem cum D K, L F, habentes, longitudine sunt incommensurabiles: sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; ac
37. *decimi.* propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in



propos. 61. ostendemus DL, esse maius nomen, posseque plus, quā minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quā ob rem cum D L, maius nomen plus possit, quā L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, L G, Rationali expositæ DE,

sit ostensa longitudine commensurabilis, erit ex defin. G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Medijs secunda, &c. Quod erat demonstrandum.

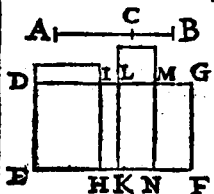
63.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

57.

Q V A D R A T V M Maioris ad Ratio

nalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



Si t Maior A B, cuius maius nomen AC; & ad Rationale D E, applicetur rectangulū D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartā. Construantur eadē prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes potentia

incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum uero sub ipsis, Medium; erit quoque D K, composito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale existens, Rationale; At uero L F, duplū eius, quod sub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem D E, est applicatum; erit DL, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cum L F, Medium sit

appli-

49. *primi*

40. *decimi.*

21. *decimi.*

applicatum ad Rationale LK ; erit LG , Rationalis ipsi LK , hoc est, ipsi DE , longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG , illa quidem ipsi DE , commensurabilis sit longitudine; hæc uero eidem DE , longitudine incommensurabilis; incommensurabiles erunt longitudine DL, LG : ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LG , Rationales potentia tantum commensurabiles; ideoque DG , ex binis nominibus est. Iam uero ut in propof. 61. demonstrabimus rectangulū sub DI, IL , æquale esse quadrato ex LM . Quia autem quadrata ex AC, CB , incommensurabilia sunt, quod rectæ AC, CB , potentia incommensurabiles sunt; Erunt etiam illis æqualia DH, IK , incommensurabilia; atque adeo & rectæ DI, IL , eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam uero ut in propof. 61. ostendimus, DL , maior est, quam LG ; & ad DL , applicatum est rectangulū sub DI, IL , quadrato ex LM , hoc est, quartæ parti quadrati ex LG , æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam DL , ad L , in partes longitudine incommensurabiles; poterit DL , plus quam LG , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa DL , (maius nomen ipsius DG , quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali DE ; erit ex defin. DG , ex binis nominibus quarta. Quadratū ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

23. decimi.

13. decimi.

37. decimi.

10. decimi.

19. decimi.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

64.
58.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB , cuius maius nomen AC ; & ad Rationalem DE , rectangulum DF , applicetur æquale quadrato ex $A B$, latitudinē faciens DG . Dico DG , ex binis nominibus quintam esse. Fiant eadem

45. primi

41. decimi.

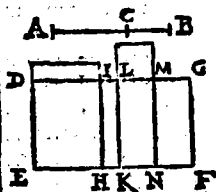
23. decimi.

21. decimi.

13. decimi.

17. decimi.

omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, cõponentes AB, potentem Rationale ac Medium, potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis con-



tentum, Rationale; erit DK, æquale cõposito ex quadratis rectarum AC, CB, Mediũ; & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommensurabile: At uero Rationale LF,

ad Rationalem LK, applicatum, facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, cõmensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine cõmensurabilis est Rationali DE, illa uero longitudine incommensurabilis; erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iam uero, ut in propos. 61. ostendimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & ut in antecedenti propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cum & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine cõmensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

65.

59.

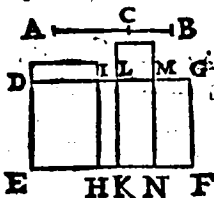
THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

45 primi.

Si igitur bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC; & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale

æquale quadrato ex AB , latitudinem faciens DG . Dico
 DG , esse ex binis nominibus sextam. Constructis iisdem
 quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC , CB , componen-
 tes ipsam AB , potentem bina Media, potentia incommen-
 surabiles, sunt, faciuntq; & cõpo-
 situm ex ipsarum quadratis Me-
 dium, & quod sub ipsis cõtinetur,
 Medium, & incõmensurable cõ-
 posito ex quadratis ipsarum; erit
 tam DK , illi composito æquale,
 quam LF , rectangulo bis sub AC ,
 CB , æquale, Medium. Et quia
 Media DK , LF , applicata sunt ad
 Rationalem DE ; erunt eorum latitudines DL , LG , Ratio-
 nales ipsi DE , longitudine incommensurabiles. Quoniã ue-
 ro cõpositum ex quadratis rectarum AC , CB , incommensu-
 rabile est rectangulo sub AC , CB ; eidem uero rectangulo
 sub AC , CB , cõmensurable est rectangulũ bis sub AC , CB ,
 cum hoc illius sit duplum; Erit cõpositum ex dictis quadra-
 tis hoc est DK , incõmensurable rectangulo bis sub AC , CB ,
 hoc est, ipsi LF ; Ac propterea rectæ DL , LG , eandẽ rationẽ
 habentes cum DL , LG , longitudine incõmensurabiles sunt.
 Rationales ergo sunt DL , LG , potentia solum cõmensura-
 biles; Ac proinde DG , est ex binis nominibus. Iam uero, ut
 in præcedenti propo. demonstrabimus DL , esse maius no-
 men, posseq; plus quam minus LG , quadrato rectæ sibi lon-
 gitudine incõmensurabilis. Cum ergo ostensum sit, neutrà
 ipsarum DL , LG , longitudine commensurabilem esse expo-
 sitæ Rationali DE ; erit ex defin. DG , ex binis nominibus
 sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, &c.
 Quod erat ostendendum.



23. decimi.

23. decimi.

42. decimi.

13. decimi.

10. decimi.

37. decimi.

THEOR. 49. PROPOS. 67.

66.

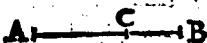
60.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitu-
 dine commensurabilis, & ipsa ex binis no-
 minibus est, atque ordine eadem.

Si r ex binis nominibus quæcunque A B, diuisa in sua nomina. quorum maius A C, & C B, minus, sitque recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B.

Fiat ut tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F; erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E. ut tota A B, ad totam D E.

12. sexti.



19. quinti



10. decimi.

37. decimi.

10. decimi.

37. decimi.

15. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E; erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis: sunt autem A C, C B, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt & D F, F E, potentia solum commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; A C propterea D E, ex binis nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quam C B, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem A C, plus potest quam C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita ut A B, sit ex binis nominibus prima; erit & D F, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum utraque, & Rationalis & D F, eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defn. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si uero C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, ut A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defn. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita ut A B, sit ex binis nominibus tertia; erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & D E, ex defn. est ex binis nominibus tertia.

A r si A C, plus possit, quam C B, quadrato rectæ sibi longi-

longi.

longitudine incommensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, uel quintam, uel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, uel quinta, uel sexta. Etenim igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

5. decimi.

S C H O L I O N.

Q U O D si recta D F, potentia tantum commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus ubique: commensurabilis potentia tantum:) & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile exposita Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudines, propterea quod non utraque, nempe exposita Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem, commensurabilis longitudine; At uero D F, potentia tantum, ex hypothesi. Immo uero, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, fieri nulla ratione potest, ut D E; illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

S I T enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, diuisa in sua nomina ad C; sitque ei commensurabilis potentia tantum D E, quam quidem, ut in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, ut D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit utraque ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumque maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali exposita commensurabilis longitudine. Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est ut A C, ad D F, ita A B, ad D E; erunt propterea & A F, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D E, ipsi A B,

potentia

12. decimi

10. decimi

potentia solum commensurabilis. Non ergo utraque AB, DE , ex binis nominibus prima est. Eodem modo neque utraque



ex binis nominibus quarta erit. Sed neque secunda, uel quinta. Esset enim utriusque nomen minus CB, FE , ex defin. longitudine commen-

surabile Rationali exposita, atque adeo & inter se. Igitur & totæ AB, DE , longitudine, forent commensurabiles. quod non ponitur.

S E M P E R tamen verum est, si AB , est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE ; ipsi AB , potentia solum commensurabilem, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC , plus quam CB , quadrato rectæ sibi longitudine commen-

15. decimi.

surabilis. Cum ergo sit ut AC , ad CB , ita DF , ad FE ; poterit quoque DF , plus quam FE , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit DE , ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB , est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut AC , plus possit, quam CB , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit quoque DF , plus quam FE , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit ut AC , ad CB , ita DF , ad FE . Igitur ex defin. erit DE , ex binis nominibus etiâ quarta, vel quinta, vel sexta, licet nō eadē ordine ipsi AB .

15. decimi.

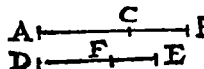
I N sequentibus autem quinque propositionibus necessariis erit DE , eadem ordine ipsi AB , quanquam potentia tantum sibi commensurabilis sit.

67.
61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Medijs, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Medijs est, atque ordine eadem.

S I T ex binis Medijs AB , quæcunque diuisa in sua nomina, quorum AC , maius, & CB , minus, sitque ei recta DE , longitudine commensurabilis. Dico DE , quoque ex binis Medijs esse, & ipsi AB , ordine eandem. Fiat ut tota AB ,
ad

ad totā D E, ita ablata A C, ad ablatam D F. Erit ergo & re
 liqua C B, ad reliquā F E, ut tota A B, ad totam D E. Et quo
 niam ipsi A B, ponitur longitudine commensurabilis D E;
 erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B,
 longitudine commensurabilis.  10. decimi.
 Sunt autem A C, C B, Mediæ. Igi
 tur & D F, F E, illis commensura
 biles, Mediæ sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B,
 ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sūt
 autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt 38. decimi.
 & D F, F E, solum commensurabiles potentia. Cum ergo 10. decimi.
 & ostensæ sint Mediæ; erunt D F, F E, Mediæ potentia tan
 tum commensurabiles; Atque idcirco D E, erit ex binis Me
 dijs. Dico & ipsi A B, eandem esse ordine. Quoniam est
 ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Est autem ut A C, ad C B,
 ita quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, & ut
 D F, ad F E ita quadratū ex D F, ad rectangulum sub D F,
 F E, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque ut
 quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, ita quadra
 tum ex D F, ad rectangulum sub D F, F E; & permutando
 ut quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulū
 sub A C, C B, ad rectangulum sub D F, F E. Commensura
 bile est, autem quadratum ex A C, quadrato ex D F; quod
 rectæ A C, D F, commensurabiles ostensæ sint longitudine.
 Igitur & rectangulum sub A C, C B, rectangulo sub D F,
 F E, commensurabile est. Quare si rectangulum sub A C,
 C B, fuerit Rationale, ita ut A B, sit ex binis Medijs pri
 ma; erit & rectangulum sub D F, F E, Rationale, cum illi
 sit commensurabile; atque adeo & D E, ex binis Medijs pri
 ma erit. Si uero rectangulum sub A C, C B, fuerit Me
 dium, ita ut A B, sit ex binis Medij. secunda; erit & rectan
 gulum sub D F, F E, ei commensurabile, Medium, ex coroll.
 propos. 24. huius lib. Ac propterea & D E, erit ex binis Me
 dijs secunda. Quare ei, quæ ex binis Medijs, longitudine com
 mensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam
 D E.

DE, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi AE, quia est ex binis Medijs, ex binis Medijs esse, atque ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est; si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus ubique: commensurabilis potentia tantum, &c. ut manifestum est.

68.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

62.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Maiorem esse. Fiant enim eadē, quæ superius; ita ut partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem



habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles sunt uel longitudine & potentia, uel potentia tantum; erunt quoque tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est ut AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutando ut AC, ad CB, ita DF, ad FE; erit ut quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo ut compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo ut quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando ut quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, FE, ostensæ sint commensurabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, comensurabile est composito ex quadratis rectarum DF, FE. Est autem compositum illud Rationale, cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB: Igitur

10. decimi.

22. sexti.

10. decimi.

40. decimi

tur

tur & hoc Rationale est, ex 9. defin.

R v r s v s quia est ut A C, ad C B, ita D F, ad F E ;
 Vt autem A C, ad C B, ita est quadratum ex A C, ad rectan-
 gulum sub A C, C B, & ut D F, ad F E, ita quadratum ex
 D F, ad rectangulum sub D F, F E, ex lemmate 3. propos. 19.
 huius libri ; Erit quoque ut quadratum ex A C, ad rectan-
 gulum sub A C, C B, ita quadratum ex D F, ad rectan-
 gulum sub D F, F E : et permutando ut quadratum ex A C,
 ad quadratum ex D F, ita rectangulum sub A C, C B, ad re-
 ctangulum sub D F, F E. Est autem quadratum ex A C,
 quadrato ex D F, commensurabile, quod rectæ A C, D F,
 ostensæ sint commensurabiles uel longitudine & potentia,
 uel potentia tantum. Igitur & rectangulum sub A C, C B,
 rectangulo sub D F, F E, commensurabile est. Est autem re-
 ctangulum sub A C, C B, Medium. Igitur & rectangulum
 sub D F, F E, illi commensurabile, Medium est, ex coroll.
 propos. 24. huius libri. Quoniam uero est ut A C, ad C B,
 ita D F, ad F E ; suntque A C, C B, potentia incommensura-
 biles, cum componant Maiorem A B ; Erunt quoque D F,
 F E, potentia incommensurabiles. Itaque cum D F, F E,
 sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum
 quidem ex ipsarum quadratis Rationale ; quod autem sub
 ipsis continetur, Medium, ut ostensum est ; erit tota D E,
 Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est.
 Quod demonstrandum erat.

10. decimi.

40. decimi.

40. decimi.

10. decimi.

40. decimi.

THEOR. 52. PROPOS. 70.

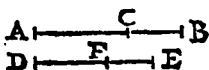
69.

63.

RATIONALE ac Medium poten-
 ti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Me-
 dium potens est.

S i t recta A B, potens Rationale ac Medium, diuisa in
 sua nomina ad C, eique commensurabilis D E, siue longitu-
 dine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, esse po-
 tentem Rationale ac Medium. Constructis iisdem, quæ su-
 pra, ostendemus, ut in præcedenti propos. compositum ex
 quadratis rectarum A C, C B, commensurabile esse compo-
 sito

41. *decimi.* fito ex quadratis rectarum DF, FE. Est autem illud compositum Medium, cum rectæ AC, CB, componant ipsam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. pro



pos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Mediū est. Eodem modo, ut in eadem propos. antecedenti, erit rectan-

41. *decimi.* gulum sub AC, CB, quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub DF, FE; atque adeo & rectangulum sub DF, FE, Rationale est, ex 9. defin. Denique ut in eadem superiori propos. erunt DF, FE, potentia incommensurabiles. Quare cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale, ut demonstratum est; erit tota DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

41. *decimi.*

70.

64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

S I T bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse bina Media potentē. Constructis iisdem, quæ supra, ostendemus, ut in propos.



69. compositū ex quadratis rectarū AC, CB, cōposito ex quadratis rectarū DF, FE, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub

42. *decimi.*

AC, CB, esse cōmensurabile rectangulo sub DF, FE. Cū ergo tā compositū ex quadratis rectarū AC, CB, quam rectangulū sub AC, CB, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius libri, tā cōpositum ex quadratis rectarū DF, FE, quam rectangulū sub DF, FE, Mediū. Sed & DF, FE, potentia incommensurabiles sunt, ut prius. Postremo quia cōpositum ex quadratis rectarū AC, CB, & rectangulum sub AC,

AC,

A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod A B, bina Media potest: Est autem compositum ex quadratis rectorum A C, C B, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectorum D F, F E; & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectorum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cum rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Mediū; & quod sub ipsis continetur, Mediū; incommensurabileq; compositum ex quadratis ipsarum; erit D E, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

42. decimi.

42. decimi.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

71.

65.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, uel ea, quæ ex binis nominibus, uel quæ ex binis Medijs prima, uel Maior, uel Rationale ac Mediū potens.

SI Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse uel ex binis nominibus, uel ex binis Medijs primam, uel Maiorem, uel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, uel maius

quam C D, uel minus: Aequale siquidem non erit; alias cum A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo

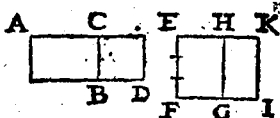


maius, & exposita Rationali E F, applicetur ad eā rectangulū E G, æquale ipsi A B; & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, ut totum E I, totum A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium; erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium: quæ cum applicentur ad

45. primi

Ratio.

21. *decimi.* Rationalem EF; erit EH, Rationalis, & ipsi EF longitu-
 23. *decimi.* dine commensurabilis; At uero HK, Rationalis, & eodem



EF, longitudine incōmen-
 surabilis. Rurſus quia EG,
 HI, incommensurabilia
 ſunt, ut conſtat ex definitio-
 nibus; quod EG, Rationa-
 le ſit, at HI, Irrationale,
 nempe Mediū; erunt EH,

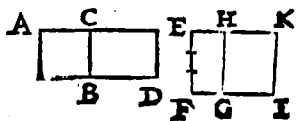
10. *decimi.* HK, eandem cum illis habentes rationem incommensura-
 biles longitudine. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia

37. *decimi.* ſolum commensurabiles; Ac propterea EH, ex binis no-
 minibus eſt. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD,
 hoc eſt, EG, quam HI; erit quoque EH, maior quam
 1. *ſexti.* HK, cum EH, HK, eandem rationem habeant, quā EG,
 HI. Iam uero maius nomen EH, plus poterit quam mi-
 nus HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commensurabilis,
 uel incommensurabilis. Si plus poſſit EH, quam HK, qua-
 drato rectæ ſibi commensurabilis longitudine; erit EK, ex
 defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen
 oſtenſum ſit longitudine commensurabile Rationali EF.
 Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali
 EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & ſpatiū
 AD, compoſitum ex Rationali AB, & Medio CD, Irra-
 tionalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

55. *decimi.* Si uero EH, plus poſſit quam HK, quadrato rectæ ſibi
 longitudine incommensurabilis; erit EK, ex binis nomini-
 bus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen oſtenſum ſit
 longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta
 potens ſpatium EI, contentū ſub Rationali EF, & ex binis
 nominibus quarta EK, atque adeo & ſpatium AD, Irra-
 tionalis eſt, quæ uocatur Maior.

58. *decimi.* Si r ſecundo AB, minus quam CD; & eadem con-
 ſtruantur, quæ prius. Erit ergo, ut prius, EK, ex binis no-
 minibus, & EH, ipſi EF, longitudine commensurabilis. Et
 quia AB, minus eſt, quam CD, hoc eſt, EG, quam HI;
 erit quoque recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rur-
 ſus HK, maius nomen ipſius EK, quæ eſt ex binis nomini-
 bus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectæ longi-
 tudine

rudique sibi commenfurabilis, vel incommenfurabilis. Si plus possit H K, quam E H, quadrato rectæ longitudine sibi cōmenfurabilis; erit E K, ex binis nominibus secunda, cum



E H, minus nomen commenfurabile sit longitudine Rationali E F, ut ostensum est. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis

nominibus secunda E K, atq; adeo & spatium A D, ex Rationali A B, & Medio C D, compositum, Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Medijs prima.

56. decimi.

Si vero H K, plus possit quam E H, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommenfurabilis; erit E K, ex binis nominibus quinta, cum E H, minus nomen ostensum sit longitudine commenfurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quinta E K, atq; adeo & spatium A D, Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Singitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

59. decimi.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

72.
66.

SI duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs secunda, vel bina Media potens.

COMPONENTUR duo Media incommensurabilia A B, C D. Dico rectam, quæ potest totum spatium A D, esse vel ex binis Medijs secundam, vel bina Media potentem. Etenim rursus A B, vel maius, quam C D, vel minus: A Equale siquidem non erit; alias essent A B, C D, commenfurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia A B, C D, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt

10. decimi.

23. decimi.

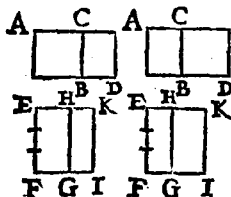
37. decimi.

47. decimi.

60. decimi.

23. decimi.

& spatia EG, HI , Media & incōmensurabilia; cum illis sint æqualia. Igitur rectæ EH, HK , eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & utraq; (cum EG, HI , Media sint, applicenturq; ad Rationalem



EF .) Rationalis est, ipsi EF , longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt EH, HK , potentia solum commensurabiles; ac propterea EK , ex binis nominibus est. Quoniam vero AB , maius ponitur quam CD ; erit ut in antecedenti propos. EH , maius nomen ipsius EK . Poterit ergo plus quam HK , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH , quam HK , quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum utrunq; nomē EH, HK , ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF ; erit EK , ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI , contentum sub Rationali EF , & ex binis nominibus tertia EK , atque adeo & spatium AD , Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

Si uero EH , plus possit quam HK , quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum utrunq; nomen EH, HK , longitudine sit incommensurabile Rationali EF ; erit EK , ex binis nominibus sexta, ut constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI , siue spatium AD , Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

Quod si AB , minus sit, quam CD ; non aliter propositum concludemus, ut ex figura constet. Quapropter si duo Media inter se incōmensurabilia componantur, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Ex his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediz, neque inter se easdem esse.

Nam quadratum Mediz ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

A T

At quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

61. decimi.

Et quadratum eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

62. decimi.

Quadratum deinde eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

63. primi.

At vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

64. decimi.

Quadratum autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

65. decimi.

Postremo quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

66. decimi.

Itaque cum hæc latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eadem ex binis nominibus; perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hæcenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIUM.

Hæcenus egit Euclides de septem senarijs.

In primo, qui continetur propof. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

In secundo, quem continent propof. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse.

In tertio deinde contendo propof. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, uidelicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta.

In quarto, quem absoluunt propof. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæc sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quamam lineæ Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, uel ex bi-

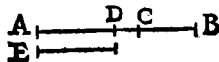
nis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

I N quinto autem, quem reperies in propof. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo fenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

I N sexto vero, qui quinque propof. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absoluitur, demonftravit lineam quamcunque commenfurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo fenario, effe Irrationalem eandem illi, cui commenfurabilis eft.

I N feptimo deniq; contendo duabus propofitionibus, nimirum 72. & 73, explicauit rursus differentiam aliam sex predictarum Irrationalium.

R E P E R I T V R autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo fenario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, que quidem confiftit in exceffu eodem. Et recta media proportionalis, fecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusvis lineae Irrationalis, eft quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiftit.



S I T enim quaecunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus $A B$, cuius maius nomen $A C$;

& diuidatur $A B$, bifariam in D ; & eius dimidia $A D$, vel $D B$, aequalis fumatur E . Dico E , mediam effe, fecundum Analogiam Arithmeticam, inter $A C$, $C B$: & E , effe quoque ex binis nominibus. Quoniam $A C$, superat dimidiam $A D$, recta $D C$; & dimidia $D B$, superat ipsam $C B$, eadem recta $D C$; perfpicuum eft, dimidiam ipsius $A B$, nempe E , effe mediam proportionalem inter $A C$, $C B$, in Analogia Arithmetica.

R V R S V S quia E , commenfurabilis eft longitudine toti $A B$, cum haec illius fit dupla; erit & E , Irrationalis eadem ipsi $A B$, ut in sexto fenario eft demonftratum.

I D E M oftendemus non aliter in ceteris lineis Irrationabilibus contingere.

S E Q V V N T V R iam feptem alij fenarij, in quibus eadem Euclides demonftrat de sex alijs lineis Irrationalibus, que per detraktionem generantur, que in precedentibus feptem fenarijs de Irrationalibus, que per compofitionem fiunt, eum oftendiffe docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM

per detractiōem.

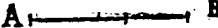
THEOR. 56. PROPOS. 74.

73.

68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATUR a Rationali A B, Rationalis A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B. Dico reliquam B C, Irrationalem esse. Quoniam per lemma 3. propos. 9. huius lib. est ut A B, ad A C,

ita quadratum ex A B, ad re-  C
ctangulū sub A B, A C: Et sunt

A B, A C, longitudine incommensurabiles; erunt incommensurabilia quadratum ex A B, & rectangulum sub A B, A C. Sed quadrato ex A B, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum A B, A C; (Cum enim A B, A C, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex A C,) rectangulo vero sub A B, A C, commensurabile est rectangulum sub A B, A C, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulum sub A B, A C, bis contentum, incommensurabilia sunt, ut in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. Est autem compositum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulo bis sub A B, A C, una cum quadrato ex B C. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A B, A C, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex B C, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum A B, A C, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex A C, linea Rationali descripto;) erit quadratum ex B C, Irrationale; atq; adeo & recta ipsa B C, Irratio-

10. decimi.

15. decimi.

7. secundi.

rationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

POTUISSET Enclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

37. decimi. NAM cum AB, AC , sint Rationales potentia tantum commensurabiles; erit composita ex A, B ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB , & minus AC . Auferitur igitur AC , minus nomen ex maiori nomine AB , ut relinquatur Apotome BC .

74.
69.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

16. decimi. DETRAHATUR a Media AB , Media AC , potentia solum commensurabilis ipsi AB , sitq; rectangulum sub AB, AC , Rationale. Dico reliquam BC , esse Irrationalem. Quoniam AB, AC , potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC , commensurabilia; atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit.

erit quadrato ex AC . Est autem quadratum ex AC , Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB , AC , Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB , AC , ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB ,

AC , Rationale. Igitur incommensurable est compositum ex quadratis rectarum AB , AC ,



rectangulo bis sub AB , AC . Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale sit rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC ; erit quoque rectangulum bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC , incommensurable rectangulo bis sub AB , AC . Quare & rectangulum bis sub AB , AC , & quadratum ex BC , incommensurabilia sunt. Existent ergo rectangulo bis sub AB , AC , Rationali; erit quadratum ex BC , Irrationale; ideoque & recta BC , Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia uidelicet relinquitur post subtractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori nomine, ut in scholio sequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

7. secundi.

17. decimi.

Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

POTVISSET hæc propositio proponi hæc modo.

Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CUM enim AB , AC , sint Mediæ potentia solum com-

38. decimi.

mensurabiles, contineant; Rationale, erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomen AB , & minus AC . Auferatur igitur AC , minus nomen ex maiori AB , ut relinquatur BC , Mediæ Apotome prima.

$A \quad C \quad B$

75.

70.

THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

36. decimi.

DETRAHATUR a Media AB , Media AC , potentia solum commensurabilis ipsi AB , sitq; rectangulum sub AB , AC , Medium. Dico reliquam BC , esse Irrationalem. Quoniam quadrata ex AB , AC , potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; erit & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile:

$A \quad C \quad B$

7. secundi.

27. decimi.

Est autem utrumque ipsorum Medium, quod & rectæ AB , AC , Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, utrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulum sub AB , AC , Medium ponitur; erit & eius duplum, rectangulum uidelicet bis sub AB , AC , ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale sit rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC ; superabit compositum ex quadratis rectarum AB , AC , quod Medium est, rectangulum bis sub AB , AC , quod etiam Medium est, quadrato ex BC . Medium autem non superat Medium Rationale. Non ergo quadratum ex BC , Rationale est. ergo Irrationale, & ipsa recta BC , Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquatur post deductionem minoris nominis eius, quæ ex binis

nis Medijs secunda, a maiori nomine, ut ex scholio sequenti apparebit. Singitur a Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Hoc etiam theorema ita potuisset proponi.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

QUONIAM AB, AC, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles; continentq; Medium; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, ut relinquitur EC, Mediæ Apotome secunda.

39. decimi.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

76.

71.

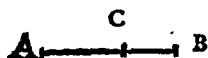
SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATUR a recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum uero sub AB, AC, atq;

adeo,

10. defin.
7. secundi.

10. defin.



adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei cōmensurable, hoc est, rectangulū bis sub AB, AC, Mediū, hoc est, Irrationale; erit cōpositū ex quadratis rectarū AB, AC, incōmensurable rectangulo bis sub AB, AC. Est autē cōpositū ex quadratis rectarū AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, una cum quadrato ex B C. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex B C, incommensurable erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. Igitur quadratum ex B C, illi incommensurable, Irrationale est; & linea B C, Irrationalis. vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post deductionem minoris nominis lineæ Maioris, a maiori nomine, ut in scholio sequenti dicemus. Si igitur a recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Si C etiam theorema hoc poterat proponi.

Si a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

40. decimi.

NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusque maius nomen AB, minus autem AC. Auferitur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, ut relinquatur Minor BC.

77.

72.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum

rota

tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATUR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est,



hoc est, Irrationale; ac rectangulum sub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB, AC, Rationale; erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurable rectangulo bis sub AB, AC. Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurable est rectangulo bis sub AB, AC. Sunt ergo & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB, AC, Rationale sit; erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium existit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua, &c. Quod ostendendum erat.

10. defn.

7. secundi

7. decimi.

10. defn.

SCHOLIUM

Hoc etiam modo Euclides theorema hoc posuisset proponere.

SI a maiori nomine eius , quæ Rationale ac Medium potest , minus nomen auferatur ; Reliqua Irrationalis est . Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens .

CUM enim AB , AC , sint potentia incommensurabiles , quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis . Medium ; quod autem sub ipsis continetur , Rationale ; erit composita ex ipsis Irrationalis , quæ nominatur Rationale ac Medium potens , cuius maius nomen est AB , minus autem AC . Auferatur igitur minus nomen AC , a maiori AB , ut BC , cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur .

41. decimi.

78.

73.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti , quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis ; Medium ; & quod sub ipsis continetur , Medium , incommensurabileq ; composito ex quadratis ipsarum : Reliqua Irrationalis est . Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens .

DETRAHATUR ex recta AB , recta AC , potentia ipsi AB , incommensurabilis ; Sitq ; tam compositum ex ipsarum quadratis , quam rectangulum sub ipsis , Medium , incommensurabileq ; composito ex ipsarum quadratis . Dico reliquam BC , esse Irrationalem . Quoniam

$A \quad C \quad B$

7. secundi

compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale est rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC , superabit compositum ex quadratis rectarum AB , AC , quod

quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC , quod ex coroll. propof. 24 huius li. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC , continetur, sit commenturabile) quadrato ex BC . Medium autem non superat Mediū Rationali. Non ergo quadratum ex BC , Rationale est. ergo Irrationale, & recta ipsa BC , Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC , quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC , quod Medium etiā est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

27. decimi.

SCHOLIUM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

Si a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Mediū totum efficiens.

*Q*UONIAM cum AB, AC , sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque compositum ex quadratis ipsarum; erit compositum ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB , & minus AC . Aufertur igitur minus nomen AC , ex maiori AB , ut relinquatur BC , cum Medio Medium totum efficiens.

42. decimi.

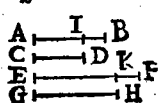
LEMMA.

Si idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam,

qui

qui inter secundam magnitudinem & quartam.

S I N T quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH , sitq; IB , excessus inter AB, CD , aequalis excessui KF , inter EF, GH . Dico eundem esse excessum inter AB, EF , qui inter CD, GH . Quoniam IB , excessus est inter $AB, \& CD$; erit AI , ipsi CD , aequalis. Eodem modo aequalis erit EK , ipsi GH . Idem igitur excessus erit inter $AI, \& EK$, qui inter $CD, \& GH$; cum haec magnitudines illis sint aequales, singulae singulis. Est autem totorum AB, EF , ex pronunciato 15. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK ; quod IB, KF , aequales ponuntur. Igitur idem quoque excessus erit inter $AB, \& EF$, qui inter $CD, \& GH$. quod est propositum.



sum inter AB, EF , qui inter CD, GH . Quoniam IB , excessus est inter $AB, \& CD$; erit AI , ipsi CD , aequalis. Eodem modo aequalis erit

EK , ipsi GH . Idem igitur excessus erit inter $AI, \& EK$, qui inter $CD, \& GH$; cum haec magnitudines illis sint aequales, singulae singulis. Est autem totorum AB, EF , ex pronunciato 15. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK ; quod IB, KF , aequales ponuntur. Igitur idem quoque excessus erit inter $AB, \& EF$, qui inter $CD, \& GH$. quod est propositum.

COROLLARIUM.

Ex his constat, quatuor magnitudines Arithmeticae Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticae Analogiam. quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperiuntur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticae habeant.

79.

74.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

APOTOMAE una tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

S I T Apotome AB ; congruens autem ei Rationalis BC ,

B C, potentia solum toti A C, commensurabilis. Dico ipsi A B, aliam Rationalem non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis B D, ita ut B D, ipsi A D, sit potentia solum commensurabilis. Et quia B C, $\frac{A}{B} \frac{C}{D}$

Rationalis est; erit & A C, illi solū potētia cōmēsurabilis, Rōnalis. Rōnales ergo sunt A C, B C, potētia tantum commensurabiles. Eodem modo erunt & A D, B D, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectorum A C, B C, & rectangulum bis sub A C, B C, qui inter compositum ex quadratis rectorum A D, B D, & rectangulum bis sub A D, B D; (superat enim compositum ex quadratis rectorum A C, B C, rectangulum bis sub A C, B C, quadrato ex A B; quod compositum ex quadratis rectorum A C, B C, æquale sit rectangulo bis sub A C, B C, vna cum quadrato ex A B. Et eodem modo compositum ex quadratis rectorum A D, B D, superat rectangulum bis sub A D, B D, quadrato eodem ex A B; cum & compositum ex quadratis rectorum A D, B D, æquale sit rectangulo bis sub A D, B D, vna cum quadrato ex A B.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectorum A C, B C, & compositum ex quadratis rectorum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propof. 27. huius lib. quod utrumque Rationale sit. (Nam cum A C, B C, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utriusque illo-
rum commensurabile est, atque adeo & Rationale, ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectorum A D, B D.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium Rationale est. Et quia rectangulum sub A C, B C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum,

nempe

7. secundi.

7. secundi.

16. decimi.

22. decimi.

27. *decimi.*

nempe rectangulum bis sub A C, B C. Medium. Eadem-
que ratione Medium erit rectangulum bis sub A D, B D.
Medium autem non superat Medium Rationali Igitur
excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectan-
gulum bis sub A D, B D, Rationale spatium non est.
Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum.
Ergo ipsi A B, alia Rationalis non congruit, præter
B C, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apo-
tomæ igitur una tantum congruit, &c. Quod erat osten-
dendum.

80.

75.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIAE Apotomæ primæ vna tan-
tum congruit recta linea Media, potentia
solum commensurabilis existens toti, &
cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima A B; & ipsi congruat B C,
Media toti A C, potentia solum commensurabilis, & rectan-
gulum sub A C, B C, sit Rationale. Dico ipsi A B, aliam
Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum com-
mensurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Si enim fie-
ri potest, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tan-
tum commensurabilis, sitq; rectangulū
sub A D, B D, Rationale. Et quia B C,
Media est potentia solum ipsi A C, commensurabilis; erit
& A C, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo
sunt A C, B C, potentia tantum commensurabiles. Simili-
ter & A D, B D, Mediæ erunt potentia solum commensu-
rabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum
ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex qua-
dratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub
A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, ut in propos.
præcedenti ostensum est. Est autem excessus inter hæc re-
ctangula, ex scholio propos. 27. huius lib. spatium Ratio-
nale; quod utrunq; sit Rationale (cum enim rectangulum
sub

24. *decimi*

sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub A D, B D. Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ A C B C, Mediæ sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Mediæ, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utriusque ipsorum commensurabile est, atque adeo & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoque Medium erit compositum ex quadratis rectarum A D, B D. Medium autem non superat Medium Rationale. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Mediæ non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solum commensurabilis, continetque eum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

16. decimi.

27. decimi.

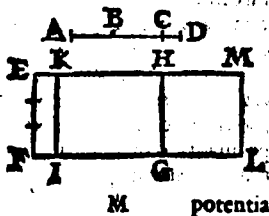
THEOR. 64. PROPOS. 82.

81.

76.

MEDIAE Apotomæ secundæ una tantum congruit recta lineæ Mediæ potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotomæ secundæ A B, cui congruat Mediæ B C, toti A C, potentia tantum commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliam Mediæ non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque eum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia B D, Mediæ toti A D,



45. primi

7. secundi.

24. decimi.

16. decimi.

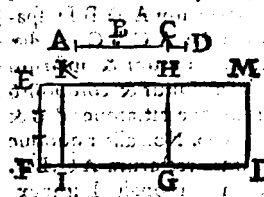
23. decimi.

23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

potentia tantum commensurabilis; sitque rectangulum sub
 $A D, B D$, Medium. Exponatur Rationalis $E F$, ad quam
 applicetur rectangulum $E G$ æquale composito ex qua-
 dratis rectarum $A C, B C$; & ad eandem $E F$, aliud $E I$, ap-
 plicetur æquale quadrato ex $A B$. Et denique aliud
 $E L$, æquale composito ex
 quadratis rectarum $A D, B D$.
 Quoniam igitur compositum
 ex quadratis rectarum $A C, B C$, æquale est birectangulo
 bis sub $A C, B C$ Quia cum
 quadrato ex $A B$; erit $K G$, æquale ei, quod bis continetur
 sub $A C, B C$. Eodemque modo erit $K L$, æquale ei, quod bis
 continetur sub $A D, B D$. Et quoniam $A C, B C$, Medie sunt,
 & potentia commensurabiles; (cum enim $B C$, Media ponatur,
 erit & $A C$, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt
 & earum quadrata Media; & commensurabilia. Ergo &
 compositum ex ipsis commensurabile est utrique eorum; &
 atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib.
 Igitur & $E G$, quod illi composito æquale est, Medium est;
 quod cum applicetur ad Rationalem $E F$, erit $E H$, Ratio-
 nalis ipsi $E F$, longitudine incommensurabilis. Rursus quia
 rectangulum sub $A C, B C$; Medium est; erit ex coroll.
 propos. 24. huius lib. & eius duplum; nempe $K G$, Me-
 dium: quod cum applicetur ad Rationalem $K I$, erit $K H$,
 Rationalis ipsi $K I$, hoc est; ipsi $E F$, longitudine incommen-
 surabiles sunt, estque ut $A C$, ad $B C$, ita quadratum ex
 $A C$, ad rectangulum sub $A C, B C$, ut ostendimus lem-
 mate 3. ad propos. 19. huius lib. erit quadratum ex $A C$,
 incommensurabile rectangulo sub $A C, B C$. Est autem
 quadrato ex $A C$, commensurabile compositum ex qua-
 dratis rectarum $A C, B C$, hoc est, rectangulum $E G$. (cum
 enim recte $A C, B C$, ponantur potentia commensurabiles;
 erunt & earum quadrata commensurabilia. Igitur & compo-
 situm ex ipsis commensurabile est utrique ipsorum, nempe
 quadrato ex $A C$.) & rectangulo sub $A C, B C$, comensu-
 rabile est eius duplum, uidelicet $K G$. Igitur & $E G$, ipsi $A G$,
 incommensurabile.



incommensurable est, ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. Rectæ igitur EH, AH, eandem habentes rationē cū EG, KG, longitudine incommensurabiles sunt; & 10. decimi.
 & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles. Quapropter cū ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensurabilis si EH, erit EK, Apotome, & illi congruens KH. 74. decimi.
 Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ una tantum congruit recta linea Rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere, demonstratum est. Igitur Medium Apotomæ secundæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum. 80. decimi.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

MINORI una tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quiddē ex ipsarum quadratis Rationale; quod autē sub ipsis continetur, Medium.

S: T Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale, & rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadem præbet. Sic enim, si fieri potest, alia congruens BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quiddē ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, & rectangulum sub AD, BD, Mediū. Quoniā igitur, ut in propos. 80. demonstratū est, idē excessus est inter compositū ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulū bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri.

quod utranque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter
 rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D,
 B D, spatium est Rationale. sed & non Rationale est. (Cū
 enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. pro-
 pos. 24. huius lib. eius duplum, nempe
 rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Similiterque Mediū
 erit rectangulum bis sub A D, B D. Quare unum non su-
 perabit alterum Rationale. Quod est absurdum. Ergo
 ipsi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti
 incommensurabilis, &c. Minori ergo una tantum congruit, &c.
 Quod erat demonstrandum.

27. decimi.

83.

78.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

EI, quæ cum Rationali Medium totum
 facit, una tantum cōgruit recta linea poten-
 tia incommensurabilis existens toti, & cum
 tota faciens compositum quidem ex ipsa-
 rum quadratis Medium; quod autem sub
 ipsis continetur, Rationale.

Si T rectarum Rationali Medium totum faciens A B,
 cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommensurabi-
 lis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum
 A C, B C, Medium, rectangulum uero sub A C, B C, Rationa-
 le. Dico ipsi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc
 cuncta faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta
 B D, toti A D, potentia incommensura-
 bilis, faciensque compositum quidem ex
 quadratis rectarum A D, B D, Medium,
 rectangulum uero sub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur,
 ut in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter
 compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositū
 ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis
 sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem
 excessus

A B C D

excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, ut in propo-
s. 81 demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa com-
posita, spatium Rationale est: sed & non Rationale est, cū
utrumque sit Medium. Medium enim Medium non superat
Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi A B,
alia recta, quam B C, congruet potentia toti incommensu-
rabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum
facit, una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandū.

27. decimi.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

84.

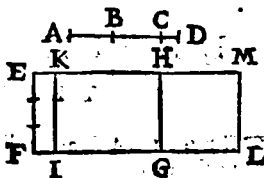
79.

EI, quæ cum Medio Medium totum
facit, una tantum congruit recta linea po-
tentia incommensurabilis existens toti, &
cum tota faciens & compositum ex ipsarū
quadratis Medium, & quod sub ipsis con-
tinetur Medium, incommensurabileq; cō-
posito ex ipsarum quadratis.

SIT recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipsi
uero congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis,
faciensque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C,
Medium, & rectangulum sub A C, B C, Medium, incom-
mensurabileque composito
ex quadratis rectarum A C,
B C. Dico ipsi A B, aliam

non congruere, quæ eadē
hæc faciat. Si enim fieri po-
test, congruat ipsi recta alia
B D, toti A D, potentia inco-
mmensurabilis, ita ut & com-

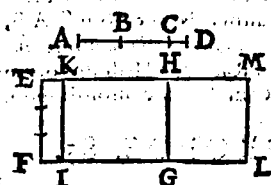
positum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium sit, & re-
ctangulum sub A D, B D, Medium quoque, ac incommensu-
rabile composito ex quadratis rectarum A D, B D. Constru-
ctis autem iisdem, quæ in propos. 81. quoniam compositū
ex quadratis rectarum A C, B C, Medium est; erit etiam E G,



23. decimi.

23. decimi.

illiusquale, Medium. Recta igitur $E H$, Rationalis est, ipsi $B F$, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub $A C$, $B C$, Medium est, erit & eius duplum $K G$, Medium. Igitur & recta



$A H$, Rationalis est, longitudine ipsi $E F$, incommensurabilis. Et quoniam $K G$, commensurabile est rectangulo sub $A C$, $B C$, cum illud huius sit duplum, at rectangulum sub $A C$, $B C$, incommensurabile ponitur compositio ex quadratis rectarum $A C$, $B C$; erit quoque $K G$, eidem composito, hoc est, ipsi $E G$, incommensurabile; Ac propterea rectæ $E H$, $K H$, eandem habentes cum $E G$, $K G$, rationem, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali $E H$, auferatur Rationalis $K H$, potentia solum commensurabilis ipsi $E H$; erit $E K$, Apotome, & ei congruens $K H$. Non aliter ostendamus $E K$, esse Apotomen, & ei congruentem esse $K M$. Non igitur Apotomæ una tantum recta congruit, &c. Quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

14. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

80. decimi.

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longi-

longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI uero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RURSUS si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ linæ sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI uero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

Q V O D si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

SCHOLION.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus suis collectus. Sunt enim sex hæ Apotome, rectæ lineæ, quæ relinquantur post subtractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, ut ex definitis ionibus est perspicuum.

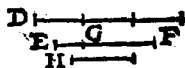
85.
80.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

R E P E R T I S duobus numeris quadratis AB, CB, ut in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus AC, non sit quadratus; ita ut AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, non: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit

A C B



EF. Eritq; EF, cū commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde ut numerus AB, ad numerū AC, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratū ex GF. Dico EG, esse primam Apotomen. Quoniam quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia uero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri;

6. decimi.

numeri; neque quadrata ex E F, G F, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, G F. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia tantum commensurabiles; atque idcirco reliqua E G, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta E F, plus quam recta G F, quadrato rectæ H. Et quia est ut numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conuersionem rationis, ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; Ac propterea rectæ E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem E F, exposita Rationali D, commensurabilis longitudine; erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

9. decimi.

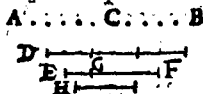
74. decimi.

9. decimi.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut in ptopos. præcedenti; expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis G F; eritque G F, Rationalis D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F, per coroll. ptopos. 6. huius libri. Dico E G, esse secundam Apotomen.



Quoniam quadrata ex G F, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ G F, E F, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo G F, sit ostensa Rationalis; erit quoque E F, Rationalis. Quia uero numeri A C, A B, atque adeo & quadrata ex G F, E F, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erant G F, E F, longitudine incommensurabiles.

6. decimi.

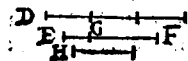
9. decimi.

les.

74. *decimi.*

les. Rationales ergo sunt GF , EF , potentia solum com-
mensurabiles; Ideoque EG , reliqua, Apotome est. Dico

$A \dots C \dots B$



& secundam esse. Possit enim re-
cta EF , plus quam GF , qua-
drato ex H . Quoniam ergo est
ut AC , ad AB , ita quadratum
ex GF , ad quadratum ex EF ; &
conuertendo, ut AB , ad AC , ita
quadratum ex EF , ad quadratum

ex GF : Ostendemus iam, ut in antecedenti propos. re-
ctam H , ipsi EF , longitudine esse commensurabilem.
Quam ob rem cum tota EF , plus possit, quam congruens
 GF , quadrato rectæ H , sibi longitudine commensura-
bilis, sitque congruens GF , expositæ Rationali D , lon-
gitudine commensurabilis; erit EG , ex defin. secunda
Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod
erat faciendum.

87.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

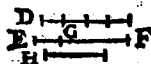
82.

INVENIRE tertiam Apo-
tomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB , CB , ut
in propos. 86. sumatur alius numerus I , ut in propos. 51. hu-

$A \dots C \dots B$

$I \dots$



ius lib. docuimus, qui ad neutrum
ipforum AB , AC , proportio-
nem habeat, quam quadratus ad
quadratum. Exposita deinde Ra-
tionali D , fiat ut I , ad AB , ita
quadratum ex D , ad quadratum
ex EF , per coroll. propos. 6. hu-
ius lib. Eruntque quadrata ex D ,

6. *decimi.*

& EF , proportionem habentia, quam numeri I , & AB , com-
mensurabilia; atque adeo & rectæ D , & EF , comensurabi-
les, saltem potentia. Existente ergo D , Rationali, erit &
 EF , Rationalis. Et quia numeri I , & AB , ac propterea qua-

quadrata ex D , & EF , proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt rectæ D , & EF , longitudine incommensurabiles. Rursus fiat ut AB , ad AC , ita quadratum ex EF , ad quadratum ex GF , ex eodem corollario propos. 6. huius libri. Dico EG , esse tertiam Apotomen. Quoniam quadrata ex EF , GF , proportionem habentia, quam numeri AB , AC , commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF , GF , commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF , ostensa sit Rationalis, erit & GF , Rationalis, cum illi hæc sit commensurabilis, ut demonstrauimus. Et quia AB , AC , atque adeo & quadrata ex EF , GF , proportionem non habent, quam numeri quadrati; Erunt rectæ EF , GF , longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt EF , GF , potentia solum commensurabiles; Ac propterea cum ex EF , auferatur GF , potentia illi solum commensurabilis; reliqua EG , Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam est ut I , ad AB , ita quadratum ex D , ad quadratum ex EF ; & ut AB , ad AC , ita quadratum ex EF , ad quadratum ex GF ; erit ex æquo ut I , ad AC , ita quadratum ex D , ad quadratum ex GF . Non habent autem numeri I , & AC , proportionem quam numeri quadrati; Neque igitur quadrata ex D , & GF , proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Sunt ergo rectæ D , & GF , longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & D , EF , longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum EF , GF , longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D . Possit iam EF , plus quam GF , quadrato rectæ H : Ostendemusque, ut in propos. 86. rectam H , esse ipsi EF , longitudine commensurabilem. Quapropter cum tota EF , plus possit quam congruens GF , quadrato rectæ H , longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum EF , GF , longitudine commensurabilis sit Rationali D , expositæ; erit ex defn. EG , tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen Quod faciendum erat.

9. decimi.

6. decimi.

9. decimi.

74. decimi.

9. decimi.

88.

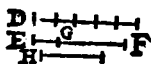
83.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita ut A B, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit E F, eritque propterea & E F, Rationalis Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, ut ibi, E G, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit n. E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia est ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conversionem rationis, ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum ergo A B, & C B, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota E F, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

A C . . . B



9. decimi.

89.

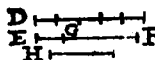
84.

THEOR. 23. PROPOS. 90.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ut in propos. præcedenti; fiat constructio, ut in propos. 87. hoc est, sumatur G F, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo ut in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & secundam esse. Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, ut in propos. 86. ostendimus

A C . . . B



demus, per conuersionem rationis, esse ut AB , ad CB , ita quadratum ex EF , ad quadratum ex H ; erunt rursus, ut in propos. antecedenti, rectæ $E F$, & H , longitudine incommensurabiles. Quia ergo tota BF , plus potest, quam congruens GF , quadrato rectæ H , sibi longitudine incommensurabilis; estque congruens GF , Rationali D , commensurabilis longitudine; erit ex defin. EG , quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

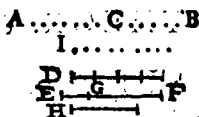
PROBL. 24. PROPOS. 91.

90.

85.

INVENIRE sextam Apotomen.

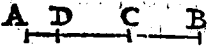
REPERTIS tribus numeris AC , CB , & I ; ut in propos. 54. ita ut AB , ad neutrum ipsorum AC , CB ; & I , ad neutrum ipsorum AB , AC , proportionem habeat, quam quadratas ad quadratum: exponatur Rationalis D , & reliqua fiant, ut in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, ut ibi, D , & EF , longitudine incommensurabiles esse; & EG , Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam ut in propos. 88. erunt D , & GF , longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeo neutra ipsarum EF , GF , longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D . Possit iam EF , plus quam GF , quadrato rectæ H , quam ostendemus, ut in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi EF . Igitur cum tota EF , plus possit, quam congruens GF , quadrato rectæ H , sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF , GF , longitudine sit commensurabilis Rationali D ; erit ex defin. EG , sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.



SCHOLIUM.

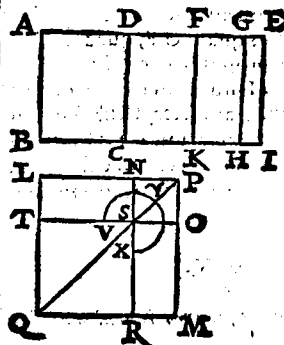
SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniuntur hac ratione, ut Theor. docet hoc loco.

49. decimi. SI T inuenienda exempli gratia, prima Apotome. Reperiatur prius ex binis nominibus prima A B, cuius maius nomen A C, & minus B B. Abscissa igitur ex A C, recta C D, quæ a qualis sit ipsi C B. Dico A D, esse primam Apotomen. Quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erunt etiam A C, D C, Rationales potentia tantum commensurabiles. Est ergo A D, Apotome. Et quia A C, plus potest, quam C B, hoc est, quam D C, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cõmensurabilis; & est A C, Rationali exposita longitudine commensurabilis; ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotome prima, A D, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, ut ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.

74. decimi. 

91. THEOR. 68. PROPOS. 92.
86.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.



CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma prima A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Apotomen esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt igitur A E, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solum commensurabiles; & tota A E, longitudine cõmensurabilis Rationali A B; & denique eadem A E, tota plus poterit, quam

quam congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE,
hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, re-
ctangulum æquale sub AG, GE, deficiens figura quadra-
ta, per lemma 2. propof. 17. huius lib. Et quia AE, plus
potest, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis; erunt rectæ AG, GE, longitudine commen-
surabiles; At propterea & utraque toti AE, longitudine
commensurabilis erit. Est autem AE, Rationali AB,
longitudine commensurabilis. Igitur & utraque AG, GE,
ipsi AB, longitudine est commensurabilis; atque ex defini-
tione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipsi AB, paralle-
lis, quæ ipsi BC, productæ occurrant in H, I; erit utrumque
rectangulum AH, GI, contentum sub duabus Rationalibus
longitudinibus commensurabilibus, Rationale. Rursus quia
utraque DF, FE, longitudine commensurabilis est ipsi DE;
& DE, longitudine incommensurabilis est Rationali AB;
(Nam si commensurabilis esset longitudo, cum & AE, sit
eidem AB, longitudine commensurabilis; essent AE, DE, longi-
tudo quoque commensurabiles. Quod est absurdum, po-
nuntur in solâ potentia commensurabiles.) erit etiam utraque
ipsarum DF, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quo-
niâ utraq; DF, FE, Rationali DE, commensurabilis, Rationa-
lis est; Erunt propterea tam AB, DF, quæ AB, FE, Rationa-
les potentia tantum commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB,
parallela, erit utrumq; rectangulum DK, FI, contentum sub Ra-
tionalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

Iam uero ipsi AH, fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI,
æquale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, an-
gulum LPM. Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem
diametrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem figura, ut uides.
Quoniâ igitur rectangulum sub AG, GE, per constructionem,
æquale est quadrato ex FE; erunt tres rectæ AG, FE, GE,
proportionales; Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipsis
habeant rationem; erit FI, medium proportionale inter AH,
GI, hoc est, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem
inter eadem LM, NO, per lemma propof. 14. huius lib. me-
dium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO,
æqualia sunt: Sed ipsi FI, æquale est DK; & ipsi LO,
æquale

18. decimi.

16. decimi.

12. decimi.

20. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

14. secundi.

25. sexti.

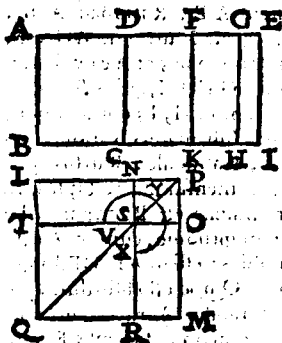
17. sexti.

1. sexti.

26. primi

æquale est M N. Est ergo totum D I, totignomini V Y X, cum quadrato N O, æquale. Est autem & totum A I, per constructionem, æquale quadratis L M, N O. Igitur & reliquum A C, reliquo quadrato T R, est æquale. Ac propterea recta T S, potest spatium A C. Dico T S, Apotomen esse.

Q U O N I A M spatia A H, G I, ostensa sunt Rationalia; & eis æqualia sunt L M, N O, erunt quoque quadrata L M, N O, Rationalia; atque adeo & rectæ T O, S O, Rationales. Rursus



quia F I, Medium est ostensum; est & L O, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt L O, & N O, cum unum sit Irrationale, alterum uero Rationale. Igitur rectæ T O, S O, eandem rationem habentes cum L O, N O, longitudine incommensurabiles sunt; Ac idcirco reliqua

1. sexti.
10. decimi.

74. decimi

T S, Apotome est. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandū erat.

92.

87.

THEOR. 69. PROPOS. 93.

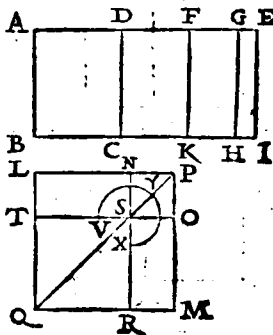
S I spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

C O N T I N E A T U R spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma secunda A D. Dico rectam, quæ spatium A C, potest, Mediæ Apotomen esse primam: Sit ipsi A D, congruens recta D E. Erunt ergo A E, D E, ex definitione Apotomæ secundæ, Rationales potentia tantum commensurabiles, & congruens D E, longitudine commensurabili Rationali

rationali A B; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua omnia contruantur, ut in propositione præcedenti. Eruntq; rursus, ut in antecedenti propositione, A G, G E, longitudine commensurabiles; Ac propterea & utraq; toti A E, longitudine commensurabilis. Est autem A E, Rationali A B, longitudine incommensurabilis: (Si enim commensurabilis esset ipsi A B, longitudine, cum D E, eidem A B, ponatur longitudine commensurabilis; essent A E, D E, inter se quoque commensurabiles longitudine. Quod est absurdum. ponuntur enim potentia tantum commensurabiles.) Igitur & utraque ipsarum A G, G E, longitudine incommensurabilis est eidem A B. Est autem utraque A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt tam A B, A G, quam A B, G E, potentia solum commensurabiles; Atq; idcirco rectangulum utrunq; A H, G I, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium est. Rursus quia utraq; D F, F E, ipsi D E, longitudine commensurabilis est; & ponitur D E, Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit quoque, ut in scholio propof. 12. huius lib. ostendimus, eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis utraq; D F, F E; atq; adeo & Rationalis. Vtrunq; ergo rectangulum D K, F L, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam vero ut in præcedenti propof. demonstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, Medium Apotomen esse primam.

Q U O N I A M A G, G E, longitudine sunt commensurabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atque adeo & L M, N Q, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & late-

ra co-



18. decimi.
16. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

20. decimi.

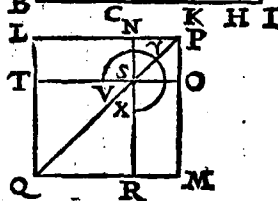
10. decimi.

ra eorum, nempe rectæ TO , SO , saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM , NO , Medijs AH , GI , æqualia, (ostensa enim sunt

AH , GI , Mediæ esse.) Mediæ sint. Et quoniam FI ,



10. decimi.



75. decimi.

sum; erit TS , Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium continetur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.

93.
88.

THEOR. 70. PROPOS. 94.

SI spatium continetur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATUR spatium AC , sub Rationali AB , & Apotoma tertia AD . Dico rectam, quæ spatium AC , potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit ipsi AD , congruens DE . Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE , DE , Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE , DE , longitudine commensurabilis Rationali AB ; Et denique AE , plus poterit, quam DE , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Sectetur DE , bisariam in F , & cætera fiant, ut in propof. 92. eruntq; rursus, ut ibi, AG , GE , longitudine inter se com-

mensu-

menfurabiles; Ac propterea & utraq; toti A E, longitudi-
 ne commenfurabilis erit. Eft autem A E, pofita incommen-
 furabilis longitudine Rationali A B. Igitur & utraque A G,
 G E, eidem A B, longitudine erit incommenfurabilis. Cum
 ergo utraque A G, G E, Ra-
 tionali A E, commenfurabi-
 lis, Rationalis fit; erunt ita
 A B, A G, quam A B, G E,
 Rationales potentia folum
 commenfurabiles; Ac pro-
 pterea utrumque rectangu-
 lum A H, G I, Medium erit.
 Rurfus quia D E, longitu-
 dine ponitur incommentu-
 rabilis Rationali A B; erit
 quoque utraque D F, F E,
 ipfi D E, longitudine com-
 menfurabilis exiftens, eidẽ
 A B, longitudine incommenfurabilis. Cum ergo utraque
 D F, F E, Rationali D E, commenfurabilis, fit Rationa-
 lis; erunt tam A B, D F, quam A B, F E, Rationales poten-
 tia tantum commenfurabiles; atq; propterea utrumq; rectan-
 gulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonftrabi-
 mus, ut in propof. 92. rectam T S, poffe fpatium A C. Di-
 co T S, effe Mediæ Apotomen fecundam.

Quoniam A H, G I, Mediæ funt offenfa; erunt &
 quadrata L M, N O, illis æqualia; Mediæ; Ac propterea &
 rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem haben-
 tia rationem, quam A G, G E, quas oftendimus commen-
 furabiles effe, commenfurabilia funt; Erunt & quadrata
 L M, N O. commenfurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, cõ-
 menfurabiles, faltem potentia. At uero quia A E, D E, po-
 tentia folum funt commenfurabiles, hoc eft, longitudine in-
 commenfurabiles, eftq; ipfi A E, longitudine offenfa com-
 mēfurabilis G E, ipfi uero D E, cõmenfurabilis eft longitu-
 dine F E, ærũ ex fcholio propof. 14. huius lib. & G E, F E, lōgi-
 tudine incõmenfurabiles; ac propterea G I, F I, eandem rationẽ
 habentia, quam G E, F E, hoc eft, illis æqualia N O, L O, incõ-
 mēfurabilia. Quare T O, S O, eandẽ rationem habentes

16. decimi.

14. decimi.

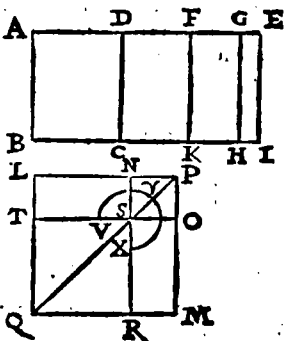
22. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

10. decimi.

10. decimi.



quam L O, N O, longitudine incommensurabiles sunt. Oñsenſæ ſunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo ſunt T O, S O, potentia ſolum commensurabiles. Et quoniam continent L O Medium; (cum enim L O, æquale ſit ipſi F I, ut conſtat ex propoſ. 92. quod Medium eſſe oſtendimus; erit & L O, Medium.) erit T S, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

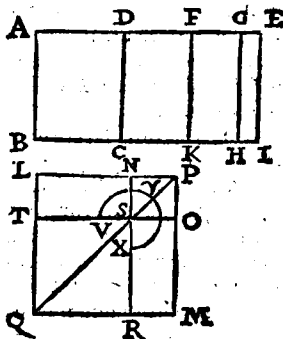
76. decimi.

94.
89.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

S I ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta; Recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATUR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Minorem eſſe ſic ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Rationales potentia ſolum commen-



19. decimi.

ſurabiles, ex definitione Apotome quartæ; & A E, longitudine cõmenſurabilis Rationali A B, & eadem A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur D E, biſariam in F, & reliqua omnia fiant, ut prius. Erunt ergo A G, G E, incommenſurabiles longitudine; quandoquidem A E, plus poteſt, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine in-

commenſurabilis; & ad A E, applicatum eſt rectangulum ſub A G, G E, æquale quartæ parti quadrati ex D E, deficientiſq; figura quadrata. Et quia A E, Rationalis eſt, & Rationali A B, longitudine cõmenſurabilis; erit rectangulũ A I, Rationale. Rurſus quia D E, Rationalis eſt, & Rationali

20. decimi.

nali AB , longitudine incommensurabilis; erit DI , atque adeo & eius dimidium FI , Medium. Amplius cum AG , GE , sint longitudine incommensurabiles; incommensurabilia erunt AH , GI , eandem cum illis proportionem habentia. Iam uero similiter demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam TS , posse spatium AC . Dico TS , esse Minorem.

22. decimi.

10. decimi.

Q U O N I A M ex constructione, rectangulo AI , æquale est compositum ex quadratis LM , NO , rectarum TO , SO ; Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum TO , SO , Rationale. Item quia FI , Medium est ostensum, erit & LO , contentum sub TO , SO , illi æquale, Medium. Denique quoniam AH , GI , incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata LM , NO ; illis æqualia, incommensurabilia; Atque adeo rectæ TO , SO potentia incommensurabiles. Quapropter cum TO , SO , potentia sint incommensurabiles, sitque compositum ex quadratis ipsarum, Rationale; rectangulum uero sub ipsis, Medium; erit reliqua TS , Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

77. decimi.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

95.

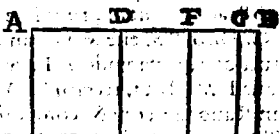
90.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

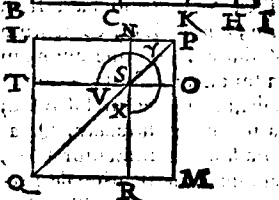
C O N T I N E A T U R spatium AC , sub Rationali AB , & Apotoma quinta AD . Dico rectam lineam quæ spatium AC , potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi AD , congruens DE , Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE , DE , Rationales potentia tantum commensurabiles, & DE , Rationali AB , commensurabilis longitudine; Et denique AE , plus poterit, quam DE , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE , bifariam in F , & reliqua con-

struantur, ut prius. Erunt ergo rursus, ut in anteceden-
propof. A G, G E, longitudine incommensurabiles. Et
quia A E, Rationalis longitudine incommensurabilis est
Rationali A B, ut in propof. 93. diximus, erit rectangu-

22. decimi.



20. decimi.



lum A I, Medium. Item
quia D E, Rationalis est, &
Rationali A B, longitudine
incommensurabilis, erit D I,
atq; idem & eius dimidia
F I, Rationale. Rursus e-
sunt, ut in præcedenti pro-
pos. A H, G I, incommen-
surabiles; poteritq; ut ostē-
sum est in propof. 92. recta
T S, spatium A C. Dico
T S, esse eam, quæ cum Ra-
tionali Medium totum effi-

Q U O N I A M ostensum est A I, Medium esse; erit &
compositum ex quadratis L M, N O, rectatum T O, S O,
illi æquale, Medium. Item quia demonstravimus F I, Ra-
tionale esse; erit & L O, rectangulum sub T O, S O, conten-
tum, cum illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & T O, S O,
potentia incommensurabiles, ut in propof. antecedenti est
demonstratum. Igitur cum T O, S O, potentia incommen-
surabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis,
Medium; rectangulum uero sub ipsis, Rationale; erit reli-
qua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit.
Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apo-
toma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

78. decimi.

96.

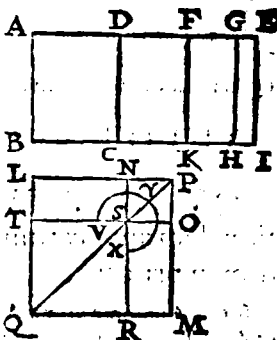
91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali,
& Apotoma sexta; Recta linea spatium po-
tens est, quæ cum Medio Medium totum
efficit.

C O N

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum cõmensurabiles, & neutra ipsorum AE, DE, Rationali AB, cõmensurabilis longitudinis. Et desinit AE, plus potent, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bisariam in F, & reliqua construantur, ut supra. Erunt ergo rursus ut in propof. 95. AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; erit tam AI, quam DI, atq; adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntq; ut in propof. 95. AH, GI, incommensurabilia. Et quoniam AB, DE, potentia solum sunt cõmensurabiles; Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia; Atque adeo cum illis FI, cõmensurabilia sint, erit FI, ipsi AI, incommensurabile. Iam uero demonstrabimus, ut in propof. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.



22. decimi.

10. decimi.

14. decimi.

Quoniam NAM AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumq; sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incommensurabile, ut ostendimus; erit quoque LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum TO, SO; propterea quod LO, ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, sit æquale. Denique TO, SO, potentia incommensu-

incommensurabiles sunt, ut in propof. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO , SO , sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile; erit reliqua $T.S.$ ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum.

79. decimi.

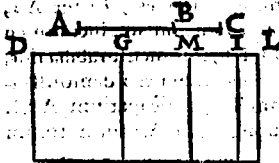
97.
92.

THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinē facit Apotomen primam.

45. primi.

SIT Apotome prima AB , & ipsi congruens BC , ita ut AC , BC , sint Rationales potentia solum commensurabiles, & ad Rationalem DE , applicetur rectangulum DF , æquale quadrato ex AB , latitudinem faciens DG . Dico DG , esse Apotomen primam. Ad eandem DE , applicetur rectangulum DH , æquale quadrato ex AC , & ad $I.H$, aliud IK , æquale quadrato ex BC , ita ut totum DK , æquale sit composito ex quadratis rectarum AC , BC . Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC , BC , æquale est rectangulo bis sub AC , BC , una cum quadrato ex AB ; si auferatur quadratum ex AB , & rectangulum DF , relinquetur GK , rectangulo bis sub AC , BC , æquale; eritque adeo diuisa GL , bisatam in M , ductaq; $M.N$, ipsi DE , parallela, erit MK , æquale rectangulo sub AC , BC . Et quoniam AC , BC , Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex AC , BC , Rationalia; ideoq; commensurabilia. Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC , BC , utrique ipsorum sit commensurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK ,



7. secundi.

6. decimi.

Ratio-

Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. 11. decimi.
 Rursus quia A C, B C, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atq; adeo & eius duplum G K, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem G F, erit G L, Rationalis ipsi G F, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quoniam D A, Rationale, & G K, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem, quam D K, longitudine incommensurabiles. 16. decimi.
 Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt D L, G L, Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam 74. decimi.
 esse.

Quoniam per lemma propof. 34. huius lib rectangulum sub A C, B C, hoc est, M K, medium est proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc est, inter D H, I K; erunt D H, M K, I K, continue proportionalia; atq; adeo & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex M L, hoc est, quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc est, illis æqualia, D H, I K, commensurabilia sunt; erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, immore, deficiensq; figura quadrata; atq; sit ostensa D I, ipsi I L, longitudine commensurabilis; poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum D G, esse Apotomen, & totam D L, plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atq; eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defn. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat. 18. decimi.

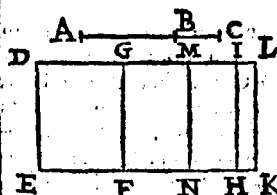
98.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

93.

QVADRATVM Medix Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

45. primi. S I T Medix Apotome prima A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C, sint Medix potentia solum commensurabiles, contineantq; Rationale: Et ad Rationalem D E, quadrato ex A B, æquale applicetur rectangulum D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen secundam esse. Construantur eadem, quæ in antecedenti propos. ita



16. decimi.

24. huius lib.

23. decimi.

21. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

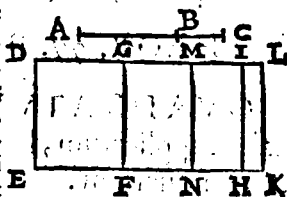
ut rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, B C; & G K, æquale ei, quod sub A C, B C, bis continetur; ac proinde M K, ei, quod sub A C, B C, continetur semel. Quoniam igitur A C, B C, Medix sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est, illis æqualia, D H, I K, Media & commensurabilia; ac proinde & totum D K, æque illorum commensurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lib. Cum ergo D K, applicetur ad Rationalem D E, erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum G K, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, erit G L, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi D E. Quia uero D K, Medium, id est, Irrationale, & G K, Rationale, incommensurabilia sunt; erunt rectæ D L, G L, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt D L, G L, Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, ut in præcedenti propos. demonstrabimus totam D L, plus posse, quam congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine

tudine commensurabilis. Quare cum congruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defn. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Medię Apotomę primę ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Medię Apotomę secundę ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Medię Apotome secunda AB, & ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, sint Medię potentia tantum commensurabiles, contineantq; Medium; Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quę supia. Ostendimus iam, ut in propof. præcedenti, DK, Medium esse, atque adeo rectam DL, Rationalem ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Et



quia rectangulum sub AC, BC, Medium est, atque ob id, & eius duplum GK, erit quoque GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine sunt incommensurabiles, atq; ut AC, ad BC, ita per lemma 3. propof. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC; erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrato ex AC, BC, ex rectis AC, BC, potentia commensurabiles descripta, commensurabilia sunt; rectangulo vero sub AC, BC, commensurabile est rectangulum bis sub

99.

94.

45. primi.

23. decimi.

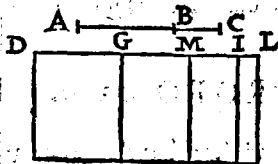
23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

sub A C, B C. Igitur ex scholio, propof. 14. huius lib. com-
positum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, D K, in-
commensurabile est rectangulo bis sub A C, B C, hoc est,
ipfi G K; Atq; adeo rectæ D L, G L, eandem habentes ra-
tionem, quam D K, G K,

10. decimi.



74. decimi.

longitudine incommensura-
biles sunt. Sunt autem osten-
sæ & Rationales. Rationales
ergo sunt D L, G L, poten-
tia solum commensurabiles;
Ac proinde reliquæ D G,
Aporomæ est. Dico esse &

tertiam. Similiter enim, ut in propof. 98. demonstrabimus
D L, totam plus posse, quam G L, congruentem, quadra-
to rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neu-
trâ ipsarum D L, G L, Rationali D E, longitudine sit com-
mensurabilis, ut demonstratum est; erit ex desin. D G, Apo-
tome tertia. Quadratum igitur Medie secundæ qd. Ratio-
nalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

100.

95.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Ratio-
nalem applicatum, latitudinem facit Apo-
tomen quartam.

45. decimi.

S I T Minor A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C,
potentia incommensurabiles sint, facientisq; compositum
quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; re-
ctangulum vero sub A C, B C, Medium: Et ad Rationalem
D E, applicetur spatium D F, quadrato ex A B, æquale, la-
titudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen esse quartam.
Fiant enim omnia, ut in præcedentibus. Quoniam igitur
compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi
æquale D K; Rationale est; erit D L, Rationalis ipsi D E,
longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub
A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est;
erit G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensura-
bilis.

21. decimi.

23. decimi.

bilis. Rursus quoniam DK , Rationale, & GK , Irrationale, nempe Medium, incommensurabilia sunt; erunt DL , GL , eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. ostenduntur autem Rationales. Rationales ergo sunt DL , GL , potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua DG , Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam AC , BC , potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH , IK , incommensurabilia; Ac propterea rectæ DI , IL , longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI , IL , æquale sit quadrato ex ML , id est, quartæ parti quadrati ex GL , ut in propoſ. 98. est demonstratum; poterit DL , plus quam GL , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL , maiorem applicatum est rectangulum sub DI , IL , æquale quartæ parti quadrati ex GL , minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem DL , in partes DI , IL , longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL , plus possit, quam congruens GL , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitq; eadem tota DL , Rationali DE , longitudine ostensa commensurabilis; Erit ex defin. DG , Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

10. decimi.

74. decimi.

10. decimi.

19. decimi.

THEOR. 78. PROPOS. 102.

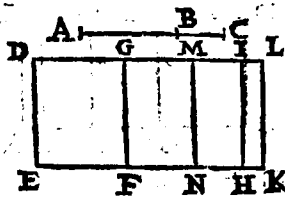
101.

96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

S i r recta cum Rationali Medium totum efficit AB ; & ipsi

& ipsi congruens BC, ut ut A C, B C, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium; rectangulum uero sub ipſdem A C, B C, Rationale: Et ad Rationalem D E, applicetur D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico qd D G, Apotomen quinquam esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Quoniam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, atq; adeo & illi æquale D K, Medium est; erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub A C, B C, atq; adeo & eius duplum G K, Rationale est; erit G L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Et quia D K, Medium seu Irrationale, & G K, Rationale, incommensurabilia sunt; erunt D L, G L, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostense. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles; Atque idcirco reliqua D G, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, ut in antecedenti propositione demonstrabimus D L, totam plus posse quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens G L, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali D E; erit ex definit. D G, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.



45. primi.

23. decimi.

21. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

102.

97.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit. Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C, potentia sint incommensurabiles, faciantq; & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub ipsidem A C, B C, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato ex A B, spatium æquale D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem D enim fiant, quæ supra. Quoniam tam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, quod rectangulum sub A C, B C, E atq; adeo & eius duplum G K, Medium est; Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub A C, B C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, B C; Et sunt rectangulum sub A C, B C, & eius duplum G K, commensurabilia; Erit & G K, eidem composito, hoc est, ipsi D K, incommensurabile; proptereaq; rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quæ D K, G K, longitudine incommensurabiles. Ostense sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles; Atque idcirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendimus. n. similiter ut in propos. 101. totam D L, plus posse, quàm congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum D L, G L, commensurabilis sit longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

45. primi.

23. decimi.

14. decimi.

10. decimi.

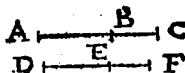
74. decimi.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

103.
98.

SIT Apotome A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi A B, longitudine commensurabilis D E. Dico &



D E, Apotomen esse, atque ordine eadem ipsi A B. Fiat ut A B, ad D E, ita B C, ad E F. Erit ergo tota A C, ad

12. sexti.

12. quinti.

10. decimi.

74. decimi.

15. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

15. decimi.

totam D F, ut A B, ad D E, uel ut B C, ad E F. Quoniam igitur A B, D E, longitudine ponuntur commensurabiles; erunt quoque A C, D F, necnon & B C, E F, commensurabiles longitudine. Et quia A C, B C, sunt Rationales, erunt etiam illi commensurabiles D F, E F, Rationales. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F: & una A C, B C, potentia solum commensurabiles; erunt quoque ex his, quæ ad propof. 10. huius lib. demonstravimus, D F, E F, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales fiat ostensæ, reliqua D E, Apotome est. Dico & ipsi A B, ordine eadem esse. Possit enim primum A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur A C, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, ut A B, sit Apotome prima; erit quoque D F, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam D F, eidem A C, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque D E, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi A B. Si uero B C, sit longitudine commensurabilis Rationali; erit eodem modo E F, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo utraque A B, D E, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum A C, B C, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; erit quoque neutra ipsarum D F, E F, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare utraque A B, D E, ex defin. erit Apotome tertia.

POSSIT Iam A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, esse Apotomen

tertia, quartam, quintam, uel sextam, &c. Recte ergo linea Apotome longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendit de adum erat.

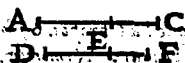
SCHOLION.

Idem hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scriptum est. Nimirum, si recta DE , commensurabilis sit ipsi AB , potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: utamur voce: potentia tantum commensurabilis:) & DE , Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eadem ipsi AB . Non enim sequitur, si tota AC , longitudine sit commensurabilis Rationali exposita, & DE , eidem esse commensurabilem longitudine; propterea quod non utraque, nempe Rationalis exposita, & DE ; eidem AC , longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero DE , potentia tantum, ex hypothesis. Immo vero, si AB , sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla modo potest, ut DE , illi potentia tantum commensurabilis sit Apotome eadem ordine.

Sit enim AB , prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eique congruens BC ; & sit DE , ipsi AB , potentia tantum commensurabilis, quam quidem, ut in theoremate, ostendimus Apotomen esse, eique congruentem EF ; & partes AB , BC , ad partes DE , EF , eandem proportionem habere cum totis AC , DF . Dico nulla ratione DE , Apotomen esse ordine eadem ipsi AB . Nam si fieri potest, sit utraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC , tota, q̃ tota DF , ex definitione Apotome primæ, Rationali exposita commensurabilis longitudine; atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt AC , et DF . Quare cum sit ut AC , ad DF , ita AB , ad DE ; erunt quoque AB , DE , longitudine commensurabiles. Quod est absurdum, ponitur enim DE , ipsi AB , potentia solum commensurabilis. Non ergo utraque AB , DE , Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Eset enim utraque congruens BC , EF , ex defin. longitudine commensurabilis Rationali exposita, atque adeo & ipse inter se. Quocirca & AB , DE , inter se longitudine forent commensurabiles. Quod non ponitur.



SEMPER tamen verum est, si AB , est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE , quæ ipsi AB , potentia sola est commensurabilis, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc pos-



15. decimi.

to, poterit AC , plus quam BC , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cam ergo sit AC , ad BC , ita DF , ad EF , poteris quoque DF , plus quam EF , quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quare ex definitione DE , Apotome prima, vel secunda, vel tertia: Eodem modo si AB , est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut AC , plus possit, quam BC , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; Erit quoque DE , Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quamvis ordine non eadem ipsi AB : quia rursus, cum sit ut AC , ad BC , ita DF , ad EF , poteris quoque DF , plus quam EF , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex definitione erit AB , Apotome quarta, vel quinta, vel sexta.

15. decimi.

IN sequentibus autem quinque propositionibus necessario erit DE , eadem ordine ipsi AB , licet potentia solum sibi fueris commensurabilis.

104
99.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

12. sexti.

12. quinti

10. decimi.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB , eique congruens BC , ita ut AC , BC , sint Mediæ potentia solum commensurabiles: Sit autem ipsi AB , commensurabilis DE , siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dicō & DE , Apotomen esse, & ipsi AB , ordine eadem. Fiat ut A , B , ad DE , ita BC , ad EF . Erit ergo tota AC , ad totam DF , ut A , B , ad DE , & ut BC , ad EF . Quoniam igitur A , B , DE , commensurabiles ponuntur uel longitudine & potentia, uel potentia tantum; erunt quoque BC , EF , & AC , DF , eodem modo commensurabiles. Et quia AC , BC , Mediæ sunt, erunt quoque

quoque DE, EF, illis commensurabiles, Medix. Rursus 24 decimi.
quia est ut AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando ut
AC, ad BC, ita DF, ad EF.

Sunt autem AC, BC, potentia
solum commensurabiles, erit
etiam, ex scholio propos. 10.



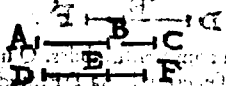
huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Qua-
re cum DF, EF, Medix sint ostensæ; erit reliqua DE, Medix 75. vel 76.
Apotome. Dico & eandem esse ordine ipsi AB. Quonia est
ut AC, ad BC, ita DF, ad EF; & ut AC, ad BC, ita est qua-
dratū ex AC, ad rectangulū sub AC, BC, ex lemme 3. pro-
pos. 19 huius lib. & ut DF, ad EF, ita quadratū ex DF, ad re-
ctangulū sub DF, EF; Erit quoque ut quadratū ex AC, ad re-
ctangulū sub AC, BC, ita quadratū ex DF, ad rectangulū sub
DF, EF; Et permutando ut quadratū ex AC, ad quadra-
tum ex DF, ita rectangulū sub AC, BC, ad rectangulū
sub DE, EF. Igitur cum quadratū ex AC, commensurabile
sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint com-
mensurabiles; erit & rectangulū sub AC, BC, rectangulo
sub DE, EF, comensurabile. Quare si rectangulū sub AC,
BC, sit Rationale, ita ut AB, sit Medix Apotome prima; Erit
etiam rectangulū sub DF, EF, Rationale, cum illi sit com-
mensurabile; atque adeo & DE, Medix Apotome prima
erit. Si uero rectangulū sub AC, BC, sit Medium, ita ut
AB, sit Medix Apotome secunda; erit quoque rectangulū
sub DF, EF, ei commensurabile, Medium, ex coroll. propos.
24, huius lib. Ac propterea & DE, Medix Apotome se-
cunda erit. Recta ergo linea Medix Apotomæ commensu-
rabilis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

RECTA linea Minori commensura-
bilis; & ipsa Minor est.

SIT Minor AB, ipsiq; congruens BC, ita ut AC, BC, po-
tentia sint incōmensurabiles, facientesq; cōpositum quidē ex
quadratis rectarū AC, BC, Rationale; rectangulū uero sub
ipsidem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, com-
mensu-

incommensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Minor esse. Fiant eadem, quae supra, ita ut rursus A B, B C, ad D E, E F, eandem habeant rationem quam A C, ad D F. Erunt ergo rursus, ut in antecedenti propos. D F, E F, ipsi A C, B C, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum: Et quoniam est ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F, erit ut quadratum ex A C, ad quadratum ex B C, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F; Et componendo ut compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ad quadratum ex B C, ita compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ad quadratum ex E F; Et permutando ut compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ad compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ita quadratum ex B C, ad quadratum ex E F. Est autem quadratum ex B C, commensurabile quadrato ex E F; quod rectas B C, E F, ostenderimus commensurabiles esse. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, compositum ex quadratis rectarum D F, E F, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ex hypothesi. Rationale. Igitur & compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ex 9. defin. Rationale est: Rursus quoniam ut in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub A C, B C, rectangulo sub D F, E F, esse commensurabile: Potitur autem rectangulum sub A C, B C, Medium; Erit, quocumque rectangulum sub D F, E F, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est ut A C, ad B C, ita D F, ad E F, suntque A C, B C, potentia incommensurabiles; erunt etiam D F, E F, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum



compositum quidem ex quadratis rectarum D F, E F, Rationale, rectangulum uero sub iidem D F, E F, Medium; erit D E, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

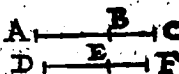
THEOR.

THEOR. 83. PROPOS. 107.

101.

RECTA linea commensurabilis est
quæ cum Rationali Medium totum efficit
& ipsa cum Rationali Medium totum effi-
ciens est.

SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens,
& ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, sint potentia incommen-
surabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rec-
tarum AC, BC, Medium; ac rectangulum sub AC, BC,
Rationale: Sit autem DE, ipsi
AB, commensurabilis quo-
cunque modo. Dico & DE,
esse, quæ cum Rationali Me-
dium totum efficit.



Constructis enim iisdem, quæ supra,
ostendimus ut in antecedenti propos. compositum ex qua-
dratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito
ex quadratis rectarum DE, EF. Cum ergo illud ponatur
Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Me-
dium. Rursus ut in propos. 105. demonstrabimus rectan-
gulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub
DE, EF: Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc
Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, ut in
præcedenti propos. est probatum, rectæ DE, EF, potentia
incommensurabiles. Igitur cum DE, EF, incommensura-
biles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ip-
sarum quadratis Medium, rectangulum uero sub ipsis, Ra-
tionale, erit DE, quæ cum Rationali Medium totum effi-
cit. Quocirca recta linea commensurabilis est, quæ cum Ra-
tionali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.

78. decimi.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

107.

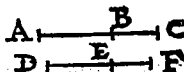
102.

RECTA linea commensurabilis est,
quæ cum Medio Medium totum efficit; &

O 3 ipsa

ipsa cum Medio Medium totū efficiens est.

Si recta A'B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita ut A C, B C, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque,



& adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem D E, ipsi A B, quomodo libet commensura-

bilis. Dico & D E, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, ut in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus ut in propos. 105. ostendimus rectangulum sub A C, B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item ut in propos. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommensurabiles; Postremo quia composito ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ut dictum est, & rectangulo sub A C, B C, commensurabile est rectangulum sub D F, E F: Sunt autem compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum sub A C, B C, per hypothesin, incommensurabilia; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, E F, & rectangulum sub D F, E F, incommensurabilia. Quocirca cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; erit D E, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

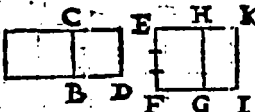
79. decimi.

THEOR.

THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO a Rationali detracto; Recta
linea, quæ reliquum spatium potest, una
ex duabus Irrationalibus sit, uel Apotome,
uel Minor.

DETRAHATVR a Rationali A D, Mediam C D.
Dico rectam, quæ potest spatium reliquum A B, esse uel
Apotomen, uel Minorem. Exponatur Rationalis B F, ad
quã applicetur rectangulum E G, æquale ipsi A B, & ad G H,
aliud H I, æquale ipsi C D, ita ut totum E I, toti A D, sit
æquale. Quoniam igitur
E I, æquale Rationali A D, A
Rationale est; erit E K, Ra
tionalis, Rationali E F, longi
tudine commensurabilis.



Rursus quia H I, Medio C D, æquale Medium est; erit H K,
Rationalis, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Itaque
cum E K, quidem sit longitudine cõmensurabilis ipsi E F, at
H K, eidem E F, longitudine incõmensurabilis; erunt E K,
H K, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales.
Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles:
proptereaque reliqua E H, Apotome est, & ei congruens
H K. Aut igitur E K, plus potest quam H K, quadrato
rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensu
rabilis. Si plus pōt E K, q̃ H K, quadrato rectæ lineæ cõmen
surabilis sibi longitudine, cum tota E K, ostensa quoque sit
longitudine cõmensurabilis Rationali E F, erit ex defin. E H,
Apotome prima. Quare recta potēs spatiū E G, cõtētū sub
Rationali E F, & Apotoma prima E H, hoc est, spatiū A B,
sibi æquale, Apotome est. Si uero E K, plus potest, quā H K,
quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis, cū tota E K,
sit ostensa cõmensurabilis longitudine Rationali E F, erit ex
defin. E H, Apotonie quarta. Quapropter recta potēs spa
tiū E G, cõtētū sub Rationali E F, & Apotoma quarta E H,
hoc est, spatiū A B, illi æquale, Minor est. Medio ergo a Ra
tionali detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

108.

103.

45 primi.

21. decimi.

13. decimi.

13. decimi.

74. decimi.

92. decimi.

95. quinti.

efficit. Quamobrem Rationali a Medio detracto, &c.
Quod ostendendum erat.

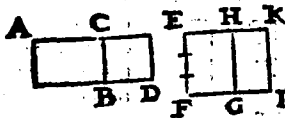
116.

105.

THEOR. 87. PROPOS. tri.

MEDIO a Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; Reliquæ duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apotome secunda, uel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHA TUR a Medio A D, Medium C D, quod incommensurabile sit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum spatium A B, potest, esse uel Mediæ Apotomen secundam, uel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra; quoniam E I, H I, Medijs A D, C D, æqualia. Media sunt; erunt E K, H K, Rationales ipsi E F.



longitudinē incommensurabiles. Et quia A D, C D, hoc est, E I, H I, ponuntur incommensurabilia; erunt E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudinē incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudinē commensurabilis, aut incommensurabilis, Si plus potest E K, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudinē commensurabilis, cum neutra ipsarum E K, H K, Rationali E F, longitudinē commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, Mediæ Apotome est secunda. Si uero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudinē incommensurabilis, cum neutra ipsarum E K, H K,

23. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

94. decimi.

Rationa

97. decimi.

Rationali E F, sit longitudine commensurabilis, ut demonstrauimus; erit ex defin. E H, Apotome sexta. Quam obrem recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotome sexta E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, est ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

III.

106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APO TOME non est eadem, quæ ex binis nominibus.

45. primi

98. decimi.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest, A, aliqua ex binis nominibus. Exposita Rationali B C, applicetur ad B C, rectangulum C D, æquale quadrato ex A.



Quoniam igitur A, Apotome est; erit latitudo B D, Apotome prima. Sit ergo ei congruens D E. Erunt igitur ex defin. Apotome primæ, B E, D E, Rationales potentia tantum commensurabiles, potentique

61. decimi.

11. decimi.

B E, plus quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & ipsa B E, Rationali B C, commensurabilis erit longitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen B F. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima est, B F, F D; Rationales potentia solum commensurabiles, poteritque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine; & ipsa B F, Rationali B C, longitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, longitudine sit commensurabilis eidem B C; erunt quoque B E, B F, inter se commensurabiles longitudine. Igitur tota B E, existente longitudine commensurabili parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, Rationalis sit; & F E, Rationalis erit. Quoniam uero duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium,

bilium, ipsa BE, longitudine incommensurabilis est ipsi DE; (quod BE, DE, Rationales sint potentia solum commensurabiles) erit quoque altera FE, eidem DE, incommensurabilis longitudine. Sed & utraque FE, DE, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt FE, DE, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua FD, Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. - Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & ceteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Medias, neque inter se esse easdem.

QUADRATUM enim Medie ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen primam.

ET quadratum Medie Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen secundam.

QUADRATUM vero Medie Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

QUADRATUM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quartam.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quintam.

QUADRATUM deniq; eius, quæ cū Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen sextam.

ITAQUE cum hæc latitudines differant & a latitudine Medie, & inter se; a latitudine quidē Medie, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eadem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & a Media, & inter se se differre.

QUONIAM vero in hoc theoremate demonstravimus Apotomen eandem nō esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & ceterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium,

14. decimi.

74. decimi.

23. decimi.

98. decimi.

99. decimi.

100. decimi.

101. decimi.

102. decimi.

103. decimi.

quæ

quæ post ipsam, easdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quadam composita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se, & differentes, de quibus hætenus disputavimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.
4. Ex binis Medijs secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

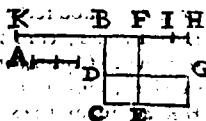
THEOR. 89. PROPOS. 113.

112.

o.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportionem; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

Si t. Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D, & ad B C, applicetur rectangulū B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportionem; & adhuc Apotomē B F, esse ordine eandem ipsi B C, ex binis nominibus: Applicetur enim rursus ad D C, minus nomen, rectangulū C G, æquale eidem quadrato ex A; atque adeo rectangulo B E, latitudinem faciens D G; sitque ipsi D G, æqualis B H. Et quoniam æqualia sunt B E, C G; erit ut B C, ad D C, ita D G, hoc est, sibi æqualis B H, ad B F. Et dividendo ut B D, ad D C, ita H F, ad F B: Est autem B D, maior, quam D C. Igitur & H F, maior est, quam F B. Ponatur F I, ipsi F B, æqualis; & fiat ut H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo ut H F, ad I F, hoc est, ad sibi æqualem B F, ita F K, ad B K. ostensum est autem esse ut H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque ut B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cum sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. Igitur & F K, B K, potentia solum commensurabiles sunt.



45. primi.

45. primi.

14. vel 16. sexti.

12. septi.

10. decimi.

R V R S V S

12. quinti

R V R. & V S. quia est ut H F, ad B F, ita F K, ad B K, erit quoque H F, F K, antecedentes simul, nempe tota H K, ad B F, & B K, consequentes simul, hoc est, ad totam F K, ut F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis est inter H K, B K. Quare ut H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per



coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, secunda. Quia vero C G, cum Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) et Ra-

21. decimi

tionale D C, applicatum facit D G, latitudinem Rationalem, ipsi D C, longitudinem cõmensurabilem; Erit quoque H B, ipsi D G, æqualis, Rationalis & longitudine cõmensurabilis ipsi D C. Et quoniam ostensum est, esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K: Ut autem F K, ad B K, ita H K, ad F K, erit quoque ut B D, ad D C, ita H K, ad F K. Igitur ut quadratum ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. Ac quadratum ex B D, cõmensurabile est quadrato ex D C, (quod rectæ B D, D C, sint Rationales, potentia cõmensurabiles, cum sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus.) Cõmensurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit ut quadratum ex H K, ad quadratum ex F K, ita recta H K, ad B K. Igitur lon-

12. sexti

10. decimi

10. decimi

74. decimi

16. decimi

gitudine cõmensurabilis est H K, ipsi B K, atque adeo & reliquæ B H, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem B H, Rationalis; Igitur & H K, illi cõmensurabilis, Rationalis est; ac propterea & B K, ipsi H K, cõmensurabilis, Rationalis existit. Cum ergo ostensa sit F K, ipsi B K, potentia solum cõmensurabilis; erit quoque F K, Rationalis. Quare cum F K, B K, Rationales sint, & potentia tantum ostensa cõmensurabiles; erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod est primum.

Q U O N I A M vero ostensum est esse rectam H K, totam parti B K, longitudine cõmensurabilem; erunt propterea & B K, B H, longitudine inter se cõmensurabiles. Cum ergo B H, ostensa sit longitudine cõmensurabilis ipsi D C, erit quoque B K, ex scholio propos. 12. huius lib. eadem D C, longitudine cõmensurabilis. Rursus quia demon-

stratum

stratum est esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K ; & permu-
tando ut B D, ad F K, ita D C, ad B K : Sũnt autẽm modo
D C, B K, ostensę longitudine commensurabiles ; Erunt
quoque B D, F K, commensurabiles longitudine. Itaque
cum F K, ipsi B D, & B K, ipsi D C, longitudine sit commẽ-
surabilis ; erunt ipsius Apotomę B F, nomina F K, B K,
nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, longitu-
dine commensurabilia : Quod est secundum.

10. decimi.

Item quia demonstrauius esse ut B D, ad D C, ita
F K, ad B K ; erunt idcirco Apotomę nomina F K, B K, in
eadem ratione turti B D, D C, nominibus ipsius B C, quę est
ex binis nominibus. Quod est tertium.

Postremo uel B D, plus potest, quam D C, quadra-
to rectę sibi longitudine commensurabilis, uel incommẽsu-
rabilis. Si plus potest B D, quam D C, quadrato rectę sibi
longitudine commensurabilis ; cum sit ut B D, ad D C, ita
F K, ad B K ; poterit quoque F K, plus quam B K, quadra-
to rectę sibi longitudine commensurabilis : Et si B D, plus
potest quam D C, quadrato rectę sibi longitudine, incommẽ-
surabilis ; poterit & F K, plus quam B K, quadrato re-
ctę sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem B D,
expositę Rationali fuerit longitudine commensurabilis ;
erit & F K, quę longitudine ostensa est commensurabi-
lis ipsi B D, commensurabilis longitudine eidem Ratio-
nali, per ea, quę in scholio propos. 12. huius lib. demon-
strauimus. Si uero D C, sit Rationali commensurabi-
lis longitudine ; erit & eadem ratione B K, eidem Ratio-
nali longitudine commensurabilis. Si denique neutra ip-
sarum B D, D C, sit Rationali longitudine commẽ-
surabilis ; erit quoque neutra ipsarum F K, B K, com-
mensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem

15. decimi.

14. decimi.

ordine est Apotome B F, ipsi B C, ex binis no-
minibus, ut constat ex definitionibus se-
cundis, atque tertijs. Quod est quar-
tum. Quadratum ergo Ratio-
nalis ad eam, quę ex binis
nominibus, &c. Quod
demonstran-
dũ erat.

THEOR.

113.

THEOR. 90. PROPOS. 114.

O.

45. primi.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum; latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionem; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

45. primi.

45. primi.

14. vel 16.

sexti.

S. I. T. Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat OD; & ad BC applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B, D; C, D, Apotomæ BC, & in eadem proportionem; & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eadem. Applicetur enim rursus ad BD, totam, rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinem faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia sunt; erit ut BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conversionem rationis, ut BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundum proportionem BE, ad GE, ex ijs, quæ in scholio propos. 10. lib. 6, conscripsimus; ut sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est ut BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablata; erit quoque BH, reliqua ipsius BE, ad HE, reliquam ipsius GE, ut tota BE, ad totam GE. Erat autem ut BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erat igitur quoque ut BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BH, GH. Quare erit ut BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia vero fuit ut BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE; & sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantum com-

com-

commensurabiles; Erunt quoque BH , HE , potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex BH , HE , commensurabilia. Igitur rectæ BH , GH , eandem habentes rationem cum quadratis ex BH , HE , ut demonsttrauimus, longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota BH , longitudine commensurabilis existens parti GH , cōmensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ BG , ex coroll. propof. 16. huius lib. At uero cum BD , Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ BC ; & rectangulum BF , quadrato ex Rationali linea A , æquale, Rationale; erit latitudo BG , Rationalis commensurabilis longitudine ipsi BD . Igitur ex scholio propof. 12. huius lib. & BH , eidem BD , Rationali commensurabilis est longitudine, atq; adeo Rationalis existit; quandoquidem BH , BG , longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia uero BH , HE , ostensæ sunt commensurabiles potentia tantum, & BH , Rationalis; erit quoque HE , illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt BH , HE , potentia solum cōmensurabiles; Ac propterea BE , ex binis nominibus est. Quod est primum.

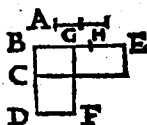
QVONIAM uero ostendimus esse BH , ad HE , ut BD , ad CD ; atque adeo permutando BH , ad BD , ut HE , ad CD ; Ostensa est autem BH , ipsi BD , longitudine commensurabilis; erit quoque HE , ipsi CD , commensurabilis longitudine. Quare BH , HE , nomina ipsius BE , ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus BD , CD , Apotomæ BC . Quod est secundum.

IMMO & in eadem proportionem, cum demonstratum sit esse BH , ad HE , ut BD , ad CD . Quod est tertium,

POSTREMO uel BD , plus potest quam CD , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; poterit quoq; BH , plus quam HE , quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: Et si BD , plus potest, quam CD , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH , plus quam HE , quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quod BD , Rationali expofitæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH , commensurabilis existens longitudine ipsi

P si BD ,

si B D, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propof. 12. huius lib. Si uero C D, longitudine fit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione H E, eidem Rationali longitudine commensurabilis.



14. decimi.

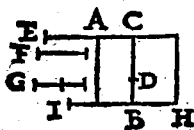
Si uero neutra ipsarum B D, C D, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; erit quoque neutra ipsarum B H, H E, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atq; tertijs definitionibus, ipsa B E, ex binis nominibus, ordine eadē est ipsi Apotomæ B C. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum; latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionē, &c. Quod erat demonstrandum.

114.
o.

THEOR. 91. PROPOS. 115.

SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cōmensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportionē; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

CONTINEATUR spatium A B, sub Apotoma A C, & sub C B, ex binis nominibus, cuius nomina C D, D B, commensurabilia sunt nominibus C E, A E, Apotomæ A C;



& in eadem ratione, nempe C D, ad D B, ut C E, ad A E. Possit autem recta F, spatium A B. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, applicetur ad C B, quæ ex binis nominibus, rectangulum

45. primi.
113. decimi

C H, æquale quadrato ex G. Erit ergo latitudo B H, Apotome, cuius nomina H I, B I, longitudine commensurabilia sunt nominibus C D, D B; & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, ut C D, ad D B; atque adeo ut C E, ad A E; & per-

& permutando, ut tota HI , ad totam CE , ita ablata BI ,
ad ablaram AE . Erit ergo & reliqua BH , ad reliquam AC ,
ut tota HI , ad totam CE : Commensurabilis autem est lon-
gitudine HI , ipsi CE , quod utraque HI , CE , commensu-
rabilis fuit longitudine ipsi CD . Igitur & BH , ipsi AC ,
longitudine est commensurabilis; Atque idcirco HC , ipsi
 BA , commensurabile erit, cum sit ut HB , ad AC , ita
 HC , ad BA : Sed HC , quadrato Rationalis G , æquale,
Rationale est. Igitur & BA , illi commensurabile, Rati-
onale erit, propterea; & recta F , ipsum BA , potens, Rati-
onalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apoto-
ma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina com-
mensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem pro-
portionem; Recta linea spatium potens, est Rationalis.
Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, fieri posse, ut spatium Rationale con-
tineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium $A B$, con-
tentum sub AC , CE , Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Ir-
rationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIUM.

In proximis autem tribus propositionibus intelligenda
sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nomi-
nibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim
duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In
posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligitur, si nomina
 CD , DB . nominibus CE , AE , potentia tantum commensu-
rabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum
trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiūt,
& nulla alicui antecedentium est eadem.

19. quinti.

12. decimi.

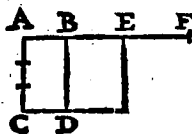
10. decimi.

1. sexti.

115.

107.

SIT Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali A C, contineatur sub A B, Media, & Rationali A C, spatium A D. Est ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta B E,



quæ ex defin. xj. Irrationalis erit. Dico B E, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem A C, applicatum, latitudinem faciat

39. decimi.

Rationalem ipsi A C, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines uel ex binis nominibus, uel Apotomas, ut constet ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At uero quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediæ; perspicuum est, Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem a latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

Quod si compleatur rectangulum D E; erit & hoc contentum sub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta E F, quæ ex defin. xj. Irrationalis erit. Dico rursus E F, non esse eandem alicui illarum tredecim, uel etiam ipsi B E. Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius B E, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes a B E, ut demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & a dictis differentes. Quocirca a Mediâ infinitæ Irrationales sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

118.

7.

PROPOSITVM sit nobis ostende
re, in quadratis figuris diametrum lateri in-
commensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum $ABCD$, in quo diameter AC . Dico
diametrum AC , longitudine incommensurabilem esse late-
ri AB . Si enim non est incommensurabilis, commensura-
bilis erit longitudine; ac propterea AC , AB , proportionē
habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC , ad
 AB , proportionem, quam numerus EF , ad numerum G ;
sintque numeri EF , & G , minimi omnium eandem pro-
portionem habentium. Quoniam ergo est ut AC , ad AB ,
ita numerus EF , ad numerum G ; Erit quoque
ut quadratum ex AC , ad quadratum ex AB ,
ita quadratus numerus ex EF , ad quadratum
numeri ex G , (Cum enim quadrata ha-
beant suorum laterum proportionem duplicatā;
latera autē æquales habeant, proportionem; erunt
proportiones quadratorum æquales etiā, cū sint
æqualium duplicatę.) Sed quadratū ex AC , duplū est qua-
drati ex AB , per ea, quę in scholio propos. 47. lib. 1. osten-
dimus. Igitur & quadratus numerus ex EF , duplus erit
quadrati numeri ex G ; Ac propterea quadratus numerus
ex EF , cum dimidium habeat, atque adeo bifariam possit di-
vidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse EF , illum produ-
cens, par erit. (Si namque impar esset, cum se ipsum multiplicā
producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar;
eo quod impar imparem multiplicans imparem procreet.
Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia uero
 EF , & G , in sua proportionem minimi, inter se primi sunt;
& EF , ostensus est par, erit G , impar. (Si enim par etiam
esset, metiretur utrumque EF , & G , binarius, atque adeo nō
essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam
par numerus EF , bifariam in H . Quia igitur numerus EF ,
duplus est numeri EH ; & quadrati habent proportionem
laterum duplicatam; erit quadratus ex EF , quadruplus



g. decimi.

20. sexti. &
21. octavi.

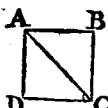
29. noni.

24. septimi.

1. octavi.

quadrati ex E H. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex E F, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex E H; qual um partium 4. est quadratus ex E F, talium 2. erit quadratus ex G, & talium 1. quadratus ex E H. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, ut supra de numero E F, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine incommensurabilis est diameter A C, lateri A B. Igitur incommensurabilis longitudine.

A L I T E R. Sit si potest fieri, diameter A C, commen-



surabilis longitudine lateri A B; habeantq; A C, A B, proportionem, quam numeri E F, & G, qui minimi sint in sua proportione, atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, unitas. (Cum enim quadratum ex A C, duplum sit quadrati ex A B; sit autem ut quadratum ex A C, ad quadratū ex A B, ita quadrat' numerus ex E F, ad quadratū numerū ex G, ut in priori demonstratione diximus; erit quoq; quadratus ex E F, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atq; adeo & quadrat' ex ea, unitas; erit quadratus ex E F, binarius. Quod est absurdū.) ergo numerus. Et quia, ut iam est demonstratum, quadratus ex E F duplus est quadrati ex G; metietur quadratus ex G, quadratū ex E F; ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri E F, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdū. Non ergo incommensurabilis est diameter A C, longitudine lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

14. *ostendi.*

S C H O L I O N.

S E D & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex his, quæ in scholis propof. 47. lib 1. demonstra-

monstrata a nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportionem dupla quocunque numeris ab unitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. solum tertius ab unitate quadratus est, & ceteri omnes unum intermittentes; quod 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. primus ab unitate, nempe 2. quadratus non fit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui uero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

10. noni.

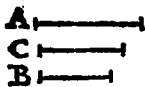
24. octavi.

9. decimi

HOC etiā theorema aliter demonstravimus in scholio proposit. 8. lib. 8. & in scholio proposit. 9. huius libri.

CARTÆVM in exemplaribus Græciæ reperitur hoc loco appendix quedam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometria libris pendet, ut merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatē omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinet; visum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriae, quæ ad demonstrationem eorū, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inueniuntur & alia quam plurima magnitudines, plana scilicet, atque solida incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. proposit. 20. lib. 6. ut A, ad B, ita est figura rectilinea quævis super A, constructa ad figuram rectilineam sibi similē, similiterq; posita super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; erunt rectilinea illa figura super A, & C, incommensurabiles.



10. decimi.

2. duodecimi.

RURSUS quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta:

P 4

Qua-

Quadrata autem hac, cum sint figura rectilinea similes, similiterq; posita, proportionem habent, quam recta A , & B , ex coroll. propof. 20. lib. 6. Habebunt quoque circuli diametrorum A , C , eandem proportionem, quam recta A , B : Sed recta A , B , incommensurabiles sunt longitudine. Igitur & circuli diametrorum A , C , incommensurabiles sunt.

11. quinti. I A M uero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figurae rectilineae similes, similiterq; descripta super A , C ; habebunt pyramides, atq; prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilinea illa figura. Quare cum rectilinea illa figura incommensurabiles sint, ut modo est demonstratum; 10. decimi. Incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.

Q U O D si coni, uel cylindri aequae altitudinis fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A , C ; habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles; Erunt quoque incommensurabiles etiam coni, & cylindri. Invenitur sunt igitur non solum lineae, & superficies incommensurabiles, uerum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.

E A D E M autem ratione, si recta A , & B , longitudine commensurabiles sint, ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse; atq; adeo & earundem pyramides, & prismata; ac deniq; conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI DECIMI.



EVCLIDIS

ELEMENTVM XI.

Et Solidorum primum .



DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinē ,
latitudinem, & crassitudinem habet.



OSTQVAM Euclides in prioribus
sex libris abunde de ea Geometria par
te disernit, qua circa plana versatur,
sibiq; nomen Geometria, tanquam pro
prium, usurpauit ; In subsequentibus
vero tribus diligenter ea de passioni
bus numerorum docuit, quā necessaria
videbantur ad intelligendam doctrinā

linearum commensurabilium, ac incommensurabilium, quae
idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, ut
constructio, atque natura quinque corporum regularium, de
quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15.
subtilissime differitar, perfectius posset cognosci: Nunc tan
dem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriae,
qua corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Ste
reometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem
pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nem
pe tertium genus quantitatis. Docet igitur, eam quantitatem,

qua

qua præter longitudinem latitudinemque forſita eſt. craſſitudinem, ſeu profunditatem, ita ut tres diſenſiones poſſideat, unam quidem ſecundum longitudinem, aliam vero ſecundum latitudinem, & tertiam ſecundum profunditatem, ſeu craſſitudinem, altitudinemque, appellari ſolidum, ſive corpus, quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; qua vero longitudini latitudinem adijcit, ſuperficies vocatur, ut in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, præcipiunt, ut imaginemur punctum aliquod e loco in locum moveri; hoc enim deſcribis veſtigium quoddam longum tantum, hoc eſt, lineam, propterea quod punctum omnis ſit magnitudinis expertus; ut autem percipiamus ſuperficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in tranſverſum moveri; hæc enim deſcribet veſtigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in tranſverſum eſt factus; Carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expertus: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina diſenſione præditum, conſulunt, ut concipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter elevari, ſive in tranſverſum moveri; hæc enim ratione deſcribetur veſtigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, quæ longa & lata exiſtit; profundum vero ſeu craſſum, propter elevationem illam, ſeu motum ſuperficiæ. Hæc ergo quantitas, ſolidum ſive corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta diſtincta a linea, ſuperficie, & corpore reperiri poteſt, propterea quod triplex tantum diſenſio poſſit assignari, ut perſpicue in commentarijs, quos in ſpheram Ioannis de ſacro boſco conſcripſimus, a nobis fuit demonſtratum ex Ptolemao in libello de Analemmate.

II.

SOLIDI autem extremum, eſt ſuperficies.

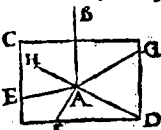
QUEMADMODUM linea finita in extremitatibus puncta,

puncta, superficies uero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit; ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo mosu imaginario superficiei, perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

LINEA recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

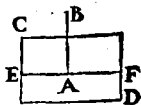
¶ *Linea recta* AB , plano CD , insistent, ita ut B , punctum sit in sublimi extra planum CD , at punctum A , in ipso plano, tum demum dicitur recta seu perpendicularis ad planum CD , cum rectos effecerit angulos cum lineis AE , AF , AD , AG , & cum omnibus alijs, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A . Hac enim ratione fiet, ut AB , æqualiter insit ad planum CD , & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet.



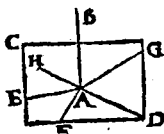
Nam producta recta DA , ad H , cum angulus BAD , ponatur rectus, erit quoque ei deinceps BAH , rectus. ideoque illi æqualis. Eademque ratione protraeta qualibet linea in plano CD , faciet AB , cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æqualiter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut AB , cum una linea ex A , in plano CD ,educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB , recta ad planum CD . Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et e contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum ductam rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos consicere.

¶ *autem* recta quæpiam plano cuiusvis insistent rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamque

ipsamq; tangensibus, satis est, ut cum duabus non efficientibus lineam unam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, ut perspicuum fiet ex propof. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam unam: quia si duæ lineæ componant unam rectam lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus alijs rectos conficere angulos. Recta enim AB , insit in plano CD , efficiatq; rectos



angulos cum duabus in eodem plano ductis AE , AF , quæ rectam unam lineam componant. Dico AB , non propterea cum omnibus alijs rectos angulos constituere, ac idcirco non esse rectam ad planum CD . Hoc autem perspicuum est, cum AB , circa EF , veluti axem, circumverri queat, ita ut punctum B , modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius, nihilominus tamen ipsa cum EF , semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si eadem AB , cum duabus angulum componē-



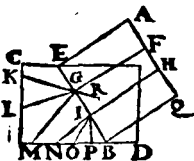
tibus, quales sunt AG , AD , in priori figura, rectos constituas angulos, tunc demum cum omnibus alijs rectos angulos efficiet, ut diximus. Id quod dilucide demonstrabitur propof. 4. huius lib.

IIII.

PLANVM ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

INSISTAT planum AB , plano CD , ita ut linea AQ , sit in sublimi, hoc est, extra planum CD ; at EB , in plano: Sit autem horum planorum communis sectio EB , quæ, ut demonstrabitur propof. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem

autem sumptis quoscunq; punctis G, I , ex ipsis in plano AB , ducantur GF, IH , perpendiculares ad communem sectionem EB . Si igitur linea FG, HI , ad planum alterum CD , recta fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM, IN, IO, IP , & cum alijs omnibus in plano CD , a punctis G, I , ductis, dicetur planum AB , ad planum CD , rectum;



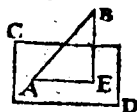
quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, sed aequaliter illi insister. Si enim KG , producatum ad R , cum angulus FGK , ponatur rectus, erit & angulus ei deinceps FGR , rectus; ideoq; illi aequalis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD , siens utrobique a lineis FG, HI , anguli aequales. Quare planum AB , aequaliter plano CD , insister. Quotiescumque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendū quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atq; a puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus ipsa insistente linea, & adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta AB , plano CD , non ad angulos re-
ctos, sed inclinata, ita ut punctum B , sit extra planum in su-
blimi, punctum vero A , in plano. Deinde ex
 B , termino sublimi rectae AB , intelligatur
ad idem planum deducta perpendicularis BE ,
faciens in plano punctum E ; atque ab E , ad A ,
adiungatur recta EA ; eritque necessario an-
gulus BAE acutus, cum in triangulo ABE , duo anguli
 BAE , BEA , duobus sint rectis minores, & angulus BEA ,
rectus. Angulus igitur acutus BAE , comprehensus linea in-
sistente AB , & adiuncta EA , dicitur inclinatio rectae AB ,
ad dictum planum CD ; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio li-
nea AB , ad planum CD , quantum est dictus angulus acutus BAE .

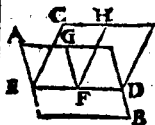
17. primi.



VI.

PLANI ad planum inclinatio, est an-
gulus acutus rectis lineis contentus, quæ in
utroque planorum ad idem communis se-
ctionis punctum ductæ, rectos cum sectio-
ne angulos efficiunt.

PLANO AB , insistat planum CD , ita ut pars ad C , sit
in sublimi extra planum AB , & pars ad D , in ipso plano AB ,
siveque CD , inclinatum ad AB ; & communis eorum sectio sit
 DE . Si igitur ad D , & communem sectionem ex eius puncto F ,
duæ perpendiculares ducantur; FG , qui-
dem in plano AB , at FH , in plano CD ; di-
cetetur angulus acutus GFH , dictis rectis
comprehensus, inclinatio plani CD , ad pla-
num AB : Ita ut tanta esse dicatur in-
clinatio plani ad planum, quantum est dictus
angulus acutus.



INTERDUM Geometra angulum GFH , dicunt angu-
lum inclinationis plani CD , ad planum AB , siue is acutus sit
siue rectus, obtususque, quanquam proprie solum angulus acu-
sus inclinationem unius plani ad alterum ostendat, ut Eucli-
des do-

des docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem elevationē unius plani supra aliud, q̃ inclinationē unius ad alterū; obtusus vero recessum quodāmodo unius ab altero. Verū amen quia quilibet horū angulorū cōmōstrat sitū, seu elevationē unius plani supra alterū, generaliter dici cōsuevit a plerisq; angulus inclinationis omnis ille, qui cōprehēditur duabus rectis lineis, quæ in utroq; plano ad aliqd̃ unū punctū cōis illorū sectionis ducuntur perpendiculares; cuiusmodi est angulus $G F H$, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atq; alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

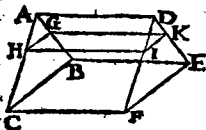
NON obscura est hac definitio, præcedēsi bene intellecta. Vnde planū ad planū magis inclinatū esse dicet, cui⁹ angul⁹ inclinationis minor extiterit, atq; adeo a recto magis recesserit.

VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunq; partē, etiā infinite, producaturs; hoc est, siue ad dexterā, siue ad sinistrā, & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt. n. quodā plana, quæ nec ad dexterā, nec ad sinistrā producta conueniunt; nec tamē ob id parallela sunt dicenda; quia nimirū vel sursum, vel deorsum protracta, tandē coeunt. Nam si sumatur rectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum; remanentia duo plana non conueniunt, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio; idcirco non dicuntur parallela.

SIT enim tectum quoddam $ABCDEF$, consentium duobus planis $ABED$, $ACFD$, cuius basis BCE ; auferaturq; fastigium $AGHDKI$. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana $GBEK$, $HCFI$, non convenire inter se, si ad partes GB , HC , vel ad partes KE , IF , producantur; nec tamen idcirco parallela dicuntur, cum



producta ad partes GH , KI , conveniant in fastigio AD . Ut igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, ut in nullam partem producta inter se conveniant. Sic autem lineae in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt esse protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atq; deorsum. Itaque duo plana quaecunq; vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta cœunt; linea vero recta, vel sunt parallela, vel ad alteram partem protracta conveniunt, si nimirum in eodem existunt plano, vel tandem nec sunt parallela, nec unquam conveniunt, si videlicet in diversis sunt planis, & in transversum posita. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quæ nunquam conveniunt.

IX.

SIMILES solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, uti fecit in figuris planis similibus definitionis; Savius tamen esse indicavit, ut brevitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, ut ex defin. 11. patebit, cum illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales;

equales; & proportionalitas laterum circum angulos equales,
propter planorum similitudinem.

X:

AEQVALES, & similes solidae fi-
gurae sunt; quae similibus planis, multitu-
dine, & magnitudine equalibus continetur.

Q U O D si plana similia, quibus corpora similia ex pre-
cedenti definitione circumscribuntur, fuerint aequalia, singu-
la singulis, dicuntur eiusmodi figura solida non solum simi-
les, verum etiam aequales. Nam si animo concipiantur sese
penetrare mutuo huiusmodi solida, neutram alterum excedet,
propter aequalitatem, ac similitudinem planorum. Ex simili-
tudine enim planorum inferitur angulorum solidorum aequa-
litas, ut in precedenti definitione docuimus; ex eorundem vero
aequalitate, laterum proportionalium aequalitas, ut in lemma
et propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni-
a ex parte sibi mutuo congruunt & ac propterea inter sese ex-
sunt aequalia.

XI.

SOLIDVS angulus est plarium,
quam duarum linearum, quae se mutuo co-
tingant, nec in eadem sint superficie, ad om-
nes lineas inclinatio.

D U A B lineis in eadem existentibus plano, quae non in dire-
ctum iacentes ad unum punctum conveniunt, efficiunt angu-
lum plarium ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus B. A. C.
conceptus duabus lineis A. B. A. C. in eodem plano constitutis.
Si igitur accedat tertia quadam linea A. D. quae non in eodem
cum illis plano existat, sed punctum D. sit in sublimi extra il-
larum

larum planum, efficeretur ad punctum A , angulus solidus, foret
corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel
deniq; plures adingeretur, licet anguli quātitas uarietur.



Dixit autem Euclides, lineas angulū solidū
constituētes non debere in eadem superficie
existere, quoniam videlicet, si tres lineae AB ,
 AC , AD , in eadē consistērent superficie, nō
efficeretur angulus solidus ad punctum A ,
sed planus dītaxat ex duobus planis BAD ,
 DAC , compositus. Quod si AD , sit in sublimi, hoc est, ex-
tra planum, in quo sunt AB , AC , iam non componetur angu-
lus planus intus ex BAD , DAC ; immo circa punctum A ,
tres plani consistēt anguli BAD , DAC , CAB , qui nūq; di-
ceantur, solidum constituant angulum. Idem dices, si plures fu-
erint lineae, & idcirco plures quoque anguli plani.

A L I T E R.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus,
quam duobus planis angulis in eodem non
consistentibus plano, sed ad unum punctum
constitutis, continetur.

H A E C definitio secunda anguli solidi facilis est, preceden-
ti recte intellecta. Cū enim saltem tres lineae in eodē non existe-
ntes plano necessariae sint ad anguli solidi constitutionem, perspi-
cuum est, cum quoniam tres plani angulos requirit, ut angu-
lus solidus efficiatur, ut ex superiori figura apparet. Angulus
enim BAD in plano est, in quo rectae AB , AD , & angulus
 DAC in plano, in quo rectae AD , AC , angulus deniq; CAB ,
in plano, in quo rectae AC , AB , atque ita ex ipsis angulus so-
lidus ad punctum A , constituitur. Quod si tres, vel plures
anguli plani ad unum punctum consistant, in eodem tamen pla-
no, non constituerunt ex ipsis angulus, sed totus quilibet angu-
lus planus, ut supra diximus de lineis in eadem superficie exi-
stentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad consti-
tuendum angulum solidum, etiam si in diversis sint planis.
Habit enim semper ex altera parte. Unde necesse est, ut ter-
tia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus
confi-

confistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis
prebent duo parietes cum pavimento domus, uel laqueari, ad
unum punctum conuenientes. Ideo enim puncto, in quo copu-
lantur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi ma-
nifestum est, si una earum superficierum tollatur, desituri an-
gulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inui-
cem inclinatæ, & hiantes.

Ex his vero perspicuum cuius eris, illos angulos solidos in-
ter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multi-
tudo, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi
mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemad-
modum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis so-
lum rectilineum assumpsit, hic ex omnibus solidis eum dun-
taxat definit, quem plures lineæ rectæ, quam duæ, uel plures
anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehen-
ditur hac defin. angulus corni, qui unica superficie curua con-
tinetur; neque is, qui continetur duabus superficieribus, una
quidam plana, altera uero curua; qualis est, qui fit, si conus
per verticem secetur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quæ
planis continetur, ab uno plano ad unum
punctum constituta.

VIDELICET figura solida a planis ABC , $AB-
CD$, $A B C D E$, ad puncta D , E , F , constituta appellan-
tuntur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus
pyramis continetur, esse trian-
gula, cum omnia ad unum pun-
ctum tendant, excepto plano, a
quo omnia tendunt, quodque
puncto illi est oppositum. Hoc
enim potest esse uel triangulum,
uel quadrangulum, uel pentagonum, &c. a quo quidem totæ py-
ramis denominatione sumit, ut uidelicet dicatur pyramis trian-
gula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Totum triangulum
qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, suis latera

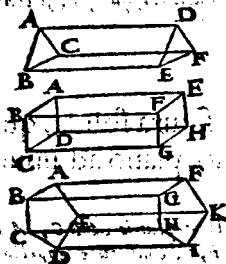


planum dictum continet. Vnde & basis pyramidis nuncupari
solet planum huiusmodi. Vt pyramidis triangularis, præter
basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD : Quadrangula vero
 ABE, MDE, BCE, CDE : Pentagonæ denique $ABF, AEF,$
 BCF, CDF, EDF .

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ pla-
nis continetur, quorum aduersa duo sunt
& æqualia, & similia, & parallela; alia ue-
ro parallelogramma.

PRISMA scilicet solida, quarum plana aduersa &
æqualia, & similia & parallela sunt triangula ABC, DEF :



vel quadrangula $ABCD, EFGH$: vel pentagona $ABCDE,$
 $FGHIK$, &c. Parallelogram-
ma vero $ACFD, ABED,$
 $CBEF$: vel $ABFE, ADNE,$
 $CDHG, CBFG$: vel $ABGF,$
 $AEKF, DEKI, DCHI, BCHG$;
dicuntur prismata. Itaq; pris-
ma nil aliud eris, quàm colum-
na quædam latera æqualis cras-
situdinis, cuius bases oppositæ
sunt æquales, similes, & paralle-
le, siue hæ sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c.

Vnde et parallelogramma continentur prismata quodlibet, quos
latera, siue anguli in unoquoque oppositorum planarum repe-
tuntur, ut figura indicat.

Ex his manifestum est, quantum hallucinantur, inter quos
est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram soli-
dam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, si-
milium, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma.
Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serra-
tile. Cum autem hac figura sit saluta-
re speciem prismatis, de-
finitio

finis autem radia infinita alia genera prismatis completa-
tur, ut constat; prefertim quod plurime demonstrationes in hoc
libro & 12. sequenti, ex quo omnibus prismatibus communis
perspicuum est eos hallucinari, qui unum tantum prismatis ge-
nux hac defin colligunt. Sumpserunt autem forte hi aucto-
res occasionem errandi, quod Euclides & in propos. vltima hu-
ius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate
loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem
animaduertunt, septimam propositionem lib. 12. nullis aduer-
sari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit
duorum triangularum oppositorum, eo quod talis prismatis solus
demonstratio illa conueniat. Quod si sola ea figura, ut ipsi vo-
bunt, prismata appellaretur ab Euclide, frustra dixisset. Omne
prisma trigonum habens basin, &c. cum nullum aliud prisma
daretur. Immo in corollario dicta propositionis septima infert
Theon. Pyramidem esse tertiam partem prismatis eadem cum
illa basin habentis, & altitudinem aequalem; hoc duo plana
prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quauis rectili-
nea, aequalia tamen & similia, ut multis definitio. Ex quo loco
luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera facien-
dum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communi
omnium sententia demonstrationes Theoni ascripserint, sine Eucli-
dis. Accedit etiam, quod a Theone in demonstratione propo-
sitionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia so-
lida, qua habent duo plana aduersa & aequalia & similia, siue
ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua ve-
ro parallelogramma.

XIII.

SPHAERA est, quando, semicircu-
li manente diametro, circumductus semi-
circulus in se ipsum rursus reuoluitur, unde
moueri ceperat, circumassumpta figura.

Si cetera linea recta circa alterum eius extremum quie-
scens rotata describit circulum; ita & semicirculus circa al-

porum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram definitis, quam Geometra sphaeram appellant. Unde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, a quo omnes linea recta in peripheriam cadentes sunt aequales; propterea quod omnes aequales existant illi linea circumuoluta: Ita quoque in sphaera punctum reperitur, nempe medium diametri quiescens, hoc est, centrum semicirculi circumducti, a quo omnes rectae cadentes in peripheriam sunt aequales; eo quod omnes sint semidiametro dicti semicirculi aequales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphaera definiri poterit etiam hoc modo.

S P H A E R A est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam ab uno puncto eorum, quae intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectae lineae inter se sunt aequales.

CICERO in lib. de universitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod *σφαίριος* Graeci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radijs attingitur.

XV.

A X I S autem sphaerae, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRUM sphaerae est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphaerae, est re-

Ita quædam linea per centrū ducta, & vtrin-
que a sphaeræ superficie terminata.

HAB. tres definitiones non egent expositione; dummodo
hoc solum notetur, omnem diæstetrum sphaera posse esse axem,
si nimirum circum eam sphaera reuoluatur. Vnde quia in de-
scriptione sphaera circa diæstetrum semicirculi factus est motus
ipsius sphaerae, propterea eam solum Euclides axem sphaera
nominante.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli
trianguli. manente uno latere eorum, quæ
circa rectum angulum, circumductum trian-
gulum in se ipsum rursus reuoluitur, un-
de moueri cæperat; circumassumpta fi-
gura.

ATQVE si quiescens recta linea æqua-
lis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum
conueritur, Orthogonius erit conus: Si
uero minor, Amblygonius; Si uero ma-
ior, Oxygonius.

Et si triangulum rectangulum ABC , circa latus quie-
scens AB , quod est circum rectum angulum, circumducatur,
donec integram reuolutionē expleat, describetur solida quadā
figura, qua cōtine-
tur duabus superfi-
ciebus, circulari,
una, ac planā, quæ
 BC , latus alterum



circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, æqui-
conuexa, quæm latus AC , recto angulo oppositum delin-
das. Hec igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanula autem
pyramidem rotundam appellas.

Quod si latus quiescens AB , equale fuerit circumducto BC , ut in prima figura, dicitur conus descriptus orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A , re-

§. primi



cto est. Cum enim latus AB , equale fuerit circumducto BC , ponatur aequalis BC , et erit angulus BAC , rectus, quia BC , AB aequales sunt cum aequaleam uno recto, eo quod ABC , sit rectus. Sit BAC , semirectus. Eodemque modo angulus BAD , ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD , rectus erit. Si vera quiescens latus AB , minus fuerit circumducto BC , ut in secunda figura, vocabitur descriptus conus obliquus, seu obtusangulus, quoniam scilicet angulus ad verticem A , obtusus existit. Cum enim BC , latus lateris AB , sit maior, erit angulus BAC , maior angulo BAD . Quare cum hi duo anguli aequivalentur uno recto, propterea quod angulus ABC , ponatur rectus, erit BAC , semirecto maior. Similiter BAD , maior erit semirecto, atque adeo totus CAD , recto maior erit. Si denique quiescens latus AB , minus fuerit circumducto BC , ut in tertia figura, appellabitur conus descriptus oxigonius, seu acutangulus, quia nimirum angulus ad verticem A , acutus est. Cum BC , latus AB , minus sit latere BC , erit et angulus BAC , angulo BAD , maior. Quapropter cum hi duo uni recto aequivalent, eo quod angulus ABC , rectus ponatur, erit BAC , semirecto maior, ideoque reliquus BAD , semirecto minor. Non secus ostendatur angulus BAD , minor esse semirecto. Ergo totus CAD , recto erit minor.

§. primi

XIX.

AXIS autem conici, est quiescens illa linea, circum quam triangulum vertitur.

Et in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB .

X X.

bono. *conferuntur* in *conferuntur* V

BASIS uero conī est circulus; qui a circumducta linea recta describitur.

NIMIRUM circulus, qui describitur ab altero latere circuli rectum ad alterum; quod est B C. in superioribus conis. Ita que huiusmodi, semidiameter est ipsa ab utroque circulo ad basin.

QUONIAM vero Euclides solum definit, conum rectum, cuius uidelicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basin rectus non est; placuit ex Apollonio Pergaeno addere generalem conī descriptionem, quae de recto, & inclinatum comprehendat; propriam quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possumus de cono inclinato, quae Euclides de recto cono ostendit, ubi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctū, coniuncta recta linea in utramque partem producat; & manens puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, a quo cepit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiēbus ad uerticem inter se se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quae eam describit, in infinitum producta, uoco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quae per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem uoco figuram contentam circulo, & conica superficie, quae inter uerticē,

et circ.

& circuli circumferentiam Interijcitur.

VERTICEM conij, punctum, quod & superficiem conicam verticem est.

AXEM, rectam lineam, quae a vertice ad circuli centrum perducitur.

BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem uoco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SEALLENOS uero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

Haec autem omnia ita explens Euclidus in commentariis, quos in Apollonium scripsit.

SIT circulus $A B$, cuius centrum C , & punctum aliquod sublimis D , iunctaque $D B$ in infinitum ex utraque parte producat ad puncta E, F . Si igitur recta linea $D B$, feratur consue in circuli $A B$, circumferentia, quousque punctum B , rursus in eum locum restituantur, a quo caput impedit: describet superficiem quandam, qua quidem constat ex duabus superficieribus ad D punctum

se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quae ex aequo in infinitum, cum recta linea $D B$, ipsam describens in infinitum producat. Verticem superstitis dicti punctum D . Axem, rectam $D C$. Eam uero appellat figuram conicam circulo $A B$, & ea superficie, quam $D B$ sola describit. Coni verticem, punctum D . Axem $D C$. Basim $A B$, circulum. Quod si $D C$, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectam vocat axem: Sin minus, Scalenum.

Haec autem omnia ita explens Euclidus in commentariis, quos in Apollonium scripsit.

XXI

CYLINDRVS est, quando rectam

guli

guli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus reuoluitur, unde experat moueri, circumassumpta figura.

P E L V T I si rectangulum parallelogrammum $ABCD$, circa latus quiescens AB , circumuoluantur, donec integram expleas reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiesbus consistitur, duabus videlicet planis circularibus, quæ latera AD , BC , describunt; et altera curua, eaque conuexa, quam latus CD , describit, inflar columnam alicuius rotunda. Unde factum est, ut Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

A X I S autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

N O T A recta AB , in superiori figura, dicitur axis cylindri.

XXIII.

B A S E S uero cylindri sunt circuli a duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

Q U A E S sunt circuli a lateribus AD , BC , oppositi descripti.

EVCLIDES vero solum cylindrum rectum hoc loca definit, cuius uidelicet axis rectus est, ad utramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theorematum, ex alijs Geometris sumis proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, uisum est prius ex Sereno Antinensi definire cylindrum uniuersæ, ut complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

Si duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri, semper inter se æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumscribuntur, & simul circumscribuntur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituitur, a quo moueri cepit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficiei dicitur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficiei inter ipsos interiecta continetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

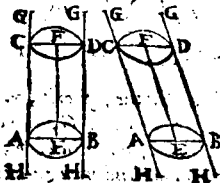
AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases utrasque contingit, quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicuntur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

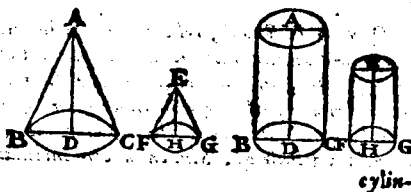
SINT duo circuli aequales, & equidistantes AB, CD , quorum centra E, F , & diametri equidistantes quoque AB, CD . Iunctaque recta AC , in infinitum ex utraque parte producat ad puncta G, H . Si igitur diametri AB, CD , circa centra E, F , in planis, circulorum semper equidistantes, una cum recta AC , circunducantur, donec ad eum locum restituantur, unde moveri coeperunt, & describetur a linea AC , superficies quadam rotanda, quam Sononius cylindricam vocat; quae & augetur in infinitum, cum recta AC , ipsam describens in infinitum producat. Cylindrum vero appellat figuram ABD circulis AB, CD , & cylindrica superficie insar ipsos interiecta, quam videlicet sola AC , describit, comprehensam. Bases cylindri dicuntur circulos AB, CD . Axem; rectam EF , quae circulorum centra coniungit. Latus cylindri; rectam AC . Quod si axis EF , perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scaenum.



XXIII.

SIMILES conus & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum apicibus, et basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos &



cylindros secundū duas dimensiones esse similes, longitudinē scilicet ac latitudinē; Axes vero eorū secundū profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni



ABC , EFG ; itē duo cylindri; in conis autem axes AD , EH , & basium diametri BC , FG , simili-
ter, & in cylin-

dris: Itaque si fuerit, ut axis AD , ad axem EH , ita BC , diameter basis ad FG , diametrum basis, dicentur eam coni, quam cylindri similes inter se; quia videlicet hac ratione nam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quoniam secundum profunditatem, ut diximus, nempe unius eorum tres dimensiones proportionales sunt; Vel etiam, quia triangula ADB , EHF , ex quorum resolutione descripti sunt coni, nec non rectangula AB , EF , quorum conversiones cylindros effecerunt; hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit ut AD , ad EH , ita BC , ad FG ; Sit autem ut BC , ad FG , ita dimidia BD , ad dimidiam FH ; erit quoque ut AD , ad EH , ita DB , ad HF ; & permutando ut AD , ad DB , ita EH , ad HF . Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera circum aequales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula similia inter se erunt, & rectangula: Triangula quidem, propterea quod triangula unū angulum uniangulo habentia aequalem, & circum aequales angulos latera proportionalia; aequiangula sunt; adeoque latera omnia circa angulos aequales habent proportionalia, atque adeo inter se similia existant: Rectangula vero, eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD , DB , sint aequalia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habeant.

Quod si cono, vel cylindri fuerint inclinati, (de re-
tis enim huiusmodi Euclides verba fecit.) dicentur & sum de-
mum similes, quando eorum axes, & diametri basium erunt
proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt,
aequales: qui quidem anguli accipiendi sunt, ut in definitio-
ne quinta dictum est. Sint enim cono inclinati, similiter &
cylindri

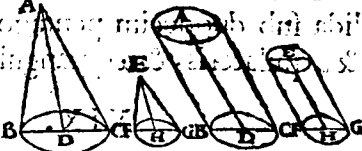
15. quinti

6. sexti,
4. sexti.

34. primi.

cylindri ABC , $EF G$. Illi conis ducti axes sint AD , EH ,
& basium diametri BC , FG ; similiter & in cylindris.
Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, ut AD , ad

EH , ita BC , ad FG ,
existerintque anguli
inclinatioque ADB ,
 EHF , tam in conis,
quam in cylindris,
aequales inter se; dicē
tur & conii inter se, &



cylindri quod inter se se similes; quoniam nimirum haec ratione &
tres eorum dimensiones sunt proportionales, ut supra diximus, &
rursus tam trianguia ADB , EHF , quam rectangula ADE ,
 EHF , quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, in-
ter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque de-
monstratum est. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum
anguli ADB , EHF , ponantur aequales, licet non sint
recti.

XXV.

$GV BVS$ est figura solida sub sex qua-
dratis aequalibus contenta.

XXVI.

$TETRAEDRVM$ est figura solida
sub quatuor triangulis aequalibus, & equi-
lateris contenta.

XXVII.

$OCTAEDRVM$ est figura
solida sub octo triangulis aequalibus, & equi-
lateris contenta.

XXVIII.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis aequalibus, & equilateralis, & equiangulis contenta.



XIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub uiginti triangulis aequalibus, & equilateralis contenta.

H. A. B. C. sunt quatuor corpora, quae regularia uocantur, eo quod omnia plana, quibus continentur, aequalia sint, equilatera, & equiangula, ut ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in *Tymaeo* quinque mundi corpora, quae simplicia a philosophis nuncupantur, nempe Calum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque dictis corporibus affimilem in *sphaera* Ioannis a sacro bosco latius explicauimus, hanc omnium constructionem tradetur lib. 13. Cubi quidem proposit. 11. Tetraedri uero proposit. 13. Octaedri deinde proposit. 14. Dodecaedri autem proposit. 17. Icosaedri denique proposit. 18. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim diffundimus, ut si, & ita depicti, ut utramque effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen propria in locis praeter admodum faciles, quibus ea quolibet secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque uero aliud corpus regulare praeter quinque praedicta dari potest, ut demonstrabimus ad finem lib. 13.

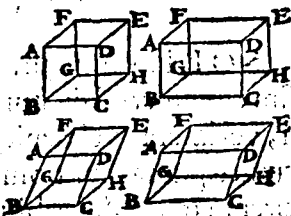
QUONIAM uero in hoc lib. 11. frequens fit mentio *Parallelepipedum*, & in lib. 15. agitur de eius inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium, necesse est, ut diximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit *Parallelepipedum*, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris. quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta.

VELVTI solida comprehensa sex quadrilateris figuris $ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG$, quarum oppositæ AC, FH Item DF, CG ; Item AG, DH , sunt parallelæ, nominantur parallelepipedum, quasi parallelis planis comprehensa. quæ quidem plana parallelæ opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, ut demonstrabitur propof. 24. huius lib.



SUNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, respondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus: Si deniq; sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Ceteris quodcunq; parallelepipedum vocari etiam poteris Prisma, ut ex definitione prismatis constas.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

NON est necesse, ut anguli interioris figura constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figura, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: Sed satis est, ut omnes anguli figura interioris tangant vel aliquos angulos, vel aliquos latera, vel denique aliquos plana exterioris figura; ita ut nullus angulus figura interioris intactus relinquantur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figura exterioris.

PRIMUM duæ hæc postrema definitiones planius percipiuntur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusque mutuis corporum regularium copiose agitur.

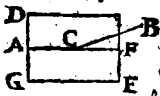
I.

THEOR. I. PROPOS. I.

RECTAE lineæ pars quædam non est
in su-

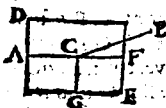
in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ AB , pars quidem AC , in subiecto plano DE , pars vero CB , in sublimi, ita ut omnia puncta partis AC , in plano DE , iaceant, puncta uero omnia partis CB , supra planum DE , existant, uel infra. Erit igitur in plano DE , ipsi AC , rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum posita, nempe CF . Quamobrem duæ rectæ AB , AF , commune habent segmentum AC , quod est absurdum, ut in pronunciato 13. lib. 1. demonstrauiamus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam uero in sublimi. Quod erat demonstrandum.



SCHOLION.

HÆC est communis demonstratio interpretum. Sed forte dicit aliquis, in ea aliquid desiderari; nempe ut ostendatur, rectæ AC , esse aliquam rectam in plano DE , in directum, & continuum positam. Qui enim concedit, rectæ AB , partem quidem AC , esse in plano DE , partem uero CB , in sublimi, utique negabit, rectæ AC , in plano DE , dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB , in rectum & continuum positam esse fateatur ipsi AC . Verumtamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem rariius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, qua ex equali suas interiaces lineas, hoc est, quæ recte, & equaliter semper extenditur, ut & linea recta. Quamobrem si AC , in plano DE , producaturs usque ad F , erit CF , recta rectæ AC , in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam id ipsum Geometricè, in plano uidelicet DE , ipsi AC , dari posse aliam rectam, qua cum ipsa unam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat, AB , esse quoque rectam, eiusque partem AC , in plano DE , partem uero CB , in sublimi esse positam. Ducatur n. in plano DE , ipsi AC , perpendicularis CG ;



11. primi.

14. primi.

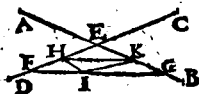
Et in eodem plano ipsi CG , perpendicularis CF . Dico CF , esse ipsi AC , positam in continuum & rectum. Cum enim AC , & FC , in eodem plano DE , cum recta CG , duos rectos angulos constituent ACG , FCG , ex constructione; erunt AC , & FC , indirectum & continuum posita. Quamobrem etiam si quis contendat, AB , esse rectam, cuius quidem pars AC , in plano DE , subiecta, pars autem CB , in sublimi sit constituta; sament in eodem plano DE , erit alia recta, nempe CF , quæ cum AC , unam rectam constituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB , AF , segmentum commune habebunt AC . Quod est absurdum.

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secant, in vno sunt plano. Atq; triangulum omne in vno est plano.

Rectæ lineæ AB , CD , se mutuo secant in E , & in E , B , E , D , sumptis punctis F , & G , utcumque, ducatur recta FG , ut fiat triangulum EFG . Dico triangulum EFG , in vno esse plano; Item rectas AB , CD , in vno quoque plano existere. Si enim trianguli EFG , pars quædam, nimirum EHI , in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI , in sublimi, vel



1. undeci.

contra; Existent quoque rectarum EF , GF , partes quidem EH , GI , in vno plano, partes vero HF , IF , in sublimi, vel contra. quod fieri non posse, iam supra demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem $EFIK$, in vno plano credatur esse, pars autem $GLIK$, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG , FG , partes quidem EK , FI , in vno plano, partes vero KG , IG , in sublimi, vel contra. Si denique eiusdem trianguli pars quidem FHK , in vno concedatur esse plano, pars vero EHK , in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE , GE , partes quidem FH , GK , in vno plano, partes autem HE , KE ,

K E, in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, ut
est demonstratum. Quare triangulum E F G, in uno pla-
no existit; eademq; est ratio in omni alio triangulo.

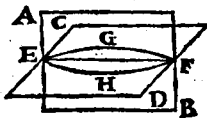
Q V I A vero, in quo plano est triangulum E F G, in
eodem existunt eius latera E F, E G: In quo autem sunt re-
ctæ E F, E G, in eodem sunt rectæ totæ C D, A B, ne par-
tes quædam in plano, partes vero alie in sublimi dicantur
esse; Erunt propterea rectæ A B, C D, in uno plano, in
quo nimirum triangulum E F G, consistere demonstraui-
mus. Quo circa si duæ rectæ lineæ se mutuo secant, in vno
sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.
Quod erat demonstrandum.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI duo plana se mutuo secant, commu-
nis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana A B, C D, sitq; communis
eorum sectio E F. Dico E F, esse lineam rectam. Si enim
non credatur esse recta, ducatur in
plano A B, recta E G F, & in plano
C D, recta E H F. Rectæ igitur
E G F, E H F, cum eisdem habeant
terminos E, & F, superficiem inclu-
dent. Quod fieri non potest, ut in



12. pronunciato 1 lib. ostendimus. Communis ergo sectio
E F, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo se-
cent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat
ostendendum.

A L I T E R. Secent se rursus plana A B, C D, sintque
termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ con-
nectantur recta E F. Si igitur recta E F, in utroque plano exi-
stet, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio.
Si uero E F, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in al-
terutro eorum recta ducatur E G F, concludent rursus duæ
rectæ E F, E G F, superficiem, cum eisdem habeant termi-
nos E, & F. Si deniq; recta E F, in altero tantum plano

R 3 esse

esse credatur, tunc si in altero ducatur recta E G F; indu-
dēt iterum duæ rectæ E F, E G F, superficiem. Quod est
absurdum. Est ergo recta E F, in utroque plano A B, C D;
atque adeo communis eorum sectio est.

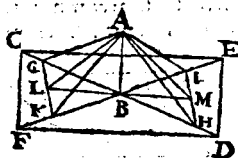
4

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mu-
tuo secantibus, in communi sectione ad re-
ctos angulos insistat: Illa ducto etiam per
ipsas plano ad angulos rectos erit.

2. undec.

R E C T A linea A B, insistat duabus rectis C D, E F,
ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico re-
ctam A B, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per
ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo se-
cent in B; erunt ipsæ in uno plano, quod sit C E D F. Su-
mantur inter se æquales rectæ B G, B H; Item rectæ B I, B K;
ducanturq; rectæ G K, I H; & in eodem plano per B, ducatur
recta L M, secās rectas G K, I H, in punctis L, & M. Demittan-
tur quoque ex A, puncto in su-



15. primi.

4. primi.

15. primi.

26. primi.

blimi ad idem planum rectæ A G, A L, A K, A H, A M,
A I. Quoniam igitur latera B G, B K, trianguli B G K, la-
teribus B H, B I, trianguli B H I, ex constructione sunt æ-
qualia; & anguli quoque ipsis contenti G B K, H B I, cum
sint ad uerticem B, oppositi, æquales: Erunt bases G K, H I,
inter se, & anguli B K G, B I H, inter se quoque æquales.

R V R S V S cum anguli K B L, I B M, ad uerticem B,
oppositi sint æquales; erunt duo anguli K B L, B K L, trian-
guli B K L, duobus angulis I B M, B I M, trianguli B I M,
æquales; Sunt autem & latera B K, B I, quibus adjacent,
æqualia, ex constructione. Igitur & reliqua latera K L,
L B, reliquis lateribus I M, M B, æqualia erunt.

P R A E T E R E A cum latera A B, B G, trianguli A B G,
æqualia

æqualia sint lateribus AB, BH , trianguli ABH , ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH , æquales, nempe recti, ex hypothesi; erunt & bases AG, AH , æquales. Simili argumento. æquales erunt rectæ lineæ AI, AK .

1. primi.

AMPLIUS quia latera AI, IH , trianguli AIH , lateribus AK, KG , trianguli AKG , æqualia sunt; & basis AH , basi AG , ex hactenus demonstratis; erunt etiam anguli AIH, AKG , dictis lateribus comprehensi, æquales.

8. primi.

ITAQUE cum latera AK, KL , trianguli AKL , æqualia sint lateribus AI, IM , trianguli AIM ; & anguli ipsis contenti AKL, AIM , æquales etiam, ut hactenus demonstravimus; erunt quoque bases AL, AM , æquales.

4. primi.

QUONIAM denique latera AB, BL , trianguli ABL , æqualia sunt lateribus AB, BM , trianguli ABM ; & basis AL , basi AM , ex demonstratis; erunt quoque anguli ABL, ABM , dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint reinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. Quare recta AB , rectos angulos efficit cum recta LM , quæ in plano subiecto ipsam tangit in B : Eademque ratione ostendetur, rectam AB , cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B , angulos rectos constituere: Ac proinde recta AB , plano $CEDF$, quod per rectas CD, EF , ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit. Quod demonstrandum erat.

8. primi.

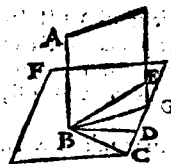
THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

INSISTAT recta linea A B, tribus rectis lineis B C, B D, B E, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas B C, B D, B E, in uno plano esse. Cum enim quælibet duæ in vno sint

2. undec.



2. undec.

plano, propterea quod productæ ad pares B, se mutuo secant in B; sint B C, B D, in plano F C; Et si fieri potest, recta B E, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. Quoniam vero duæ rectæ A B, B E, in vno sunt plano, cum se mutuo secant in B; Sint ambæ in plano A B. Et quia plana F C, A E sibi mu-

3. undec.

4. undec.

tuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. Sit ergo eorum communis sectio recta B G. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis B C, B D; erit propterea & plano F C, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ B G, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli A B E, A B G, existentes in plano A G, per rectas A B, B E, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in uno plano F C, existentibus, non erit B E, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

6.

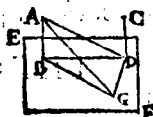
THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, C D, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta B D, in plano E F, erunt anguli A B D, C D B, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodẽ plano E F, ducatur D G, ad B D, perpendicularis, ponanturq; æquales A B, D G. Connectantur deinde rectæ B G, G A, A D. Quoniam igitur latera A B, B' D, trianguli A B D, æqua-

lia

hæ sunt lateribus $G D$, $D B$, trianguli $G D B$, ex constructione, & anguli quoque ipsis contenti $A B D$, $G D B$, æquales, nempe recti: Erunt bases æquales $A D$, $G B$. Rursus quia latera $A B$, $B G$, trianguli $A B G$, æqualia sunt lateribus $G D$, $D A$, trianguli $G D A$; Est autem & basis communis $A G$; Erunt anguli $A B G$, $G D A$, æquales: Est autem $A B G$, rectus, ex definit. huius lib. Igitur & $G D A$, rectus erit. Quoniam uero, ex eadem definit. angulus quoque $G D C$, rectus est; erit recta $G D$, tribus rectis $D B$, $D A$, $D C$, ad angulos rectos. Quare rectæ $D B$, $D A$, $D C$, in uno erunt plano: Est autem $A B$, in eodem plano, in quo $D B$, $D A$. Recta igitur $C D$, in eodem erit cum $A B$, plano. Quocirca cum anguli inter $A B D$, $C D B$, sint recti, erunt rectæ $A B$, $C D$, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos fiat angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



4. primi.

2. primi.

5. undec.

2. undec.

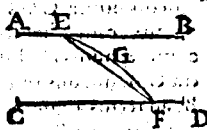
28. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa lineæ, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis $A B$, $C D$, sumantur utcumque duo puncta E , & F , quæ recta connectantur $E F$. Dico rectam $E F$ in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ $A B$, $C D$. Si enim recta $E F$, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra: scetiam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E , & F , sitq; communis sectio horum planorum $E G F$, quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ $E F$, $E G F$, cum habeant eodem terminos E , & F , superficiem claudant. Quod est absurdum: Non ergo extra planum



3. undec.

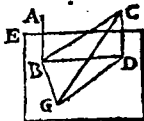
planum parallelarum AB, CD , erit recta EF . Quaresi duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa lineæ, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodẽ est cum parallelis plano. Quod erat demonstradũ.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

29. primi.



SINT parallelæ rectæ AB, CD ; sitque CD , plano EF , ad angulos rectos. Dico & AB , eidem plano EF , esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD , in plano EF ; erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB , rectus: Sunt autem duo CDB, ABD , duobus rectis æquales. Igitur & ABD , rectus erit. Iam in plano EF , ducatur BG , perpendicularis ad BD ; ponanturque æquales BG, CD . Coniungantur deinde rectæ DG, GC, CB .

Quoniam igitur latera CD, DB , trianguli CDB , æqualia sunt lateribus GB, BD , trianguli GBD , ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti CDB, GBD , æquales, nimirum recti; Erunt bases CB, GD , æquales. Rursus quia latera CD, DG , trianguli CDG , æqualia sunt lateribus GB, BC , trianguli GBG ; & basis est communis CG ; Erunt anguli CDG, GBC , dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG , rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBG , rectus erit. Quare recta GB , duabus rectis BD, BC , se invicem tangentibus in B , ad rectos angulos existit; ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC , ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB ; propterea quod rectæ BD, BC , in eodem sine plano, in quo parallelæ AB, CD , cum puncta B, C, D , existant in parallelis AB, CD : Igitur & GB , recta rectæ BA , ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum

4. septimi.

8. primi.

4. undec.

7. undec.

re cum

se cum AB , recta sit ad rectas BG , BD , erit quoque AB , recta ad planum per BG , BD , ductum, hoc est, ad planum EF . Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos quidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

4. undec.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QUAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

SIT EF rectæ lineæ AB , CD , ipsi EF , parallelæ; non sint autem in eodem cum EF , plano. Dico AB , CD , parallelas quoque esse. Nam a quolibet puncto G , rectæ EF , ad ipsam EF , ducantur duæ perpendiculares; GH , quidem in plano parallelarum AB , EF ; GI , in plano parallelarum CD , EF . Quoniam igitur EG , recta est ad duas rectas GH , GI , se tangentibus mutuo in G ; erit recta quoque ad planum per ipsas GH , GI , ductum. Quamobrem cum sint parallelæ AB , EF ; & EF , sit recta ad planum per GH , GI , ductum; erit quoque AB , ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ CD , EF ; Sit autem EF , recta ad planum per GH , GI , ductum; erit etiam CD , recta ad idem planum; Atque proinde rectæ AB , CD , cum rectæ sint ad idem planum per GH , GI , ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

4. undec.

8. undec.

8. undec.

6. undec.

SCHOLION.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB , CD , non esse in eodẽ plano cũ recta EF , cui sunt parallelæ. Nã si foret in eodẽ plano cũ ipsa EF essent AB , CD , inter se parallelæ.

ex 30.

ex 30. propos. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano : Illæ angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB , AC , se tangentes in A , parallelæ rectis DE , DF , se tangentibus in D ; non sint autem AB , AC , in eodem plano, in quo DE , DF . Dico angulos BAC , EDF , ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim AB , DE , inter se æquales, & AC , DF , inter se, ducanturq; rectæ BC , EF , BE , AD , CF . Quoniam igitur AB , DE , parallelæ sunt & æquales; erunt quoque BE , AD , parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF , AD . Quare cū BE , CF , parallelæ & æquales sint eidem AD ; erunt etiā BE , CF , inter se parallelæ, & æquales: Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC , EF . Quia ergo latera AB , AC , trianguli ABC , æqualia sunt laterib; DE , DF , trianguli DEF , ex cōstructione; & basis BC , basi EF , æqualis, ut modo demonstrauimus; Erunt & anguli BAC ; EDF , dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

33. primi.

9. undec.

33. primi.

8. primi.

SCHOLION.

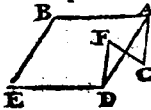
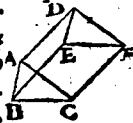
CONCLUSIO huius theorematidis vera etiam est, quā do priores duæ lineæ in eodem sunt plano cū duabus posterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB , AC , DE , DF , in eodem plano, sitq; AB , ipsi DE , & AC , ipsi DF , parallelæ. Dico angulos BAC , EDF , esse æquales. Nam ponantur æquales AB , DE , & AC , DF ; ducanturq; rectæ BC , EF , quæ aut in

in una recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prims in una recta B F. Quoniam igitur parallela sunt A B, D E; æquales erunt anguli A B C, D E F; internus & externus: Similiter æquales erunt anguli A C B, D F E; Sunt enim & A C, D F, parallela. Quare duo anguli A B C, A C B, trianguli A B C, æquales sunt duobus angulis D E F, D F E, trianguli D E F. Igitur anguli quoque reliqui B A C, E D F, æquales erunt. Quod est propositum.

N O N sint iam B C, E F, in una recta linea constitutæ. Du ctis rectis A D, B E, C F, cum A B, D E, sint parallela & æquales; erunt & A D, B E, parallela & æquales. Eadem ra sione A D, C F, parallela erunt & æquales, eo quod A C, D F, parallela ponantur & æquales. Quare & B E, C F, eidẽ A D, parallela existentes & æqua les, inter se parallela erunt & æquales: Ac proinde parallela & æquales quoque erunt B C, E F. Itaq; cum duo latera A B, A C, trianguli A B C, B E, C F, æqualia sint lateribus D E, D F, trianguli D E F; & basi B C, ba si E F; erunt anguli B A C, E D F, contenti dictis lateribus, æ quales. Quod est propositum.

C A E T E R U M ut conclusio huius theorematiss recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (sive omnes sint in eodem plano, sive non;) ut tres recta A D, B E, C F, nulla ratione se mutuo secent; ut ex prima, & ultima figura apparet. Nam alias conclusio ve ra non erit.

S V N T enim recta A B, A C, rectis D E, D F, paralle la in hac figura; & tamen anguli B A C, E D F, quos com prehendunt, non sunt æquales, cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo evenit, quod A D, C F, se mutuo secant. Vnde quamvis A C, D F, sint parallela & æquales, non tamen propterea A D, C F, quæ eas cõiungunt, parallela sunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad easdem partes, ut vult propof. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematiss locum non habet, de ficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris servatur.



29. primi.

32. primi.

33. primi.

30. primi.

33. primi.

8. primi

II.

PROBL. I. PROPOS. II.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta ut-
12. primi. cunque DE, ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F:



Quæ si fuerit perpendicularis ad pla-
num B C, factum erit, quod pro-
ponitur: Si uero non fuerit A F, ad
planum B C, perpendicularis, ducatur
in plano B C, per F, ad D E, per

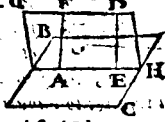
perpendicularis G H; ad quam ex A, perpendicularis demittatur
11. primi. A I. Dico A I, esse perpendicularem ad planum subiec-
12. primi. tum B C. Ducta enim in plano B C, per I, ipsi D E, paral-
31. primi. lela K L; cum D F, ad rectos angulos sit duabus F A, F H,
4. undec. ex constructione, ac proinde recta ad planum per F A, F H,
8. undec. ductum; erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H,
2. undec. ductum recta. Quoniam uero A I, in eodem est cum rectis
F A, F H, plano, tangitq; rectam K I, in I; erit per de-
finitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atq; adeo
A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. Igitur A I, ad
4. undec. planum per K I, I F, ductum, hoc est, ad planum B C, re-
cta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum pla-
num perpendicularem rectam lineam duximus. Quod fa-
ciendum erat.

12.

PROBL. 2. PROPOS. 12.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT a dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendi-
cularis ad datum planum B C. Ex quous puncto D, in su-
11. undec. blimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E: quæ
si ceci-

si ceciderit in A, punctum; factum erit, quod proponitur: Si
uero ceciderit in aliud punctum E, extensa recta per E, & A,
ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per
DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse. 
se ad planum datum BC. Cū enim DE,
AF, parallele sint; & DE, recta ad planū
BC, ex constructione; erit quoq; AF, ad
idem planū BC, recta. Itaq; dato plano,
& puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat

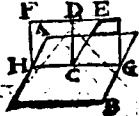
31. primi.

8. undec.

THEOR. II. PROPOS. 13.

13.

DATO plano, a puncto, quod in illo
datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angu-
los non excitabuntur, ad easdem partes.

S. I. datum planum AB. Dico a datoq; puncto C, ad
easdem partes, non posse educi duas perpendiculares ad pla-
num AB. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendicu-
lares CD, CE, ad planum AB; & per 
CD, CE, quæ in uno eodēq; plano sunt,
ducatur planum FG, secans planum AB,
per rectam lineam GH. Cum igitur EC,
DG, rectæ sint ad planum AB; erunt per
defin 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, & proinde
æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur
plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ, &c.
Quod erat demonstrandum.

1. undec.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planū
AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC,
EC, rectæ sint ad idem planū AB; erunt ipsæ inter se paral-
lelæ, cū tamē conueniant in puncto C. Quod est absurdū.

6. undec.

SCHOLIUM.

EODEM modo, a puncto in sublimi ad subiectum pla-
num duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demissentur. Du-
cantur enim ex A, puncto in sublimi, ad subiectum planum

BC,

2. undec.

B. si fieri p. 25. est. 2. duae perpendiculariter: A D, A E. Ducatur
per A D, A E, quae in vno plano sunt, planum F G, secans
planum B C, per rectam G H. Cum igitur A D,
A E, rectae sint ad planum B C, erunt per de-
fin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, re-
cti, interni in triangulo A D E. Quod est ab-



17. primi

surdum; cum sint duobus rectis minores, quilibet duo anguli
in triangulo quousque assumpti.

6. undec.

A. L. L. E. R. A. Si A D, A E, rectae sint ad planum B C,
ipse erunt inter se parallelae, cum tamen conveniant in pun-
cto A. Quod est absurdum.

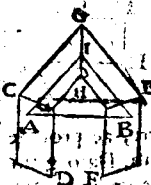
14.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

AD quae plana, eadem recta linea re-
cta est; illa sunt parallela.

3. undec.

S. I. T. recta A B, ad plana C D, E F, recta. Dico paralle-
la esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse paralle-
la, producta inter se conveniant. Conveniant ad partes C,



17. primi.

E, & faciant communem sectionem re-
ctam lineam G H. In qua sumpto pun-
cto utcumque I, ducantur rectae I A, I B,
in planis G C D, G E F. Quia igitur A B,
recta ponitur ad plana G C D, G E F;
erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli
I A B, I B A, recti, in triangulo A B I.
Sed & minores duobus rectis sunt. Quod
est absurdum. Igitur plana C D, E F, producta nunquam in-
ter se conveniunt. Parallela ergo sunt. Ad quae igitur plana,
eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

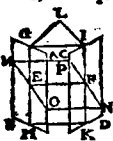
SCHOLIUM.

FACILE etiā demonstrari poterit cōuersum huius, videlicet.

Si fuerint duo plana parallela, recta linea,
quae ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum
quoque recta erit.

SINT

SINT duo plana parallela AB, CD , ad quorum alterum AB , recta sit linea recta EF . Dico EF , rectam quoque esse ad planum reliquum CD . Secet enim planum aliquod, nempe GK , plana AB, CD , per lineam rectam EF , incedens, faciasq; communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK : eruntque anguli GEF, HEF , recti, per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE . (Si enim alter eorum, nempe IFE , dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE , duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI , ad partes G, I , convenient, nimirum in puncto L ; atque adeo & plana AB, CD , in quibus existunt, ad easdem partes convenient ad punctum L ; cum tota recta HGL , sit in uno plano, nempe in AB , producta; Item tota recta KIL , in uno quoque plano, nimirum in CD , producta. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE .) Eodem modo si aliud planum videlicet MN , eadem plana secet per EF , faciens alias rectas, communes sectiones cum ipsis, $MO; PN$; erunt anguli PFE, NFE , recti. Itaque cum EF , sit recta ad duas rectas IK, PN , recta quoque erit EF , ad planum CD , per ipsas ductum. Quod est propositum.



1. undec.

4. undec.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illas ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC , se tangentes in A , duabus rectis lineis DE, DF , se tangentibus in D , existentibusque in alio cum illis plano parallelæ. Dico & plana BC, EF , per ipsas ducta, esse parallela. Ex A , enim deducatur ad planum EF , perpendicularis AG , occurrens plano EF , in puncto G . Deinde in plano EF , per G , ducantur GH, GI ,

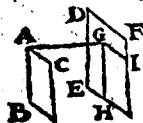
11. undec.

31. primi.

S ipsis

9. undec.
29. primi.

ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; erunt & AB, GH, inter se parallelæ; Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit



4. undec.

14. undec.

& angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC; recta quoque erit GA, ad planū BC, per ipsas ductam. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. Igitur parallelæ sunt planā BC, DE. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema subsequens. Videlicet.

D A T O plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

31. primi

D A T U M planum sit AB, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur visumque duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, agatur CE, ipsi DB, parallela; Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dicō planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CF, CE, se tangentes in C, existentibusque in alio cum illis plano parallela sint; parallela erunt plana AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.

15. undec.

16.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam secantur

Secentur : communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECENTUR plana AB, CD , plano EF , per rectas EH, GF . Dico communes sectiones eorum EH, GF , esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient. Cõueniant igitur in puncto I . Quia ergo tota recta HEI , in uno est plano, nimirum in AB , productæ; Item tota recta FGI , in uno quoque est plano, uidelicet in CD , productæ; conuenient etiã plana AB, CD , productæ ad I . Quod est absurdum, cū ponantur parallelæ. Sunt igitur rectæ EH, GF , parallelæ. Quare si duo plana parallelæ plano quopiam secantur, &c. Quod erat demonstrandũ.



1. undec.

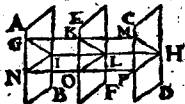
SCHOLION.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum factæ ab alio plano secante sint parallelæ, ut hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum cõmunes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallelæ sunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duosantum sunt parallelæ, alia uero omnia in aliquam partem productæ conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theomati 30. lib. 1. nimirum.

Quæ eidem plano parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT duo plana AB, CD , plano EF , parallelæ. Dico & AB, CD , parallelæ esse. Secantur enim tria plana plano GH , sintq; cõmunes eorũ sectiones rectæ GI, KL, MH . Secantur rursus alio plano NH , sintq; communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH , hæc tamen lege, ut duo plana secantia GH, NH ,



5. 2. se

se quoque mutuo secant, quarum sectio communis sit linearecta HI . Quia igitur parallela plana AB , EF , secantur plano GH , erunt communes sectiones GI , KL , parallele. Eodem modo parallela erunt MH , KL ; atque adeo parallela erunt inter se GI , MH . Nō aliter ostendemus, parallelas esse NI ,

16. undec.

30. primi



PH . Itaque cum IG , IN , se mutuo tangentes in I , parallela sint rectis HM , HP , se tangentibus in H , existentibusque in alio plano, erunt plana AB , CD , per ipsas ducta, parallela. Quod est propositum.

15. undec.

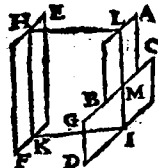
ALITER. Sumatur in tertio plano EF , punctū quodlibet G , a quo in utramque partem educatur ad planum EF , linea recta perpendicularis, occurrens plano AB , in puncto H , & plano CD , in puncto I . Quoniam igitur linea HG , recta est ad planum EF , recta quoque erit ad planum AB , si bi parallelum, per ea, qua in scholio propof.



14. huius lib. demonstravimus. Eadem ratione GI , recta erit ad planum CD . Quamobrem cum recta HI , sit recta ad plana AB , CD , parallela inter se erunt plana AB , CD . Quod est propositum.

14. undec.

QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conveniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duae rectae, quae alteri rectae sunt parallelae, si conveniant, unam rectam constituunt lineam, veluti ad propof. 30. lib. 1. demonstravimus. Sint enim plana AB , CD ,



plano EF , parallela, conveniantque producta secundum rectam CG . Dico, plana AB , CD , unum planum constituere. Secet enim planum quoddam HI , omnia tria plana per lineas rectas HK , LM , MI . Quoniam igitur parallela sunt plana AB , EF , erunt & communes sectiones LM , HK , parallela. Eadem ratione parallela erunt IM , HK . Quamobrem cum recta LM , IM , parallela sint ipsi HK , existantque in eodem plano secante HI , & conveniant in M ; ipse erunt in rectum & continuum posita, per ea, qua ad 30. propof. 1. lib. ostendimus. Ac proinde plana AB , CD , unum

16. undec.

unum planum efficiunt; propterea quod recta LI , in uno ia-
ceat plano. Quod est propositum. 1. unde.

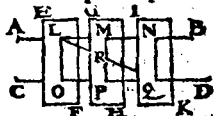
ITAQUE duo plana, quae parallela sunt alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conveniant, unum planum efficiunt.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transfuersum positæ, in diuersis existentes planis) secuntur planis parallelis EF, GH, I K, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmēta earum inter dicta plana intercenta esse proportionalia. ut qui-



2. ~~under~~

16. undec.

2. *sexti.*

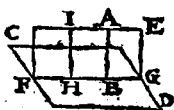
THEOR. 16. PROPOS. 18.

18.

SI recta linea plano cuiuspiam ad rectos
sit angulos : Et omnia, quæ per ipsam, pla-

na eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB , ad planum CD , recta. Dico omnia plana per rectam AB , ducta, esse recta ad idem planum CD . Ductum enim sit per AB , planum EF , secans planum CD ,



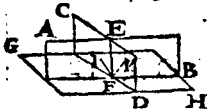
per rectam lineam FG . Sumpto deinde puncto H , utcumque in recta FG , ducatur in plano EF , ipsi AB , parallela HI . Quoniam igitur anguli ABH, IHB , duobus rectis sunt æqua-

les: Est autem ABH , rectus, per 3. defin. huius lib. erit & angulus IHB , rectus. Rursus quia AB , ponitur recta ad planum CD ; erit quoque IH , ad idem planum CD , recta. Eadem ratione erunt omnes lineæ, quæ in plano EF , ipsi AB , ducentur parallelæ, ad planum CD , rectæ: Quæ cum ducantur in plano EF , ad communem sectionem FG , perpendiculares; rectum erit planum EF , ad planum CD , per defin. 4. huius lib. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB , ducta, ad planum CD , esse recta. Si igitur recta linea plano cupiamus ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD , se mutuo secantia per lineam



rectam EF , ad planum GH , recta. Dico communem illorum sectionem EF , rectam quoque esse ad idem planum GH . Aut enim EF , ad BF, DF , communes sectiones planorum AB, CD , cum plano GH , recta est, aut non. Si recta est EF , ad BF, DF , recta quoque erit ad planum GH ,

planorum AB, CD , cum plano GH , recta est, aut non. Si recta est EF , ad BF, DF , recta quoque erit ad planum GH ,

31. primi

29. primi

3. undec.

4. undec.

G H, quod per ipsas ducitur. Si uero E F, concedatur recta ad alteram rectarum B F, D F, tantum; Sit ea recta ad B F. Quoniam igitur planum C D, ad planum G H, ponitur rectum; erit E F, quæ in plano C D, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur perpendicularis, ad planum G H, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si E F, concedatur recta ad D F. Si denique E F, ad neutram B F, D F, esse credatur recta; ducatur ex F, in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F I, Item in plano C D, ad D F, communem eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F K. Quoniam igitur planum A B, rectum ponitur ad planum G H, erit quoque perpendicularis I F, quæ in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur, recta ad planum G H, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit K F, ad idem planum G H, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum G H, duæ perpendiculares sunt excitæ. Quod fieri non posse supra demonstratum est. Quare E F, recta erit ad planum G H. Si duo igitur plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

11. primi

13. undec.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

30.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet utut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATUR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB.

Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si uero



duo tantum sint æquales, & tertius utrovis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si unus, uidelicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quoslibet horum

S 4 cum

cum maximo illo BAC , reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC , maiores quoque esse angulos duos BAD , DAC . In plano enim per A, B, C , ducto

23. primi.



fiat angulus BAE , angulo BAD , æqualis; & recta AE , æqualis rectæ AD . Deinde in eodem plano per E , extendatur recta BC , secans rectas AB , AC , in B , & C ,

coniunganturque rectæ BD , DC . Quoniam igitur latera AD , AB , trianguli BAD , æqualia sunt lateribus AE , AB , trianguli BAE ; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; erunt bases BD , BE , æquales.

4. primi.

20. primi.

Quia uero latera DB , DC , maiora sunt latere BC ; si demantur æquales rectæ BD , BE , relinquetur recta CD , maior quam CE . Cum igitur latera AD , AC , trianguli DAC , æqualia sint lateribus AE , AC , trianguli EAC ; & basis CD , maior basi CE ; erit angulus CAD , angulo CAE , maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD , BAE , erunt duo anguli CAD , BAD , maiores duobus angulis CAE , BAE , hoc est, toto angulo BAC , qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde quilibet duo multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis continetur, &c. Quod erat ostendendum.

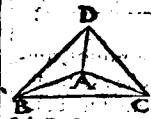
25. primi.

21.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis, continetur.

SIT angulus solidus A , contentus tribus planis angulis BAC , CAD , DAB . Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis



BC , CD , DB , erunt constituti tres anguli solidi B, C, D , quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B , sub CBA , ABD , DBC . At C , sub BCA , ACD , DCB ; D , uero sub CDA , ADB , BDC .

B D C. Quoniam uero duo anguli CBA, ABD , maiores sunt angulo BCD ; similiterque duo anguli BCA, ACD , maiores angulo BCD ; & duo anguli CDA, ADB , maiores angulo CDB : erunt sex anguli $CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB$, tribus angulis CBD, BCD, CDB , maiores: Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi una cum tribus ad A , æquales sint sex rectis, propter triangula BAC, CAD, DAB , (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) Si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A , solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus &c. Quod erat demonstrandum.

20. vides.

32. primi.

32. primi.

SCHOLIUM.

QUONIAM hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituent; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos exiēdemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoque minores. Nam si omnibus angulis planis recte subtendantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumque, sub quos angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambiens. Unde omnes anguli horum triangulorum (cum anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea quod prope basin constituuntur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, & horum

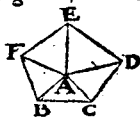


32. primi.

horum

20. vnde. horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorundem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

VERVM ut res melius percipiatur, fit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine recta BC, CD, DE, EF, FB, ita ut constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet,



32. primi

quot anguli plani componunt angulum solidum A. Quia vero omnes anguli quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, aequales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, aequales sunt sex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentibus, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis aequales sunt decem rectis, ut dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in alijs omnibus angulis solidis.

30. vnde.

22.

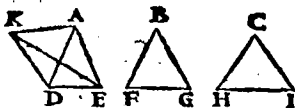
THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, ut ex lineis æquales illas

rectas

rectas cōnectentibus triangulū cōstituatur.

SIT *N* tres anguli plani *A, B, C*, contenti rectis æqualibus *A D, A E, B F, B G, C H, C I*, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis *D E, F G, H I*, quæ rectas illas æquales cōnectunt, triangulū posse constitui; hoc est, trium rectarū *D E, F G, H I*, quaslibet



duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ *D E, F G*, maiores sint, quam *H I*, ita ostēdetur. Fiat angulus *DAK*, angulo *B*, æqualis, cadatq; primo *A K*, ad partes *A D*, ita ut fiat totus quidā angulus *EAK*, ex duobus *EAD, DAK*, compositus, quod quidē cōtinget, quādo duo anguli *DAE, & B*, duobus rectis sunt minores. Ponatur autē *A K*, ipsi *AD*, æqualis, cōnectanturq; rectæ *KD, KE*. Quoniā igitur latera *AK, AD*, trianguli *AKD*, æqualia sunt lateribus *BF, BG*, trianguli *BFG*, & anguli ipsis cōtenti *DAK, & B*, æquales; erūt & bases *KD, F G*, æquales. Rursus quia latera *A K, A E*, trianguli *AKE*, æqualia sunt lateribus *CH, CI*; & angulus *EAK*, maior angulo *C*; propter reā quod duo anguli *DAE, & B*, maiores ponuntur angulo *C*; erit & basis *E K*, maior base *H I*: Sunt autē rectæ *ED, DK*, maiores recta *E K*. Igitur multo maiores erūt *ED, DK*, quā *H I*. Cū ergo *DK*, ostēsa sit æqualis rectæ *F G*; erūt quoq; *D E, F G*, maiores quā *H I*. Quod est, ppositū.

22. primi.

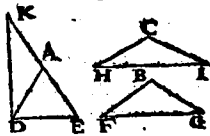
23. primi.

4. primi.

24. primi.

20. primi.

CADAT secundo *A K*, in rectum & cōtinuum ipsi *A E*, quod quidē accidet, quando duo anguli *DAE, & B*, duobus rectis sunt æquales. Ponaturq; *AK*, ipsi *AD*, æqualis rursū, & cōnectatur recta *KD*. Erit igitur, ut prius, *KD*, ipsi *F G*, æqualis. Quoniam uero rectæ *ED, DK*, maiores sunt rectæ *KE, & KB*, æqualis est rectis *CH, CI*, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque



4. primi.

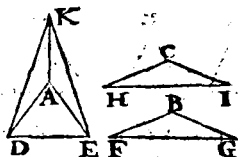
20. primi.

ED, DK, maiores duabus *CH, CI*: Hæ autē maiores sunt, quam *H I*. Igitur multo maiores erunt *ED, DK*, quam *H I*. Cum ergo *DK*, ostēsa sit æqualis ipsi

20. primi.

ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.

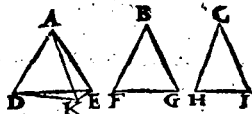
CADAT postremo AK, ad partes AE, ita ut nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec



recta sit EAK; quod demum eveniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt maiores. Ponaturque rursum AK, ipsi AD, æqualis, & ducatur rectæ KD, KE. Erit igitur, ut prius KD, ipsi FG, æ-

qualis. Quotiam vero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK; & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI: Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI: quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, si angulo C, ad FG, constituatur angulus æqualis, &c. Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor; erunt quoque duæ illorum bases æquales, & basis tertij utraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua.



Quod si unus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales; erit quoque basis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K,

infra

infra D B; propterea quod per puncta D, K, E, transeat
circumferentia circuli ex A, ad intervallum A D, descripta,
ob æqualitatem rectarum A D, A K, A E. Connectantur
deinde rectæ D K, K E. Quoniam igitur duo anguli B, &
C, maiores ponuntur angulo D A E; & B, æqualis est an-
gulo D A K, per constructionem; erit angulus C, maior re-
liquo angulo K A E. Et quia latera A D, A K, trianguli
A D K, æqualia sunt lateribus B F, B G; trianguli B F G;
& anguli ipsis contenti D A K, & B, æquales; erit basis
D K, basi F G, æqualis. Rursus quia latera C H, C I,
trianguli C H I, æqualia sunt lateribus A K, A E, trianguli
A K E; & angulus C, ostensus maior angulo K A E; erit
& basis H I, maior base K E. Quare cum D K, ostensa sit
æqualis ipsi F G; erunt F G, H I, maiores quam D K, K E:
Sed D K, K E, maiores sunt, quam D E. Igitur multo
maiores erunt F G, H I, quam D E. Quod est propositū.

4. primi.

24. primi.

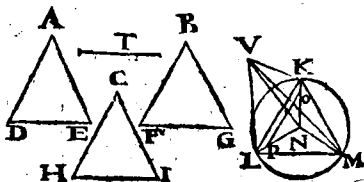
20. primi.

PROBL. 3. PROPOS. 23.

23.

EX tribus angulis planis, quorum duo
quomodocunque assumpti reliquo sunt
maiores, solidum angulum constituere.
Oportet autem illos tres angulos quatuor
rectis minores esse.

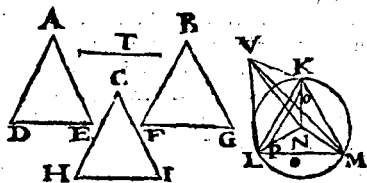
SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores,
hac cōditione, ut quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet
iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere,
qui nimirum con-
tineatur tribus an-
gulis planis, qui di-
ctis tribus angulis
sint æquales. Pon-
nantur sex lineæ
angulos dictos cō-
prehendentes, nē-
pe A D, A E, B F,
B G, C H, C I, æquales; subtendanturque bases D E, F G,
H I. Fieri ergo potest, ut ex D E, F G, H I, triangulum con-
stituatur.



22. undec.

5. quarti.

Situatur. Constituat ex ipsis igitur triangulū KLM, arcq; latus K L, rectæ D F; latus LM, rectæ F G; & latus K M, rectæ H I, æquale. Describatur circa triangulum K L M, cir-



culus, cuius centrū N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eruntq; quolibet rectarum angulos planos comprehendentiū, neope AD, AE, &c. maior qualibet du-

8. primi.

starum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrū N, intra triangulū KLM; quod quidem fiet, quando triangulū est oxygonium. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quā NK, NL, erūt uel æquales, uel minores. Sint ergo æquales. Quoniā igitur latera AD, AE, triāguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, triāguli NKL; & basis DE, basi KL, æqualis: erit angulus A, angulo KNL, equalis. Eodē argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, equalis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis, ex coroll. propof. 15. lib. 1. erūt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neq; minores. Si. n. minores sint AD, AE, quā NK, NL; abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniā igitur est ut NK, ad NO, ita NL, ad NP, cū & antecedētia inter se, & cōsequentia sint inter se æqualia; erunt latera NK, NL, triāguli NKL, recta proportionaliter; ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triāgulo NKL, æquiangulum. Igitur erit ut NK, ad KL, ita NO, ad OP. Est autē NK, maior quā N O. Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quā OP. Quocirca cū latera AD, AE, triāguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, triāguli NOP, & basis DE, maior base OP; erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadē ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, ma-

2. sexti.

29. primi.

4. sexti.

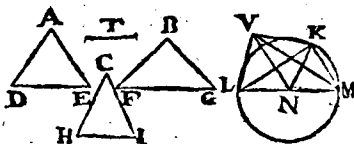
14. quinti.

25. primi.

ior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N , quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propof. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C , maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE , quā NK, NL ; sed neq; æquales: Igitur maiores.

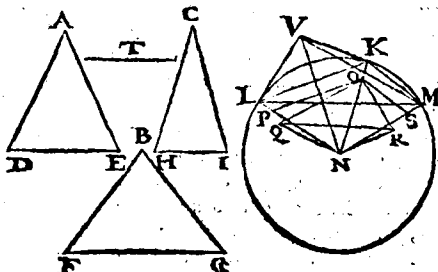
CADAT secundo centrum N , in latus LM ; quod tum continget, quando triangulum KLM , angulum LKM , habuerit rectum. Si igitur AD, AE , dicantur esse æquales ipsis NK, NL ; erūt quoque BF, BG , æquales eisdē NK, NL .

Cum ergo NK , æqualis sit ipsi NM ; æquales erunt BF, BG , rectæ LM : Po-



sita autē fuit LM , æqualis ipsi FG . Igitur BF, BG , æquales quoq; sunt rectæ FG . Sunt autē & maiores BF, BG , quā FG . Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE , ipsis NK, NL . Quod si AD, AE , minores credantur, quam NK, NL ; erunt quoq; BF, BG , minores quā NK, NL . Cū ergo NK , æqualis sit ipsi NM ; minores erunt BF, BG , quā recta LM : Posita autem fuit LM , ipsi FG , æqualis. Igitur BF, BG , minores quoq; sunt recta FG . Quod est absurdum, cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE , quam NK, NL ; sed neque æquales: Igitur maiores.

CADAT postremo centrū N , extra triāgulum KLM , infra latus LM ; quod demum accidet, quādo angulus LKM , fuerit obtusus. Si igitur dicatur AD, AE , esse æquales ipsis



NK, NL , cū & basis DE , basi KL , ponatur æqualis; erit angulus A , angulo KNL , æqualis. Eadē ratione angulus C , angulo

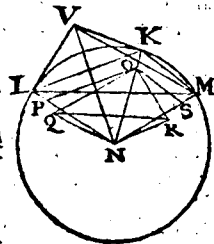
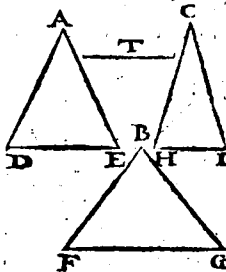
20. primi.

20. primi.

8. primi.

lo

8. primi.



maiorē ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur equalis sunt A D, A E, ipsis N K, N L, quod si A D, A E,

23. primi

29. primi

4. primi

lo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit: Sed hi duo maiores sunt ex hypotensi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & basis LM, basi FG, æqualis; erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed &

credantur esse minores, quam NK, NL; Si abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonstrabitur, ut in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadē ratione angulus C, maior angulo KNM. Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis: ponanturque NQ, NK, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetq; OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transeat circumferentia circuli ex N, ad intervallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. Quare cum angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam uero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem; erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa jam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus

& angulus LKM , maior angulo QOR , ut ostendimus: erit basis LM , hoc est FG , maior base QR . Quoniam igitur latera BF , BG , trianguli BFG , æqualia sunt lateribus NQ , NR , trianguli NQR ; & basis FG , maior base QR ; erit angulus B , maior angulo QNR . Rursus quia angulus ONQ , angulo A ; & angulus ONR , angulo C , factus est æqualis, erit angulus totus QNR , duobus A , & C , æqualis: Sed A , & C , maiores ponuntur angulo B . Igitur & angulus QNR , maior erit angulo B . Quod est absurdum, cum B , ostensus sit maior angulo QNR . Non ergo minores sunt AD , AE , quam NK , NL ; sed neque æquales: Igitur maiores.

IAM uero, cum rectæ AD , AE , maiores sint rectis NK , NL , ubicunque centrum N , existat; possit recta AD , plus quam recta NK , quadrato lineæ T , per lemma proposit. 14. lib. 10. ita ut quadratum rectæ AD , æquale sit quadratis rectarum NK , & T . Ex centro N , excutetur ad planum circuli KLM , perpendicularis NV , rectæ T , æqualis; connectanturq; rectæ KV , LV , MV . Quoniam igitur NV , recta est ad planum circuli KLM , recta quoque eadem erit, ex definit. 3. huius lib. ad rectas NK , NL , NM ; ac proinde quadratum rectæ VK , quadratis rectarum KN , NV , æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD , æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN , NV ; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK , & AD . Ac propterea æquales erunt rectæ VK , AD . Rursus quia latera VN , NK , trianguli VNK , æqualia sunt lateribus VN , NL , trianguli VNL ; & anguli ipsis contenti VNR , VNL , recti; erit basis VK , æqualis basi VL ; Atq; eadem ratione rectæ VM . Quare tres rectæ VK , VL , VM , æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK , æqualis rectæ AD . Tres ergo rectæ VK , VL , VM , æquales sunt rectæ AD , & ob id, rectis AE , BF , BG , CH , CI . Quamobrem, cum latera VK , VL , trianguli VKL , æqualia sint lateribus AD , AE , trianguli ADE ; & basis KL , basi DE ; erit angulus KVL , angulo A , æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum LVM , angulo B ; & angulum KVM , angulo C , esse æqualem. Quare angulus solidus V , continetur tribus angulis planis KVL , LVM , MVK ,
T
qui

24. primi.

25. primi.

12. undec.

47. primi.

4. primi.

8. undec.

qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

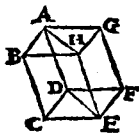
24.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana; parallelogramma sunt, similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligēda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. lex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarū aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, secantur plano AC; erunt communes sectiones AB, DC, parallelæ. Similiter cum plana

16. undec.



parallela AF, BE, secantur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam

opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemq; argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit ut AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea ut BH, ad HG, ita CE, ad EF, &c. eadē de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis ita diametris AH, DE; cū latera AB, BH, triânguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, triânguli DCE; & angul⁹ ABH, angulo DCE, æqualis, ut ostensum est; erūt triângula ABH, DCE, æqualia inter se. Quare cū triângula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF; erūt parallelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabim⁹, similia & æqualia esse parallelogram-

10. undec.

34. primi.

34. primi.

10. undec.

4. primi.

34. primi.

lelogrāma opposita AC, GE, & AF, BE. Si solidū ergo paral-
lelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogram-
ma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

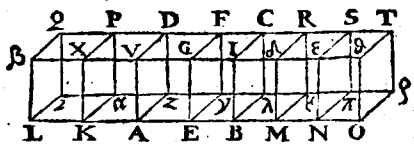
THEOR. 22. PROPOS. 25.

25.

SI solidum parallelepipedum plano se-
cetur aduersis planis parallelo: Erit quem-
admodū basis ad basim, ita solidū ad solidū.

SECETVR parallelepipedū ABCD, plano EF, paral-
lelo oppositis planis AD, BC. Dico ut est basis AG, ad basim
BG, ita esse solidū AEFD, ad solidū BEFC. Intelligat enim
parallelepipedū ABCD, productū in utramq; partē quan-
tumlibet, sumāturq; in AB, protracta quocunq; rectæ AK,
KL, ipsi AE, & quocunq; rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, &

qua. Deinde per pūcta
K, L, M, N,
O, ducantur
plana KP,
LQ, MR,



NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, p scholion ppos. 15.
huius lib. Quoniā igitur solidū AEFD, cōtinetur planis pa-
rallelis ex hypothesi, ipsum erit parallelepipedū, ex definitio-
ne, habebitq; plana opposita, parallelogrāma, similia, & æqua-
lia. Eodē mō erūt parallelepipeda AKPD, KLQP, EBCF,
BMRC, MNSR, NOTS, ELQF, EOTF, habebūtq; plana
opposita, parallelogrāma, similia, & æqualia. Quoniam uero
parallelogrāma AG, KV, LX, cū sint sup æquales bases AE,
AK, KL, æqualia sunt; & similia quoq; cū anguli unius sint
æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æ-
qualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportio-
nalia. Eademque ratione æqualia, & similia sunt parallelo-
grāma AY, KZ, LZ. Cū igit æqualia quoq; sint, & similia pa-
rallelogrāma AD, KP, LQ; Erūt tria plana AG, AY, AD,
solidi AEFD, æqualia, & similia tribus planis KV,
KZ, KP, solidi AKPD; & tribus planis LX, LZ,
LQ, solidi KLQP: Sunt autem tria in unoquo-

T 2 que

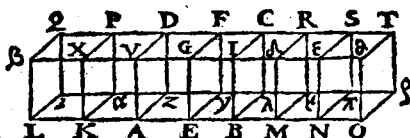
24. undec.

36. primi.

29. primi.

24. undec.

que solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe A G, ipsi Z F; & A Y, ipsi V F; & A D, ipsi E F, &c. Igitur per defin. 10. huius libri, æqualia sunt solida A E F D, A K P D, K L Q P. Eodem argumento æqualia ostendentur solida E B C F, B M R C, M N S R,



NOTS. Quare quam multiplex est basis L G, basis A G, tam multiplex erit

solidum L E F Q, solidi A E F D; Et quam multiplex est basis O G, basis B G, tam multiplex erit solidum O E F T, solidi B E F C. Quoniam uero si basis L G, (multiplex basis A G, primæ magnitudinis,) æqualis est basi O G, (multiplici basis B G, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum L E F Q, (multiplex solidi A E F D, tertiæ magnitudinis) solidum O E F T, (multiplici solidi B E F C, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus L G, O G, æqualibus existentibus, æqualia quoque sint & similia sex parallelogramma solidi L E F Q, sex parallelogrammis solidi O E F T: Si autem basis maior est base, solidum quoque solidum maius est; & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut basis A G, prima magnitudo, ad basin B G, secundam magnitudinem, ita solidum A E F D, tertia magnitudo, ad solidum B E F C, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis D Y, ad basin C Y; & ut basis A Y, ad basin B Y; & ut basis D G, ad basin C G. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c.

Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

HÆC propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo, erit quemadmodum basis ad basin, ita solidum ad solidum. Sit enim prima prisma A B C D E F, cuius plana ad uersa sint trianguia A B C, D E F, seceturq; plano G H I, aduersis

uerfis planis parallelo. Dico ut est basis AI , ad basin FI , ita esse solidum $ABCIHG$, ad solidum $FEDIHG$. Intelligatur prisma $ABCDE F$, in utramque partem quantamlibet productum,

& ex AF , producta utring; capiantur quotcūq; rectæ AK , KL , ipsi AG ;



& quotcūque rectæ FM , MN , NO , ipsi FG , æquales. Deinde per puncta K , L , M , N , O , ducantur plana KPQ , LRS , MTV , NXY , OZa , parallela planis ABC , GHI , FED , per scholion propof. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC , GHI , secantur plano AI ; erunt communes sectiones AC , GI , parallela: Sunt autem & AG , CI , parallela ex hypothesi, ob parallelogrammum AD . Igitur parallelogrammum est AI . Rursus quia plana parallela ABC , GHI , secantur plano AH ; erunt communes sectiones AB , GH , parallela: Sunt autem & AG , BH , parallela, ob parallelogrammum AE . Igitur parallelogrammum est AH . Eodem modo parallelogrammum ostendetur CH . Quoniam uero latera AC , AB , trianguli ABC , æqualia sunt lateribus GI , GH , trianguli GHI ; cum AC , ipsi GI , & AB , ipsi GH , sit æquale; & anguli CAB , IGH , sunt quotque æquales, eo quod rectæ CA , AB , parallela sint rectis IG , GH , & non in eodem plano: Erunt triangula ABC , GHI , æqualia inter se, & equiangula. Quare latera circum æquales angulos proportionalia habebunt; Ac idcirco similia erunt. Igitur solidum $ABCIHG$, contentum duobus planis oppositis ABC , GHI , æqualibus & similibus, atque parallelogrammis AI , IB , BG , prisma est. Eadem arte prismata erunt $ABCQPK$, $KPQ SRL$; $FEDIHG$, $FEDVTM$, $MTVYXN$, $NXYaZO$, $LRSIHG$, $OZaIHG$. Quoniam uero parallelogramma AI , $KCLQ$, æqualia sunt & similia; necnon AH , $KBLP$; & CH , $QBS P$; Erunt omnia plana prismatis $ABCIHG$, æqualia & similia omnibus planis prismatum $ABCQPK$, $KPQ SRL$. Quare, per defin. 10. huius lib. æqualia erunt prismata $ABCIHG$, $ABCQPK$, $KPQ SRL$. Eadem ratione æqualia erunt

16. undec.

16. undec.

34. primi.

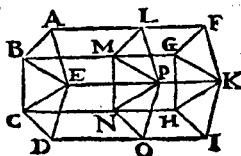
10. undec.

4. primi.

4. sexti.

prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO.
 Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex
 erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; Et quam
 multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma
 OZaIHG, prismatis FEDIHG. Quia uero si basis LI,
 (multiplex basis AI, prima magnitudinis) aequalis est basi
 OI, (multiplici basis FI, secunde magnitudinis;) aequale quoq;
 est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG,
 tertia magnitudinis,) prismati OZaIHG, (multiplici prif
 matis FEDIHG, quarta magnitudinis;) propterea quod
 basibus LI, OI, existentibus equalibus, equalia quoque sint
 & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus pla
 nis prismatis OZaIHG: Si autem basis LI, maior est base
 OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus,
 in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib.
 5. ut basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam ma
 gnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad
 prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo
 ostendetur esse prisma ad prisma, ut est basis AH, ad basin
 FH: & ut basis CH, ad basin DH. Quod est propost
 tum.

SIT secundo prisma ABCDEFGHIK, cuius oppo
 sita plana sint polygona, nepe pen
 tagona, seceturq; plano LMNOP.



Dico rursus, ut est basis CM, ad
 basin NG, ita esse solidum ABC
 DE LMNOP, ad solidum
 LMNOPFGHIK. Si enim
 plana opposita parallela resoluantur

in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quo
 rum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut
 basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prif
 ma LMPKGF, per ea, quae demonstrata sunt. Eodem modo
 erit ut basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN,
 ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPNQ, ad prif
 ma NOPKHI. Ut autem BP, ad MK, & CP, ad NK,
 ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, ut CN, ad NH;
 Et ut CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata
 ABEPML, BCEPMN, CDEPNQ, ad prismata
 L M-

1. sexti.

$LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI$, eandem habent proportionem ei, quam habet CM , ad NG ; ac proinde eandem inter se. Ut autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit ut prisma $BCFPMN$, ad prisma $MNPKGH$, hoc est, ut basis CM , ad basin NG ; ita prisma $ABCDELMNOP$, ex tribus compositum ad prisma $LMNOPFGHIK$, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prisma.

12. quinti.

POTEST tamen hoc idem in omni prisma ostendi demonstratione, qua usi sumus in prisma habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prisma in utranque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se aequalia, & similia; propterea quod latera eorum sint parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum; ac proinde angulos aequales comprehendant, &c. Unde, ut prius, ostendentur prismata ex una parte inter se aequalia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

16. undec.

10. undec.

COROLLARIUM.

Ex his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante; Sectionem esse figuram æqualem, & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est, in priori prisma, triangulum GHI , æquale esse & simile triangulo ABC , atque adeo triangulo DEF . Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

PROBL. 4. PROPOS. 26.

26.

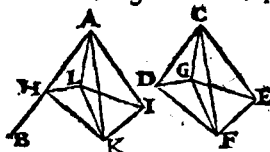
AD datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A , in data recta AB , constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C , cõterito tribus angulis planis DCE, DCF, FCE , non in eodẽ plano existẽtibus. Ducat ex F , ad planũ BCD, CE , ductũ perpendiculis FG ;

11. undec.

2). *primi.*

connectanturq; rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, fiatq; angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductum constituatur angulus HAL, angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. Ex L, vero ad planum, in quo sunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, equalem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG; & anguli HAL, DCG, æquales, per constructionem; Erunt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per constructionem; æquales quoque erunt bases LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF, recti, ex defin. 3. huius lib. erunt & bases HK, DF, æquales. Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, sint æqualia lateribus CD, CF, ex constructione; Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, sunt æqualia lateribus GE, GF; & anguli ILK, EGF, recti, ex defin. 3. huius lib. Erunt bases IK, EF, æquales: Cum igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, sint æqualia, ex constructione; Erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, solidum angulum A, componentibus, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulam solidum C, componentibus; Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaq; rectam lineam, eiusq; punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.



12. *undec.*

4. *primi.*

4. *primi.*

4. *primi.*

8. *primi.*

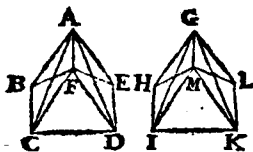
4. *primi.*

3. *primi.*

SCHOLION.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus, angulis planis, quam tribus, subtendenda erunt omnibus angulis planis recta in uno eodemq; existentes plano, (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita ut figuram planam polygonam constituent, pyramisq; quadā multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triacula resolatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quot triacula in figura polygona continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium aequales solidi anguli constituentur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, cōstituentur erit totus angulus solidus toti angulo solidi aequalis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus aequalis, subtendenda sunt angulis planis recta BC, CD, DE, EF, FB, ut fiat pentagonum BCDEF, quod in triacula resolatur BCF, FCD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus aequalis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, aequalis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, aequalis solidus angulus G, contentus tribus angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, aequalis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido aequalis angulus solidus constituetur.



PROBL. 5. PROPOS. 27.

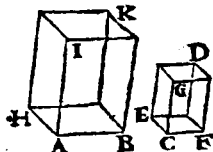
27.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT

26. undec.

12. sexvi.



24. undec.

SI τ a data recta A B, describendum parallelepipedum simile, similiterq; positum parallelepipedo C D. Fiat ad rectam A B, eiusq; punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita ut tres anguli plani H A I, I A B, B A H, æquales sint tribus angulis planis E C G, G C F, F C E. Deinde ut est C F, ad C G, sic fiat A B, ad A I, & ut C G, ad C E, ita A I, ad A H; eritq; ex æquo, ut C F, ad C E, ita A B, ad A H. Post hæc, perficiatur parallelepipedum A K, completis nimirum parallelogrammis B H, H I, I B, & per I, B, H, ductis planis I K, B K, H K, quæ parallela sint parallelogrammis B H, H I, I B. Dico parallelepipedum A K, parallelepipedo C D, simile esse similiterq; positum. Cum enim anguli B A H, F C E, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe ut B A, ad A H, ita F C, ad C E, ex constructione; erunt parallelogramma H B, E F, similia, similiterq; posita. Eadem ratione similia erunt, similiterq; posita parallelogramma H I, E G; & I B, G F. Tria igitur plana B H, H I, I B, solidi A K, similia sunt, similiterq; posita tribus planis F E, E G, G F, solidi C D. Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi A K, similia sunt, similiterq; posita sex planis solidi C D; Ac proinde, ex defn. 9. huius lib. similia sunt, similiterq; posita, solida A K, C D. A data ergo recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.

28.

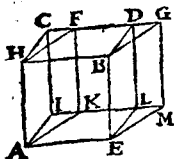
THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduerforum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SI τ parallelepipedum A B, in quo plana opposita sint A H,

A H,

cadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda $A C D E$, $A F G E$, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe



35. primi.

$A I$, $A K$, $E L$, $E M$, in recta $I M$; & $H C$, $H F$, $B D$, $B G$, in recta $C G$. Dico parallelepipeda $A C D E$, $A F G E$, esse inter se equalia. Cum enim equalia sint parallelogramma $A L$, $A M$, super eadem basi $A E$, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato communi

34. primi.

4. sexsi.

24. undec.

36. primi.

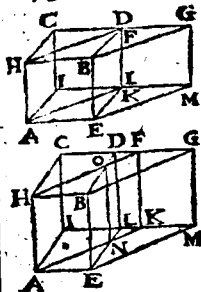
34. primi.

trapezio $A E L K$, equalia quoque triangula $A I K$, $E L M$. Quoniam uero omnia latera trianguli $A I K$, equalia sunt omnibus lateribus trianguli $H C F$; erit triangulum $A I K$, triangulo $H C F$, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum $E L M$, triangulo $B D G$, æquale erit & simile. Rursus quia parallelogrammum $A C$, æquale est, & simile parallelogrammo $E D$; & eadem ratione parallelogrammum $A F$, parallelogrammo $E G$; Sed & $I F$, ipsi $L G$, cum bases $I K$, $L M$, sint æquales, (Nam cum rectæ $I L$, $K M$, æquales sint ipsi $A E$, erunt quoque inter se æquales; quare communi dempta $K L$, æquales erunt $I K$, $L M$.) Erunt omnia plana prismatis $A I K F C H$, æqualia & similia omnibus planis prismatis $E L M G D B$. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido $A H F K L D B E$, æqualia fient parallelepipeda $A C D E$, $A F G E$. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

$H A F C$ propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere medijs, dummodo loca triangulorum assumantur prismata, ut ex demonstratione liquet. Unde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K , in punctum L , cadit, vel ultra L , eodem modo demonstrabuntur, ut in his si-

his figuris apparet. Nam in secundo casu si ex parallelogram-



mis aequalibus AL, AM , auferatur
triangulum commune ALE , erunt re-
liqua triangula AIK, ELM , aqua-
lia. Vnde, ut prius, aequalia erunt
prismata $AIKFCH, ELMGDB$.
Addito ergo prismate cōi $AKEBHD$,
aequalia fiet parallelepipeda $ACDE$,
 $AFGE$.

In tertio uero casu, si ex parallelo-
grammis aequalibus AL, AM , dema-
tur triangulum commune $A NE$,
erunt reliqua trapezia $A ILN$,
 $NKME$, aequalia; quibus si addatur triangulum commune
 $KL N$, tota triangula AIK, ELM , aequalia fient. Vnde,
ut prius, aequalia erunt prismata $AIKFCH, ELMGDB$;
a quibus si auferatur prism a commune $KLNO DF$; (Nam
communis sectio planorum AF, DE , est recta NO .) remane-
bit solidum comprehensum planis $A ILN, NOHA, AICH$,
 $H CDO, CDLI, DLNO$, aequale solido contento planis
 $ENKM, MKFG, GFOB, FKN O, BGME, EBON$.
Si igitur addatur utrique prism a cōmune $A ENOBH$; fient
parallelepipeda $ACDE, AFGE$, inter se aequalia.

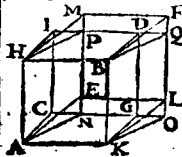
THEOR. 25. PROPOS. 30.

30.

SOLIDA parallelepipeda super ean-
dem basin constituta, & in eadem altitudi-
ne, quorum insistentes lineæ nō ī iisdem col-
locantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SUPER basin AB , in eadem altitudine, hoc est, inter
eadē plana parallela, sint constituta parallelepipeda $AIDK$,
 $AMFK$, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis ba-
sis exeuntes $AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF$, non
sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD , protractæ
transcant per puncta M, E, F, L , neque CG, ID , protrac-
tæ,

æt, &c. Dico parallelepipedum A I D K, A M F K, esse æqualia. Cum enim plana C D, E F, opposita basi A B, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ C G, I D, quarum C G, secet E M, L F, protractas in punctis N, O; Et I D,



34. *primi.*

easdem in punctis P, Q; adiunganturque rectæ A N, K O, H P, B Q. Quia igitur rectæ P Q; M F, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo F P; & M F, ipsi H B, est æqualis; erunt & P Q, H B, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter

33. *primi.*

parallelogrammum H, I D B. Igitur & H P, B Q, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est H P Q B. Eadem ratione parallelogramma erunt H P N A, A N O K, K O Q B: Est autem & parallelogrammum N O Q P.

29. *undec.*

Igitur parallelepipedum est A P Q K. Quamobrem parallelepipedum A I D K, æquale est parallelepipedo A P Q K, cum utriusque eadem sit basis A B, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem C O, I Q. Eodem modo eidem parallelepipedo A P Q K, æquale erit parallelepipedum A M F K, cum utriusque eadem sit basis A B, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem N M, O F. Quare parallelepipedum A I D K, A M F K, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipedum super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

CONVERTITUR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

S O L I D A parallelepipedum æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocantur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

N A M si unum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum,

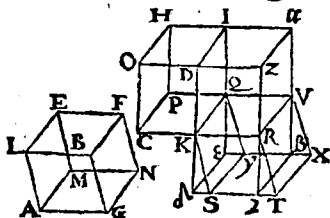
abscissum, & reliquum. Cum igitur & totum huic reliquo po- 29. vel 36.
natur aequale, aequale eris abscissum toti. Quod est absurdum. undec.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

31. 32.

SOLIDA parallelepipedā super æ-
quales bases constituta, & in eadem altitu-
dine: æqualia sunt inter se.

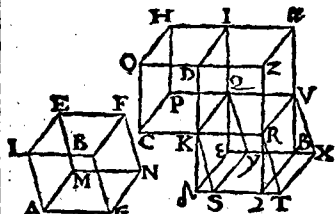
SUPER æquales bases AB, CD, in eadē altitudine sint
constituta parallelepipedā A EFG, CHIK. Dico hæc paralle-
lepipedā esse æqualia inter se. Sint. n. primū insistentes lineæ
AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH,
DI, ad basin CD, per-
pendiculares. Quo po-
sino, erunt omnes di-
æ perpendicularares in-
ter se æquales, propter
eandem parallelepipe-
dorum altitudinem.
Producatur CK, in
rectum, sitq; KR, æ-



qualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso
æqualis angulo BLA, ponaturq; KS, æqualis ipsi LA; & per-
ficiatur parallelogrammum KT, super quod, ad altitudinē
perpendicularis KQ, construatut parallelepipedū QSTV.
Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB,
LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma
KT, LG, æqualia & similia. Rursus quia latera KQ, KS, æ-
qualia sunt lateribus LE, LA; & anguli QKS, ELA, recti,
per defin. 1. huius lib. eo quod A Q LE, rectæ ponantur ad
plana KT, LG; erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia
& similia. Eodem modo cum latera KR, A Q, æqualia sint
lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem de-
fin. 3. huius lib. erunt quoq; parallelogramma KV, LF, æ-
qualia & similia. Quare cū tria plana KT, QS, KV, paralle-
lepiedi QSTV, æqualia sint & similia tribus planis LG, EA, 24 undec.
LF, parallelepiped. A EFG; Tā aut illa, quā hæc æqualia sint
& simi-

24. undec. & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda $QSTV$, $EAGF$, inter se æqualia.

CONVENIANT rectæ DK , TS , productæ in δ ;



& IQ , XY , in ϵ , compleaturq; parallelepipedum $Q\delta\gamma V$. Idē $H1$, βV , protractæ conveniant in α ; & OD , γR , in Z , perficiaturq; parallelepipedum $IKRa$. Quoniam igitur parallelepipedum

$QSTV$, $Q\delta\gamma V$, eandē habent basin KV , suntq; in eadem altitudine, nempe inter eadē plana parallela KV , δX , & insistentes ipsorum linæ KS , $K\delta$, RT , $R\gamma$; QY , $Q\epsilon$, VX , $V\beta$, collocantur in eisdem rectis δT , ϵX ; ipsa inter se æqualia erunt. Est autē parallelepipedum $QSTV$, parallelepipedo $EAGF$, æquale: Igitur eisdem parallelepipedo $EAGF$, æquale est parallelepipedum $Q\delta\gamma V$.

29. undec.

35. primi.

7. quinti.

29. undec.

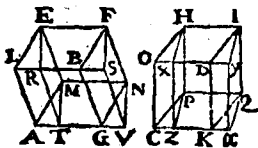
9. quinti.

21. undec.

Q U O N I A M vero parallelogramma KT , $K\gamma$, æqualia sunt inter se; & KT , æquale est ipsi LG , erit & $K\gamma$, ipsi LG , hoc est, ipsi CD , æquale; cum bases LG , CD , ponantur æquales. Quare erit, ut CD , ad DR , ita $K\gamma$, ad DR : Ut autē CD , basis ad basin DR , ita est solidū $CHIK$, ad solidum $KIaR$; cum parallelepipedum $CHaR$, secetur plano IK , planis oppositis CH , aR , parallelo: Et eadem ratione ut $K\gamma$, ad DR , ita est solidum $Q\delta\gamma V$, ad solidum $IKRa$; cum & parallelepipedū $I\delta\gamma a$, secetur plano KV , oppositis planis Da , $\delta\beta$, parallelo. Igitur æqualia erunt parallelepipeda $CHIK$, $Q\delta\gamma V$; cum eandem habeant proportionem ad idem solidum $IKRa$. Quare cum parallelepipedum $Q\delta\gamma V$, sit ostensum æquale parallelepipedo $A EFG$; æqualia quoque erunt parallelepipeda $A EFG$, $CHIK$. Quod est propositum.

S I N T iam neque insistentes linæ AM , GN , LE , BF , ad basin AB ; neque CP , KQ , OH , DI , ad basin CD , perpendiculares: Et a punctis E , F , M , N , demittantur ER , FS , MT , NV , ad planum, in quo basis AB , perpendiculares; licet a punctis H , I , P , Q , ad planum, in quo basis CD ,

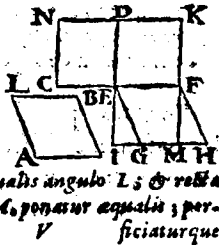
CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qa. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Ya, aZ, ZX, ut fiât parallelepipeda ET- VF, HZaI, quæ cū sine eiusdē altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, ut ostensum est. Sed parallelepipedum ET- VF, æquale est parallelepipedo A EFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZaI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHI K, cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda A EFG, CHI K. Idemque ostendetur, si unius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius uero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat,



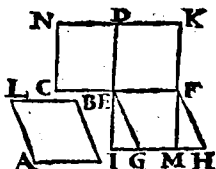
29. uel 30. undecimi.

SCHOLIUM.

POTEST cum Campano expeditius foriâsse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamvis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CF, a partibus E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L; & recta EF, recta LB; & recta EG, recta LD, ponatur æqualis, perficiaturque



sciaturque parallelogrammum $E H$, quod *aquale* erit, & si-
mile parallelogrammo $A B$. Conveniat autem $H G$, producta
cum $D E$, producta in I , & completur parallelogrammum
 $I K$. Iam vero intelligantur super bases $E H$, $I F$, $E K$, con-



stituta parallelepipedo eiusdem al-
titudinis cum parallelepipedis su-
per $A B$, $C D$, constructis; sintque in-
sistentes lineae perpendiculares ad
dictas bases. Perspicuum est igitur,
solidum super $E H$, *aquale* esse ac
simile solido super $A B$, ex defin. 10.

29. undec.

huius lib. cum plana illius *aqualia* sint et similia planis huius,
per constructionem: Sunt autem & *aqualia* parallelepipedo
super $E H$, $I F$, cum habeant basin eandem, cuius infimum la-
tus $E F$, erectam super planum $I K$; Item plana basi opposita,
quorum latera infima $G H$, $I M$, in eodem plano, cuius infimum
latus $I H$; atque insistentes lineas $E G$, $F H$, $E I$, $F M$, &c. in
eisdem rectis lineis $I H$, &c. Igitur *aquale* erit parallelepipedum
super $I F$, parallelepipedo super $A B$. Quoniam vero paral-
lelogramma $E H$, $I F$, *aqualia* sunt; & $E H$, *aquale* est ipsi $C D$:

33. primi

7. quini.

25. undec.

aqualia erunt $I F$, $C D$. Erit igitur, ut $I F$, ad $E K$, ita $C D$,
ad $E K$: Est autem ut $I F$, ad $E K$, ita solidum super $I F$, ad so-
lidum super $E K$, quod solidum super $I K$, secetur plano super
 $E F$, erecto parallelo planis super $D K$, $I M$, erectis. Et eadem
ratione, ut $C D$, ad $E K$, ita solidum super $C D$, ad solidum su-
per $E K$, cum solidum super $C K$, secetur plano super $D E$, ere-
cto parallelo planis super $C N$, $F K$, erectis. Quare erit ut
solidum super $I F$, ad solidum super $E K$, ita solidum super
 $C D$, ad solidum super $E K$; Ac proinde *aqualia* erunt paral-
lelepipedo super $I F$, & $C D$. Ostensum est autem parallelepi-
pedum super $I F$, *aquale* parallelepipedo super $A B$. *Aqualia*
ergo erunt et parallelepipedo super $A B$, $C D$. Quod est propositum.

9. quini.

CONVERTATUR quoque hac propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipedo *aqualia*, super *aqua-*
les bases, in eadē sunt altitudine. Et parallelepi-
pedo *aqualia* in eadē altitudine, super *aquales*
sunt bases, si non habuerint eandem basin:

Si enim unum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine; spēs aequalia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur aequale alteri; aequale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

31. undec.

Quod si in eadem sint altitudine, & basis vnus credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis aequalis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis; demonstrabimus eodem modo, partem toti esse aequalem. Quod est absurdum.

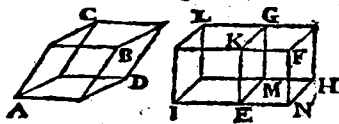
THEOR. 27. PROPOS. 32.

33.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, ut bases.

Sint duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidū, ut est basis ad basin. Super rectam enim EK, construatur parallelogrammum IK, aequale parallelogrammo AB, in angulo IEK, q̄ sit equalis angulo ENF. Constituent autem parallelograma EF, IF, totum parallelogrammum unum FI, ut in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum unum parallelepipedum IFLH; erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, aequalia, cum habeant equeles bases, per constructionem AB, IK; & eandem altitudinem, ex hypothesi. Quare erit ut solidum IKLM, ad solidum EFGH, ita solidū ABCD, ad solidum EFGH: Est autem solidum IKEM;

45. primi.



31. undec.

7. quinti.

25. undec.

ad solidum EFGH, ut basis IK, hoc est, illi aequalis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, ut basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

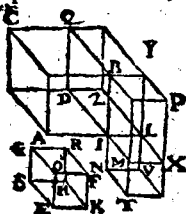
S C H O L I O N .

32. undec. 39. quinti. *CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, ut bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori equalis, & ducatur planum basi parallelum; erisque ut basi ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erit ad totum. Abscissum ergo equalis est toti. Quod est absurdum.*

36. THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA, solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

S I N T similia parallelepipeda $A B C D, E F G H'$, super bases similes $A B, E F$, in quibus latera homologa sint $A I, E K$. Dico proportionem parallepipedum $A B C D$, ad parallepipedum $E F G H$, esse triplicatam proportionis laterum homologorum $A I, E K$. Producaturs enim $A I$, ad L , & sit $I L$, æqualis ipsi $E K$, uel $G R$; Item $D I$, ad M , & sit $I M$, æqualis ipsi $H K$, uel $G O$; Item $B I$, ad N , & sit $I N$, æqualis ipsi $K F$, uel $G S$. Deinde completis parallelogrammis $L M, L N, I T$, perficiatur parallelepipedum $T X I V$. Quo-



35. primi. 24. undec. *niam uero latera $I L, I M$, æqualia sunt lateribus $G R, G O$; & anguli contenti æquales, cum angulus $L I M$, sit æqualis angulo $A I D$, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo $E K H$, seu $R G O$: Erunt parallelogramma $I X, G F$, similia & æqualia. Eadem ratione similia erunt & æqualia $L N, R S$; Item $I T, G E$. Quare tria plana $I X, L N, I T$, parallelepipedum $T X I V$, similia sunt & æqualia tribus planis $G F, R S, G E$, parallelepipedum $E F G H$: Sunt autem tria cuiusque similia & æqualia tribus reliquis oppo-*

oppositus. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipedum
 T X I V, E F G H, ex defin. 10. huius lib. Rursus comple-
 tis parallelogrammis M B, B L, L M, perficiatur parallelepi-
 pedum M P B L; Item completis parallelogrammis I Y,
 D L, I Q, perficiatur parallelepipedum I Y Q Z. Quo-
 niam igitur, ob similitudinem parallelepipedorum A B C D,
 E F G H, est ut A I, ad E K, hoc est, ad I L, ita D I, ad
 H K, hoc est, ad I M; & B I, ad F K, hoc est, ad I N. Vt au-
 tem A I, ad I L, ita est parallelogrammum A D, ad D L;
 Et ut D I, ad I M, ita parallelogrammum D L, ad L M; &
 ut B I, ad I N, ita parallelogrammum B L, ad L N. Igitur
 erit ut A D, ad D L, ita D L, ad L M; & B L, ad L N. Sed
 ut A D, basis ad D L, basin, ita est parallelepipedum A D-
 C B, ad parallelepipedum D L Y Q; & ut basis D L, ad ba-
 sin L M, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipe-
 dum L M B P; Et ut basis B L, ad basin L N, ita parallelepi-
 pedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Quare erit,
 ut parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q,
 ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M-
 B P, & parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N-
 T X. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue pro-
 portionales A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X, ideoque
 proportio primæ A D C B, ad quartam L N T X, hoc est, ad
 E F G H, erit triplicata proportionis primæ A D C B, ad secun-
 dam D L Y Q, ex definitione 10. lib. 5. Vt autem A D-
 C B, ad D L Y Q, ita est basis A D, ad basin D L; Et ut
 A D, ad D L, ita est recta A I, ad I L, hoc est, ad E K. Igitur
 proportio parallelepipedi A D C B, ad parallelepipedum E F-
 G H, est triplicata proportionis homologorum laterum, ni-
 mirum A I, ad E K. Quapropter similia solida parallelepi-
 peda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum late-
 rum. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor linee rectæ continue
 proportionales, ut est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum
 super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque
 descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad pa-
 rallelepipedum, ut demonstratum est, quam prima linea ad quar-

2. sexti.

32. undec.

32. undec.

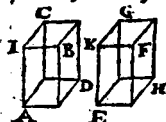
2. sexti.

tam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ linear ad secundam, nimirū laterum homologorū.

34. 35. THEOR. 29. PROPOS. 34.

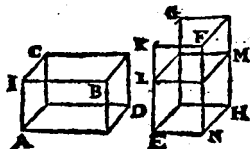
AEQUALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur: Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, super bases AD, EH. Dico bases AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, esse reciprocas, hoc est, esse ut AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitudinem



solidi ADCB. Sint enim primo insistentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad bases AD, EH, ita ut AI, EK, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propof. 1. huius lib. ostendimus. Quare erit, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI. Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocae.

QVOD si altitudines AI, EK, inæquales fuerint; sit EK, maior, ex qua abscindatur EL, ipsi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH, per scholion



propof. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida ADCB, EHGF; erit ut ADCB, ad solidum EHML, ita EHGF, ad idem solidum EHML: Vt autem solidum ADCB, ad solidum

EHML, ita est basis AD, ad basin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL; Et ut solidum EHGF, ad solidum

P H.

7. quinsi.

32. undec

EHML, ita est, eadem ratione, basis KN, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; Erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit ut basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: Sed ut KN, ad LN, ita est recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciproce sunt bases, & altitudines.

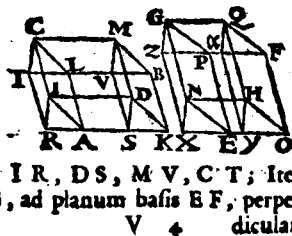
SINT iam bases & altitudines reciproce. Dico parallelepipedum esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, ut altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. Quare parallelepipedum ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se equalia erunt.

QVOD si altitudo EK, maior fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur ex hypothesi est, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad EL, ipsi AI, æqualem; Vt autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur; Et ut EK, ad EL, ita est KN, ad LN; Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum DHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; Erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH: Erit ut solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML; ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

SEI proponantur iam parallelepida ABCD, EFGH,

æqualia, quorū insistentes lineæ AI, KD, BM, LC, EN, OH, FQ, PG, nō sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem a punctis I,

D, M, C, ad planum basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item a punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares



1. sexti.

31. undec.

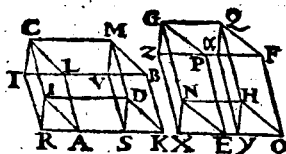
32. undec.

1. sexti.

32. undec.

9. quinti.

diculares $NX, HY, Q\alpha, GZ$; connectanturque rectæ $RS, TV, RT, SV; XY, Z\alpha, XZ, Y\alpha$: Eruntque perpendicularares RI, XN , parallelepipedorum altitudines, ex



defin. 4. lib 6. Dico rursus, ut basis AB , ad basin EF , ita esse altitudinē XN , ad altitudinem RI . Cum enim æqualia sine solida $ABCD, EFGH$, ex hypothesi, sit autem

29. vel 30.
undecimi.

$ABCD$, æquale solido $RVCD$, eo quod habeant eandem basin CD , eandemque altitudinem RI ; & $EFGH$, eadē ratione, æquale solido $X\alpha GH$: Erunt & parallelepipeda $RVCD, X\alpha GH$, æqualia Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH ; erit, ut iam demonstratum est, ut basis CD , ad basin GH , hoc est, ut basis AB , ad basin EF , ita altitudo XN , ad altitudinem RI . Ac propterea bases & altitudines sunt reciproæ.

24. undec.

SINT iam bases atque altitudines reciproæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Cōstructa enim figura, ut prius. Cum sit ut basis AB , ad basin EF , ita altitudo XN , ad altitudinem RI ; Sit autē AB , ipsi CD , & EF , ipsi GH , æqualis; Erit quoque ut basis CD , solidi $RVCD$, ad basin GH , solidi $X\alpha GH$, ita altitudo XN , ad altitudinem RI . Quare, cum XN, RI , sint insistentes lineæ, perpendiculares ad bases CD, GH ; erunt, ut iam ostensum est, æqualia parallelepipeda $RVCD, X\alpha GH$: Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis $ABCD, EFGH$, æqualia. Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda $ABCD, EFGH$: Idemque ostendetur, si insistentes lineæ unius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius uero non. Quam ob rem, Æqualium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.

29. vel 30.
undecimi.

SCHOLION.

OMNIA hæc, qua demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conveniunt quoque

quoque prismatis, qua habent duo plana opposita triangularia, si prædictæ hypotheses seruētur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, uel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficiuntur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, uel æquales bases existentia. Quare æqualia erunt huiusmodi parallelepipeda, ac proinde & data prismata, eorum uidelicet dimidia.

29. 30. uel
31. undec.

R V R S V S, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis, adijciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficiuntur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. Quare erit parallelepipedū ad parallelepipedū, ut basis ad basin; Atq; adeo prisma ad prisma, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad dimidium alterius, ut eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogramma, uel certe ut triangulum ad triangulum, dimidium scilicet unius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangularia.

32. undec.
35. quinti

P R A E T E R E A, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, conficiuntur duo parallelepipeda similia, qua inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quoque sunt latera homologa prismatum.

33. undec.
35. quinti

D E N I Q U E si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componuntur duo parallelepipeda æqualia eandem altitudinum cum prismatis. Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciproca; & bases prismatum eadem sint, uel certe triangularia earum dimidia eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciproca.

34. undec.
35. quinti

THEOR. 30. PROPOS. 35.

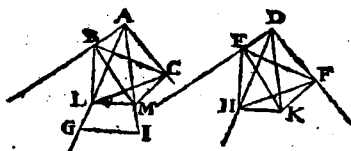
37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorū uerticibus sublimes rectæ linæ in-

stant,

fistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utriusque. In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis uero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC , EDF , quorum uerticibus A , & D , insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG , DH , ita ut angulus BAG , angulo EDH , & angulus CAG , angulo FDH , sit equalis. A sumptis autem punctis G , H , in rectis AG , DH , demittantur ad plana, in quibus anguli BAC , EDF , existunt, perpendiculares GI , HK , incidentes in puncta I , K , & adiungantur rectæ IA , KD . Dico



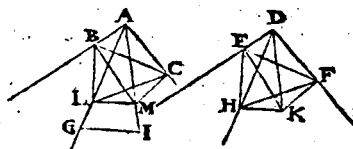
angulos GAI , HDK , esse æquales inter se. Nā si AG , DH , sunt inæquales, auferatur a maiori AG , ipsi DH , æqualis linea AL ; & ex L , ad planum anguli BAC , perpendicularis demittatur LM . Quoniam igitur GI , LM , rectæ sunt ad planum anguli BAC , ipsæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli AGI . Quare LM , cadet in rectam AI . Ducantur iam ex punctis M , K , ad rectas AB , AC , DE , DF , perpendiculares MB , MC , KE , KF ; & connectantur rectæ BC , BL , LC , EF , EH , HF . Et quia LM , recta est ad planum anguli BAC , ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM , in eodem plano ducta, per defin. 3. huius lib. Quare quadratum

6. undec.

recte

rectæ AL , æquale erat quadratis rectarum AM , ML : 47. primi.
 Est autem quadratum rectæ AM , æquale quadratis recta- 47. primi.
 rum AC , CM , cum & angulus ACM , rectus sit, ex con-
 structione. Quadratum ergo rectæ AL , æquale est qua-
 dratis rectarum AC , CM , ML : At quadratis rectarum CM ,
 ML , æquale est quadratum rectæ CL , cum angulus CML , 47. primi.
 rectus sit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ
 AL , æquale est quadratis rectarum AC , CL ; Ac proinde
 angulus ACL , rectus erit. Rursum quia quadratum 48. primi.
 rectæ AL , æquale est quadratis rectarum AM , ML : 47. primi.
 Est autem quadratum rectæ AM , æquale quadratis recta- 47. primi.
 rum AB , BM , cum angulus ABM , per constructio-
 nem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL , æquale
 est quadratis rectarum AB , BM , ML : At quadratis recta-
 rum BM , ML , æquale est quadratum rectæ BL , quod 47. primi
 & angulus $BM L$, sit rectus ex defin. 3. huius lib. Qua-
 dratum ergo rectæ AL , æquale est quadratis rectarum
 AB , BL ; proptereaque angulus ABL , erit rectus. Non 48. primi.
 aliter ostenduntur recti, anguli DFH , DEH . Quo-
 niam igitur anguli ABL , $L'AB$, trianguli ABL , æqua-
 les sunt angulis DEH , HDE , trianguli DEH ; suntque 26. primi.
 latera AL , DH , æqualia; Erunt & reliqua latera AB , BL ,
 reliquis lateribus DE , EH , æqualia. Eodem argumen-
 to æquales erunt rectæ AC , CL , rectis DF , FH . Qua-
 re cum latera AB , AC , trianguli ABC , æqualia sint late-
 ribus DE , DF , trianguli DEF ; & anguli cōtinenti BAC ,
 EDF , æquales, ex hypothēsi; erunt & bases BC , EF , inter 4. primi.
 se, & anguli ABC , ACB , angulis DEF , $D FE$, æqua-
 les: Sunt autem & toti anguli ABM , ACM , totis angulis
 DEK , DFK , æquales, cum omnes sint recti. Igitur & reli-
 qui anguli MBC , MCB , reliquis angulis $K EF$, $K FE$,
 æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC , EF , sint 26. primi.
 ostensa æqualia; erunt latera BM , CM , lateribus EK , FK ,
 æqualia. Quia igitur latera AC , CM , trianguli ACM ,
 æqualia sunt ostensa lateribus DF , FK , trianguli DFK ; &
 anguli ACM , DFK , sunt recti; erunt & bases AM , DK , 4. primi.
 inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensa rectæ
 BL , EH , erunt etiam earum quadrata æqualia:
 Quia uero quadratum rectæ BL , æquale est qua- 47. primi.
 dratis

dratis rectarum $B M, M L$; & quadratum rectæ $E H$, quadratis rectarum $E K, K H$, quod anguli $B M L, E K H$, recti sint, ex def. 3. huiuslib. Erunt & quadrata rectarum



$B M, M L$, æqualia quadrat s. rectarum $E K, K H$. Ablatis ergo quadratis rectarum $B M, E K$, quæ æqualia sunt, quod rectæ $B M, E K$ ostē

se sint æquales; reliqua quadrata rectarum $L M, H K$, æqualia erunt, ac proinde rectæ $L M, H K$, æquales. Quam ob rem, cum latera $A L, A M$, trianguli $A L M$, æqualia sint lateribus $D H, D K$, trianguli $D H K$, & basis $L M$, basi $H K$, æqualis; erunt & anguli $L A M, H D K$, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum uerticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.

8. primi.

COROLLARIUM.

ITAEQUE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum uerticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrumque. Erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani $B A C, E D F$, ponuntur æquales, & sublimes æquales $A L, D H$, constituunt angulos æquales $L A B, H D B$; Item $L A C, H D F$; demonstratum fuit, demissas perpendiculares $L M, H K$, esse æquales.

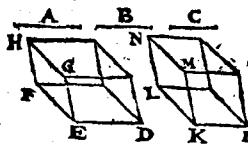
38.

THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto a media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum uero prædicto.

SINT

SINT continue proportionales tres rectæ A, B, C. Constituanturque angulus solidus E, ex tribus angulis planis qui buscunque DEF, DEG, FEG, ita ut recta DE, ipsi A, & EF, ipsi B, & EG, ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. Deinde ad rectam IK, cuiusque punctum K, fiat solidus angulus K, æquus solidulo angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales sint tribus DEF, DEG, FEG; ita ut rectæ IK, KL, KM, æquales sint mediæ lineæ B.



25. undec.

Completis uero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN; quod contineri dicitur sub linea B, seu ex ipsa describi. Dico solidum DH, æquale esse solidulo IN. Cum enim sit ut DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A, & IK, KM, ipsi B, & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam uero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorum uterque insistent sublimis lineæ æquales EF, KL, quæ quales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad planam basium DG, IM, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales, per coroll. propof. præcedentis. Quare parallelepipeda DH, IN, cū habeant bases DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

14. sexti.

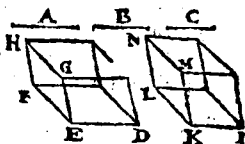
31 undec.

SCHOLION.

VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a mediâ linea descripto: Erunt tres rectæ continue proportionales.

proportionales.

portionales. Sis enim parallelepipedum DH , descriptum ex rectis A, B, C , ut dictum est, aequale sibi equiangulo parallelepipedo IN , descripto a media B . Dico tres A, B, C , esse continue proportionales. Nam,



veluti prius, ostendentur eorum altitudines ex E, L , demissa esse aequales. Quare cum & ipsa ponantur aequalia, erunt eorum bases DE, IM , aequales, per ea, qua

ad finem propof. 32. huius lib. demonstravimus. Quae bases cum angulos habeant aequales DEG, IKM , ex constructione; habebunt latera circa illos angulos reciproca; hoc est, erit ut DE , ad IK , ita KM , ad EG . Quapropter cum DE , ipsi A ; & IK , KM , ipsi B ; & EG , ipsi C , sumpta sit aequalis 3. Erit quoque ut A , ad B , ita B , ad C . Quod est propofitum.

14. sexti.

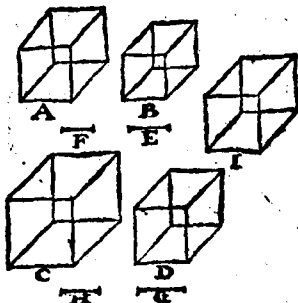
39.

THEOR. 32. PROPOS. 37.

SI quatuor rectae lineae proportionales fuerint: & solida parallelepipeda, quae ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quae & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsae rectae lineae proportionales erunt.

SINT quatuor rectae proportionales A, B, C, D ; Vt quidem A , ad B , ita C , ad D ; constituenturque super A , & B , duo parallelepipeda A , & B , similia similiterque descripta; Item super C , & D , alia duo C , & D , similia similiterque posita, siue haec sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida A, B, C, D , proportionalia; Vt quidem solidum A , ad solidum B , ita solidum C , ad solidum D . Inveniantur enim per scholion propof. 11. lib. 6. duabus rectis A, B , aliae duae continue proportionales E, F ; Item duabus

duabus C, D, alię duę G, H Quoniam igitur sunt quatuor li-
neę A, B, E, F, & qua-
tuor hęc alię C, D, G,
H, quę binę in eadem
ratione sumuntur, erit
ex æquo, ut A, ad F,
ita C, ad H. Vt au-
tem A, ad F, ita est so-
lidum A, ad solidum
B; Et ut C, ad H, ita
solidum C, ad solidum
D, ex coroll. propos.
33. huius lib. Igitur erit
ut solidum A, ad soli-
dum B, ita solidum C,
ad solidum D. Quod est propositum.



SINT iam e contrario solida A, B, C, D, proportiona-
lia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales. Tri-
bus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I,
super quam describatur parallelepipedum ipsi D, uel C, simi-
le similiterque possum. Quoniam igitur est, ut recta A, ad
rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, ut iam est
ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad
solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita poni-
tur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit ut soli-
dum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D
Ac idcirco equalia erunt solida I, & D. Quę cū sint similia,
similiterq; descripta, continebuntur planis equalibus & simi-
libus, per defin. 10. huius lib. Sed plana equalia & similia
habent latera homologa equalia, per lemma propos. 22. lib.
6. Igitur rectę I, & D, equalēs sunt, Ac propterea erit,
ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Po-
sita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut
recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si
quatuor rectę lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat
demonstrandum.

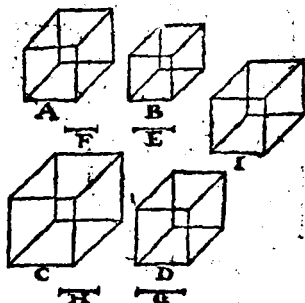
12. sexti.
17. undec.

9. quinti.

BREVIVS tota hęc propositio demonstrabitur cum
Theone, hoc modo. Ponatur primo ut recta A, ad rectam F,
ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A,
ad

ad

ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Cum enim sit
33. undec. proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum



D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: Erunt proportionēs solidi A, ad solidū B, & solidi C, ad solidum D, equales; quandoquidē triplicatę sunt proportionum equalium, nempe rectę A, ad rectam B; & rectę C, ad rectam D. Quod est primum. Rursum ponatur secundo esse,

ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, ut recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportionēs rectarum A, ad B, & C, ad D, equales; quandoquidem earum proportionēs triplicatę, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidū D, equales ponuntur. Quod est secundum.

SCHOLIUM.

EODEM modo, si fuerint tres rectę proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterque descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusque solidum sumatur bis, habebimur quatuor rectę proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, ut demonstratum est. Cum igitur solidum secunda linea aequale sit solido tertiae lineę; & linea secunda aequalis tertiae lineę; perspicuum est, quod proponitur.

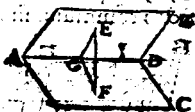
TOTA vero hac propositio convenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa equalia, sunt vel triangula, vel parallelogramma, ut Campanus ait. Nam additis prismatis, quę singula

singula singulis sint equalia, exurgent parallelepipedā, quā
ut hic est demonstratum, proportionalia erunt. Cum igitur
prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis propor-
tionem; perspicuum est, quod proponitur.

THEOR. 23. PROPOS. 38.

'SI' planum ad planum rectum fuerit; &
ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt
planorum, ad alterum planum perpendicu-
laris ducta fuerit: in communem sectionem
cader planorum ducta perpendicularis.

PLANUM A B, rectum sit ad planum A C, sitque eo-
rum communis sectio recta A D; Et ab E, puncto plani A B,
ad planum A C, perpendicularis demittatur; quam dico ca-
dere in communem sectionem A D. Nam si fieri potest, ca-
dat extra ad punctum F; & ab F, in plano A C, ducatur
ad rectam A D, perpendicularis F G, connectaturq; recta
E G, in plano A B. Quoniam igitur F G, perpendicularis
est ad communem sectionem A D; erit quoque perpendicu-
laris ad planum A B, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo ad re-
ctam G E, per 3. defin. huius lib. Est autem & E F, recta ad
F G, per eandem 3. defin. Igitur in
triangulo E F G, duo anguli E F G,
E G F, recti sunt, quod est absurdū;
cum duobus rectis sint minores. Per-
pendicularis ergo ex E, demissa ad
planum A C, non extra communem sectionem A D, ra-
det: ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si pla-
num ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demon-
strandum.



SCHOLIUM.

Hæc est demonstratio Theoris. Nos tamen idem demon-
strabimus brevius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano

X

A B,

15. quini.

13.

12. primi.

17. primi.

2. primi.

AB, demissa perpendicularis ad planum **A**C, non cadit in communem sectionem **AD**, sed in punctum **F**, extra sectionem; autatur ex **E**, ad rectam **A**D, perpendicularis **E**G; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum **A**C. Quare ex puncto **F**, extra planum **A**C, ductæ sunt ad ipsum planum **A**C, duæ perpendiculares **E**F, **E**G. Quod fieri nequit, ut in scholio propof. 13. huius lib. demonstravimus.



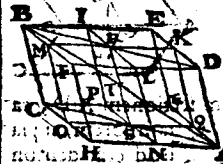
40.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI solidi parallelepipedorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sunt; per sectiones autem plana sint extenta: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedorum diameter, bifariam se mutuo secabunt.

Sint parallelepipedum **AB**, plana opposita **AC**, **BD**, quorum omnia latera bifariam secta sunt in punctis **I**, **K**, **L**, **M**, **N**, **O**, **P**, **Q**; per quæ extenta sint duo plana **IN**, **KO**, quorum sectio communis sit recta **RS**: Ducatur item diameter **AB**.

Dico rectam **RS**, & diametrum **AB**, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis **RB**, **RD**, **SA**, **SC**; considerentur duo triangula **AQS**, **COS**. Quoniam igitur latera **AQ**, **QS**, trianguli **AQS**, aequalia sunt lateribus **CO**, **OS**, trianguli **COS**; (Sunt enim **AQ**, **CO**, dimidia rectarum æqualium **AG**, **CH**; & **QS**, **OS**, duabus æqualibus **AN**, **HN**, æquales, cum sint parallelogramma **AS**, **HS**.) & angulus **AQS**, æqualis alterno angulo **COS**: Erunt & bases **AS**, **CS**, æquales; & anguli **ASQ**, **CSO**, æquales. Atqui anguli **ASQ**, **ASO**, æquales sunt duobus rectis; igitur & **CSO**, **ASO**, duobus



34. primi.

29. primi.

4. primi.

13. primi.

dubios sunt rectæ æquales; Ac propterea AS, CS, unā rectā lineam constituent. Eodem modo ostenduntur esse æquales BR, DR, & nam ex eis componi lineam rectā. Rursus quia viriq; AD, DC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, ipsæ quoq; inter se parallelæ erunt, & æquales. Quare & rectæ AC, BD, eādem extrema coniungentes, parallelæ sunt, & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BS, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt, secant rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, id est, se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. Cum autem duo anguli ASF, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR, Erunt reliqua latera AS, RS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Singitur solidi parallelepipedorum; quæ exaduerso, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hic efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidant, ut hic demonstratum est, rectam RS.

SCHOLION.

Hic theoremasi addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstrauimus, videlicet.

Si solidum pallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

SECETUR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc est, per punctum median diametri AB, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo plani CD, oppositis planis AE, BF, parallelū. Et quia plana parallelū BF, DC, EA, secant rectas quascūq; proportionales, secantur aut

14. primi.

15. undec.

33. primi.

7. undec.

29. & 15.

primi.

26. primi.

15. undec.

15. undec.

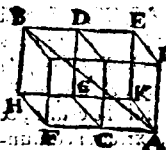
15. undec.

15. undec.

15. undec.

17. undec.

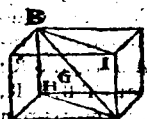
25. undec.



BA, bifariam in G, secabuntur quoque latera aduersorum planorum AH, BI, atque adeo & bases AH, BI, bifariam. Cum igitur sit ut basis KC, ad basin CH, ita solidum AD, ad solidum CB, erit parallelepipedum AB, sectum bifariam, plano CD, per centrum G, ducto.

TRANSIAT secundo planum secans, AIBH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G, imo per eam diametrum AB, cum AB, in plano sit parallelarum AH, BI. Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto, bifariam.

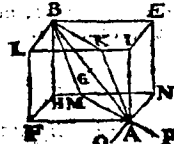
7. undec.



28. undec.

TERTIO planum secans AKBM, neque sit aduersus planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A, & E, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM, erunt communes sectiones AM, BK, parallele. Similiter parallela erunt AK, BM, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AL, BN, facte a plano AKBM.

16. undec.



Quare parallelogrammum est AKBM, ideoque tam recta AK, BM, quam recta AM, BK, interseerunt aequales. Quia ergo latera BK, BL, trianguli BKL, equalia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN, & angulus KBL, angulo MAN, aequalis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AB, AP, rectis BL, BK, parallela; ac proinde aequales anguli erant OAP, LBK. Cuiusmodi OAP, equalis sit angulo MAN, aequales quoque erunt anguli KBL, MAN.)

34. primi.

10. undec.

13. primi.

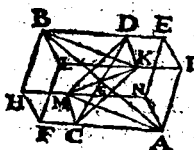
4. primi.

4. sexti.

Erunt bases KL, MN, inter se, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, aequales & triangulum triangulo aequale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN, sum latera habeant circa equos angulos proportionalia. Quoniam uero recta KL, recta MN, & angulus BKL, angulo AMN, & angulus KBL, angulo MAN, est aequalis, ut ostendi.

ostendimus; erit & reliqua IK , reliqua HM ; & reliquus angulus BKI , reliquo AMH ; & reliquus KBE , reliquo MAF , equalis. (Est in. tota LI , totus NH , equalis, & id anguli BKE , BKI , quam anguli AMN , AMH , duobus rectis aequales; & totus angulus LBE , toti angulo NAF , equalis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN .) Sunt autem & latera BE, EI , lateribus AF, FH , equalia; & anguli BEI, EIK ; angulis AFH, FHM , ob parallelogramma LE, FN . Igitur quadrilaterum $BKIE$, & aequilaterum, & equiangularum est quadrilatero $AMHF$; Ac propterea aequale & simile, cum singula singulis conveniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo equalia erunt & similia triangula BHM, AIK ; & quadrilatera $AKLF, BMNE$; cum inter se sint & aequilatera & equiangulara. Quapropter solidum contentum planis $AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF$, aequale erit solido contento planis $BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAI$, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & equalia, ut demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB , sectum est plano $AKBM$, per centrum G , bisariam.

POSTREMO planum secans CD , neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planarum oppositarum, neq; per ullos angulos eorum ductum, sed utcumque secans plana opposita $AHBI$. Ostendimus autem, ut prius, planum secans CD , esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM , quam rectas CM, DK , esse aequales. Ducantur in parallelogrammo CD , diametri CD, KM ; connectanturque rectae AM, BK , quae parallelae erunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AH, BI , factae a plano per rectas AB, KM , ducto. Quoniam igitur AF, BE , parallelae ipsi LI , ob parallelogramma AL, LE , inter se sunt parallelae; Erunt AB, CD , in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G ; In solo enim centro G , recta AB , per hypothesin, secans planum CD , in quo existit recta CD . Simili argumento, cum AM, BK , sint ostensa parallelae; erunt AB, BK , in eodem cum illis



16. undec.

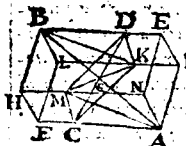
9. undec.

7. undec.

15. primi.

4. primi

illis plano, seqq; mutuo secabunt in centro G. Quare diametri CD, KM, per centrum G, transibunt, itiq; se mutuo secabunt; atq; adeo bisari, per ea, quæ ad propof. 34. lib. 1. ostendimus. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, equalia sūt laterib; AG, GC, trianguli AGC; & angulus BGD, æqualis angulo AGC; Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodem argumen- to æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, equalia sint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propof. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulus huius æquales: Et autem totus DBL, totus CAN, æqualis, ob similitudinem pa- rallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquæ KBL, reliquæ MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angu- lus KBL, angulo MAN, æqualis; Erit & basis KL, basi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BDK, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterū est, & equiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum sin- gula conveniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, tota NH, est æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis; Eademque ratione reli- qua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilate- rum DEI K, æquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed & equiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint an- gulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogram- morum BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMT, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alter ni LK, D; BD, K; angulis NMC, ACM. Igitur quadrila- tera DEI K, CFHM, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, & FELK, cum & latera lateri- bus, & anguli angulis conveniant, ut perspicuum est. Quam- obrem solidum contentum planis CLKI, FHM, C, K, D, M, M, H, B, D, K, L, B, H, F, per æ. desin. huius lib. æquale est so- lido

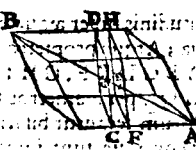


4. primi.

180. cetero planis $DMNE$, $EIKD$, $DMCK$, $KBAG$, $CEMN$, &
 $KIEN$; cum hisce illa sint demonstratu & equalia & similia
 Parallelepipedum igitur AB , sectum est per centrum G , pla-
 no CD , bisariam.

• SED secetur iam parallelepipedum AB , plano CD , bifa-
 riam; Dico planum CD , per centrum parallelepipedum transire,
 hoc est, punctum G , in quo planum CD , secat diametrum AB ,
 dividere diametrum AB , bisariam. Si enim diameter AB , in
 G non dividitur bisariam; dividatur

bisarium in E , ut sit F , centrum paral- B PH
 lelepipedum. Si igitur per E ducatur
 planum FH , plano CD , parallelum,
 secabitur parallelepipedum AB , bifa-
 riam plano FH , ut demonstratum est.



Ponitur autē & bisariam secati pla-
 no CD , igitur solida CB , FE , eam sunt dividit parallelepipedum
 AB , inter se equalia sunt, pars & totum. Quod est absurdum.
 Nō ergo aliud punctū, præter G , dividet diametrum AB , bisariam;
 Ac pinde G , ceterū erit parallelepipedum. Qd demonstrandū erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

41.

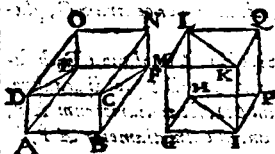
SI fuerint duo prismata equalis altitudi-
 nis, quōrum hoc quidem habeat basim, pa-
 rallelogrammum; illud vero, triangulum;
 duplum autem fuerit parallelogrammum
 trianguli: AEQUALIA erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata equalis altitudinis $AB C D E F$,
 $G H I K L M$, quorū illud basim habeat parallelogrammū $A B$ -
 $C D$, hoc uero, triangulū $G H I$; sitq; parallelogrammū $A C$, tri-
 anguli $G H I$, duplū. Dico hæc prismata esse equalia. Perficiantur.
 n. parallelepipeda AN , $G Q$; Quod quidē fiet, si plana
 triangulorū extendantur, perficianturq; parallelograma BN ,
 $A O$; $G P$, $M Q$. Si enim connectantur rectæ NO , $P Q$,
 constituta erūt duo parallelepipeda AN , $G Q$ eiusdē altitu-
 dinis cū prismatis. Nam plana horum solidorū opposita esse

X 4 paral-

34. primi.

parallelis, facile intelligitur ex propof. 16. huius lib. Quomodo igitur parallelogrammum GP , duplum est trianguli GHI .



GHI . Ponitur autem & parallelogrammum AC , eiusdem trianguli GHI , duplum: æqualia erunt parallelogramma AC , GP . Quare parallelepipedum AN , GQ , eiusdem al-

31. undec.

titudinis super æquales bases AC , GP , inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata $ABCDEF$, $GHIKLM$, (Nam parallelepipedum AN , GQ , per diagonos CF , DE , HI , LK , planorum aduersum secantur bifariam, in hunc scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

28. undec.

S C H O L I O N

PERSPICUUM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipedum compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum $ABCD$, constructum non haberet duo triangula, nempe ADE , BCE . Eset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.



E V C L I D I S

E L E M E N T V M X I I .

Et Solidorum secundum.



T H E O R . I . P R O P O S . I .

Q V A E in circulis polygona similia inter se sunt, vt a diametris quadrata.



I N T duo polygona similia A B C D E, F G H I K, descripta in circulis, quorum diametri A L, F M. Dico ita esse polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K, ut quadratum diametri A L, ad quadratum diametri F M. Subtendantur enim angulis aequalibus A B C, F G H, rectae A C, F H, & connectantur rectae B L, G M. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est ut A B, ad B C, ita F G, ad G H; erunt triangula A B C, F G H, equiangula, cum circa angulos aequales A B C, F G H, habeant latera proportionalia: Est autem angulus A L B, angulo A C B, & angulus F M G, angulo F H G, aequalis. Igitur & anguli A L B, F M G, aequales erunt. Cum ergo & anguli A B L, F G M, aequales sint, nempe recti in semicirculis existentibus, erunt & reliqui B A L, G F M, aequales. Quare erit ut A L, ad A B, ita F M, ad F G, & permutando, vt A L, ad



6. sexti.

21. terci.

31. terci.

32. primi.

4. sexti.

re erit ut A L, ad A B, ita F M, ad F G, & permutando, vt A L, ad

22. sexti.

A L, ad F M; ita A B, ad F G. Igitur est, ut quadratum ex A L, ad quadratum ex F M, ita polygonum A B C D E, super A B, ad polygonum F G H I K, super F G; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, ut a diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCULI inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata.

3.

S I N T duo circuli A B C D, E F G H, quorum diametri A C, E G. Dico esse, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circum A B C D, ad circum E F G H. Si enim res non ita se habet; Sit ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ uel minor erit, uel maior circulo E F G H. Si .n. esset æqualis, haberet circulus A B C D, ad circum E F G H, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus A B C D, ad circum E F G H, ut quadratum diametri

7. quinti.



lus A B C D, ad circum E F G H, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus A B C D, ad circum E F G H, ut quadratum diametri

A C, ad quadratum diametri E G, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor quam circulus E F G H, magnitudine scilicet K, ita ut circulus E F G H, quævis sit magnitudinis I, & K, simul; Inscribatur in circulo E F G H, quadratum E F G H; quod quia dimidius est quadrati circa eundem circum descripti, ut ad propos. 9 lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidium circuli E F G H. Secentur bisariam peripheriæ E F, F G, G H, H E, in punctis L, M, N, O, adiunganturq; rectæ L E, L F, M F, M G, N G, N H, O H, O E. Ducatur per L, recta T V, tangens circum in E; quæ parallela erit ipsi E F, ut ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis H E; G F, productis in T; & V. Quia ergo triangulum E L F, dimidius est parallelogrammi T E F V; maius erit triangulum E L F, quam dimidium segmenti circuli E L F. Eadē ratione erunt reliqua triangu-

41. primi.

la

la maiora, quam dimidia segmentorū, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quā dimidium omnium segmentorū simul. Quod si rursus peripheriæ EL , LF , & c. secentur bifariā, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quā dimidium omnium segmentorū simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam uero, si a circulo $EFGH$, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum $EFGH$; & a reliquis segmentis plus quā dimidiū, nempe triagula ELF , FMG , & c. arque in hūc modum semper fiat detractio; relinquatur tandem minor magnitudo, quam K , excessus uero circulum $EFGH$, & magnitudinem I . Sint iam circuli segmenta relicta EL , LF , FM , & c. simul supra minora, quam magnitudo K . Cum igitur circulus $EFGH$, æqualis ponatur magnitudinibus I , & K , simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I , & K , ipsa magnitudo K , quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonū $ELFMGNHO$, maius reliqua magnitudine I . Inscrubatur in circulo $ABCD$, polygonum $APBQCRDS$, simile polygono $ELFMGNHO$. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC , ADC bifariā secentur, in B , & D ; & rursus circumferentiæ AB , BC , CD , DA , bifariā in P , Q , R , S ; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa circumferentiā $ABCD$, in quot distributa ē circumferentiā $EFGH$. Nā iunctis rectis AP , PB , BQ , & c. erit figura inscripta similis figuræ $ELFMGNHO$, ut patet. Quoniam igitur est polygonū $APBQCRDS$, ad polygonū $ELFMGNHO$, ut quadratū diametri AC , ad quadratum diametri EG , hoc est, per hypothēsin, ut circulus $ABCD$, ad I : Est aut polygonum $APBQCRDS$, minus circulo $ABCD$. Igitur & polygonum $ELFMGNHO$, minus erit quam I . Ostensum aut est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I , circulo $EFGH$.

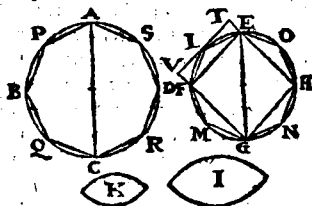
Sic secundo magnitudo I , maior circulo $EFGH$. Cum ergo ponatur circulus $ABCD$, ad I , esse ut quadratū diametri AC , ad quadratum diametri EG ; erit & conuertendo I , ad circulum $ABCD$, ut quadratum diametri EG , ad quadratum diametri AC . Ponatur ut I , ad circulum $ABCD$, ita circulus $EFGH$, ad magnitudinē aliquā, nempe ad K . Et quia I , maior ponitur circulo $EFGH$, maior quoque erit circulus

1. decimi.

1. duodec.

14. quinti.

circulus A B C D, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C, ita circulus E F G H, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo A B C D. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minore. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H. Sed neq; minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G,



ita circulus A B C D, ad I; sit autem ut circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque ut quadratum diametri A C, ad qua-

dratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc fit, ita esse circulum ad circulum, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descripto. Quoniam si circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

Si ita pyramis, cuius basis triangulum ABC, uertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & uertices H, D; nec non in duo solida EBF GH IK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBF G, & triangula opposita EHG, BIF; huius uero basis est triangulum CFG, cui opponitur eriangulum KIH, habentq; hæc prismata terminum communem, parallelogrammum EGH I, & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, ut constet, & recte concepiatur pyramidis uertex D, in sublimi, accedat eius eriangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duos hæc prismata esse inter se equalia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, erianguli ADB, secda sine bifariam, ac pte inde proportionaliter; erunt HA, AB, parallela. Eadem ratione parallela erunt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & HI, DC; & HG, DO. Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelae sint ipsi AB, inter se parallelae; Atque eadem ratione parallelae sunt GH, FI, cum sint parallelae ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDH E, EBF G, GHK G, CKIF, FGH I. Quoniam uero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelae erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. Proportionalia igitur sunt latera erianguli HEG, lateribus erianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAB, HAG, AEG, eriangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propof. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, similis est, per defn. 9. huius lib. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelae, erunt anguli HIH, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. Quare latera erian-



2. sexti.

9. undec.

10. undec.

4. sexti.

10. undec.

guli

4. *sexti.* guli $H I K$, lateribus trianguli $A B C$, circa æquales adgu-
los sunt proportionalia; ac propterea triangulum $H I K$,
triangulo $A B C$, simile est: Sunt autem & triangu-
la $D H I$, $D I K$, & $A H$, triangulis $D A B$, $D B C$, $D C A$, similia,
per eam coroll. propof. 4. lib. 6. Pyramis ergo $H I K D$,
similis est quoque ostentis pyrami-
di $A B C D$; per defn. 9. huius
lib. Quoniam autem triangu-
la $A H E$, $H D I$ similia sunt trian-
gulo $A D B$, ut ostentum est ex coroll. propof. 4. lib. 6. ip-
sa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super re-
ctas æquales $A H$, $H D$, constituta ipsa erunt æqualia; per
lemma propof. 22. lib. 6. Simi i argumento æqualia erunt
& similia triangu-
la $A H G$, $H D E$, cum similia sint osten-
sa triangu-
lo $A D C$, & constituta super æquales rectas
 $A H$, $H D$. Part ratione æqualia, & similia erunt trian-
gula $A E G$, $H I K$, cum similia sint ostensa triangu-
lo $A B C$, & super rectas posita $A E$, $H I$, quæ æquales
sunt, ob parallelogrammum $A E I H$. Non licet æqua-
lia erunt & similia triangu-
la $E H G$, $H D K$, cum fiat
ostensa similia triangu-
lo $B D C$, & habeant rectas $H E$,
 $D I$, quæ æquales sunt, ob parallelogrammum $H E I D$.
Pyramides igitur $A E G H$, $H I K D$, æquales sunt & simi-
les, per eam defn. huius lib. quandoquidem omnia trian-
gula æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius,
ut demonstratum est.
34. *primi.* $R V K S N S Q$ quia rectæ $E H$, $H G$, $G E$, æquales sunt
& parallele rectis $B I$, $I F$, $F B$, ob parallelogramma $E H I B$, $F G H I$, $B F G E$, erunt triangu-
la $E H G$, $B I F$, æ-
quiangularia inter se, & æqualia, per coroll. propof. 8. lib. 1.
Ac propterea & similia: Sunt autem & parallela, cum $E H$,
 $H G$, per quas ducitur planum $E H G$, parallela sint re-
ctis $B I$, $I F$, per quas planum $B I F$, ducitur. Igitur so-
lidum $B I F G H E$, contentum duobus triangulis $E H G$,
 $B I F$, ex ædificis æquabbus & similibus, & parallelis, &
tribus parallelogrammis $E G F B$, $B E H I$, $I F G H$, pris-
ma est, ex definitione. Eodem modo prima ostendetur
solidum $C F G H I K$. Cum enim rectæ $E C$, $C G$, $G F$,
æquales sint, & parallele rectis $I H$, $H K$, $K I$, ob paralle-
logram-

logramma $CPIK$, $QGHK$, $FGHI$; erunt triangula CFG , HIK , aequalia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: sunt autem & parallela, quod rectæ CP , CT , per quas ducitur planum CEG , parallelae sint rectis KI , KH , per quas planum KIH , ducitur. Igitur solidum $CFGHIK$, contentum duobus triangulis CFG , KIH , ex aductis æqualibus & similibus, & parallelis; atque erit parallelogrammum $CPIK$, $KHGC$, $IEGH$, prisma est. Quoniam uero prismata $EBFGHI$, $CEGHIK$, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCE , HIK ; & parallelogrammum EFG , basis illius, duplum est trianguli CEG , basis huius, per scholion prop. 4. lib. 1, ipsa inter se aequalia erunt.

15. undec.

Denotetur quædam prisma $EBFGHI$, maius est pyramide $EBFI$, totiusque parte, & autem pyramis $EBFI$, æqualis & similis pyramidi $AEGH$, necnon pyramidi $HIKD$, & perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maior namque prisma $EBFGHI$, $CEGHIK$, pyramidis $AEGH$, $HIKD$. Ac proinde illa quidē dimidiū pyramidis $ABCD$, excedit, hæc utro a dimidio eiusdē deficient. Quando enim eorum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor uero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

40. undec.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autē illarū utraq; diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes totis, & in duo prismata aequalia; Ac eodē modo diuisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis

basis,

basini, ita & omnia, quæ in una pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

S I N T duæ pyramides $ABCD, EFGH$, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis $I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V$, connectanturque rectæ $IL, LK, KN, NO, OM, MN, DM, MI, PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SB$, ita ut pyramis utraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in A, I, L, M .

Similiter bifariam diuidantur latera $M, N, O, D; E, P, R, S, T, V, H$, & in binas prismata equalia $IBKLMN, CKLMNO, PFQRST, GQ RSTV$, ut. vale. propositio præcedens. Eodemque modo insillgantur etiam in altera pyramide factæ A, I, L, M .

$M, N, O, D; E, P, R, S, T, V, H$, & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide $ABCD$, ad omnia prismata generata in pyramide $EFGH$, illis multitudine æqualia, ut est basis ABC , ad basin EFG . Cum enim sit BC , ad CK , ita FG , ad GQ , eo quod utraque linea sit diuisa bifariam, sicut autem triangula ABC, LKC , similia similiterque posita; Item triangula EFG, RQG , ex coroll. propos. 6. lib. 6.

12. sexti.

Erit quoque ut triangulum ABC , ad triangulum LKC , ita triangulum EFG , ad triangulum RQG . Et permutando, ut ABC , ad EFG , ita LKC , ad RQG . Vt autem LKC , ad RQG , ita est prisma $CKLMNO$, ad prisma $GQ RSTV$, ut mox ostendemus, atque adeo ita prisma $IBKLMN$, ad prisma $PFQRST$, cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prisma, uidelicet $IBKLMN$, ad unum prisma $PFQRST$, ita sunt duo prismata $IBKLMN, CKLMNO$, ad duo prismata $PFQRST, GQ RSTV$, Igitur erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EFG , ita duo prismata in pyramide $ABCD$, ad duo prismata in pyramide $EFGH$.

12. quinsi.

Simili argumento ostendemus, ita esse binas prismata in pyramidibus $A, I, L, M, MNOD$, factis in pyramide $ABCD$, ad binas prismata in pyramidibus E, P, R, S, T, V, H , factis in pyramide $EFGH$, ut sunt bases A, I, L, M, MNO , illarum pyramidum ad bases

ad bases EPR , STV , harum pyramidum; & sic deinceps, eadem semper facta diuisione. Sed ut illæ bases ad has, ita est LKC , basis, quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQS , quæ his est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC , ad basin EHG . Igitur erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EHG , ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide $ABCD$, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EHG : Ac propterea erunt quoque, ut prismata pyramidis $ABCD$, ad prismata pyramidis EHG , ita prismata tam pyramidis $AILM$, ad prismata pyramidis $EPRS$, quam prismata pyramidis MNO , ad prismata pyramidis $STVH$; & ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis $ABCD$, ad duo prismata pyramidis EHG , ita omnia prismata in pyramidibus $ABCD$, $AILM$, MNO , &c. simul, ad omnia prismata in pyramidibus EHG , $EPRS$, $STVH$, &c. simul, si hæc illis multitudine sint equalia; Erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EHG , ita omnia prismata in pyramide $ABCD$, ad omnia prismata in pyramide EHG . Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

12. quinti

LEMMA.

Quod autem sit LKC , ad RQG , ita prisma $CKLMNO$, ad prisma $GQRSTV$, ita ostendemus. Intelligentur ex uerticibus D, H , ad bases ABC , EHG , demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum $ABCD$, EHG . Quoniam igitur plana parallela ABC , MNO , secant duas rectas, nempe DC , & perpendicularem ex D , demissam proportionaliter; secatur autem DC , bisariam in O ; secabitur quoque perpendicularis ex D , demissa bisariam in puncto, cui planum MNO , occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H , demissa bisariam secabitur a plano STV . Quare cum totæ perpendicu-

17. undec.

lares

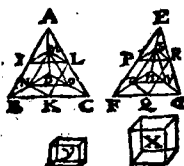
lares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata $CKLMNO, GQ RSTV$, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases LKC, RQG , per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstravimus.

5.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis $ABCD, EFGH$, quarum bases triangula ABC, EFG . Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis ABC , ad basin EFG , ita pyramis $ABCD$, ad solidum X ; quod vel minus est, vel maius pyramide $EFGH$.



Sit primo minus, magnitudine Y . Diuidatur pyramis $EFGH$, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide

$EFGH$, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide $EFGH$, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata $PFQ RST, GQ RSTV$, quæ maiora sunt dimidio pyramidis $EFGH$: Item a reliquis pyramidibus $EPRS, STVH$, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y , excessus pyramidis $EFGH$; supra solidum X . Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis $EFGH$, æqualis ponatur solidis X, Y ; erunt reliqua prismata in pyramide $EFGH$, maiora solido X . Diuidatur pyramis $ABCD$, in duas pyramides æquales, & duo prismata

3. duodec.

8. decimi

mata

maræ æqualia ; & eodem modo factæ pyramides A I L M, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia ; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide E F G H. Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, ut basis ABC, ad basin EFG, hoc est, ut pyramis ABCD, ad solidū X : Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quā tota pyramis ABCD; Erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora, quam solidum X. Ostensa uero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.

12. duodec.

14. quinti

14. quinti

7. quinti.

Sic secundo solidū X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, ut basis ABC, ad basin EFG; Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, ut basis EFG, ad basin ABC. Ponatur ut solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide EFGH; erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit, ut basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, ut est basis ab basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum pyramide EFGH; sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidū X; Sic autem pyramis ABCD, ut ad solidum X, ita ad pyramidem EFGH, solido X, æqualē: Erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub ea item ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sint, ut basis; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim unius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minor i, & a puncto abscissionis ad oēs angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritq; ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo cōstituta: Sed sic quoq; erat ad totā pyramidem. Pyramis ergo cōstituta

Y 2 æqualis

9. quinti. *æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod est absurdum.*

COROLLARIUM.

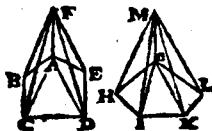
Hinc fit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, uel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habeant cum basibus, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

Item sequitur, e conuerso pyramides triangulares æquales super eandem, uel æquales bases, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento ostendemus, quo in conuerso propos. 30. & 31. lib. 11. demonstrando usi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

S V B eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, ut bases.

S I N T pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resolutis enim basibus in triangu-
læ multitudine æqualia, erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuisa. Quia uero



3. duodec.

5. duodec.

est, ut basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; Erit componendo ut basis ABCD, ad basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: Sed rursus est ut basis ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo ut basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit ut basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit ut basis GHIKL, ad basin GKL, ita pyramis GHIKLM,

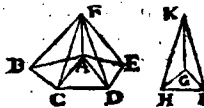
K L M, ad pyramidem G K L M; Et conuertendo ut basis G K L ad basin G H I K L, ita pyramis G K L M, ad pyramidem G H I K L M. Rursus quoniā est, ut basis A D E, ad basin G K L, ita pyramis A D E F, ad pyramidem G K L M; Erūt quatuor bases A B C D E, A D E, G K L, G H I K L, in eisdem proportionibus cum quatuor pyramidibus A B C D E F, A D E F, G K L M, G H I K L M, ut in hac formula uides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit ut basis A B C D E, ad basin G H I K L, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M; Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D E	A B C D E F
A D E	A D E F
G K L	G K L M
G H I K L	G H I K L M

5. duodec.

SCHOLIION.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quorum bases polygonæ latera habent multitudine æqualia, facile samen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum unius basis plura continet latera, quam basis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiusdem altitudinis A B C D E F, G H I K, quarum illius basis sit polygonæ, nempe pensagonæ, huius uero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin.



Resoluto enim pensagono in trianguła, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuisa. Quoniam uero est, ut basis A B C, prima quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C F, tertiæ quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; Et eodem modo, ut basis A C D, quinta quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A C D F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem: Erit ut basis A B C D, prima quantitas cū quinta, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertiæ quantitas cū sexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis A B C D, prima quanti-

5. duodec.

24. quinti

5. duodec.

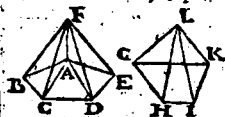


24. quinti

tes, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $AB-
CDF$, tertia quantitas, ad pyramidem $GHIK$, quartam quanti-
tatem, ut modo est ostensum: & ut basis ADE , quinta quan-
titas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $AD-
EF$, sexta quantitas, ad pyramidem
 $GHIK$, quartam quantitatem;
Erit etiam ut basis $ABCDE$, pri-
ma quantitas cum quinta, ad basin
 GHI , secundam quantitatem, ita

pyramis $ABCDEF$, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem
 $GHIK$, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eo-
dem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula
in basi polygoni: Cum autem, ut demonstratum est, sit ut ba-
sis polygoni $ABCDE$, ad basin triangularem GHI , ita pyra-
mis $ABCDEF$, ad pyramidem $GHIK$; Erit quoque con-
uertendo, ut basis GHI , ad basin $ABCDE$, ita pyramis $GH-
IK$, ad pyramidem $ABCDEF$. Quam ob rem due pyramides
quolibet, quarum unus basis est polygoni, alterius triangula-
ris, suis basibus sunt proportionales, undeunque incipias.
Quamvis enim demonstratio incipiat a polygono, eiusque pyra-
mide, ut ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit
initium quoque sumere a triangulo, eiusque pyramide, ut di-
ctum est.

Sed iam sint due pyramides eiusdem altitudinis $ABC-
DEF$, $GHIKL$, quarum bases sint polygoni, sintque plura
latera in una base, quam in altera. Dico rursus esse pyramidem



ad pyramidem, ut est basis ad ba-
sin. Resoluto enim polygono $AB-
CDE$, in triangula ABC , ACD ,
 ADE , erit pyramis eius in totidem
diuisa pyramides. Quia vero, ut

iam est demonstratum, est ut basis ABC , triangularis prima
quantitas, ad basin $GHIK$, polygonam; secundam quantitatē;
ita pyramis $ABCF$, tertia quantitas ad pyramidem $GHIKL$,
quartam quantitatem; & ut basis ACD , quinta quantitas, ad
basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ACDF$, sex-
ta quantitas, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem;
Erit etiam ut basis $ABCD$, prima quantitas cum quinta, ad ba-
sin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ABCDF$, ter-
tia

24. quinti

tia quantitas cum sexta, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis $ABCD$, prima quantitas, ad basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ABCDEF$, tertia quantitas, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem, ut proxime demonstratum est; Et est quoque ut basis ADE , quinta quantitas, ad basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ADEF$, sexta quantitas, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem, ut ante est offensum; Erit etiam ut basis $ABCDE$, prima quantitas cum quinta, ad basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ABCDEF$, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi $ABCDE$.

24. quoniam

HANC autem propositionem 6. & ea, quae in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quae inter se sunt, ut bases; eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quae in scholio proposit. 5. huius lib. diximus, offensa sunt.

COROLLARIUM.

PERSPICUUM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super aequales bases multangulas, uel eandem constitutas, esse inter se aequales; cum eandem habeant proportionem est basibus, quae aequales ponuntur, uel certe una & eadem.

RURSUM contra fit, pyramides multangulas aequales, & super aequales bases, uel super eandem constitutas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas aequales, eandemque habentes altitudinem, aequales habere bases, si non habuerint eandem. Haec autem duo demonstrabuntur, ut in coroll. proposit. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

6.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides

T 4 aequales

æquales inter se, triangulares bases habentes.

34. primi

5. duodec.



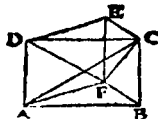
Si **t** prisma $ABCDEF$, cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia ABF , DCE . Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur in tribus paralielogramis tres diametri, nempe AC , in $ABCD$; CF , in $BCEF$; FD , in $ADEF$. Quoniam igitur triangula ABC , ADC , æqualia sunt; estque ut basis ABC , ad basin ADC , ita pyramis $ABCF$, ad pyramidem $ADCF$, cum hæc pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F , uertice ad planum $ABCD$, demissam; Erunt & pyramides $ABCF$, $ADCF$, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADF , EDF , EFD , EDC , super æquales bases ADF , EDF , constituta, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari a uertice C , ad planum $ADEF$, demissa. Est autem pyramis $ADCF$, eadem pyramidi ADF , cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC , & triangulis ADF , ACF , DCF ; hæc uero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF , & triangulis ADC , ACF , DCF . Igitur tres pyramides $ABCF$, $ADCF$, EFD , seu $CDEF$, (quæ eadem est pyramidi EFD , cum tam EFD , quam CD , EF , contineatur planis CDE , EFD , DCF , FCE , totum prisma componentes, ut perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma $ABCDEF$, in tres pyramides est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basim, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM. I.

Hinc colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim, & altitudinem.

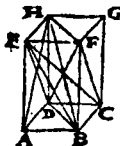
Si **t** enim primum pyramis $ABFC$, triangularem habens basim ABF ; & prisma $ABCD$, sub eadem altitudine eandem habens basim triangularem ABF . Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis.

prismatis. Nam si ducatur recta DF, erit prismatis diuisum in tres pyramides æquales ABCEADCF, CDEF; & demonstratum est, ac propterea pyramis ABCE, hoc est, pyramis ABFC, (cum hæc illi sit æqualis, immo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CHF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constituta, ex coroll. propof. 5. huius lib. manifestum est quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma e contrario esse pyramidis triplum.



7. duodec.

Si r. secundo pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunque ABCD, quolibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basin. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADE, BCD; BHF, FGH; erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH; DF, CF; erit, ut demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFHD; Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGF. Quare erit, ut pyramis ADBH, ad prisma ABFHD, ita pyramis BCD ad prisma CDHGF; ac propterea ut una pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prismata ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertia partem constituent prismatis ABCDEFGH. sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & sub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. propof. 5. huius lib. Eademque ratione æquales sunt pyramides BCD, BCDE, super eandem basin, & sub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBH, BCDE, component totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABCD, constituta, per coroll. propof. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin multilateram, eandemque altitudinem.



12. quinti

Quod si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singula pyramides triangulares horum prismatum erunt tertia partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæc pyramides æquales sint pyramidi basi habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

Boonem modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basin

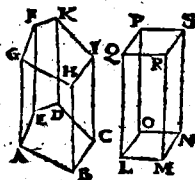
sem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem Nam eius-
modi pyramis æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate
habet & basem, & altitudinem, per coroll. propof. 6. huius lib.
Quam quidem iam ostendimus tertiam, esse prismatis partem.

SCHOLIION. I.

Ex dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, vi-
delicet,

S V B eadem altitudine existentia prisma-
ta, quascunque habeant bases; inter se sunt,
ut bases.

Q V A M V I S enim hoc demonstratum sit in lib. II. de prif-
matis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt
triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices
verò lineæ rectæ; nec nõ de parallelepipedis, quæ nomine prif-
matum contineri diximus: Nunc tamen id ipsum demonstra-
bimus uniuersè de omnibus prismatis, quorum duo plana ad-
uersa, sine bases, sunt polygonæ, quamuis plura latera seu
anguli in vnius base reperiantur,
quam in base alterius. Sint igitur
duo prismata eiusdem altitudinis
 $ABCDEF GHIK, LMNOPQRS$, quorum bases sint
figura multilatera. Dico, ut est
basis $ABCDE$, ad basin $LMNO$,
ita esse prisma ad prisma. Si enim
ex omnibus angulis utriusque ba-



15. Quinti.

sis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, li-
neæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem al-
titudine cum prismatis, habentes easdem bases: Ac proinde,
per coroll. prædictum, qualibet pyramis tertia pars erit sui
prismatis. Quam ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita
prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, ut basis
ad basin; ut ostensum est propof. 6. eiusque scholio. Igitur erit
quoque ut basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est
propositum.

CON-

CONVERSO modo, si prismata quarumcumque basium inter se sint, ut bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendimus, quo scholion propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIUM. II.

VND *prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel aequales bases quascunque, inter se sunt aequalia.* Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quae aequales ponuntur, vel certe una & eadem.

CONTRARIO, Prismata aequalia super aequales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata aequalia eiusdem altitudinis, bases habent aequales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendimus, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.

SCHOLION. II.

CETERVM tam ea, quae in priori corollario, quam illa, quae in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quae in vertice habent plana basi parallela, aequalia, & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismae constanter duobus triangulis parallelis, aequalibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo prismata dici ab Euclide, ut in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismae intelligatur quidem basis unum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, ut in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basim, ut in scholio ostendimus. At vero si in prismae tali basi concipiatur unum parallelogrammorum, ita ut in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed duae tertiae partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habens 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud aequale & simile, ut parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario

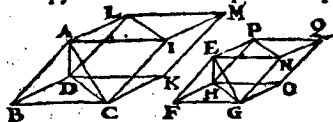
lario predicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebis, quam 3. ad 2. nimirum sesqui alteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, qua eandem cum tali prismate habeas altitudinem, cum sis dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Qua cum ita sint, non habebis tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, qua ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel lineae rectae sunt, & bases parallelogramma, vel certe, qua in verticibus plana habeant basibus parallela, aequalia atque similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint lineae rectae, erant pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, duae tertiae partes prismatum, ut modo demonstravimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SIMILES pyramides, quae triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita ut bases A B C, E F G, sint similes, & reliqua triangula unius similia reliquis triangulis alterius, Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe B C, F G.

Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma B I, B K, B L. Deinde du-



cantur

cantur $L M$, $I M$, rectis $A I$, $A L$, parallelæ & æquales, conuenientes in M , connectaturque recta $K M$. Erit igitur cõpletum parallelepipedum $B M$, eiusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi $B M$, sint parallela, ut facile colligitur ex propof. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum $F Q$. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani $A B C$, $E F G$, sunt æquales, estque ut $A B$, ad $B C$, ita $E F$, ad $F G$; erunt parallelogramma $B I$, $F N$, similia. Eodem modo cū anguli $A B D$, $E F H$, sint æquales, sitque ut $A B$, ad $B D$, ita $E F$, ad $F H$; Item anguli $D B C$, $H F G$, æquales, & ut $D B$, ad $B C$, ita $H F$, ad $F G$; erunt & parallelogramma $B L$, $B K$, parallelogrammis $F P$, $F O$, similia. Sed tam tria $B I$, $B K$, $B L$, parallelepipedum $B M$, reliquis tribus oppositis $D M$, $A M$, $C M$; quam tria $F N$, $F O$, $F P$, parallelepipedum $F Q$, reliquis oppositis tribus $H Q$, $E Q$, $G Q$, sunt æqualia & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum $B M$, similia sunt sex planis solidum $F Q$, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda $B M$, $F Q$. Quoniã uero ductis rectis $L I$, $P N$, prismata $D B C I L A$, $H F G N P E$, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda $B M$, $F Q$, eorum dupla; & pyramides $A B C D$, $E F G H$, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. Cum igitur proportio parallelepipedum $B M$, ad parallelepipedum $F Q$, sit triplicata proportionis homologorum laterum $B C$, $F G$; erit quoque proportio pyramidis $A B C D$, ad pyramidem $E F G H$, proportionis $B C$, ad $F G$, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

24. undec.

15. quinti

11. quinti

33. undec.

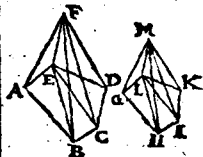
C O R O L L A R I U M.

Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

S I N T pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurius laterum $A B C D E$, $G H I K L$. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa $A B$, $G H$.

10. *sexti.*

G H. Nam si ex angulis B, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ B, E, C; L, H, I, diuisæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABB, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLI, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit ut FE, ad EA, ita M L, ad L G: Vt autem EA, ad EB, ita L G, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit; ut FE, ad EB, ita M L, ad L H. Rursus quia est ut EB, ad EA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et ut B A, ad BF, ita HG, ad H M, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula



9. *sexti.*

8. *duodec.*

ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita L H, ad H M; Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita M L, ad L H; & ut EB, ad BF, ita L H, ad H M; erit etiam ex æquo, ut FE, ad BF, ita M L, ad M H. Quare æquiangula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH: Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defn. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Itæ CDEF, IKLM. Quapropter, ut demonstratū est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatâ proportionē habebunt laterū homologorū A B, B C, C D, ad G H, H I, I K, singulorū ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unā & eandē proportionē, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque; pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandēque proportionē, triplicatâ scilicet illius; Atque idcirco erit, ut una pyramis ABEF, ad unā pyramidem GHLM, ita oēs pyramides nempe pyramis ABCDEF, ad oēs pyramides, nimirū ad pyramidē GHIKLM. Quam ob rē, cū pyramis ABEF, ad pyramidē GHLM, habeat triplicatâ proportionē homologorū laterū AB, GH; habebit quoque; pyramis ABCDEF, ad pyramidē GHIKLM, triplicatâ proportionē eorundē laterū homologorū AB, GH. Quod est propositū.

12. *quinti.*

8. *duodec.*

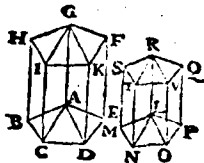
S C H O L I O N.

EAD E M ratione, prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sins enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO, erunt, ut de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ

20. *sexti.*

rectæ

recta $GI, GK; RT, RV$, erunt triangula GHI, IKG, KFG , & triangulis RST, TRV, VQR , & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam uero, ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS , similia sunt; erit ut IC , ad CB , ita TN , ad NM : Ut autem CB , ad CA , ita quodque est NM , ad NL , ob similitudinem triangulorum BCA, MNL . Igitur ex aequo erit ut IC , ad CA , ita TN , ad NL .



Rursus quoniam angulus solidus N , equalis est solido angulo C , ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus MNO , angulo BCD , & angulus TNM , angulo ICB , & angulus TNO , angulo ICD : Conuenit autem & recta NL , recta CA , eo quod anguli MNI, BCA , sint aequales. Igitur anguli ICA, TNL , aequales sunt; Ac propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma CG, NR , similia. Atque & parallelogramma CH, HA , parallelogrammis NS, SL ; & triangula ABC, GHI , triangulis LMN, RST , similia sunt. Igitur prismata $ABCIGH, LMNTRS$, similia sunt, ex definit. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata $CDAGIK, NOLRTV$; nec non prismata $AEDKGF, LPOVRQ$. Quapropter prismata $ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF$, ad prismata $LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ$, pta, quae demonstrauimus ad propos. 3. lib. 11. triplicatam habere proportionem, singula ad singula, laterum homologorum BC, CD, DE , ad MN, NO, OP , singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata $ABCDEFGH, LMNOPQRSTV$, proportionem habere homologorum laterum BC, MN , triplicatam, quo paulo ante vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

Ex quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, et numero aequales, et homologas totis. Hoc. n. manifestum est ex demonstratione praecedentis coroll.

Eodem modo inferri, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero aequalia, et homologa totis. Ut apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR.

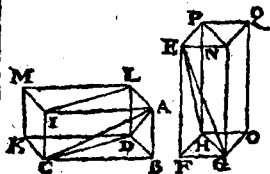
7.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

AEQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, ut in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum duplia, æqualia quoque erunt. Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit ut basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: Vt autem basis BI, ad basin FN, ita est triangulum ABC, ad triangulū EFG. Igitur erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eadem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

SINT iam bases & altitudines reciprocae. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, ut prius, cum sit ut ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eadem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum



34. undec.

15. quinti

15. quinti

pipedorum

pipedorū & altitudines eorundem reciproæ; Ac propterea inter se equalia erunt parallelepipedum $B M, F Q$. Quare & prismata $D B C I L A, H F G N P E$, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertius partes, æquales erunt. A Equalium igitur pyramidū, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

34. undec.

S C H O L I O N.

E A D B M ratione A Equalium pyramidum, quarum bases sunt triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem $A B C D$, basim habeas triangularem; at uero $E F G H I$, non triangularem. Fiat basi non triangulati $E F G H$, æquale triangulū $K L M$. Quod quidem fiet, si basim multilamam renocetur ad parallelogrammum, per propof. 43. lib. 1. Nam hoc parallelogrammū facile ad triangulum reduce-



zur, per ea, quæ demonstravimus ad propof. 42. lib. 1. Deinde super $K L M$, fiat pyramis $K L M N$, eiusdem altitudinis cum pyramide $E F G H I$. Quoniam ergo pyramides $E F G H I$, $K L M N$, æquales habent bases, & eandem altitudinem, ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propof. 6. huius lib. ostendimus. Ponitur autem pyramis $E F G H I$, æqualis pyramidi $A B C D$. Igitur & pyramis $K L M N$, pyramidi $A B C D$, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides $A B C D$, $K L M N$, bases triangulares, erit ut basis $A B C$, ad basim $K L M$, hoc est, ad huius æqualem basim $E F G H$, ita altitudo pyramidis $K L M N$, hoc est, altitudo pyramidis $E F G H$, (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) ad altitudinem pyramidis $A B C D$. Ac proinde pyramidum $A B C D$, $E F G H I$, equalium bases & altitudines reciprocantur.

35. duodec.

S E D reciprocantur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo, cum basi $K L M$, æqualis sit basi $E F G H$, & alti-

Z

tudo

9. duodec.



tudo pyramidis $KLMN$, eadem qua pyramidis $EFGHI$; ponatur autem esse ut ABC , ad $EFGH$, ita altitudo pyramidis $EFGHI$, ad pyramidis $ABCD$, altitudinem; erit quoque ut basis ABC , ad basin KLM , ita altitudo pyramidis $KLMN$, ad altitudinem pyramidis $ABCD$. Quamobrem aequales sunt pyramides $ABCD$, $KLMN$. Cum ergo pyramis $KLMN$, equalis sit pyramidi $EFGHI$, per ea, qua ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis $ABCD$, pyramidi $EFGHI$, equalis. Quod est propositum.

S I N T secundo pyramides aequales $ABCDE$, $FGHIKL$, quarum bases sint in utringula. Fias rursus triangulum MNO , aequale basi $ABCD$, & pyramis $MNOP$, eiusdem altitudinis cum pyramide $ABCDE$: Eritque ex scholio propos. 6. huius lib. pyramis $MNOP$, equalis pyramidi $ABCDE$. Sed hac ad



qualis ponit pyramidi $FGHIKL$. Igitur & pyramis $MNOP$, equalis est pyramidi $FGHIKL$. Quare, ut nunc demonstravimus, erit ut basis MNO , hoc est, basis $ABCD$, sibi equalis, ad basin $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinem pyramidis $MNOP$, hoc est, ad altitudinem pyramidis $ABCDE$; (ponuntur enim hae altitudines aequales.) At propterea pyramidum aequalium $ABCDE$, $FGHIKL$, bases & altitudines reciprocae sunt.

S I D reciprocetur iam bases harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse aequales. Constituta enim eodem modo figura, cum basis MNO , equalis sit basi $ABCD$, & altitudo pyramidis $MNOP$, eadem qua pyramidis $ABCDE$; ponatur autem ut $ABCD$, ad $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinem pyramidis $ABCDE$; Erit quoque ut MNO , ad $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinem pyramidis $MNOP$. Quare ut ante ostendimus, aequales erunt pyramides $MNOP$, $FGHIKL$. Est autem pyramis $MNOP$, pyramidi $ABCDE$, equalis, ex scholio propos. 6. huius lib. Igitur & pyramis $ABCDE$, pyramidi $FGHIKL$, equalis erit. Quod est propositum.

O M N I A haec facile quoque demonstrabuntur convenire prisma- tis quibuscumque. Nam si prismata fuerint aequalia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinis cum ipsis, & super eisdem basibus aequales;

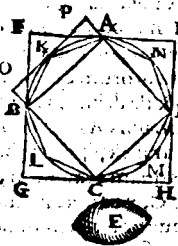
æquales, cū sint eorū tertie partes, ex coroll. propos. 7. huius libri. Vel certe dua tertie, si nimirū prismatū bases fuerint parallelograma, & eorū vertices, linea recta, ut in scholijs eisdē propos. ostensum est. Quare, ut modo demonstramus, bases harū pyramidū atq; altitudines reciprocantur. Cū ergo hæc bases & altitudines eadem sint quæ prismatū reciprocantur, quoque bases prismatū atque altitudines.

R. v. r. s. v. s., s. prismatū bases, & altitudines reciprocantur, reciprocantur quoque bases, & altitudines pyramidū eisdē bases & altitudines cum prismatū habentium. Quare, ut demonstratū est, pyramides æquales sunt. Ac propterea prismata, cum earum sint tripla, vel certe sesquialtera, æqualia quoque sunt. Quod est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus basin eandē circulū ABCD, & altitudinē eandē. Dico conū cylindri esse tertiā partē. Si in conus nō credatur esse tertia pars cylindri, nō erit cylindrus coni triplus, sed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primū maior quā tripl' coni, magnitudine E, ita ut cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribebat in circulo quadratū ABCD, & circa eundē, quadratū FGHI, intelligaturq; super hæc quadrata sub altitudinē coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda: Quoniam igitur quadratū ABCD, dimidiū est quadrati FGHI, ut ad propos. 9.



lib. 4. ostendimus, estque ut basis ad basin, ita parallelepipedū ad parallelepipedū eiusdē altitudinis; Erit & parallelepipedū basis ABCD, dimidiū parallelepipedī basis FGHI; Ac proinde parallelepipedū basis ABCD, mai' erit, q̃ dimidiū cylindri, cuius

9.

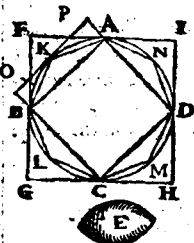
32. undec.

cuius basis circulus ABCD Secetur bifaria peripheria A B, BG, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, ut ad propof. 27 lib. 3. ostendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intel

ligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulū AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP, erit quoque prisma basis AKB, dimidium prismatis, seu parallelepipedum basis ABOP: cum sit prisma ad prisma, ut basis ad basin, quemadmodum ad propof. 7. huius lib. demonstrauius; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit, quam dimidium segmenti cylindri, cuius

basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangu-
la BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheria AK, KB, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cylindro, cuius basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum basis ABCD; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium AK, BLC, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excoillus cylindri supra triplum coni: Sint ita segmenta cylindri reliqua basium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus equalis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul. Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex tri-
plo

41. primi.



1. decimi.

pro cono una cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis; erit reliquum prisma basis multangulæ A K B L C M D N, eandem habens altitudinē cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum cono; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propof. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo cono.

Sic secundo cylindrus minor triplo cono, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita ut conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratum F G H I; intelliganturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine cono & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I, ut ad propof. 9. lib. 4. demonstrauimus; estq; ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio cono, cuius basis circulus A B C D. Secetur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiungantq; rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O B, tangens circulum in K, quæ parallæla erit ipsi A B, ut ad propof. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A K B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine cono & cylindri. Quia ergo triangulum A K B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoque pyramis super basin A K B, dimidium pyramidis super basin A B O P, cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin A K B, maior erit dimidio segmenti cono, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum cono, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæc pyramides simul maiores sunt, quam di-

6. duodec.

41. primi.

6. duodec.

2. decimi.

media omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheria: $A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A$, secantur bifariam; & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constanter eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro; quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cono, cuius basis circulus $A B C D$, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin $A B C D$, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus $A B C D$; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium $A K B, B L C, C M D, D N A$; atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E , excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni selecta basium $A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A$, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta), simul sumpta minora, quam E . Cum igitur conus æqualis ponatur tertie parti cylindri, & magnitudini E , simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta; & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine E , ipsa magnitudo E , quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum $A K B L C M D N$, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro; maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro: Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dictæ pyramide, eandemq; altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in corollario propositionis septimæ huius libri a nobis est demonstratum; erit huiusmodi prisma maius cylindro; pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propterea quod conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem eum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem.

Quod erat demon-

strandum.

SCHOLIUM.

QVAMVIS propositio hac solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis convenit, ut perspicuum est eius demonstratione diligenter insuensi. Itaque propositio uniuerse ita proponi poterit.

OMNIS conus, siue rectus, siue scalenus, tertius pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis conici & cylindri.

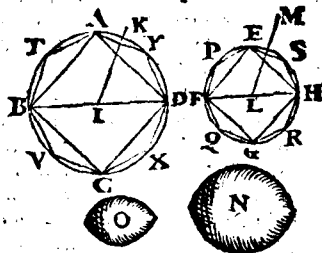
THEOR. 11. PROPOS. 11.

11.

SUB eadem altitudine existentes conici & cylindri, inter se sunt, ut bases.

SINT sub eadem altitudine conici & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, altitudines uero æquales I K, L M.

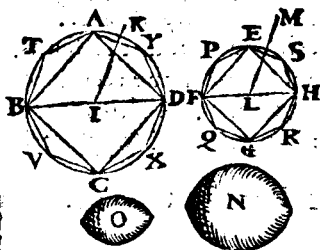
Dico ut est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non crederetur, sit ut basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ uel maior



erit, uel minor cono EFGHM. Si enim esset æqualis, haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conum, ut basis ad basim: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribe in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidaturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basim EFGH,

7. quinti.

x. decimi.



quam O, excessus con-
ni EFGHM, super N.
Sint ergo iam segmen-
ta conis relictā basium
BP, PF, FQ, &c.
(quæ quidem bases
sunt circuli segmenta)
simul sumpta, mino-
ra quam O. Cum igitur
conus EFGHM,

gnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta
conis segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ præ-
dicti conis segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius
basis polygonum EPFQGRHS, eiusdem altitudinis cum
conis, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscrubatur in
circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygo-
no EPFQGRHS, ut in propof. 2. huius lib. docuimus, da-
canturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur,
per coroll. propof. 2. huius lib. est ut circulus ABCD, ad
circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad poly-
gonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad cir-
culum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudi-
nem N; & ut polygonum ad polygonum, ita est pyramis
ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque
ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQ-
GRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis
ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars totæ, erit
& pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Ofsensa au-
tem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor
est magnitudo N, cono EFGHM.

6. duodec.

S i t secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur
ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus
ABCDK, ad N; Erit & conuerfendo ut circulus EFGH,
ad c

ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM, maior quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Oñsum enim estiam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM; Sed neque minor est ostensa; Aequalis igitur est. Quapropter cum ponatur, ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Sit autem, ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

Q U O N I A M autem, ut conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni EFGHM) Erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo usi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases. Quid erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

P E R S P I C I V N T quoque est, hanc propositionem, quam Euclides sentit, & cylindris solis rectis proposuit, ob rationem superius traditam; extendit etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, ut eius demonstratio manifesta indicat, ita ut propositio minor se proponatur in hunc modum.

S V B eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

Co n.

14. quinti.

7. quinti.

15. quinti.

CONVERTETUR. *hæc propositio quoq; hoc modo.*

Si coni & cylindri inter se sint, ut bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

Q V O D quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

C O R O L L A R I U M.

Hic fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, uel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, uel scaleni, siue unus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habeant, quam bases, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

Item sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, uel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter ac conuersum propos. 32. lib. 11. demonstratum fuit.

10.

T H E O R. 12. P R O P O S. 12.

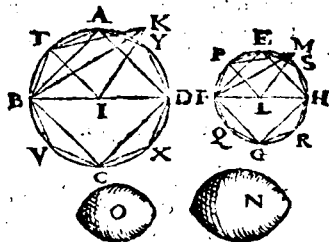
SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

SINT similes coni, & cylindri, quorum bases circuli $A B C D$, $E F G H$, axes uero $I K$, $L M$, & diametri basium $B D$, $F H$. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus $A B C D K$, ad aliquam magnitudinem N , proportionem triplicatam diametri $B D$, ad diametrum $F H$. Eritque N , uel minor, uel maior cono $E F G H M$. Si enim esset æqualis, haberet conus $A B C D K$, ad conum $E F G H M$, & ad N , proportionem eandem; Ac proinde proportio coni $A B C D K$, ad conum $E F G H M$, esset quoque triplicata proportionis diametri $B D$, ad diametrum $F H$; quod non conceditur. Sit ergo primum N minor, quam conus $E F G H M$, magnitudine O ; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita ut rursus pyramis $E P F Q G R H S M$, maior ostendatur, quam N . Ducantur deinde rectæ $K B$, $K T$; $M F$, $M P$ ut habeantur duo trian-

7. quinti.

gula

gula B K T, F M P, pyramidum A T B V C X D Y K,
E P F Q G R H S M,
& cōnectantur re-
ctæ T I, P L. Quo-
niam igitur coni
A B C D K, E F-
G H M, similes
ponuntur, erit,
ex 24. definitiōibz.
ut diameter B D,
ad diametru F H,
ac propterea ut se-
midiameter B I, ad semidiametru FL, ita axis I K, ad axem



LM; Ac permittendo ut B I, ad I K, ita F L, ad L M. Cū igitur anguli B I K, F L M, recti sint, ex defin. 3. lib. 1. quod coni recti ponantur, propterea q; axes recti ad eorum bases; Erunt triangula B I K, F L M, æuiangula; Ac propterea ut K B, ad B I, ita M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita F L, ad F P; ob similitudinem triangulorum B I T, F L P (Cum enim anguli B I T, F L P, insistentes similibus arcibus B T, F P, sint æquales, ut in scholio propos. 3. lib. 6. ostensum est; Itaque B I, ad I T, ita F L, ad L P, ob æqualitatē tā linearū B I, I T, quam F L, L P; erunt triangula B I T, F L P, similia.) Igitur ex æquo, ut K B, ad B T, ita M F, ad F P. Rursus quia latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia sūt lateribus F L, L T, trianguli F L T, & anguli dictis lateribus cōprehēsi, recti, ex defin. 3. lib. 1. cū axis I K, rectus ponatur ad circulu A B C D, erunt bases K B, K T, æquales. Eodem modo æqualia erunt rectæ M F, M P; Ac propterea rectæ K B, K T, rectis M F, M P, proportionales erūt, cū utrobiz sit proportio æqualitatis. Quoniam uero, ut K B, ad B T, ita K T, ad cande B T, ita ut M F, ad F P, ita M P, ad cande F P: Erat autē ut K B, ad B T, ita M F, ad F P; Erit quoque ut K T, ad B T, ita M P, ad F P; Et cōuertēdo ut B T, ad T K, ita F P, ad P M. Quare cū sit ut T K, ad K B, ita P M, ad M F; & ut K B, ad B T, ita M F, ad F P; Et ut B T, ad T K, ita F P, ad P M, uelut ostēdū est, habebūt triangula B K T, F M P, latera proportionalia, ideoque æquiangula erūt; Ac pinde similia, ex definitione. Non aliter ostendatur reliqua triangula ambiēcia pyramides

A T.

15. quinti.

6. sexti.

4. sexti.

6. sexti.

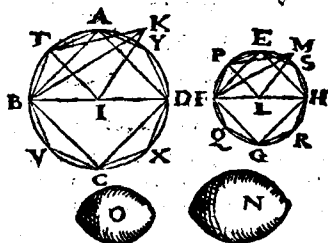
4. primi.

7. quinti.

5. sexti.

ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudinē æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportionē erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propof. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum B I T, F L P; Et ut BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habe-

15. quinti.



bit quoque proportionem triplicatā diametrorū BD, FH. Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Erit ergo ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyra-

midem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. ostensa autē est & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

14. quinti.

S i t secundo N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidē EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime ostendimus: Erit ut conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidē EPFQGRHSM; & conuertendo ut N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidē ATBVCXDYK. Quare cum pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidē ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc est, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoque N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, propor-

proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM; erit quoque conus ABCDK, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor est ostensa. Aequalis igitur est; ac promde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad conum EMGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportionem diametrorum BD, & FH; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportionem triplicata.

14. quinti.

7. quinti.

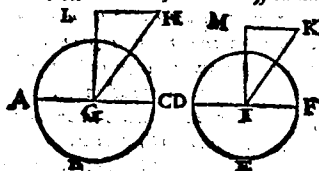
5. quinti.

Quoniam uero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli, habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata: Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quae in basibus. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

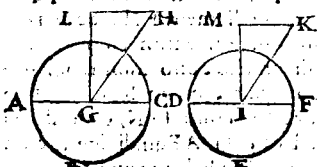
HABET propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes recti ad bases.

Quocirca eam huc ratione ostendimus in similibus conis & cylindris scalenis. Sine similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli



ABC, DEF, axes uero GH, IK, & diametri basium AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere

habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur super easdem bases duo coni, & cylindri recti eandem cum scalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducta-
tursq; per rectas GH, GL; item per IK, IM, plana secantia ba-



ses lineis, rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF, erunt & plana per GH, GL, & per IK, IM, ad eas-

18. undec.

38. undec.

37. primi.

29. primi.

4. sexti.

12. duodec.

7. quinti.

dem recta, & propterea perpendiculares linee ex H, K, ad bases demissa cadent in AC, DF, communes sectiones, & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur. Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 1. reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoque erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponantur esse eiusdem altitudinis rectis recta HL, per axium utruque ducta ipsa AC, parallela, idcirco angulus L, rectus; Eodemq; argumen-
to rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum æterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, equiangula sunt; atq; idcirco erit ut GH, ad GL, ita IK, ad IM; & permutando, ut GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, & axis IK, ita & AC, diameter ad DF, diametrum, quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, ut diameter AC, ad DF, diametrum; Exproinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, similes erunt, ex definitione. Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero ita conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, cum eandem habeant basim, & altitudinē, quā conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) est æqualis, ut constat ex coroll. propo. 1. huius lib. Erit ut conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK; Ideoq; proportio coni & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, triplicata quoque erit diametri AC, ad diametrum DF. Quid est propo. 1.

THEOR.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

II.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrū, ita axis ad axem.

SECE TVR cylindrus ABCD, plano GH parallelo ad uersis planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico ut est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in utramq; partem, una cum eius axe, & rectangulo EC, ad cuius reuolutionē descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet; Sumaturq; in axe productio quotcūq; rectæ EK, KL, æquales ipsi EI; Itē quotcūq; rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, K; L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis E B, F C; quæ quidē ad reuolutionē rectanguli E C, describent circulos GH, PR, QS, Ta, VZ, XY, parallelos & æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumscribuntur.

Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componentes totum cylindrum S QXY. Quoniam uero tam cylindri SP, PA, AH, super bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, Ta, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex corollario propof. 1 r. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudi-



gnitudinis) æqualis quoque est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propos. 11. huius lib. liquet. Si æro



axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis I F, prima magnitudo ad axem I F, secundam magnitudinem, ut cylindrus A H, tertiæ magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersus planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ET 11. hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; samen eius demonstrationem cylindro scatenò facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri



scalenì, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita ut quemadmodum in conis rectis rectangulū circa quie

scen. locus circumferitur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, E A, &c. semper æquidistantes circa centra L, K, E, &c. una cum recta S Y, semidiametros coniungente; hac enim ratione semper cylindri describuntur, ut constat ex his, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

II.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SUPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt, ut altitudines.

SINT

Sunt superbases æquales AB, CD , duo conus ABE, CDE , & duo cylindri $ABGH, CDIK$, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipsi sunt altitudines) LE, MF . Dico esse conum ABE , ad conum CDE , & cylindrum $ABGH$, ad cylindrum $CDIK$, ut est altitudo LE , ad altitudinem MF . Extendatur enim cylindrus $ABGH$, ad partes GH , una cum eius axe LE , & rectangulo AB ; abscondaturque axis EN , æqualis axi MF , & circa centrum N , intelligatur circulus OP , æqualis & parallelus circulo GH , ut fiat cylindrus $GHOP$, eiusdem altitudinis cum cylindro $CDIK$. Quoniam igitur cylindri $H P, C I$, cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex conoll. propos. 11. huius lib. proptereaque cylindrus AG , ad ipsos eandem habet proportionem: Est autem cylindrus AG , ad cylindrum HP , ut axis, seu altitudo LE , ad axem seu altitudinem EN , hoc est, ad altitudinem MF , sibi æqualem. Igitur & cylindrus AG , ad cylindrum CI , erit quoque, ut altitudo LE , ad altitudinem MF .

Quia uero conus ABE, CDE , sunt tertie partes cylindrorum AG, CI ; ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE , ad conum CDE , ut altitudo LE , ad altitudinem MF . Super æqualibus igitur basibus existentes conus & cylindri, inter se sunt, ut altitudines. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

Hoc idem conveniunt conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint super bases æquales AB, CD , conus ABE, CDE , & cylindri $ABGH, CDIK$, scaleni, quorum altitudines LM, NO . Dico conum ABE , ad

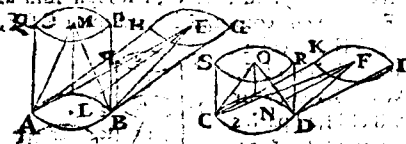


ad conum

7. quinq.
13. duodec.

10. duodec.
15. quinq.

conus CDF , & cylindrum $ABGH$ ad cylindrum $CDIK$,
esse, ut est altitudo LM , ad altitudinem NO . Super basin A &
construat. cy-



lindrus rectus
ABPQ, sub
altitudine LM ;
Item su-
per basin B ,
cylindrus re-

14. duodec.

ctus $CDRS$, sub altitudine NO . Quoniam igitur est cylin-
drus rectus $ABPQ$, ad cylindrum rectum $CDRS$, ut al-
titudo LM ad altitudinem NO . Est autem cylindrus $ABPQ$,
cylindrus $ABGH$; Item cylindrus $CDRS$, cylindrus $CDIK$,
equalis, ut est oib. propos. 11. hinc lib. Erit quoque cylindrus
 $ABGH$, ad cylindrum $CDIK$, ut altitudo LM , ad altitudi-
nem NO . Quod est propositum.

19. duodec.

15. quinti.

Quia ON & AM aequaliter conu, tum sunt tertiae partes cylin-
dorum, eundem habent proportionem, quam cylindri. Erit
quoque conus ABE , ad conum CDO , ut altitudo LM , ad altitu-
dinem NO . Quod tamen eodem argumento, quo vsi sumus in
cylindris, confirmari potest, ut perspicuum est, si super basas
 AB , CD , stant coni recti ABM , CDO , earundem altitudinum
erant cylindris $ABPQ$, $CDRS$.

Idem concludatur, quantum vnus conorum, & cylindro-
rum, nempe conus ABE , & cylindrus $ABGH$, fuerit scalenus,
alter vero, nimirum conus CDO , & cylindrus $CDRS$, rectus. Na
cu cylindrus scalenus $ABGH$, equalis sit cylindro recto $ABPQ$,
sit autem cylindrus rectus $ABPQ$, ad cylindrum rectum
 $CDRS$, ut altitudo LM , ad altitudinem NO , ut Euclides demō-
strauit: Erit quoque cylindrus scalenus $ABGH$, ad cylindrum re-
ctum $CDRS$, ut altitudo LM , ad altitudinem NO . Quod est
propositum.

15. quinti.

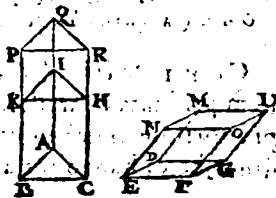
10. duodec.

Quoniam vero coni eandem habent proportionem, quam cy-
lindri, tum illi horum sunt tertiae partes: Erit etiā, conus scalenus
 ABE , ad conum rectum CDO , ut altitudo LM , ad altitudinem NO .
Quod nihilominus ostendatur eadem ratione, qua vsi sumus in cy-
lindris, ut manifestum est.

Eadem quoque haec propositio conuenit prismatis, parallele-
pipedis, & pyramidibus super aequales bases constructis. Sine n.

super

super bases aequales $ABC, DEFG$, prismata $ABCHIK, DEFG-$
 $LAINO$, & pyramides sub eisdem altitudinibus. Dico esse pris-
 ma ad prismata, & pyramidem ad
 pyramidem, ut est altitudo ad
 altitudinem. Sint namque in-
 sistentes lineae AI, CH, BK ,
 prismatis $ABCHIK$, ad basim
 ABC , perpendicularares, ita ut
 BK sit altitudo prismatis $AB-$
 $CHIK$; Productis autem rectis
 AI, CH, BK , sumantur $IQ,$



HR, KP , aequales altitudini prismatis EL , & ductis rectis
 PQ, QR, RP , compleatur prisma $HIKPQR$, eiusdem al-
 titudinis cum prismate $E L$. Eruntq; prismata $HIKPQR, EL$,
 cum habeant & bases, & altitudines aequales, inter se equalia,
 ex coroll. 2. propof. 7. huius lib. Ad propterea prismata $ABC-$
 $H I K$, ad utrunq; eandem habebit proportionem. Quia vero, ex
 scholio propof. 25. lib. 11. prisma $ABCHIK$, ad prismata $AIK-$
 PQR , est ut planum BI , ad planum KQ , & ut planum BI , ad
 planum KQ , ita est recta BK , ad KP ; Erit prisma $ABC-$
 $H I K$, ad prisma $HIKPQR$, hoc est, ad prisma $E L$, ut BK ,
 altitudo prismatis $ABCHIK$, ad KP , altitudinem prismatis
 $HIKPQR$; hoc est, prismatis $E L$. Quod est propofitum.

7. quinti

1. sexti.

Quod si insisteret lineae AI, CH, BK , non sint perpendicu-
 lares ad basim ABC , constituedum erit super basim ABC , aliud prisma,
 cuius insisteret sint perpendicularares ad basim, et aequales alti-
 tudini prismatis $ABCHIK$. Nam cum ex 2. coroll. propof. 7. huius
 lib. haec duo prismata eandem habentia altitudinem, & basim,
 sint equalia, siq; prisma constitutum ad prisma $E L$, ut illius al-
 titudo ad huius altitudinem, erit & prisma $ABCHIK$, ad pris-
 ma $E L$, ut altitudo illius, ad altitudinem huius.

15. quinti

Quoniam vero pyramides eandem habent proportionem cum
 prismatis, quod ille sine horum tertiae partes: Perspi-
 cuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, ut est al-
 titudo ad altitudinem.

Eadem propterea est ratio habenda de parallelepipedis,
 cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum,
 ut dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit
 accommodari.

H A B C omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatib; eandem habentibus basem.

O M N I A quoque haec facile converteri possunt hoc modo.

C O N I & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata; parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

N A M alijs pars æqualis feras toti, vt in conuerso, propos. 38. lib. 11. ostensum est.

12.

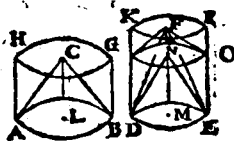
THEOR. 15. PROPOS. 15.

Æ Q V A L I V M conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

S I N T æquales coni **A B C**, **D E F**, & æquales cylindri **ABGH**, **DEIK**, quorum bases **AB**, **DE**; axes, altitudinesve **LC**, **MF**. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut **AB**, ad **DE**, ita **MF**, ad **LC**. In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines **LC**, **MF**, sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare erit ut basis **AB**, ad basin æqualem **DE**, ita altitudo **MF**, ad altitudinem æqualem **LC**. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocae.

Q U O D si altitudines **LC**, **MF**, inæquales fuerint, sit **MF**, maior, ex qua abscindatur **MN**, ipsi **LC**, æqualis; & per **N**, ducatur planum **ON**, basi **DE**, parallelum, ut in scholio propos. 15. lib. 11. docuimus, ut sint duo cylindri **ABGH**, **DE**.

DEIK, erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. Est autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita basis AB, ad basin DE, cum æquales sint altitudines: Itē ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint æquales, immo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc est, ad huc æqualem LC; Ac propterea reciproce sunt bases & altitudines.



IN conis uero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, cum coni sint cylindrorum tertiæ partes; Quare ut ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam consequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo usi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus MN, NF, constituantur duo coni, ut in figura.

Sed iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC, erunt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coll. propof. 1. huius lib.

Quod si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, ut prius. Quis igitur ponitur, ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huc æqualem MN; Est autem, ut basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: Item ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

7. quinti.

11. duodec.

14. duodec.

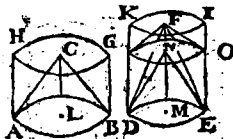
10. duodec.

11. duodec.

14. duodec.

9. quinti.

AT vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum



ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eadem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut ostensum fuit, cylindri, ideoque co-

ni, eorum tertie partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo, conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoque recti easdem cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propof. 11. huius lib. Quare ut ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, ut demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint recti æquales, ex coroll. propof. 11. huius lib. inter se quoque erunt æquales.

UTEM facile concludetur, licet unus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, ut perspicuum est ex q̃, quæ in scholio propof. 14. huius lib. decimus.

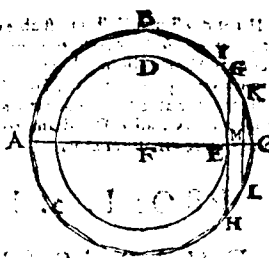
PROBL. I. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum

incri-

inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrū F, oporteatque in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero paria continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE in E, puncto, & per B, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tæget circulum DE, in E, ex coroll. propoſ. 6. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu CG, si ex AGC, auferatur dimidiū AB, & ex residuo BC, dimidiū BI, & ex residuo IC, dimidiū IK, & sic deinceps; relinquetur tandē minor arcus, quā CG. Sit igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subcendatur recta CK. Dico rectā CK, esse unum latus polygoni inscribiti. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrās AB, in totidē partes æquales diuidatur, in quō diuisus est quadrans BC; nec nō semicirculus AHC, in totidem partes, quot cōtinet semicirculus ABC; deinde omnibus arcibus rectæ lineæ subcendantur, quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK; æquales subcendant.



Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangens circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad A C, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt, erunt rectæ GH, KL, parallele. Quare cū recta GH, tangat circulum DE, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec unquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius a circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sunt lateri CK, ideoque æqualiter cum CK, a cen-

2. decimi.

29. tercij.

28. primi.

4. tertij.

tra F, distant, circulum D E, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. Quod erat faciendum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod est diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed totum extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea K L, quam ducatur ab extremo puncto K, lateris C K, cum diametro A C, convenientis, ad A C, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum D F.

14.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

D V A B V S sphaeris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaera solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphaerae superficiem.

S I N T duae sphaerae A B C D, E F G H, circa idem centrum I, oporteatque in maiori A B C D inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphaeram E F G H. Secentur ambae sphaerae plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factae in sphaeris plana A B C D, E F G H, quae circuli erunt, ex descriptione sphaerae, habentes idem centrum sphaerarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumvolutionem sphaerae describuntur, circumducti congruent sectionibus A B C D, E F G H. Quare dictae sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineae rectae cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt aequales, cum ducantur ex centro sphaerarum ad eorum superficiem, erunt ipsae sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri A C, B D, se se in centro I, secantes ad angulos rectos, ut sint quadrantes A B, B C, C D, D A, &c. Deinde in maiori circulo A B C D, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum E F G H. Quod quidem, ut

16. duodecim.

facilius

facilius omnia demonstrantur, in hanc modum efficiatur.
 Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G γ , ad circumferen-
 tiam usque circuli A B C D, quæ circumulum E F G H, tanget in
 G, ex eorū propos. 16. lib. 3. Et rectæ G γ , applicetur in
 circulo A B C D, recta æqualis A ϵ . Quia uero, si arcus
 C γ , intelligatur subtendens recta, ut fiat triangulum G C γ ,
 latus C γ , oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est
 latere G γ , quod minori angulo opponitur, minime acuto;
 erit quoque recta C γ , maior recta A ϵ ; ac proinde arcus
 C γ , arcu A ϵ , maior erit, ut constat ex scholio propos. 2.
 lib. 3. Abcindatur ergo arcus C δ , arcui A ϵ , æqualis. Quod
 si ex quadrata C D, dimidium auferatur D L, & ex reliquo
 C L, dimidium L K, & sic deinceps; relinquetur tandem ar-
 cus minor arcu C δ , seu arcu A ϵ . Sit ergo iam arcus C K,
 minor; Eritque recta C K, subtenfa minor quam recta A ϵ ,
 hoc est, quam G γ , ex scholio propos. 19. lib. 3. Dico igitur,
 rectam C K, esse unum latus polygoni æquilateri inscri-
 bendi. Nam cum recta subtendens arcum C γ , minorem ar-
 cu C γ , non tangat circumulum E F G H, ut ex demonstratione
 præcedentis propos. patet, multo minus recta C K, subten-
 dens arcum maiorem arcu C δ , eundem circumulum tanget.
 Rursus ducta diametro K N, erigatur ex centro I, ad plana
 circumulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occur-
 rens superficiesi sphaeræ maioris in O; Et per rectas O I, A C,
 & O I, K N, plana ducantur, quæ ad circumulos A B C D,
 recta erunt, efficientique communes sectiones, circulos, ut
 iam dictum est, quorum semicirculi sint A O C, N O K. Quia
 uero anguli O I C, O I K, recti sunt, ex defin. 3. lib. 1, qua-
 drantes erunt O C, O K; atque adeo, cum circuli A B C D,
 A O C, N O K, æquales sint, quod eorum diametri sint de
 sphaeræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes C D,
 O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes equa-
 les distribuatur, in quot diuisus fuit arcus C L; Et quadran-
 tes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales ar-
 cubus quadrantis C D; Erunt rectæ his omnibus arcubus
 æqualibus subtenfæ, nimirum C K, K L, L M, M D, C P,
 P Q, Q R, R O, K S, S T, T V, V O, æquales. Coniun-
 ctis autem rectis PS, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad
 planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, quæ in
 commu-

1. quærit.

19. primi 8

1. decimi.

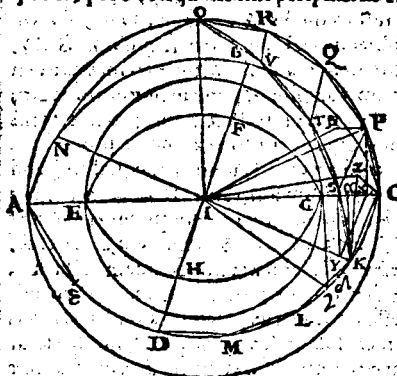
12. undec.

18. undec.

19. tercij.

38. & 6
undec.
27. tertij.

comunes sectiones AC, NK, cadet, eruntq; inter se parallelę.
Quoniam igitur triangulorū PCX, SKY, anguli PCX,
SKY, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. & anguli PCX, SKY,
ęuales, quod & ęuales sint peripharię AOP, NOS, qui-



bus inscribuntur;
(Nam si ex
semicirculis
AOC, NO-
K, ęualibus
demantur ar-
cus ęuales
CP, KS, reli-
qui arcus A-
OP, NOS,
ęuales quo-
que erunt.)
Erunt duo an-
guli PCX,
PXC, triangu-

26. primi.
33. primi
2. sexti.

li PCX, ęuales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY.
Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, ęqua-
lia. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK,
ęqualia erunt. Quare eum rectę PX, SY, ęuales sint & pa-
rallę; si connectatur recta XY; ęuales quoque erunt &
parallę PS, XY. At quia & rectę CK, XY, parallę sunt,
quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex
semidiametris IC, IK, ęqualibus demantur ęuales rectę
CX, KY, relinquentur & IX, IY, ęuales; Ac proinde erit, ut
IX, ad XC, ita IY, ad YK.) Erunt parallę quoque PS, CK,
inter se, cum utraq; parallę sit ipsi XY, ideoque eas coniun-
gentes rectę CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent.
Totū igitur quadrilaterū CKSP, in uno erit plano. Quod
si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, per-
pendiculares, & connectantur rectę QC, TK, ostendemus
similiter GK, QT, esse parallę; atq; adeo ipsas PS, QT,
inter se parallę esse, cū eidē CK, sint parallę; totumque
quadrilaterū PSTQ, in uno esse plano. Eadem ratione
in uno erit plano quadrilaterū QTVR: Est autē & trian-
gulum RVO, in uno plano. Si igitur eadem constructio exhibetur

9. undec.
7. undec.
2. undec.

beatur

beatit super reliqua latera KL, LM, M D, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis. ac reliquo hemisphærio; ut tota sphaera maior repleatur quadrilateralis, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes O C, O K, super latus CK, constructis; inscriptum erit in sphaera maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateralis, atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphaeram minorem E F G H.

Ducatur ex I, ad planum CKSP, perpendicularis I Z, connectanturque rectæ ZC, ZK. Quoniam igitur, ex definit. 3. lib. 4. anguli I Z C, I Z K, recti sunt; erit quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, ZC, & quadratum rectæ I K, quadratis rectarum I Z, Z K, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium I C, I K, æqualia sint; erunt & quadrata rectarum I Z, ZC, quadratis rectarum I Z, Z K, æqualia; Ac proinde dempto cōmuni quadrato I Z, reliqua quadrata rectarum ZC, Z K, æqualia erunt, ideoque, & ipsæ rectæ Z C, Z K, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad P, S, ducuntur, æquales esse & inter se, & rectis Z C, Z K; Quare circulus ex Z, ad intervallum Z C, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera P S T Q, Q T V R, & triangulum R V O, circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam vero, ut postea ostendemus, angulus C Z K, obtusus est; erit quadratum rectæ C K, maius quadratis rectarum Z C, Z K; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ C K, duplo quadrati rectæ Z C.

Ducatur ex K, ad rectam A C, perpendicularis K a. Cum igitur A C, dupla sit ipsius A I & A a, maior sit, quam A I, erit A C, minor duplo ipsius A a. Quam ob rem cum sit, ut A C, ad A a, ita rectangulum sub A C, a C, ad rectangulum sub A a, a C, quod bases horum rectangulorum sint A C, A a, & eadem altitudo a C; erit, quoque rectangulum sub A C, a C, minus duplo rectanguli sub A a, a C. Est autem rectangulum sub A C, a C, æquale quadrato rectæ C K; & rectangulum sub A a, a C, æquale quadrato rectæ K a; quod rectæ C K, inter A C, a C, sit media proportionalis; & recta K a, inter A a, a C, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta A K, fieret triangulum rectangulum

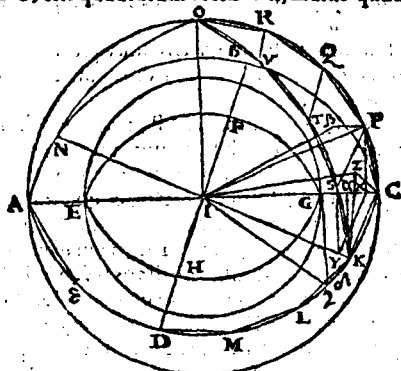
47. primi.

12. secundo

1. sexti.

7. sexti.

17. primi.



Quoniam uero quadratum rectae IC, & quale est quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectae IK, quadratis rectarum Ia, aK. Suntque equalia quadrata rectarum equalium IC, IK; Erunt

& quadrata rectarum IZ, ZC, equalia quadratis rectarum Ia, aK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectae aK; & ex illis minus, uidelicet rectae ZC, erit reliquum quadratum rectae IZ, maius quadrato reliquae rectae Ia; ideoque recta IZ, maior quam recta Ia. Quapropter cum punctum a, non tangat sphaeram minorem EFGH, quod per coroll. propos. precedentis recta Ka, tota sit extra dictam sphaeram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphaeram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius absint a sphaera EFGH, quam punctum Z, ut mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sphaeram EFGH.

19. primi.

Sed & expeditius ex ipsa fere constructione figurae ostendemus, planum CKSP, non tangere sphaeram minorem EFGH, si prius ducatur recta Iy, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam CK, minorem esse recta Gy; Est autem CK, maior, quam ZC, quod angulus CZK, obtusus sit, ut mox demonstrabitur; Multo maiorem Gy, quam ZC; Ac proinde quadratum rectae Gy, maius quadrato rectae ZC. Quia uero quadratum rectae

Iy,

I γ , æquale est quadratis rectarum I G, G γ ; & quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C; sunt autem quadrata rectarum I γ , I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ , quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempto ergo illic quadrato rectæ G γ , & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quam ob rem, cum I G, sit sphaeræ minoris E F G H, semidiameter; exisset punctum Z, extra eandem sphaeram; Et proinde, ut prius, planum C K S P, sphaeram E F G H, nequaquam continget.

47. primi

D V C A T V R. rursus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis I β , eritque β , centrum circuli circa P S T Q, descripti, ut demonstratum est: Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus sit, ex 3. defin. lib. 1. erit quadratum rectæ I β , æquale quadratis rectarum I β , β P. Quia uero & quadratum rectæ I C, (quod æquale est quadrato rectæ I P, ob æqualitatem rectarum I C, I P) æquale est quadratis rectarum I Z, Z C, erunt quadrata rectarum I β , β P, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia: est uero quadratum rectæ Z C, maius quadrato rectæ β P, quod & linea Z C, maior sit, quæ linea β P, ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ I β , reliquo quadrato rectæ I Z, maius est; ideoque & linea I β , maior quam linea I Z. Ac proinde multo magis punctum β , extra sphaeram E F G H, exisset, quam punctum Z, proptereaque multo minus planum P S T Q, quam C K S P, tanget sphaeram minorem E F G H. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphaeram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphaeris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaera solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minorem sphaeræ superficiem. Quod erat faciendum.

47. primi.

C O R O L L A R I V M.

Ex ijs, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum simile predicto solido polyedro, proportionem polyedri in una sphaera ad polyedrum in altera sphaera esse triplicatam eius, quam habent sphaerarum diametri. Nam si ex centris sphaerarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distabuntur polyedra

in

12. quinti

in pyramides numerum aequales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphaerarum; ut constat, si intelligatur haec sphaerarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo linee rectae ductae a eocentris ad basium angulas, ob similitudinem basium; Ac propterea pyramides efficiuntur similes. Quare cum singulae pyramides in una sphaera ad singulas pyramides illis similes in altera sphaera habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphaerarum, ut constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem, ita omnes pyramides, id est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, hoc est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum. Haec habet quoque polyedrum unius sphaerae ad polyedrum alterius sphaerae proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphaerarum, cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

15. quinti

S C H O L I O N.

Q U O N I A M vero non minus longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerant, ut vera, quae antea nondum sunt demonstrata; idcirco ea sunt transmissa, ut nobis lateret demonstranda.

P R I M O itaque ostendendum est, angulum $\angle ZK$, in quadrilatero $CKSP$, esse obtusum. Quod ut omnimodis fiat, describatur circa dictam quadrilaterum circa Z , circulus, quoniam



14. quinti

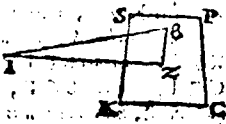
igitur in figura superiori, est ut IK , ad EC , ita IT , ad TX , (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis ICK , ITX similia sunt.) Est autem IK , maior quam IT ; erit igitur EC , maior quam TX . Cum igitur TX , aequalis sit ostensa ipsi SP , erit quoque EC , maior quam SP ; Ac propterea arcus CK , maior erit arcu SP , ex scholio propos. 28. lib.

28. tertij.

3. Quare cum arcus CP , KS , arcu CK , sint aequales, quod & lineae CP , KS , ipsi CK , lineae sint aequales demonstratae; (subiendum enim arcibus circularum aequalibus; ut ex constructione figura superioris constat) erunt quoque arcus CP , KS , arcu PS , maiores; Ac idcirco quilibet arcuum CK , CP , KS , quadrantes circuli $CKSP$, excedet; atque adeo angulus $\angle ZK$, obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subendatur quadrans circuli, ut perspicuum est ex coroll. 2. ultima propos. lib. 6.

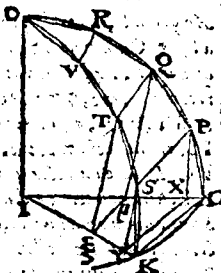
S E C U N D O demonstrandum est; omnia alia puncta quadrat

quadrilateri $CKSP$; longius a centro I , abesse, quam punctum Z : Sumatur enim quodcumque aliud punctum θ , in quadrilatero $CKSP$, & adiungatur recta $I\theta$, & $Z\theta$. Quoniam ergo angulus $IZ\theta$, rectus est, ex defn. 3. lib. 11. Eris. latus illi oppositum $I\theta$, maius latere IZ , quod minus angulo $I\theta Z$, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ , longius a centro I , distat, quam punctum Z . Simili argumentis concidemus omnia alia puncta longius distare.



19. primi.

$T \equiv R, T, O$, ac ultimo probandum est, rectam ZC , maiorem esse recta βP . Quod ut aptius fiat, demon. randum prius erit, rectam PS , maiorem esse recta QT . Describatur igitur pars superior figure, ea videlicet, qua continetur semicirculis IC, IO , & quadratis IB, OC , OK, OQ . Describantur deinde ex Q , & T , ad plerumque circuli $ABGD$, in quo est triangulum CKK , perpendicularares QT, TT' , quae in communibus sectionibus IC, IK , cadunt; eruntque inter se se parallelae, ut de rectis PK, ST dictum est. Quod si adiungatur recta μE , erunt $QT, \mu E$, parallelae & aequales; quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & aequales PS, XT . Quia vero μE , ipsi GK , parallela est, quod latera IC, IK , proportionaliter sint secta in μ, E , reliqui diximus de rectis X, X' erit quoque $\mu E, XT$, parallelae. Quare erit, ex coroll. propof. 4. lib. 6. ut $IT, ad TX$, ita $IE, ad E\mu$: est autem IT, Y , maior quam IE , igitur & TX , maior erit quam $E\mu$; Ac proinde & PS , quae aequalis est ipsi XT , maior erit quam QT , quae aequalis est ipsi $E\mu$.



38. undec. 6. undec.

2. sexti. 20. primi.

Hoc ergo demonstrato, describantur ex centro Z, β , circuli quadrilatera $CKSP, PSTQ$; circuli, egressi utique & concentrici rectis $ZC, ZK, ZS, ZP, \beta P, \beta S, \beta T, \beta Q$. Si igitur ZC , non cedat maiori, quam βP , erit vel aequalis, vel minor. Sit

primum

25. primi.

8. primi.

2. sexti.

14. quinti.

15.

primum aequalis. Quia ergo latera ZK, ZC , aequalia ponuntur lateribus $\beta S, \beta P$; & basis KC , maior est basi PS ; erit angulus KZC , maior angulo βP : Eadem ratione maior erit angulus SZP , angulo $T\beta Q$. At quoniam bases KS, CP , basibus ST, PQ , sunt aequales; erunt anguli KZS, CZP ; anguli $S\beta T, P\beta Q$, aequales. Igitur quatuor anguli ad Z , maiores erunt quatuor angulis ad β : Sunt autem & aequales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint aequales, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur aequalis est recta ZC , rectae βP .

$S\beta T$ secundo ZC minor, quam βP . Et abscindantur $\beta \pi, \beta \rho, \beta \omega, \beta \phi$, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP , aequales, connectanturq; rectae $\pi \rho, \rho \omega, \omega \phi, \phi \pi$, quae parallela erunt rectis PS, ST, TQ, QP , eo quod rectae ex eisdem sectis sint proportionales.

Ac proinde, ex coroll. propof. 4. lib. 6. erit ut βS , ad SP , ita $\beta \pi$, ad $\rho \pi$. Cum ergo βS maior sit, quam βP , erit & SP , maior quam $\rho \pi$. Eademq; ratione maiores erunt ST, TQ, QP , rectis $\rho \omega, \omega \phi, \phi \pi$; Ac propterea cum PS , minor sit, quam CK , & ST, PQ , aequales rectis KS, CP ; & TQ , minor quam PS , erunt rectae $\pi \rho, \rho \omega, \omega \phi, \phi \pi$, minores rectis CK, KS, SP, PC . Quare, cum recta $\beta \pi, \beta \rho, \beta \omega, \beta \phi$, rectis ZC, ZK, ZS, ZP , sint aequales; erunt anguli ad Z , maiores angulis ad β : Sunt autem & aequales, quod tam illi, quam hi sunt quatuor rectis aequales ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC , quam βP : Sed neque aequalis est ostensa. Maior igitur est. Quod erat ostendendum.

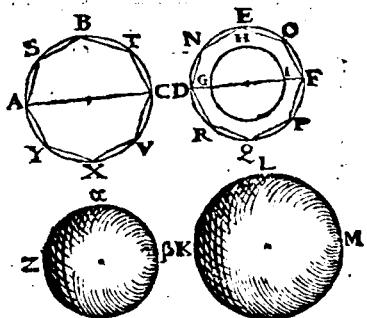
THEOR. 16. PROPOS. 18.

SPHAERAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

Sint dum sphaerae ABC, DEF , quarum diametri $A C, D F$. Dico sphaeram ABC , ad sphaeram DEF , habere proportionem triplicatam diametri $A C$, ad diametrum $D F$. Si enim hoc non concedatur, habebit sphaera $A B C$, ad aliam

aliā sphaeram GHI , minorem, vel KLM , maiorem quam DEF , triplicatā proportionem diametri AC , ad diametrū DF . Habeat primum sphaera ABC , ad sphaeram GHI , minorem sphaera DEF ,

proportionem triplicatā diametri AC , ad diametrū DF ; intelligaturq; sphaera GHI , concentrica sphaerae DEF . Inscribatur in sphaera maiori DEF , polyedrum $DNEOFFQR$, non tangens minorem sphaeram GHI ; Atq; huic



simile polyedrum $ASBTCVXY$, inscribatur in sphaera ABC . Quoniam igitur ponitur proportio sphaerae ABC , ad sphaeram GHI , triplicata proportionis diametri AC , ad diametrum DF : Est autem, per coroll. praecedentis propof. & proportio polyedri $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFFQR$, triplicata proportionis diametri AC , ad diametrum DF ; Erit ut sphaera ABC , ad sphaeram GHI , ita polyedru $ASBTCVXY$, ad polyedru $DNEOFFQR$. Quare cum sphaera ABC , maior sit polyedro $ASBTCVXY$; erit & sphaera GHI , maior polyedro $DNEOFFQR$, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphaera ABC , ad sphaeram GHI , minorem sphaera DEF , proportionem triplicatā diametri AC , ad diametrum DF .

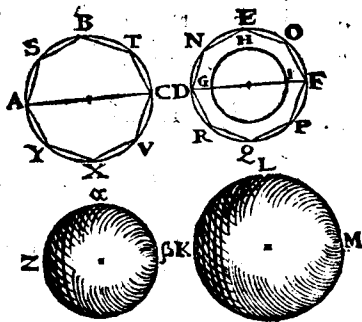
HABEAT secundo sphaera ABC , ad sphaeram KLM , maiorem sphaera DEF , proportionem triplicatā diametri AC , ad diametrum DF . Cum igitur, ex coroll. praecedentis propof. & polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFFQR$, habeat proportionem triplicatā diametri AC , ad diametrum DF ; Erit ut sphaera ABC , ad sphaeram KLM , ita polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFFQR$: Et conuertendo, ut sphaera KLM , ad sphaeram ABC , ita polyedru $DNEOFFQR$, ad polyedru $ASBTCVXY$.

Bb BTCVXY

17. duodec.

14. quinti.

BT CVXY; Est autem ex dicto coroll. præcedentis propol. polyedrum DNEOPQ R, ad polyedrum A S B T C VXY, in triplicata proportionẽ diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & sphaera KLM, ad sphaeram ABC, erit in tripli-



cata proportionẽ diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut sphaera KLM, ad sphaeram ABC, ita sphaera DEF, ad aliam sphaeram Z α β. Habebit igitur & sphaera DEF, ad sphaera Z α β, proportionem triplicatã diametri DF, ad diametru A C.

Et quia sphaera KLM, maior ponitur, quam sphaera DEF, erit quoq; sphaera ABC, maior, quam sphaera Z α β. Quapropter sphaera DEF, ad sphaeram Z α β, minorem sphaera ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum A C. Quod est absurdum. Oñsum enim est nõ posse sphaeram ad sphaeram alia sphaera minorem, proportionem habere triplicatam diametrorũ. Non ergo habebit sphaera ABC, ad sphaeram KLM, maiorem sphaera DEF, proportionem triplicatã diametri AC, ad diametrum DF; Sed neq; ad minorem habet, ut demonstratum est: Igitur habebit ad sphaeram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphaerae itaq; inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendũ.

COROLLARIUM.

Hinc fit, ita esse sphaeram ad sphaeram, ut polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tã sphaera ad sphaeram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS

E V C L I D I S

E L E M E N T V M XIII.

Et Solidorum tertium.



THEOR. I. PROPOS. I.

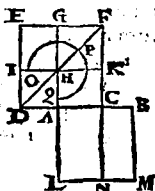
I.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmen-
tum assumens dimidiam totius, quintuplū
potest eius, quod a dimidia totius describi-
tur, quadrati.



ECETUR recta AB, in C, extrema
ac media ratione, sitq; maius segmen-
tū AC: Producta autem BA, ad D, sit
AD, dimidia totius AB. Dico quadratū
rectæ CD, quintuplum esse quadrati re-
ctæ AD. Describatur. n. super CD, qua-
dratū CE, in quo ducta diametro DF,
ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans

diametrū in H, pūcto, p qd ducatur IK, parallela ipsi CD.
Producta deinde GA, pficiatur quadra-
tū AM, protrahaturq; FC, ad N. eruntq;
ex coroll. propos. 4. lib. 2. AI, KG, qua-
drata rectarū AD, AC. Quia ergo est ut
AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangu-
lū CM, sub AB, CB; æquale ipsi KG; qua-
drato rectæ AC. Deinde cū ponatur AB,
dupla ipsi AD, sitq; AL, ipsi AB; & AH
ipsi AD, æqualis; erit quoq; AL, ipsius AH, dupla: Est au-



3. defin. sex.
17. sexti.

1. *sexti.*

43. *primi.*

tem ut A L, ad A H, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur est AN, ipsius A K. Quoniam autem A K, ipsi I G, est æquale; erit A N, æquale duobus A K, I G. Additis igitur æqualibus CM, K G; erit quadratū AM, gnomoni O P Q, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propof. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineæ A D; erit & gnomon O P Q, eiusdem quadrati A I, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni O P Q, addatur ipsum quadratum A I, quintuplum efficietur quadratum C E, quadrati A I.

A L I T E R. Ex scholio propof. 4. lib. 2. quadratum rectæ A B, quadruplum est quadrati rectæ A D, quod linea A B, dupla lineæ A D, ponatur; Est autem quadratū rectæ A B, æquale rectangulis sub A B, A C, & sub A B, B C, comprehenfis; Et rursus, quod sub A B, A C, æquale est ei, quod sub A D, A C, bis; (sicut enim A B, ipsius A D, est dupla, ita quoque erit rectangulum sub A B, A C, rectanguli sub A D, A C, duplum, cum



utriusque rectanguli eadem sit altitudo A C. Ac propterea rectangulum sub A D, A C, bis sumptum æquale erit rectangulo sub A B, A C.) Quod uero sub A B, B C, æquale est quadrato rectæ A C, cum sit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B. Igitur quadratum rectæ A C, una cum rectangulo sub A D, A C, bis, quadruplum quoque erit quadrati rectæ A D; Ac proinde quadrata rectarū A C, A D, una cum rectangulo sub A D, A C, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ A D. Quo circa cum quadratum rectæ C D, æquale sit quadratis rectarum A C, A D, una cum rectangulo sub A D, A C, bis; Erit & quadratum rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

1. *sexti.*

17. *sexti.*

4. *secundi.*

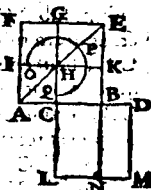
THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extremæ ac media ratione sectæ, maius segmentum reliquæ pars est eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB , in C , possitque quintuplum segmenti AC ; sumatur autem ipsius AC , dupla CD , quæ, ut post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC . Dico si CD , secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB , reliquam partem prioris lineæ. Describatur super AB , quadratum BE , in quo ducta diametro AE , ex C , ducatur ipsi AF , parallela CG , secans diametrum in puncto H , per quod agatur IK , parallela ipsi AB . Producta deinde GC , perficiatur quadratum CM , protrahaturque EB , ad N . Eruntque ex coroll. propof. 4. lib. 2. CI , KG , quadrata rectarum AC , CB . Quia igitur quadratum BF , quintuplum ponitur quadrati CI ; Si tollatur quadratum CI , relinquetur gnomon OPQ , eiusdem quadrati CI , quadruplus: Est autem & quadratum CM , quadruplum quadrati CI , ex scholio, propof. 4. lib. 2. quod recta CD , dupla sit rectæ AC . Igitur gnomon OPQ , quadrato CM , æqualis erit. Rursus quoniam CD , ponitur ipsius AC , dupla; estque LC , ipsi CD ; & CH , ipsi AC , æqualis; erit & LC , ipsius CH , dupla. Cum igitur sit ut LC , ad CH , ita rectangulum LB , ad rectangulum CH ; erit quoque illud huiusduplum: Est autem CK , ipsi HF , æquale. Æquale igitur est LB , ipsi CK , HF ; Ac proinde & reliquum quadratum KG , reliquo rectangulo BM . Quoniam ergo sunt tres rectæ CD , CB , BD ; estque rectangulum BM , sub CD , BD , comprehensum æquale ipsi KG , quadrato rectæ CB ; Erit ut CD , ad CB , ita CB , ad BD . Quamobrem, ex definitione, recta CD , secta est in



1. sexti.
43. primi

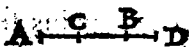
17. sexti.

Bb 3

B, extre-

B, extrema ac média ratione, estq; maius segmentum C B.

4. secundi. **A L I T E R.** Quoniam quadratum rectæ A B, quintuplum ponitur quadrati rectæ A C; estq; quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum C B, A C, una cum rectángulo sub A C, C B, bis; Erunt & quadrata rectarum C B,



A C, una cum rectángulo sub A C, C B, bis, quintuplum quadrati rectæ A C. Dempstro igitur

quadrato rectæ A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectángulum sub A C, C B, bis, quadruplum eiusdem quadrati rectæ A C: Est autem & quadratum rectæ C D, eiusdem quadrati rectæ A C, quadruplum, ex scholio propof. 4. lib. 2.

1. sexti. A Equale igitur est quadratum rectæ C B, & rectángulum sub A C, C B, bis; quadrato rectæ C D. Cum ergo rectángulum sub A C, C B, bis æquale sit rectángulo sub C D, C B; (sicut enim recta C D, dupla est rectæ A C, ita quoque

2. secundi. duplum erit rectángulum sub C D, C B, rectanguli sub A C, C B; cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo C B; Ac propterea rectángulum sub C D, C B, æquale erit rectángulo sub A C, C B, bis.) Erit & quadratum rectæ C B, & rectángulum sub C D, C B, quadrato rectæ C D, æquale: At quadratum rectæ C D, æquale est rectangulis sub C D, C B, & sub C D, B D.

17. sexti. Igitur quadratum rectæ C B, & rectángulum sub C D, C B, æquale erit rectangulis sub C D, C B, & sub C D, B D; Ac proinde dempto communi rectángulo sub C D, C B, relinquetur quadratum rectæ C B, æquale rectángulo sub C D, B D; ideoque erit ut C D, ad C B, ita C B, ad B D.

Quare ex defin. recta C D, secta est in B, extrema ac media ratione, estq; segmentum maius C B. Si igitur recta linea supius segmenti quintuplum possit, &c. Quod erat demonstrandum.

L E M M A.

Q U O D autem recta C D, maior sit necessario, quam C B, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ C D, quadruplum est, ex scholio propof. 4. lib. 2. quadrati rectæ A C; Addito quadrato

rectæ

recte AC, erunt duo quadrata rectorum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati recte AC. Est autem quadratum recte AD, maius quadratis rectorum AC, CD, cum aequale sit quadratis rectorum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum recte AD, maius quoque erit quintuplo quadrati recte AC. Ac propterea maius quadrato recte AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati recte AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; idemque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod est propositum.

4. secundi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECTUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum recte BD, quintuplum esse quadrati recte CD. Describatur super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelae CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quae agantur ipsis AB, EF, parallelae LM, NO, quae secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectorum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est recte CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, aequale quadrato LG. (Nam cum sit ut AB, ad AC,



17. sexti.

ita A C, & C B, erit rectangulum sub A B, C B, nempe C E, æquale quadrato rectæ A C, nimirum ipsi L G. Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia uero æqualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum A D, C D; erunt earum latera H K, I Q, æqualia; ac proinde rectæ E O, O M, ipsis oppositæ æquales erunt. Quare rectangula I O, Q E, æqualia erunt: Est autem I O, ipsi I B, æquale.



34. primi.

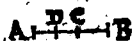
36. primi.

43. primi.

Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi C O; gnomon R S T, rectangulo C E, erit æqualis. Cum igitur C E, ostensum sit quadruplum quadrati P Q, erit etiam gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus; Ac propterea, addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta B D, quintuplum quadrati P Q, ex recta C D.

6. secundi.

ALITER. Cum A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; erit rectangulum sub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulum sub A B, B C, quadruplum est quadrati rectæ C D; (Nam cum sit, ut



17. sexti.

A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C: quod cum, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ C D, erit & rectangulum sub A B, B C, quadruplum eiusdem quadrati rectæ C D. Ac propterea rectangulum sub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratum rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

CONVERSVM huius theorematie demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

Si recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmen

ti quin-

ti quintuplum possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AB , diuisa inaequaliter in C , cuius maius segmentum AC , bisariam sectum sit in D & sitque quadratum rectae BD , quintuplum quadrati rectae CD . Dico rectam AB , diuisam esse in C , extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. eris quadratum LG , recta AC , quadruplum quadrati PQ , recta CD , ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST , eiusdem quadrati PQ , quadruplus. (cum enim quadratum DO , recta BD , quintuplum ponatur quadrati PQ , ex recta CD ; dempto quadrato PQ relinquetur gnomon RST , eiusdem quadrati PQ , quadruplus.) Igitur gnomon RST , aequalis erit quadrato LG : At gnomoni RST , aequale est rectangulum CE , ut supra ostensum est. Ergo & quadrato LG , recta AC , aequale erit idem rectangulum CE , sub AB , & C , comprehensum: Ac proinde erit, ut AB , ad AC , ita AC , ad CB . Quocirca, & definitione, secta erit AB , in C , extrema ac media ratione. Quod est propositum.

17. sexti.

ALITER. Cum AC , diuisa sit bisariam in D , & ei addita CB ; erit rectangulum sub AB , BC , una cum quadrato rectae CD , aequale quadrato rectae BD ; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD , descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD , descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis AB , BC , descriptum, una cum quadrato rectae CD , quintuplum eiusdem quadrati rectae CD . Quare ablato quadrato rectae CD ; rectangulum sub AB , BC , quadruplum erit quadrati rectae CD : Est autem eiusdem quadrati rectae CD , quadruplum quadratum rectae AC , ex scholio propos. 4.

6. sexti.

lib. 2. Igitur quadrato rectae AC , aequale est rectangulum sub AB , BC . Quamobrem erit,

ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; Ac

17. sexti.

proinde secta AB , in C , extrema

ac media ratione, ex

definitione.

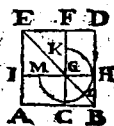
THEOR.

5.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur, quadrati.

SECTUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi B, D, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propof. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, ut AB, ad



17. sexti.

AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD; erit gnomon KLM, una cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, una cum quadrato CH, rectæ BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

17. sexti.

ALITER. Quoniam est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum sub AB, BC, bis, una cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC; una cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodque a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

7. secundi

SCHO-

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

Si recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

Si recta sit AB , inæqualiter in C , ita ut quadratum totius AB , et quadratum minoris segmenti BC , utraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC . Dico rectam AB , sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, ut prius, cum quadrata AD , CH , tripla sint quadrati IF ; Dempto quadrato IF , erit gnomon KLM , una cum quadrato CH , duplus eiusdem quadrati IF . Est autem gnomon KLM , unum cum quadrato CH , æqualis duobus rectangulis AH , CD ; Igitur et rectangula AH , CD , dupla sunt quadrati IF ; Et propterea cum æqualia sint AH , et CD , erit AH , sibi IF , æquale. Quapropter etiam rectangulum AH , sub AB , BC , æquale sit quadrato IF , rectæ AC ; erit et AB , ad AC , ut AC , ad CB ; Ac proinde AB , diuisa erit in C , extrema ac media ratione.

ALITER. Cum quadrata rectarum AB , BC , tripla sint quadrati rectæ AC ; Sini vero quadrata rectarum AB , BC , æqualia quadrato rectæ AC , et rectangulo sub AB , BC , bis, erit et quadratum rectæ AC , una cum rectangulo sub AB , BC , bis, triplum quadrati rectæ AC .

Dempto ergo quadrato rectæ AC , relinquetur rectangulum sub AB , BC , bis duplum quadrati rectæ AC ; Et proinde rectangulum sub AB , BC , semel, æquale quadrato rectæ AC . Quare ut prius, erit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; deoque AB , in C , secta erit extrema ac media ratione.

17. sexti.

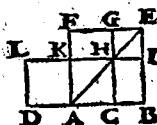
7. secundi.

17. sexti.



SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturq; ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ a principio, recta linea.

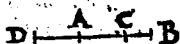
SECETUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC, & adijciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, esseq; maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in



quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi IK, productæ in L. Eruntq;

ex coroll. propof. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC: Est autem CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL; additoq; communi BK, erit rectangulum BL, contentum sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB; Ac proinde erit ut BD, ad AB, ita AB, ad DA: Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum AB.

ALITER. Quoniam est ut AB, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo ut DA, ad AB, ita BC, ad CA; & componendo ut DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea



secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturq;

17. sexti.
36. primi.

17. sexti.

naturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea, &c.
Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea BD , extrema ac media ratione secetur in A , cuius maius segmentum AB , minus autem segmentum AD ; & ex maiori segmento AB , detrahatur recta AC , æqualis minori segmento AD . Dico maius segmentum AB , divisum esse in C , extrema ac media ratione, & maius segmentum esse rectam AC , quæ æqualis est minori segmento AD . Facta enim prioris figura constructione, cum sit ut BD , ad AB , ita AB , ad AD ; erit rectangulum BL , contentum sub BD , AD , æquale quadrato BF , rectæ AB ; & ablato communi BK , erit AL , æquale ipsi IF : Est autem AL , ipsi CK , æquale. 17. seci.
 AE quale igitur est IF , contentum sub AB , CB , quadrato CK , 16. primi.
rectæ AC ; Ac proinde erit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB . 17. sexsi.
Quare AB , secta est in C , extrema ac media ratione. cuius segmentum maius est AC , minus vero segmentum recta CB . Quod est propositum.

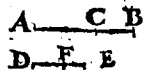
ALITER. Quoniam est ut tota BD , ad totam AB , ita AB , detracta ex BD , ad AD , hoc est, ad AC , detractam ex AB ; erit quoque ita AD , reliqua ipsius BD , hoc est, AC , ad CB , reliquam ipsius AB , ut tota BD , ad totam AB , hoc est, ut AB , ad AC ; Ac propterea divisum erit AB , in C , extrema & media ratione. 19. quinsi.

REVRSO & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidium maioris segmenti; Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATUR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris

segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse DF. Cum enim sit ut AB, tota ad DE, totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum utrobique sit proportio di-



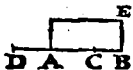
19. quinti. plaz erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, ut tota ad totam; Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. Quoniam uero est ut AB, ad AC, ita DE, dimidia illius ad DF, dimidiam huius: Item ut AC, ad CB, ita DF, dimidia illius ad FE, dimidiam huius; Eff autem ex defn. linea secata extrema ac media ratione, AB, ad AC, ut AC, ad CB: Erit quoq; DE, ad DF, ut DF, ad FE; Ac proinde ex eadē defn. DE, secata erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta lineæ Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrunque segmentum Irrationalis lineæ est; quæ uocatur Apotome.

1. sept. dec. SECETUR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico utrunque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur. n. maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidia totius AB. Quoniam igitur quadratū rectæ CD, quinquuplū est quadrati

drati rectę AD, habebit quadratum rectę CD, ad quadratũ rectę AD, proportionem, quã numerus ad numerũ. Quare commensurabilia erunt quadrata rectarũ CD, AD, propterea; ipsę rectę CD, AD, cõmensurabiles quoq; existẽt, fãltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia linę Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia uero quadrata rectarũ CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut constat ex coroll. propof. 24. lib. 8. Habent. n. proportionem quam 5. ad 1. uel 25. ad 5.) erunt rectę CD, AD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; erit reliqua AC, Irrationalis, quę appellatur Apotome.



6. decimi.

9. decimi.

74. decimi.

17. sexti.

98. decimi.

Rursus applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum AE, æquale quadrato rectę AC. Quamobrem quadratum Apotomę AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

SED & hoc theorema cum Campana ostendimus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB; extrema ac media ratione diuisa in C, sitq; maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentũ CB, esse Apotomen. Diuisa. n. AC, bisariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cũ sit ipsi AC, commensurabilis.

3. tersijdec. commensurabilis . Quoniam autem quadratum recta BD, quintuplum e si quadrati recta CD; habebunt quadrata re-

$$A \quad \frac{D C}{+} \quad B$$

6. decimi.

ctarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum; ac propterea commensurabilia ex-

sistent. Quare & ipse recta BD, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit Rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia uero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut constas ex coroll. propos. 24. lib.8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt recta BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex BD, Rationali detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; erit reliqua CB, Irrationalis, quae uocatur Apotome.

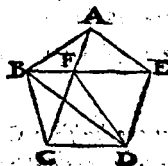
74. decimi.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

S I N T in pentagono æquilatERO ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis



angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, ubi se intersecant rectæ BE, AC, recta ducatur FD. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothæsi; Erunt & bases BE,

4. primi.

5. primi.

BD, & anguli AEB, CDB, æquales; Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE,

BD.

B D, Toti igitur anguli **A E D, C D E**, æquales erunt. Rur-
sus quia latera **A B, A E**, trianguli **ABE**, æqualia sunt lateri-
bus **B A, B C**, trianguli **BAC**; & anguli quoque ipsi con-
tinenti æquales, ex hypothesi: Erunt & basis **BE**, basi **AC**, æqua-
lis, & anguli **A B E, A E B**, anguli **BAC, BCA**, æquales. Cum
ergo æquales sint anguli **ABE, BAC**, trianguli **ABF**, erunt
quoque latera **BF, A F**, æqualia: At propterea si ipsa de-
māturex ceteris æqualibus **BE, AC**, erunt reliquæ hinc **FE**,
F C, æquales. Itaque ceteri latera **FE, E D**, trianguli **FED**,
æqualia sunt lateribus **FC, CD**, trianguli **FCD**, & basis com-
munis **FD**, erunt & anguli ceteri lateribus contenti **E E D**,
F C D, æquales: Sunt autem & anguli **ABB, B C A**, ostensi
æquales. Acquales igitur sunt toti anguli **A E D, B C D**:
Ac proinde cum angulo **A E D**, ostensus sit æqualis angulus
C D E, & angulo **B C D**, æquales ponantur anguli **A B C**,
B A E, erunt omnes anguli pentagoni æquales, adeoque æqua-
litas erit ipsum pentagonum.

S E C U N D O tres anguli non deinceps æquales **A, B, C**,
D. Quoniam igitur latera **A B, A E**, trianguli **ABE**, æqua-
lia sunt lateribus **C B, C D**, trianguli **CBD**; & anguli quo-
que ipsi contenti, æquales, ex hypothesi: Erunt & bases **BE**,
B D, & anguli **A E B, C D B**, æquales: Sunt autem & anguli
B E B, B D B, æquales; quod æqualitas ostensus fuit latera **BE**,
B D. Igitur toti anguli **A E D, C D E**, æquales evasit. Quare
cum æquales ponantur anguli **B A E, C D B**, erunt tres anguli
deinceps æquales **A, B, D**: Ac proinde, ut iam demonst-
ratum est, pentagonum æquiangulum erit: Si pentagoni igitur
cuiuslibet lateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

4. primi.

6. primi.

8. primi.

4. primi.

4. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

II.

S I pentagoni æquilateri, & æquiangu-
li duos angulos, qui deinceps sint, subten-
dant rectæ lineæ: hæc extrema & mediæ ra-
tione se mutuo secant, & maiora ipsarum
segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

Cc

S v B.

SVB TENDANT QV in pentagono equilatero & equi-
 angulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, &
 D, recta DB, CE, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari
 extrema & media ratione, maioraque
 segmenta FB, FE, equalia esse
 lateri cuiuslibet pentagoni. Descripto
 enim circulo circa pentagonum, erunt
 quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA,
 aequales. Quia igitur latera CD, CB,
 trianguli CDB equalia sunt lateribus
 DC, DE, trianguli DEC, & anguli quoque ipsi contem-
 ti aequales, ex hypothesi. Erunt & bases DB, CE, & anguli
 CDB, DEC, aequales. Ac proinde, cum in triangulo
 CDF, duobus angulis FCD, FDC, sit aequalitas, ipsa aequa-
 lis sit exterioris angulus BFC, & triangulus BFC, duplus
 anguli DEC. Est autem & angulus BCE, eiusdem an-
 guli DEC, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit du-
 plus. Itaque anguli BFC, BCE, aequales sunt. Ideoque
 recta BF, lateri pentagoni BC, aequalis. Quoniam autem
 anguli DBC, ECD, arcibus aequalibus inscriptis
 aequales sunt, erunt duobus angulis DBC, ECD, trianguli
 BCD, aequales duobus angulis DCE, EDC, trianguli
 CED. Ac proinde, & triangula, erunt, triangula BCD,
 CED. Quare erit ut BD, ad DC, ita BF, ad FE, & aequa-
 lem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi aequalis, BE, ad FD.
 Ac propterea BD, secata CF in F, extrema ac media ratione,
 estque maius segmentum BF, lateri pentagoni aequale,
 ut ostensum est. Simili ratione ostendetur, rectam CE,
 secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius seg-
 mentum EF, aequale esse lateri pentagoni DE. Itaque si
 pentagoni aequilateri & equianguli duos angulos, &c. Quod
 erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eo-
 dem circulo descriptorum, componantur-
 Tota recta linea extrema ac media ratione
 secatur,



secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

- IN circulo ABC , sit latus decagoni AB , cui in rectum addatur BE , æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA , rectam sectam esse in B , extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse EB , latus hexagoni. Ducatur enim ex A , per centrum D , diameter AC ; coniunganturque rectæ DB , DE . Quoniam igitur AB , arcus, est decima pars totius periphæriæ circuli; continebit arcus semicirculi arcum AB , quinque; Ac proinde arcus BC , quadruplus erit arcus AB . Quare & angulus BDC , angulus ADB , quadruplus erit. Rursus quia latera BD , BE , sunt æqualia, nempe latera hexagoni; (est enim BE , latus hexagoni & semidiametro BD , æquale, ex coroll. propof. 5. lib. 4.) erunt & anguli BDE , BED , æquales: quibus cum æqualis sit, externus ABD ; erit angulus ABD , duplus anguli BED . Est autem angulus ABD , æqualis angulus EAD ; ob æqualitatem laterum DA , DB . Igitur & angulus BAD , duplus erit anguli BED : Ac proinde duo anguli DAB , DBA , simul quadrupli erunt anguli BED . Cum ergo angulis DAB , DBA , æqualis sit externus BDC ; erit angulus BDC , quadruplus eiusdem anguli BED : Atqui idem angulus BDC , ostensus fuit quadruplus anguli ADB . Igitur æquales sunt anguli AED , ADB . Quocirca cum duo anguli AED , DAE , trianguli ADE , æquales sint duobus angulis ADB , BAD , trianguli ABD ; erunt triangula ADE , ABD , æquiangula. Igitur erit ut EA , ad AD , hoc est, ad EB , ipsi AD , æqualem, ita AD , hoc est, EB , sibi æqualis, ad BA ; Ac idcirco recta EA , secta est in B , extrema & media ratione, estque maius segmentum EB , latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, companionantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quoderat demonstrandum.



33. sexti.

5. primi
32. primi.

5. primi

32. undec.

32. primi.
4. sexti.

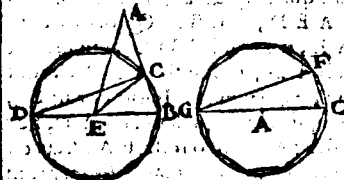
S C H O L I O N.

QVIA vero demonstravimus ad propof. 5. huius lib. si minus segmentum illud divisa extrema ac media ratione ex maiori segmentis detrahatur; minus segmentum fecari quoque extrema & media ratione, eiusque segmentum minus esse minus segmentum detractum; Hic autem ostensum est; Latus hexagoni compositum cum latere decagoni, fecari extrema ac media ratione: Fit, scilicet latus hexagoni fecatur extrema & media ratione; minus illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est minus segmentum, divisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, ut ad propof. 5. huius lib. ostendimus. Hoc autem aliter demonstrabimus lib. 14. propof. 4.

CONVERSUM quoque huius theoremati facile cum Campano demonstrabimus. Videlicet si latus decagoni a latere hexagoni detrahatur, erit residuum latus hexagoni.

Si linea divisa extrema ac media ratione minus segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit minus segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

SIT enim AB, divisa in C, extrema & media ratione; sitque primo AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus



segmentum CB, esse eiusdem circuli latus decagoni. Compositum enim BC, in circulo, ita ut C, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum F, diametro BED, connectam

ut rectae EA, EC. Quia ergo est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB, & est AC, latus hexagoni, aequale semidiametro EB, ex coroll. propof. 1. lib. 4. Erit quoque ut AB, ad BE, ita EB, ad BC, ideoque triangula ABE, EBC, aequiangula erunt, cum habeant latera

latera circa communem angulum B , proportionalia; eritque angulus A , angulo BEC , equalis. Rursus quia latera CA , CE , equalia sunt, nempe latera hexagoni; erunt anguli CAE , CEA , aequales; quibus cum equalis sit externus BCE , erit BCE , duplus anguli A . Est autem angulo BCE , angulus CBE , ob equalitatem laterum EB , EC , equalis. Igitur $\angle CBF$, duplus erit anguli A . At proinde duo anguli BCE , CBE , simul quadrupli erunt eiusdem anguli. Cum ergo angulus BCE , CBE , equalis sit externus CED ; erit quoque angulus CED , eiusdem anguli A , et propterea anguli BEC , qui equalis ostensus est angulo A , quadruplus erit. Quare $\angle$ arcus CD , quadruplus erit arcus BC . At proinde arcus semicirculi BCD , eiusdem arcus BC , quintuplus existet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus BC . Quapropter recta BC , latus est decagoni.

Si tunc secundo CB , minus segmentum, latus decagoni circuli BCD . Dico maius segmentum AC , esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus BC , in circulo BCD , ducaturque diameter BED , Deinde intervallo AC , describatur circulus CFG , cuius diameter CAG ; eritque ex coroll. propof. 15. lib. 4. AC , latus hexagoni circuli CFG . Quoniam igitur AB , secta est in C , extrema ac media ratione, estque maius segmentum AC , latus hexagoni circuli CFG ; erit, ut iam ostensum est, minus segmentum CB , latus decagoni eiusdem circuli CFG . Describatur ergo in circulo CFG , decagonum aequilaterum & equiangularum CFG ; Item in circulo BCD , decagonum aequilaterum, & equiangularum BCD ; eruntque latera BC , CF , inter se equalia. Quoniam vero, si connectantur recta CD , FG , anguli CDH , HGC , sunt aequales, ut in scholio propof. 33. lib. 6. ostendimus, quod insistant arcibus similibus BC , CF , nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoque anguli BCD , CFG , in semicirculis aequales, nimirum recti; Erunt quoque latera BD , CG , inter se equalia. Quam ob rem cum diametri BD , CG , sint aequales, aequales quoque erunt circuli BCD , CFG . At proinde, cum recta

AC , sit latus hexagoni circuli CFG ,

erit quoque eadem recta AC , latus hexagoni circuli BCD .

Quod est propositum.

5. primi.

32. primi

5. primi.

32. primi

33. sexii.

31. terii.

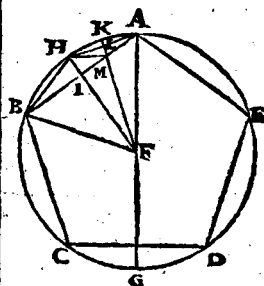
26. primi

10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

IN circulo A B C D E, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris A B, æquale esse quadrato lateris hexagoni, una cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta FB. Diuiso deinde arcu A B, bisariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, secans rectam A B, in I: eritque recta A H, latus decagoni, & B F, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu A H, bisariam in K, adiungatur recta F K, secans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, puncto, ad quod recta ducatur H M. Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales sunt; erunt & anguli ipsis insistentes A F H, B F H, æquales. Quare cum latera A F, F I, trian-



27. tertij.

4. primi

guli A F I, æqualia sint lateribus B F, F I; trianguli B F I, & anguli ipsis contenti, æquales quoque; erunt & bases A I, B I, æquales, & anguli A I F, B I F, idcirco recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ A L, H L, & anguli A L F, H L F, recti. Deinde, ex semicirculis æqualibus A B C G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, A E D; relinquentur arcus C G, D G, inter sese æquales, ideoque erit arcus C G, dimidium arcus C D: Est autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cum arcus A B, C D, æquales sint;

sint; erunt quoque eorum dimidij arcus CG , AH , æqua-
 les; Ac proinde cum arcus AH , duplus sit arcus HK , erit
 & arcus CG , duplus eiusdem arcus HK . Eodem modo,
 quia arcus AB , BC , æquales sunt, & est arcus AB , du-
 plus arcus BH , erit etiam arcus BC , eiusdem arcus BH ,
 duplus. Quare arcus CG , BC , æquemultiplices sunt, nem-
 pe dupli, arcuum HK , BH ; Ac propterea totus arcus
 BG , duplus quoque erit totius arcus BK ; & idcirco angu-
 lus quoque BFG , duplus anguli BFK : Sed quia (cum an-
 guli FAB , FBA , ob æqualitatem laterum FA , FB , æqua-
 les sint, ipsisque æqualis externus BFG ;) idem angulus
 BFG , duplus est quoque anguli FAB ; erunt idcirco
 anguli BFM , FAB , æquales; Ac propterea triangu-
 la ABF , FBM , cum habeant angulos FAB , MBF , æqua-
 les, & angulum ABF , communem, æquiangula erunt.
 Quocirca erit ut AB , ad BF , ita BF , ad BM ; ideoque
 rectangulum sub AB , BM , æquale erit quadrato rectæ
 BF . Rursus quia latera AL , LM , trianguli ALM , æqua-
 lia sunt lateribus HL , LM , trianguli HLM , & anguli quo-
 que ipsis contenti æquales, nempe recti: erunt & bases AM ,
 HM , & anguli LAM , LHM , æquales: Est autem angu-
 lus LAM , angulo HBA , æqualis, quod & latera HA ,
 HB , æqualia sint. Igitur & angulus LHM , eidem angulo
 HBA , æqualis erit; Ac propterea triangu-
 la ABH , AHM , cum habeant angulos ABH , AHM , æquales,
 & angulum HAM , communem, æquiangula erunt.
 Quam ob rem erit ut AB , ad AH , ita AH , ad AM ;
 ideoque rectangulum sub AB , AM , æquale erit quadrato
 rectæ AH : ostensum est autem & rectangulum sub AB ,
 BM , æquale quadrato rectæ BF . Igitur rectangula sub
 AB , BM , & sub AB , AM , simul æqualia sunt quadratis
 rectarum BF , AH : At vero rectangula sub AB , BM , &
 sub AB , AM , æqualia sunt quadrato rectæ AB . Quadra-
 tum ergo rectæ AB , nempe lateris pentagoni, æquale est
 quadratis rectarum BF , AH , lateris videlicet hexagoni, &
 lateris decagoni. Si igitur in circulo pentago-
 num æquilaterum describatur, &c.

Quod erat demon-
 strandum.

1. quinti.
 33. sexti.
 5. primi
 32. primi.

32. primi.
 4. sexti.
 17. sexti.

4. primi
 5. primi.

32. primi.
 4. sexti.
 17. sexti.

2. secundi

COROLLARIUM. I.

Hic sequitur, lineam rectam, quæ ex centro ducta dividit arcum quempiam bifariam, dividere quoque rectam illi arcui subtentam bifariam, & ad angulos rectos. Oportet enim esse, rectam FF, præterea quod arcum A B, dividit bifariam, dividere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

COROLLARIUM. II.

PERSPICUUM quoque est, diametrum circuli ex angulo quovis pentagoni ductam dividere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsam oppositum bifariam, & ad angulos rectos. Demonstratum enim est diametrum A G, ex puncto A, ductam dividere arcum C D, quem latus oppositum C D, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoque latus C D, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatere in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, ut constat.

SCHOLIUM.

QUONIAM ad finem lib. 4. præxim quandam ex Problema tradidimus, quæ una eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilatrum describitur, eiusque demonstrationem in hunc locum diffulimus, paucis nunc a nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrum D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde divisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui equalis abscindatur E F, adiungaturque recta A F. Dico rectam A F, esse latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cum enim C D, secetur bifariam in E, atque addita



6. secundi

47. primi.

D F, ærit rectangulum sub C E, D E, una cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoque quadrato rectæ E A, quæ ipsæ E F, est equalis: Est autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale est quadratis rectarum A D, D E, Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ

D E,

D. E; relinquitur rectangulum sub C F, D F, æquale quadrato
 rectæ A D, hoc est, quadrato rectæ C D. Quam obrem erit
 ut C F, ad C D, ita C D, ad D F; proptereaque rectæ C F, di-
 uisa erit in D, extrema ac mediacione. Cum igitur maius
 segmentum C D, sit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll.
 propos. 15, lib. 4. erit minus segmentum D F, latus decagoni
 eiusdem circuli, ut demonstrauimus ad propos. 9. huius lib.
 Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni A D, una cum qua-
 drato lateris decagoni D F, æquale est quadratum lateris pen-
 tagoni eiusdem circuli; Est autem eisdem quadratis rectarum
 A D, D F, æquale quadratum rectæ A F; erit quadratum la-
 teris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; ac propterea rectæ
 A F, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.

17. sexti.

10. tertij de.

17. primi.

THEOR. II. PROPOS. II.

12.

SI in circulo Rationalem habente dia-
 metrum, pentagonum æquilaterum descri-
 batur: Pentagoni latus Irrationalis est li-
 nea, quæ uocatur Minor.

I n circulo A B C D E, habente diametrum Rationa-
 lem, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E. Di-
 co eius latus A B, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Mi-
 nor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, secetque A G, la-
 tus C D, in I, connectanturque rectæ
 A C, A H, quarum A C, secet diame-
 trum B H, in K. Abscindatur quoque
 ex semidiametro F H, quarta ei⁹ pars
 F L; itō ex recta A C, quarta eius pars
 C M. Quia igitur diameter B H, po-
 nitur Rationalis; erunt quoque F L,
 B F, illi commensurabiles, cum sint
 eius partes aliquotæ; Rationales; Atque ideo & tota B L,
 composita, cum sit commensurabilis utrique F L, B F, Ra-
 tionalis erit. Rursus quoniam recta F B, ex centro ducta
 secat arcum A C, bisaniam in B; secabit quoque recta A C,
 bisaniam



16. decimi.

32. primi
4. sexti.

15. quinti

22. sexti.

8. septi. dec.

1. septi. dec.

6. decimi.

20. sexti.

bisariam in K , & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propof. Secat autem & recta AG , rectam CD , in I , bisariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propof. Triangula ergo ACI , AFK , cum habeant angulos AIC ,



AKF , rectos, & angulum CAI , communem, æquiangula inter se erunt. Quam ob rem erit, ut CI , ad CA , ita FK , ad FA ; & permutando ut CI , ad FK , ita CA , ad FA : Vt autem CA , ad AF , ita est CM , quarta pars ipsius CA , ad FL , quartā partem ipsius FA . Erit igitur ut CI , ad FK , ita CM , ad FL ; & permutando, ut CI , ad CM , hoc est, ut CD , dupla ipsius CI , ad CK , duplam ipsius CM , ita FK , ad FL ; Atque componendo, ut CD , CK , simul ad CK , ita FK , FL , simul, nimirum recta KL , ad FL ; Ac propterea erit, ut quadratum rectæ compositæ ex CD , CK , ad quadratum rectæ CK , ita quadratum rectæ KL , ad quadratum rectæ FL . Quia uero li AC , secetur extrema ac media ratione, (ducta uidelicet recta BD ,) maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD ; Erit quadratum rectæ compositæ ex CD , maiori segmento, & CK , dimidia totius, quintuplū quadrati rectæ CK , dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL , quintuplum erit quadrati rectæ FL , ideoque quadratum rectæ KL , commensurabile erit quadrato rectæ FL ; Ac proinde rectæ KL , FL , commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autē FL , ostensa Rationalis. Igitur & KL , Rationalis erit. Deinde quia qualium partium 4. est BF , talium 1. est FL ; ac propterea qualium 5. est BL , talium 1. est FL ; erit quadratum rectæ BL , talium partium 25. qualium 1. est quadratum rectæ FL , (ut in his numeris patet 1. 5. 25. habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. est quadratum rectæ FL , talium 5. ostensum est quadratum rectæ KL . Qualium igitur 25. est quadratum rectæ BL , talium 5. est quadratum rectæ KL ; ac proinde quadratum rectæ BL , quintuplum erit quadrati rectæ KL . Quia ergo quadrata rectarum BL ,

AL ,

K L, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut patet ex coroll. propof. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. uel 5. ad 1.) Etunt rectæ B L, K L, longitudine incommensurabiles; ideoque, cum ostensæ sint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali B L, dematur Rationalis K L, potentia tantum commensurabilis; erit reliqua B K, Irrationalis, quæ dicitur. Apotome, ei uero congruens erit K L.

9. decimi.

74. decimi

I A M uero recta B L, possit plus, quam recta K L, quadrato rectæ N. Quoniã igitur quadratum rectæ B L, æquale est quadratis rectarum K L, & N; Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ B L, talium 1. fuit quadratum rectæ K L; Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ B L; Ac propterea quadrata rectarum B L, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Quare commensurabilia erunt; proptereaque rectæ ipsæ B L, & N commensurabiles, saltem potentia: Est autem B L, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia uero quadrata rectarum B L, & N, proportionem non habent, quã numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut perspicuum est ex coroll. propof. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) Erunt rectæ B L, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta B L, Rationalis, longitudine sit commensurabilis Rationali B H; (Qualium enim partium 8. est B H, talium 5. est B L,) possitque plus, quam congruens K L, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, ut ostensum est; Erit B K, Apotome quarta, ex definitione.

6. decimi.

9. decimi.

P. O S T R E M O quia recta A B, est media proportionalis inter B H, B K, ex coroll. propof. 8. lib. 6. (quod triangulum A B H, habeat angulum B A H, rectum, a quo ducta est A K, ad basin perpendicularis) erit quadratum rectæ A B, æquale rectangulo sub B H, B K. Quocirca cum superficiem contentam sub Rationali B H, & Apotoma quarta B K, possit recta linea A B; Erit A B, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

31. tertii.

17. sexti.

95. decimi.

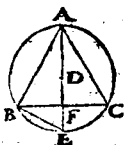
THEOR.

8.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo ABC , cuius centrum D , triangulum æquilaterum inscribatur ABC . Dico quadratum lateris AB , triplum esse quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro



AE , quæ fecer, ex coroll. propof. 10. huius lib. arcum BC , bifariam in E , & rectâ BC , bifariam quoque & ad angulos rectos in puncto F ; cum arcus BC , sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE , eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoque coniuncta recta BE , latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propof. 15. lib. 4.

47. primi.
31. secij.

Quoniam igitur quadratum rectæ AE , æquale est quadratis rectarum AB , BE , quod angulus ABE , in semicirculo rectus sit: est autem quadratum rectæ AE , quadruplum quadrati rectæ BE , ex scholio propof. 4. lib. 2. quod linea AE , dupla sit lineæ BE , erunt quadrata rectarum AB , BE , simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ BE ; Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum AB , BE , talium partium 1. erit quadratum rectæ BE ; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ AB . Quare quadratum rectæ AB , triplum est quadrati rectæ BE , quæ æqualis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hæc non facile colligi potest, semidiametrum DE , bifariam facere in F , a latere trianguli BC . Cum enim quadratum rectæ AB , triplum sit quadrati rectæ BE ; si ponatur quadratum rectæ AB , partium 12. erit quadratum rectæ BE , talium partium 4. Est autem quadratum rectæ BE , æquale quadratis rectarum BF , FE . Igitur & talium

47. primi.

& talium partium 4. erunt quadrata rectarum B F, F E. Est autem talium partium 3. quadratum rectæ B F, (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF, ex scholio propof. 4. lib. 2. Est enim A B, dupla ipsius B F.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ F E; Ac proinde quadratum rectæ B E, hoc est, quadratum rectæ DE, sibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ F E. Cum igitur, ex scholio propof. 4. lib. 2. idem quadratum rectæ D E, quadruplum sit quadrati dimidiæ latus ipsius DE; erit F E, dimidia ipsius D E. Quocirca D E, bisariam secatur in F.

SCHOLION.

Hoc tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate propofitio.

Si in circulo triangulum æquilatorum describatur; Diameter ex uno angulo ducta diuidet & angulum bisariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque uicissim bisariam, & angulos rectos secabitur a latere opposito.

In circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilatorum inscribatur A B C. Dico rectam A E, per centrum D, ductam, hoc est, diametrum, secare bisariam & angulum B A C, & latus B C, nec non ad angulos rectos; Semidiameter quoque D E, secari a latere B C, bisariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis B D, C D, B E; cum latera A B, B A D, trianguli B A D, æqualia sint lateribus A C, A D, trianguli C A D; & bases B D, C D, æquales quoque: Erunt anguli B A D, C A D, æquales. Quod est primum.



3. primi

DEINDE, cum latera AB, A F, trianguli B A F, æqualia sint lateribus A C, A F, trianguli C A F, & anguli ipsi contenti æquales ostensu: Erunt & bases B F, C F, & anguli ad F, æquales, idæque recti. Quod est secundum.

4. primi.

POSTREMO, cum anguli B A E, C A E, demonstra- ti sint esse æquales; erunt & arcus B E, C E, æquales. Quare

26. terti.

cum

5. primi

26. primi

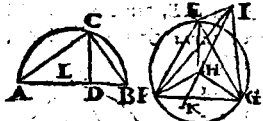
cum BE , arcus sit tertia pars circumferentiae, ut B , sexta pars eiusdem; AC propterea recta BE latus hexagoni, atque semidiametro proinde BD , equalis, ex coroll. propof. 15. lib. 4. Igitur anguli BDE , BED , aequales erunt. Quoniam ergo anguli BDE , BFD , trianguli DBF , aequales sunt angulis B , E , F , BFE , trianguli EBF , & latus BF , commune; Erunt & latera DF , EF , equalia.

13.

PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphaera complecti; & demonstrare, quod sphaerae diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT datae sphaerae diameter AB , circ. quam semicirculus describatur & GB ; & ex A , B , auferatur tertia pars BD , ut sit AD , ipsius DB , dupla; at uero AB , eiusdem DB , tripla; & ipsius AD , sesquialtera. Deinde ducta DC , perpendiculari ad AB , & connectantur rectae AC , BC . Ad interioral



lum rectae HE , quae equalis sit ipsi DC , describatur circulus EFG , cuius centrum H , in quo triangulum equilaterum inscribatur E -

FG , adiunganturque rectae HF , HG , quae singulae equaliter erunt ipsi DC , cum equaliter sint ipsi HE , ad cuius intervallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H , ad planum circuli perpendicularis HI , quae equalis ponatur rectae AD , & ex I , demittantur rectae IE , IF , IG . Dico solidum contentum quatuor triangulis FE , IE , IF , IG , esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam latera DA , DC , trianguli ADC , equalia sunt lateribus HI , HE , trianguli IHE , & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothese, & 3. defin. lib. 11. erit basis AC , basi IE , equalis. Non aliter ostendimus eandem rectam AC , equaliter esse rectis IF , IG . Rursus quia tres lineae AD , DC , DB , proportionales sunt

4. primi.

sunt, ex coroll. propof. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propof. 20. lib. 6. ut AD , ad DB , ita quadratū rectę AD , ad quadratū rectę DC ; & cōponēdo, ut AB , ad DB , ita quadrata rectarū AD , DC , simul ad quadratū rectę DC : Sunt autē quadrata rectarū AD , DC , æqualia quadrato rectę AC . Igitur erit quoq; ut AB , ad DB , ita quadratū rectę AC , ad quadratum rectę DC ; Ac proinde cū AB , sit ipſius DB , tripla, erit quoq; quadratū rectę AC , triplum quadrati rectę HE , cū HE , æqualis sit ipſi DC : Atqui & quadratum rectę EF , triplum quoque est eiusdem quadrati rectę HE . Quadratū ergo rectę AC , quadrato rectę EF , æquale erit & propterea recta AC , rectę EF . Quare cū recta $A C$, oſtenſa quoque sit æqualis rectis IE , IF , IG ; erunt quatuor triangula EFG , EFL , IGL , GEL , æquilatera & æqualia inter ſe: Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cuius baſis EFG , uertex uero I . Pico pyramidem hanc comprehendē ſphærā datā, cuius diameter AB & diameter ſphærę AB , potentia ſeſquialtera eſſe lateſis IE , uel AC .

47. primi.

12. tertijdec.

EXTENDATUR perpendicularis IH , uſque ad K , ut ſit HK , ipſi DB , & tota IK , totū AB , æqualis. Quia ergo tres rectę AD , DC , DB , proportionales ſunt, quibus æquales eſt ſunt tres IH , HE , HK ; erunt quoq; IH , HE , HK , proportionales. Quare cum HE , ſit ad IK , perpendicularis, & media proportionalis inter IH , HK , ſemicirculus circa $I K$, deſcriptus in plano rectarū IK , HE , tranſibit per E , ut mox oſtenditur; Eodemq; argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam IK , deſcriptus in plano rectarum IK , HF , tranſibit per F quā ſemicirculus circa eandem IK , deſcriptus in plano rectarum IK , HG , per G . Igitur quilibet horum ſemicirculorum circunductus, manente fixa diametro, ſphærā deſcribet, quę conſtitutum Tetraedrum complectitur, cū per omnes illius angulos E , F , G , I , incedat. Cum ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphærę datę, quod diameter IK , æqualis ponatur diametro AB , comprehendetur idem Tetraedrum ſphærā datā.

QUONIAM uero tres rectę AB , AC , AD , proportionales ſunt, ex coroll. ppoſ. 8. lib. 6. erit ut AB , ad AD , ita quadratū rectę AB , ad quadratū rectę AC , ex coroll. ppoſ. 20. lib. 6. Eſt autē recta AB , ſeſquialtera rectę AD , qđ qualiū partiū 3.

eſt

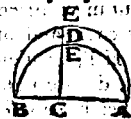
est AB, talitū a. sit A. D. Igitur & quadratū rectę AB, & squi-
alterū erit quadrati rectę AC. Ac propterea cum AB, sit
diameter sphęrę, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqua-
lis, perspicuum est, diametrum sphęrę potentia sesquialte-
ram esse lateris Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem er-
go constituimus, & data sphęra cōplexi sumus, &c. Quod
erat faciendum.

L. E. M. M. A.

Quod autem semicirculus circa IK, in plano
rectarum IK, HE, descriptus, transeat per E, facile
demonstrabitur hoc proposito theoremate.

Si ad lineam rectam perpendicularis duca-
tur, quę sit media proportionalis inter segmen-
ta lineę; semicirculus circa illam lineam rectam
descriptus transibit per extremum punctum li-
neę perpendicularis.

Sit enim ad AB, perpendicularis CD, & me-
dia proportionalis inter AC, & CB. Dico semicir-
culum circa AB, descriptum transire



per D. Nam si transeat citra D,
vel ultra, nimirum per punctum E;

erit quoque CE, media proportiona-
lis inter AC, & CB, ex coroll. propos. 13, lib. 6.
Quare iam quadratum rectę CD, quam quadratum
rectę CE, æquale erit rectangulo sub AC, CB; Ac
proinde quadrata rectarum CD, CE, inter se æqualia,
& ipsę rectę CD, CE, æquales erunt, pars & to-
tum. Quod est absurdum. Transibit ergo semicir-
culus per D.

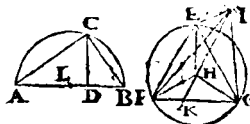
17. sexi.

Hinc manifestum est, semicirculam in superiori
figura

figura descriptum circa IK , in plano rectarum IK ,
 HE , transire per E , cum HE , sit ad IK , perpendi-
 cularis, & media proportionalis inter HH , & IK .

COROLLARIUM I.

Hinc facile colligemus, diametrum sphaerae esse quadruplam
 sesquialteram semidiametri circuli circa basim pyramidis descri-
 pti. Cum enim diameter sphaerae AB , utensa sit sesquialtera la-
 teris pyramidis EF , erit quadratum rectae EF , talium partium 6.
 qualium 9. est quadratum rectae
 AB : At qualium partium 6. est
 quadratum rectae EF , talium
 partium 2. est quadratum rectae
 HE , quod quadratum rectae EF ,
 triplum sit quadrati rectae HE .
 Qualium igitur partium 9. est
 quadratum rectae AB , talium
 partium 2. erit quadratum rectae HE ; Ac propterea diameter sphae-
 ra AB , potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri HE , cum
 proportio quadratorum sit, quae 9. ad 2.



12. dersyde

COROLLARIUM II.

Rursus perpendicularis ex centro sphaerae ad planum basim
 pyramidis descripta, sexta pars erit diametri sphaerae, & tertia pars
 semidiametri. Sit enim L , centrum semicirculi ACB , eritque L ,
 centrum quoque sphaerae. Dico rectam LD , (quae nimirum ex cen-
 tro sphaerae ad basim EBG , ducitur perpendicularis; cum AD ,
 equalis sit ipsi EH , & ideo punctum D , idem quod H , quemad-
 modum & L , idem est quod centrum sphaerae) esse sextam partem
 diametri sphaerae, nempe rectae AB . & tertiam partem semidiamet-
 ri AL . Quoniam AD , dupla est ipsius DB ; Qualium partium 4.
 est AD , talium 2. erit DB ; ac proinde talium 6. tota AB , & semi-
 diameter AL , talium 3. Quare si AD , est 4. & AL , 3. erit LD , 1.
 & idcirco LD , sexta pars erit rectae AB , quae fuit partium earun-
 dem 6. & tertia pars rectae AL , quae fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis HI , duas tertias partes
 continebit ipsius diametri: Sit enim HI , eadem, quae AD , conti-
 neas duas tertias diametri, ex constructione.

Rursus, qualium partium 9. ponetur quadratum dia-
 metri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyra-
 midis. Nam proportio 9. ad 4. est du-
 plicata proportionis 3. ad 2.

ut hic apparet 9.

6. 4.

Dd

SCHO-

SCHOLIION.

QVOD si ex materia aliqua consticiantur quatuor trian-
gula aequilatera aequalia, disponanturque, ut hac figura indi-
cat, facile ex ipsis rite inter se compli-
catis componetur Tetraedrum, secun-
dum totam soliditatem. Hanc vero pra-
xim, & sequentes quatuor, quibus re-
liqua quatuor solida regularia in materia quavis sensibili con-
ficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scri-
ptore.

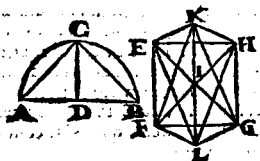


15.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere ; &
sphæra complecti, qua & pyramidem ; &
demonstrare, quod sphæræ diameter poten-
tia sit dupla lateris ipsius octaedri .

4. primi. Si r sphæræ, quæ constitutam pyramidem comprehen-
dit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur
ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC,
connectanturq; rectæ AC, BC, quæ æquales inter se erunt.
Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, uel BC, de-
scribatur super eam quadra-



tum EFGH, in quo ducan-
tur diametri EG, FH, se mu-
tuo secantes in I: eruntque re-
ctæ IE, IF, IG, IH, æquales,
cum sint semidiametri circuli
circa quadratum descripti, ut
in 4. lib. demonstratum est.

Deinde ex I, in utranque partem ad planum quadrati
erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL,
æquales ipsi IE : Et denique ex K, & L, deducantur
ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH ;
LF,

LF, LE, LH, BG: Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LEE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum; quod queritur. Quoniam latera EI, IK, trianguli EIK, equalia sunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defin. 3. lib. 12. At uero EIH, eo quod sit equalis angulo G I H, sibi deinceps, ob equalitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) Erit & basis EK, basi EH, equalis: Eodemq; modo eidem EH, equalis erit KH; ideoque triangulum equilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triagula esse equalitera; atque adeo equalia triangulo KEH, cum illorum latera equalia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis equaliteris & equalibus. Quod octaedrum dico comprehendit sphaera diametri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphaerae AB, potentia duplam esse lateris EF, uel AC.

3. primi.

4. primi.

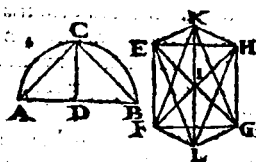
Quoniam IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL; (quod tres rectae KI, IE, IL, equalis sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectorum KL, IE, descriptus transibit per punctum E, ex lemmate praecedentis propos. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectorum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphaeram, quae complectitur octaedrum constitutum, cum per omnes illius angulos incedat: Cum ergo haec sphaera equalis sit datae sphaerae, cuius diameter AB; (Nam cum rectae AC, BF, equalis sint, ideoque ipsarum quadrata equalia; Sit autem tam quadratum rectae AC, duplum quadrati rectae AD, quam quadratum rectae EF, quadrati rectae EI; Erunt & rectae AD, EI, hoc est, KI, semidiametri equalis. Quare & totae diametri AB, KL, equalis erunt; ac proinde sphaerae ipsarum equalis existent.) comprehendetur idem octaedrum data sphaera.

47. primi.

Q uia vero quadratum recte AB, æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum recte AB, duplum quadrati recte AC. Quamobrem cum AB, sit diameter sphaeræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri BFG, manifestum est, diametrum sphaeræ potentia duplari esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphaera complexi sumus, quæ & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM. I.

Ex dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphaeræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti.



Atque proinde, cum KI, recta sit ad lineas EG, HF; recta quæque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum; Itaque & plana KPLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, ut paucis se complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, se mutuo ad angulos rectos secabunt; Quæ quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia erant inter se, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri sphaeræ duplum sit quadrati lateris octaedri, ut ostendimus,) quadratum diametri HF, æquale existat quadratis laterum octaedri FK, KH. Ita enim efficitur, ut angulus, FKH, rectus sit. Eademque est ratio de ceteris angulis.

4. undec.

18. undec.

48. primi.

COROLLARIUM. II.

OCTAEDRUM dividitur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides BFGHK, BFGHL. Nam plana unius sunt similia & æqualia planis alterius; ut constat; cum sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphaeræ, ut est demonstratum.

COROLLARIUM. III.

Si tetraedrum, & octaedrum in eadem sphaera describantur, erit tetraedri lateris potentia sesquitergium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphaeræ divinum in sex partes. Quod etiam igitur diameter sphaeræ est potentia sesquialtera lateris tetraedri.

13. tertijde

edri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphaerae. Rursus quia diameter sphaerae est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. est quadratum diametri sphaerae. Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitergium esse lateris octaedri.

14. terdec.

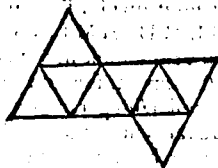
COROLLARIUM. IIII.

Da nunc, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectae FG; & in quadrato ELGK, recta EK, recta GL: Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de ceteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

15. undec.

SCHOLIUM.

Quod si ex materia aliqua conficiantur octo triangula aequilatera inter se equalia, disponanturque, ut hac figura indicat, facile ex ipsis rursus inter sese complicatis componetur octaedrum secundum suam soliditatem, ut ait Albertus Durerus.



PROBL. 3. PROPOS. 15.

14.

CVBVM constituere; & sphaera complecti, qua & priores figuras; & demonstrare, quod sphaerae diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIT sphaera, quae praedictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, ut sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectae AC, BC. Super rectam EF, quae rectae BC, sit equalis, quadratum constituatur EFGH, super quod erigantur

D d 3 perpen-

6. undec.

33. primi.

34. primi.

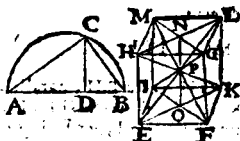
24. undec.

15. undec.

28. undec.

4. undec.

perpendicularēs EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipsi BC, quarum extrema coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo anguli IEF, KFE, recti sunt, ex



defin. 3. lib. 11. erunt rectæ EI, FK, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque æqualis posita sit ipsi BC, hoc est, ipsi EF. Igitur & EF, IK, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales sint ip-

si EF, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales sint oppositis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMI E; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, cum simile sit & æquale quadrato opposito FFGH. Est enim EL, solidum parallelepipedum, quod eius plana opposita sint parallelæ, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendere sphaera diametri AB. Sint enim planorum oppositorum EFKI; GHML, diametri EK, FI, GM, HL, per quæ ducantur plana EKLH, FIMG. Quia igitur tam planum EKLH, quam FIMG, cubum bisariam secant, utrumque per centrum cubi transibit, ex scholio ptopos. 39. lib. 11. per punctum uidelicet P, in quo, ex coroll. eiusdem ptopos. se mutuo quoque bisariam diuidunt omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum sectio, recta scilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia uero plana EKLH, FIMG, rectangula sunt, (Cum enim HE, perpendicularis sit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, EK; perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoq; ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus est HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, nec nō & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo sunt plana EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera unius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, ut constat ex scholio ptopos. 34. lib. 1.

Ac

Ac proinde & semidiametri PE, PL, PH, PK, PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, sphaeram describet per omnes cubi angulos transeuntem: quam quidem æqualem esse sphaerae diametri AB, ita demonstrabitur.

Cum quadratum rectæ EK, æquale sit quadratis æqualibus rectarum EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL: Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL: Est autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc est, quadrati rectæ BC: At vero eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB: (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt, ex coroll. propof. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propof. 20. lib. 6. ut est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipsius BD, sit tripla, erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt; Ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphaerarum, ideoque & ipsarum sphaera, æquales existunt.

47. primi.

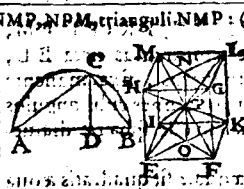
47. primi.

Quia uero ostensum est quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL; manifestum est, diametrum sphaerae potentia triplum esse lateris cubi. Quocirca cubum constituisimus, & sphaera completi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM. I.

Ex demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bisariam in centro sphaerae secare. Atque eadem ratione rectas lineas, quae centra quadratorum oppositorum coniungunt, bisariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseque mutuo bisariam secare in cetro P. Quod vero & recta NO, coniungens cetra N, & O, quadratorum oppositorum GHML, EFKI, in eodem cetro P, bisariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OPP, OPP, trianguli OPP, æquales sunt duobus angulis

19. primi.
16. undec.



15. primi.

Nam angulus OFF, aequalis est altero NMP, inter lineas FI, GM, quae parallelae sunt, cum sint communes, secundum planorum parallelorum. B. F. K. L. G. H. M. I. & angulus OFF, aequalis est opposito ad verticem N P M. Sunt autem & latera P F, P M, quibus adiacet, & quatuor, scilicet si per secundam, & aliter, & latera P Q, B N, equaliterunt; ac proinde recta N O bisariam secabitur in P. Eademque est ratio de ceteris lineis copurgentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

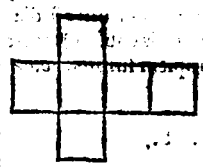
COROLLARIUM. II.

13. terside.
15. terside.

R. V. R. V. S. potentia diametri sphaerae, seu cubi, aequalis est potentia laterum tetraedri & cubi simul sumptis. Nam quatuor partium 9. est quadratum diametri; talium 4. est quadratum lateris tetraedri. Quatuor vero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur, quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul, sunt partium 9. quoadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri aequale est quadratis duorum laterum. Hoc etiam immittebatur esse semicirculo circa diametrum sphaerae descripto, in quo lateris tetraedri est, A C, cubi vero, B C. Peripicuum autem est, diametrum sphaerae A B, posse & rectam A C, & rectam B C, cum angulus A C B, sit rectus.

47. primi.

SCHOLION.



Quod si ex aliqua materia conspiciantur sex quadrata inter se aequalia, disponanturque, ut haec figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem; si illa quadrata rite complicantur inter se. Efficietur enim

ex illa figura quadam solida octo angulos solidos continens instar resatae cuspisiam, ut constat.

16.

PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM constituere; & sphaera

sphæra completi; qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosædri latus irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.

Sic. Sphæra, quæ prædictas figuras comprehendit, diametrum AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex A B, abscindatur quorunda pars BD, ut AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius A D, sesquiquarta; At uero A D, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad A B, connectantur rectæ AC, B C. Ad intervallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E, in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGH I K. Post hæc diuisantur arcibus FG, GH, HI, IK, KF, binasque in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGH I K, perpendicularæ erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eritque omnes inter se æquales; sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe EL, QR, EM, QS, EN, QT, EO, QV, EP, QX, (quas tamen omnes, ut uitaremus confusionem, non duximus.) binæ inter se æquales erunt: Ac proinde, cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. Quia uero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGH I K, per rectas EL, EM, ducto: Eademque ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem FGH I K, per rectas EM, EN, ducto: conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficiunt hæc duo plana unum planum, per ea, quæ ad propos. 6. lib. 1. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere unum planum; nec non planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad intervallum S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo FGH I K. Coniungantur puncta

11. quarti.

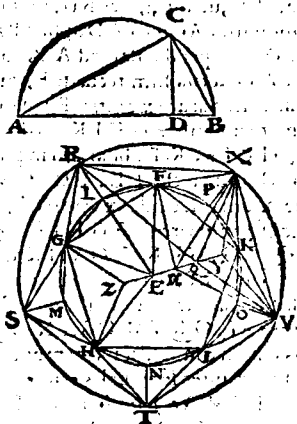
6. undec.

33. primi.

15. undec.

6. undec.
33. primi.
28. tertijde.

puncta R, S, T, V, X, rectis RS, ST, TV, VX, XR. Quia igitur LR, PX, æquales sunt & parallelæ, si concipiatur ducti recta LP, erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, LP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumente con-



cludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamob-

rem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia

igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK; & est LF, latus decagoni; erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR, quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 1. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus utriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem tria gula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia, cum eorum omnia latera æqualia sint lateribus pentagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in utramque partem extendatur,

10. tertijde

47. primi.

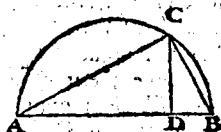
reddatur, sintque rectę QY, BZ equales singulis lateri decagoni circuli $FGHIK$, uel $RSTVX$; & connectantur rectę $VQ, XY, XQ, XY; GE, GZ, HE, HZ$. Quoniam ergo QX , semidiameter est circuli $RSTVX$, hoc est, latus hexagoni; & QY , latusest decagoni eiusdem circuli; erit quadratum lateris pentagoni, XV , æquale quadratis rectarum QX, QY . Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectę XY , quod angulus XQY , rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum $FGHIK, RSTVX$, parallela sint ostensa, sitque EQ , ad illius planum recta, ex constructione; erit quoque EQ , ad huius planum recta, ex scholio propof. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX , in eodem plano.) Igitur quadratum rectę XY , æquale est quadrato rectę XV , proptereaque recta XY , rectę XV , æqualis, Eodemque modo eidem XV , æqualis ostendetur YV ; Ac proinde triangulum VYX , æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectę RY, SY, TY , (quas tamen, ut uitaremus confusionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV , æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX , hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH , (cum EG , sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ , latus decagoni, angulusque GEZ , rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG , (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus) quę omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula uiginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturque singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosædnum. Quod dico cõprehendi sphaera diametri AB .

DIVISA recta EQ , bifariam in a , ducantur rectę aF, aX, aV . Quoniam igitur latera aQ, QV , trianguli aQV , æqualia sunt lateribus aQ, QX , trianguli aQX , cum QV, QX , sint semidiametri circuli $RSTVX$:

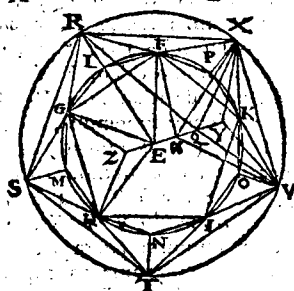
10. tertijde.
47. primi.

4. primi.

VX: Sunt autem & anguli α QV, α QX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. Erunt & bases α V, α X, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α , Q, ad R, S, T, ostenduntur rectæ α R, α S, α T, æquales & inter se, & ipsæ α V, α X. Rursus quia latera α Q, QX, trianguli α QX, æqualia sunt lateribus α E, EF, trianguli α EF, cum QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuisa sit bisariam in α ;



4. primi.



Sunt autem & anguli α QX, α EF, æquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. Erunt quoque bases α X, α F, æquales: Eodemque modo si ex α , E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostenduntur α G, α H, α I, α K, æquales ipsi α X; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam uero QE, semidiameter est, hoc

9. serij dec.

est, latus hexagoni circuli FGH IK; & EZ, latus decagoni eiusdem circuli, erit QZ, diuisa in E, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens E α , dimidium maioris segmenti, hoc est, recta α Z, quintuplum potest eius, quod ex E α , describitur, quadrati. Potest autem & recta α F, quintuplum eiusdem quadrati rectæ E α . (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ α E, ex scholio propos.

3. serij dec.

4. lib. 2. quod recta EF, dupla sit ipsius E α ; erunt quadrata rectarum EF, E α , simul quintupla quadrati rectæ E α . Cum ergo quadratis rectarum EF, E α , æquale sit quadratum rectæ α F; erit quoque quadratum rectæ α F, quintuplum quadrati rectæ E α .) Igitur æqualia sunt quadrati rectarum α Z, α F, ac proinde rectæ ipsæ α Z, α F, æquales erunt. Cum igitur ZY, bisariam secet in α , (propterea quod

47. primi.

quod

quod sit æqualibus αB , & Q , æquales rectæ addantur $E Z$, $Q Y$, totæ $Z x$, $Y x$, æquales fiant.) Erunt omnes rectæ du-
ctæ ex x , ad omnes angulos Icofaedri æquales. Quo circa
sphæra descripta circa diametrum ZY , ex centro α , per om-
nes angulos Icofaedri constituti transibit. Hanc ergo sphæ-
ram dico æqualem esse sphære diametri AB .

Cum sit ut αZ , ad $x E$, ita $Y Z$, dupla ipsius αZ , ad
 $Q B$, duplam ipsius αE ; Ac propterea ut quadratum rec-
tæ αZ , ad quadratum rectæ αB , ita quadratum rectæ $Y Z$,
ad quadratum rectæ $Q E$; sit autem quadratum rectæ αZ ,
ostensum quintuplum quadrati rectæ αE : Erit quoque
quadratum rectæ $Y Z$, quintuplum quadrati rectæ $Q E$, hoc
est, quadrati rectæ $B G$; quod recta $Q E$, æqualis sit posita
semidiametro $E F$, hoc est, rectæ $B C$: Est autem & eius-
dem quadrati rectæ $B C$, quintuplum quadratum rectæ AB .
(Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit ut AB , ad $B C$, ita
 BC , ad BD ; erit ut AB , ad BD , ita quadratum rectæ AB ,
ad quadratum rectæ BC , ex coroll. propos. 10. lib. 6. Ac pro-
inde existente AB , quintupla ipsius BD , erit etiam quadra-
tum rectæ AB , quintuplum quadrati rectæ $B C$.) Quadrata
igitur rectarum $Y Z$, AB , equalia sunt, ideoq; & rectæ $Y Z$,
 AB ; Ac propterea & sphære circa ipsas, æquales erunt.

Quoniam denique diameter sphære AB , Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est,
latus Icofaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor uoca-
tur.) potestque quintuplum quadrati rectæ $B C$, hoc est, rec-
tæ illi æqualis $E F$, erit quoque semidiameter $E F$, circuli
 $FGHIK$, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB , $E F$,
cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum,
nempe quam 5 ad 1. uel 10. ad 2. erunt commensurabilia;
Ac propterea & rectæ AB , $E F$, commensurabiles erunt,
saltem potentia. Cum ergo AB , sit Rationalis, erit & $E F$,
Rationalis.) Quare & tota diameter circuli $FGHIK$, Ra-
tionalis erit; Ac propterea FG , latus pentagoni, hoc est,
latus Icofaedri, Irrationalis erit linea, quæ uocatur Minor.
Icofaedrum igitur constituimus, & sphæra sumus complexi,
quæ & ante dictas figuras; & demonstrauiamus, quod Ico-
faedri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.
quod erat faciendum.

6. de simi

COROLLARIUM I.

Ex dictis inferitur, sphaerae diametrum esse potentia quintuplâ semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Offensum enim est, quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectae BC, hoc est, semidiametri EF.

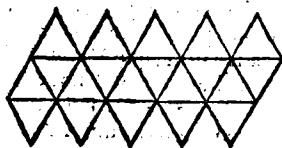
COROLLARIUM. II.

Item manifestum est, sphaerae diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli. Nam YZ, diameter sphaerae componitur ex BQ, latere hexagoni, & ex QY, BZ, lateribus decagoni circuli FGHK.

COROLLARIUM. III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectae, quae ex L, in P, duceretur. Cum igitur eadem recta L P, sit quoque parallela recta H I, ut in scholio propos. 17. lib. 3. demonstravimus; (eo quod aequales sint arcus HL, I P; continet enim uterque tres decimas partes totius circumferentiae,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eadēq; est ratio de ceteris lateribus oppositis.

SCHOLIUM.



Quod si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula aequilatera inter se aequalia, disponanturque, ut hac figura indicat, componitur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

17.

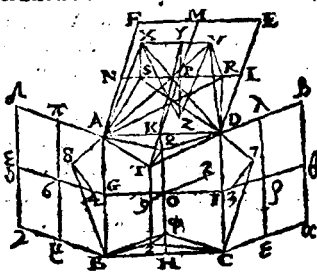
PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphaera complecti, qua & praedictas figuras; & demonstrare, qd Dodecaedri latus Irrationalis est linea; quae vocatur Apotome.

SIT

S I T una basis cubi data sphaera comprehensi, quadratum $A B C D$, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos $A D E F$, ut sit communis horum sectio recta $A D$. (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, ut cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis $E F G H$, quatuor lineæ $E I, F K, G L, H M$, ipsi basi $E F G H$ perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin $E F G H$.)

Diuisis itaque cunctis lateribus bitariâ in punctis G, H, I, K, L, M, N , quæ rectis connectantur secantibus sese in O , P , ceteris quadratorum, ut constet ex demonstratione octauæ problematis lib. 4. Socentur OK, PL, PN , extrema ac media ratione



in punctis Q, R, S , ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX , æquales segmentis maioribus OQ, PR, PS . Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX , dico $ATDVX$, esse unum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonum $ATDVX$, sit in uno plano, ita ostendetur. Cum RV, SX , sint ad quadratum $A D E F$, rectæ, ipsæ erunt parallelæ; Ac prinde, cum sint æquales, (quia segmenta maiora PR, PS , quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cum & lineæ sectæ PL, PN , æquales sint.) erunt quoque coniungentes rectæ $RS, V X$, æquales & parallelæ: Est autem & $A D$, eadem RS , siue $L N$, parallelæ, eo quod $A N, D L$, parallelæ sint & æquales. Igitur & $A D, V X$, parallelæ sunt; Ac propterea rectæ coniungentes $A X, D V$, in eodem cum ipsis erunt plano; idcirco, trapezium $A D V X$, in uno existet plano: Est autem & triangulum $A T D$, in uno plano. Dico quod & in eodem plano cum trapezio $A D V X$. Ex P , ducatur $P Y$, parallelæ ipsi $R V$, quæ erit recta ad quadratum $A D E F$, quod ad idem recta sit $R V$: Et connectantur rectæ $K T, K Y$. Quod igitur est ut OK , ad OQ , ita OQ , ad $Q K$, ob sectionem

rectæ

12. undec.

6. undec.

33. primi.

33. primi.

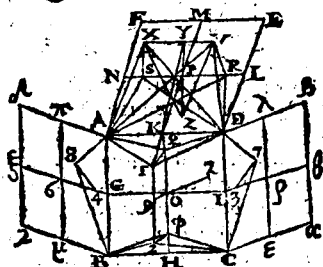
9. undec.

7. undec.

8. undec.

rectæ OK : Est autem KP , ipsi OK , æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & PY , ipsi OQ , (cum æqualis sit ipsi RV , quæ posita sunt æqualis ipsi OQ , maiori segmento; Erunt quoque ut KP , ad PY , ita OQ , hoc est, QT , illi æqualis, ad QK . Quare cum triangu-
la PKY , QTK , duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad unum angulum K , composita, ita ut homologa latera sint parallelia, nempe PK , & QT , inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum $ABCD$, & PY , QK , inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum $ADEF$: Erunt reliqua latera KY , KT , in rectam lineam collocata; Ac propterea recta TY , in uno erit plano, ideoque planum ATD , & planum $ADVX$, unum planum constituent, per rectas TY , AD , ductum. Quocirca pentagonum $ATDVX$, in uno existit plano.

Quo d vero sit æquilaterum, ita docebitur: Cum latera AN , NS , trianguli ANS , æqualia sint lateribus AK , KQ , trianguli AKQ ; (Sunt enim AN , AK , dimidia la-



tera cubi, & NS , KQ , segmenta minora rectarum æqualium segmentarum.) & anguli ANS , AKQ , recti; si ducatur recta AQ , erunt bases AS , AQ , æquales. Rursus cum latera AS , SX , trianguli ASK , sint æqualia lateribus AQ , QT ; tri-

anguli AQT ; (Nam rectæ AS , AQ , ostense sunt æquales, & SX , QT , sunt segmenta maiora rectarum æqualium segmentarum) & anguli ASX , AQT , recti, ex defin. 3 lib. 1. Erunt quoque bases AX , AT , æquales. Quod si ducatur recta DQ , ostendemus eodem argumento, rectam DT , rectæ AT , si uero ducatur recta DB , rectam DV ; rectæ DT , esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA , AT , TD , DV , æqualia; quibus etiam æquale ostendemus reliquum VX , hac ratione. Quadrata rectarum PN , NS , simul tripla sunt quadrati rectæ PS , hoc est, quadrati rectæ SX : Est autem quadrato rectæ PN , æquale quadratum rectæ AN . Igitur & quadra-

6. undec.

33. sexti.

1. undec.

4. primi.

4. primi.

4. undec.

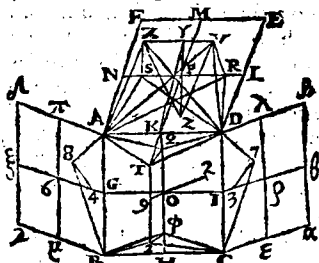
quadrata rectorum AN, NS , simul tripla sunt quadrati rectorum SX . Cum ergo quadratis rectorum AN, NS , æquale sit quadratum rectorum AS ; erit quoque quadratum rectorum AS , triplum quadrati rectorum SX ; Ac proinde quadrata rectorum AS, SX , simul, quadrupla eiusdem quadrati rectorum SX : Est autem quadratis rectorum AS, SX , æquale quadratum rectorum AX . Quadratum ergo rectorum AX , quadruplum quoque erit quadrati rectorum SX , hoc est, quadrati rectorum P , hoc est, quadrati rectorum XY ; Sunt enim rectorum PS, XY , æquales. Cum igitur & quadratum rectorum VX , quadruplum sit eiusdem quadrati rectorum XY , ex scholio propof. 4 lib. 2. quod VX , dupla sit ipsius XY ; Erunt quadrata rectorum AX, VX , æqualia; Ac proinde rectorum ipsæ æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV , ostense sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum $ATDVX$.

Quod autem & æquiangulū sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV ; cum PN , secta sit in S , extrema ac media ratione, eique addita PR , æqualis maiori segmento P ; erit quoque NR , secta in P , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP . Quadrata igitur rectorum NR, RP , simul tripla sunt quadrati rectorum NP , hoc est, quadrati rectorum AN : Est autem quadratum rectorum RV , æquale quadrato rectorum RP . Ergo & quadrata rectorum NR, RV , tripla sunt quadrati rectorum AN ; Ac proinde quadrata rectorum NR, RV, AN , quadrupla sunt eiusdem quadrati rectorum AN : Sunt autem quadrata rectorum NR, AN , æqualia quadrato rectorum AR . Igitur & quadrata rectorum RV, AR , quadrupla sunt quadrati rectorum AN . Cum ergo quadratis rectorum AR, RV , æquale sit quadratum rectorum AV ; Erit quoque quadratum rectorum AV , eiusdem quadrati rectorum AN , quadruplum. At uero eiusdem quadrati rectorum AN , quadruplum est quadratum rectorum AD , ex scholio propof. 4 lib. 2. quod AD , dupla sit ipsius AN . Aequalia igitur sunt quadrata rectorum AV, AD , ideoque & rectorum AV, AD , æquales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX , ostendemus DX, DA , æquales esse; ac propterea tres rectorum AD, AV, DX , inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA, TD , trianguli TAD , æqualia sunt lateribus DV, VX , trianguli DXV ; & bases AD, DX , æquales quoque: Erunt & anguli $ATD, D V X$.

DVX, æquales. Non secus offendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV; Ac proinde, cum in pentagono æquilatere ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV; ipsum erit æquiangulum.

7. ter. dec.

Q u o d si sumantur alia duo cubi quadrata C & B D, B & A, recta ad quadratum ABCD, in cōmunibus sectio-



nibus CD, AB, quorū singula latera bifariam secantur in e, θ, λ, I, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde OH, OK, ρ I, σ G, extrema æ media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex qui-

bus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exterioris, perpendiculares φ 2, Q T, 3 7, 4 8, æquales segmentis maioribus φ O, Q O, 3 ρ, 4 σ, coniunganturq; rectæ T 2, 2 C, C 7, 7 D, DT, TA, A 8, 8 B, B 2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T 2 C 7 D, T Z B 8 A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo coherentia lateribus cōmunibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangentia reliqua nouē cubi latera; constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphaera comprehendit, qua & cubum, & præcedentes figuras, hac arte demonstrabimus.

I N T E L L I G A N T U R plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorū latera bifariam secantes ducuntur, nempe planū ADEF, & eius oppositū, planis ductis per rectas KM, LN; Itē planū ABCD, & eius oppositū, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniā igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basib⁹ cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD: Erunt & communes eorū sectiones ad eadē cubi plana rectæ. Quare cū YP, recta sit ad planū ADEF, ipsa producta uerius Z, erit communis sectio plano-

19. undec.

planorum, per rectas KM, LN, ductorum. Eodē pacto, si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis OZ, erit ipsa, communis sectio planorum quę per rectas GI, HK, ducuntur. Quia uero dictę cōmunes sectiones, & diametri cubi se mutuo bisariam secant; secant se mutuo bisariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bisariam in centro sphęrę cubum complectentis, ex coroll. & propof. 15. huius lib. Punctū igitur Z, centrum erit sphęrę circa cubum descriptę; Ac proinde omnes rectę ex Z, ad omnes angulos cubi ductę inter se ęquales erunt: Quibus omnibus ęquales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. Quoniam parallele sunt KP, OZ, quod utraq; recta sit ad planum ABCD; Item parallele sunt OK, ZP, quod utraq; recta sit ad planum ADE; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrāmum, ac propterea PZ, ęqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autem & PY, ipsi PR, ęqualis. Tota ergo ZY, toti NR, ęqualis erit. Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectę NP, quod NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erunt quoque quadrata rectarum ZY, PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectę PZ: (Est enim YX, ęqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PY:) Est autem quadratis rectarum ZY, YX, ęquale quadratum rectę ZX. Igitur & quadratū rectę ZX, triplum erit quadrati rectę ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi, triplum est quoque quadratum semidiametri sphęrę cubum cōprehēdis. (Nam ut diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; Ac proinde ut quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratū semidiametri ad quadratum dimidij lateris. Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Aequale igitur est quadratum rectę ZX, quadrato semidiametri sphęrę, seu cubi, Ac propterea ZX, ęqualis semidiametro. Eadē ratione erit, ducta recta ZV, semidiametro ęqualis. Vel certe, quia cum latera ZY, YX, trięguli ZYX, ęqualia sint lateribus ZY, YV, trięguli ZYV, & anguli cōtēnti recti. (cum n. PY, sit perpen-

Ec 2 dicularis

39. undec.

6. undec.

34. primi

4. tertijdec.

17. primi.

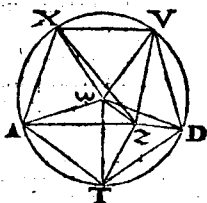
15. primi

22. sexti.

15. tertijdec.

4. primi.

dicularis ad $L N$, erit quoque eadem ad sibi parallelam $V X$, perpendicularis.) Erunt bases $Z X, Z V$, æquales : Eademq; ratione semidiametro spherę æquales erunt rectę ductę $Z A, Z D$. Sunt ergo iam quatuor rectę ductę ex Z , centro spherę ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X , æquales semidiametro spherę. Vt autem ostendatur & recta ducta $Z T$, ad quintum angulum T , semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus $A T D V X$, & in planum ipsius ex Z , centro spherę



47. primi.

perpendicularis demittatur $Z \omega$, connectanturque rectę $\omega A, \omega T, \omega D, \omega V, \omega X$. Quoniam igitur quadratū rectę $Z A$, æquale est quadratis rectarum $Z \omega, \omega A$; & quadratum rectę $Z X$, quadratis rectarum $Z \omega, \omega X$: Sunt autem quadrata rectarum $Z A, Z X$, equalia, quod rectę $Z A, Z X$, ostensę

sint æquales; Igitur & quadrata rectarum $Z \omega, \omega A$, quadratis rectarum $Z \omega, \omega X$, equalia; Ac proinde dempto cōmuni quadrato rectę $Z \omega$, equalia relinquentur quadrata rectarum $\omega A, \omega X$, ideoque rectę ipsę $\omega A, \omega X$, æquales erūt. Non aliter ostendentur rectę $\omega V, \omega D$, & inter se, & ipsis $\omega A, \omega X$, æquales, quod & rectę $Z V, Z D$, æquales sint ostē sę rectis $Z A, Z X$. Quare cum ex ω , cadant in circumferentiam plures rectę lineę æquales, quā duę; punctum ω , centrum erit circuli; Ac proinde ωT , reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarum $Z \omega, \omega A$, æqualia erūt quadratis rectarum $Z \omega, \omega T$. Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectę $Z A$; his uero quadratum rectę $Z T$; Erunt æqualia quadrata rectarum $Z A, Z T$; proptereaq; & rectę $Z A, Z T$, æquales. Quare spherā complectens cubum ex centro Z , descripta comprehendet pentagonum quoque $A T D V X$; Eodemq; modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem spherā comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.

47. primi

15. quimi.

P O S T R E M O cum sit ut $N P$, ad $P S$, ita $P S$, ad $S N$: erit quoque ut $N L$, dupla ipsius $N P$, ad $R S$ duplam ipsius $P S$, ita $R S$, dupla ipsius $P S$; ad rectam compositam ex $S N, R L$,

RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit S R: Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphaerae, quae Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius.) Igitur maius segmentum S R, hoc est, dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis est linea, quae uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphaera complexi sumus, &c. Qued erat faciendum.

6. tersydec.

COROLLARIUM I.

Cum ergo demonstratum sit, recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam K S: sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti.

COROLLARIUM II.

Sic quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, etque ostensum æquale rectis A V, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

Quoniam uero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum latus pentagoni; ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque maius segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphaerae.

8. tersydec.

5. tersydec.

COROLLARIUM III.

Comstat etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bitariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt V X, T Z, quae uidelicet parallela sunt lateribus cubi E F, A B; aliaque quatuor reperiuntur super reliquis quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos, a lineis

Ec 3 rectis,

rectis, quæ centra basiû cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ , qZ , &c. quæ ut demonstratum est, se mutuo interfecant in centro Z . Dico se mutuo fecare bisariam & ad angulos rectos: bisariam quidem, quoniam cum rectæ PZ , OZ , æquales sint dimidio lateri cubi; & $Y P$, $q O$, æquales maioribus segmentis equalibus PS , OQ ; erunt totæ YZ , qZ , æquales; Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z , ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bisariam in centro Z , mutuo fecant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammò $KOQZ$ triangulus OZP rectus est, cum opponatur recto OKP . Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basiû coniungentes efficere angulos rectos. Oës enim parallele sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, ut perspicuum est.

COROLLARIUM. IIII.

DE 11 Q V S constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bisariam, & ad angulos rectos, ut dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Cum enim quadrata rectarum ZY , YP , tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ ; erit ZY , secta in P , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit PZ , ex scholio propoſ. 4. huius lib. Ac proinde erit ut ZY , ad ZP , ita ZP , ad PY ; ideoque ut dupla ipsius ZY , nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bisariam, ad duplâ ipsius ZP , nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP , ad duplam ipsius PY , hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bisariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eiusdem sphaera.

15. quinti.

SCHOLIUM.



QUOD si ex aliqua materia cõficiantur duodecim pentagona æquilatèra, & æquiangula, inter se æqualia, disponanturq; ut hac figura indicat, cõponetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem.

sem, si rite inter se complicantur.

18.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere,

nere, & inter se comparare,

Si r sphaerę diameter AB , quę in C , secetur bifariam; In D , uero ita, ut BD , sit ipsius pars tertia; In E , denique ita, ut BE sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB , semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E , ipsi AB , perpendiculares CF, DG, EH ; connectanturque rectę AF, BF, AG, BG, AH, BH . Post hæc ex HA , abscindantur HI , equalis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter; seu latus Hexagoni est BH ; connectaturque recta BI . Postremo IG , secetur extrema ut modò uatione in K , sitque maius segmentum BK .

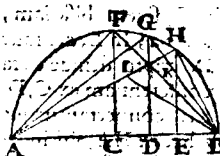
Quoniam igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico AG , esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF , latus Octaedri; BG , latus cubi; BI , latus Icosaedri; BK , denique latus Dodecaedri. Quoniam AG , media proportionalis est inter BA, AD , ex coroll. propof. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propof. 20. eiusdę lib. ut BA , ad $A D$, ita quadratũ rectę BA , ad quadratũ rectę AG . Est autem BA , ipsius AD , fescquialtera; cum talium partium 3 sit AD , quarum 2 est BA . Igitur & quadratũ rectę BA , fescquialterum est quadrati rectę AG ; Ac proinde cum diameter sphaerę sit potentia fescquialtera lateris Tetraedri; Erit AG , latus Tetraedri.

Rursus quoniam AF , est media proportionalis inter BA, AC , ex eodę coroll. propof. 8. lib. 6. Ac proinde ut BA , ad AC , ita quadratũ rectę BA , ad quadratũ rectę AF , ex adducto coroll. propof. 20. lib. 6. Est autę BA , ipsius AC , dupla; Erit quadratũ rectę BA , duplũ quadrati rectę AF . Quare cum diameter sphaerę potentia sit dupla lateris Octaedri; Erit AF , latus Octaedri. Eodem modo erit BG , latus Cubi.

Denique cum BG , sit media proportionalis inter AB, BD , ideoque ut AB ad BD , ita quadratũ rectę AB , ad quadratũ rectę BG , ex præfatis duobus corollarijs lib. 6. Sit autem AB , ipsius BD , tripla, ex constructione; Erit quadratũ rectę AB , triplum quadrati rectę BG . Quocirca cum sphaerę diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG , latus cubi.

PRAETEREA quia, ex eodę corollarijs, BH , est media proportionalis inter AB, BE , atque ideo ut AB , ad BE ,

ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Est autem, ex constructione A B, ipsius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter spheræ potentia sit quintupla semidiametri circuli, quinque latera Icosædri æquivalentis, ex coroll. 1. propos.



10. serij dec. 47. primi. 16. serij dec. diameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli: Est autem H I, latus dodegoni eiusdem circuli, ex constructione. Igitur latus pentagoni poterit & B H, & H I, simul; Ac proinde cum quadratum rectæ B I, æquale sit quadratis rectarum B H, H I, erit B I, latus pentagoni circuli eiusdem. Quam obrem B I, latus est Icosædri.

D E N I Q V A, cum B G, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius segmentum, latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti, ex coroll. 1. propos. 12. huius lib. Expositæ ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphaera descriptarum.

Q V I O D uero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat, cum demonstratum sit, diametrum spheræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis, potentia uero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perspicuum est, qualem partium 6. Diamet. 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse Tetraedr. 4. quadratum lateris Tetraedri; talium uero 6. Octaed. 6. 10. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi, talium 27. Cub. 27. 27. quadratum lateris cubi.

Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquialterum lateris Octaedri, potentia uero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata, ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri: nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex spheræ diametro descripta, proportio nem inter se habent, quam numerus ad numerum; Ac propterea diameter spheræ, & latera dictarum figurarum linee sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter spheræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia.

6. decimi.

tionalia: Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ut constat ex coroll. propof. 24. lib. 8. Erunt huiusmodi lineę, nimirum diameter ſphęre, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommenſurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles.

9. decimi.

A. V. vero latera Icoſaedri & Dodecaedri, quoniam ſunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero, Apotome, ut demonſtratum eſt; nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum ſint diametro ſphęre commenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum. oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.

Sed neque inter ſe ullo pacto commenſurabilia ſunt dicta latera Icoſaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cum latus Dodecaedri ſit Apotome, erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. Item cum latus Icoſaedri ſit linea Minor, erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod ſi dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantum, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam Minorem; ex eo, quod latus Icoſaedri Minor ſit. Quod eſt abſurdum. Nā ex ſcholio propof. 112. lib. 10. Apotome & Minor ſunt lineę Irrationales prorsus inter ſe differentes, nā ut neutra ſit ead, in alteri.

104. decimi

106. decimi

106. decimi

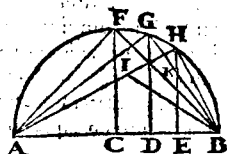
Et a quibus quavis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphęre, ideoque Rationalia exiſtant; duo vero poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia ſint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, ut latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri; Latus denique Icoſaedri maius latere Dodecaedri; Hoc eſt, eo ordine ſe mutuo excedunt dicta latera, quo præſatas figuras conſtruimus. Quę ſorte cauſa ſuit, cur Euclides non eodem

eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subten- dit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri BI, hac arte demonstrabimus.



Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD, & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum recte AB, noncuplum quadrati recte BD, cum noncupla propor-

tio sit duplicata proportionis triplę. Et hic apparet 11. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum recte AB, talium 1. erit quadratum recte BD. Qualium autem partium 9. est quadratum recte AB, talium 3. est quadratum recte BG; quod illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cū equalia sint quadrata recte BG. Igitur si auferatur quadratum recte BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum recte GD. Quoniam uero quadratum recte AB, quinquuplum est quadrati recte BH, erit quadratum recte BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quinquupla, quod 10. ad 2. quinquuplam proportionem habeant; erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quinquuplam, minor quam 2. Quare quadratū recte GD, maius est quadrato recte BH, idcoque recta GD, maior, quam recta BH. Rursus quia diameter si hęre AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni HI, minus esse tertia parte recte AB, hoc est. minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertię parti recte AB, erit dupla illius, æqualis duabus

20. sexti.

15. septijdec.

8. quinti.

10. quinti.

duabus tertijs partibus, nempe ipsi AD ; Ac propterea BH , reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD ; Atque adeo, cum quadratum rectæ AB , noncuplum sit ostensum quadrati rectæ BD , erit idem quadratum rectæ AB , noncuplum quadrati rectæ BH . Quod est absurdum. quintuplū enim est demonstratū. Non ergo HI , tertia pars est ipsius AB : Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI , dicatur maior tertia parte rectæ AB , & proinde dupla ipsius HI , maior quam duæ tertiæ, hoc est, quam AD , erit BH , minor quam tertia pars BD . Quare quadratum rectæ AB , maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BD . Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI , tertia parte ipsius AB : Sed neque æqualis tertiæ parti, ut ostendimus. Minor ergo est quam tertia pars, hoc est, quam BD . Itaque cum rectæ GD , DB , maiores sint rectis BH , HI , ut demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: Est autem quadratum rectæ BG , æquale quadratis rectarum GD , DB ; & quadratum rectæ BI , quadratis rectarum BH , HI . Quadratum ergo rectæ BG , maius quoque erit quadrato rectæ BI : Ac proinde recta BG , nempe latus cubi, maior erit quam recta BI , latus scilicet Icosædri.

MAIOR denique esse latus Icosædri BI , latere Dodecaedri BK , hæc ratione patefiet: Cum rectæ BG , dimissæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK , & minus GK ; erit rectangulum sub BG , BK , maius rectangulo sub BG , GK ; atque adeo rectangula sub BG , BK , & sub BG , GK , simul maiora duplo rectanguli sub BG , GK : Est autem rectangulis sub BG , BK , & sub BG , GK , æquale quadratum rectæ BG ; Et duobus rectangulis sub BG , GK , æqualia sunt duo quadrata rectæ BK (Nā cū sit, ut BG , ad BK , ita BK , ad GK ; erit quadratū rectæ BK , æquale rectangulo sub BG , GK ; ideoque duo quadrata rectæ BK , æqualia duobus rectangulis sub BG , GK .) Maius igitur quoque est quadratū rectæ BG , duobus quadratis rectæ BK ; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG , sex quadratis rectæ BK : Atqui tribus quadratis rectæ BG , æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH . (Cum enim quadratum rectæ AB , triplum sit quadrati rectæ BG ,

47. primi

2. secundi

17. sexti.

& quina-

& quintuplum quadrati rectæ B H ; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quam quinque quadrata rectæ B H, æqualia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa his quinque equalia.) Igitur & quinque quadrata rectæ B H, maiora erunt sex quadratis rectæ B K ; Ac proinde unum quadratum rectæ B H, maius erit uno quadrato rectæ B K. (si namque æquale esset quadratum rectæ B H, quadrato rectæ B K, uel minus; forent quinque quadrata rectæ B H, minora sex quadratis rectæ B K, quod est absurdū, cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quam recta B K ; Ac propterea cum B I, maior sit quā B H, multo maior erit B I, latus uidelicet Icosaedri, quam B K, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

INTERPRETES hōc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quam planis æquilateris, & æquiangulis cōtineatur, inter se æqualibus, hac fere ratione.

Ex duobus triangulis, uel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

Ex tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus ;

Ex quatuor, Octaedri angulus ;

Ex quinque angulus Icosaedri ;

Ex sex autem huiusmodi triangulis ad illū punctum eorum vibus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes unius rekti, ex coroll. 3. propof. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertia partes unius rekti, hoc est, quatuor rektis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. Nam solidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rektis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

Ex tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor

quatuor autem quadratis nullus angulus solidus confici potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quā quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, ut ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde unus angulus contineat unū rectum, ac propterea quintam partem unius recti, continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes unius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus conficietur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cum enim unus, ut dictum est, maior sit recto, eo quod contineat unum rectum, & insuper recti quintam partem, erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis conficietur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangularibus conficui poteris angulus solidus. Nam cum sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, ut ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; Ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac propterea duas partes sextas unius recti, continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus eiusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse conficui, quæ planis æquilateris, & æquiangularibus inter se æqualibus contineatur.

Nam si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in unum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituatur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

Si vero quatuor eiusmodi triangula conveniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

Si denique assumantur quinque talia triangula ad offermandum angulum solidum, conficietur Icosædri viginti triangulis eiusmodi contentum.

QVOD si tria quadrata equalia coeant in vnum punctum, ut constituent angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona aequilatera, & equiangula, inter se equalia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quandam ex Hypsiclæ Alexandrino, quo expedire numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figura regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis latera, ut habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, ut numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLUM. Si quatuor triangula Pyramidis, suo Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, ut in 3 sunt 12, quorum dimidium est 6, numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4, sunt 24, quorum dimidium est 12, numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3, numerum laterum vnius trianguli, sunt 24, quorum dimidium est rursus 12, numerus laterum Octaedri. Si rursus 20, triangula Icosaedri multiplicentur in 3, numerum laterum vnius trianguli, sunt 60, quorum dimidium est 30, numerus laterum Icosaedri. Si denique 12, pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5, numerum laterum vnius pentagoni, sunt 60, quorum dimidium est rursus 30, numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, ut habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt angulum solidum constituendum, ut numerus

numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLUM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt unum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum unius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli faciunt unum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri.) faciunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri.) producant 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum unius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conveniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

ELEMENTI DECIMITERTII FINIS.



EVCLIDIS

ELEMENTVM XIII.

ET SOLIDORVM QVARTVM,

Vt quidam arbitrantur : vt alij uero,
Hypsiclis Alexandrini de quin-
que corporibus.

LIBER PRIMVS.



PROOEMIUM HYPsiclis ALE-
xandrini ad Protarchum.



BASILIDES Tyrus, Protar-
che, Alexandriam profectus, pa-
trique nostro ob disciplinae societa-
tem commendatus, longissimo pere-
grinationis tempore cum eo uersa-
tus est. Cumq; differerent aliquan-
do descripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri
& Icosaedri eidem sphaerae inscriptorum, quam hac in-
ter se habeant rationem, censuerunt ea non recte tra-
didisse Apollonium; quae a se emendata, ut pater meus
dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi
in alterum librum ab Apollonio editum, qui demon-
strationem accurate complectebatur de re proposita;
ex cuiusque problematis indagatione magnam equidem
capi

capere uoluptatem. Illud certe ab omnibus perspicere potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, studio nos postea scripsisse uidemur, id monumentis consignatum tibi dedicandum duximus; ut qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum uel maxime in Geometria uersatus, scite ac prudenter indices ea, quae dicturi sumus: Ob eam uero, quae tibi cum patre fuit, uita consuetudinem, quaque nos complecteris, beneuolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, ut prooemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

PRÆDICATIONE libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi ascribuntur: Duo uero subsequentes a plerisque Hypsicle Alexandrino recte, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrum, sam secundum superficies, quam soliditates: In posteriori uero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium u. nius intra aliam; ut hi duo libri sint instar appendicis diuisdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non iniucunda, quae spectant ad comparationes duorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones unius in alia; quas uero enim propositionibus duntaxat liber hic quatuordecimus, quinque uero problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, ut aliquam lucem huic tractationi afferremus; paulo uberius de dictis figuris regularibus in uniuersum differere proponenda maria theoremata, atque problemata, quibus & praedicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operam, & sedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non solum inssequentes duos libros quam plurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; uerum etiam integrum librum, qui decimus sextus est ordine adiunxit, in quo proprietates illas

stres de dictis corporibus proponit. Catenam præcipuum fuisse Hypsicles in hisce libris, 14. diffinitate de comparatione mutua Icosædri & Dodecaedri, facili intelligi potest ex eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

Quoniam vero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus eandem in numero propositionum, quam in eorundem ordine, & inter se, & a Francisco Flussæ, ideoque apud discipulos, annotavimus in margine ordinem utriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsicles, inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine unicus eandem numerum reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsicles, significatur; Quod si aliquando loco superioris numeri, apponatur hæc nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intelligi, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsicles, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

I.

THEOR. I. PROPOS. I.

Quæ ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque linearum simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

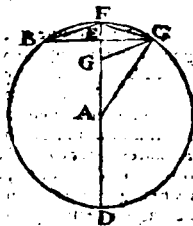
Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse linearum compositarum ex latere hexagoni, & decagoni eiusdem circuli. Extensa enim AE, in utramque partem, ut perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, æquali ipsi BE, connectantur rectæ AC, CG, CF, BF. Quoniam igitur perpendicularis AE, secat rectam BC, bisariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CB, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti sint æquales, nempe recti, erunt bases CF, BF, æquales, ideoque & arcus

CF,

3. utriusq.

4. primi.

CF, BF, æquales; Ac proinde existente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiusdem pars decima; atq; adeo recta CF, latus erit decagoni. Rursus quia latera CE, EF, trianguli GBF, equalia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, suntque anguli contenti, recti; erunt & bases CA, CG, & anguli GFG, GGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars est semicircumferentiæ DCF, cum sit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. est arcus DC, hoc est, arcus DC, quadruplus erit arcus CF. Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: Est autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem sit basis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi equalis, ostensus CGF, duplus erit anguli CAF: Atqui angulus CGF, externus, æqualis est internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, sit dimidium anguli GGF, ut ostensum est, erit GCA, reliquam dimidium eiusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA, ac proinde & latera AG, CG, æqualia: Est autem CG, recta ostensa equalis recte CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duplus EF, FC, simul: Ac proinde tres simul AE, EF, FC, hoc est, duæ simul AF, FC, duplæ erunt ipsius AP, atque idcirco & contrario erit AE, ducta uidelicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum simul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.



28. tertij.

4. primi.

33. sexti.

20. tertij.

32. primi.

6. primi.

11. 2. 1

COROLLARIUM I.

Ex his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem distat hæc recta subtenit, bifariam: Demonstratur, quia est recta AE, quæ ex centro perpendi-

F f 2 cularis

colaris est ad B C, dividere arcam B C, bisariam in F.

COROLLARIUM. II.

Hic quoque sic, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam, æqualem esse unique lateri simul, & C, quæ ex centro ad latus trianguli equilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quonia ut in hæc propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni, æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; Est autem perpendicularis ad latus trianguli equilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni, esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

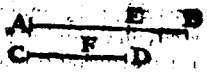
4.
2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secantur; ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportionones.

Si c y n r v x binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportionones secari; hoc est, esse ut A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item ut A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cum enim sit ut A B, ad A E, ita A E, ad E B; & ut C D, ad C F, ita C F, ad F D; erit rectangulum sub A B, E B, æquale quadrato rectæ A E; & rectangulum sub C D, F D, æquale quadrato rectæ C F. Quamobrem erit ut rectangulum sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F; (est enim utrobique A Equale ratio proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstravimus in scholio propos. 4. lib. 5. ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: Et componendo, ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ C F:

17. sexti.



C F:

CF: Sed quod quater continetur sub AB, EB, una cum quadrato rectæ AE, æquale est quadrato lineæ compositz ex AB, EB; Et quod quater continetur sub CD, FD, una cum quadrato rectæ CF, æquale est quadrato lineæ compositz ex CD, FD. Igitur erit quoque, ut quadratum lineæ compositz ex AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadratum lineæ compositz ex CD, FD, ad quadratum rectæ CF; Ac proinde, ut recta composita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta composita ex CD, FD, ad rectam CF: Et componendo, ut composita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc est, dupla ipsius AB, ad rectam AE, ita recta composita ex CD, FD, & recta CF, id est, dupla ipsius CD, ad rectam CF; Et permutando, ut dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita AE, ad CF: Vt autem dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita est AB, ad CD. Erit ergo ut AB, ad CD, ita AE, ad CF; Ac propterea, cum sit ut tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam, erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, ut tota ad totam. Quare ut AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum utraque proportio eadem sit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit ut AE, ad EB, sic CF, ad FD; & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secantur, &c. Quod erat ostendendum.

8. secundi.

12. sexti.

15. quinti.

19. quinti.

COROLLARIUM

Ex hac propositione & precedenti inferemus hoc theorema.

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extremâ ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

Ex centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum AE, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli

FF 3

ductæ

duode; minus utroque segmentum ED , æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namque recta AD , ad F , & connexa recta FC ; erit FC , latus decagoni, cum ex coroll. 1. propof. 1. huius lib. arcus BC , nempe quinta pars totius circunferentia, bifariam secetur in F ; Ac proinde recta composita ex AF , latere hexagoni, & FC , latere decagoni, secta erit extrema ac mediâ ratione, cuius maius segmentum AF , latus hexagoni, minus vero segmentum FC , latus decagoni. Quare



9. tertijdec.

ut in hac propos. ostensum est, erit ut tota AD , dimisa secundum extremam ac mediâ rationem, ad totam compositam ex AF , FC , similiter diuisam, ita AE , maius segmentum ad AF , maius segmentum; & ED , minus segmentum ad FC , minus segmentum: Est autem tota AD , dimidium totius compositæ ex AF , FC . Igitur & AE , ipsius AF , semidiametri, & ED , ipsius FC , lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per coroll. propof. 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, equalis sit dimidio semidiametri, perspicuum est, maius segmentum AE , æquale esse dictæ perpendiculari, minus vero ED , dimidio lateris decagoni.

1. quartide.

2.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

4.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, utraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATUR in circulo $ABCDE$, cuius centrum F , pentagonum $ABCDE$, subtendatque recta AC , bina latera AB , BC . Dico quadrata



rectarum CD , AC , simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A , per centrum recta AFG , quæ per coroll. 1. propof. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD , & latus CD , bifariam in G ; & H ; erit arcus CG , decima pars totius circunferentia,

rentiæ, idcoque recta subtenſa CG, latus decagoni. Quoniam
igitur recta AG, dupla eſt rectæ FG; erit ex Rhodio propoſ. 4.
lib. 2. quadratū rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG:
Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarū
AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG; quadrupla
ſunt quadrati rectæ FG; Atq; ideo tria quadrata rectarum
AC, CG, FG, quintupla quadrati eiufdem rectæ FG. Cum
ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni,
& lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris
videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum
AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum ſemi-
diametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum de-
ſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, &c.
Quod erat demonſtrandum.

47. primi

10. ſecundæ.

COROLLARIUM.

INFERTVR ex his theorema huiufmodi.

SI in ſphæra eadem cubus, & dodecaedrum inſcriban-
tur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dode-
caedri, utraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiamet-
ri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis;

CIRCUMſcribat enim circulus ABCDE, pentagonum
unum Dodecaedri in quapiam ſphæra deſcripti; eritq; ex coroll.
2. propoſ. 17. lib. 13. recta AC, ſubtendens pentagoni angulum B, la-
tus cubi in eadem ſphæra deſcripti. Perſpicuum eſt autem, quadra-
ta rectarū AC, CD, lateris ſcilicet cubi & lateris Dodecaedri, quin-
tupla eſſe quadrati ſemidiametri FG, &c.

3. quartide.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli ſece-
tur extrema ac media ratione; maius illius
ſegmētū erit latus decagoni eiufdē circuli.

SECETVR AB, latus hexagoni alicuius circuli extre-
ma ac media ratione in C, ſitque maius ſegmētum AC.
Dico AC, eſſe latus decagoni eiufdem circuli. Sit enim AD,

Ff 4 latus

p. servj dec.

p. quarside.

latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum ipsi AB, eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum BA: Ponitur autem & A B, secta in C,



similiter. Igitur erit ut B D, tota ad maius sui segmentum A B, ita A B, tota ad maius sui segmentum A C: Sed est quoque ut B D, tota ad maius sui segmentum A B, ita A B, ma-

ius segmentum ad A D, segmentum minus, per definitionem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit ut A B, ad A C, ita eadem A B, ad A D: Ac propterea A C, A D, æquales erunt. Cum ergo A D, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est A B, erit & A C, eiusdem circuli latus decagoni.

p. servj dec.

ALITER. Adiungatur ipsi AB, in rectum recta A D, æqualis maiori segmento A C, eritque tota recta B D, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur A B, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. A D, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipsi A D, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius A B, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum.

2.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

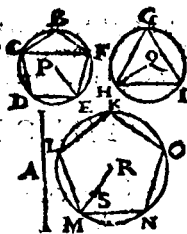
5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphaeræ inscriptorum.

IN sphaera, cuius diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius unum pentagonum B C D E F, & Icosaedrum, cuius unum triangulum G H I. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum B C D E F, & triangulum G H I, hoc est, circulos B C D E F, G H I, ipsa circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus K L M.

N O,

MO, pentagonum KLMNO, ex quo Icosaedrum sphaerae
 inscribitur, ita ut quinque latera huius pentagoni sint late-
 ra Icosaedri, ideoque quodlibet ipsorum aequale cuius late-
 ri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectae
 PE, QH, RM, & seceturque RM, extrema ac media ratione in
 S, eritque maius segmentum RS, latus decagoni in circulo
 KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni. Subtendat quo-
 que recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quae erit,
 per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphaera
 descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos.
 BF, latus Dodecaedri, est maius segmentum lateris cubi
 CF, secti extrema ac media ratione, erit ut tota CF, ad tota
 RM, ita BF, maius segmentum ad RS, maius segmentum, Ac
 propterea ut quadratum rectae CF,
 ad quadratum rectae RM, ita qua-
 dratum rectae BF, ad quadratum re-
 ctae RS: Atque adeo, per ea, quae
 demonstrata sunt in scholio pro-
 pos. 4. lib. 5. ut triplum quadrati re-
 ctae CF, ad quintuplum quadrati re-
 ctae RM, ita triplum quadrati rectae
 BF, ad quintuplum quadrati rectae
 RS: Est autem triplum quadrati re-
 ctae CF, aequale quintuplo quadrati
 rectae RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex
 propos. 18. lib. 13. quam quintuplum quadrati semidiamet-
 ri RM, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. aequale est quadra-
 to ex A, diametro sphaerae.) Igitur & triplum quadrati re-
 ctae BF, aequale erit quintuplo quadrati rectae RS: Quia ve-
 ro quadratum rectae MN, lateris pentagoni, aequale est qua-
 drato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectae RS, lateris de-
 cagoni, erunt quoque quinque quadrata rectae MN, aequa-
 lia quinque quadratis rectae RM, & quinque quadratis re-
 ctae RS. Ignur & quinque quadrata rectae MN, aequalia
 sunt tribus quadratis rectae CF, (cum haec est nisi sint ae-
 qualia quinque quadratis rectae RM,) & tribus quadratis
 rectae BF, quae aequalia sunt quinque quadratis rectae RS.
 Sed quoniam, (cum quadrata sectorum CF, BF, quinque
 quadratis semidiametri PH, sint aequalia) erunt quadrata re-



16. scribitur

4. quare de.

2. quare de.

22. festi.

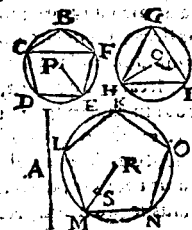
10. scribitur de.

1. quare de.

et

12. *servide.*

At CF , & tria quadrata rectæ BF , æqualis sunt quindecim quadratis rectæ PE ; & quinque quadrata rectæ MN , æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH ; (Nam cū MN , æqualis sit ostensa ipsi GH , lateri Icosædri, seu trianguli æquilateri, sic autem quadratū ipsius GH , æquale tribus quadratis semidiametri QH ; Erunt quinque quadrata rectæ GH , hoc est, rectæ MN , æqualia quindecim quadratis rectæ QH .) Erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE , æqualia quindecim quadratis rectæ QH ; ac propterea unū quadratum rectæ PE , uni quadrato rectæ QH , & idcirco semidiameter PE , semidiametro QH , æqualis. Quare circuli $BCDEF$, GHI , æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandū.



3.
6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Dodecaedri superficiei æquale.

Ex centro F , circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri $A B C D E$, ducatur ad latus CD , perpendicularis FG . Dico rectangulum contentum sub FG , & CD , trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F , ad omnes angulos pentagoni, resoluatur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. prop. 8. lib. 1. cum bina latera unius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque unius basis aliorum æqualis.

qualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad GD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est, sub FG, & CD. Quoniam uero rectangulum CI, duplum est trianguli FCD, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, equalium, erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia sint uni pentagono; Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirum rectangulum CI, sumptum trigiesies, æquale quoque erit sexuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiem Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



41. primi.

ALITER. Facta eadem figure constructione, cum rectangulum CI, duplum sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigiesies sumptum æquale triangulo FCD, bis sumpto trigiesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiem Dodecaedri. Cum enim unum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Ac idcirco triangulum FCD, sumptum sexagesies æqualis erit superficiem Dodecaedri.

41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

3.
7.

SI ex centro circuli triangulum Ico-
saedri circumscribentis, perpendicularis
ducatur ad unum latus trianguli; Erit,
quod sub dicto latere, & perpendicu-
lari

lari comprehenditur, rectangulum trigefies sumptum Icofaedri superficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumscribentis triangulum Icofaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, trigefies sumptum,



æquale esse toti superficiei Icofaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resolvetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propos.

8. lib. 1. Sunt enim bina latera unius binis lateribus aliorum æqualia, & basis unius basis aliorum æqualis. Ducatur

quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritq; rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. Quoniam uero rectangulum BG, duplum est rectanguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum rectangulorum ipsi BDC, æqualium: Erit rectangulum BG, iter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icofaedri, cum tria talia triangula a qualia sint uni triangulo Icofaedri; Atque adeo idem rectangulum trigefies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, iter sumpti, æquale erit uiginti triangulis Icofaedri, hoc est, toti superficiei Icofaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icofaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icofaedri, &c. Quod erat ostendendum.

ALITER. Facta eadem constructione figuræ, cum rectangulum BG, duplum sit trianguli BDC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum BG, trigefies sumptum, æquale triangulo BDC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt uiginti triangula Icofaedri, eo quod tria conficiunt unum. Igitur rectangulum BG, trigefies sumptum æquale est toti superficiei Icofaedri.

COROLLARIUM.

ITA QVÆ superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuslibet

41. primi.

42. primi.

quicunque Icosædri, etiam non describantur ambæ figuræ in eadem sphaera, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosædri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosædri in dictum latus. Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigēsis sumpto; Item superficies Icosædri æqualis huic rectangulo trigēsis quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigēsimā pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosædri: Quare erit superficies dodecaedri ad superficiem Icosædri, ut rectangulum illud, trigēsimā uidelicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigēsimā scilicet partem Icosædri. Quod est propositum.

6. quattide.
7. quattida.

15. quinsā

SCHOLIUM.

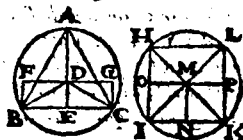
Non dissimili argumento indagabimus superficies rationum trium corporum regulatum, Tetraedri uidelicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, uel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribensis perpendicularis ducatur ad unum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In Octaedro uero, & cubi duodecies sumptum superficiei Octaedri, & cubi aequale. Sit enim primo triangulum Tetraedri

ABC , circumscripsum a circulo, cuius centrum D , a quo perpendicularis ducatur DE , ad latus BC , & reliqua fiant, ut de triangulo Icosædri dictum est. Dico rectangulum BG , sexies sumptum, æquale esse superficiei Tetraedri.

Quoniam rectangulum BG , duplum est trianguli DBC , hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula aequalia ipsi ABC , equalia, ut quod tria conficiunt unum; Erit rectangulum BG , sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis aequale.

Sic & secundo idem triangulum ABC , Octaedri, &c. Dico rectangulum BG , duodecies sumptum, æquale esse superficiei Octaedri, Cum enim rectangulum BG , duplum sit trianguli

DBC ,

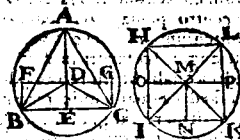


7. quattide

41. primi.

41. p. primi.

DB C, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit idem



rectangulum duodecies sumptum æquale viginti quatuor huiusmodi triangulis. Sed viginti quatuor talia triangula consueunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria consueunt unum. Egitur rectangulum BG, duodecies sumptum æquale est superficiem Octaedri.

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, describatur, & ducta MN perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati recte lineæ, ut quadratum restitueretur in quatuor triangula equalia; atque per M, agatur OP, ipsi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum sub OM, hoc est sub MN, & IK, sumptum duodecies, æquale

41. primi. esse superficiem cubi. Quoniam rectangulum IP, duplum est trianguli MIK, hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum æquale viginti quatuor eiusmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula unum quadratum consueunt; Erit rectangulum IP, duodecies sumptum æquale superficiem cubi. Quod est propositum.

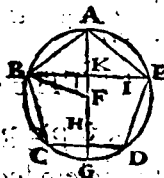
ALITER. Cum duo rectangula IP, consueant quadratum HIKL; (sunt. n. IP, PH, equalia, cū recta OI, sit dimidium lateris HI, nepe æqualis ipsi MN.) consistant duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi; hoc est, totam superficiem cubi.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentū sub tribus quartis partibus diametricalius circuli, & quinq; sextis partibus lineæ subtenderis angulū pentagoni æquilateri in eodē circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrū F, describatur pentagonū æquilaterum ABODE, & ducta diameter AC, dividatur in quatuor

tuor æquales partes, quarum tres sint AH : Angulum uero A , subtendens recta BE , secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint BI , & una IE , ita ut BI , sit quintupla ipsius IE . Dico rectangulum comprehensum sub AH , BI , æquale esse pentagono $ABCDE$. Ducta enim recta



BF ; quoniam AH , continet tres quartas partes diametri, & AF , duas, cum sit semidiameter, & AH , ipsius AF , sesquialtera. Quia uero recta FA , diuidens arcum BAC , bisariam, diuidit quoque rectam BE , bisariam, per coroll. 1. propol. 10. lib. 3. in puncto K , continebit tam KB , quam KE , tres sextas rectæ BE ; atq; adeo cum BI , contineat quinque, continebit KI , duas, Ac proinde & KB , ipsius KI , erit sesquialtera. Quamobrè erit ut AH ; ad AF , ita KB , ad KI ; atq; idcirco rectangulum sub extremis AH , & KB , æquale erit rectangulo sub medijs AF , & KI . Est autem rectangulum sub AF , KB , duplum trianguli ABF , cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin AF , & eandem altitudinem BK , hoc est, inter easdem sine parallelas constructura. Igitur & rectangulum sub AH , KI , duplum erit eiusdè trianguli ABF . Est autè & rectangulū sub AH , KI , duplū rectanguli sub AH , IE ; propterea qd & basis KI , dupla sit basis IE , (continet. n. KI , duas sextas partes ipsius BE , & IE , unā.) eadēq; semp altitudo AH . Igit æqualia sunt triangulū ABF , & rectangulū sub AH , IE ; ideoq; & eorū quintupla æqualia erūt. At uero pentagonū $ABCDE$, quintuplū è triangulū ABF , qd pentagonū in quinque huiusmodi triangula resoluat, ductis rectis e cetro F , ut propol. 6. lib. 1. lib. docum. Rectangulū uero sub AH , BI , quintuplū est rectanguli sub AH , IE , qd & basis BI , quintupla sit basis IE , eadēq; semp altitudo AH . Igit pentagonū $ABCDE$, & rectangulū sub AH , BI , æqualia sūt. Rectangulū ergo eorū sub tribo, &c. Q uod erat demonstrādū.

COROLLARIUM.

Q uoniam uero, si pentagonum $ABCDE$, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphaera descripti; BE , est latus cubi in eadē sphaera descripti, ex coroll. 2. propol. 17. lib. 13. & unū latus trianguli Icosaedri in eadē sphaera constructi, (comprehensū uidelicet eodem circulo, quo & pentagonū Dodecaedri,) secat diametrum AG , in H .

16. sexti.

41. primi.

1. sexti.

1. sexti.

5. quattide.

(cum

Item ex coroll. propof. 18. lib. 13. fecit femidiametrum FG , bifariam, quemadmodum & punctum H , eandem femidiametrum FG , bifariam dividit. Manifestum est, rectangulum comprehensum fuit perpendiculari ab angulo trianguli Icofaedri ad unum eius latus ducta, nempe sub AH , & sub quinque sentis partibus lateris cubi eidem sphaera, in qua Icofaedrum, inscripti, nimirum sub B , & aequale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphaera constructi.

4.
8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SUPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icofaedri in eadem sphaera descripti, eandem proportionem habet, quam, latus cubi ad latus Icofaedri.

1. quartide.

1. sexti.

IN circulo $ABCD$, circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icofaedri, sit latus pentagoni BD , & trianguli A , D , & ex centro E , ducantur ad A , D , BD , perpendiculares EF , EG , secabuntque AD , BD , bifariam, & EG , protracta secabit quoque arcum BD , bifariam in C , ex coroll. 1. propof. 1. huius lib. atque adeo connexa recta CD , latus erit decagoni eiusdem circuli. Sit denique H , latus cubi in eadem sphaera cum Dodecaedro, & Icofaedro descripti. Dico esse ut H , latus cubi, ad AD , latus Icofaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icofaedri. Quoniam lateris cubi H , secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD , latus Dodecaedri, ex coroll. 1. propof. 17. lib. 13. Recta autem EG , secta quoque extrema ac media ratione, maius segmentum est EF , ex coroll. propof. 2. huius lib. Erit, ut H , tota ad BD , maius sui segmentum, ita EG , tota ad EF , maius sui segmentum; Ac proinde rectangulum sub extremis H , EF , aequale erit rectangulo sub medijs BD , EG . Quia vero est, ut H , ad AD , ita rectangulum sub H , EF , ad rectangulum sub A , D , E , F , cum bases sint H , AD , altitudo vero semper eadem EF ; Erit quoque ut H , ad AD , ita rectangulum sub



2. quartide.

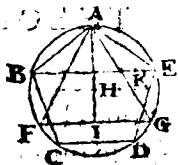
1. sexti.

1. sexti.

eti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD , latus Dodecaedri, ex coroll. 1. propof. 17. lib. 13. Recta autem EG , secta quoque extrema ac media ratione, maius segmentum est EF , ex coroll. propof. 2. huius lib. Erit, ut H , tota ad BD , maius sui segmentum, ita EG , tota ad EF , maius sui segmentum; Ac proinde rectangulum sub extremis H , EF , aequale erit rectangulo sub medijs BD , EG . Quia vero est, ut H , ad AD , ita rectangulum sub H , EF , ad rectangulum sub A , D , E , F , cum bases sint H , AD , altitudo vero semper eadem EF ; Erit quoque ut H , ad AD , ita rectangulum sub

sub BD , EG , (quod ostensum est æquale rectangulo sub H , EF ,) ad idem rectangulum sub AD , EF . Quare cum, ex coroll. propof. 7. huius lib. sit, ut rectangulum sub BD , EG , ad rectangulum sub AD , EF , ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, itaque quoque, ut H latus cubi, ad AD , latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, &c. Quod ostendendum erat.

A L T E R. Circumscribat pentagonum Dodecaedri $ABCDE$, & triangulum Icosaedri AFG , circulus idem, cuius centrum H . Ducatur deinde ex A , per centrum H , recta AI , quæ per coroll. 2. propof. 10. lib. 13. dividet latus FG , bifariam, & ad angulos rectos. Constat autem denique recta BE , quæ latus cubi, ex coroll. 2. propof. 17. lib. 13. esse quinque sextas partes sint BK . Dico rursus esse, ut BE , latus cubi ad FG , latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam rectangulum sub AI , BK , æquale est pentagono $ABCDE$, ex coroll. propof. 8. huius lib. Item rectangulum sub AI , IF , æquale est triangulo AFG , ex scholio propof. 4. lib. 1. Cum FG , basis trianguli dupla sit ipsius IF , basis rectanguli: Erit ut rectangulum sub AI , BK , ad rectangulum sub AI , IF , ita pentagonum $ABCDE$, ad triangulum AFG : Est autem ut rectangulum sub AI , BK , ad rectangulum sub AI , IF , ita BK , ad IF , cum bales sint BK , IF , & altitudo eadem semper AI . Erit igitur quoque ut pentagonum $ABCDE$, ad triangulum AFG , ita BK , ad IF . Ac proinde, (si primum, & tertium, nimirum pentagonum $ABCDE$, & recta BK , æquemultiplicentur per numerum 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulum AFG , & recta IF , æquemultiplicentur per numerum 20.) erit quoque ut pentagonum $ABCDE$, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum AFG , vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta BK , duodecies sumpta ad rectam IF , vigesies sumptam: Atqui recta BK , duodecies sumpta æquivaleret lateri cubi BE , decies sumpto; (Nam cum BK , contineat quinque sextas per



3. quartide.

2. sexti.

4. quinti.

tes ipsius BE ; continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE. Recta uero IF, uigies sumpta æqualis est lateri Ico-
 fædri FG, decies sumpto (eo quod FG, sit ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icofædri, ut latus cubi BB, decies sumptum ad latus Icofædri FG, decies



sumptum; Ac propterea, cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icofædri, quæ unius latus cubi ad unum latus Icofædri, perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icofædri, ut latus cubi ad latus Icofædri. Quod est propositum.

15. quinti

4.
9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit ut recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori segmento, ad rectam potentem id, quod a tota, & id quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icofædri eidem sphaeræ cum cubo inscripti.

SECTUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icofædri in sphaera eadem cum cubo descripti. Ex



A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGH, & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphaeræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphaera descripti, ex coroll. 2. propositi 17. lib. 1. Quoniam uero AC, maius segmentum semidiametri AB, sectæ extrema ac media

dia

dia ratione, est latus Decagoni in circulo B F G H I, in quo
 nimirum A B, latus est Hexagoni; poterit B F, latus penta-
 goni & totam A B, latus uidelicet hexagoni, & maius seg-
 mentum A C, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Pos-
 sitiam & recta M, totam A B, & minus segmentum B C,
 per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstraui-
 mus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad B, latus propositum Ico-
 saedri, ut est B F, potens totam A B, & maius segmentum
 A C, ad M, potentem totam A B, & minus segmentum
 B C. Quoniam quadratum lateris trianguli æquilateri
 B K, triplum est quadrati semidiametri A B: Item quadrata
 rectorum A B, B C, tripla sunt quadrati rectæ A C; Erit
 ut quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ A B, ita
 quadrata rectorum A B, B C, hoc est, quadratum rectæ M,
 ipsis æquale, ad quadratum rectæ A C. Verobiquo enim
 proportio est tripla. Permutando ergo erit, ut quadratum
 rectæ B K, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ
 A B, ad quadratum rectæ A C: Est autem ut quadratum rectæ
 A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad
 quadratum rectæ B F. (Nam cum rectæ B G, sectæ extre-
 ma ac media ratione, maius segmentum sit B F, ex coroll.
 1. propos. 17. lib. 13, eo quod B G, est latus cubi, & B F, latus Do-
 decaedri eiusdem sphaeræ; Erit ut tota A B, ad maius seg-
 mentum A C, ita tota B G, ad maius segmentum B F: Ac
 proinde ut quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C,
 ita quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F.) Igitur
 erit quoque, ut quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ
 B F, ita quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ M: Et
 permutando, ut quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B K,
 ita quadratum rectæ B F, ad quadratum rectæ M; Ac propte-
 rea erit ut recta B G, ad rectam B K, ita recta B F, potens to-
 tam A B, & maius segmentum A C, ad rectam M, potentem
 totam A B, & minus segmentum B C. Cum igitur proposi-
 ta latera D, E, cubi, & Icosaedri, eandem habeant propor-
 tionem, quam rectæ B G, B K, ut mox ostendemus; perspi-
 cuum est, ut se habet recta B F, potens totam A B, & maius
 segmentum A C, ad rectam M, potentem totam A B, & mi-
 nus segmentum B C, ita se habere propositum cubi latus D,
 ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaq; linea secetur

4. quartide.

10. septidec.

12. septidec.

4. septidec.

2. quartide.

22. sexti.

22. sexti.

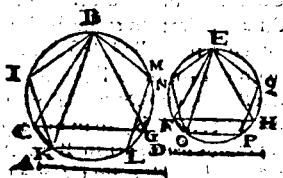
extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

QVOD vero proposita latera cubi, & Icosaedri D, & E, eiusdem sphaerae eandem habeant proportionem, quam recta BG, BK; demonstrabimus hoc propositio theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphaerae, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quavis, alia sphaera descriptorum.

SIT enim A, latus cubi & BC, latus Icosaedri eiusdem sphaerae: Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri, in quavis alia sphaera. Dico esse ut A, ad B C, ita D, ad EF. Perfectis



namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis per tagonaequilatera BIKLM, ETNOPQ, conestanturque recta BK, CK, EO, FO.

Quoniam ergo idem circulus

5. quaside.

latus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphaerae, & ponatur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphaera descripti, in qua cubus lateris A: Eris BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphaera descripti; Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. & recta BK, latus erit cubi eiusdem sphaerae, idque ipsi A, aequalis. Simili argumento equalis erit recta EO, latus cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similiter sunt: Nam uterque continet duas quintas partes suae circumferentiae. Item arcus BCK, EQP; (utroque enim tres quintas partes totius circumferentiae comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EPO, ex definitione segmentorum similium, aequales inter se, quam anguli BEK, EOP, inter se, cum iam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ut coroll. 1. propos.

32. lib. 1. reliquus angulus $C B K$, trianguli BCK , reliquo angulo $F E O$, trianguli EFO , equalis erit, & totum triangulum BCK , toti triangulo EFO , equiangulum. Quare erit, ut BK , hoc est, recta A , illi equalis, nempe latus cubi, ad BC , latus Icosaedri, ita $E O$, hoc est, recta D , illi equalis, latus scilicet alterius cubi, ad EF , latus Icosaedri. Quod est propositum.

P E R S P I C V M est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D , & F , latera cubi & Icosaedri in una sphaera, quam habent $B G$, $B K$, latera cubi & Icosaedri in alia sphaera.

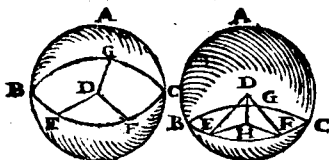
Ex hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphaera cum ipsis, ut vult proposit. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphaera.

LEMMA I.

S I sphaera plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

S E C T V R sphaera ABC , cuius centrum D , plano aliquo faciente communem sectionem planum $B E F C G$. Dico $B E F C G$, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum

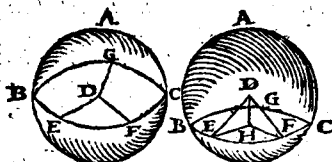
sphaera, ita ut centrum D , sit in plano, seu communi sectione $B E F C G$;



ducanturque ex D , centro sphaera ad extremitatem communis sectionis, linea recta quatuorque $D E, D F, D G$. Quoniam igitur omnes haec lineae ductae, quotcunque fuerint, aequales sunt, ex definitione sphaera, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit figura plana

BEFCG, unica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphaerae.

TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphaerae:



centrum sphaerae:

Ducatur autem ex D, centro sphaerae ad planum secans perpendicularis DH, emittaturque:

ex H, recta utcumque HE, HF, ad extremitatem usque, communis sectionis; & connectantur rectae DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defn. 3. lib. 11. recti sunt; erit tam quadratum rectae DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectae DF, quadratis rectarum DH, HF, aequale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, aequalium ex centro sphaerae ad eius superficiem cadentium, aequalia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, aequalia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectae DH, reliquum quadratum rectae AE, reliquo quadrato rectae HF, aequale erit. Quare & rectae HE, HF, aequales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse aequales & inter se, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, unica linea contenta, circulus erit; eiusque centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.

COROLLARIUM.

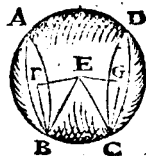
ITAQUE si planum secans transierit per centrum sphaerae, efficitur circulus idem centrum habens, quod sphaera. Si vero planum secans

secans per sphaeræ centrum non tranſierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphaera; illud uidelicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphaeræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiâ circuli esse æquales, ut perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCULI in sphaera æquales, æqualiter distant a centro sphaeræ: & circuli æqualiter distantes a centro sphaeræ, æquales sunt.

IN sphaera ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter a centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. precedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum utcunque, connectanturque rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphaeræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato

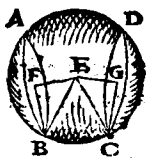


47. primi

Gg 4 rectæ

rectæ EG , æquale; Atque adeo æquales erunt rectæ
perpendiculares EF , EG . Quam ob rem circuli AB ,
 DC , æqualiter distant a centro E .

SED iam æqualiter distant circuli AB , DC , a
centro sphaerae E . Dico ipsos esse



æquales. Constructa enim figura,
ut prius, ostendimus eadem modo,
quadrata rectarum EF , FB , æqua-
lia esse quadratis rectarum EG , GC ;

Ac proinde, demptis quadratis æ-
qualibus rectarum æqualium EF , & EG , cum circuli
æqualiter ponantur distare a centro, reliquum qua-
dratum rectæ FB , reliquo quadrato rectæ GC ; atque
adeo æquales erunt rectæ FB , GC semidiametri scilicet
circularum AB , DC . Circuli igitur AB , DC , æqua-
les sunt. Quod est propositum.

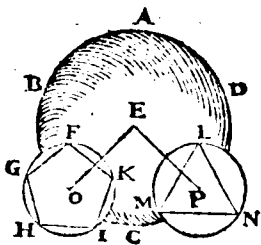
4.
10.

THEOR. II. PROPOS. II.

DODECAEDRVM ad Icosaedrũ
in eadem cum ipso sphaera descriptum, est
ut cubi latus ad latus Icosaedri, in una ea-
demque sphaera.

IN sphaera $ABCD$, cuius centrum E , inscriptum sit Do-
decaedrum, cuius unum pentagonum $FGHIK$: Item
Icosaedrum, cuius unum triangulum LMN . Dico esse
Dodecaedrum ad Icosaedrum, ut latus cubi ad latus Icosae-
dri, in una eademque sphaera, siue hæc eadem sit, quæ sphæ-
ra $ABCD$, siue non. Quoniam omnes anguli tam pen-
tagoni, quam trianguli, superficiem sphaerae tangunt; si per
pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficiuntur,
per lemma præcedens, duo circuli in sphaera $FGHIK$,
 LMN ,

LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. Quia uero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN; Ac propterea per lemma præcedens, æqualiter ab E, centro sphaeræ distabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemma 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt.



Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri, & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in 12 pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 1. 2. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. Quoniam autem est, ut basis FGHIK, ad basin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum utriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 3. lib. 3. demonstrauimus, ut duodecim bases Dodecaedri, tota uidelicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursum quoque est, ut tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem scholion, ut tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrū ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiē, ut cubi latus ad Icosaedri latus eiusdē cū ipsis sphaeræ; atque adeo, ex scholio propos. 10. huius lib. ut latus cubi ad

6. duodec.

9. quarsido

bi ad

bi ad latus Icofaedri cuiuscunque alterius sphaerae unius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icofaedrum, ut latus cubi ad latus Icofaedri cuiuscunque sphaerae. Quapropter Dodecaedrum ad Icofaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

9. quartide.

10. quartidecimi.

11. quartidecimi.

QUONIAM uero ostensum est quoque, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icofaedri eiusdem sphaerae, ut latus cubi ad latus Icofaedri in eadem cum ipsis sphaera: Item ita esse cubi latus ad latus Icofaedri unius eiusdemque sphaerae, ut est linea potens totam diuisam quamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: Item ita esse Dodecaedrum ad Icofaedrum eiusdem sphaerae, ut latus cubi ad latus Icofaedri in una eademque sphaera; Perspicuum est, has quatuor proportionem, nimirum lateris cubi ad latus Icofaedri; & superficiem Dodecaedri, ad superficiem Icofaedri; & lineae potentis totam quamcunque secta extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icofaedrum eiusdem sphaerae, esse inter se aequales.

O.
II.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

L A T V S trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab uno angulo ad latus oppositum deductæ.

3. primi.



26. primi

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, sesquitertium esse quadrati perpendicularis AD. Quoniam ob æqualitatem laterum AB, AC, anguli B, & C, æquales sunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autem & latus AD, commune, uel AB, AC, æqualia. Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia sunt; ac propterea latus BC, hoc est, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco

circo quadratum lateris AB , quadruplum quadrati rectæ BD ; ex Scholio propof. 4. lib. 2. Cum igitur quadrato rectæ AB , æqualia sint quadrata rectarum AD , BD ; erunt quoque quadrata rectarum AD , BD , quadrupla quadrati rectæ BD ; A ē proinde, qualium partium 4. est quadratum rectæ AB , uel quadrata rectarum AD , BD , talium 1. erit quadratum rectæ BD , ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD . Quare quadratum rectæ AB , partium 4. ſeq̃uitertium est quadrati rectæ AD , partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeq̃uitertium est, &c. Quod ostendendum erat.

47. primi.

COROLLARIUM.

Hæc manifestum est, lineam perpendicularem ex uno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, ſecare & angulum & latus bisariam. Demonstratum enim est BD , & CD , rectas æquales esse, hoc est, latus BC , ſecari bisariam a perpendiculari AD . Quare cum latera AB , AD , trianguli ABD , æqualia sint lateribus AC , AD , trianguli ACD , & basi BD , basi CD , æqualis; Erunt & anguli BAD , CAD , æquales, id est, angulus BAC , bisariam ſecabitur ab eadem perpendiculari AD .

8. primi.

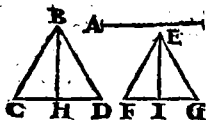
THEOR. 13. PROPOS. 13.

o.

13.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octædri in ea sphæra, Media.

SI T sphæræ diameter Rationalis A . Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octædri in dicta sphæra, esse Mediā. Sit enim BCD , unum triangulū Tetraedri, & EFG , Octædri illius sphærę, ducaturq; ex angulis B , & E , ad latera opposita CD , FG , perpendiculares BH , EI . Quoniā igitur quadratū diametri A , ſeq̃ualiterū est quadrati lateris Tetraedri BC , & duplū quadrati lateris Octædri EF ; habebūt quadrata rectarū A , BC , EF , proportionē, quā numeri 6. 4. 3. ideoq; commensu-



14. terijdec

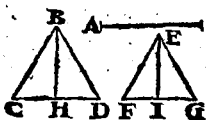
14. terijdec

6. decimi.

commensurabilia erunt. Quare & lineæ ipsæ A, BC, EF , cō
mensurabiles existent, saltem potentia; Atque adeo, cum
 A ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF ; &
ideirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI .

12. quarti-
decimi.

R V R S V S, quia tam quadratum rectæ BC , quadrati re
ctæ BH , quam quadratum rectæ EF , quadrati rectæ EI ,



6. decimi.

sesquitergium est; habebunt tam
quadrata rectarum BC, BH , quā
quadrata rectarum EF, EI , pro
portionem inter se, quam numeri
4, 3. ideoque tam illa, quam hæc
inter se commensurabilia erunt.

12. decimi

9. decimi.

12. quarti-
decimi.

12. decimi.

Quare & tam lineæ ipsæ BC, BH ,
quam lineæ E, F, EI , commensurabiles existent. Est autem
& tam CH , ipsi BC , quam FI , ipsi EF , dimidia uidelicet to
ti, commensurabilis. Igitur & tam BH, CH , quam EI, FI ,
commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum CH ,
& FI , ostensæ sint Rationales, erunt quoque BH, EI ,
Rationales. Quoniam uero tam CH, BH , quam FI, EI ,
longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadra
ta non habeant proportionem, quam numerus quadratus
ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propof.
24. lib. 3. Habent enim proportionem, quā 1, ad 3, cum osten
sum sit talium partium 1. esse tam CH , quam FI , qualium
3. est tam BH , quam EI .) Erunt tam CH, BH , quam FI, EI ,
Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac pro
inde tam rectangulum sub CH, BH , Rationalibus poten
tia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub FI, EI ,
Rationalibus potentia tantum commensurabilibus con
tentum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG ,
æqualia rectangulis sub CH, BH , & sub FI, EI , ex scholio
propof. 41. lib. 1. cum bases triangulorum CD, FG , duplæ
sint basium rectangulorum CH, FI . Igitur & triangula
 BCD, EFG , Media erunt. Quocirca cum tota superficies
Tetraedri triangulo BCD , sit commensurabilis; (est enim
triangulum BCD , totius superficiæ quarta pars.) Item to
ta superficies Octaedri triangulo EFG , commensurabilis;
(Est enim triangulum EFG , totius superficiæ quarta pars.)
Erunt quoque, ex coroll. propof. 24. lib. 10. superficies Te
traedri,

traedri, & Octaedri, Mediae. Si igitur sphaerae diameter fuerit Rationalis, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

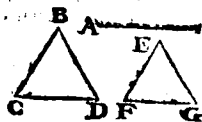
SEQUITUR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum aequilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, BF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas CH, BH, quam FI, BI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, BI, hoc est, triangula BCD, EFG, ipsis aequalia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo aequilatero, cuius unum latus sit Rationale; perspicuum est, quod inferitur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

O.
I 4.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphaerae inscribantur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphaerae diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri uero basis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; At uero superficiem Octaedri esse sesquialteram superficiei Tetraedri. Quonia quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri CD; duplum uero quadrati lateris Octaedri FG; sit, ut quadratum partium 6. fuerit quadratum diametri A, tabulum 4. sit quadratum lateris CD, & tabulum 2. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectae CD, sesquitertium est quadrati rectae FG: Vt autem quadratum rectae CD, ad quadratum rectae FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum EFG. (quia



13. tertijder.

14. tertijdec.

tam

10. & 19.
sexti.

tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum CD , FG , duplicatam, cum sint similia. Igitur & triangulum BCD , sesquitertium est trianguli EFG .



R. V. R. S. V. S., quoniā ostensum est triangulū BCD , sesquiterium trianguli EFG ; Ac propterea qualium partiū 4. fuerit triangulū BCD , talium 3. esse triangulū EFG ; Efficitur, ut triangulū EFG , octies sumptū, hoc est, tota

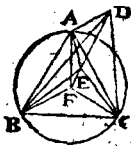
superficies Octaedri, sit earundem partiū 24; At triangulū BCD , quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partiū 16. Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphaeræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum, eidem sphaeræ inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

o.
15.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

R E C T A linea ex angulo quouis Tetraedri in sphaera descripti per centrum sphaeræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

S I T Tetraedrum $ABCD$, contentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC , DAB , DBC , DCA , in sphaera, cuius centrum E ; ducaturque ex angulo D , per E ,



centrum sphaeræ recta DEF , incidens in basim ABC , circulo inscriptam, ad punctum F . Dico F , esse centrum basis ABC , & DE , perpendicularem esse ad eandem basim. Ductis enim ex E , & F , ad angulos dictæ basis rectis EA , EB , EC , FA , FB , FC ; quoniam rectæ EA , EB , EC , ductæ ex centro sphaeræ ad eius superficiem, æquales sunt; erunt duo latera EA , ED , trianguli EAD , æqualia duobus lateribus

bus EC, ED , trianguli CED ; Sunt autem & bases AD, CD , æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli AED, CED , æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF , æquales erunt, eo quod tã AED, AEF , quam CED, CEF , duobus rectis æquivalent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF , si considerentur triangula BED, CED . Quoniam igitur latera EA, EF , trianguli EAF , equalia sunt lateribus EC, EF , trianguli ECF ; & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; Erunt bases FA, FC , æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC , si considerentur triangula EBF, ECF . Quare cum tres rectæ FA, FB, FC , ex F , in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; erit F , centrum basis ABC , seu circuli eam circumscribentis.

8. primi.

3. primi.

4. primi.

9. tertij.

Quia vero, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E , centro spheræ ad planum circuli ABC , demissa in centrum circuli cadit; efficitur, ut recta DE , per centrum ducta, & in centrum circuli F , cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC . Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F , quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli, haberet unus idemque circulus duo centra. quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

O.
I 6.

OCTAEDRVM in spherâ descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis uero utriusque est quadratum subduplum quadrati diametri spheræ.

SIT Octaedrum $ABCDEFGF$, contentum octo triangulis æquilateris & equalibus $EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC$, & in spherâ descriptum, cuius centrum G . Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium

14. tertijdec.



48. primi.

14. primi.

2. undec.

7. undec.

48. primi.

4. undec.

lium altitudinum, quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphaerę. Ductis enim ex G, centro sphaerę ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quę eęuales sunt, cum sint semidiametri sphaerę ductę uidelicet e centro ad superficię sphaerę: quoniam quadratum diametri sphaerę duplum est quadrati lateris Octaedri AB, & quadruplum quadrati semidiametri AG, ex scholio. propof. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphaerę, talium partium 2. erit quadratum rectę AB, & talium partium 1. quadratum rectę AG; Ac proinde quadratum rectę AB, duplum erit quadrati rectę AG. Cum ergo quadratum rectę AG, eęuale sit quadrato rectę BG; erit quadratum rectę AB, eęuale duobus quadratis rectarum AG, BG; Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, DGC, CGB, recti. Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectũ erunt coniunctę; atque adeo rectę AC, BD, sese secantes in G, in uno existent plano; Ac propterea rectę earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum ABCD, in uno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum basis communis ABCD, uertices uero E, & F; quę pyramides eęuales sunt & similes, ex defin. 10. lib. 11. cum quęlibet constet ex quatuor triangulis eęuilateris Octaedri, quę eęualia sunt & similia, & basi comuni ABCD. Dico iam earum altitudines esse eęuales, & basin ABCD, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphaerę. Quoniam ostensum est, quadratum lateris Octaedri AB, eęuale esse duobus quadratis semidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, eęuale duobus quadratis semidiametrorũ AG, EG; Ac propterea angulus AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, se mutuo secantibus in G, ad rectos angulos insistit, ipsa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nempe ad basin pyramidum. Quare EG, altitudo est pyramidis ABCDE. Similiter ostendemus FG, altitudinem esse pyramidis ABCDF. Cum ergo

ergo EG, FG, sunt semidiametri sphaerae aequales, perspicuum est, distas pyramides esse aequalium altitudinum. Rursus quia AC, est diameter sphaerae, erit eius quadratum duplum quadrati lateris AD. Ac propterea equale duobus quadratis laterum AD, DC. Quare angulus ADC, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est: Sed & aequilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est, quod cum sit descriptum ex latere octaedri AB, constat, ipsum esse subduplum quadrati diametri sphaerae. Octaedrum ergo in sphaera descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

14. serijde.

48. primi.

14. serijde.

SCHOLION.

MYLIO breuius hanc propositionem demonstratione in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. expressam delicti: constrastina octaedri. Verumtamen quia hic demonstratur a Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est etiam demonstrationem hoc etiam loca conscribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

o.

17.

TETRAEDRUM sphaerae impositum ad Octaedrum in eadem sphaera descriptum se habet, ut rectangulum sub linea potente uigintisepte sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum ad quadratum diametri sphaerae.

VEL, ut Campanus loquitur.

TETRAEDRUM sphaerae impositum

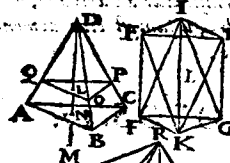
Hh

tum

tum ad octaedrum in eadem sphaera descri-
ptum se habet, ut rectangulum sub linea,
quae potentia est sublesquitercia triu quar-
tarum partium lateris tetraedri, & sub li-
nea superquintupartiente uigesimas septi-
mas partes earundem trium quartarum par-
tium lateris tetraedri contentum, ad qua-
dratum diametri sphaerae.

S I T Tetraedrum $ABCD$, & octaedrum $EFGHIK$, in
una eademque sphaera, cuius centrum L . Ducatur ex an-
gulo D , per centrum L , diameter sphaerae DM , incidens in
basin ABC , ad punctum N . Erit igitur N centrū basis $A.B.C$,
& DN , perpendicularis ad eā
dem basin. Quia uero, para-

15. quae-
ridesimi.



diametri LN , inter centrum
sphaerae & basin tetraedri, est
secta pars diametri, & tertia
pars semidiametri, per cor-
roll. 2. propos. 13. lib. 13. Erit
 EL , semidiameter sphaerae par-
tium 3. qualium 1. est LN ;
Ac propterea DN , talium 4.

Ducatur deinde, ex scholio propos. 11. lib. 11. per centrum
 L , planum OPQ , parallelum plano ABC , eruntque rectae
 QO, OP, PQ , parallelae rectis AB, BC, CA ; Ac propter ea
triangulum QOP , æquiangulum erit triangulo æquilatere
 ABC , cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli
singulis: At ABC , est æquiangulum, ex coroll. propos. 5. lib.
1. Igitur & QOP , æquiangulum erit; Ac propterea & equi-
laterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC .
Sunt autem & trianguia DQO, DOP, DQP , triangulis
 DAB, DBC, DAC , æquilateris similia, ex coroll. propos. 4.
lib. 6. Igitur pyramides $ABCD, QOPD$, similes sunt, ex de-
fin. p. lib. 11. Rursus quia plana parallela ABC, QOP , secant
rectas DN, DC , proportionaliter, erit ut DN , ad DL , ita
 DC ,

16. undec.

10. undec.

17. undec.

DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, ut 4 ad 3. (cum ostē-
sum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igi-
tur & DC, ad DP, erit ut 4. ad 3. Ac proinde, cum pyrami-
des similes habeant proportionem laterum triplicatam; erit
pyramis ABCD, ad pyramidem QOPU, ut 64. ad 27. hæc
enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. ut constat
in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi
in proportione 4. ad 3. ut constat ex 2. propof. lib. 8. Rursus
quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam;
erit quadratum rectæ DG, ad quadratum rectæ DP, ut
64. ad 36. ut in illdem numeris constat.

8. duodec.

Sic etiam triangulum æquilaterum RST, æquale trian-
gulo DQP; demittaturq; ex R, ad ST, perpendicularis RV.
Eritq; latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquiter-
tium perpendi. ularis RV. Ac proinde qualium partium 36.
fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ
RV: Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ
DC Igitur linea RV, est potens uigintiseptem sexagesimas
quartas partes quadrati lateris tetraedri.

10. sexti.

12. quarti
decimi.

RV & SVS extensa TS, fiat TX, ad TS, ut 64. ad 27. ex
coroll. propof. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bifariam in Y, ut sit
TY, talium partium 32. qualium 27. est TS, seu illi æqualis DP.
Quoniam uero proportio DC, ad DP, erat, ut 4. ad 3. nempe
sesquitertia; erit DC, talium partium 36. qualium DP, est 27. (pro-
portio enim 6. ad 27. est sesquitertia) Ac propterea qualium
partium TY, est 32. Quare linea TY, continet octo nonas par-
tes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedrū A B.
CD, ad octaedrū EFGHIK, ut rectangulū contentū sub re-
cta RV, (quæ potest uigintiseptē sexagesimas quartas partes
quadrati lateris DC) & sub recta TY, (quæ continet octid no-
nas partes eiusdē lateris) ad quadratū diametri spherę DM,

1. sexti.

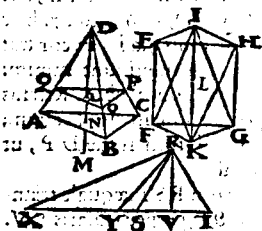
CV enim ductis rectis RX, RY, triangulum RTX, du-
plum sit trianguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis
TY: Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum
eiusdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æqua-
le rectangulo sub RV, TY. Ac propterea erit ut trian-
gulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulū sub RV,
TY, ad idem triangulū RST: Bit autem triangulum RTX,
ad triangulum RST, ut basis TX, ad basin ST, nimirum

41. primi.

7. quinti.

1. sexti.

ut 64. ad 27. Igitur & rectangulum sub R V, T Y, ad trian-
gulum RST; hoc est, ad triangulum D Q P, siue Q O P, si-
bi æquale, erit, ut 64. ad 27. Fuit autem & pyramis ABCD,
ad pyramidem Q O P D, ut 64. ad 27. Erit ergo ut rectangu-



lum sub R V, T Y, ad triangu-
lum Q O P, ita pyramis AB-
CD, ad pyramidem Q O P D:
At uero ut triangulū Q O P,
ad quadratum diametri sphæ-
re DM, ita est pyramis Q O-
P D, ad octaedrum EFGH-
I K. (Nam cum D N, recta
sit ad planum A B C, recta
quoque erit ad planū Q O P,

16. quarti-
decimi.

ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque sphære semidiameter
DL, altitudo erit pyramidis, seu tetraedri Q O P D: Octae-
dru autem EFGH I K, diuiditur in duas pyramides æqua-
les EFGH I, EFGH K, quarum basis communis quadratum
EFGH; dimidium quadrati diametri sphære; & altitudines
æquales semidiametri sphære LI, LK. Pyramides ergo Q O-
P D, EFGH I, æquales habent altitudines. Quare ex scholio
propos. 6. lib. 12. erit ut basis Q O P, ad basin EFGH, ita py-
ramis Q O P D, ad pyramidem EFGH I; Ac propterea, per
ea, quæ in scholio propos. 4. lib. 5. ostendimus, ut basis
Q O P, ad duplum basis EFGH, hoc est, ad quadratum dia-
metri sphære DM, ita pyramis Q O P D, ad duplum pyra-
midis EFGH I, hoc est, ad Octaedru EFGH I K.) Ex æquo
igitur erit, ut rectangulum sub R V, potente uiginti septem
sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, &
sub T Y, octo nonis eiusdem lateris DC, contentum, ad qua-
dratum diametri sphære DM, ita pyramis, seu tetraedrum
ABCD, ad octaedrum EFGH I K. Tetraedrum ergo sphæ-
re impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demon-
strandum.

SCHOLION.

Q V O N I A M, uero DC, talium partium 4. fuit, qua-
lium 3. DP, continebat DP, seu illi æqualis RT, tres quar-
tas par-

tas partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, cum recta RT, sit potentia sesquitercia recta RV; eris RV, potentia subse-
quitercia ipsius RT; nempe trium quartarum partium lase-
ris Tetraedri. Rursus quia TY, fuit et alium partium 32. qua-
lium 27. ST, seu DP, (tres videlicet quarta partes lateris te-
traedri.) erit TY, superquintupartiens vigesima septimas par-
tes ipsius TY; nimirum trium quartarum partium lateris te-
traedri. Quare constat, esse quoque tetraedrum ABCD, ad
octaedrum EFGHIK, ut rectangulum sub RV, qua potentia
subsequitercia est trium quartarum partium lateris tetraedri,
et sub TY, qua superquintupartiens est vigesima septimas
partes eandem trium quartarum partium lateris tetraedri,
ut volebat Campanus.

12. quarti-
decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppo- sitam demissa; tripla est eius perpendicu-
laris, quæ ex centro trianguli ad eandem ba-
sin deducitur.

o.
17.

Si r triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamq; bisariam dividet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13. Dico AE, triplam esse rectæ DE, quæ scilicet perpendicularis est e centro ad basin du-
cta. Ductis enim rectis BD, CD, cum late-
ra DA, DB, trianguli ADB; æqualia sint la-
teribus DB, DC, trianguli BDC; e centro e-
nim ducuntur; sit autem & basis AB, basi
BC, æqualis: Erunt triangula ADB, BDC, æqualia ex co-
roll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt
triangula ADB, ADC. Quare, ob æqualitatem trium trian-
gulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum est
trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum sub AE, EB,



H h 3

triangulo

1. *sexi.*

triangulo ABC, & rectangulū sub DE, EB, triangulo BDC, æquale est, ex scholio propof. 4. lib. 1. cū basis triaguli BC, dupla fit basis BE, utriusq; rectanguli: Erit quoq; rectangulum sub AE, EB, triplum rectanguli sub DE, EB: Est autē ut rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub DE, EB, eiusdem altitudinis EB, ut a basis AE, ad basin DE. Igitur & AE, tripla est ipsius DE. Linea ergo perpendicularis ex quo libet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

ITAEQUE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliqua rectæ AD, inter angulum, & cētrum comprehensæ. Cum enim AB, tripla sit ipsius DE; qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AB, sesquialtera erit ipsius AD.

Ex quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

17.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum sphaeræ inscribatur; erit semidiameter sphaeræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphaeræ in basin quamcunq; octaedri deducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphaera, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro sphaeræ D, perpendicularis demittatur DE; ducaturq; semidiameter sphaeræ DB. Dico semidiametrum DB, potētia tri-



14. *terrijde.*

plam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphaeræ, qui triangulum ABC, circū scribit, cadat, erit E, centrum trianguli.

Ducta igitur recta BE; quoniam quadratum diametri sphaeræ duplum est quadrati lateris octaedri AB, & quadruplum quadrati semidiametri sphaeræ DE, ex scholio propof. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6, & quadratum semidiametri

semidiametri

mediametri sphaeræ DB, 3. Quia uero quadratū lateris AB, emplum est quadrati semidiametri circuli triāgulum ambien-
 ris, rectæ scilicet BE. Erit quadratum rectæ BE, talium par-
 tium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare cum
 quadratum rectæ DB, æquale sit quadratis rectarū BE, DE,
 sit autem quadratum rectæ DB, ostensum, partium 3. Erit
 reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium
 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati
 rectæ DE. Siquitur octaedrum sphaeræ inscribatur, &c.
 Quod demonstrandum erat.

12. scrij de.

47. primi.

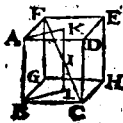
THEOR. 20. PROPOS. 20.

o.

18.

DVPLVM quadrati ex diametro cu-
 iuslibet sphaeræ descripti, æquale est super-
 ficiei cubi in illa sphaera collocati: Perpen-
 dicularis autem a centro sphaeræ in aliquam
 basin cubi demissa, æqualis est dimidio late-
 ris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphaera descriptus, cuius
 centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad unam
 basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati dia-
 metri sphaeræ æquale esse superficiei cubi,
 & perpendicularem IK, æqualem esse dimi-
 dio lateris cubi. Cum enim quadratum dia-
 metri sphaeræ triplum sit quadrati lateris cu-
 bi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi;
 Erit duplum eiusdem quadrati ex diame-
 tro sphaeræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti su-
 perficiei cubi.



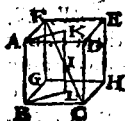
15. scrij de.

PRODUCTA autem HI, ad basin oppositam BC-
 HG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad pla-
 num AE, recta quoque erit ad planum BH, illi pa-
 rallelum, per scholion propos. 14. lib. 11. Rursus, quia
 AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE,
 Hh 4 ducatur

6. undec.

16. undec.

ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis A E, B H, communes sectiones, lineas rectas A K, B L, quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit A B L K; atque adeo recta K L, æqualis lateri cubi A B. Quoniam uero perpendicularis K L, e centro sphaeræ I, cadit in bases A E, B H, ad puncta K, & L; erunt K, & L, centra circularum dictas bases ambientium in sphaera, per coroll. lem. matis 2. propof. 10. huius lib. Quare K L, in centro I, bifariam secabitur a dicta diametro C F, ut in coroll. 1. propof. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea, cum K L, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit I K, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphaeræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.



COROLLARIUM

15. servide.

31. undec.

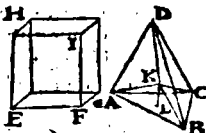
Ex dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphaeræ dictum cubum comprehendens, æquale esse cubo. Cum enim quadratum diametri sphaeræ triplum sit quadrati lateris cubi; erunt duo quadrata A E, B H, duæ tertie partes quadrati diametri sphaeræ: Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex I K, dimidio lateris cubi in A E, tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, æquale esse solido, quod fit ex I L, dimidio lateris cubi in B H, tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphaeræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.

ALITER proponi potest hoc corollarium, ut dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, æquale esse cubo. Nam cubus B B, produciatur ex B A, latere cubi in quadratum A B, quod est tertia pars quadrati diametri sphaeræ: Ut perspicuum est.

SCHOLIUM

IN ULTERIS autem Solidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basem ductam in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. Si enim corpus regulare quod-

quodcunque $ABCD$, contentum planis ABC , ABD , ACD , BCD , solidum autem $EFGH$, contentum sub EI , tertiam parte superficiei corporis $ABCD$, & sub altitudine FG , quae aequalis sit perpendiculari KL , ducta ex centro K , ad basin ABC . Dico solidum $EFGH$ aequale esse dato corpori regulari $ABCD$. Nam ductis ex centro K , rectis KA , KB , KC , KD , ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides aequales, cum aequales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli distas bases ambiens, aequales sint & ipsi aequaliter a centro distabunt, per lemma 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpendicularia ex K , centro ad ipsum planum ducta, nempe altitudines pyramidum, aequales erunt. Quoniam uero prisma contentum sub basi ABC , & altitudine KL , triplum est pyramidis $ABCK$, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL , tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL , (nimirum compositum ex omnibus illis prismatibus) triplum corporis regularis $ABCD$. Quamobrem, cum idem prisma triplum sit prismatis $EFGH$, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quae ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida $EFGH$, $AECD$, equalia. Quod est propositum.



THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphaerae.

IN sphaera, cuius diameter A , intelligatur descriptus cubus, cuius unum quadratum $BCDE$, & octaedrum, cuius unum triangulum FGH . Dico eundem circulum circumscribere & quadratum $BCDE$, & triangulum FGH , hoc est, circulos $BCDE$, FGH , ipsa circumscribentes, esse aequales.

15. serij de.

47. primi.

14. serij de.

12. serij de.

11. quart.
decimi.

les. Sine enim rectæ e centrīs IB, KF. Quia igitur quadratū diametri A, triplum est quadrati lateris cubi BC; & quadratum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum subscindat quadrantē; Ac proinde quadratum rectæ B C, æquale erit quadratis rectorum BI, IC. Quare cū rectorum equalium BI, IC, equalia sint quadrata; duplum erit quadratum rectæ B C, quadrati rectæ BI.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris B C, & talium 1. quadratum rectæ BL Rursus quia quadratum diame-



tri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG; & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris F G, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI; æqualia erunt quadrata rectorum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti B C D E, F G H, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM

Hic ite fit, lineas perpendiculares contingentes centra circulo- rum, qui bases oppositas tam cubi quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex cetro sphære ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulo- rum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 16. huius lib. qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt a centro sphære, ex lemmate 1. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt distæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectorum, quæ centra oppositarum basium connectunt (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11.) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium contingentes tam in cubo, quam in octaedro. Quod est proposu- itur.

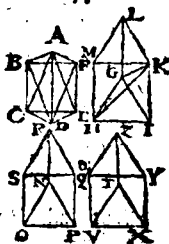
THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidē sphære inscribantur; Erit octaedrum ad triplum

plum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri.

In eadem sphaera inscriptum sit & octaedrum ABCD-BF, & tetraedrum GHK. Dico ita esse octaedri ad triplum tetraedri, ut latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, dividetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune est ipsa diameter AD, & vertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD in BDF, cuius basis BDF; in CDEA, cuius basis CDE; & in DEFA, cuius basis DEF; quae quidem omnes bases infra quadratum BCEF, existunt continentes cum ipso dimidiatam partem octaedri.

Quoniam uero quilibet harum pyramidum constat duobus triangulis aequaliteris octaedri; & duobus alijs triangulis, quae quoniam latus ipsorum



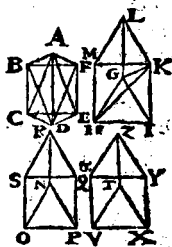
commune est AD, diameter, & reliqua latera ipsius octaedri latera existunt, inter se aequalia sunt; efficitur has quatuor pyramides aequales esse inter se, cum compareantur planis & multitudine, & magnitudine aequalibus. Constituantur super GHI, basin tetraedri, prisma GHKLM, eiusdem cum tetraedro altitudinis; quod ipsius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propos. 7. lib. 1. 2. Rursus, super basin octaedri NOP, & TVX, basi tetraedri aequalem, constituentur duo prismata NOPQRS, TVXYZa, eiusdem cum octaedro, seu pyramide ACDE, altitudinis. Quoniam igitur GHI, hoc est, TVX, basis tetraedri sesquitercia est ipsius NOP, basis octaedri: Erit quoque prisma TVXYZa, prismatis NOPQRS, sesquitercium, cum prismata eiusdem altitudinis sint, ut bases, ex ipsa, quae ad propos. 7. lib. 1. 2. demonstravimus. Est autem & octaedri ABCDEF, eiusdem prismatis NOPQRS, sesquitercium;

(Nam prisma aequale est tribus pyramidibus, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 1. 2. qualiū quatuor continere diximus octaedrum) Igitur aequale est octaedrum prismati TVXYZa. Quia uero prisma TVXYZa, ad prisma GHKLM, proportionem habet, quā altitudo illius ad altitudinem huius, ex scholio propos. 14. lib. 1. 2. Est autem altitudo prismatis TVXYZa, quod octaedro

8. primi.

14. quarti
decimi.

octaedro æquale est, eadem quæ octaedri, ex constructione: Erit quoque octaedrum ad prismam $GHIKLM$, hoc est, ad triplum tetraedri $GHIK$, ut altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Est autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra basium oppositarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra basium oppositarum connectenti, per coroll. propos. 21. huius lib.



Atque ut latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita est latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratū lateris cubi ad quadratū altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, est, ut 3. ad 4. Posito enim quadrato diametri sphaeræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propos. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, est ut 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphaeræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratū lateris tetraedri 4. &c.) Est igitur octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque tetraedrum eidem sphaeræ inscribantur, &c. Quod demonstrandum erat.

18. verside.

u. COROLLARIUM.

Ex dictis inferitur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Offensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphaeræ ad latus tetraedri, ut latus octaedri ad latus cubi. Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram.

18. verside.

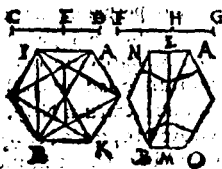
THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita ponerit totam aliquam

aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosædri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius spheræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

Posita recta AB, rectam CD, & eius segmentum maius CE, item rectam FG, & eius segmentum minus HG. Dico CE, esse latus Icosædri, & HG, latus Dodecaedri, eius spheræ, cuius AB, diameter existit. Intelligatur enim in spherâ, cuius diameter AB, descriptum Icosædron AIBK, & Dodecaedron ANBO. Lateraliter deinde Icosædri opposita AI, BK, connectantur recta IB, quæ subtiendit unum angulum pentagoni ex Icosædri lateribus compositi, ut constet ex propol. 16. lib. 13. quod etiam videre licet in aliquo Icosædro materiali. Quia vero AI, BK, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propol. 15. lib. 13, erunt anguli

AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro IK, cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & bases quoque AB, IK, æquales; Erunt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt; ideoque quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadrato rectarum AI, IB. Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothesi, quadrato rectarum CD, CE; Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadrato rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, sit maius segmentum ipsius CD, diuise extrema ac media ratione; Item IA, maius segmentum ipsius IB, similiter diuise; (Nam IB, subtiendit angulum pentagoni, cuius latus est, IA, latus Icosædri. Constat autem, rectæ subtiendentis angulum pentagoni,



29. primi.

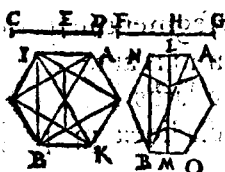
8. primi.

47. primi.

8. *tertydec.* tagoni, si secetur extrema ac media ratione, maius segmen-
tum esse equale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit CE ,
maius segmentum ipsi IA , lateri Icosædri. Cum enim sit

2. *quartide.* ut CD , ad CE , ita IB , ad IA ; erit quoque ut quadratum
rectæ CD , ad quadratum rectæ

22. *sexti.*



rectæ CE , ita quadratum rectæ
 IB , ad quadratum rectæ IA ;
Ac componendo, ut quadriata
rectarum CD , CE , ad qua-
dratum rectæ GE , ita quadra-
ta rectarum IB , IA , ad quadra-
tum rectæ IA : Oſtenſa ſunt

14. *quinti.*

autem quadratis rectarum CD , CE , æqualia quadrata re-
ctarum IB , IA : Igitur & quadrato rectæ CE , æquale eſt
quadratum rectæ IA ; ideoque rectæ CE , IA , æquales
ſunt. Quod eſt propoſitum.

33. *primi.*

47. *primi.*

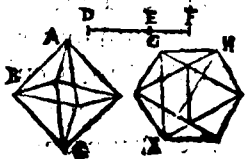
R VR & VS latera Dodecaedri oppoſita AN , BO , ſecen-
tur biſariam in L , & M ; punctis, quæ recta LM , & ipſa la-
tera recta NB , coniungantur. Quoniam igitur NL , BM ,
æquales, parallelæ ſunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13.
erunt quoque LM , NB , æquales & parallelæ: Eſt autem
recta LM , ſecans latera oppoſita biſariam, perpendiculari-
tis ad ipſa latera oppoſita, per idem coroll. Igitur & NB ,
ad eadem perpendicularis erit; Ac proinde quadratum re-
ctæ propoſitæ AB , æquale erit quadratis rectarum NB ,
 NA . Quare cum idem quadratum rectæ AB , æquale
ſit poſitum quadratis rectarum FG , HG ; æqualia erunt
quadrata rectarum NB , NA , quadratis rectarum FG ,
 HG . Ac propterea, cum HE , ſit minus ſegmentum ipſius
 FG , ſectæ extrema ac media ratione; Item NA , minus
ſegmentum ipſius NB , hoc eſt, ipſius LM , ſimiliter diui-
ſæ, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. æquale erit HG , mi-
nus ſegmentum ipſi NA , lateri Dodecaedri. Quod qui-
dem non aliter oſtendimus, ac ſupra demonſtrauimus CE ,
maius ſegmentum æquale eſſe ipſi IA , lateri Icoſædri. Si
recta erga lineæ propoſitæ potuerit totam aliquam lineam
ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmen-
tum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſeg-
mentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Ico-
ſædri,

facies minus autem segmentum posterioris, &c. Quid erat ostendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosædri in eadem sphaera descripti duplum minoris segmenti.

Ponatur latus AB , octaedri ABC , & maius segmentum DE , & minus EF , rectæ DF , sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphaeræ inscriptum Icosædru GHI , cuius latus GH , & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosædri compositi GI , & diameter HI . Dico quadratum lateris GH , duplum esse quadrati minoris segmenti $E F$. Cum enim GH , sit latus pentagoni, cuius unum angulū subtendit recta GI ; erit GH , maius segmentum ipsius GI , diuisæ extrema ac media ratione; Ac proinde composita recta ex GI , GH , secabitur similiter in G , puncto, extrema ac media ratione. Quia uero quadratū diametri HI , æquale est quadratis rectarum GI , GH , quod angulus IGH , rectus sit, ut in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB , inæquale quadratis rectarum DE , EF , ponitur; Erunt, ut quadratum diametri HI , ad quadratum lateris AB , ita quadrata rectarum GI , GH , ad quadrata rectarum DE , EF . Est autem quadratum diametri HI , duplum quadrati lateris octaedri AB . Igitur & quadrata rectarum GI , GH , dupla sunt quadratorum rectarum DE , EF . Atqui ut quadrata rectarum GI , GH , ad quadrata rectarum DE , EF , ita est quadratum rectæ GH , ad quadratum rectæ EF . (Nam cum sit ut GI , ad GH , ita DE , ad EF : Erunt quoque ut qua-



8. tertijdec.

5. tertijdec.

47. primi.

4. tertijdec.

2. quartide.

ut qua-

22. sexti.

ut quadratum recte GI, ad quadratum recte GH, ita qua-

dratum recte DE, ad quadratum recte EF, & componen-

do, ut quadrata rectorum GI, GH, ad quadratum recte GH,

ita quadrata rectorum DE, EF, ad quadratum recte EF.

Et permittendo, ut quadra-

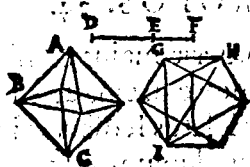
ta rectorum GI, GH, ad qua-

drata rectorum DE, EF, ita

quadratum recte GH, ad

quadratum recte EF. Quod

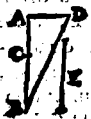
erat ostendendum.



THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media
ratione cum minore segmento angulum re-
ctum constituat, cui recta subtendatur: Erit
recta linea, quae potentia sit subdupla ip-
sius rectae subtenfa, latus octaedri eius sphae-
rae, in qua dictum minus segmentum latus
existit Dodecaedri.

LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratio-
ne constituat cum recta AD, quae aequalis sit minori segmen-
to AC, angulum rectum A, cui recta subtenda-
tur BD; sitq; recta E, potentia subdupla ipsius
BD. Dico E, latus esse octaedri illius sphaerae,
in qua AD, uel AC, latus est Dodecaedri. Cu-
m enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius seg-
mentum BC, latus sit cubi illius sphaerae, cuius
minus segmentum AC, uel AD, latus est Do-
decaedri, erit diameter illius sphaerae potentia tripla maio-
ris seg-



ris segmenti BC, nempe lateris cubi: Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphaeræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphaeræ. Quare cum diameter sphaeræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphaeræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

QVONIAM uero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi B C, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, ut constat ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 14. lib. 13. Cum B C, sit maius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisa; Perspicuum est, si linea quæuis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum esse latus Dodecaedri eiusdem sphaeræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: latus Icosaedri eidem sphaeræ inscripti sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuisæ extrema ac media ratione. Sit quoque HI, latus Icosaedri HI K, eiusdem sphaeræ, Dico HI, rectam potentia esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, unum ex pluribus pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta I K, diameter. Quia igitur HI, est maius segmentum re-

4. tersydec.

14. tersydec.

18. tersydec.

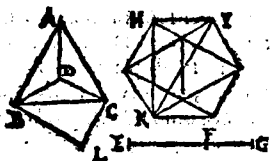
8. tersydec.

5. *tertiydec.*
22. *primi.*
48. *primi.*

2. *quartide.*

6. *sexsi.*
4. *sexsi.*
13. *tertiydec.*

Et HK, diuisa extrema ac media ratione; Erit quoque composita KHI, diuisa eodem modo in H, maiusque segmentum HK, & minus HI. Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulum BCL, ita ut BL, recta ipsi EF, & CL, ipsi FG,



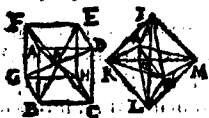
fit æqualis: Eritque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur posse rectas BL, CL, hoc est, rectas EF, FG: Est autem & angulus HKI, rectus, ut propof. 23. huius lib. ostendimus; Estq; ut BL, ad LC, ita KH, ad HI Igitur triangu-

la BLC, KHI, equiangula sunt: Ac propterea ut KI, ad IH, ita BC, ad CL, & permutado, ut KI, ad BC, ita HI, ad CL: Atqui IK, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri B C. Ergo & HI, latus cofaedri erit potetia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FG. Si latus itaq; Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CUBVS ad Octaedrum in eadē cum ipso sphæra descriptum est, ut superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item ut latus cubi ad semidiametrum sphærae.

SINT in eadem sphæra cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiē Octaedri; nec



non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphærae. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines: (cum enim circuli descripti circa pyramides, seu cubi bases æquales, sint æquales,

ac

æ propterea æqualiter a centro sphaeræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulatorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. Quoniam autem idem circulus cõplectitur & cubi quadratum, & Octaedri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & Octaedri a centro sphaeræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, ut una pyramis cubi ad unam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde, ex ijs, quæ in scholio propos. 4. lib. 5. demonstrauimus, ut sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies uidelicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoq; rursus, ex eodẽ scholio, ut cubus ad octuplũ pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrũ, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

S I N T rursus in eadem sphaera cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK, sitque diameter sphaeræ, seu Octaedri EG, & centrũ L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM; Item ex semidiametro BL, tertia pars EN. Quoniam uero quadratũ IFKH, lateris Octaedri, basis existens duarũ pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. huius lib. sesquialterum est quadrati BD, lateris cubi BC: Est autem & recta AB, rectæ BM, sesquialtera, ex constructione; reciprocabũtur bases IFKH, BD, & altitudines AB, BM: Ac propterea parallelepipedũ super basim IFKH, & sub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo super basim BD, & sub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rursus quia recta EL, rectæ EN, tripla est; erit & parallelepipedũ super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplũ parallelepipedũ super eandem basim, & sub altitudine EN, ut in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplum est pyramidis IFKHE, ex cotollatio 1. propos. 7. lib. 12. igitur pyramis IFKHE, equalis erit parallelepipedo

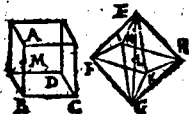
1. quæsti-
decimi.

18. septijdec.

34. undec.

I i 2 super

16. quarte



super basim I F K H, & sub altitudine E N : Atqui huius parallelepipedum duplum est parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ex scholio propof. 14. lib. 12. quod & altitudo L N, dupla fit altitudinis E N ; Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E . Aequale igitur erit parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K . Cæterum quia parallelepipedum super basim I F K H, & altitudine B M, est ad parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ut altitudo B M, ad altitudinem L N, ex scholio propof. 14. lib. 12. Ut autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L . (Cum enim sit ut A M, ad M B, ita E N, ad N L, & componendo, ut A B, ad B M, ita E L, ad L N ; erit quoque permutando, ut A B, ad E L, ita B M, ad L N .) Et parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale est ostensum cubo A B C D ; Et parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, æquale Octaedro E F G H I K . Igitur atque quoque ut cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, semidiametrum sphaeræ . Quod secundo loco demonstrandum proponebatur . Quæ circa cubum ad Octaedrum in eadem cum ipso sphaera desumptum, &c. Quod erat ostendendum .

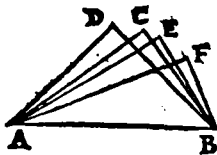
S C H O L I O N .

13. tersijdec.

Q. X 1. A demonstratum est, diametrum sphaera, in qua omnia quinque corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri ita ut, si quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. fit quadratum lateris Tetraedri perspicuum est, si ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in scholio, propof. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus . Vel etiam, si quadrato diametri constituamus duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem scholio maioris quadrati latus esse latus Tetraedri . Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, reliquum necesse est quadratum 1. partis,

da

ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. Ut si diameter sphaerae ponatur AB , ex cuius quadrato deiratur quadratum rectae AC , continens duas tertias partes quadrati diametri AB ; Vel si constituentur duo quadrata rectarum AC , BC , quadrato diametri AB , equalia, ita ut quadratum rectae AC , duplum sit quadrati rectae BC ; Erit recta AC , latus Tetraedri.



RURSUS cum ostensum sit, diametrum sphaerae potentia duplam esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri AB , dematur quadratum rectae AD , quod dimidium sit quadrati diametri AB ; Vel si constituentur duo quadrata rectarum AD , BD , quadrato diametri AB , equalia, & inter se proportionem habentia aequalitatis, secundum doctrinam scholij propof. 33. lib. 6. rectam AD , latus esse Octaedri.

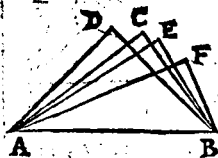
DEINDE, quoniam docuimus diametrum sphaerae potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri AB , auferatur quadratum rectae BC , quod tertia pars sit quadrati diametri AB ; Vel si quadrato diametri AB , constituentur duo quadrata equalia rectarum AC , BC , ita ut quadratum rectae AC , duplum sit quadrati rectae BC , iuxta doctrinam eiusdem scholij propof. 33. lib. 6. Lineam rectam BC , cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB , possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB , auferatur quadratum lateris Tetraedri AC , relinqui quadratum lateris cubi BC : Quemadmodum e contrario, si ex quadrato diametri AB , tollatur quadratum lateris cubi BC , remanet quadratum lateris Tetraedri AC .

PRAETEREA, quia si recta aliqua posueris totam quam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum; Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphaerae, cuius diameter est recta prior linea; Constat, si quadrato diametri AB , exhibeantur, iuxta ea, quae in scholio propof. 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata equalia rectarum AE , BE , proportionem habentium, quam recta quenis extre-

23. quarti-
decimi.

ma ac media ratione diuisa ad maius segmentum: Rectam mi-
norem BE, esse Icosaedri latus.

POSTERIMO, quoniam si recta quæpiam poruerit totā
aliquam rectam diuisam extrema
ac media ratione, & minus illius
segmentum; Minus segmentum
latus est Dodecaedri eius sphæ-
ræ, cuius diameter prior linea:
Liquet, si quadrato diametri AB,
constituatur duo quadrata aqua-
lia rectarum AF, BF, propor-



tionem habensium, quam quæcunque recta linea extrema ac
media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam
BF, latus esse Dodecaedri.

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus
Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæ-
ra impostorum scripserunt: Sequentes autem quinque propo-
pos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5.
de proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue
proportionales, nec non & aliæ quatuor,
ita ut sit eadem antecedens omnium. Erit
proportio tertiæ ad tertiam proportionis se-
cundæ ad secundam duplicata; & propor-
tio quartæ ad quartam eiusdem proportio-
nis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continue proportio-
nales; nec non quatuor A, E, F, G, ita ut A, recta antece-
dens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad
tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad
secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam,
esse

esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundę ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectę B, ad rectam A; habeat autem & quadratum rectę B, ad quadratum rectę A, duplicatam proportionem eiusdem proportionis re-



20. sexti.

ctę B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita quadratum rectę B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, ut recta F, ad rectam A, ita quadratum rectę E, ad quadratum rectę A: Et conuertendo, ut recta A, ad rectam F, ita quadratum rectę A, ad quadratum rectę E. Quoniam igitur est quadratum rectę B, ad quadratum rectę A, ut recta C, ad rectam A; & quadratum rectę A, ad quadratum rectę E, ut recta A, ad rectam F; Erit ex

quadr. B.	Recta. C.
quadr. A.	Recta. A.
quadr. E.	Recta. F.

equo, quadratum rectę B, ad quadratum rectę E, ut recta C, ad rectam F: Est autem proportio quadrati rectę B, ad quadratum rectę E, duplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & proportio rectę C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectę B, ad rectam E. Quod est primum.

20. sexti.

R v r s v s cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectę B, ad rectam A; habeat autem & cubus rectę B, ad cubum rectę A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectę B, ad rectam A; Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus rectę B, ad cubum rectę A.

33. undec.

Eadem ratione erit ut recta G, ad rectam A, ita cubus rectę E, ad cubum rectę A; Et conuertendo ut

Cubus B.	Recta D.
Cubus A.	Recta A.
Cubus E.	Recta G.

recta A, ad rectam G, ita cubus rectę A, ad cubum rectę E. Quia ergo est cubus rectę B, ad cubum rectę A, ut recta D, ad rectam A; & cubus rectę A, ad cubum rectę E, ut recta A, ad rectam G; Erit ex equo, cubus rectę B, ad cubum rectę E, ut recta D, ad rectam G: Est autem proportio cubi rectę B, ad cubum rectę E, triplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & proportio rectę D, ad rectam G,

33. undec.

I i 4 triplica-

E U C L I D . G E O M .

triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ; &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I O N.

Hoc idem demonstrauius ad propos. lib. 2. de quocumque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientiam.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

Q V A D R A T V M lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

I N triangulo æquilatere A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, recta perpendicularis A D, quæ bisariam secabit latus B C, ut in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, ut perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. Quoniam uero quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam late-

13. sexti.



17. tertij.

20. sexti.

in AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris
trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

ITAQUE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur
ex uno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio
loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium
lateris, æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum re-
ctæ E, quæ media proportionalis est inter A D, & D B, æquale esse
triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadē sphæ-
ra describantur: erit quadratum cubi ad
triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad
lineam perpendicularem, quæ ex uno angu-
lo trianguli Tetraedri ad latus oppositum
deducitur.

SIT quadratum cubi cuiusvis A B C D, & Tetraedri in
eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendi-
cularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta
diuidens F G, latus bifariam, ex coroll.
propof. 12. huius lib. Dico, esse quadra-
tum A C, ad triangulum E F G, ut latus
trianguli E F, ad perpendicularem E H.



Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K, cum
quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris
cubi A B; sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, &
dimidio eius F H, eoquod dictum quadratum, & rectangu-
lum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectan-
gulum sub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; Ac pro-
pterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc est,
tres rectæ F H, A B, E F, continue erunt proportionales: Sūt
autem & tres rectæ F H, I K, E H, continue proportionales,
ex

18. tertijdec.
1. sexti.

17. sexti.

28. quarti.
decimi.

20. sexti.

ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit FH ,
erit proportio rectæ EF , ad rectam EH ,
tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ AB ,
 AB . IK .
 EF . EH .
ad rectam IK , secundæ ad secundam du-
plicata. Quare cum & quadratum AC , re-
ctæ AB , ad quadratum rectæ IK , hoc est,
ad triangulum EFG , (est enim ex coroll. propos. 29. huius
lib. quadratum rectæ IK , æquale triangulo EFG ,) pro-
portionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB , ad
rectam IK ; Erit quadratum cubi AC , ad triangulum
Tetraedri EFG , ut latus EF , ad perpendicularem EH .
Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphaera descri-
bantur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATUS Tetraedri potentia sesquial-
terū est axis, seu altitudinis ipsius: Axis ue-
ro, siue altitudo Tetraedri potētia sesquiter-
tia est lateris cubi in eadē sphaera descripti.

5. quarti.

47. primi.
12. septuag. dec.



SIT Tetraedri triangulum ABC , & altitudo, seu axis
Tetraedri DE , latusque cubi eiusdem sphaeræ F . Dico latus
Tetraedri AB , esse potentia sesquialterum axis DE : Axem
uero DE , potentia sesquitertium lateris cubi F . Nam circa
triangulum descripto circulo ABC , ad cen-
trū D , in quod uidelicet cadit axis DE , ut cō-
stat ex propos. 15. huius lib. ducatur AD , se-
midiameter, & AE , latus Tetraedri. Quia
igitur quadratum lateris $A E$, hoc est, lateris
 AB , æquale est quadratis rectarum AD ,
 DE , & triplū quadrati semidiametri AD ; Fit, ut posito qua-
drato lateris AB , seu AE , partium 6. quadratum rectæ
 AD , sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum qua-
dratum axis DE , talium partium 4. Quapropter qua-
dratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis
Tetraedri.

Q u o -

QVONIAM uero latus Tetraedri AB, potentia duplum est lateris cubi F; Erat quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris AB; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, sesquitercium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM. I.

QVIA uero, posito quadrato lateris AB 3. partium 6. quadratum diametri sphaerae talium partium est 9. quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri; Earundem uero partium 4. ostensum est quadratum axis DE; perspicuum est, diametrum sphaerae potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde, cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialterae enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, ut in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

COROLLARIUM. II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphaerae inscripti, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia uidelicet tam latus trianguli aequilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitercium est perpendicularis ex uno angulo ad latus oppositum deductae; quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphaerae inscripti.

DESCRIBANTUR in eadem sphaera cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad lat^{us} oppositum. Ut autem lat^{us} Tetraedri

18. tertij dec.

19. tertij dec.

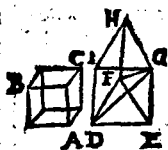
20. sexti.

22. quarti decimi.

30. quarti decimi.

ad

ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 1. propof. 3. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis D B F.



G H I, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis D E F G H I, ut huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propof. 9. lib. 12. demonstraui, æqualia erunt prismata A B C, D E F G H I.

cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma D E F G H I, triplum est pyramidis, seu Tetraedri D E F G; ex coroll. 1. propof. 7. lib. 12. Cubus ergo A B C, triplus quoque erit eiusdem Tetraedri D E F G. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphaeræ inscripti. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Vnde prisma tandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphaera, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum A B C, æqualem esse prismati D B F G H I, &c.

ELEMENTI DECIMIQUARTI FINIS.



E V C L I D I S

E L E M E N T V M XV.

ET SOLIDORVM QVINTVM,
ut nonnulli putant. Vt uero alij, Hyp-
siclis Alexandrini de quin-
que corporibus.

LIBER SECVNDVS.



PROBL. I. PROPOS. I.

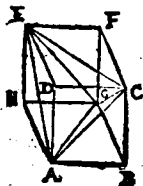
I.

IN dato cubo pyramidem describere.



IN cubo dato $A B C D E F G H$, oportet describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab uno eius angulo, nempe ab E , ducantur in basibus tribus ipsum con-
stituentibus tres diametri EA , EG , EC , a quarum extremitatibus A, G, C , similiter diametri ducantur AG , GC , CA ,
in reliquis tribus ba-

sibus. Quoniam igitur diametri quadratorum equalium equalis sunt, quod potentia duplæ sint laterum equalium quadratorum, ut in scholio propof. 47. lib. I. demonstrauimus; perspicuum est, quatuor triangu-
la ACE , GAC , GAE , GCE , ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyrami-



dem,

dem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quia uero omnes anguli tetraedri an- gulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 3. lib. 1. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

2.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro ABCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bisariis in E, F, G, H, I, K, & duobus duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHF, IHK, KHG, GHE, supra planum E I-



KG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt.

Quoniam uero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC, Item & anguli contenti EAH, GAH, æqua-

4. primi.

les, quod sint anguli triangulorum æquilaterum ABD, ACD: æquales erunt bases EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex definitione 3. lib. 1. intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangent omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

QUONIAM uero tria plana EIKG, GHIF, PKHF, quadrata sunt æqualia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, ut in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bisariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAB; nec non

non in pyramidem $BBFI$, & prismam $BFCGKI$; Contacta autem pyramidem pyramidi esse aequalem, & prismam prismati: Eodemque modo reliqua quadrata $GHIF$, $FKHB$, diuidunt bifariam eandem pyramidem $ABCD$. Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis aequalibus, quae octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

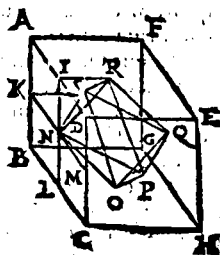
3. duodec.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo octaedrum describere.

3.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH . Diuidantur latera basis $ABCD$, bifariam in punctis I, K, L, M , quae connectantur rectis IL, KM , secantibus sese in N , puncto, quod quidem centrū est quadrati $ABCD$, ut constat ex demonstratione propof. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basis centra O, P, Q, R, S . Erunt igitur omnes rectae ex dictis centris ductae ad media puncta basis, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK , &c. aequales dimidijs lateribus cubi, seu quadratorum, ut perspicuum est ex praedicta demonstratione propof. 8. lib. 4. Postremo si praefata centra coniungantur duodecim rectis $NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS$; constituta erunt octo triangu-
la, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN , supra planum $NOQR$; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO , infra idem planum consistunt. Quonia vero latera NI, IR , trianguli INR , aequalia sunt lateribus KN, KS , trianguli KNS , quod omnia sint dimidia laterum cubi aequalium, ut dictum est; Item & anguli contenti, aequales; propterea quod, cum NI, IR , parallelae sint rectis BA, AF ; angulus $NI R$, aequalis sit recto angulo KAF , in quadrato AG , eademque ratione angulus NKS , angulo



10. undec.

4. primi

gulo recto IAF , in quadrato AE ; Erant, bases NR , NS , æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum e centrīs ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, ut quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa pñcta, e quibus uidelicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim uides duas rectas NI , RI , ductas esse ad I , dimidium lateris AD , quod cõmune est quadratis AC , AE , quorum centra sunt puncta N , & R : Ita quibque duæ rectæ NK , SK , ductæ sunt ad K , dimidium lateris AB , quod commune est quadratis AC , AG , quorum centra existunt puncta N , & S , &c. Quam ob re constituta octo triàngula & æquilatera sunt, & equalia inter se; ideoque Octaedrum constituunt $NOQRSP$; Quod quidem ex defin. 3 i. lib. 11. intra cubum est descriptum, cum omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centrīs. Quam ob rem in dato cubo Octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

ALITER. In cubo dato inscribatur pyramis; In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonstratione propof. 1. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera uero pyramidis, ex demonstratione propof. 1. huius lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri, perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi, atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

1. quinside
2. quinside

ALITER. In cubo dato inscribatur pyramis; In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonstratione propof. 1. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera uero pyramidis, ex demonstratione propof. 1. huius lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri, perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi, atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

COROLLARIUM.

Quia uero diametri Octaedri in cubo descripti NQ , RO , si ducerentur, se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propof. 14. lib. 13. quæ quidem coniungit centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas ecentra basium cubi oppositarum connectentes non solum se se mutuo bitariam, ut docuimus coroll. 1. propof. 13. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, ut hic ostendimus, diuidere.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4

IN dato octaedro cubum inscribere.

DATUM octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum uidelicet uertices sunt sex anguli octaedri, & quæ ibet duæ octaedrum constituunt sit una earum pyramis ABCE, cuius basis ABCD, quadratum, triacula uero æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triacula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triagulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propof. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habeant communia. Est enim EM, latius commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; Et denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc uero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Quocirca & quaruor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sunt. Quia uero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP; Est autem ut EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, tripli erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportionē secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursum quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, ut ostendimus in coroll. 1. propof. 14. lib. 13. & in propof. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam uero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, parallelum est plano



18. quartide
2. sexti.

10. undec.

15. undec.

Kk ABCD;

A B C D, ipsa quoque inter se parallela erunt, atque adeo, cum conueniant in punctis M, & O, unum planum efficiet, ex scholio propof. 16. lib. 1. Quocirca LMNO, quadratū



4. primi.

erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera E L, E K, trianguli E L K, æqualia sint lateribus E O, E K, trianguli E O K, & anguli quoq; ipsi cōtēti, æquales, quod recta E K, ex angulo E, p centriū K, trianguli æquilateri E A D, ducta bifariā secet angulū A E D, per coroll. propof. 12. lib. 13. Erunt & bases K L, K O, æquales, hoc est, recta L O, bifariam secabitur in K.

4. primi.

13. primi

Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I, Ac proinde rectæ GL, GM, HM, HN, I N, I O, K O, K L, cum sint laterum quadrati L N, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos; æquales erunt & rectæ G H, H I, I K, K G, centra G H, I, K, connectentes. Quia uero hæ rectæ in plano existunt quadrati L N, angulosque comprehendunt rectos; (cum enim anguli L K G, G K I, I K O, duobus sint rectis æquales; Sint autem L K G, I K O, per coroll. 2. propof. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus G K I; Eademque ratione recti erunt anguli K G H, G H I, H I K.) quadratum erit G H I K, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit, cum octo eius anguli tangent octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubū descripsimus. Quod faciendū erat.

5.

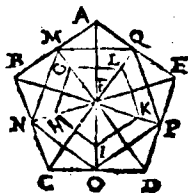
6.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrū inscribere.

S I T ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continentur, quarum uidelicet bases sunt pentagona

ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, uertices uero, duodecim anguli Icoſaedri, una pyramis $ABCDEF$, cuius baſis pentagonum $ABCDE$, triangula uero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF , ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L , que rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG . Rurſus ex uertice F , per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ ; quæ, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 3. bifariam ſecabunt latera AB, BC, CD, DE, EA , in M, N, O, P, Q ; ita ut decem rectæ $MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA$, æquales ſint: quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentaſoni, æquales quoque erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM , puncta M, N, O, P, Q , connectentes; Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM , æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ , æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum, æqualium ad baſes oppoſitas demiſſæ. Cum enim latera FB, BM , trianguli FBM , lateribus FB, BN , trianguli FBN , æqualia ſint, contincantq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; erunt baſes FM, FN , æquales; & ſic de reliquis. Quoniam uero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL , nimirum ſemidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circunſcribentium, æquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, ut demonſtratum eſt; Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG , æquales. Rurſus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB , quā anguli BNM, MNO, ONC , æquales ſunt duobus rectis, Sunt autē anguli AMQ, NMB , angulis BNM, ONC , æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO , æquales; Eademq; ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM , & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterū & equiangulum $MNOPQ$, in plano pentagoni $ABCDE$, exiſtens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ , æquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L , quod & FG, FH, FI, FK, FL , ex centris, æquales ſint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL , duplæ ſunt ipſarum



4. primi.

8. primi

4. primi.

4. primi

13. primi.

4. primi

2. *sexii.* GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propof. 18. lib. 14. paralle-
 10. *undec.* lae erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ,
 15. *undec.* QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG,
 angulis aequalibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM,
 ideoque & inter se aequales erunt. Quia uero plana per re-
 ctas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela sunt plano penta-
 goni MNO PQ, & rectas MN, NO, OP, ducto, conueniuntq;
 in recta HI; ipsa unum planum efficient, ex scholio propof.
 16. lib. 1. Eodemque modo ostendemus plana per IK, KL,
 & per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum
 conftituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca
 GHKL pentagonum est aequilaterum & equiangulum,
 cum & latera habeat aequalia & angulos. Quod si eadem ar-
 te in reliquis undecim pyramidibus Icofaedri centra trian-
 gulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter
 pentagona aequilatera & equiangulara: quae cum latera ha-
 beant communia, aequalia inter se erunt. Quamobrem
 duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum conftituunt:
 quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icofaedro erit descri-
 ptum, cum uiginti anguli Dodecaedri in centris uiginti ba-
 sium Icofaedri confiftant. Quapropter in dato Icofaedro
 Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

ITAQUE cum omnes rectae e centro Icofaedri ad centra ba-
 sum, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi infcripti, sint aequales;
 Cum enim ex coroll. lemm. 1. propof. 10. lib. 14. perpendiculares
 sint ad plana circulorum aequalium bases Icofaedri circumscriben-
 tium, atque adeo eorundem distantiae exiftant a centro fphaerae,
 seu Icofaedri; aequales erunt inter fe, ex lemm. 2. eiusdem propof.
 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icofaedri, atque sibi infcripti Do-
 decaedri.

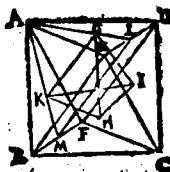
PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramide describere.

PYRAMIS describenda fit in octaedro ABCDEF.
 In pyramide octaedri superiori ABCDE, fumantur G, &
 H, cen-

H, centra triangulorū ex aduerso sibi respondentū A E D, BEC; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AFB: quę quidem centra coniungantur sex recti GH, GI, GK, HI, HK, IK, ut fiat pyramis HIKG.

Deinde ex A, dem trantur per centra G, K, rectę AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE BF, bisariam in L, & M per scholiū propof. 12. lib. 13. coniungaturq; recta LM, quę ip si BE, uel FD, equalis & parallela erit, cum EL, BM; Item DL, FM, rectę æquales sint, & parallelę, nimirū



33. primi.

dimidia laterum DE, BF, oppositorum in quadrato EF.

Quoniam uero rectę AL, AM, sectę sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod AG, AK, duplę sint ipsarum GL, KM, ex coroll. propof. 12. lib. 14. Erunt GK, LM, pa-

2. sexti.

parallelę; Ac propterea, per coroll. propof. 4. hb. 6. triangu-

4. sexti.

ALA, AGK, similia. Quare erit ut AL ad LM, ita AG ad

GK; & permutando, ut AL ad AG, ita LM ad GK: Est

autem AL ipsius AG, sesquialtera, quod GL, sit tertia pars

ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, duę tertię. Item &

LM, hoc est, ipsi æqualis DF, sesquialtera erit ipsius GK.

Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum cen-

tra G, H, I, K, coniurgentium sesquialtera esse latera octae-

dri; Ac proinde rectas pyramidem HLAG, componentis in

ter se esse æquales, hoc est, trianguła æquilatera æqualia ex

ipsis confici, ideoque Tetraedrum constitui: quod, cum

habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri,

descriptum erit, ex defin. 1. lib. 11. in octaedro. Quocirca

in dato octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faci-

endum.

ALITER. In octaedro dato inscribatür cubus, & in

cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum

enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; Et

in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis; per-

spicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in

carum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse

inscriptam.

1. quintide.

1. quintide.

COROLLARIUM. I.

9. undec.

15. undec.

QVIA uero ostensum est, utramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM; ac propterea & GK, ipsi DP, atque adeo ipsi BE, parallelam esse: Atque eadem ratione KH, ipsi FC, EA, parallelam esse; Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto: Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singulas uidelicet basis oppositis.

COROLLARIUM. II.

PRATEREA, cum octaedrum circumscribat & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium octaedri constituantur; Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphaerae circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, ut constet ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphaerae sesquialtera axis tetraedri in ea sphaera descripti, per coroll. 1. propos. 21. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quae centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deducit.

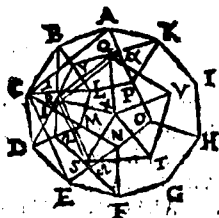
PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quaelibet duo proxima, rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectae AP, CM, per centra Q, R, rectae ducantur KY, DY, quae per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bisariam diuident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectae eadem YK, YD, rectas AP, CM, bisariam & ad angulos rectos in α, β , ex 1. coroll. eiusdem propositionis, quod & arcus

& arcus AKP, CDM, circularum circa pentagona descri-
 prorum bisariam diuidant, (constat enim rectas AK, PK;
 Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) Igitur A α , C β , 28. tertij.
 parallelæ sunt rectæ BY; arque adeo & inter se parallelæ : 28. primi.

Sunt autem & æquales, nempe di-
 midia rectarum AP, CM, quæ æ-
 quales sunt, cum latera KA, KP,
 lateribus DC, DM, æqualia sint,
 angulosque contineant æquales.
 Rectæ ergo ipsas connectentes
 AC, $\alpha\beta$, æquales erunt, & paral-
 lelæ. Non aliter ostendemus, si
 ex angulis B, F, quos subtendant
 rectæ CL, EN, per centra R, S, re-



ctæ ducantur BZ, FZ, cōnectanturque rectæ CE, $\gamma\delta$, æqua-
 les esse ipsas CE, $\gamma\delta$: Sunt autem AC, CE, inter se æquales,
 cum contineant angulos æquales æqualibus lineis compre-
 hensos. Igitur & $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter, cū
 & rectæ Y α , Y β , Z γ , Z δ , æquales sint. (Nam YQ, YR,
 ZR, ZS, perpendiculares, distantia sunt æqualium rectarum
 BL, DM, a centris Q, R, S, circularum æqualium,
 qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, atq; adeo
 æquales. Item Q α , R β , R γ , S δ , distantia sunt rectarum
 æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulo-
 rum æqualium, ideoque æquales; Ac proinde & totæ Y α ,
 Y β , Z γ , Z δ , æquales erunt.) Erunt quoque anguli $\alpha\gamma\beta$,
 $\gamma\delta\delta$, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR,
 ZS, æquales sint; æquales quoque erunt rectæ QR, RS,
 centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales
 demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum co-
 pulantes. Quare triangula QXR, RXS, SX T, TXV,
 VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N,
 O, P, constituta, æquilatera erunt, & equalia. Quod
 si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dode-
 caedri, similia triangula construantur; (Habet enim
 Dodecaedrum uiginti angulos solidos.) quæ quidem latera
 habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra
 Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri
 consistant in centris duodecim basium dodecaedri, In dato

ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

o.
8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubū describere.

PROPONANTUR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus, $ABCDE$, $EFGHA$, $AHIKB$, $BKLMC$, conuenientia ad latus AB ; duo quidem $ABCDE$, $ABKIH$, & in latus idem commune AB ; alia autē duo $AEFGH$, $BCMLK$, & in angulos EAH , CBK . In his uero pentagonis subtendantur angulis A, B, D, I , rectae EH , CK, CE , HK , quadrilaterum efficientes EHC . Quoniam igitur rectae AE, BC , æquales, auferunt ex circulo pentagonum $ABCDE$, circumscribente arcus æquales; Erunt, ex scholio propof. 17. lib. 3. rectae AB, CE , parallelæ. Eademque ratione parallelæ erunt AB, HK . Quare, & EC, HK , inter

28. tercij.

9. undec.
33. primi.
7. undec.



4. primi.

22. tercij.

34. primi.

se parallelæ erunt; Ac propterea rectae EH, CK , quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, in eodemque cum ipsis plano; Ideoque parallelogrammum erit EHC ; quod dico esse æquilaterum. Cum enim omnia latera $AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK$, æqualia sint, angulosque contineant æquales, ex hypothesi; æquales erunt bases EH, HK, KC, CE . Quia uero planum $ECKH$, productum communem sectionem in sphaera facit circulum; per lemma 1. propof. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK , descriptum; Erunt tam anguli oppositi E, K , quam C, H , duobus rectis æquales; Ac propterea cum oppositi $E, & K$, sint æquales, nec non & oppositi $C, & H$; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H , recti. Quare EK , quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine; constitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia, eo quod eorum latera æquales angulos pen-

los pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendunt æqualia sint; cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim eius latera jaceant in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis resideant. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc fit, rectam, quæ subtendit unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est, CB, ipsi AB, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SYMANTE in Dodecaedro, cui inscribendum sit octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 9. propos. 17. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam secantur in N, O, P, Q, R, S. Recte igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum communes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphaeræ bifariam, & ad angulos rectos dudent, per coroll. 9. propos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoque erunt earum dimidiatae partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. Quocirca duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTE, RTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STQ, quales sunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur. Ac proinde octo triangu-
la NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentque octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli



4. primi.

o.

9.

4. primi.

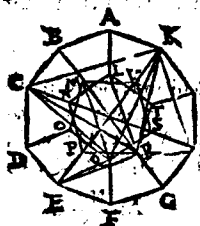
guli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum descripsi-
mus. Quod faciendum erat.

o. PROBL. 10. PROPOS. 10.

10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem de-
scribere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis
ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MJOQ-
SV; BCDOM, DEFQQ, FGHQ, HIAVS, KARMV,
LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum.
Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, an-
gulum solidum L, componens, in quibus tres anguli C,
K, R, (quorum quidem C, oppo-
nitur lateri AL, communi penta-
gonis CAL, ALI; At uero K, la-
teri LT, communi pentagonis
KLT, LTI; Denique R, lateri
LN, communi pentagonis RLN,
LNB,) rectis connectantur CK,
CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad
angulum Q, ipsi L oppositum re-
cte ducantur CQ, KQ, RQ, ut



in pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diame-
tris Dodecaedri, seu sphaerae CH, KE, RM, & connexis re-
ctis KH, RH, RE, QE, QM, QH; quoniam Dodecaedru
in sphaera describitur, si planum trianguli CHK, extenda-
tur, fiet communis eius sectio cum sphaera, circulus per lem-
ma 1, propos. exhib. 14. Ac propterea angulus CH, in se-
micirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus re-
ctos esse angulos GRH, BRE, KQE, RQM, CQH. Quo
circa cum in omni triangulo rectangulo, quadrilateris recto
angulo oppositi aequales sit quadratis laterum circa rectum
angulum; sint autem quadrata diametrorum aequalium
CH, KE, RM, aequalia; Aequalia erunt quadrata rectarum
CK, KH, quadratis spatium CR, RH, & quadratis rectaru
KR,

17. tertijde.

31. tertij.

47. primi.

K R, R E, & quadratis rectarum K Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Abiatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium K H, R H, R E, Q E, Q M, & Q H; (Hæ enim rectæ cum sub tendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales sunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum C K, C R, R K, K Q, R Q, & C Q; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula C K R, C K Q, K R Q, R C Q, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt C K R Q: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum. Itaque in dato Dodecaedro Pyramidē descripsimus. Quod faciendum erat.

4. primi.

ALITER. In proposito Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit.

8. quintsid.
1. quintsid.

PROBL. II. PROPOS. II.

O.
II.

IN dato Icosaedro cubum describere.

DESCRIBATUR in dato Icosaedro Dodecaedrum; & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; anguli uero Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam obrem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

5. quintsid.
8. quintsid.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

O.
12.

IN dato Icosaedro Pyramidē describere.

IN dato Icosaedro cubus describat, & huius cubi pyramis, factumque

11. quintsid.
decim.

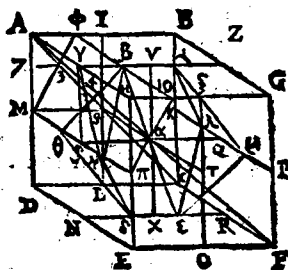
11. quinside.
1. quinside.

Cumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi tangent centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi uniantur, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri; Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descriplimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

SI τ in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrũ. Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π , ξ , Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξ O, M π , KP, NR, nusquã



inter se cocuntibus, quæ rursus bifariam secantur in S, V, T, ρ , Q, X, connexis rectis ST, VX, ρ Q, quæ se mutuo in cẽtro α , bifariam secant, & ad angulos rectos, ut in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, suntque lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales: iam dimidia re-
ctarum YZ, M π , secantur

extrema ac media ratione in β , γ , θ , κ , ut sint maiora segmẽta, Y β , Z γ , M θ , π κ , ductis rectis Y ρ , Y κ , β θ , β κ . Quoniã ergo Y ρ , YV, dimidio latẽris cubi sunt æquales; & ρ κ β V, segmenta minora rectarũ equalium YV, ρ π , æqualia quoq;: Sunt autem quadrata rectarum YV, β V, tripla quadrati rectæ Y β ; Erunt & quadrata rectarum Y ρ , ρ κ , tripla eiusdem quadrati rectæ Y β . Quare, cum quadratis rectarum Y ρ , ρ κ , æquale si. quadratum rectæ Y κ , quod angulus Y ρ κ , rectus sit; Erit & quadratum rectæ Y κ , triplum quadrati rectæ Y β . Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Y ρ , recta est ad planum AE, per rectas AY, Y ρ , ductum; rectus erit an-
gulus

4. tertijdec.

47. primi

29. primi.

4. donec.

gulus $\beta\gamma\kappa$, ex defin. 3. lib. 11. Ac propterea quadratum rectæ $\beta\kappa$, æquale quadratis rectarum $Y\kappa$, $Y\beta$, existens, quadruplum erit quadrati rectæ $Y\beta$. (quia nimirum quadrata rectarum $Y\kappa$, $Y\beta$, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ $Y\beta$, cum quadratum rectæ $Y\kappa$, triplum sit ostensum quadrati rectæ $Y\beta$.) Ideoque cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatâ, dupla erit recta $\beta\kappa$, rectæ $Y\beta$. Quadrupla eni in proportio duplicata est duplæ proportionis, ut in his numeris 1.2.4. apparet: Est autem & $\theta\kappa$, dupla ipsius $\rho\kappa$, quod minora segmenta $\theta\rho$, $\rho\kappa$, rectarum æqualiū $M\rho$, $\pi\rho$, æqualia sunt. Erit igitur ut $Y\beta$, ad $\rho\kappa$, ita $\beta\kappa$, dupla ipsius $Y\beta$, ad $\theta\kappa$, duplam ipsius $\rho\kappa$: Est autem $Y\beta$, maius segmentum ad $\rho\kappa$, rectam minori segmento $\beta\gamma$, æqualem, ut tota ad maius segmentum. Ergo & $\beta\kappa$, ad $\theta\kappa$, erit ut tota ad maius segmentum; Ac proinde $\theta\kappa$, erit maius segmentum rectæ $\beta\kappa$, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus $\theta\kappa$, maius esse segmentum rectæ $\beta\theta$, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta $Y\theta$. Quare æquales erunt $\beta\gamma$, $\beta\kappa$, constituentes triangulum isosceles $\beta\theta\kappa$, simile illi, quod ab Euclide constructum est propof. 10. lib. 4. ut postea demonstrabimus; Ac proinde $\theta\kappa$, erit latus pentagoni in circulo triangulum $\beta\theta\kappa$, circumscribente descripti, ut perspicuum est ex 11. propof. lib. 4.

INTELLIGATUR iam planum trianguli $\beta\theta\kappa$, extendi, (ducta per β , recta $\beta\phi$, ipsi $M\pi$, parallela,) per parallelas $M\pi$, $\phi\iota\theta$, ut sit planum extensum $\phi\pi$, occurrens diametro $A\Gamma$, quadrati $ABCD$, in puncto 3. cubi uero diametro $A\Gamma$, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi $A\phi$, parallela, connectaturque $M\phi$, quæ parallela est utrique $A\phi$, 73. Quoniam igitur, per coroll. propof. 4. lib. 6. triangulum $A\phi\gamma$. simile est triangulo AMS ; ac proinde ut AM , ad MS , ita est $A\gamma$. ad 73. Sunt autem AM , MS , æquales, nepe dimidia cubi latera; Erunt quoque $A\gamma$. 73. æquales. Eadem ratione erit ut MA , ad $A\phi$, ita $M\gamma$. ad 73. Est autem $A\phi$, maius segmentum rectæ MA , diuisæ extrema ac media ratione. (quod æquales sint $A\phi$, $Y\beta$, nec non & MA , $Y\gamma$, dimidia cubi latera. Igitur & 73. hoc est, γA , maius segmentum rectæ $M\gamma$ extrema ac media ratione sectæ; Ac propterea tota MA , diuisa erit extrema ac media ratione in 7. ma-

47. primi.

20. sexti.

15. quinti.

33. primi.

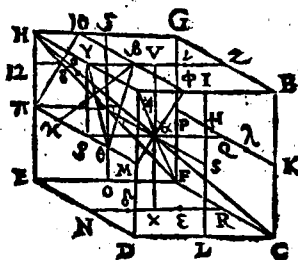
4. sexti.

34. primi.

5. tertijdec.

msque

2. *sexti.* sique segmentum erit M 7. Atqui ut M 7. ad 7 A, ita est S 3. ad 3 A. Secta est ergo & S A, extrema ac media ratione in 3. maiusque segmentum est S 3. Quia uero S α T, parallela est ipsi M π, quod & recta ducta π T, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per S α T, planum ducatur parallelum plano φ π, ducto per M π, secabuntur rectæ AS, A α, in eisdẽ rationes, in punctis 3. & 4. Atq; idcirco, cum AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo A α, semidiameter cubi, in 4. maiusq; segmentum erit α 4. Iisdem argumentis ostẽdemus, ducta diametro H. F, quadrati EFGH, & diametro cubi, HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione a plano φ π, ut perspicuũ est,



si cubus inuertatur, ut in hac figura secũda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamenti prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, ita ut quadratum AC, locũ quadrati HF, & quadratum HF, locũ quadrati, AC, obtineat in hac secunda figura. Ostẽdamus nũc,

si rectæ iungãtur θ 4. β 4. β 9. π 9. rectilineũ β 4 x θ 5. in plano φ π, existẽs, pentagonum esse equilaterũ, & æquiũgulũ.

INVERTATUR rursus cubus, ut quadrata ADEH, AB. GH, quę nimirũ continent triangulũ β θ x, duo planum φ π, hunc situm habeant, quẽ mōstrat tertia hæc figura. Deinde in plano φ π, recta coniuncta θ 4. extẽdatur usq; ad rectam φ 10. in punctũ 13. Quoniã igitur ducta recta K P, & iunctis rectis MK, π P, planũ MP, parallelũ est plano AG, (quod & rectę PK, KM, parallelę sint rectis GB, BA,) secatq; cubũ bifariã; ideoq; per cẽtrũ α, trãsit, per ea, quę in scholio propof. 39 lib. 11. ostẽsa sunt; si per rectas α 4 A, S 4 13. planũ extẽdatur, fient α θ, A 13. communes sectiones planorũ MP, AG, parallelę; Ac proinde triangula α 4. A 13 4. æquiũgula erũt; Erũtq; ut α 4. ad 4 A, ita α 4. ad 4 13. Quare cũ α A, in 4. secta sit extrema ac media rōne, ut ostẽdimus eodẽ mo-

15. *undec.*

32. *undec.*

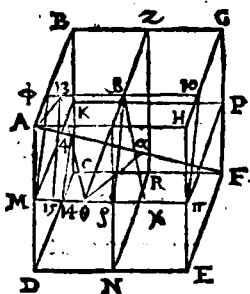
16. *undec.*

4. *sexti.*

do cili

do erit secta Δ 13. in 4. Rursus plano NZ, per centrū α , tran-
seunt, parallelū ducatur planū per punctū 4. ex schol. 10. pro-
pos. 13. lib. 11. secans planū $\phi\pi$, recta 4 14. Erit aut eisdē plano
NZ, parallelū planum DB.

Rectæ igitur αA , $p M$, in
eisdem rationes secabūtur
in punctis: & 11. Quocir-
ca & $p M$, in 14. secta erit
extrema ac media ratione,
minusq; erit segmentū 14
M, ideoque æquale minori
 $p\Delta$, ipsius $M p$. Quare cum
ex p 14. maiori segmēto ip-
sius $p M$, auferatur $p\Delta$, mi-
nus segmentū; Erit, ut de-
monstrauimus ad propos.



5. lib. 13. p 14. diuisa in 5, extremā ac media ratione, maiusq;
segmētū erit $p\Delta$. Postremo acta p 13, recta 13 15. rectæ 4 14,
parallela, secabūtur rectæ Δ 13, Δ 15. proportionaliter, Ac proin-
de & Δ 15. secta erit in 14. extrema ac media rōne, maiusq;
segmētū erit Δ 14. Quapropter erit ut $p\Delta$ maius segmētum
ad Δ 14. minus, ita Δ 14. maius ad 14 15. minus: Ut autem
 Δ 14. ad 14 15. ita est tota Δ 15. ad Δ 14. maius segmētū. Igit
erit ut $p\Delta$, ad Δ 14. ita Δ 15. ad eandē Δ 14. Ac propterea re-
ctæ $p\Delta$ uel $p\kappa$, & Δ 15. æquales erūt. Qm̄ uero planū NZ, &
planū illi parallelū per 4 14. ductū, secātur plano $\phi\pi$; erunt
cōes sectiones βp , 4 14. parallelæ, ideoq; & 13 15. βp , paralle-
læ erūt, angulūq; externus $\beta p\kappa$, interno 13 15 Δ , æqualis.
Cū igitur & latera βp , $p\kappa$, lateribus 13 15. 15 Δ , sint equaliā;
A Equales erūt quoq; rectæ $\beta\kappa$, 13 Δ ; Ac proinde & earum
segmēta maiora $\Delta\kappa$, Δ 4. (Oste sum. n. est $\Delta\kappa$, esse maius segmē-
tū ipsius $\beta\kappa$.) æqualia erūt. Eadē arte & β ipsi $\beta\gamma$, in prima
figura ostēdet æqualis, si simili situ triāgulū isosceles forme-
tur sup̄ basin $\beta\gamma$, cui⁹ uertex cōsistat in pūcto, qđ rectā 18. di-
uidit extrema ac media rōne. Eodēq; modo eisdē $\Delta\kappa$, $\beta\gamma$, æ-
quales erūt $\kappa\theta$, $\beta\theta$. A Equilaterū ergo est pētagonū $\beta\theta\kappa\theta\gamma$.
Sed & equiāgulū, ut mox ostēdem⁹. Si igit hac arte duodecim
triāgula, nimirū ad singulas rectas $M\pi$, YZ , NR , IL , ξO , KP ,
bina ipsi $\beta\Delta\kappa$, similia, & æqualia cōstruā (Ita. n. ad $M\pi$, duo
huiusmodi

15. undec.

17. undec.

2. sexti.

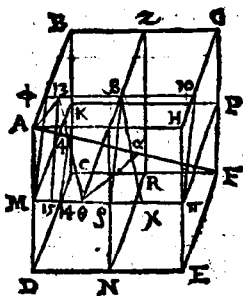
2. quartside.

16. undec.

29. primi.

4. primi

huiusmodi triangula uides $\beta\theta\kappa$, $\delta\theta\kappa$) & ipsorū officio duodecim pentagona ipsi $\beta 4$. $\delta \kappa 9$. similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cuius duodecim

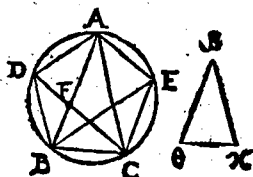


quidem anguli in sex rectis lineis, $M\pi$, YZ , NR , IL , ξO , KP , bini nimirum in singulis, octo uero reliqui in octo semidiamentris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ ipsas extrema ac media ratione diuidunt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiamentris $A\alpha$, $H\alpha$, secundæ fi-

gurar; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicitur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cū non omnes eius anguli uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis cubi constituentur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo uero in punctis, quæ octo semidiamentros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

L E M M A.

QVOD autem triangulum $\beta\theta\kappa$, cuius basis $\beta\kappa$, maius segmentum existit utriusque lateris $\beta\theta$,



$\beta\kappa$, extrema ac media ratione diuisi, simile sit illi, quod Euclides construxit propof. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles ABC , quale Euclides construere docet propof. 10. lib. 4. circulus $ADBCE$, diuisiq;

construere docet propof. 10. lib. 4. circulus $ADBCE$, diuisiq;

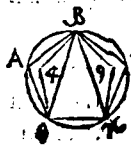
diuisisque angulis ABC, ACB , bisariam rectis BE, CE , perficiatur pentagonum equilaterum, & equi-
angulum $ADBCE$, ut propos. 11. lib. 4. tradidimus,
secentque se mutuo recta AB, CD , in F . Quoniam
ergo AB , in F , secatur extrema ac media ratione, ma-
iusque eius segmentum est AF , aequale lateri BC ;
Et ut AB , tota ad maius suum segmentum BC , ita
 βd , tota ad maius suum segmentum $d x$; Eodemque
modo, ut tota AC ad maius segmentum CB , ita βd ,
tota ad maius segmentum $x \theta$. Est autem quoque ut
 AB , ad AC , ita $\beta \theta$, ad βx , utrobique enim est propor-
tio aequalitatis. Triangula igitur $\beta d x, A B C$, pro-
portionalia habentia latera, equiangula sunt, & equi-
lesque erunt anguli β, B ; Item x, C , & β, A ; pro-
ptereaque uterque angulorum θ, x , duplus erit anguli
 β ; & triangula $\beta \theta x, A B C$, similia.

8. serij dec.

2. quaterdec.

5. senarij

PENTAGONVM uero $\beta d x \theta g$, equilate-
rum, esse quoque equiangulum, hac ratione ostende-
mus. Describatur circa triangulum $\beta d x$, circulus
 $\beta A d x B$, qui si transeat per puncta 4 ,
et 9 , perspicuum est ex ijs, quae ad propos.
16. lib. 4. docuimus, pentagonum equian-
gulum esse. Si uero non incedat per puncta
 4 , et 9 . Describatur in circulo dicto, iux-
ta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum equila-
terum & equiangulum $\beta A d x B$. Quoniam igitur
tam recta $A d, A \beta$, quam rectae $4 d, 4 \beta$, aequales
sunt rectae $d x$, cum & $\beta d x \theta g$, & $\beta A d x B$, pen-
tagonum sit equilaterum; Erunt tam duae rectae $d A$,
 $d 4$, quam duae $\beta A, \beta 4$, aequales, quod fieri non pos-
se demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transsit ergo cir-
culus



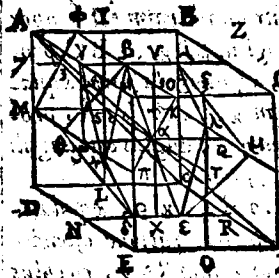
culus triangulo $\beta \theta \kappa$, circumscriptus per puncta α , ϵ & η . At promde pentagonu $\beta \theta \kappa \eta \epsilon$, equiangulu est.

Quod erat demonstrandum. **Q. E. D.**

Ex his colligere licebit sequentes propositiones.

PROPOSITIONE DODECAEDRI duo latera potest ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo dodecaedrum describitur.

In quibus dodecaedri & cubi diameter



prima figura diameter Dodecaedri $\beta \epsilon$, intelligaturque coniuncta recta $\gamma \epsilon$, equalis existens & parallela lateri cubi $\gamma \kappa$, quod & $\gamma \eta$, $\kappa \epsilon$, aequales sint, & parallela. Quoniam igitur angulus $\beta \gamma \kappa$ rectus est; rectus quoque erit angulus $\beta \gamma \epsilon$, ad γ constitutus. Ac proinde quadratum diametri $\beta \epsilon$, aequale erit quadratis

lateralum $\beta \gamma$, $\gamma \epsilon$, nempe Dodecaedri, & cubi.

33. primi.

39. primi.

47. primi.

II.

Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti. Maius vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

In eadem enim prima figura cum sit ut $\gamma \gamma$, ad $\beta \gamma$, ita $\gamma \gamma$, dupla ipsius $\gamma \gamma$, ad $\beta \gamma$, duplam ipsius $\beta \gamma$. Si autem $\beta \gamma$, minus segmentum ipsius $\gamma \gamma$, secta extrema ac media ratione; Erit & $\beta \gamma$, minus segmentum lateris cubi $\gamma \gamma$, secti extrema ac media ratione; composita vero ex $\gamma \gamma$, $\gamma \gamma$, hoc est, recta $\beta \gamma$, (que dupla fuit ostensa ipsius $\gamma \gamma$, ideoque composita ex $\gamma \gamma$, $\gamma \gamma$, equalis) maius segmentum. Constas autem ex constructione $\beta \gamma$, esse latus Dodecaedri, & $\beta \kappa$, seu $\beta \delta$, esse

15. quinti.

esse. latus cubi in β δ 9. Dodecaedro descripti, cum subscindat α γ 8. quinde.
gulum pentagoni β α γ , vel β δ 4. 3.

L A T U S cubi aequalis est duobus lateribus, Dodecaedri uidelicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

III.

N A M in prima rursus figura, latus cubi γ z , componitur ex latere Dodecaedri β γ , in ipso descripti, & ex recta composita ex γ β , γ z ; quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim γ z , cubi latus subscindat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, ut perspicuum est ex 8. propos. huius lib. Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris γ z , scilicet extrema ac media ratione: Erit β θ , existens quoque maius segmentum eiusdem lateris γ z , ut iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris γ z , circumscripti.

8. tertidec.

R E C T A duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est aequalis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IIII.

I N prima enim figura, recta connectens puncta β , δ , in quibus consistuntur duo anguli pentagonorum communi lateri β α , oppositi, aequalis est rectae γ x , (quod & β γ , δ x , aequales sunt, & parallela) hac est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

I N dato cubo Icosaedrum describere.

C V B V S datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit A B , per cuius basium centra C , D , E , F , G , H , lateribus cubi rectae lineae parallelae agantur. nusquam inter se convenientes, & harum medietates extrema ac media ratione sectentur, ita ut maiora segmenta prope centra sint, in punctis I , K , L , M , N , O ; P , Q ; R , S ; T , V ; quorum quodlibet cum quatuor

29. primi.

4. primi.

4. primi.

4. primi.

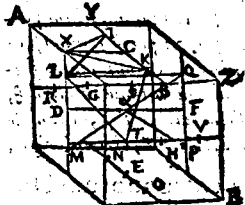
4. primi.

4. primi.

4. primi.

4. terijdec.

vicinioribus connectatur, ut L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. ut constituantur viginti tria angula I K L, I K Q, L M R, L M T, N O M, N O P, P Q V, P Q S, R S I, R S N, T V K, T V O, I L R, I S Q, K T L, K Q V, Q R V, Q T M, N S R, N M R, quorum priora duodecim subtrahuntur duodecim cubi lateribus; posteriora vero octo eiusdem cubi octo angulis subternuntur. Connectantur iam rectæ X C, X I, X K. Quoniam igitur latera X C, C I, trianguli X C I, æqualia sunt lateribus X C, C K, trianguli X C K; & anguli contenti, recti, quod X C, parallela sit ipsi



A Y, Erunt & bases X I, X K, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per defn. 4. lib. 11. recta quoque erit ad lineas X I, X K; Ac propterea cum latera LX, X I, trianguli L X I, æqualia sint lateribus L X, X K, trianguli L X K, & anguli contenti, recti; æquales erunt bases L I, L K. Rursus quoniam quadratum rectæ L I, æquale est quadratis rectarum LX, X I; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ I Y; quadratum vero rectæ X I, quadratis rectarum X C, C I, est æquale: Acquale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis rectarum X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ L I, æquale est tribus quadratis rectarum C Y, C I, I Y: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ C I. (Cum enim quadrata rectarum C Y, I Y, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ C I, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ C I, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum C Y, C I, I Y, quadrupla eiusdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergo rectæ L I, quadruplum est quoque quadrato rectæ C I; Ac propterea, cum eiusdem quadrati rectæ C I, quadruplum sit quadratum rectæ K L, ex siholio propos. 4. lib. 2. Acqualia erunt quadrata rectarum L I, I K, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Acquale iterum igitur est triangulum I K L, lateri cubi A G, sub-

Non

NON aliter ostendemus, reliqua undecim triangula, undecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æqualiter. Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV , æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; ut in triangulo KTL , latus KL commune est triangulo IKL ; & latus KT , triangulo TVK ; & latus TL , triangulo LMT ; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia uiginti huiusmodi triangula Icosædri component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosædri descriplimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM

COLLIGEMUS ex hoc propositiones sequentes.

DIAMETER Icosædri potest & latus Icosædri, & cubi Icosædri ambiens.

DUCTA enim recta LQ , que lateri cubi DF , parallelata est, & æqualis, quod & DL, FQ , parallelæ sint, & æquales; manifestum est, quadratum diametri QM , æquale esse quadratis rectarum LM , lateris Icosædri, & LQ , lateris cubi, in quo Icosædri descriptum est, cum angulus MLQ , sit rectus, quod & LD, FQ , rectus sit, per coroll. 1. propos. 15. lib. 13.

33. primi

47. primi

29. primi

BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosædri conjunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosædri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

II.

NAM huiusmodi tres lineæ, nimirum DF, CE, GH , cum coniungantur centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, seseque per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α , diuidunt. Quod quidem

lib. 3 dem

4. primi

dem & centrum esse Icoſaedri, ita oſtendetur, dūſta recta αP .
 Quoniam latera αF , $F Q$,
 trianguli $\alpha F Q$, equalia ſunt
 lateribus αF , $F P$, trianguli
 $\alpha F P$, anguloſque comprehen-
 dunt rectos; æquales erunt re-
 ctæ αQ , αP . Eademque ra-
 tione æquales erunt omnes re-
 ctæ ex α , ad angulos Icoſaedri
 produentes. Igitur α , cen-
 trum eſt Icoſaedri.

III.

S: latus cubi extrema ac media ratione ſe-
 cetur, maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in
 dicto cubo deſcripti.

15. quinti
 2. quartide
 CUM enim CI , ſit maius ſegmentum rectæ CT ; ſitque ut
 CI , ad CT , ita KI , dupla ipſius CI , ad βT , duplicem ipſius CT ;
 erit quoque KI , latus Icoſaedri, ſegmentum maius lateris
 cubi βT .

IIII.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangula
 oppoſita, inter ſe ſunt parallela.

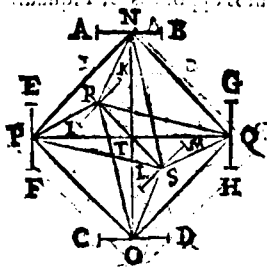
15. undec.
 S: anim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extre-
 ma puncta duabus diametris connectantur, ſient duo triangu-
 la inter ſe equalia, anguloſque alternos habentia æquales, ex
 4. propoſ. lib. 1. que quidem in centro conveniunt. Quare
 qualibet latera oppoſita parallela erunt; Atque idcirco, &
 triangulorum planâ, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe
 erant parallela.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icoſaedro Octaedrū deſcribere.

EXPONANTUR dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt
 Octaedrum, ſex latera oppoſita, $AB, CD; EF, GH; IK, LM$,
 quorum bifariâs ſectiões N, O, P, Q, R, S , iugant tres re-
 ctæ NO, PQ, RS , æquales ſe ſe in centro T , bifariam, & ad
 angulos

angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholia propo-
dentis ostensa sunt, ducanturque rectæ $NP, NR, NS, NQ,$
 $OP, OR, OS, OQ, PR,$
 PS, QR, QS , con-
stituentes octo triângula $SNP, SPO,$
 $SOQ, SQN, RNP, RPO,$
 ROQ, RQN . Quia igitur la-
tera TN, TS , triânguli TNS ,
æqualia sunt lateribus $TN,$
 TP , triânguli TNP , (cum sint
rectarum æqualium dimidia)
angulosq; continent rectos,
ut dictum est; Acquales erunt
bases NS, NP : Eodemq; mo-
do reliquæ omnes lineæ æquales erunt schisco duabus, & in-
ter se. Octo ergo dicta triângula æquilatera sunt, & inter se
æquana; Ideoq; Octaedrum constituunt. Quod in Icosae-
dro descriptum est, cum eius anguli recedant in bisectis se-
ctionibus sex laterum Icosædri opp. sitorum. In dato itaq;
Icosædro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.



4. primi

COROLLARIUM.

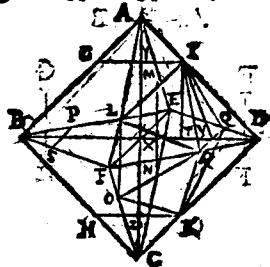
Si quævis hincidem esse centrum Icosædri, & Octædri in
ea descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS , per T , centrū Ico-
sædri incidentes, diametri sunt Octædri $NPOQ, RS$, sunt inscripti.
Quare T , centrū Icosædri, ubi se interfecit, centrū quoq; est Octædri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosædru describere,

DATUM Octaedrum, in quo describendum est Icosæ-
dru, sit $ABCDEF$. Cum a quolibet angulo quatuor
latera exeant, sumantur a singulis binæ non proxima, sed
sibi e regione respondentia, hoc est, quæ ad angulos qua-
dratorum Octædri oppositos cadunt, sumendo semper bi-
na iuxta angulos oppositos eiudem quadrati, qualia sunt
 BA, BC, DA, DC , iuxta angulos oppositos B, D ,
quadrati $ABCD$; AF, AE, CF, CE , iuxta an-
gulos oppositos A, C , quadrati $AECF$: (Nam la-

tem A B, & D, CB, CD, quadrati A B C D, iuxta eodẽm angulos A, C, iam sumpta fuere,) EB, ED, FI, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati E B F I. (Nam latera E A, E C, FC, FA, quadrati A E C F, iuxta eodẽm angulos



(E, F, iam accepta sunt,) quæ omnia secantur extre-
ma ac media ratione, hæc
legẽ, ut maiora segmenta
sint prope angulos a qui-
bus egrediuntur, in duode-
cim punctis G, H, I, K, L,
M, N, O, P, Q, R, S, & a
singulis ad quinque proxi-

mas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, ut ex R, rectæ
R Q, R I, R L, R O, R K. Et ex I, rectæ I Q, I R, I M, I L,
I G, & sic de cæteris, quamvis non omnes ductæ sint, in figu-
ra, ad evitandam linearum confusione: Post hæc, ductis
tribus Octaedri diametris A C, B D, E F, se se in centro X,
secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. pro-
pos. 2. lib. 1; quarum A C, B D, secant rectas G I, R Q, in
Y, & V; connectaturque recta I V, agaturque I T, parallela
ipsi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I,
æqualia sunt lateribus D R, D I; (Sunt enim D Q, D R,
minora segmenta rectarum æqualium D E, D F,) & angulos
comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri
A D E, A D F; Erunt bases I Q, I R, æquales. Deinde cum
sit, ut B G, ad G A, ita D I, ad I A; erit G I, rectæ B D, pa-
rallela. Eademque ratione Q R, ipsi E F, parallela; Ac
proinde ut D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A,
secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est ut
A X, ad X D, ita A Y, ad Y I, (quo triangulum A Y I, simile
sit triangulo A X D, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem
A X, ipsi X D, æqualis; Erit & A Y, ipsi Y I, æqualis. Quare
Y I, minus segmentum est, ita X A. Non aliter ostende-
mus A Y, ipsi Y G, esse æqualem; ideoque G I, rectam bi-
fariam in Y, similiterque Q R, in V, secari. Cum uero la-
tera A' G, A I, trianguli A G I, æqualia sint lateribus D Q,
D R, trianguli D Q R, (nimirum minora segmenta minor-

- 4. primi.
- 2. quartide.
- 2. sexti.
- 4. sexti.

bus segmentis æqualium rectarum) angulosque comprehendunt rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF. Aequales erunt bases GI, QR. Eadem ratione his æquales ostenduntur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum subtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in singulis uidelicet quadratis binos oppositos, complectunturque duo, segmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus segmentum ipsius XA, ostensum, maius est segmentum maioris segmenti XY, diuisi extrema ac media ratione, ut demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. Est autem XY, rectæ XV, æqualia, (cum ambæ sint maiora segmenta æqualium rectarum XA, XD.) & YI, rectæ XT; erit XT, maius segmentum ipsius XV, & ideo T V, segmentum minus eiusdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc est, ipsius IT, (cum & recta IT, æqualis sit ipsi XY) & TV, minoris segmenti, tripla sunt quadrati rectæ XT, maioris segmenti; Atque adeo quadratum rectæ IV, æquale existens quadratis rectarum IT, TV, triplum est eiusdem quadrati rectæ XT, hoc est, rectæ RV, quæ æqualis est ipsi XT, seu ipsi YI, ex demonstratis, cum RV, YI, dimidia sint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipsi quadrato rectæ IV, erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: At quadratis rectarum IV, VR, æquale est quadratum rectæ IR, quod anguli IVR, IVQ, comprehensum lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & subtensum basi æqualibus IR, IQ, æquales sint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum est quadrati rectæ VR; Ac propterea cum eiusdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque sit, per scholium propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR; Aequalia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipsæ æquales: Erat autem IQ, ipsi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est IQR. Non sicus demonstrabimus, æquilatera esse triangu-
la similem situm cum IQR, habentia, nempe KQR; GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN; atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium sint æqualia inter se. Cum enim in quolibet horum triangulorum unum latus subtendat angulum rectum quadrati comprehensum duobus segmentis minoribus

4. primi.

4. primi.

34. primi.

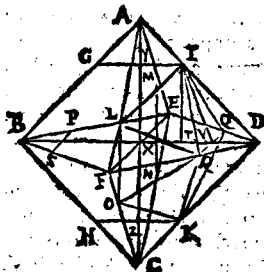
4. tersi de co.

47. primi.

47. primi.

8. primi.

minoribus laterū Octaedri; Duo uero reliqua subtendunt duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos singulos duobus segmentis laterū Octaedri, maiore & minore: Erunt latera unius trianguli lateribus aliorū æqua-



lia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per coroll. propof. lib. 1. Vt in triangulis IQR , GIL , latera KQ & GI , subtendunt angulos rectos QDR , GAI , quadratorū $DEBF$, $ABCD$, comprehensos minoribus segmentis DQ , DR ; AG , AI , æqualia sūt. Eodem modo latera IQ ,

IL , æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales IDQ , IAL , triangulorum æquilaterorum ADE , ADF , quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri DI , DQ , maiore & minore; hic uero segmentis AL , AI , maiore & minore quoque. Nonsecus latera IR , GL , æqualia erunt. At æqualia igitur sunt triangula IQR , GIL , per coroll. propof. lib. 1. Atqui IQR , ostensum est esse æquilaterum; Ergo & GIL , æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina uidelicet singulis. Ex his consequitur reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, uidelicet GMP , in AEB ; HNP , in BEC ; KNQ , in CED ; IMQ , in AED ; GLS , in AFB ; HOS , in BFC ; KOR , in CFD ; ILR , in AFD , æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorū lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum Octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi, (ut uides in quinque RQI , RIL , RLO , ROK , RKQ , solidum angulum R , componentibus.) Icosædru componunt Octædro inscriptum, cum Icosædri duodecim anguli duodecim sectioes laterum Octædri possideant. In dato itaque Octædro Icosædru descripsimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIUM. I.

COLLIGITUR ex demonstratis, si duo latera trianguli aequilateri secentur extrema ac media ratione, ita ut unus maius segmentum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cum enim in triangulo aequilatero ADE , maius segmentum lateris AD , sit DI , & DQ , minus lateris DE ; sit autem recta IQ , ostensa aequalis rectae GI , quae duplum potest minoris segmenti AI , cum quadratum rectae GI , aequale sit duobus quadratis aequalibus rectarum aequalium AG , AI : Perस्पicuū est, & rectam IQ , duplum posse eiusdem segmenti minoris AI .

47. primi.

COROLLARIUM. II.

Rectae qs sit, cum octo Icosaedri bases collocatae sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namque Octaedri superioris triangulum ABD , in quo collocatus est triangulum Icosaedri I , MQ , sitque C , centrum trianguli AED , ex quo rectae distantur CA , CE , CD , CI , CM , CQ . Quoniam igitur latera CA , AM , trianguli CAM , aequalia sunt lateribus CE , BQ , trianguli CEQ , (quod haec latera sint ex centro, & maiora segmenta aequalium rectarum) angulosque comprehendunt aequales, nempe dimidios angulorum trianguli aequilateri, ut in Ichthio propo. 12. lib. 13. ostendimus; Erunt bases CM , CQ , aequales. Non secus demonstrabimus CI , aequalem esse lineis CM , CQ . Quare C , centrum, erit trianguli IMQ .



COROLLARIUM. III.

Non est difficile est denique ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Datis enim ex X , centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG , XO , ad angulos G , & O ; cum latera XA , AG , trianguli XAG , aequalia sint lateribus XF , FO , trianguli XFO : (Nam XA , XF , semidiametri sunt Octaedri, & AG , FO , segmenta minora laterum aequalium Octaedri sectionum extrema ac media ratione.) angulosque complectantur aequales, semitrectos videlicet; (cum AC , hF , diametri sint quadratorum $ABCD$, $EAFG$; ac proinde, per demonstrata in scholio propo. 14. lib. 1. angulos quadratorum bisariam secent.) Aequales erunt & bases XG , XO . Eodemque argumento ostendentur omnes aliae rectae ex X , ductae ad angulos Icosaedri aequales esse. Igitur X , centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

16. quintide.
5. quintide.

INSGRIBATUR dato Octaedro Icosaedrum, & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituentur in centrīs basium Icosaedri, quā octo concentrici sunt basibus Octaedri, ex coroll. 1. p. opof. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centrīs octo basium Octaedri, reliquos autē duodecim in centrīs duodecim basium Icosaedri, quarum binę singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quamquam non proprie, ut ex definitione 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubum describere.

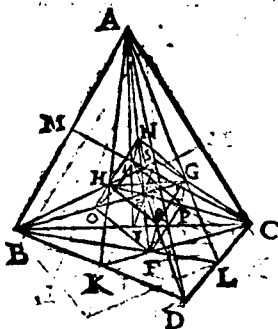
15. quarti.
decimi.

DETVR Pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur AEF, BEG, CEH, DEI, quę cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectę ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFZ, CGS, secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propof. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectę ex solidis angulis per centrum E, demissę AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centrīs basium rectis lineis coniungantur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H.

Dico

Dico solidum N F, contentum quadrilateris N O, N P, N Q, F G, F H, F I, et cubum esse. Cum enim latera A F, F K, trianguli A F K, equalia sint lateribus A F, F L, trianguli A F L, (quod F K, F L, cum perpendicularares sint ad B D, C D, ex centro F ducte, ostendat equalis distantias rectarum equalium B D, C D, a centro F) anguloque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 1. r. Aequales erunt & bases A K, A L & anguli K A F, L A F. Rursus quia latera A N, A H, trianguli A N H, equalia sunt lateribus A N, A G, trianguli A N G, (sunt enim A H, A G, semidiametri triangulorum equilateralium equalium A B D, A C D,) angulos item comprehendunt equalis, ut demonstrauimus; Aequales erunt bases N H, N G. Haud secus ostenduntur equalis recte Q G, Q H, si recte ducantur D G, D H, nec non & relique, cum omnes subterdant equalis angulos equalibus lateribus comprehensos; ut perspicuum est. Si enim recta ducatur F T, cum latera A F, F T, equalia sint lateribus A F, F K: (Sunt namque F T, F K, distantie rectarum equalium B C, B D, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli T A F, K A F. Ac proinde cum latera A N, A I, equalia sint lateribus A N, A H; (Sunt enim A I, A H, semidiametri triangulorum equilateralium equalium A B C, A B D:) anguloque contineant equalis: Aequales erunt bases N I, N H, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, equaliter. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangula, ut tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum N F.

ASSUMATUR quadrilaterum N Q, ductis rectis G H, N Q. Quoniam in pyramide latera B C, A D, opposita sunt, hoc est, non coeunt in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter Octaedri in pyramide descripti, ut constet ex figura proposit. huius



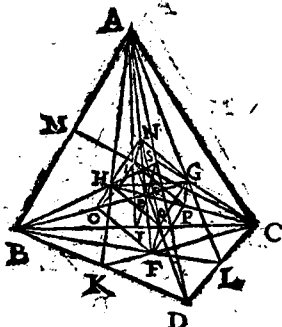
4. primi

4. primi.

4. primi.

EVLID. GEOM.

huius lib. Nam punctum S, huius figure responder puncto
H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint late-
ra opposita, siue non coeuntia B C, A D. Quocirca cum
idem sit centrum pyramidis, & Octaedri in ipsa descripti, ut



mox demonstrabimus, tran-
sibit ST, per E, centrum Py-
ramidis, æqualesque erant
ES, ET, nempe semidiamet-
ri Octaedri. Deinde quia
BS, CS, perpendiculares
sunt ad AD, p[er] scholiū p[ro]p[os]i-
t. 12. lib. 13. erunt HS, GS,
ex centris H, & G, tertiæ par-
tes perpendicularium BS,
CS. Quare latera BS, CS,
trianguli BSC, proportiona-
liter secantur, atque idcirco
HG, parallela est lateri BC,

secatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars
est trianguli BSC,) proportionaliter; Ideoque & SR, tertia
pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE.
Rursum quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC;
erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. p[ro]p[os]i-
t. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1.
erit EI, ac proinde talium 4. recta DI, ideoque eius dimi-
diū DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua
EQ, talium partium erit 1, atque idcirco EQ, tertia pars
erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius
AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED,
proportionaliter secantur, recta NQ, parallela erit lateri
AD, secabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod
quidē pars est trianguli AED,) proportionaliter, ideoque,
cum EQ, sit tertia pars ipsius DE, tertia pars erit ER,
ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiusdem
SE. Quoniam igitur, utraque HG, NQ, ex SE, duas
tercias partes abstulit, in eodem puncto B, secabitur SE,
a rectis HG, NQ; Ac idcirco & ipsæ HG, NQ, in eo-
dem se se puncto interfecunt. Quare in eodem sunt pla-
no, proptereaque & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem
cum

17. quarti-
decimi.

2. sexti.

15. quarti-
decimi.

2. sexti.

2. undec.

cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ . Eademque est ratio de ceteris quinque. Quod autem & rectangulum, nunc demonstramus.

Cum ostensa sit HG , ipsi BC , parallela, atque adeo triangulum SHG , simile triangulo SBG , ex coroll. propos. 4. lib 6. Erit ut SH , ad HG , ita SB , ad BC ; & permutando, ut SH , ad SB , ita HG , ad BC . Est autem SH , tertia pars ipsius SB : Igitur & HG , tertia pars erit lateris BC . Haud secus ostendemus NQ , tertiam esse partem lateris AD . Cum ergo latera BC , AD , sint aequalia, erunt & eorum tertiae partes HG , NQ , aequales. Ac proinde cum subtendantur aequalibus lateribus HN , GN , GQ , HQ , NG , QG ; NH , QI , AQ lateres erunt quatuor anguli HNG , NGQ , GQH , QHN . Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis aequales, ut ostendimus ad propos. 32. lib. 1. recti erunt; ideoque quadratum erit NQ . Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent: qui ideo Pyramidi dicitur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F , G , H , I , in centris quatuor basium pyramidis, quatuor uero reliqui N , O , P , Q , in bifarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum residant, ut constat. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod facendum erat.

4. sexti.

8. primi.

COROLLARIUM. I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi NP , OG , PH , QI , cum sint dimidia partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E , centrum pyramidis transeunt.

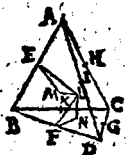
COROLLARIUM. II.

INFERVA quoque, rectam, quae coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim ER , ex E , centro cubi, in R , centrum basis $GNHQ$, ducta dimidium sit lateris cubi, ut constat; Recta RS , dupla totius ER ,

E R, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur R, si ostensa sit tertia pars ipsius S T; perspicuum est, rectam S T, coniungentem S, & T, bifariam sectiones laterum oppositorum pyramidis A D, B C, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi R B.

L E M M A.

I D E M autem esse centrum Pyramidis, & Octædri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit Pyramis



A B C D, cuius omnia sex latera bifariam secantur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro Pyramidis in bases A B D, B C D, perpendiculares demittantur L M, L N, que in centra circulo-

rum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis L E, E M, L F, F N; quoniam latera L M, M E, trianguli L M E, æqualia sunt lateribus L N, N F, trianguli L N F. (cum enim circuli bases A B D, B C D, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi a centro L, per lemma 2. propof. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantie L M, L N, æquales erant. Sic quoque æquales erunt M E, N F, distantie rectarum æqualium A B, B D, a centris M, & N, circularum æqualium) angulosque comprehendunt rectos, per defn. 3. lib. 11. Æquales erunt rectæ L E, L F. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ L G, L H, L I, L K. Quare cum anguli Octædri in pyramide descripti constituentur in punctis E, F, G, H, I, K, ut ex 2. propof. huius lib. constet: Erit L, centrum Octædri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum

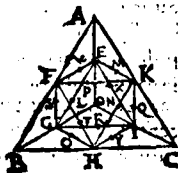
4. primi

trum pyramidis, & octaedri in ea descripti.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icofaedrum describere.

DATAE Pyramidi ABCD, inscribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secentur extremae ac media ratione, hac lege, ut bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quattuororum octaedri cadentia, ut in propof. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, EK, HK, HG; KF, KI, GI, GF; FH, FE, IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniuxerimus lineis rectis, ut M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icofaedrum in dicto octaedro, ut constat



ex propof. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in quodecim praefatis sectionibus duodecim laterum octaedri. Cum ergo haec ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icofaedri in planis basium pyramidis constitui; ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK, KE; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icofaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases

MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, ut constat.

stat. In data igitur Pyramide

Icofaedrum descripsi

mas. Quod e-

rat facien-

dum.

Mm

POR

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaëdram describere.

19. quintide.
5. quintide.

8. quintide.

11. quintide.

Pyramidi datae inscribatur Icosaëdram, & in hoc Dodecaëdram habens uiginti suos angulos in centris uiginti basium Icosaëdri; Factumque erit, quod iubetur. Gum enim quatuor bases Icosaëdri existant in quatuor basibus pyramidis, ut in præcedenti propos. diximus; consistent quatuor anguli Dodecaëdri dicto Icosaëdro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaëdri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, ut constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde quia cubus Dodecaëdro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaëdri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bisarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaëdri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bisarijs sectionibus perpendicularium dictarum: super sunt autem duodecim anguli Dodecaëdri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaëdram descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiam si non proprie. Quamobrem in data Pyramide Dodecaëdram descripsimus. Quod faciendum erat.

13.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato solido regulari sphaeram describere.

Ex centro sphaerae datum solidum completentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulo-

rum

tum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter a centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphaera, cuius semidiametri sunt præfate perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa singulas bases in eorum centris contingat.

SCHOLIION.

IT A Q V E, cum quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, ut sint in uniuersum viginti inscriptiones, vnum duntaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, octaedro, atque Pyramide, ut perspicuum est ex propos. 13. 17. & 10. huius lib. Similiter unum tantummodo cubus non proprie in Pyramide describitur, ut ex propos. 18. huius lib. est manifestum. Nam, ut proprie solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti consisti vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, ut defin. 31. lib. 11. exposuimus: Qua quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.

C A S T E R V M inter omnia quinque solida regularia, unum octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta. In octaedro enim describitur Icosaedrum consistens duodecim suos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro inscriptum est, ut constat ex propos. 7. huius lib. Post hac in Dodecaedro describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est. Deniq; in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicitur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centrīs quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem privilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

N E Q V E uero prætereundum est, Dodecaedrum, sibiq;

16. quintsida

5. quintsida.

3. quintsida.

1. quintsida.

1. quintide.
8. quintide.
inscriptum orbem, & huic cubo inscriptam pyramidem; eadem sphaera comprehendit. Cum enim quatuor anguli Pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant; conveniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat, sphaeram Dodecaedro circumscriptam completi quoque cubum atque Pyramidem, cum sphaera illius superficeret per horum solidorum angulos incedat.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in eorum basium centris constituuntur, ut demonstratum est. In centris quidem basium Icosaedri, propos. 4. 11. & 12. In centris vero basium octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium Pyramidis, propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius libri propositionibus omnes delineationes inscriptionesque quinque solidorum regularium, unius in alio; quotquot excogitari possunt, absolvimus, cum in quolibet reliqua quatuor designaverimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. & 6. 17. In cubo denique, Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. i. 51. 4. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum, propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori unica propositione, qua arte in quovis solido regulari sphaera depingatur, docuimus.

ELEMENTI DECIMIQUINTI FINIS.



ELEMEN-

ELEMENTVM

DECIMVMSEXTVM,

Quoniam solidorum regularium sibi mutuo inscri-
ptorum, & laterum eorundem comparationes
explicantur, a Francisco Flussate Candalla
adiectum, & de quinq; corporibus.

LIBER. TERTIUS.



UT AD MODVM in lib. 14. tra-
dita sunt comparationes quam plurimas
figurarum regularium, & laterum earundem in eadem sphaera descriptarum,
quarum quidem descriptione in lib. 13.
exposuit Euclides; ita etiam Franciscus
Flussas Candalla in hoc lib. 16. inter se
comparat easdem figuras regulares sibi

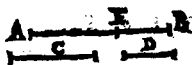
mutuo inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem
inscriptionem in precedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam
connexionem habet hic liber 16. cum precedenti 15. quam quar-
tus decimus cum tertio decimo habuit; ut imperfecta quodam-
modo uideri possit tractatio hac quinq; corporum regularium,
si liber hic decimus sextus non adiungatur.

THEOR. I. PROPOS. I.

SI in Dodecaedro cubus describatur,
& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit
proportio Dodecaedri exterioris ad Do-

decaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectae lineae diuise extrema ac media ratione, triplicata.

L A T V S cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis,



quam habet AE, maius segmentum ad EB, minus. Cum enim, ut in scholio ultimae propos. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusque

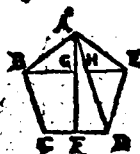
in illo descriptus, eadem comprehendantur sphaera; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphaera cum cubo descripti, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi aequale lateri C, Dodecaedri in eadem sphaera, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi aequale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit ut C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, ut AE, maius segmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris segmenti AE, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inferbatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo

gulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in
latus oppositum demissa, secatur a recta illū
anguluti subtendente, extrema ac media ra
tione.

I n pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex
angulo A, ad latus oppositum CD, perpendicularis demit
tatur AF. Dico AF, a recta BE, subtendente angulum A, se
cari in G, extrema ac media ratione. Du
cta enim recta AD, que secet BE, in H;
quoniam BE, recta lateri CD, per coroll.
propos. 8. lib. 15. est parallela; secabun
tur rectæ AF, AD, proportionaliter:
Atqui AD, in H, secta est extrema ac me
dia ratione, estque maius segmentū DH.
Igitur & AF, in G, similiter erit secta. Quocirca linea per
pendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demon
strandum.



2. sexti.
3. tertijdec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

S I ab angulis trianguli Pyramidis ducan
tur rectæ opposita latera secantes extrema
ac media ratione, ita ut prope quemuis an
gulum sit maius segmentum unius lateris,
& minus alterius: Hæ sectionibus suis in me
dio producent basin Icosaedri in dicta pyra
mide descripti, inscriptam quidem alij tria
gulo æquilatero, cuius anguli latera trian
guli pyramidis secant extrema ac media ra
tione, & latera ipsa bifariam secantur ab an
gulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit ABC , cuius latera secantur bifariam in D, E, F , iunctis rectis DE, EF, FD , quibus rursum factis extrema ac media ratione in G, H, I , iungantur rectæ GH, HI, IG , constituentes $GH I$, triangulum Icosædri in dicta pyramide descripti, ut constat ex propof. 1. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli ABC , extrema ac media ratione in K, L, M , iunctis rectis BK, CL, AM . Di-



cohas rectas suis sectionibus producant triangulum Icosædri $GH I$, hoc est, rectam BK , transire per puncta G, I ; & rectam CL , per puncta H, I ; & rectam AM , per puncta G, H . Ductæ enim, per H , secta NO , ipsi BC , parallela; erit triangulum FHO , triangulo IEG , simile, ex corollis propof. 4. lib. 6. Ideoque & æquilaterum, cum & $FE C$, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo ABC , per idem coroll. Quare HO , rectæ æqualis est rectæ FE , maiori

segmento rectæ FB , seu DE ; ipsi æqualis: (Est enim & DEF , triangulum æquilaterum, cum eius latera, subtendāt angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidijs scilicet æqualium laterum eiusdem trianguli comprehensos; ideoque æqualia sint.) Est autem & NH , æqualis toti DF , in parallelogrammo DH , propterea quod FH, DF , parallele sint rectis AB, BC , seu NO . Igitur recta NO , composita ex NH , tota, & HO , maiori segmento, secta erit in H , extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallele BC, NO, DF , similiter sint sectæ in M, H, G , nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM , ex ijs, quæ demonstauimus ad propof. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constar, ipsam AM , transire per puncta G, H . Haud secus ostendemus BK , per puncta G, I ; & CL , per puncta H, I , transire, si per $G, & I$, rectæ ducantur parallele lateribus AC, AB ; Atque idcirco rectæ BK, CL, AM , suis sectionibus producent triangulum Icosædri $GH I$.

AGATVR iam per G , recta PQ , secta CL , parallela. Quoniā igit AF , æqualis est rectæ DE , seu rectæ FE , cuius maius segmentū fuit FH , hoc est, FO , illi æqualis; Erit quoque FO , maius segmentū rectæ AF ; ac proinde tota AO , secta in F , extre-

4. primi.
34. primi.
2. sexti.
5. tertijdec.

5. tertijdec.

F, extrema ac media ratione: Est autem ut AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO; & ut AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectę AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione. suntque maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectę ergo AQ, AL, segmenta maiora rectarum æqualiū AC, AB, æquales erunt. Quia uero est ut AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum; Et est AQ, recta rectę AL, æqualis. Erit & QC, recta æqualis rectę AP. Quare & recta AP, minus segmentū erit lateris AB, maiusque reliqua AP; ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadē ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela, rectę AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione; ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectę BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione, atque adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam uero singula latera trianguli PQR, cum subendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, æqualia inter se sunt; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bisariam secantur ab angulis trianguli Icosædri GHI: (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL, secabuntur PQ, LC, in eadem rationes, ex ijs, quæ ad propos. 4. lib. 6. demonstraui-
mus: Diuiditur autem CL, bisariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela est lateri AL, secans proportiona-
liter latera CA, CL. Igitur & PQ, bisariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP.) Ac propterea trian-
gulum Icosædri GHI, inscriptum est triangulo æquilatēro PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bisariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosædri GHI. Quæ propter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

2. sexti.

2. quartide.

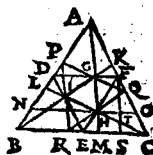
4. primi.

2. sexti.

COROLLARIUM

Ex his facile colligi potest, latus Icosædri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectę diuisę extrema ac media ratione, quæ ab uno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque

2. *sexti.*
34. *primi.*



quoque ac media ratione. Cum enim, ut constat ex propos. 16. lib. 15. GHI , triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF , descripti; ducatur ex angulo F , trianguli FEC , quod triangulo DEF , est æquale, recta FS , parallela rectæ AM , secans $B C$, HO , in S , & T . Cum igitur MC , bifariam secetur in S , ob triangulum AMC ; sique MS , ipsi GF , æqualis, ob parallelogrammum GS ; Erit & SC , æqualis eidem GF , minori segmento rectæ DF ; Ac propterea cum totæ DF , BC , æquales sint, erit quoque reliqua HS , reliquæ DG , maiori segmento æqualis: Ideoque EC , in S , secta erit extrema ac media ratione. Deinde quia FB , FS , similiter secantur; secatur autem FB , extrema ac media ratione; secabitur & FS , in T , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit FT , recta æqualis existens lateri Icosaedri GH , ob parallelogrammum GT . Igitur FT , latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ FS , quæ diuidit EC , latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F , demissa. Quod est propositum.

2. *sexti.*
34. *primi.*

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINUS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in eâ pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC , cuius latera extrema ac media ratione secantur in K, L, M , & ductis rectis BK, CL, AM , producentibus GHI , basim Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatelo PQR , cuius anguli latera trianguli ABC , secant extrema ac media ratione in P, Q, R , & ipsa latera PQ, QR, RP , bifariam diuidantur in G, H, I , ut in propos. præcedenti demonstratæ est. Dico AP , minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI . Cû. n. PQ , dupla sit potentia minoris segmenti AP , ex coroll. 1. propos. 16. lib. 1. quadrupla uero potentia rectæ HI , ex scholio propos. 4. lib. 2. quæ PQ , recta dupla sit rectæ PG , hoc est, sibi æqualis HI , ob parallelogrammum PH ; Erit PQ , potentia 4. & AP ..



AP. 2. & H1. 1. Quodbré AP, dupla erit potētia rectæ H I.
Minus ergo segmētū lateris, &c. Quod erat demonstrādū.

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex his latus Icofaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. Cum enim diameter sphære potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis; si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rōnale, cū diametro potētia sit cōmēsurabile. Quare minus segmētū lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit; Atq; adeo cū minori segmēto lateris Pyramidis latus Icofaedri potentia sit cōmēsurabile; (ostendimus enim minus segmētum potentia esse duplum lateris Icofaedri.) Erit & latus Icofaedri, ex scholio propoſ. 102. lib. 10. Apotome.

13. servijde.

6. decimi.

6. servijdec.

6. decimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATIVS cubi potētia dimidiū est lateris Pyramidis i eo descriptæ: Latus uero Pyramidis duplū est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus deniq; cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CUM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diametret sit basis cubi, ut cōstat ex propoſ. 1. lib. 1. 5. Sic autē quadratū huius diametri duplū basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propoſ. 37. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potētia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RURSUS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, ut liquet ex propoſ. 2. lib. 1. 5. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cū ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, sicut cōstat ex 4. propoſ. lib. 4. Perspicuum est, latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.

DENIQUE quia diameter sphære, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro octaedri sibi inscripti, cū diameter octaedri cōiungat cētra basium cubi oppositarū, ut in coroll. propoſ. 3. lib. 1. diximus: patet, lat^{us} cubi potētia esse duplū lateris octaedri in eo de-

14. servijde.

co de-

eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est la-
teris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

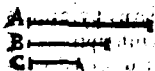
LATVS Dodecaedri maius segmen-
tum est rectæ, quæ potentia est dimidia la-
teris Pyramidis sibi inscriptæ.

C V M enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoq;
in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, ut docuimus pro-
pos. 10. lib. 13. Sit autem latus dodecaedri maius segmen-
tum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo
describitur; existat denique latus cubi dimidium potentia la-
teris Pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Do-
decaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimi-
dia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demon-
strandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum,
& Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium
proportionale erit inter latus cubi, & Do-
decaedri.

S I T, latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B,
latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico



B, latus Icosaedri medio loco esse pro-
portionale inter A, latus cubi, & C,
latus Dodecaedri. Cum enim ex ijs,

quæ in scholio propos. 14. lib. 13. de-
monstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit la-
teris cubi A, & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scho-
lio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum
sit

fit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, ut B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo naque describatur & Icosaedrum, &c: Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATUS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

Cum enim per ea, quæ propos. 18. lib. 13. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti; (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramidis BC,) Et quadrata proportionē habeant laterum duplicaram: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cum noncupla proportio sit triple duplicata, ut in his numeris: 18. 9. apparet. Quare, cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, ut si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi & quadratum eiusdem basis diametri sit 2. & quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

20. sexti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATUS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

Cum enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inscribitur, ut docuimus in scholio, propos. ultime lib. 13. Erit latus Pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi & Dodecaedro

8. sextidec.

inscripti

inſcripti : Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. la-
tus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cu-
bus eſt deſcriptus. Igitur laſus Pyramidis potentia octode-
cuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius ma-
ius ſegmentum laus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.
Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur:
Erit laſus Icoſaedri potentia duplum mino-
ris ſegmenti lateris octaedri extrema ac me-
dia ratione diuifi.

47. primi. **V**T enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15, recta coniun-
gens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angu-
lum continentium prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi
recta GI, ſubtendens angulum rectum GAI, minoribus ſeg-
mentis AG, AI, comprehenſum,) laſus eſt Icoſaedri in octae-
dro deſcripti. Quare, cum hoc ipſum laſus Icoſaedri poſſit
duo illa minora ſegmenta æqualia ; duplum poterit unius
minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcriba-
tur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadru-
plum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo
deſcripti.

SI T una ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis
quadratum ABCD, triangula uero ad E, uerticem, ABE,
EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F,
G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis
AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod ſi coniungantur rectæ
FG,

FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro descripti, ut demonstrauimus propof. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ EH, per coroll. propof. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: Acqui ut EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum KLMN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, uidelicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propof. 47. lib. 1. demonstrauimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati GI, descriptum; cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum, &c. Quod erat demonstrandum.



2. sexti.

13. primi.

COROLLARIUM.

Quia uero latus cubi extrema ac media ratione diuisum est, fit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 1. propof. 13. lib. 15. Inscribunturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem octaedro, ut docuimus in scholio propof. ultime lib. 15. Perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est. n. eiusmodi recta latus cubi eidem octaedro inscripti, cuius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sesquialteræ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti.

QVO

Q U O N I A M Icosaedri in cubo descripti sex latera op-
posita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifariae se-
ctiones coniungunt tres rectae lateri cubi aequales, ut con-
stat ex propos. 14. lib. 13. eiusque scholio. Et in bifarijs se-
ctionibus dictorum sex laterum Icosaedri resident sex an-
guli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 13. eiusdem
lib. 13. Fit, diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti
aequalem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur.
Quare, cum per ea, quae ad propos. 14. lib. 13. ostendimus, latus
Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi praedicti extrema
ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri
maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro de-
cripti: Atqui diameter sphaerae, seu octaedri dupla est poten-
tia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum
est eius rectae extrema ac media ratione sectae, quae poten-
tia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod
ostendendum erat.

14. tertij de.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

. LATVS cubi ad latus Dodecaedri in
ipso descripti proportionem habet duplica-
tam eius, quam habet maius segmentum
ad minus rectae lineae diuisae extrema ac me-
dia ratione. Latus uero Dodecaedri ad la-
tus cubi in ipso descripti proportionem ha-
bet, quam minus segmentum ad maius e-
iusdem rectae lineae.

O S T E N S U M est in scholio propos. 13. lib. 13. Minus
segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse
latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea
extrema ac media, ratione diuisa ad minus segmentum pro-
portionem habeat duplicatam proportionis totius lineae ad
maius segmentum, uel maioris segmenti ad minus, (quod
tota

tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continue proportionales:) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus Icosaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

PRÆTEREA, cum constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione dimisilatus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse ut latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, ut tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, ut maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

Si una sex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius basis quadratum ABCD, triangula autem ad uerticem E, sine ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, ut docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam uero Pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, ac in scholio propos. ultimæ lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, ut constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, sesquialterum esse lateris Pyramidis GI. Ducis enim rectis EGK, EIL, diidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque EK, EL, sesquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll. propos. 13.



2. sexti.

lib. 14. Ac propterea GI , parallela erit rectæ KL , auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum EGL , simile triangulo EKL . Quare erit, ut $E K$, ad KL , ita EG , ad GI ; & permutando, ut $E K$, ad EG , ita KL , ad GI ; ideoque ærum $E K$, sesquialtera sit ipsius $B G$, erit & KL , sesquialtera ipsius GI . Cum ergo $B C$, æqualis sit ipsi KL , quod & $B K$, $C L$, æquales sint, & parallele; Erit $B C$, laevis octaedri sesquialterum lateris Pyramidis GI , sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

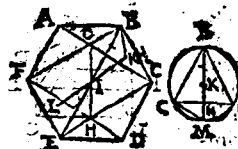
33. primi



THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplicum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquiterilum quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum $ABCDEFGHI$, cuius diameter BE , & centrum L , triangula uero opposita & parallela, per coroll. 4. propos. 14. lib. 13. $B C G$, $E F H$, quorum centra K , L . Ducatur ex centro L , ad planum $B C G$, perpendicularis KL , cadens, ex coroll. 1. dem. 1. propos. 10. lib. 14. in centrum K . Producta igitur KL , perpendicularis quoque erit ad planum $E F H$, parallelum plano $B C G$, per solū proposition. 14. lib. 14. cadetque idcirco in centrum L , per coroll. præfati dem. 1. Quæ ob rem, cum cubus in Icosaedro descriptus habeat suos angulos in centris basium Icosaedri, ut constat ex propos. 11. lib. 13. atque adeo angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit KL , diameter cubi in Icosaedro descripti, transeunt per L , centrum Icosaedri. Cum ergo eadē ratione reli-



quæ diametri cubi per idem centrū I, tranſcant; erit I quoq;
centrum cubi inſcripti, ideoque I K, I L, ſemidiametri æqua-
les: Coniuncta autem K B, ſemidiametro circuli triangulum
B C G, circunſcribentis, erit angulus B K I, reſtus, ex defin.
3. lib. 11. Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadra-
tis reſtarum B K, K I. Igitur & quadratum diametri B E,
quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri B I, ut in ſcho-
lio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis dua-
rum reſtarum, nempe diametri circuli triangulum B C G,
circunſcribentis, & K L. Sunt enim & hæc quadrata, per
idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris
B K, K I, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri
cubi K L, (quod triplum eſt quadrati lateris cubi,) ex
quadrato diametri Icoſaedri B E, remanet quadratum dia-
metri circuli triangulum B C G, circunſcribentis. Hoc
igitur dico ſeſquitergium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C.
Deſcribare enim ex centro K, circa triangulum æquato-
rum B C G, circulus, extenſaque B K, utque ad M, que
ſecet C G, in N, ducatur quoque recta C M. Quoniam igitur
B N, per centrū K, ducta perpendicularis eſt ad C G,
per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 2. lib. 19, erit
recta B C, potentia ſeſquitergia rectæ B N, & ut autem B C,
ad B N, ita eſt B M, ad B C, quod B C, ſit media proportio-
nalis inter B M, & B N, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6, cum angu-
lus B C M, reſtus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur
B M, potentia quoque ſeſquitergia eſt rectæ B C; Ac pro-
pterea quadratum diametri B M, ſeſquitergium eſt quadra-
ti lateris B C. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſae-
dri, &c. Quod erat demonſtrandum.

47. primi.

15. ſextij dec.

12. quarti.
decimi.

31. tertij.

COROLLARIUM.

Hæc ſit diametrum Icoſaedri binæ rectæ poſſe, diame-
trum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangu-
lum Icoſaedri ambiens, oſenſum ſiquidem eſt, quadra-
tum diametri Icoſaedri B E, æquale eſſe quadrato
diametri cubi K L, & diametri circuli
triangulum B C G, cir-
cumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmen-
tum est rectæ lineæ extrema ac media ratio-
ne diuisa, quæ duplum potest lateris Octae-
dri in eo descripti.

11. serij dec.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descri-
pti duplum potens lateris Octaedri, coniungit bifarias sectio-
nes laterum oppositorum Dodecaedri, ut manifestum est
ex propos. 9. lib. 15. Est autem sectæ distas sectiones con-
iungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmen-
tum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. lib. 13. Liquet,
latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema
ac media ratione diuise, quæ duplum potest lateris octaedri
in eo descripti, cum huiusmodi recta coniungat bifarias se-
ctiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem mi-
nus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll.
Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est, &c. Quod
erat demonstrandum.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui
ipsius lateris sesquiterrium, & lateris Pyra-
midis in eo descriptæ sesquialterum.

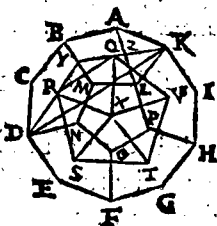
13. serij dec.

CVM cubus & Pyramis in eo descriptæ, in eodem Ico-
saedro describantur, ut docuimus in scholio propos. ultime
lib. 15. eademque sphaera comprehendantur, eadem erit dia-
meter cubi, & diameter sphaeræ pyramidem circundantis:
potest autem diameter sphaeræ sesquialterum lateris pyrami-
dis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo &
Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris Pyrami-
dis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter cir-
culi basim Icosaedri circumscribentis sesquiterrium potest
lateris

lateris Icofaedri, ut in demonstratione propof. 15. huius lib. demonftrauimus. Igitur diameter Icofaedri potens & diametrum cubi in ipfo defcripti, & diametrum circuli bafin Icofaedri circundantis, ex coroll. propof. 15. huius lib. potest & fuiptus lateris fequitertium, nimirum diametrum circuli circa bafim Icofaedri defcripti, & lateris Pyramidis in eo defcriptæ fequialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonftrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad fibi infcripti Icofaedri latus fe habet, ut minus fegmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppofitum ductæ, atque extrema ac media ratione diuifæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſitæ.

SIT dimidium Dodecaedri contentum ſex pentagonis ABMLK, LKIH P, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet uidelicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangu-


la Icofaedri in Dodecaedro defcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, ut oſtenſum eſt in demonſtratione propof. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propof. 10. lib. 12. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſecabitur

2. sextidec.

adit perpendicularis KY , in Z , extrema ac media ratione. Dico esse latus Dodecaedri I, M , ad latus Icosaedri sibi inscripti Q, R , ut K, Z , minus segmentum perpendicularis KY , ad rectam Q, Y , inter centrum Q , & latus B, M , interceptam. Subtensa enim recta



DK , quæ, per demonstrata in scholio propof. 13. lib. 13. latus est cubi, in quo Dodecaedri propofitum describitur; erit L, M , latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK , si extrema ac media ratione secetur, ex eodẽ scholio propof. 13. lib. 13. Quoniã uero latera YD, YK , trianguli YDK , pro-

portionaliter secantur in R , & Q ; (sunt enim RD, QK , semidiametri circulorum æqualium equales; necnon & YR, YQ , distantie nimirũ rectæ B, M , a centris R , & Q , eorundem circulorũ equalium) parallela erit Q, R , ipsi DK ; Ideoq; triangulũ YRQ , triangulo YDK , simile, per coroll. propof. 4. lib. 6. Quã ob rẽ erit, ut DK , ad KY , ita QR , ad QY . Vt autẽ DK , tota ad totã KY , ita est L, M , minus segmentũ ad minus KZ . Vt igitur L, M , ad K, Z , ita erit Q, R , ad Q, Y . Et permittendo, ut L, M , latus Dodecaedri, ad Q, R , latus Icosaedri sibi inscripti, ita K, Z , minus segmentum perpendicularis KY , ad Q, Y , inter centrum Q , & latus B, M , interceptam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.

2. sexti.

4. sexti.

2. quartidec.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum a toto latere Icosaedri sublatum; A reliqua quoque recta pars rursus tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA

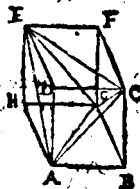
Circa pentagonum ABCDE, ex quinquelateribus Icofaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icofaedri G, ex ijs, quæ in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cum sint tertiæ partes eiusdem circumferentiæ, ætunc reliqui arcus HC, ID, æquales, proptereaque rectæ HI, CD, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, secans rectas



HI, CD, bifariam in K, & L; coniuganturque rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, ut constat ex demonstratis in propos. 5. lib. 13. latus erit Dodecaedri in Icofaedro descripti. Denique BP, dimidium lateris Icofaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem esse lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere trianguli æquilateri HI, secetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propositionis 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento FK, æqualis recta KM, per corollarium propos. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonstrauius ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum KM, sectum quoque in L, a minori segmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, æquabit rectam FL, minore dimidia sumptis

3. terij.

pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilatèram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, uertices uero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non resident quatuor anguli pyramidis æquilatèræ inscriptæ: (Nam super basin A-CE, fundatur pyramis A C E D; super basin A E G, pyramis A E G H; super basin C E G, pyramis C E G F; & super basin A C G, pyramis A C G B: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. defin. lib. 11.



cum contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine, & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus, & similibus triangulis, dimidijs scilicet quadratorum cubi, ut patet, & uno triangulo pyramidis æquilatèræ inscriptæ.) Sic autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus: (Nam exempli causa, pyramis A B C G, basim habens A B C, dimidium basis cubi B D, altitudinem uero eandem, quam cubus, rectam uidelicet B G, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. prismatis eandem basim, & altitudinem habentis. Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est, pyramidem A B C G, sextam partem esse cubi, propterea quæ cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Atque proinde reliquam pyramidem æquilatèram A C E G, cubo inscriptæ eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.

A L I T E R. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphaera comprehendantur, ut docuimus in scholio propos. ultimæ lib. 15, Cubus uero triplus sit pyramidis in eadem sphaera descriptæ, ut demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis; quandoquidem hæc in eadem sphaera, in qua cubus, continetur.

THEOR.

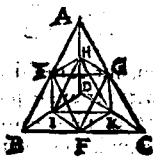
32. vnder.

32. quarti. decimi.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS. sibi inscripti octaedri du-
pla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIK-
GHF. Dico Pyramidem octaedri esse duplam. Cum enim
octaedrum circumstant quatuor pyramides pyramidi A B-



CD, similes, ut propos. 3. lib. 12. demon-
stratum est fundatæ super quatuor ba-
ses octaedri EGH, EFI, FGK, HIK;
quales sunt pyramides EGH A, EFIB,
FGK C, HIK D: (quæ quidem equa-
les inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum
contineantur triangulis similibus, equali-

busque numero & magnitudine, quippe quæ similia sint ba-
sibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propos. 4. lib.
6. lateraque habeant equalia, nempe dimidia laterum æqua-
lium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione pro-
pos. 2. lib. 13.) Habeant autem pyramides similes proportio-
nem homologorum laterum, triplicatâ; Erit pyramis A B-
CD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octae-
dro circumpositarum, (cum octupla proportio, sit propor-
tionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad
latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, ut in his
numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illa-
rum quatuor pyramidum pars erit octava pyramidis A B-
CD; At idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor
partes octavas, id est, dimidium pyramidis ABCD, con-
ficient. Quare & reliquam octaedrum EIKGHF, reli-
qua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Py-
ramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat
demonstrandum.

8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextu-
plus est.

QVO-

Q V O N I A M si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, ut constaret ex secunda demonstratione propos. 13. lib. 15. Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fir, ut qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & eorundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti Octaedri sextuplus est. Quod erat ostendendum.

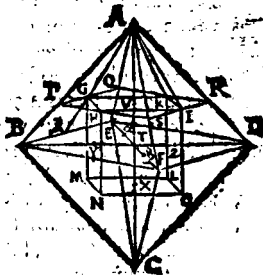
20. sextide.
21. sextide.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

I N octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum.

Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ, quadratum constituent PQRS, ut in propos. 4. lib. 15. est demonstratum; quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC,



15. undec.

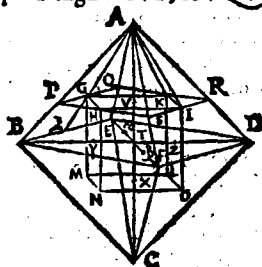
perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholion propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrū quadrati PQRS: (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionales, erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales.

17. undec.

Intelli.

47. primi.

Intelligentur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. Quoniam
gitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ,
æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ,
quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 1. dem



pto communi quadrato
rectæ AV; æqualia erunt
reliqua quadrata rectarū
VP, VQ, proptereaque
& rectæ ipsæ VP, VQ,
æquales. Non aliter osten
demus & hisce, & inter se
æquales esse rectas VR,
VS. Quare V, centrum
est quadrati PQRS.)

Igitur & centrum erit qua

drati GHIK, in illo descripti, per scholium ultimum lib. 4.
Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K,
I, H, ut constat ex demonstratis in propof. 4. lib. 15. Eodem
argumento concludemus X, centrum esse basis LMNO;
Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β,
centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta AY,
per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla
ipsius GY, per coroll. propof. 1. 8. lib. 14. Cum ergo plana PR,
BD, parallela secent rectas AY, AT, proportionaliter; dupla
quoque erit AV, ipsius VT. Eodem modo dupla proba
bitur CX, ipsius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT,
similiter secantur in V, & X; æquales erunt AV, CX; nec
non VT, XT. Recta igitur VX, coniungens centra basium
cubi oppositarum bifariam secatur in T. Quare cum ad
eundem modum YZ, αβ, bifariam secantur in T; erit T,
centrum cubi; cum, per coroll. 1. propof. 1. 5. lib. 13. rectæ cen
tra basium cubi oppositarum connectentes se se bifariam se
cent in centro. Iam uero, quoniam VX, ipsius VT, dupla
est; dupla autem fuit & AV, eiusdem VT; æqualis erit
AV, ipsi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GH
I, KA, ductis rectis AI, AK, tertia pars est cubi, seu prism
atis GO, per coroll. 1. propof. 7. lib. 12. cum utriusque eadem
sit basis GI, & altitudines æquales AV, VX: Est autem
pyramis PQRS, pyramidis GHIKA, dupla, quod &
basis

17. undec.

6. duodec.

basis $PQR S$, dupla sit basis $GHLK$, illi inscriptæ. Igitur pyramis $PQR S A$, duas tertias partes cubi $G O$, continet. Quia uero pyramides $BEDFA$, $PQR S A$, similes existentes, per defn. 9. lib. 11. (cum triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB , lateris AP , sesquialterum, quod & recta $A \gamma$, proportionaliter secta ipsi AB , sesquialtera sit ipsius AG ; Erit pyramis $BEDFA$, ad pyramidem $PQR S A$, ut 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. ut in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum $ABCDEF$, duplum existens pyramidis $BEDFA$, proportionem habebit ad eandem pyramidem $PQR S A$, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis $PQR S A$, talium 12. esse cubum $G O$, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum $ABCDEF$, ad cubum $G O$, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 3 5, propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

3. duodec.
2. sexsi.

COROLLARIUM I.

Idem ergo centrum est octædri, atque cubi sibi inscripti, ostendimus enim T , utriusque esse centrum.

COROLLARIUM II.

PERSPICUUM etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem uidelicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

1. sexsi.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRUM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVO-

QUONIAM ut ostendimus ad finem lib. 13. cubus, sibi; inscripta Pyramis in eodē octaedro describuntur; Est 23. sextide. autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesqui- 20. sextide: alterum; Et cubus sibi, ac proinde octaedro, inscripta pyramidis triplus: Qualem partium 2. ponatur pyramis, tallium 6. erit cubus; & eorundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est tredecuplam sesquialteram, Ac propterea octaedrum sibi inscripta pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN Pyramide $ABDC$, cubus intelligatur descriptus: Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G, H , centra duarum basium ACD , ABD , commune



latus AD , habentium; per quæ ex angulis C, B , ad latus commune oppositum $A'D$, rectæ ducantur CGS ; BHS , diuidentes latus AD , bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propof. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio pun-

cto S . Connexa uero recta GH cum BH , CG , duplæ sint rectarum HS , GS , ex coroll. propof. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter fecentur BS , CS , parallelæ erunt BC , HG , & per coroll. propof. 4. lib. 6. triangulum HGS , triangulo BCS , simile. Erit ergo ut BC , ad CS , ita HG , ad GS ; & permutando, ut BC , ad HG , ita CS , ad GS : Est autem CS , ipfius GS , tripla. Igitur & BC , tripla erit ipfius HG . Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, ut in propof. 1. lib. 13. demonstratum est; Recta uero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, ut perspicuum est ex demonstratis in propof.

2. terrij.

4. sexti.

18. quarti-decimi.

pos. 18. lib. 15. (ibi enim recta GH , iungens centra G , H , basium ACD , ABD , commune latus $A'D$, habentium diameter fuit basis $GNHQ$, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC , diameter basis cubi pyramidem $ABDC$, circumscribentis, GH , uero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Est enim ut diameter unius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio utraque sit potentia dupla: Permutando ergo, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC , diameter basis cubi circumscripti ad GH , diametrum basis cubi, inscripti, proportionem triplam, ut ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At uero cubi, cum sine parallelepipedis similia, proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi $ABDC$, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hec enim proportio triplicata est triplae proportionis, ut huius 1. 3. 9. 27. uidere licet. Quam ob rem, cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat, quam 27. ad 9. uidelicet triplam; Habebit pyramis $ABDC$, ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1, nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

33. undec.

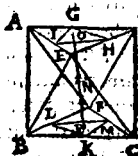
20. sextide.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quā duae bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN octaedro $ABCDEFGF$, concipiatur descriptum Icosaedrum. Dico Octaedrum esse ad Icosaedrum, ut sunt duae bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Cum enim ut ex demonstratis in propof. 16. lib. 15, liquet, octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri reponantur; Sint duae bases Icosaedri GHI , KLM , in duabus basibus oppositis octaedri ABE , BCF

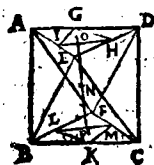
B C F; Atque ex N, centro octaedri, nec non & Icosaedri (idem enim utriusque est centrum, per coroll. 3. propof. 6. lib. 1. 5.) ad bafim A D E, perpendicularis ducatur N O, cades in centrum O, trianguli A D E, feu circuli ipfum ambientis, ex ebröll. lemma. 1. propof. 10. lib. 14.



quod quidem O, centrum quoque est trianguli G H I, per coroll. 2. propof. 16. lib. 1. 5. Cū ergo plana oppofita A D E, B C F, pafsa fela fint, ex coroll. 4. propof. 14. lib. 1. 3. Recta ON, produ-
cta perpendicularis quoque erit, per

scholion propof. 14. lib. 1. ad planum B C F, in cuiusque pro-
perea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cades.
Quare O P, recta altitudo est & octaedri, & Icosaedri sibi
infecti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis
rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diui-
ditur, quarum altitudo est N O, dimidium altitudinis octae-
dri; Similiterque Icosædru in 20. pyramides æquales eius-
dem altitudinis N O: Est autem prisma triplum pyramidis
eandem cum ipso & bafim, & altitudinem habentis, per co-
roll. 1. propof. 7. lib. 1. 2. Erit prisma, cuius bafis A D E, & al-
titudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At uero
prisma, cuius eadem bafis A D E, altitudo autem O P, du-
pla altitudinis O N, duplam est prismatis, cuius bafis eadem
A D E, altitudo uero O N, per ea, quæ in scholio propof. 14.
lib. 1. 2. ostendimus. Prisma igitur, cuius bafis A D E, & al-
titudo O P, æquale est sex pyramidibus octaedri; Ac proin-
de reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam par-
tem illarum sex conftituunt, æqualis erit tertia pars prismatis
super bafim A D E, & sub altitudine O P, conftituti; pris-
ma uidelicet, cuius bafis tertia pars est trianguli A D E, alti-
tudo uero eadem O P. Hoc enim prisma tertia pars est pris-
matis super bafim A D E, & sub altitudine O P; cum per
ea, quæ docuimus ad propof. 7. lib. 1. 2. prismata, eiusdem al-
titudinis inter fe fint, ut bafes. Quare duo prismata, quo-
rum unius bafis A D E, & altitudo O B, alterius autem
bafis tertia pars bafis A D E, & altitudo eadem O P, æqua-
lia funt octaedro A B C D E F: Non fecus demonftrabi-
mus prisma, cuius bafis G H I, altitudo uero O P, æquale
effe

esse sex pyramidibus Icoſaedri : proptereaſque triplum huius prismaſis, nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis GHI , altitudo autem eadem OP , æquale eſſe 18. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiam partem ſex pyramidum eiſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmaſis ſuper baſem GHI , & ſub altitudine OP , conſtituti; priſma ſcilicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli GHI , altitudo uero eadem OP . Atque idcirco duo priſmata, quorum unius baſis tripla ſit trianguli GHI , altitudo autem OP , alterius uero baſis tertia pars baſis GHI , & altitudo eadem OP , æqualia erunt Icoſaedro in dicto octaedro deſcripto. Iam uero, cum duo illa priſmata, octaedro æqualia, ad duo hæc priſmata, Icoſaedro æqualia, ſint, per ea, quæ oſtendimus ad propoſ. 7. lib. 12. ut baſes priſmatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE , continentes, (cum unius baſis ſit ADE , nempe tres tertie partes ipſius ADE , completens, alterius uero baſis tertia pars ipſius ADE , ad baſes priſmatum Icoſaedri æqualium, decem tertias partes trianguli GHI , comprehedentes; (cum unius baſis tripla ſit trianguli GHI , nimirum nouem tertias partes ipſius GHI , continens, alterius uero baſis tertia pars ipſius GHI ,) Sint autem, ut quatuor tertie partes trianguli ADE , ad decem partes tertias trianguli GHI , ita duæ tertie partes ipſius ADE , nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipſius GHI , hoc eſt, ad dimidium decem tertiarum: Et ut duæ tertie partes ipſius ADE , ad quinque tertias partes ipſius GHI , ita quoque ſint, per ea, quæ demonſtrauiſmus in ſcholio propoſ. 4. lib. 1. ſex tertie partes ipſius ADE , (hoc eſt, duæ baſes octaedri triplum duarum tertiarum unius baſis conſtituentes, cum ſex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipſius GHI , (id eſt, ad quinque baſes Icoſaedri, triplum quinque tertiarum unius baſis completentes, cum quindecim tertias completantur; Erunt quoque duo illa priſmata, octaedro æqualia, hoc eſt, ipſummet octaedrum, ad duo hæc priſmata Icoſaedro æqualia, nempe ad ipſummet Icoſaedrum, ut



15. quinti.

duz bases octaedri ad quinque bases Icofaedri . Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icofaedrum , &c. Quod erat demonstrandum .

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptū **Dodecaedrum** proportionem habet compositam ex proportionē lateris Icofaedri ad latus cubi in eadem cum Icofaedro sphæra descripti, & ex proportionē triplicata eius, quam habet diameter Icofaedri ad rectam centra basium Icofaedri oppositarum coniungentem .

EXHIBEATUR Icofaedrum **A B C** , in quo recta **D E** , coniungat centra basium oppositarum , diameter autem eius sit **A C** ; & **F** , sit latus Icofaedri, & **G** , latus cubi in eadem sphæra cum Icofaedro descripti . Dico proportionē Icofaedri **A B C** ad sibi inscriptum **Dodecaedrum** componi ex proportionē **F** , lateris Icofaedri ad **G** , latus cubi , & ex



proportionē triplicata diametri **A C** , ad rectam **D E** . Cum enim , ex demonstratis propof. 5. lib. 15. **Dodecaedrum** in Icofaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icofaedri , atque adeo oppositos angulos in centris basium oppo-

sitarum ; Erit **D E** diameter dodecaedri in Icofaedro **A B C** , descripti , cum copulet angulos ipsius oppositos in **D** , & **E** , centris basium Icofaedri oppositarum residentes . Propositis iam tribus magnitudinibus , Icofaedro scilicet **A B C** ; **Dodecaedro** diametri **A C** , hoc est , in eadem sphæra , in qua Icofaedrum **A B C** , descripto , cum utriusque eadem sit diameter ; & **Dodecaedro** diametri **D E** , intra Icofaedrum uide-

licet ,

icet ABC, constructoq; Proportio primæ magnitudinis, nēpe Icosædri ABC, ad tertiam, uidelicet ad Dodecaëdrum diametri DE, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosædri ABC, ad Dodecaëdrum diametri AC, in eadem sphaera cum ipso descriptum, & Dodecaëdri eiusdem diametri AC, ad Dodecaëdru diametri DE, in Icosædro ABC, descriptum. Cum ergo Icosædru ABC, ad Dodecaëdrum diametri AC, eadem sphaera comprehensum sit ut F, latus Icosædri ad G, latus cubi. (Nam Dodecaëdru diametri AC, ad Icosædru ABC, eiusdem diametri est, ut G, latus cubi ad F, latus Icosædri. Conuertendo igitur erit Icosædru ABC, ad Dodecaëdru diametri AC, ut F, latus Icosædri ad G, latus cubi.) At uero Dodecaëdru eiusdem diametri AC, ad Dodecaëdru diametri DE, in Icosædro uidelicet ABC, descriptum proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, id est, ad rectam centra basium Icosædri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosædri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaëdru diametri DE, componi quoq; ex proportionem F, lateris Icosædri, ad G, latus cubi, & ex proportionem triplicatam proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icosædru ad sibi inscriptum Dodecaëdru proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

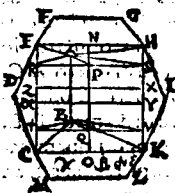
11. quarti
decimi.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At uero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ;

quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

Q U O N I A M ex demonstratis propof. 8. lib. 1. t. quatuor latera bafis cubi in Dodæcaedro defcripi subieciunt quatuor angulos quatuor bafium Dodæcaedri ad unum latus convenientium; ſint huiusmodi pentagona $ABCDE$, $EFGHA$, $AHIKB$, $BKLMC$, convenientia ad latus AB ; duo quidem $ABCDE$, $AHIKB$, ſecundum latus



idem commune AB ; alia autem duo $AEFGH$, $BCMLK$, ſecundum angulos EAH , CBK . His uero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi $ECKH$, ſuper quod conſiſtat pars Dodæcaedri cubum circunſcribentis, ſolidum ſcilicet $CBKHA E$, conſiſtens quinque planis CBK , EAH , $ABCE$, $ABKH$, $ECKH$; quorū duo CBK ,

4. primi.

EAH , trianguſa ſunt æqualia, cum latera pentagoni $B C$, $B K$, æqualia ſint lateribus pentagoni AE , AH , anguloſque comprehendant æquales pentagonorum EAH , CBK . Duo uero $ABCE$, $ABKH$, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona $ABCDE$, $ABKIH$, per hypoteſin, & trianguſa ex ipſis ablata CDE , HIK , æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia $ABCE$, $ABKH$;) Quin tum denique eſt bafis cubi inſcripti $ECKH$. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & æqualia, per 10. defin. lib. 1. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita ut Dodæcaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiusmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circunſtantibus conſtatū, æquale eſſe parallelepipedo, cuius quidem bafis deſicit a $C E H K$, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK , tertiamque parte minoris ſegmenti cuiusdem lateris cubi; at uero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus EH , CK , biſariam in N , O , iunctaque recta NO , quæ parallela eſt lateri pentagoni AB , & in quâ cadunt

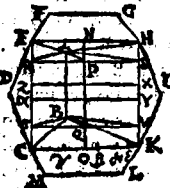
4. primi.

cadunt perpendicularares A P, B Q, demissæ in planum E K, ut constat ex demonstratis propof. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ N O, A B, A P, B Q, huius figuræ lineas L N, V X, V R, X S, figuræ propof. 17. lib. 13.) Erit utraque recta A B, P Q, maius segmentum lateris cubi N O, uel H Q, & utraque A P, B Q, equalis dimidio lateris pentagoni A B, seu maioris segmenti lateris cubi, ut liquet ex eadem propof. 17. lib. 13. Ac propterea si per P, Q, ducantur rectæ R S, T V, rectis E H, C K, parallelæ, erunt quoque R T, S V, maiora segmenta laterum E C, H K; atque adeo E R, C T, simul; & H S, K V, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis A R, A S, B T, B V, constituentur duæ pyramides E R S H A, C T V K B, quæ per coroll. propof. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cum & earum bases E R S H, T C K V, & altitudines P A, Q B, æquales sint; consistentque extra solidum A B T V S R. Quoniam autem A S, ipsi B V, & A R, ipsi B T, equalis est, & parallelæ, cum coniungant æquales rectas, & parallelas A B, S V, R T; parallelæ erunt plana triangulorum A R S, B T V, atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propof. 8. lib. 1. cum latera unius lateribus alterius, sint æqualia. Quare solidum A B T V S R, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis A R S, B T V, & tribus parallelogrammis R V, A T, A V, prismæ est, ex definitione.

Uero, cum ostensum sit, rectas H S, K V, minus segmentum efficere lateris H K, fiat illis equalis V X, dupla nimirum utriusque H S, & K V; & ipsius V X, minoris segmenti lateris H K, duas tertias partes contineat V Y, tertia uero pars sit X Y, ducanturque X Z, Y æ, rectæ T V, parallelæ. Quoniam igitur pyramides E R S H A, C T V K B, æquales sunt ostensæ; utriusque uero earum dupla est pyramis super basem T X, & sub eadem altitudine P A, uel Q B, constituta, quod & basis T X, dupla sit basi C V, uel R H; Aequalis erit pyramis T V X Z B, utrique pyramidi E R S H A, C T V K B, simul: At pyramis T V X Z B, duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem T X, & altitudo eadem Q B, uertex uero linea recta, pars uidelicet rectæ A B, quæ equalis sit ipsi V X, ut demonstrauimus in scholio

1. sexti.

propos. 7. lib. 12. Item eiusdem prismatis, cuius basis TX , & altitudo QB , uertex uero pars rectæ AB , æqualis ipsi VX , duas tertias partes continet prismâ, cuius basis TY , & altitudo eadem QB , uertex uero pars rectæ AB , æqualis ipsi VY , ex scholio propos. 25. lib. 12. quod & basis TY , duas partes tertias complectatur basis TX . Igitur & prismâ, cuius basis TY , & altitudo QB , uertex uero pars rectæ AB , æqualis ipsi VY , æquale erit duabus pyramidibus $ERSHA$; $CTVKB$; Ac proinde hoc prismâ appositum prismati $ABTVSR$, efficiet prismâ æquale solido $CBKHA$, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV , & sub rectâ CP posita ex VY , duas tertias partes minoris segmenti VX , comprehendente, & ex VS , maiore segmento, ideoque a base cubi deficientem rectangulo αX , contento sub latere cubi αY , & sub XY , tertia parte minoris segmenti VX . Nô dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata equalia & proxime dicto prismati. & reliquis quinque solidis super reliquis quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia



erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quilibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construuntur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB , quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB , seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases a base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis a base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo uero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudinæ QB , quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi ter sumptæ. Hanc igitur altitudinē dico ab altitudine, seu latere cubi deficientē

ficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β : Itemq; C β , maius segmentum, & β K, minus bifariam in γ , δ ; atq; ex β K, abscindatur $\beta \epsilon$, æqualis ipsi $\beta \gamma$, seu C γ , ita ut C γ , uel $\gamma \beta$, uel $\beta \epsilon$, dimidia pars maioris segmenti C β , æqualis sit ipsi Q B, & C ϵ , toti altitudini præfati parallelepipedo. Quoniam igitur est, ut tota CK, ad maius segmentum C β , ita maius segmentum C β , ad minus β K; erit quoque ut CO, dimidia ipsius CK, ad C γ , uel $\beta \epsilon$, dimidiam ipsius C β , ita C γ , uel $\beta \epsilon$, ad $\beta \delta$, dimidiam ipsius β K; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C γ , uel $\beta \epsilon$, & minus $\beta \delta$. Quare & $\beta \delta$, minus segmentum secabit $\beta \epsilon$, maius segmentum extrema ac media ratione, ut demonstrauimus ad propos. 5 lib. 3. eritq; maius segmentum $\beta \delta$, minus autem $\delta \epsilon$. Ac propterea rursus $\delta \epsilon$, minus segmentum secabit rectam δ K, maiori segmento $\beta \delta$, æqualem; extrema ac media ratione, minusque segmentum erit ϵ K. Deficit igitur C ϵ , altitudo præfati parallelepipedo ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmento ϵ K, rectæ δ K, uel sibi æqualis rectæ $\beta \delta$, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostendit. Constat ergo basem parallelepipedo, quo dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum a base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem uero ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

15. quini

COROLLARIUM.

VND e elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem teruæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit; Alterius uero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum

addatur illi parallelepipedo, quo cubum a Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, quâ cubus, altitudo uero a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedî. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterioris parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrû descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedî, æquatis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, uti Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo uero alter cubus, ut demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportionem triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportionem lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphaera cû cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphaera cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportionem triplicatâ proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportionem F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta DE;



centra

centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter D E, in eadem sphaera cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato describetur, cum eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icosaedro eiusdem diametri D E, intra Dodecaedrum uidelicet A B C, descripto; Proportio Dodecaedri A B C, primae magnitudinis, ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quae ad defn. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primae magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, descripti secundae magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri D E, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Dodecaedrum uero diametri D E, ad Icosaedrum eiusdem diametri D E, quod nimirum in Dodecaedro A B C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri A B C, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter D E, componi quoque ex triplicata proportionis proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam uidelicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportionem F, lateris cubi, ad G, latus Icosaedri, in eadem sphaera cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

11. quarti
decimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum

rum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo uero tertie parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo uero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

25. sextide.

Q V O N I A M si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, ut ad finem lib. 13. tradidimus; Cubus autem pyramidis in qua describitur, nona pars est, cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, ut magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 18. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in uerbis propositionis huius, non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo ut si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis completens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

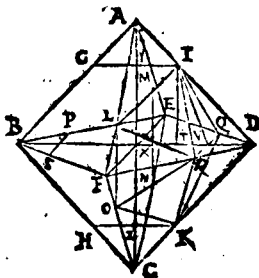
THEOR.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRUM excedit sibi inscriptum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione secta.

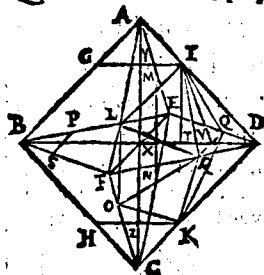
OCTAEDRUM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, repetita figura propof. 16. lib. 13. ubi demonstratum est, uiginti triangula Icosaedrum inscriptum componentia esse IQR, KQ-

R, GIL, GIM, GPS, HP-S, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantia uidelicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT,



perpendicularem ad BD, æquale esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrum ABCDEF, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri QR, altitudo uero IT, maius segmentum semidiametri AX. Cum enim in quatuor basibus octaedri DEA, DFA, LEC, DFC, angulum solidum octaedri D, constitutibus posita sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri, IQR, KQR, & commune triangulum DQR, confluentur duæ pyramides super communem basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquale, per coroll. propof. 3. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem IT, maius uidelicet segmentum semidiametri octaedri. (Nam quemad-

34. primi.



quemadmodum $A X$, secta est a recta $G I$, in Y extrema ac media ratione, ita quoque secta est $C X$, a recta $H K$, in Z . Quare si ex K , ad $B D$, perpendicularis ducatur, altitudo

nimirum pyramidis $K D-Q R$; erit ea æqualis rectæ $Z X$, maiori segmento semidiametri $C X$, hoc est ipsi $I T$. Quæ quidem pyramides extra Icosædrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se & dictis duabus

æquales, extra Icosædrum prædictum: Ita ut octaedrum superet Icosædrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia uero triangulum $D Q R$, dimidium est quadrati lateris $D Q$, (cum $D Q$, $D R$, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumque contineant rectum.) erit recta $Q R$, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius $Q R$, duplum erit quadrati lateris $D Q$, ideoque quadruplum trianguli $D Q R$. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, & altitudo $I T$, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum $D Q R$, & altitudo eadē $I T$, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis $D Q R$, & altitudo $I T$, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis $I D Q R$, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosædrum consistere diximus. Prisma ergo, uel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, & altitudo $I T$, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosædrum ambientes; A Equale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, lateris nimirum Icosædri, & altitudo $I T$, maius segmentum semidiametri $A X$, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri su-

pra

pra Icofaedrum sibi infcriptum; Ac proinde octaedrum superabit Icofaedrum dicto prismate, uel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi infcriptum Icofaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icofaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hanc inferitur, Pyramidem excedere duplum Icofaedri sibi infcripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icofaedri, altitudo uero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icofaedri coniungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icofaedrum imponatur, Icofaedrum eidem Pyramidi esse infcriptum; octaedrum autem superet Icofaedrum sibi infcriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icofaedri, nempe recta QK, altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri, recta uide licet IT, seu YX: Fit, ut octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, (quod Pyramis dupla sit sibi infcripti octaedri) superet idem Icofaedrum in octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedo, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icofaedri, altitudo uero recta YZ, coniungens bifarias sectiones laterum Icofaedri oppositorum G I, H K. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata a nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icofaedri, altitudo uero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icofaedri copulans, Pyramis duplum Icofaedri sibi infcripti excedit.

31. sextide.

21. sextide.

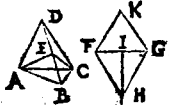
INVENTIO ANGULI INCLINATIONIS duarum basium cuiuscunque solidi regularis, unius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis praeceptore.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, unius ad alteram, inuenire.

I.

EUCLID. GEOM.

SIT Pyramis $ABCD$, cuius latere BD , bisariam
 secto in E , ex angulis A , & C , lateri BD , oppositis re-
 ctæ ducantur AE , CE ; quæ cum perpendiculares sint
 ad BD , communem sectionem pla-
 norum ABD , CBD , in quibus exi-
 stunt, ut ostensum est in scholio pro-
 pos. 12. huius lib. angulum incli-
 nationis AEC , basium ABD , CBD ,



continebunt, ex defn. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem
 exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assuma-
 tur FGH , triangulum æquilaterum super rectam FG ,
 lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco
 triangulo cuicunque pyramidis propositæ, ipsi nimi-
 rum ABD , æquale, in quo ducta HI , perpendicu-
 lari ad FG , cõstituatur super FG , triangulû FGK , habes
 utrunq; latus FK , GK , æquale perpendiculi HI , hoc è,
 utriq; perpendiculi AE , CE , cû perpendiculares HI ,
 AE , CE , sint æquales in triangulis æqualibus. Dico an-
 gulû FKG , æqualè esse angulo inclinationis AEC , ba-
 siû ABD , CBD . Cû. n. latera KF , KG , æqualia sint la-
 teribus EA , EC ; & basis FG , basi AC : Æquales erûnt
 anguli FKG , AEC . Dico insuper angulum inclinati-
 onis AEC , acutû esse. Cum. n. latus AD , uel illi æqua-
 le AC , sesquitertium sit potentia utriusq; perpendicu-
 laris AE , CE ; qualium partium 4. ponetur quadratû
 rectæ AC , talium 3. erit quadratû utriusq; rectæ AE ,
 CE ; ideoq; earundè partium 6. erunt ambo simul qua-
 drata rectarû AE , CE . Quare cû in triangulo ABC ,
 quadratum lateris AC , minus sit quadratis simul la-
 terum AE , CE , acutus erit angulus AEC , ut in
 scholio propos. 13. lib. 2. demonstrauimus.

COROL.

8. primi.

12. quarti
decimi;

COROLLARIUM.

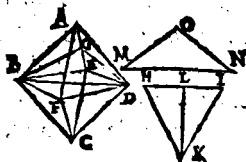
FACTUM hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt $A E, C E$, subtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit $A C$; omnes erunt inter se æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & latera pyramidis eosdem subtendentia.

8. primi

ANGULVM inclinationis duarum octaedri basium, unius ad alteram, reperire.

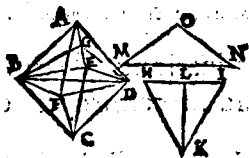
II.

EXHIBETVR Octaedrum $ABCDEF$, cuius diameter BD . Ex angulis B, D , ad latus $A E$, triangulis ABE, ADE , commune, bisariamque sectionem in G , rectæ ducantur BG, DG ; quæ cum perpendicularibus sint ad $A E$, communem sectionem planorum ABE, ADE , in quibus existunt (quod in triangularibus BGA, BGE , anguli ad G , æquales sint, &c.) continebunt angulum BGD , inclinationis basium ABE, ADE , per defin. 6. lib. II. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK , triangulum æquilaterum super rectam HI , lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuiusque octaedri propositi, triangulo scilicet ABE , æquale, in quo ducta KL , perpendiculari ad HI , constituitur super recta MN , quæ equalis sit diametro octaedri BD , hoc est, diametro quadrati $ABCD$, ex AB , latere octaedri descripti trianguli OMN , habes utrunque latus MO, NO , perpendicularibus KL , æquale,



8. primi

aequale, hoc est, utrique perpendiculari BG, DG, cum perpendicularibus KL, BG, DG, in triangulis aequalibus aequales sint. Dico angulum MON, aequalem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON, aequalia sunt lateribus GB, GD; & basis MN, basi



BD; Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico praeterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum. Cum enim diameter

8. primi.

14. tertij de.
12. quarti
decimi.

octaedri BD, dupla sit potentia lateris AB; latus uero AB, potentia sesquitercium rectae BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemque 3. quadratum rectae BG; ideoque ambo simul quadrata rectarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius est quadratis simul laterum GB, GD; Ac propterea angulus BGD, obtusus erit, ut in scholio propof. 12. lib. 2. ostendimus.

COROLLARIUM.

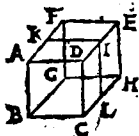
Hinc fit, omnes inclinationes basium octaedri aequales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contingantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, DG, subtrahanturque ab octaedri diametro, cuiusmodi est BD; omnes inter se aequales erunt, quod & omnes illi perpendicularibus, quae ipsos continent, aequales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtrahentes.

8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, unius ad alteram, inuenire.

SIT cubus $ABCDEFGH$, in quo secetur latus DE , bisariam in I , nec non & latera illi opposita in quadratis AE, EC , commune latus illud DE , habentibus, in punctis K, L . Deinde rectæ ducantur IK, IL ; quæ cum æquales, ac parallele sint lateribus EF, EH , (quod & KF, IE , inter se, nec non & IE, LH , inter se æquales existant, et parallele) ideoque angulos rectos ad latus DE , efficiant, continebunt KIL , angulum inclinationis basium AE, EC , ex defin. 6. lib. 11. Quoniam uero rectæ IK, IL , parallele existentes rectis EF, EH , & non in eodem cum illis plano, angulum KIL , æqualem continet angulo recto FEH ; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare ut angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, ut modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



33. primi.

10. vndec.

COROLLARIUM.

Quocirca, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum; perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

similiter 2

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, unius ad alteram, inuenire.

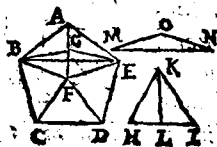
IIII.

similiter 3

ESTO pyramis $ABCDEF$, una ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentagonum $ABCDE$, ex quinque Icosaedri lateribus compositum, vertex autem F . Diuiso itaque latere AF , bisariam in G , ducantur ex triangulorum ABF, AEF , latus AF , commune habentium

Pp

bentium, angulis B, & E, lateri AF, oppositis recte BG, EG, qua cum ex demonstratis in problemate 2. huius scholii perpendiculares sint ad AF, communem sectionem planarum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendunt BGE, angulum inclinationis basium



ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quovis exhibebimus aequalem, hac arte. Accipiatr triangulum aequilaterum HIK, super re-

ctam HI, lateri Icosaedri aequalem fabricatum, hoc est, cuius triangulo Icosaedri, ipsi uidelicet ABF, aequale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, construatur super recta MN, qua recta BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit aequalis, triangulum OMN, habens utrumque latus MO, NO, perpendiculari KL, aequale, hoc est, utrique perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis aequalibus sint aequales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, AEF, aequalem esse. Cum enim latera OM, ON, aequalia sint lateribus GB, GE, & basi MN, basi BE; Aequales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB; erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemque modum AE, maior erit quam EG. Quare rectae AB, AE, maiores quoque erunt rectis QM, QN, cum haec rectis GB, GE, posita sint aequales. Si itaque recta BE, super rectam sibi aequalem MN, intelligatur ponis cadet angulus A, extra triangulum MON,

2. primi.

19. primi.

ita ut recte AB, AE, rectas OM, ON, prorsus includant. Angulus ergo O, maior erit angulo BAE: At hic obtusus est. (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint aequales, per ea, quae a nobis sunt demonstrata in scholio propof. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum unum, ac insuper unius recti partem quintam. obtusus ergo erit, cum recto sit maior) multo igitur magis obtusus erit angulus MON, hoc est, sibi aequalis BGE.

21. primi.

COROLLARIUM.

NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se aequales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, EG, subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BB; omnes inter se erunt aequales, quod & illae omnes perpendiculares, quae ipsos continent, aequales sint, nec non & rectae illae omnes, quae pentagonorum angulos subtendant aequales aequalibus rectis comprehensos, aequales existant.

8. primi.

4. primi

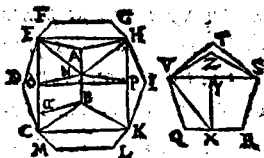
ANGVLVM inclinationis duarum basium Dodecaedri, unius ad alteram, reperire.

V.

CUM per ea, quae ostendimus in propof. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus coeuntium; sint huiusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHICK, BKLMC, ad latus AB, conuenientia; duo quidem ABCDE, AHICK, secundum idem latus commune AB; alia autem duo AEF GH, BCM LK, secundum angulos EAH, CBK. His porro pentagonis inscriptum sit

Pp 2 qua-

quadratum cubi $ECKH$, cuius quatuor latera sub-
tendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A .



Diviso autem latere AB ,
bifariam in N , ducantur
ex N , in planis pentago-
norum $ABCDE$, $ABKI$,
 KIH , ad AB , perpen-
diculares NO , NP , se-

cantes latera EC, HK , in O , & P . ad angulos quoque
rectos, cum recte EC, HK , ipsi AB , sint parallele,
per coroll. propos. 8. lib. 15. Comprehendunt igitur
 NO, NP , angulum ONP , inclinationis basium
 $ABCDE, ABKI$. Cui aequalem in quouis pla-
no hac arte construemus. Super rectam QR , late-
ri Dodicaedri AB , aequalem constituatur pentagonum
equilaterum & equiangulum $QRSTV$, hoc est,
cuius pentagono Dodicaedri, nimirum ipsi $ABCDE$,
equale, cuius angulo T , recta subtendatur VS , equa-
lis existens recta EC , cum & latera TV, TS , lateri-
bus DC, DE , equalia sint, angulosque contineant
equales. Divisa deinde recta QR , bifariam in X ,
ducatur a puncto X , ad QR , perpendicularis XT :
proptereaque perpendicularis ad VS , cum VS , sit pa-
rallela ipsi QR , per coroll. propos. 8. lib. 15. Ac po-
stremo super recta VS , triangulum fabricetur VZS ,
habens utrumque latus ZV, ZS , perpendiculari XT ,
equale. Dico angulum VZS , aequalem esse angulo in-
clinationis ONP . Ductis enim rectis NE, NH ,
 VX ; cum latera EA, AN , equalia sint lateribus
 HA, AN ; Item lateribus VQ, QX , angulosque com-
prehendant aequales, aequales erunt & bases NE ,
 NH ,

4. prop.

NH, VX , & anguli ANE, ANH, QXV ; 4. primi
 ideoque & residui ex rectis, anguli uidelicet ENO, HNP, VXY , aequales erunt. Quoniam igitur an-
 guli ENO, EON , trianguli ENO , aequales sunt
 angulis HNP, HPN , trianguli HNP ; nec non
 & angulis VXY, VYX , trianguli VXY ; (sunt
 enim EON, HPN, VYX , ostensi recti.) Et la-
 tus NE , lateribus NH, VX , aequale demonstratum;
 Aequalia erunt reliqua latera NO, OE , reliquis la- 16. primi.
 teribus NP, PH ; Item lateribus XY, YV . Quare
 rectæ ZV, ZS , aequales existentes ipsi XT , rectis
 NO, NP , aequales erunt. Iam uero, quia OE, PH ,
 aequales sunt, ac parallelæ; erit quoque recta comun-
 cta OP , equalis & parallelæ ipsi EH , ideoque æqua- 13. primi.
 lis ipsi EC , hoc est, rectæ VS . Quam ob rem, cum
 latera ZV, ZS , lateribus NO, NP , aequalia sint; ba-
 sis item VS , basi QP ; Aequalis erit angulus VZS , an-
 gulo inclinationis ONP . Dico etiam, angulum hunc
 ONP , inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta
 $B\alpha$, ipsi NO , parallelæ; cum sit quoque NB , ipsi
 $O\alpha$, parallelæ, per coroll. propof. 8. lib. 15. Paralle-
 logrammum erit $NO\alpha B$, ideoque recta $B\alpha$, ipsi NO , 14. primi.
 æqualis. Quia uero BC , latus pentagoni oppositum
 angulo αB , qui rectus est, (æqualis nimirum interno
 CON ,) maius est latere $B\alpha$, hoc est, recta NO ,
 uel utraque ZV, ZS , quæ ipsi NO , ostensæ sunt
 æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS , maiores duabus
 rectis ZV, ZS . Cadit igitur punctum Z , intra trian-
 gulum TVS , ita ut rectæ TV, TS , rectas ZV, ZS ,
 includant omnino; Atque proinde angulus VZS ,
 ideoque illi æqualis ONP , maior est angulo pentago- 11. primi.

ni T: Hic uero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

COROLLARIUM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri equales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris.

Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis, quales sunt NO, NP, subtendanturque a rectis, quae cubi inscripti lateribus sunt aequales, uel certe, quae rectis subtendentibus angulos pentagonorum aequales sunt, cuiusmodi est, recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni BAH, subtendit, aequalis; Erunt omnes ip-

8. primi.

ter se aequales, cum & omnes illae perpendiculares, quae ipsos continent, aequales sint, nec non & rectae illae omnes, quae eosdem subtendunt, latera uidelicet cubi, inter se etiam sint aequales.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.



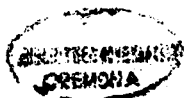


R O M A E,

Apud Vincentium Accoltum.

M. D. LXXIII.

Cum licentia Superiorum.



5765