

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EVLIDIS

ELEMENTVM X.



DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.



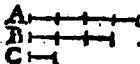
ABSOLVIT Euclides in antecedenti-
bus tribus libris ea, qua ad numeros spe-
ctant, quantum satis visum est ad res Geo-
metricas intelligendas: Nunc in hoc de-
cimo libro aggreditur ad disputationem
linearum commensurabilium, & incō-
mensurabilium, quarum causa numero-
rum tractationem ab eo susceptam esse

superius diximus. Nam sine cognitione harū linearū cōplures magnitudines cū solide, sū plana, neq; pfecte intelligi possunt, neq; cū res tuleris, in opus atq; vsum cōferri; propterea quādam plerunq; latera earū incōmensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atq; solidis dici potest, quippe cum & hac incōmensurabilia saepe numero existant, ut ad finē huius libri demonstrabimus. Quoniā vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearū, de quibus differit, obscuritatē; oēs nervos industra mea in eo cōtendā, ut ex his, qua hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, ut sine multo labore a quovis, qui praecedentiū tamē librorū demonstraciones recte intellexerit, possit percipi. Neq; n. in eorū possum sententiā ire, qui putāt ad eius intelligentiā esse necessariā eā partē Arithmetices,



metices, quæ de radicibus numerorū, tam rationalibus quàm irrationalibus, ut vocāt, sermonē instituit: Immo cōtra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionē pfectā illius partis Arithmetices pēdere ex hoc 10. lib. tātū abest, ut existimē, tractationē illam radicū requiri, ut facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum qui rationem radicū, atq; calculum tenueris, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quā qui illarum omnino sit ignarus, propter eā quod ille demonstrationes ad usum potest remocare, hic vero nullo modo. Hac enim de causa & nos priora decem theoremas a secundi lib. numeris accommodauimus, ut oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem ut ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitramur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicit aliquis) ut in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra viuitur, vsurpassi, ut ea res & maiori voluptati esset, & commode legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim per pauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebra ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs asserre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ solæ necessariæ ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQUE, ut ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus utendum erit; declarat primo loco, quam magnis lineis dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Ut duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem



dem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum quia eas linea tam unius palmi, quam dimidii palmi, quam tertia pars unius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas una, & eadem superficies metitur; Necnon corpora, solidam commensurabilia, qua metitur idem corpus, seu solidam.

II.

INCOMMENSURABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusvis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, ut propositione ultima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimae aliae lineae incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque quam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicuntur incommensurabiles, nec non, & solida, quae nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineae potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARUM rectarum quaedam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illae, quas in expositione defini. 1 commensurabiles simpliciter diximus: quaedam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quae sunt incommensurabiles longitudine, aliae sunt eiusmodi, ut earum quadrata sint commensurabilia; aliae vero ita se habent, ut & qua

drata earum incommensurabilia sint . Lineæ ergo illa longitudo incommensurabilis, quarum quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentiam, hoc est secundum earum quadrata (est enim, ut ad propof. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusq; lineæ, quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsæ secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles .

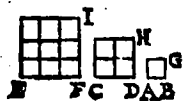
Q U O D si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia cõmensurabiles, nõ autẽ cõmensurabiles longitudine; respondendũ est, lineas longitudine cõmensurabiles satis superq; esse explicatas in definitione cõmensurabilitũ magnitudinũ, cũ huiusmodi lineas vna cõmunis mensura metiatur, ut dictũ est: At vero quoniã lineas potentia cõmensurabiles nulla cõmunis mensura metiri potest, sed tantũmodo earum quadrata idẽ spaciũ metitur, ideo necessarium omnino fuit, ut ea propria definitione explicarentur .

III.

INCOMMENSURABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri .

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia .

HABENT autem lineæ cõmensurabiles eã longitudinem quã potentia, hæc quasi convenientiã inter se, & connexionẽ; ut lineæ longitudine cõmensurabiles, sint etiã cõmensurabiles potentia, ita ut nullæ lineæ dari possint cõmensurabiles longitudine, quin earũ quadrata cõmensurabilia quoq; sint; quoniã quadratum



ex cõmuni earum mensura descriptum metitur tanquã mensura cõmunis earũ quadrata, ut in subiecta figura apparet:

paret: sicut enim recta AB , metitur rectas CD, EF , ita quoque quadratū AG , quadrata CH, EI , metitur: Non autē, ut omnes linea potentia cōmensurabiles, sint etiā cōmensurabiles longitudine; multa enim linea sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quae tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, ut in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incōmensurabiles tam longitudine quā potentia, huiusmodi colligatio reperitur, ut omnes linea potentia incommensurabiles, sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, ut omnes linea longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multa linea reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quae quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propof. 9. huius libri.

V.

HIS positis, ostenditur, cuicumque rectae lineae propositae rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erūt omnium aliarum, quae cum ipsa comparantur, quaedam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quaedam vero potentia tantum: Item quaedam illi incommensurabiles longitudine tantum; quaedam vero longitudine, & potentia, ut hoc decimo libro demonstrabitur varijs in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quamvis eius verba hoc sonare videantur) hac ita se habere: sed solum indicas nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositae rectae lineae commensurabiles longitudine,

& potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quot quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, ut diximus.

L I N E A autem illa proposita, ratione cuius alia commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis *ῥητις*; Latinis vero Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, alia vero cum illa comparata non semper nota sunt, quamvis singule seorsum sumptæ existant certa quoque, ac nota; cū qualibet in quocunque partes æquales possit dividere.

VI.

E T huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

D O C E T lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex positione, ut illa, sed quia cum illa comparata reperiantur ei commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum.

I T A Q U E ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, quamvis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmeticæ non pauci, qui eam Irrationalem vocant, eo quod numero non possit exprimi.

VII.

H V I C vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

Q U O N I A M in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellavit Rationales.

les; liquido constat, cum hic eas dicere Irrationales, quae propositae rectae Rationali incommensurabiles sunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum: Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tantum Rationali lineae propositae incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod a proposita recta fit, dicatur Rationale.

QUEMADMODUM linea illa, quae certa ponitur de nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeque illius aliae superficies, commensurabiles, incommensurabilesque dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES planae superficies quadrato Rationalis lineae propositae commensurabiles, Rationales dicuntur, non quidem ex positione, ut illud, sed quia, cum eo collatae reperiantur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineae, quae Rationali lineae quomodocumque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QUONIAM vero lineae potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineae propositae, sunt saltem potentia commensurabiles lineae Rationali, ex 3.

defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

HVIC

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies plana quadrato a Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali proposita prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis linea incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita ut si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si vero non fuerint quadrata, sed alia quæcunq; figura rectilinea, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITUR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrata Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus, lineas quæ possunt spatia commensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles longitudine, ut ad defin. 4. diximus, demonstrabiturq; in coroll. propos. 9: manifestum est, ex 7. defin. lineas illas,

illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRAETEREUNDUM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantum: apponere fere semper vocibus istis: commensurabiles, ac incommensurabiles: Vix autem, & rarissime his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animadvertit, occasione multis præbuit, ut varie, & obscure in hoc 10 lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque: sint locuti.

CÆTERUM his definitionibus adiungemus postulatum unum, & nonnulla pronunciata, quorum usus in hoc libro reperitur.

POSTULATVM, siue Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor vero infinite possit augeri; perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem.

AXIOMATA, SIVE
Pronunciata .

I.

MAGNITVDO quotcunq; magnitudines metiens, compositam quoq; ex ipsis metitur .

II.

MAGNITVDO quamcunq; magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur .

III.

MAGNITVDO metiens totā magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquā.

HÆC axiomata, ut ad numeros pertinent, ostensa sunt a nobis in ultimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce numeri in vocē magnitudinis.

CÆTERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit a numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, ut ad propof. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus, ut docuimus ad initium primi libri; curauimus, ut duplex numerus in margine e regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstrat. Quod si vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter

Theonē

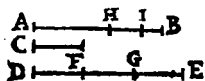
Theorem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

THEOR. I. PROPOS. I.

I.

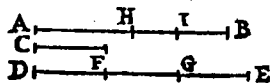
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quam dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITAE sint duæ magnitudines inæquales A B, & C, quarum A B, sit maior. Dico si ex A B, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinquetur tandem magnitudinem quædam, quæ minor sit quam C. Multiplicetur C, toties, donec magnitudo facta D E, maior sit quam A B, ita ut D E, sit multiplex ipsius C, proxime maior quam A B. Diuisa autem D E, in partes D F, F G, G E, ipsi C, æquales; detrahatur ex A B, maius quam dimidium A H, & ex reliqua H B, maius quam dimidium H I; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius A B,



multitudine æquales sint partibus ipsius D E. Sint ergo iam partes A H, H I, I B, tot, quot sunt ipsæ D F, F G, G E. Quia igitur D E, maior est quam A B; At ex D E, ablatum est D F, minus quam dimidium, vel certe dimidium, si D E, ipsius C, sit duplex; ex A B, vero maius quam dimidium A H: Erit reliquum F E, reliquo H B, maius. (Cum enim D E, maior sit quam A B; si ex D E, dimidium auferretur, nec non & ex A B, dimidium, esset quoque reliquum ex D E, maius reliquo ex A B. Si ergo ex D E, auferatur minus quàm dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium;

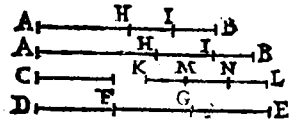
midium; erit reliquum ex D E, maius reliquo ex A B.) Rursus quoniam F E, maior est quàm H B, auterturq; ex F F, dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, si F E, maior sit quam duplex ipsius C; at ex H B, maius quam dimidium H I; erit eodem modo reliquum G E, maius reliquo I B: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius D E, qualis hic est G E, maiorem esse postrema parte ipsius A B, qualis hic est I B. Cum ergo G E, postrema pars ipsius D E, æqualis sit ipsi C; erit quoq; C, maior quam I B, postrema pars ipsius A B. Relicta igitur est I B, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



Idem demonstrabitur, si ex A B, auferat dimidiū A H, & ex reliquo H B, rursus dimidiū H I, &c. Næc ad eundem

erit reliquū F E, mai⁹ reliquo H B, nec nō & reliquū G E, maius reliquo I B; Cū ex maiori D E, ablatū sit D F, min⁹ q̃ dimidiū, vel certe dimidiū; & ex minori A B, dimidiū A H, &c.

A L I T E R. Facta constructione, ut prius, sumatur L, ita multiplex ipsius I B, ut est multiplex D E, ipsius C. Divisa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipsi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam vero A H,



maior est quam H B, vel certe illi æqualis, si ablatū sit dimidiū ex A B; & H B, maior est, quam I B; erit quoq; A H, maior quam I B, hoc est, quam

K M. Rursus quia H I, maior est quàm I B, vel certe illi æqualis; est autē I B, ipsi M N, æqualis: erit quoq; H I, maior quàm M N, vel illi æqualis; atq; adeo tota A I, maior, quàm tota K N. Additis ergo æqualib⁹ I B, N L, erit tota A B, maior quàm tota K L: Est autē D E, maior adhuc, quàm A B. Multo ergo maior erit D E, quàm K L. Quare cū sit ut D E, ad C, ita K L, ad I B; (Sumpta. n. fuit K L, ipsius I B, ita multiplex, quàm multiplex est D E, ipsius C,) erit quoq; C, maior quàm I B. Ac proinde relictæ est I B, minor quam C. Quod erat demonstrandum.

14. quinti.

S C H O.

SCHOLION.

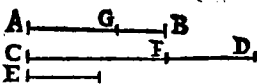
LVCB clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inaequales propositas debere esse sales, ut minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo consiliis contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duabus magnitudinibus inaequalibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractioe, & reliqua minime praecedente metiatur: Incommensurabiles erunt ipsae magnitudines.

DVABVS inaequalibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB, & sic deinceps, alterna quadam detractioe, auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur praecedente. Dico magnitudines AB, CD, incommensurabiles esse. Si. n. non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura communis. Metiatur eas si fieri potest, magnitudo E. quae vel aequalis erit ipsi AB, vel



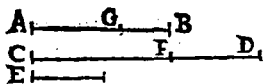
minor. Detracha aut AB, ex CD, quoties potest, relinquat FD, se minorem, ita ut AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta FD, ex AB, relinquat se minorem GB, ita ut FD, metiatur ipsam AG; atque hoc semper fiat. Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quaedam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF, ablata maior, quam dimidia ipsius CD, alias si esset dimidia, vel minor quam dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipsius AB: Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maius,

quam

1. decimi.

1. idicimi

quam dimidium, relinquetur tandem magnitudo quædā minor quam E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quam E.



2. pron.

3. pron.

2. pron.

3. pron.

Quoniam igitur E, metitur AB; & AB, metitur CF; metietur quoque E, ipsam C F: Metitur autem E, &

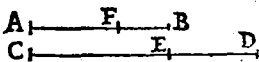
totam C D. Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G: quare & E, ipsam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B: ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

H o c Theorema convertemus ad hunc modum.

Si duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractio: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturq; minor A B, ex D, & reliqua sit E D. Item E D, ex A B, auferatur, relinquaturq; F B, & sic deinceps. Dico in hac



alterna detractioe nunquam reliquam metiri præcedentē. Si enim fieri potest, metiatur F B, præcedentem E D. Quoniam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur quoque F B, ipsam A F: Metitur autem & se ipsam: Igitur F E, & totam A B, metietur: Metitur autem A B, ipsam C E. Igitur & F B, ipsam C E, metietur. Ponitur autem & F B, metiri ipsam E D: Igitur & F B, totam C D, metietur. Oportet autem & F B, ipsam A B, metiri. Quare F B, utranq; A B, C D, metitur. quod est absurdum. ponuntur enim A B, C D, incommen-

2. pron.

1. pron.

2. pron.

1. pron.

nam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur quoque F B, ipsam A F: Metitur autem & se ipsam: Igitur F E, & totam A B, metietur: Metitur autem A B, ipsam C E. Igitur & F B, ipsam C E, metietur. Ponitur autem & F B, metiri ipsam E D: Igitur & F B, totam C D, metietur. Oportet autem & F B, ipsam A B, metiri. Quare F B, utranq; A B, C D, metitur. quod est absurdum. ponuntur enim A B, C D, incommen-

incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua precedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractioe; Meuetur quedam reliqua precedentem.

Nam si nunquam reliqua metiretur precedentem, essent propositae magnitudines, incommensurabiles, ut demonstratio hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum. non sunt enim commensurabiles.

LTAQUE facile ex his dignoscemus, an duae quaeunque magnitudines propositae, sint commensurabiles, nec ne. Nam detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractioe, si reliqua quaequam metiatur precedentem, erunt magnitudines propositae commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur utramque magnitudinem propositam, ut constat ex demonstratione primi theorematiss huius scholij. Ex eo enim, quod reliqua magnitudo FB , metiri dicebatur precedentem ED , offensum est, eandem reliquam FB , metiri utramque magnitudinem AB, CD . Si vero nunquam reliqua magnitudo precedentem metiatur, propositae magnitudines incommensurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonstratio.

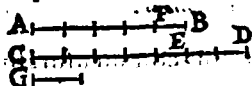
PROBL. 1. PROPOS. 3.

3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

DATAE duae magnitudines commensurabiles sint AB, CD , quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam AB, CD , commensurabiles sunt, sit ut si minor AB , ex maiore CD , detracta, quoniam potest, relinquat $E D$,
 B & $E D$,

& E D, detracta ex A B, quoties potest, relinquat F B, & hoc semper fiat alterna quadam detractio; tandē reliqua quę-



piam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis & holi. Metiatur iam F B, reliqua præcedentē

E D. Dico, F B, esse maximam mensuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim utranque metiatur, ita ostendemus. Quoniam F B, metitur E D; & E D, metitur A F, metietur quoque F B, ipsam A F. At metitur F B, & se ipsam: Igitur E B, totam A B, metietur; atque adeo & ipsam C E, quā A B, metitur. Cū ergo, & ipsam E D, metiatur; metietur quoque F B, totā C D. Metitur ergo F B, utranque A B, C D. Quare utriusque A B, C D, communis mensura est F B.

- 2. pron.
- 1. & 2. pron.
- 1. pron.

Quod autem F B, sit maxima earum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earum mensura, maior quam F B. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, maior quam F B. Quia igitur G, metitur utranque A B, C B; metitur autem & A B, ipsam C E; metietur quoque G, ipsam C E. At metitur quoque totam C D. Igitur G, reliquam quoque E D, metietur. Metitur autem E D, ipsam A F: Ergo & G, ipsam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam F B, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis mensura est, ipsarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis mensura est.

- 2. pron.
- 3. pron.
- 2. pron.
- 3. pron.

Quod si minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita ut detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipsa A B, ambarum maxima mensura communis; cū & se ipsam metiatur. Quibus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

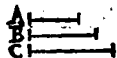
ELICITUR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est F B, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D.

Demon-

Demonstratum enim est ibi, magnitudinem G, si metiatur magnitudines A, B, C D, metiri quoque maximam mensuram F B. Eademque est ratio de ceteris.

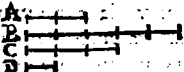
SCHOLION.

Ex his, quae dicta sunt, non erit difficile considerare, an quoslibet magnitudines proposita sint commensurabiles. nam ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum exprior per ea, quae ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duae A, & B, commensurabiles sint, an non.



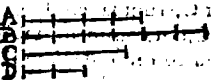
Quae si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

Si vero A, & B, fuerint commensurabiles; sit earum maximae communis mensura inuenta D; quae si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse; cum habeant communem mensuram D.

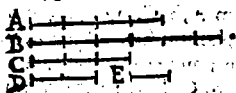


3. decimi.

Quod si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C, erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credatur esse commensurabiles, metietur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesis.



Si vero C, & D, sint commensurabiles, erit quoque tres A, B, C, commensurabiles. Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D, cum E, metiatur D, & D, ipsas A, & B, metietur quoque



3. decimi.

2. pron.

B 2 E, ipsas

E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datae sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perscrutemur, ne de his magnitudinibus est dictum.

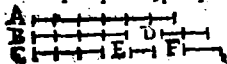
4.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

3. decimi

SINT datae tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam



si maior magnitudo quā D, metiri dicatur magnitudines A, B,

C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si uero D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quilibet earum mensura communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. precedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita patet fieri. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C. Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C.

3. decimi

2. prae.

Quod uero autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo

do

de confirmari potest. Si non est maxima, sit F , maior quā E , si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F , metitur A , & B ; metitur quoque D , earum maximam mensuram, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C : Igitur F , metitur D , & C , metitur quoque E , earum mensuram maximam, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E , magnitudines A, B, C , metitur; Ac propterea E ; maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

AUTEM quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

INFERATUR autem hoc ex ultima parte demonstrationis. Otensum enim est ibi, magnitudinem F , si metiatur ipsas A, B, C , metitur quoque E ; maximam illarum communem mensuram. Eademque de ceteris est ratio.

SI SIMILITER modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem invenimus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, invenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quatuor, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua uesto omnino habenda erant, ut de tribus magnitudinibus ait discip.

L E M M A.

SI sint quotcumque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui binè in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SI NT quotcumque magnitudines A, B, C, D , in eisdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H : Ut quidem A , ad B , ita E , ad F ; & ut B , ad C , ita F , ad

$B : G$, &

G; & ut C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, ut A, ad D, ita E, ad H. Quoniam ex ijs, quæ ad de
 $A \parallel \parallel \parallel$ E, 3. *in, 5. lib. 6. a nobis demon-*
 $B \parallel \parallel \parallel$ F, 4. *strata sunt, tam propor-*
 $C \parallel \parallel$ G, 1. *lib. 2. A, ad D, componitur*
 $D \parallel \parallel$ H, 2. *ex proportionibus A, ad*
B; B, ad C; & C, ad D. æquam proportio E, ad H, ex
proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H, perspi-
cuum est, cum proportionibus componentes proportio-
nem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ
proportionem E, ad H, componunt, & compositas
proportionibus, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales es-
se, hoc est, esse ut A, ad D, ita E, ad H. Quod est pro-
positum.

I D E M sequitur, si magnitudinum, & numero-
 $A \parallel \parallel$ E, 3. *rum proportio fuerit per*
 $B \parallel \parallel \parallel$ F, 12. *turbata, ut in hoc exem-*
 $C \parallel \parallel$ G, 4. *plo apparet, in quo est, ut*
 $D \parallel \parallel \parallel \parallel$ H, 6. *A, ad B, ita G, ad H; &*
ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita E, ad F. Ea-
de enim prorsus est demonstratio.

S C H O L I O N.

Q U O N I A M præcedenti lemma & in propositione, qua sequitur, & in alijs multis, sciendum nobis erit; placuit illud hoc loco breviter demonstrare, cum non facile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersæ generis quantitatis constituentur. At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro vero & in magnitudinibus, quantum demonstratum quinq; lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri numeris quoq; conveniant. Vel certe demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D.

C, D, quæ proportionem habent eandem, quæ numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

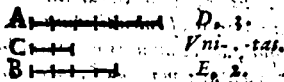
THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

COMMENSURABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

S I N T magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima mensura inuenta C. Et quoties ea repetita metitur A, toties unitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B toties unitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & unitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, unitatem. Quare erit ut A, ad C, ita numerus D, ad unitatem. Est autem & ut C, ad B, ita unitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atque unitas numerum E, æque metiatur. Igitur præcedens, erit ex æquo, ut A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.

3. decimi.



SCHOLIION.

CUM Euclides ad demonstrationem huius theorematiss assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudo. Et ob id præterea quotque commensurabiles, ut rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Hæc sola communem recipiunt mensuram, atque adeo in eis demonstratio locum habet. Q U O D si lineæ sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atque idcirco mensuram habent communem, ipsæque demonstratio huius theorematiss conuenit. At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles esse sunt,

communis mensura sunt experies, ac propterea huius theorema-
tis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.

Ex demonstratione porro eiusdem huius theorematiss liqui-
do constat, commensurabilium magnitudinum proportionem
esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis men-
sura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere
proportionē magnitudines
A, 7. A & B, quam habent nu-
C, 1. meri D, & E; per quas sci-
B, 1. licet earum mensura com-
munis maxima C, ipsas metitur.

Vnde si propositis duabus magnitudinibus commensura-
bilibus A, & B, libeat inuenire quam proportionem habeant
in numeris; sumendi omnes duo numeri D, & E, quos vnitas
aque, ac communis magnitudinum commensurabilium A, &
B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam ut
demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent,
quam numeri D, & E.

Quod si sola maxima mensura C, sumamus aliam quā-
cumque communem earum mensuram, nihilo minus hac the-
orema demonstrabimus eodē
argumento. Quāuis enim
A, 6. numeri D, & E, maiores in-
C, 1. ueniantur in hac posteriori
B, 1. demonstratione, quam in priori, habent tamen eandem propor-
tionem cum illis, ut ex approposita figura apparet. Quoniam ne-
ro in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi om-
nium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea
ferre Euclidet in demonstratione maximam communem mensu-
ram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

6.

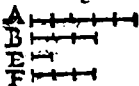
THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines inter se proportio-
nem habeant, quam numerus ad numerū:
commensurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportio-

nem

nem quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse cō
mensurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero
C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A,
quarum partium uni equa-
lis sit magnitudo E. Dein-
de quoties unitas repetita
metitur numerum D, to-
ties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandā
aliā. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, conti-
netur, quoties unitas in C; continebit æqualiter A, ipsam
E, & C, numerus unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad
unitatem: Est autem & ut E, ad F, ita unitas ad D, quod
E, ipsam F, & unitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per
lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, ut A ad F, ita C, ad
D: Erat autem etiam ut C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit ut
A, ad B, ita A, ad F; ac propterea B, & F, magnitudines
æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsam F, metia-
tur, metietur quoque eadem E, ipsam B: Metiebatur autem
& ipsam A. Igitur magnitudo E, utranque A, & B, meti-
tur; Ac proinde A, & B, commensurabiles sunt. Si igitur
duæ magnitudines inter se proportionē habeant, &c. Quod
erat demonstrandum.

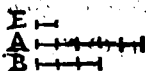


C, 5.
Uni- tas.
D, 3.

9. quinti.

1. defin.

A L I T E R. Quot sunt unitates in C, in tot partes æqua-
les intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium uni
æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est ut E, ad A,
ita unitas ad C, quod E, ip-
sam A, & unitas ipsum C,
æque metiantur; ponit utq;
ut A, ad B, ita C, ad D, erit
per idem lemma superius,
ex æquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metitur autem unitas
numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B,
metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, &
B, habentes eandem communem mensuram E, commensu-
rabiles sunt. Quod est propositum.

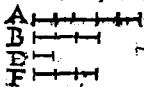


Uni- tas.
C, 5.
D, 3.

COROLLARIUM.

Ex priori autem demonstratione theorematum sepe citata nobis
uia qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quævis
alia

alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; diuidenda erit A, in tot æquales partes, quot unitates sunt in C; & sumenda alia linea F, coræ eundem partium, quot unitates sunt



C, 5.

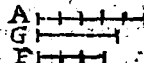
Vni- tas.

D, 3.

in tot æquales partes, quot unitates sunt in C; & sumenda alia linea F, coræ eundem partium, quot unitates sunt

in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, ut C, ad D, ut demonstratū est.

Hinc rursus apparet, quam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ,



C, 5.

D, 3.

ut numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ A, ut numerus C, ad numerum D, inueniē-

da erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quā sic se habeat A, ut C, ad D: Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, ut C, ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continuæ proportionales, erit ex coroll. propo. 19. lib. 8. ut A, ad F, atque adeo ut numerus C, ad numerum D, (cum sit ut A, ad F, ita C, ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.

13. sexti.

SCHOLIION.

In hoc eiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, ut ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

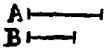
7.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

o.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incōmensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionē nō habere, quā habet numerus ad numerū. Si enim A, & B, proportionē dicantur habere, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ cōmensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incōmensurabiles. Non igitur



6. decimi

A, &

A, & B. proportionē habēt, quā numerus ad numerū Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

QUOCYNOQUE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potenti, siue longitudine tantum, semper colligimus eas proportionem non habere, quam numerus ad numerū, ut in præfatione. Nam aliter, ut demonstratum est, essent longitudines commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

8.

o.

SI duæ magnitudines inter se proportionē nō habeant, quā numerus ad numerū: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quā numerus ad numerū. Dico eas incommensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse commensurabiles, erit earū proportio, quæ numeri ad numerum. Quod, est absurdum, ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerū. Nō igitur commensurabiles sunt A, & B. Quod si duæ magnitudines inter se proportionē habeant, &c. Quod erat ostendendum.

5. decimi

SCHOLIUM.

QUOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipse necessario, ex hoc theoremate, longitudines incommensurabiles, ut in præfatione habetur, quam numerus ad numerum, ut ad proportionem, cuiuslibet, demonstramus, quod est contra hypothesin. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem nō habent, quā numerus ad numerum, necessario & potenti incommensurabiles esse, ut manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quā numerus ad numerum, ut in demonstratione theorematum assumitur, immo nullo modo, talem proportionem habere, possunt, ut in scholio

propos.

propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur inferatur ex huius theorematibus demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse in eodem mensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continue proportionales, & alie tres continue quoque proportionales; sitque ut prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam. Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

SINT continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non; sitque ut A, ad

D, 35. C, ita D, ad F. Dico
E, 28. quoque esse ut A, ad
F, 21. B, ita D, ad E. Quo-

niam tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportionibus A, ad C, & D, ad F, equales; Erunt quoque proportionibus A, ad B, & D, ad E, equales, quandoquidem earum proportionibus duplicatae equales sunt.

Idem sequitur, si plures quantitates sint, quatuor; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatae, ad demonstrationem; & in quinque, quadruplicatam, &c.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine com-
mensu-

mensurabilibus sunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ uero a rectis lineis longitudine incommensurabilibus sunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

S I N T primum rectæ A B, C D, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam rectæ A B, C D, longitudine sunt commensurabiles; erit A B, ad C D, ut numerus ad numerum: Sit ut E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est A B, ad C D, ut E, numerus ad numerum F: ha-



E, 2. F, 3.
G, 4 H, 9.

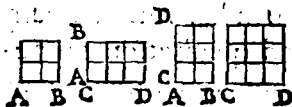
5. decimi.

bet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: Item 20. sexti. & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Exit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex C D, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportionēs, duplicatæ sunt proportionū æqualium. Quod est propositum.

11. octavi.

ALITER.

ALTER. Posita eadem constructione, contingatur rectangulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, ut



E, 2. F, 3.
G, 4. I, 6. H, 9.

constat ex demonstratione propos. 1. lib. 8. atq; adeo in proportione lateris E, ad latus F, ut diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est AB, ad CD, ut E, ad F: Ut autem AB, ad CD,

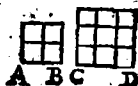
1. sexti.

ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD, ponatur basis rectanguli; Item ut E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ut quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, ut E, ad F: Ut autem AB, ad CD,

1. sexti.

ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item ut E ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ut I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, in eadem ratione sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma, propos. 4, huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

Secundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas



E, 2. F, 3.
G, 4. H, 9.

AB, CD, esse longitudine comensurabiles. Sint numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, ut in priori figura.

Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, ut quadratus numerus G, ad quadratum numerum H; Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum

20. sexti.

ex CD, proportionem duplicatam lateris AB, ad latus CD; Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit pro-

11. 6. 11. 11.

portio

portio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportionēs, æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant; quam numeri E, F, ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

6. decimi

A L I I T E R. Reperatur constructio figuræ posteriora. Quia igitur est ut A B, ad C D, ita quadratū ex A B, ad rectangulū B D; Itē ut A B, rursus ad C D, ita rectangulum B D, ad quadratū ex C D, ut supra diximus; erunt quadratū ex A B, rectangulū B D, & quadratū ex C D, continue proportionalia in ratione lineæ A B, ad lineā C D: Sunt autem & numeri G, I, H, continue proportionales in ratione numeri E, ad numerū F, ut supra ostendimus; poniturq; quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratū numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, ut G, ad I, hoc est, ut E, ad F; Ac propterea A B, C D, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, cōmensurabiles sunt longitudine. Quod est propositum.

1. sexti.

S I N T tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earū quadrata proportionē non habere, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Si enim quadratū ex A, ad quadratū ex B, proportionē dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine cōmensurabiles, ut iam est demonstratū. Quod est absurdū. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionē habet, quam numerus quadratus ad numerū quadratum. Quod est propositum.

6. decimi.

Q U A R T O, ac postremo quadratū ex A, ad quadratū ex B, nō habeat proportionē, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine cōmensurabiles credantur; habebūt earū quadrata, ut est demonstratū, proportionē quā quadratus numerus ad quadratū numerū. Quod est absurdū. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine cōmensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Quapropter quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; &c. Quod erat demonstrandum.

COROL

Ex his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudi-
ne sunt commensurabiles, omnino & potentia commensu-
rabiles esse: Quæ uero potentia commensurabiles, non om-
nino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabi-
les sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ
uero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine
incommensurabiles esse.

6. decimi
3. defin.

QUONIAM quadrata linearum longitudine commensurabi-
lium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadrat-
um numerum, ut in hoc theoremate demonstratum est, hinc est, sim-
pliciter quam numerus ad numerum; ipsa commensurabilia erant.
Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existit.
Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia co-
mensurabiles sunt.

3. defin.
6. decimi.

DEMONSTRATIO quia lineæ, quarum quadrata proportionem non ha-
bent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamē
quam numerus simpliciter ad numerum, potentia quidem commensu-
rabiles sunt, eum earum quadrata commensurabilia sint; at lon-
gitudine nequaquam, ut in hoc theoremate est ostensum; perspi-
cium est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitu-
dine commensurabiles esse. Solum enim ex lineæ potentia com-
mensurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam nume-
rus quadratus ad numerum, quadratum, longitudine quoque in-
commensurabiles, ut constat ex secunda parte huius theorematis.

4. defin.
8. decimi.

RESPONDEO quia lineæ, quarum quadrata proportionem non ha-
bent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed ta-
men, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quædam sunt
longitudine, at potentia commensurabiles, ut modo diximus, liqui-
do constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino &
potentia incommensurabiles esse. Solum enim ex lineæ longitu-
dine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent,
quam numerus ad numerum, potentia quoque incommensurabi-
les sunt, eum earum quadrata incommensurabilia sint.

POSTERIOR lineas potentia incommensurabiles, esse omni-
no & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si lon-
gitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensura-
biles forent, ut patet ex prima parte corollarii. Quod est absurdū.
Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem li-
neæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine in-
commensurabiles sunt.

SCHOLION.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theore-
matis

matis planius perfectiusque percipiatur, diligenter consideran-
 da sunt hac, quae sequuntur. Primum lineas rectas longitu-
 dine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theo-
 rematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad
 quadratum numerum, non solum esse eas, quae numeri ex-
 primi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur, quae
 les sunt illae, quae in demonstratione sunt posita: (essentiam re-
 ctæ AB , 2. & CD , 3.) verum etiam illas, quae nullis pos-
 sunt numeris expressi, si cum Rationali linea proposita confe-
 rantur: Deinde e contrario, quadrata a inter se proportionem ha-
 bentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum,
 quarum linea, seu latera, ex secunda theorematum parte lon-
 gitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda
 quae continent eisdem quadratis mensuras aequales illis, in
 quibus quadratum Rationalis linea resoluitur, quod sunt vni-
 tates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem ha-
 bentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descri-
 pta: (continent enim quadratum ex AB , quatuor mensuras
 quadratas, & quadratum ex CD , novem; quos nimirum reci-
 tat: sunt in quadrato numeri G , H .) Sed ea etiam, quae vel
 pauciores, vel plures mensuras quadratas compleruntur, quod
 sunt unitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato li-
 neae Rationalis conferantur. Sape namque enim linea data com-
 mensurabile inter se suis longitudine, sed numeris expressi
 non possunt, propterea quod Rationali linea proposita sunt lon-
 gitudine incommensurabiles; At propterea quadrata illarum
 proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad
 quadratum numerum, ut in hac theoremate expressum, ut
 pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam
 sunt in quadratis illis numeris unitates. Hac autem omnia per-
 spicua facimus hac demonstratione.

EXPONATUR linea Rationalis AB , expressa nume-
 ro 4: cuius quadratum AC , continebit mensuras quadratas 16.
 Sint quoque numeri D , E , plani similes non quadrati, habentes
 tamen proportionem, ut in Arithmetice est demonstra-
 tum, quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum
 G , nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum HI , con-
 stans ex sex quadratis mensuris quadrati AC , quod nimirum
 unitates in D , numeris continentur, atque ipsi H , I , quadrati
 aequali

16. octavi

14. secundi

ri. Cum enim proportionem habeant subduplam, si $K M$, dividatur in duas partes aequales, dividetur $N O$, in eiusdem magnitudinis partes 4, si illa in 16. secabitur hec in 6. &c. At vero hec partes nullo modo aequales sunt partibus lineae Rationalis $A B$, immo illi omnino sunt longitudine incommensurabiles.

$R V R S V S$, quia quadrata $K L, N P$, proportionem habentia quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum G , plures quadratas mensuras continent aequales illis, in quas $A C$, quadratum Rationalis lineae $A B$, resolvitur, quam unitates sunt in dictis numeris quadratis F, G ; (Nam $K L$, aequale est sex huiusmodi mensuris, & $N P$, continet 24. At numerus quadratus F , componitur ex quatuor unitatibus; & G , ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportionem sumantur Q, R , pauciores tales mensuras complectuntur quadrata $K L, N P$, quam sunt unitates in numeris quadratis Q, R , cum aliter ex 9. aliter vero ex 36. unitatibus constituantur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quam pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam unitates in illis quadratis numeris reperiuntur; si ea conferantur cum quadrato lineae Rationalis propositae. Quod si eadem quadrata $K L, N P$, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati $A C$, ex Rationali lineae $A B$, descripti, resolvi poterunt in totidem mensuras quadratas, quot unitates in quadratis numeris F, G , vel Q, R , continentur. Nam si recta $K M$, dividatur in duas partes, & $N O$, in quatuor, ut dictum est, continebit quadratum $K L$, quatuor mensuras quadratas, & quadratum $N P$, sexdecim, quot scilicet unitates reperiuntur in quadratis numeris F, G . Item, si eadem linea secetur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9. & 36. quot nimirum unitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R , &c. At huiusmodi mensurae nullo modo aequales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum $A C$, Rationalis lineae $A B$, resolvitur.

. I I
. O I

I D E M. dicemus de omnibus alijs quadratis, quarumque lateribus, quarum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quarum superficies sint 12, & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQUE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamvis interdum Rationali linea incommensurabilis sint, ut sit sensus. Quadrata qua describuntur a rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali propositæ, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamvis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, sæpe numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiam si lineæ Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, ut ad propos. 47. lib. 1. demonstravimus; Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, ut in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex ultima parte huius theorematæ eorum latera, nempe diameter & latus in uno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstravimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. ultima huius lib.

II.
10.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

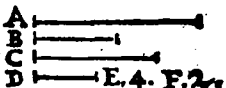
SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommen-

commen-

commensurabilis; & tertia quartæ incom-
mensurabilis erit.

S I N T proportionales quatuor magnitudines A, B, C,
D, sitq; A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & ter-
tiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam A,

& B, inter se commensurabi-
les sunt, habebit A, ad B, pro-
portionem quam numerus ad



5. decimi.

numerum, nempe quam E,
ad F: Ponitur autē vt A, ad B,
ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam
numerus E, ad numerū F. Quare C, & D, commensura-
biles inter se sunt.

6. decimi.

S E D si iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C,
ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam A, & B, incom-
mensurabiles sunt, non habebit A, ad B, proportionē quā
numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C,
ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet quam nu-
merus ad numerum. Quare C, & D, incommensurabiles
sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales
fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

7. decimi.

8. decimi.

SCHOLIION. I.

Q V O D si quatuor proposita magnitudines fuerint lineæ,
prima autem secunda commensurabilis fueris longitudine,
erit & tertia quarta longitudine commensurabilis, vt ex de-
monstratione huius theorematidis apparet. Eodem enim modo
ostendemus posteriores duas proportionē habere numeri ad nu-
merum. Quare, vt in scholis propos. 3. huius lib. diximus, lon-
gitudine commensurabiles sunt.

S I autem prima secunda fueris commensurabilis potentia
tantum, erit & tertia quarta potentia tantum commensurabi-
lis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, com-
mensurabilis est potentia ipsi B, erunt earum quadrata com-
mensurabilia; ac propterea proportionem habebunt, quam nu-
merus ad numerum. Est autem, vt quadratum ex A, ad qua-

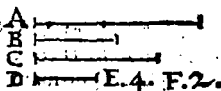
3. defin.

5. decimi.

22. sexti.

dratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D: (quod quatuor linee propositae A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figurae similes similiterque descripta) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quam numeri ad numerum. Quare commensurabilia erunt; Ac propterea linea C, D, potentia commensurabiles.

6. decimi.



3. defin.

Quod tamen potentia tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectae A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt; non erit earum proportio, quae numeri ad numerum, ut in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numeri ad numerum. Longitudinae ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, ut ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.

EADEM ratione, si prima secunda sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quarta longitudine tantum incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles, erunt ipsarum potentia commensurabiles; ac propterea ipsae potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, ut nunc ostendimus, erunt quoque rectae C, D, potentia tantum commensurabiles, Ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

R V K S V S si quatuor magnitudinum priores duae fuerint linea, duae vero reliquae superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si linea sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim linea longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quae numeri ad numerum, ex his, quae in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquae duae magnitudines proportionem eandem, quam linea, erit quoque illarum proportio, quae numeri ad numerum; atque adeo commensurabiles erunt. Si vero linea longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non, non erit earum proportio, quae numeri ad numerum, ut constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quae numeri ad numerum. Qua

6. decimi.

re in

ve incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

8. decimi.

EODEM modo, si priores dua magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero dua, linea, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, si neas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si. n. plana, solidaue commensurabilia sint, habebunt ipsa proportionē, quā numer⁹ ad numerū. Igitur & lineae eandē cū ipsis rationē habentes, proportionē habebunt, quā numer⁹ ad numerū; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, ut dixim⁹ in scholio propof. 6 huius lib. Si vero plana, vel solidi ipsi incommensurabiles, non habebunt ea proportionē, quā numer⁹ ad numerū. Igitur neque lineae eādē cū ipsis proportionē habentes, proportionē habebunt, quā numerus ad numerū. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, quae docuimus in scholio propof. 3. huius lib. Quod est propositum.

5. decimi.

LEMMA.

DVQS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTUR duo plani numeri non similes, per ea, quae ad finē lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quā quadratus numerus ad quadratum numerū, ut in scholio propof. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire uelimus, quorum quilibet duo proportionē non habeant, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quocunque numeros primos, per ea, quae in A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. scholio propof. 20.

lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionē inter se habet, ex scholio prop. 26. lib. 8. quā numeri quadrati ad numeros quadratos, cū non sint plani similes, ut ad finē lib. 8. docuimus.

SCHOLION. II.

P. O. R. R. Q. inuentionē numerorū planorū nō similitium, qui videlicet proportionē nō habent, quam quadratus numerus ad quadratū numerum, non recte quidam tradiderunt hoc locū. Quod ut ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTUR quatuor numeri A, B, C, D, ita ut non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Peripicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia nō sūt, qđ facere oportebat.

H AEC est earum ratio inueniendorum numerorum planorum non similitium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia saepe numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48 sunt plani similes, cum proportionem habeant, quā quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habet 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. ut cōstat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis, 3. & 16. Satis enim est, ut duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera unius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, ut quaecunque duo latera unius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholia pro pos. 23. lib. 8.

IO.

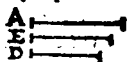
II.

PROBL. 3. PROPOS. II.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

S I T recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per

per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Deinde ex corollarij propos. 6. huius lib. reperitur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, ut numerus B,



B, 10.

C, 6.

ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, ut numerus B, ad numerum C, non est autem proportio B ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet. Cū enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

9. decimi.

6. decimi.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. ut A, ad D, & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, ut iam est ostentum; erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

13. sexsi.

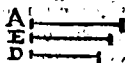
10. decimi.

SCHOLIUM

Si igitur recta A, proposita statueretur Rationalis, ita ut ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per definitionem.

fin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, irrationalis, ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM, ex demonstratione huius theorematiss licet quid constet, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudines tantum incommensurabiles, esse utriuslibet illarum incommensurabilem longitudinem, & potentiam, atque adeo appellari Irrationalem, se alterutra illarum statuitur Rationalis. Ex eodem, quod



B, 10. rectae A, D, sunt longitudines eorum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstramus rectam E, inter illas mediam proportionalem, esse ipsam A, incommensurabilem longitudinem, & potentiam: Eodemque argumento ostendemus eandem longitudinem, & potentiam ipsam D, esse incommensurabilem. Cum n. rectae D, E, A, sint continue proportionales, erit et

C, 6. mensurabiles potentia tantum, demonstramus rectam E, inter illas mediam proportionalem, esse ipsam A, incommensurabilem longitudinem, & potentiam: Eodemque argumento ostendemus eandem longitudinem, & potentiam ipsam D, esse incommensurabilem. Cum n. rectae D, E, A, sint continue proportionales, erit et

coroll. propos. 20. lib. 6. ut quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. lib. 6. lib. 10.

IN codicibus vulgatis praepositur hac undecima propositio a Theone propositioni decima praecedenti: quod errore librarium factum esse puto; cum secunda pars huius ex praecedenti propositione decima demonstretur, ut ex distis apparet.

12.

8.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVAE eidem magnitudini sunt commensurabiles & inter se sunt commensurabiles.

SIT utraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Est n. A, & C, sint commensurabiles, habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G. Sumaturque tres numeri H, I, K, minimi de-

5. decimi.

4. octavi.

mi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitq; H, ad I, vt A, ——— D, 10. E, 8.
D, ad E, hoc est, vt A, ——— F, 2. G, 3.
ad C, & I, ad K, vt F, ——— H, 5. I, 4. K, 6.
ad G, hoc est, vt C, ad

B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B. proportionē habētes, quam numeri H, K, inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini cōmensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

6. decimi.

SCHOLIUM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint linea, atq; A, & B, ipsi C, longitudine cōmensurabiles existant, erunt quoq; A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematiss, quia eodem modo ostendimus, lineas A, & B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K: Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propof. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C. potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrantur eodem modo, & A, B, inter se commensurabiles potētia. Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defn. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirū vt F, ad G. Sumptis ergo in eisdē rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus erit rursus ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K. Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atq; adeo linea A, B, potentia cōmensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse due linea longitudine inter se commensurabiles, licet utraq; cuiuspiam alteri linea potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt due Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia vero tantum Rationali exposita commensurabiles, quæ quidem inueniuntur postea in scholio 2. propof. 19. huius lib.

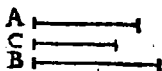
5. decimi.

4. octavi

6. decimi.

S E D & conuersum quodammodo huius theorematidis demonſtrabimus hoc modo.

S I ſint duæ magnitudines commensurabiles, altera uero ſit vni cuiſpiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.



S I N T enim A , & B , commensurabiles, ſicq; A , ipſi C , commensurabilis. Dico & B , eidem C , commensurabilem eſſe. Cum enim tam B , quam C , ipſi A , ſit commensurabilis; erunt quoque B , & C , ex hoc theoremate, inter ſe commensurabiles. Quod eſt propoſitum.

Q U O D ſi magnitudines A , B , C , ſint lineæ, & A , B , commensurabiles longitudine, ſit autem A , ipſi C , commensurabilis longitudine; erit & B , reliqua eidem C , longitudine commensurabilis. Nam cum tam B , quam C , ipſi A , longitudine ſit commensurabilis, erunt etiam B , C , inter ſe commensurabiles longitudine, ut oſtendimus. At uero ſi lineæ A , & B , potentia tantum ſint commensurabiles, & A , ipſi C , commensurabilis ſue longitudine, & potentia, ſue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B , eidem C , potentia eſſe commensurabilem; quia utraq; B , C , ipſi A , hac ratione potentia eſt commensurabilis ex hypotheſi. Non autem colligere licebit, ſi A , ipſi C , commensurabilis ſit longitudine, reliquam B , eidem C , longitudine commensurabilem eſſe, quia non utraque B , C , ipſi A , longitudine commensurabilis eſt, ſed C , quidem longitudine, at uero B , potentia tantum, ut ex hypotheſi conſtat.

12.

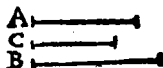
o.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

S I ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commensurabilis, altera uero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

S I N T

SI NT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensurabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C, erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.



12. decimi.

SCHOLION.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine.) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.

12. decimi.

QUONIAM vero hac propositio 13. apud Theonem lemma est, sit, ut post hac in nostra editione numerus propositionis Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Relinquimus, n. dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est assumptum.

13.

8.

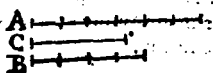
THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini

a cuius m.

cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reli-
quā eidem incommensurabilis erit.

S I N T due magnitudines cōmensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuiuspiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse



commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B, cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; erunt & A, C, inter se cōmensurabiles.

12. decimi.

Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines commensurabiles, &c. Quid demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

H I C quoque, si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantum, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, essent quæque A, & C, commensurabiles longitudine. (Cum hoc posito, utraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, commensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Aliis si B, C, potentia essent commensurabiles; & A, C, potentia commensurabiles essent, (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

12. decimi.

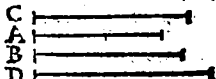
12. de cimi.

COLLIGUNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, q̄ in hoc lib. demonstrantur, perutile.

QUAE incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

S I N T duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus

bus commensurabiles sine C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; erit quocumque reliqua C, eidem B, incommensurabilis.



Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ipse C, incommensurabilis; erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.

Si autem magnitudines A, B, C, D, sint lineae, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsi A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumenta, longitudine incommensurabiles. Si vero A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsi potentia tantum commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; & perspicuum est.

14. decimi.

14. decimi.

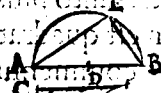
LEMMA.

DE A, B, & C, datis rectis lineis inaequalibus, invenire id, quo maior plus potest, quam minor.

1. I

1. I

QUAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostendimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamē quia hic brevius ex ijs, quae tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicavimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datae duae rectae lineae inaequales AB, & C, quarum AB, maior. oporteatque invenire, quo A, plus possit, quam C. Divisa AB, bisaria in D, describatur ex centro D, & inter-



uallo DA, vel DB, semicirculus AEB, in quo aptetur recta AE, ipsi C, equalis; iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectae EB. Cum enim angulus E, in semicirculo rectus

1. quanti.

1. tertii.

rectus

47. primi. rectus sit; erit quadratum ex AB , æquale quadratis ex AE , EB ; atq; idcirco AB , plus poterit quam AE , hoc est, quam C , quadrato rectæ EB . Quod est propositum. Similiter

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

Hoc etiam aliter tradidimus ad propos. 47.



lib. I. Sint ergo data duæ rectæ AE , EB , quæ si coniungantur ad angulum rectum E , poterit eas recta ducta AB , quippe cū

47. primi. quadratum ex AB , æquale sit quadratis ex AE , EB .

14.
12.

THEOR. 15. PROPOS. 12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum

rectæ

rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Si. I. N. T. quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D; possitque A, prima plus quam B, secunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus possit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C: Si uero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse.

Quoniam est ut A, ad B, ita C, ad D; erit quoque ut quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesein; & quadratum ex C, quadratis ex D, F.



22. sexti.

Igitur erunt quoque, ut quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, ut quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; Ac propterea erit etiam ut recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque ut B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est ut A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad E, ita D, ad F; erit quoque ex æquo, ut A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

22. sexti.

SCHOLIUM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantum commensurabilis fueris ipsi A; & F, potentia tantum ipsi C, esse commensurabilem, ut constet ex his, quæ in scholio propos. 10. huius lib. scripsimus.

D

THEOR.

15.

9.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo utriusque ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

COMPONENTUR duæ magnitudines commensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, utriusque ipsarum A B, B C, commensurabilem esse. Sit enim ipsarum A B, B C, communis mensura D. Quonia



3. decimi

1. pron.

metitur D, ipsas A B, B C, metitur, metietur quoque D, totam A C, ex ipsis cõpositam. Cum ergo D, metiatur A C, & A B, erunt A C, A B, commensurabiles. Similiter cum D, metiatur A C, & B C, erunt & A C, B C, cõmensurabiles; A c propterea A C, utrique ipsarum A B, B C, cõmensurabilis erit.

3. decimi

3. pron.

SED iam tota A C, ex A B, B C, cõposita commensurabilis sit alteri ipsarum A B, B C, nempe ipsi A B. Dico & A B, B C, inter se commensurabiles esse. Sit enim D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; metietur quoque D, reliquam B C. Quare cum D, metiatur A B, B C; cõmensurabiles erunt A B, B C, inter se. Eodem argumento ostendemus A B, B C, esse commensurabiles, si A C, ipsi B C, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Hinc sequitur, si tota magnitudo ex duabus cõposita, cõmensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquam cõmensurabilem esse. Ut si A C, ipsi A B, sit cõmensurabilis, esse quoque eandem A C, reliquam B C, cõmensurabilem. Nam ut in posteriori parte theorematibus ostensum est, semper D, communis mensura totius A C, & ablatæ A B, cum metiatur totam A C, & ablatam A B, metietur quoque reliquam B C, ex 3. pronunciato. Quare cõmensurabiles sunt A C, B C. Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

I 6.

9.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo utriusque ipsarum incómensurabilis erit. . Quod si tota magnitudo uni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTUR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinē AC, utrique ipsarum AB, BC, incommensurabile esse. Si enim non est utrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi AB, sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D metitur totam AC, & ablatam AB; metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur utranque AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB; Eademque ratione neque ipsi BC, commensurabilis erit. Quare utrique ipsarum AB, BC, incommensurabilis est.

3. decimi
3. prem.

SED iā tota AC, cōposita ex AB, BC, incómensurabilis sit uni ipsarū cōponentium, nempe ipsi AB. Dico quoque AB, BC, incómensurabiles esse. Si enim sint cōmensurabiles, erit quoque tota AC, utriusque ipsarū AB, BC, cōmensurabilis. Quod est absurdū. Ponitur enim AC, alteri ipsarū, nempe ipsi AB, incómensurabilis. Non ergo cōmensurabiles sunt AB, BC. Eodē argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

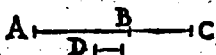
16. decimi.

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reli-

D 2 quæ

quæ incommensurabilem esse. Nempe si $A C$, incommensurabilis sit ipsi $A B$, esse quoque eandem $A C$, reliquæ $B C$, incommensurabilem. Si enim $A C$, ipsi $B C$, foret commensurabilis, esset quoque $A C$, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ $A B$, commensurabilis. Quod est absurdum, ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo $A C$, ipsi $B C$, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.



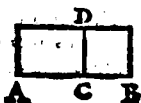
SCHOLIUM. I.

PERSPICUUM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad utriusque propositionis demonstrationem communis mensura D , &c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habens, ut ex defin. apparet.

LEMMA I.

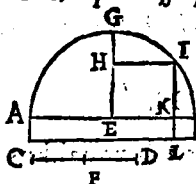
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

Ad rectam $A B$, applicetur parallelogrammum $A D$, deficiens figura quadrata $B D$. Dico parallelogrammum $A D$, æquale esse rectangulo sub segmentis $A C$, $C B$, comprehenso. Cum enim $B D$, quadratum, sit, erit, angulus $A C D$, rectus. Parallelogrammum igitur rectangulum est $A D$, conten-



tum sub $A C$, $C D$, rectis. Quare cum $C D$, æqualis sit rectæ $C B$, ob quadratum $B D$, continebitur idem parallelogrammum rectangulum $A D$, sub segmentis $A C$,

applicatum ad rectam AB , deficiens figura quadrata BL , aequale esse quartæ parti quadrati rectæ CD .



17. sexti.
34. primi

Quoniam KI , media proportionalis est inter AK, KB , ut in scholio propos. 13. lib. 6. tra didimus; erit rectangulū sub AK, KB , hoc est, rectangulum AL , aequale quadrato ex KI , hoc est, quadrato ex EH : (est enim KI , ipsi EH , æqualis, ob parallelogrammum EI .) hoc est, quadrato ex CF : Est autem quadratum ex CF , quarta pars quadrati ex CD ; quod quadratum ex CD , per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex CF . Igitur parallelogrammū AL , ad rectam AB , applicatum deficiensq; quadrato BL , aequale est quartæ parti quadrati ex CD , descripti. Quod est propositum.

SCHOLIUM.

Ex hoc lemmate absolutumur & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

SIT enim recta data AB , & rectilineum quodcunque, cui aequale ponatur quadratum ex CF , nō maius quam quadratum ex dimidia AE , ita ut latus CF , non maius sit latere AE . Edue ita ergo ad AB , perpendiculari EG , sit EH , æqualis ipsi CF . Deinde acta HI , parallela ipsi AB , demittatur IK , perpendicularis ad AB . Quibus peractis ostendemus, ut prius, rectangulum sub partibus AK, KB , aequale esse quadrato ex IK ,

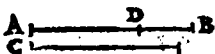
hoc

hoc est, quadrato ex CF , atque adeo & rectilineo dato, cui aequale est positum quadratum ex CF . Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF , maior, quam recta EG . Quare ex EG , abscondi non posset recta ipsi CF , equalis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, ut ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB , & C ; & ad maiorem AB , applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C , descripti, ita ut DB , latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmen



ta AD , DB , inæqualia esse. Si enim AD , DB , segmenta dicantur esse æqualia; cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB , deficiensque figura quadrata ex DB , descripta, æquale sit rectangulo sub AD , DB ; sit autem quod sub æqualibus AD , DB , quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD , dimidio ipsius AB , descriptum; atque adeo ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB , quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex C , per hypothesim, quadruplū eiusdē parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C . Igitur quadrata rectarū ex AB , et C , æqualia sunt, atque rectæ AB , et C , æquales.

D 4 quod

Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD , DB . Quod est propositum.

Hoc facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem, EH , æqualis dimidiata & parti ipsius CD , nempe ipsi CF , ductaque HI , parallela ipsi AB , & tandem demissa perpendicularis IK , ut partes factæ ex applicatione sint AK , KB ; manifestum est AK , KB , segmenta esse inæqualia, cum AB , in E , secta sit bisariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

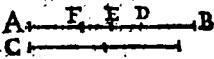
17.
13.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale pa-
rallelo-

rallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales AB , & C , quarum maior AB ; quartæ autem parti quadrati ex minori C , descripti. per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad AB , parallelogrammum deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD , DB , longitudine commensurabilia. Dico AB , plus posse quam C , quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis.



Quoniam per 3. lemma præcedentis propos. AD , maior est, quam DB ; diuidatur AB , bisariam in E , & ipsi ED , æqualis sumatur EF . Quo facto, cum totæ EA , BB , æquales sint, & ablatae quoque EF , ED , erunt & reliquæ AF , BD , æquales. Et quia recta AB , diuisa est bisariam in E , & non bisariam in D ; erit rectangulum sub AD , DB , una cum quadrato ex ED , æquale quadrato ex EB ; Ac propterea quadruplum rectanguli sub AD , DB , & quadrati ex ED , æquale erit quadruplo quadrati ex EB : Est autem quadruplo rectanguli sub AD , DB , æquale quadratum ex C ; (Ponitur enim rectangulum sub AD , DB , æquale quartæ parti quadrati ex C ,) & quadruplo quadrati ex ED , æquale est quadratum ex FD ; (quadratum enim ex FD , quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex ED , cum FD , dupla sit ipsius ED ,) & quadruplo quadrati ex EB , æquale est quadratum ex AB . (quod quadratum ex AB , quadruplum fit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex EB , dimidiata parte ipsius AB .) Igitur & quadrata ex C , & FD , æqualia sunt quadrato ex AB ; Ac proinde recta AB , plus potest quam recta C , quadrato rectæ FD . Hanc igitur FD , demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse, ipsi AB . Quoniam rectæ AD , DB , longitudine ponuntur commensurabiles; erit quoque tota AB , parti DB , commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB , composita ex DB , AF , longitudine commensurabilis: (quod composita ex DB , AF , dupla sit ipsius DB .) Igitur cum utraq; AB , & composita ex DB , AF , longitudine

5. secundi

16. decimi.

12. decimi.

dine sit communisurabilis ipsi DB; erunt quoque AB, & composita ex DB, AF, longitudine inter se communisurabiles;



Ac propterea cum AB, composita ex AF, DB, tanquam una, & ex FD, communisurabilis sit longitudine composita ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. communisurabilis longitudine reliqua FD.

Ergo AB, plus potest quam C, quadrato recta FD, longitudine sibi communisurabilis.

Si iam AB, plus possit quam C, quadrato linea sibi longitudine communisurabilis; & quartae parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse communisurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quam C, quadrato recta FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato recta longitudine sibi communisurabilis; erit recta AB, ipsi FD, longitudine communisurabilis. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam una, communisurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine communisurabilis reliqua composita ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine communisurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cum utraque AB, DB, longitudine sit communisurabilis composita ex AF, DB; erunt quoque AB, DB, longitudine inter se communisurabiles: Atque adeo cum tota AB, composita ex AD, DB, communisurabilis sit longitudine ipsi DB; erunt ipsae AD, DB, longitudine quoque inter se communisurabiles. Quocirca si fuerint duae rectae lineae inaequales, &c. Quod erat demonstrandum.

12. decimi.

16. decimi.

18.

14.

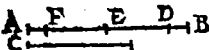
THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duae rectae lineae inaequales, quartae autem parti quadrati, quod sit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, &

in

in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat ; maior tanto plus poterit, quam minor, quātum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis . Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratū rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod sit a minori, æquale parallelogrāmum ad maiorem applicetur deficientes figura quadrata ; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet .

SINT duæ rectæ inæquales AB , & C , quātū maior AB ; quartæ autem parti quadrati ex C , minori descriptū applicetur ad AB , per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrāmum æquale deficientes figura quadrata, quod faciat in recta AB , partes AD , DB , longitudine incommensurabiles . Di-



co AB , plus posse quam C , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis . Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus AB , plus posse quam C , quadrato rectæ FD . Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A , longitudine esse incommensurabilem . Quoniam rectæ AD , DB , ponuntur longitudine incommensurabiles ; erit quoque tota AB , parti DB , longitudine incommensurabilis . Sed DB , longitudine commensurabilis est compositæ ex DB , AF , cum hæc illius sit dupla . Igitur cum duarum linearum commensurabilium DB , & quæ componitur ex DB , AF , ipsa DB , longitudine sit incommensurabilis rectæ AB : erit quoque reliqua composita ex DB , AF , eidem AB , longitudine incommensurabilis : At propterea cum AB , composita ex AF , DB , tanquam una, & ex FD , incommensurabilis sit longitudine compositæ ex AF , DB , erit eadem AB , per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ FD , longitudi-

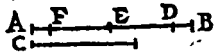
ne

17. decimi.

14. decimi.

ne incommensurabilis. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ FD, longitudine sibi incommensurabilis.

I A M uero A B, plus possit quam C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B,



partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus ut prius, rectam A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; erit A B, ipsi F D incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam una, longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine incommensurabilis: Eft autem composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis; cum ista huius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur, & D B, ipsa composita ex A F, D B, longitudine incommensurabilis sit rectæ A B; erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommensurabilis; Ac proinde cum tota A B, composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, longitudine; erunt & ipsæ A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandū.

14. decimi

17. decimi

S' C H O L I O N. I.

E G I T hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

L E M M A. I.

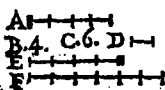
Q U O N I A M demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles

rabiles esse, potentia uero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si exposita Rationali aliqua linea cōmensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem uocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si uero exposita Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si exposita Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

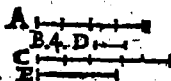
L E M M A. II.

EX PROCLO. Rationales uocat eas lineas, quæ exposita Rationali uel longitudine & potentia commensurabiles sunt, uel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem exposita Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atq; ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se uel longitudine & potentia, uel potentia solum: Et si quidē longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se cōmensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si uero potentia inter se solum sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

ITAQUE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera aequalis est exposita Rationali; ac proinde utraque Rationali commensurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali exposita aequalis est, longitudine tamen ei utraque est commensurabilis: Aut denique utraque exposita Rationali commensurabilis est solum potentia. Hac autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit exposita Rationalis A , diuisa in quatuor partes, quos nimirum unitates sunt in numero B . Sumpio deinde quolibet alio numero C , sit D , recta una partium rectae A ; & quoties D , metitur lineam A , toties metiatur quandam aliam E . Item quoties unitas est in C , toties eadem D , metiatur quampiam aliam lineam F . Quoniam igitur A , & E , componuntur ex paribus multitudine equalibus, quae quidem magnitudine aequales sunt ipsi D ; ipsae aequales erunt. Rursus quia D , metitur omnes tres A , E , & F , erunt omnes tres A , E , & F , longitudine commensurabiles. Quare E , & F , Rationali A , commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostense longitudine inter se commensurabiles, cum habeant D , communem mensuram. Inuentae ergo sunt duae Rationales E , F , longitudine commensurabiles & inter se, & exposita Rationali A , & quarum una, nempe E , aequalis est Rationali exposita A .



IN A M vero D , metiatur duas lineas quasdam C , E , per duos numeros F , G , quorum neuter idem sit, qui B , ita ut utraque linea C , & E , inaequalis sit ipsi A . Erunt igitur ut prius, tres rectae A , C , E , mensuram habentes communem D , longitudine commensurabiles. Quare C , E , Rationali A , longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles, inuentae erunt duae Rationales C , E , longitudine commensurabiles & inter se, & exposita Rationali A ,

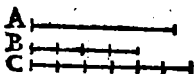


$F, 5.$ $G, 3.$

li A ,

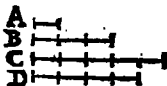
li *A*, quarum neutra equalis est Rationali exposita *A*.

POSTREMO exposita Rationali *A*, inueniatur recta *B*, longitudine tantum incommensurabilis, qua secetur in quot
cunque partes aequales, & sumatur *C*, composita ex alijs quocun-
que partibus, quae magnitudine a-
quales sint partibus rectae *B*. Quo
facto, erunt *B*, & *C*, longitudine



commensurabiles. Dico easdem exposita Rationali *A*, poten-
tia solum esse commensurabiles. Quoniam *A*, *B*, potentia
sunt commensurabiles; erit quadratum ex *A*, quadrato ex
B, commensurabile; Est autem eidem quadrato ex *B*, commen-
surabile quadratum ex *C*, quod *B*, *C*, longitudine sint commen-
surabiles, atque adeo, & potentia; Igitur quadrata rectarum
A, & *C*, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare *C*, ip-
si *A*, potentia est commensurabilis. Et quia duarum recta-
rum *B*, *C*, longitudine commensurabilium *B*, est ipsi *A*, lon-
gitudine incommensurabilis; erit quoque reliqua *C*, eidem *A*,
longitudine incommensurabilis. Est ergo *C*, solum potentia
ipsi *A*, commensurabilis. Et quia *B*, & *C*, Rationali exposita
A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuenta
erunt duae Rationales *B*, *C*, longitudine quidem inter se com-
mensurabiles, potentia uero tantum commensurabiles exposita
Rationali *A*. Quod est propositum.

QVOD si quis optet inuenire quocunque lineae Ratio-
nales longitudine inter se commen-
surabiles, id efficiet hoc modo. Sum-
pta mensura quavis *A*, componan-
tur quotlibet lineae *B*, *C*, *D*, ex tot
partibus ipsi *A*, aequalibus, quot
sunt unitates in totidem numeris
inaequalibus *E*, *F*, *G*. Nam lineae *B*, *C*, *D*, habentes communem
mensuram *A*, longitudine cummensurabiles; erunt.



E, 3.
F, 5.
G, 4.

CABETERVM & omnes lineas Rationales, non solum ex-
posita Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles, facile hoc
modo demonstrabimus. Quoniam Rationales lineae sunt, quae ex-
posita Rationali sunt commensurabiles uel longitudine & po-
tentia, uel potentia tantum; quae autem eidem commensu-
rabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est,
Rati-

12. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

6. defin.

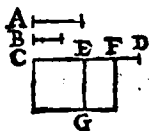
12. decimi.

Rationales lineas quasunque inter se commensurabiles esse.

L E M M A. III.

Si sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratū ex prima.

SINT duæ rectæ *A*, & *B*. Dico esse ut *A*, ad *B*, ita quadratum ex *A*, ad rectangulum sub *A*, & *B*, comprehensum. Ex quantacunque linea recta *CD*, abscindatur *CE*, ipsi *A*, æqualis, & *EF*, ipsi *B*. Deinde super *CE*, describatur quadratum *CG*, perficiaturque rectangulum *GF*, contentum sub *CE*, & *EF*, hoc est, sub *A*, & *B*. Quo-



i. sexti.

niam igitur est ut *CE*, ad *EF*, hoc est, ut *A*, ad *B*, ita parallelogrammum *CG*, hoc est, quadratum ex *A*, ad parallelogrammum *GF*, sub *A*, & *B*, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, ut quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.

EODEM modo erit, ut *B*, ad *A*, ita rectangulū *FG*, ad quadratum *GC*. Quod est propositum.

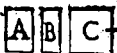
L E M M A. IIII.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.

SIT spatium *A*, commensurabile Rationali spa-

sio

tie B. Dico & A, Rationale esse. Sit C, quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam igitur B, Rationale est, erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurable. Igitur A, & C, cum commensurabilia sint ipsi B, inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea exposita descripto commensurabile, Rationale est. Quod erat demonstrandum.



3. defn.

12. decimi

9. defn.

19.

15.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.

SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulum B D, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus B C, C D, secundum aliquem prædictorum modorum (hoc est, secundum aliquem trium modorum, quos in scholio 1. antecedentis propos. explicuimus; ita ut vel altera ipsarum B C, C D, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei utraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantum.) Dico B D, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solum; erit quoque quadratum B E, ex B C, descriptum quadrato ex A, commensurabile: Est autem quadra-



E C D

E tum.

3. defn.

8. defin.

9. defin.

1. sexti.

10. decimi.

20.

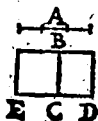
16.

tum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. Igitur & B E, illi commensurable, Rationale est. Quia vero B C, hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine commensurabiles.) & est ut E C, ad C D, ita E B, ad B D; erunt quoq; E B, B D, commensurabilia. Quare ex lemma 4. antecedentis propos. B D, Rationali B E, commensurable, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rebus, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursus exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propos. precedentis exposuimus, hoc est, siue B C, equalis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia; vel potentia tantum. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur ex B C, quadratum B E; quod similiter, ut in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: Est autem ut B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur, & B C, C D, commensurabiles sunt longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi B C, commensurabilis longitudine: sed & Rationalis; quippe quæ Rationali B C, atq; idcirco Rationali expositæ A, commensu-



9. defin.

12. decimi.

1. sexti.

6. defin.

quæ Rationali B C, atq; idcirco Rationali expositæ A, commensu-

mensurabilis sit, ut in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo CD , Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi BC . Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.

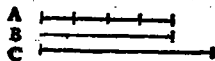
POSSIT recta A , spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex A , æquale sit spatio cuipiam Irrationali. Dico A , Irrationalem esse. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, ut in demonstratione propos. 20. huius lib. ostensum est. quod est absurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A , Rationalis est. Igitur Irrationalis.

HOC idem constat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA. II.

DVÆ rectas Rationales potentia solum commensurabiles inuenite.

DVØ genera sunt linearum Rationalium potentia tantum inter se commensurabilium. Aut enim altera earum est æqualis expõsitæ

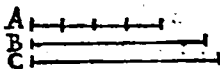


Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expõsitæ Rationalis A , cui æqualis sumatur B . Deinde ipsi B , inueniatur C , longitudine tantum incommensurabilis, seu (quod idem est) .12. ecimi.

potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt; (B, quidem, quod ei sit æqualis; at C, ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum commensurabilis ipsi B, atque adco ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuenta ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commensurabiles, quarum altera, nempe B, exposita Rationali A, æqualis est.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperimus. Sit rursus exposita Rationalis A, cui

11. decimi.



longitudine tantum incommensurabilis inueniatur B; & huic rursus longitudine

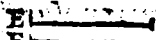
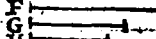
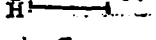
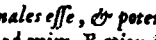
tantum incommensurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, ut in scholio propof. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cum utraque B, C, exposita Rationali A, sit: potentia commensurabilis, erunt B, C, Rationales. Inuenta ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles.

6. defin.

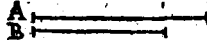
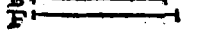
SCHOLIUM.

QVOD si inuenienda sint quocunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANtur per ea, quæ in scholio propof. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quarun-

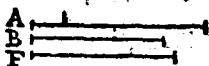
ter, nempe A, B, C, D . Deinde sumptis $Rationales$ E, F, G, H . fiat $ut A$ ad B , ita quadratum ex E , ad quadratum ex F , ut in coroll. propof. 6. huius lib. ostendimus. Item $ut B$, ad C , ita quadratum ex F , ad quadratum ex G , ut $A, 5$. E  F  G  H  $C, 3$. $D, 2$. ut C , ad D , ita quadratum ex G , ad quadratum ex H .

ex H . Dico rectas E, F, G, H , Rationales esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D , (nempe quadratum ex E , ad quadratum ex F , ut numerus A , ad numerum B , ex constructione; similiterque quadratum ex F , ad quadratum ex G , ut B , ad C ; & quadratum ex G , ad quadratum ex H , ut C , ad D . At vero ex quo quadratum ex E , ad quadratum ex G , ut A , ad C ; similiterque quadratum ex E , ad quadratum ex H , ut A , ad D ; & denique quadratum ex F , ad quadratum ex H , ut B , ad D .) erunt ipsa inter se commensurabilia; ac propterea & recte ipse potentia saltem commensurabiles. Existente ergo E , Rationali, erunt & reliqua F, G, H , Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendimus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D : numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, ut ad finem lib. 8. docuimus; non habent etiam quadrata rectarum E, F, G, H , proportionem, quam numeri quadrati. Quare recte E, F, G, H , longitudine incommensurabiles sunt. Offensa sunt autem Rationales, & potentia tantum commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.

Quod si propositis quacunque Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, que omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint proposita due Rationales potentia tantum commensurabiles A, B , A  B  C , 10. D , 6. E , 7.

quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C , ad numerum D : Sumpto autem alio numero, qui ad quemlibet ipsorum C, D primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur pri-

mus, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur.) fiat ut D, ad E, ita quadratum linea B, ad quadratum linea F, per coroll. propof. 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit,



C, 10. ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, E, 7. saltem potentia, cum quadrata reſtarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, F, commensurabilia ſint.

6. decimi.

9. decimi.

Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, que numeri quadrati ad numerum quadratum, ut ad ſinem lib. 8. oſtendimus, quod D, & E, ſint inter ſe primi; erunt rectæ B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commensurabiles. Nam ex aquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, ut C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratum ad quadratum; erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.

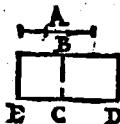
21.

19.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD sub Rationalibus potentia ſolum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

Sit expoſita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commensurabilibus ſecundum aliquem modorum, quos in lemma 2. præcedentis propof. diximus (hoc eſt, ſive altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſive non.)



Dico rectangulum B D, eſſe Irrationales & rectam, cuius quadratum ipſi B D, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, ut ex B C, quadratum B E, quod

quod erit Rationale, ut in demonstratione propos. 10. diximus. Et quoniam est ut EC, hoc est, BC, ad CD, ut BE, ad BD: Est autem BC, ipsi CD, longitudine incommensurabilis, ex hypothesis; erit ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipsi BD, incommensurabile. Quare cum BE, commenturabile sit quadrato ex Rationali exposita A: Sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile; erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.

VOCETUR autem hæc linea potens ipsum BD, Media; propterea quod media proportionalis sit inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

ITAQUE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se incommensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus cõtineri. Nã sola hæc linea Media hoc loco appellatur.

UT autem recte hoc loco moneat Campanus, nõ solũ recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus cõtineri, Irrationalis est, vocaturq; Media: Verũ etiã quadratum ipsius, vel rectangulum illud Mediũ dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata

1. sexti.

9. defin.

14. decimi.

10. defin.

17. sexti.

27. sexti.

illarum rectarum Rationalium potentia & solum commensurabilem, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineae sint continue proportionales, quales sunt BC , & recta Irrationalis, ut Media dicitur, & CD ; erunt quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sint earum quadrata, proportionalia, ut in scholio propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum proportionale est inter quadrata rectarum BC , CD , idemque Medium appellari potest.

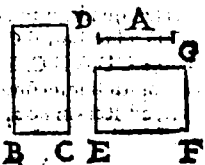
Hoc autem non ita intelligas, ut putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD . Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medius longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, ut ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non recipiuntur rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, ut ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuersae tamen omniae spatium Medium aequale est alteri cuiuspiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

Vnde Medium describi sic poterit, ut dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuiuspiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso aequale est, ita ut ipsum possit linea recta, quae Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duae lineae Rationales potentia tantum commensurabiles, ut in scholio sequentis theorematibus ostendimus.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

Si r linea Media A, & Rationalis B C, fuerit siue exposita, siue exposita commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; appliceturq; ad B C, rectangulū BD, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulū, quod huic quadrato æquale est, faciatq; latitudinem C D. Dico C D, Rationalem esse, & i, si B C, longitudine incommensurabilem. Quoniam A, Media est, ipsa poterit rectangulum sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus inter se contentum; alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulū E G, sub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et



quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum B D; æqualia erunt B D, & E G, lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit ut B C, ad E F, ita F G, ad ad C D; Ac propterea quoque ut quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratum ex B C, commensurabile est quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F, ponantur Rationales; atq; adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D; proptereaq; & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cū F G, Rationalis exposita Rationali sit commensurabilis, si ipsa nō est exposita Rationalis; erit quoq; C D, exposita Rationali commensurabilis, ut ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quo

nam

22.

20.

45. primi

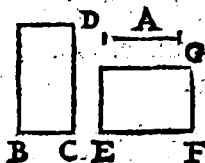
14. sexti.

22. sexti.

10. decimi.

niam $E F$, $F G$, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est ut $E F$, ad $F G$, ita quadratum ex $E F$ ad rectangulum $E G$, sub $E F$, $F B$, contentum, ex lemmate 3. propof. 19. huius lib. erit

10. decimi.



quadratum ex $E F$, incommensurabile rectangulo $E G$, atq; adeo rectangulo $B D$, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex $E F$, commensurabile est quadrato ex $C D$. (quod $E F$, $C D$, Rationales sint, atq; idcirco saltem potentia commensurabiles.) Igitur cum

13. decimi.

quadratum ex $C D$, commensurabile sit quadrato ex $E F$; at rectangulum $B D$, eidem quadrato ex $E F$, incommensurabile; incommensurabilia erunt quadratū ex $C D$, & rectangulum $B D$. Est autem ex lemmate 3. propof. 19. huius lib. quadratum ex $C D$, ad rectangulum $B D$, ut re-

10. decimi.

ctā $C D$, ad rectā $B C$. Incommensurabiles ergo sunt longitudine $C D$, & $B C$. Rationalis ergo est $C D$, & Rationali $B C$, longitudine incommensurabilis. Quamobrē, quod a Media fit, ad Rationālē applicatū, &c. Quod demonstrandū erat.

S C H O L I O N.

11. sexti.

FACILIVS quam ex propof. 45. lib. 1. applicabimus ad $B C$, rectangulum quadrato ex A , æquale, si ipsis $B C$, & A , sumatur tertia proportionalis pro latere $C D$. Cum enim $B C$, A , & $C D$, proportionales sint; erit rectangulū $B D$, sub extremis $B C$, $C D$, contentum æquale quadrato media proportionalis A .

17. septi.

H A C arte utendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam linea recta.

PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Mediū, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidā alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationālē lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Me-

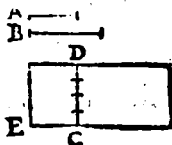
dio

dio aequale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus consentum. Atque hoc modo quodcumque Medium reduci poteris ad Medium consentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIAE cōmensurabilis, Media est.

SIT Medix A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinē; erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F, commensurabilia. Est autem ut D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles: Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cum E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, cōmensurabilis saltē potentia, quod Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia, ex ijs, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus.) erunt C D, C F, Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac proinde recta B, potens rectangulum D F, sub Rationalibus potentia tantum cōmensurabilibus C D, C F, Media est. Medix igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.



23.
21.

45. primi.

23. decimi.

45. primi.

1. sexti.

10. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

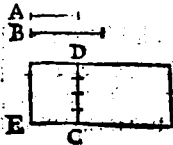
COROL.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam demonstratum est DF, commensurabile esse Medio DE, ostensum ex eo mox fuit DF, esse quoque Medium. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

Si igitur spatium DF, spatio Medio DE, commensurabile. Dico & DF, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum DE, Medium, (Nam cū DE, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, ut in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipsum DF. Quoniam id DE, DF, commensurabilia sunt, erant quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare

A, B, rectarum potentia saltem sunt commensurabiles; Ac idcirco existerente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, ut in hoc theoremate ostensum est. Igitur & DF, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, ut in scholio propos. 23. huius lib. docuimus.



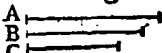
LEMMA I.

QUEMADMODUM autem in lemmate I. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Medie longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; Vniuersæ enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si uero recta quædam linea Medie potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicitur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Media rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicitur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEM.

LEMMA. II.

Duas rectas Medias longitudine commen-
surabiles; Item duas potentia tantum commen-
surabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur due
recte commensurabiles B, C; illa quidem longitudine,
hac uero potentia tantum; erit 
utraq; B, C, Mediae A, com-
mensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitu-
dine commensurabiles; & A, C, potentia tantum;
erunt inuenta A, B, Media longitudine commensura-
biles; & A, C, Mediae potentia solum commensura-
biles. Quod est propositum.

24. decimi

SCHOLION.

QUAMVIS omnis linga recta Media commensurabilis,
Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Media est com-
mensurabilis; cum dua Media dari possint prorsus incommen-
surabiles, longitudine uidelicet, & potentia, ut ex propos. 36.
huius lib. apparebit. Vbi etiam docebitur, qua nam via in-
uenienda sint dua Media longitudine & potentia incommensu-
rabiles.

24.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

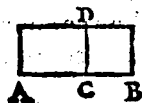
23.

QVOD sub Medijs longitudine com-
mensurabilibus rectis lineis continetur re-
ctangulum, Medium est.

CONTINEATUR rectangulum AD, sub Medijs
AC, CD, longitudine commensurabilibus. Dico AD, Me-
dium

1. sexti

10. decimi.



dium esse. Describatur ex CD , Media quadratū BD , quod erit Mediū. Et quoniam est ut AC , ad CB , ita AD , ad DB : Sunt autem AC, CB , hoc est, AC, CD , longitudine cōmensurabiles; erunt AD, DB , cōmensurabilia. Quare spatium AD , Medio DB , cōmensurabile, Mediū est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Medijs longitudine cōmensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

25.

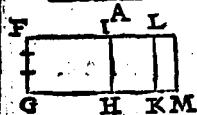
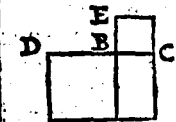
23.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Medijs potentia tantum cōmensurabilibus rectis lineis cōtinetur re ctangulum, vel Rationale est, vel Medium.

S i t rectangulum AC , comprehensum sub Medijs AB, BC , potentia tantum cōmensurabilibus. Dico AC , esse vel Rationale, vel Medium. Describatur ex AB, BC , quadrata AD, CE , quæ Media erunt, ut in scholio propos. 22. huius lib docuimus; cum rectæ AB, BC , Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG , ad quam applicetur

45. primi.



rectangulum FH , quadrato AD , ex AB , descripto æquale; & ad HI , rectangulum IK , rectangulo AC , æquale; & denique ad KL , rectangulum LM , æquale quadrato CE , ex BC , descripto; eritque totum FM , vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib 1. est ostensum. Quia vero AD, CE , Media sunt, erunt & FH, LM , illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL , (est enim & KL , Rationali FG , æqualis, ob parallelogrammum FK , Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM , erunt rectæ GH, KM , Rationales, ipsi FG , seu KL , longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC , potentia inter se sunt cōmensurabiles, erunt & earū quadrata

34. primi.

23. decimi.

drata A D, C E, atque adeo ipsis equalia rectangula F H, L M, commenfurabilia: Vt autem F H, ad L M, ita est recta G H, ad K M. Igitur G H, K M, longitudine inter se commenfurabiles sunt. Quare G H, K M, Rationales ostentur, sunt longitudine inter se commenfurabiles, Rationali utro F G, solum commenfurabiles potentia, cum ei ostentur sint longitudine incommenfurabiles; Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, K M, Rationale est. Et quoniam est, ut D B, ad B C, ita A B, ad B E; (quod D B, B C, ipsis A B, B E, sint æquales, utraq; utriusque.) & ut D B, ad B C, ita A D, ad A C; & ut A B, ad B E, ita A C, ad C E; erit quoque ut A D, ad A C, ita A C, ad C E; atque adeo A D, A C, C E, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia F H, H L, L M, proportionalia erunt: Habent autem rectæ G H, H K, K M, eandem proportionem, quas rectangula F H, H L, L M. Igitur & rectæ G H, H K, K M, proportionales sunt, proptereaque rectangulum sub G H, K M, quadrato ex H K, æquale est. Est autem rectangulum sub G H, K M, ostensum Rationale. Igitur & quadratum ex H K, Rationale est; ideoque & recta H K, Rationalis erit; & ob hoc ipsi F G, Rationali expositæ, hoc est, ipsi H I, cōmensurabilis uel lōgitudine, uel solū potētia. Et si qui dē H K, ipsi H I, lōgitudine sit cōmensurabilis; rectangulū H L, sub Rationalibus H I, H K, lōgitudine cōmensurabilibus cōtētū, hoc est, A C, illi æquale, erit Rōnale. Si uero H K, ipsi H I, potētia solū cōmensurabilis sitjerit rectangulū H L, sub Rationalibus H I, H K, potētia tātū cōmensurabilibus cōtētū, hoc est, A C, illi æquale, Mediū. Est ergo A C, rectangulū sub Medijs A B, B C, potētia tātū cōmensurabilibus cōtētū, uel Rationale, uel Medium. Quocirca, quod sub Medijs potentia tantum commenfurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

FACILIVS quā ex 45. propof. lib. 1. applicabim⁹ ad H I, rectangulū ipsi A C, æquale si tribus rectis H I, A B, B C, quarta proportionalia sumatur pro lasere H K. Nā rectangulū sub extremis H I, H K, æquale erit rectangulo sub medijs A B, B C. HAC eadē arte uisemur in sequētib⁹, quādo ad aliquā rectā applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo:

Q V O.

1. sexii
10. decimi.

20. decimi.

1. sexii

1. sexii

17. sexii

5. defin.

20. decimi.

22. decimi.

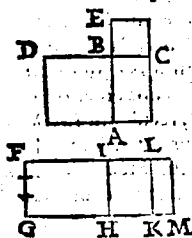
12. sexii.

16. sexii.

Q V O N I A M vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Medijs potentia tantum commensurabilibus esse uel Rationale, uel Medium; docebit Euclides propof. 28 quam ratione inuenienda sint due Media potentia tantum commensurabiles, quae Rationale comprehendat: Propof. vero 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquirat, quae spatium Medium contineant.

- ITA Q V E habemus ex his, rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine cōmensurabilibus esse Rationale; Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum cōmensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellariq; Medium, & rectam, quae ipsum potest, Mediam, Rursus ex demonstratis constat, rectangulum comprehensum sub duabus Medijs longitudine commensurabilibus esse Medium; Rectangulum autem sub duabus Medijs potentia solum commensurabilibus comprehensum esse uel Rationale, uel Medium.
20. decimi.
22. decimi.
25. decimi.
26. decimi.

Q V O D si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere; nempe aequale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quae Media appellatur.



S I T enim rectangulum $A C$, comprehensum sub duabus Medijs $A B, B C$, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico $A C$, neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis eisdem, ut in theoremate, ostendemus similiter, rectas $G H, K M$, Rationales esse, & ipsi $F G$, longitudine incommensurabiles. Et quia recta $A B, B C$, ponuntur incommensurabiles

- longitudine & potentia; erunt & earum quadrata $A D, C E$; atque adeo ipsa aequalia rectangula $F H$, & M , incommensurabilia: Ut autem $F H$, ad $L M$, ita est recta $G H$, ad rectam $K M$. Igitur recta $G H, K M$, longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare $G H, K M$, offensa Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles; Ac propterea rectangulum sub ipsis $G H, K M$, Irrationale est,
1. sexti.
10. decimi.
22. decimi.

est, quod Medium appellatur, & recta ipsum patens, Irrationalis, quae dicitur Media. Potest autem rectangulum sub ipsi G.H. K.M., recta H.K.: (Nam, ut prius, ostendimus, tres G.H., H.K., & M., esse proportionales) Igitur H.K., Irrationalis est, & Media. Quare I.K., Rationale non est: si enim Rationale esset, faceret ipsum ad Rationalem H.I., applicatum latus dinem H.K., Rationalem, & ipsi H.I., longitudine commensurabilem. Quod est absurdum, ostensa enim est H.K., Irrationalis, & Media. Eodem modo neque I.K., Medium est: Si enim esset Medium, faceret ipsum applicatum ad Rationalem H.I., latus dinem H.K., Rationalem, & ipsi H.I., longitudine incommensurabilem, quod est absurdum, ostensa est enim H.K., Irrationalis, & Media. Itaque cum I.K., neque Rationale sit, neque Medium; necessario neque A.C., illi, aequale, Rationale erit, neque Medium, sed tertium quoddam, genus constimes, nempe aequale erit ipsi I.K., quod sub Rationali, & Media, continetur, cum H.I., Rationalem sit, & H.K., ostensa Media. Ex quibus est, facit, medium quae potest spiritum sub duabus Medij, longitudine, & patens, & incommensurabilibus (quales ponuntur A.B., B.C., comprehensum, posse, quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quae Media dicitur, continetur. Quod est propositum.

22. decimi.

17. sexti.

21. decimi.

23. decimi.

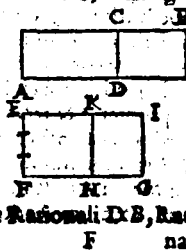
THEOR. 14. PROPOS. 27.

26.

22.

MEDIUM non superat Medium Rationali.

SUPERET Medium A.B., Medium A.C., rectangulo D.B. Dico D.B., non esse Rationale. Sic enim, si fieri poterit, D.B., Rationale. Exposita ergo Rationali linea E.F.; ad ipsam applicetur rectangulū E.G., Medio A.B., æquale; & Medio A.C., rectangulum E.H., æquale, ut sit reliquum H.I., Rationali D.B., æquale. Erunt igitur E.G., E.H., æqualia Medijs A.B., A.C., Media; & H.I., æquale Rationali D.B., Rationale.



49. primi.

23. decimi.

33. primi
21. decimi.

14. decimi.

10. decimi

16. decimi.

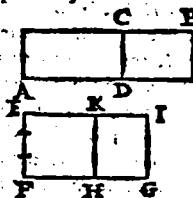
17. decimi.

4. secundi

10. desin.

11. desin.

nale. Quoniam ergo Media E G, E H, ad rationalem EF sunt applicata; erunt rectæ F G, F H, Rationales, & ipsi E F, incommensurabiles longitudine. Rursus, quia



Rationale H I, applicatum est ad Rationalem H K; (est enim recta H K, Rationalis, & F, æquale) erit recta H G, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabiles. Quare cum H G, E F, longitudine sint commensurabiles; & E F, ipsi F H, longitudine incommensurabiles, uest

ostensum; erit & H G, eidem F H, longitudine incommensurabilis. Est autem ut F H, ad H G, ita quadratum ex F H, ad rectangulum sub F H, H G, ex rectiolemate propos. 19.

huius lib. Igitur quadratum ex F H, incommensurabile est rectangulo sub F H, H G. Sed quadrato ex F H, commensurabile est quadratum ex H G; (quod sine ambo, ex lineis Rationalibus E H, H G, descripta) atque adeo & duo quadrata ex F H, H G, simul, quadrato ex F H, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub F H, H G; commensurabile est id, quod bis continetur sub F H, H G; (quod a hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex F H, H G, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub F H, H G, bis. Quare

& compositum ex quadratis rectarum F H, H G, & ex rectangulo bis sub F H, H G, incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum F H, H G. At quadratis ex F H, H G, una cum rectangulo bis sub F H, H G, æquale est quadratum ex F G. Igitur & quadratum F G, incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum F H, H G: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex F H. Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex F G, erit quadratum ex F G, Irrationale; ac propterea & recta F G, Irrationalis existet. Quod est absurdum. ostensa enim est F G, Rationalis longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Non ergo D B, quo Mediū A B, superat Mediū A C, Rationale est. Quam ob rem Mediū non superat Mediū Rationale. Quod erat ostendendum.

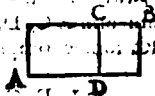
SCHOLIUM.

Ex dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALIS superat Rationalem & Rationalem.

RATIONALIS enim AB , superat Rationalem AC , pro
sio D B . Dico DB , quoque esse Rationalem.

Quoniam AB, AC , Rationales sunt; erunt
 AB, AC , commensurabiles quadrato Ra
tionalis exposita; atque adeo & inter se co
mensurabiles. Quare cum totum AB , compositum ex AC, DB ,
commensurabile sit ipsi AC ; erit quoque idem AB , reliquo DB ,
commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB ,
Rationalis. Igitur & D B ex lemma 4. propos. 19. huius lib.
Rationalis est. Quod est propositum.



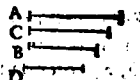
9. defin.
12. decimi.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

27.

MEDIAS inuenire potentia tantum
commensurabiles, quæ Rationalem comprehendant.

EXPONANTUR per lemma 2. propos. 21. huius lib.
duæ Rationales A, B , potentia tantum commensurabiles,
inter quas media proportionalis sumatur C ; fiatque ut A ,
ad B , ita C , ad D . Dico C, D , esse Medias
potentia tantum commensurabiles, quæ
Rationalem comprehendant. Quo niam
 A, B , Rationales ponuntur potentia tan-



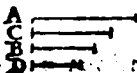
13. sexti.
12. sexti.

tum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis contentum,
Irrationale, quod Mediū uocatur; atque adeo cum ipsum possit
recta C , erit C , Media. Et quoniam est ut A , ad B , ita C , ad
 D ; suntque A, B , potentia tantum commensurabiles; erunt
quoque C, D , solum commensurabiles potentia, ut in schollio
propos. 10. huius lib. ostendimus. Est ergo & D , Media C ,
commensurabilis, Media. Quare inueniuntur sunt Mediae
 C, D , potentia tantum commensurabiles. Dico iam ip-

22. decimi.
17. sexti.

24. decimi.

las continere Rationale. Quoniam est ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A,



ad C, ita est C, ad B; erit quoque ut C, ad B, ita B, ad D; ideoque B, media proportionalis inter C, & D, poterit rectangulum sub ipsis C, D comprehensum.

17. *sexi.*

Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale, Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

18.

PROBL. 5. PROPOS. 29.

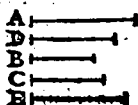
o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

EXPONANTUR per ea, quæ in scholio propos. 27. huius lib. demonstramus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles; & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. Deinde fiat ut B, ad

13. *sexi.*

18. *sexi.*



C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quoniam A, B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; erit rectangulum sub A, B, atque adeo & quadratum ex D, quod illi æquale est,

17. *sexi.*

22. *decimi.*

Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est ut B, ad C, ita D, ad E; sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit, erit & E, illi potentia solum commensurabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediarum sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam est ut B, ad C, ita D, ad E; & permutando ut B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque ut D, ad A, ita C, ad E. Rectangulum igitur sub D, E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationale; ut

16. *sexi.*

ten ita

tentia solum commensurabilibus, Irrationale, & Medium. 22. decimi.
Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo
inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quas
Medium continent. Quod faciendum erat.

SCHOLIUM. I.

IN ijs que sequuntur, indigebimus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SUMANTVR quatuor quicunque numeri proportiona-
les A, B, C, D, ut quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplican-
tes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se mul-
tiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quandoquidem
latera habent proportionalia, ut ex con-
structione est manifestum.

A, 6.	C, 22.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

QVONIAM autem in lib. 9. ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplices, procrea-
ri numerum parem; Imparem vero, si impar multiplices im-
parem; perspicuum est, quoniam modo inueniri possint duo pla-
ni similes, quorum uterque par sit. Vel impar; Vel unus qui-
dem par, aliter vero impar. Si enim latera sumpta, sint nume-
ri pares, erunt eorum plani pares etiam: si autem numeri sint
impares, erunt & plani eorum impares. Quod si unus latera
sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidam
planus, impar; horum vero par: Similiter pares erunt plani,
si quilibet habeat unum laterum numerum parem, alterum vero
imparem, &c.

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita
ut compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, que in scholio pro-
ximo dicta sunt, duo plani similes A B, & C, quorum

F 3 utique

24. & 26.
noni.

uterque uel par sit, uel impar. Et quoniam, siue a pari
par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est

A E D B
C
detrahto B D, ex AB, qui
equalis sit ipsi C, erit reli-
quus AD, par. Quo diui-
so bisariam in E; Dico

1. noni.

numerum factum ex AB, in BD, qui quidem qua-
dratus est, compositum cum quadrato numeri ED,
facere quadratum. Quoniam numerus AD, bis-
ariam est diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6.
theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demon-
strauimus, numerus qui sit ex AB, in BD, una cum
quadrato numeri DE, equalis quadrato numeri EB.
Quare duo quadrati, nempe qui sit ex AB, in BD,
& quadratus numeri DE, compositi faciunt qua-
dratum, eum uidelicet, qui ex BE, gignitur. quod
est propositum.

COROLLARIUM.

Ex his manifestum est, quando AB, & C, similes sunt, inuen-
tos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED,
quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam
numerus quadratus sit.

Quod si numeri sumantur AB, & C, non similes, uterq; tamẽ
par, uel impar; inuenti erunt eodẽ modo duo quadrati numerorũ BE,
ED, quorum excessus, numerus scilicet, qui sit ex AB, in BD, non est
quadratus. Si. n. quadratus esset, numeri AB, BD, hoc est, AB, & C,
plani similes essent. Quod est absurdũ. ponuntur enim non similes.

3. noni.

SCHOLIUM. II.

ITAQUE si inueamur inuenire duos quadratos nume-
ros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sume-
mus ut prius, duos planos similes, quorum uterque par, uel
impar sit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, ut in
proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex BE,
ED,

ED, descripti sunt illi, quos iquerimus. Excedis enim quadratus ex *BE*, quadratum ex *ED*, numero, qui producitur ex *AB*, in *BD*, qui etiam quadratus est.

A *E* *D* *B*
C

*S*i vero inveniendi sint duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani *AB*, & *C*. non similes, quorum uterque par sit, vel impar, & restituta *A*... *E*... *D*... *B* qua peragenda, ut prius. Nam *C* similiter ostendimus, quadratum ex *BE*, aequale esse quadrato ex *DE*, una cum eo qui ex *AB*, in *BD*, fit: Quare excessus quadratorum ex *BE*, *ED*, est numerus factus ex *AB*, in *BD*, qui cum non sit quadratus, (Si enim esset quadratus, essent *AB*, *BD*, plani similes. quod non ponitur) constat propositum.

*H*oc posterius facilius absoluemus, si quemcumque quadratum numerum dividamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Ut si quadratus 36. dividatur in quadratum 16, & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. dividatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de ceteris.

LEMMA II.

*D*uos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

*S*int duo numeri plani similes *AB*, & *C*, pares, vel impares, ut in lemma *A*.. *H*.. *I*. *E*. *F*. *G*... *D*..... *B* mate precede *C*

ti, fiatque eadem constructio, ita ut rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum *AB*, & *B*, inter se,

una cum quadrato ex DE , equalis sit quadrato ex BE . Auferatur deinde ex DE , unitas EF . Erit ergo quadratus ex AD , H , I , E , F , G ... D B DF , minus quadrato ex DE , quod & latus DF , latere DE , minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB , in BD , alter uero ex DF , in se fit; compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is uel maior quadrato ex BF , uel equalis, uel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF ; ac propterea latus ipsius maius latere BF . Erit ergo latus ipsius uel aequale numero BE , uel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros BE , BF , sola unitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne unitas ipsa secetur; Eset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam BF , minus uero quam BE .) Si dicatur aequale, ita ut quadrato ex BE , equalis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex AB , in BD , & ex quadrato numeri DF ; cum eodem quadrato ex BE , sit ostensus in precedenti lemma equalis numerus, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DE ; erit, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , equalis ei, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DE . Ablato ergo communi, eo scilicet qui fit ex AB , in BD ; erit reliquus quadratus ex DF , equalis reliquo quadrato ex DE ; Ideoque & latus DF , latere DE , aequale, pars toti. Quod est absurdum.

absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex AB , in BD , alter vero ex BE , in se fit, aequale est numero BE . Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius aequale numero BE , qui maior sit, quam BE , ita ut quadrato ex BI , aequale sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex BI , latere maiori, maior est quadrato ex BE , latere minori; erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex AB , in BD , alter vero ex BE , in se fit, (cum hic compositus aequalis ponatur quadrato ex BI ,) maior quadrato ex BE . Est autem quadrato ex BE , offensus in lemmate praecedenti aequalis numerus, qui sit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DE . Ablato ergo communi, qui sit ex AB , in BD ; erit reliquus quadratus ex DF , reliquo quadrato ex DE , maior; ac proinde latus DF , latere DE , maius, pars tota. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter sit ex AB , in BD , alter vero ex DE , in se, maius est latere BE . Sed neque aequale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus, maior est quadrato ex BE .

SIT iam, si fieri potest, numerus qui sit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , aequalis quadrato ex BE ; & ponatur numerus AH , duplus unitatis EF . Quia igitur totus AD , totius ED , duplus est, (divisus enim est AD , in E , bisariam) & ablatas AH , ablata unitatis EF ; erit & reliquus HD , reliqui FD , duplus, ex his, quae ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD , in E , bisariam dividitur. Quare ex 6. theorema eorum, quae ad propos. 14. lib.

lib. 9. demonstrauius, erit numerus qui fit ex HB , in BD , una cum quadrato ex DF , equalis quadrato ex BF . Sed eadem

$A \dots H \dots I \dots E \dots F \dots G \dots D \dots B$ quadrato ex $C \dots$ BF , equalis ponitur nume

rus, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato DF . Igitur qui fit ex HB , in BD , una cum quadrato ex DF , equalis est ei, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF ; & detracto communi quadrato ex DF , relinquetur, qui fit ex HB , in BD , ei qui fit ex AB , in BD , equalis. Quare cum HB , AB , multiplicantes eundem BD , producant equales numeros; habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB , ipsi AB , equalis, pars tota. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , quadrato ex BF , equalis.

SIT tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , minor quadrato ex BF , ac propterea & latus eius latere BF , minus, quod sit BG , ita ut qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , equalis sit quadrato ex BG . Sumatur autem ipsius EG , duplus AI . Quoniam igitur totus AD , totius ED , duplus est, & ablatus AI , ablati EG ; erit rursus & reliquus ID , reliqui GD , duplus; ac propterea ID , in G , diuidetur bifariam. Quare ex eodem theor. 6. eorum, quae ad proposit. 1. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus qui fit ex IB , in BD , una cum quadrato ex DG , equalis quadrato ex BG : ponitur autem eidem quadrato ex BG , equalis

18. septimi

equalis, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Igitur qui fit ex IB , in BD , una cum quadrato ex DG , æqualis est ei, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Ablatis igitur quadratis ex DG , & DF , quorum qui ex DG , minor est, remanebit qui ex IB , in BD , maior eo, qui ex AB , in BD , pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , minor quadrato ex BF . Sed neque maior est, ostensus, neque equalis. Non igitur quadratus est, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Quod est propositum.

SCHOLION. III.

Ex hoc facile inueniemus duos numeros, ita ut ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus; habebis hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quā quadratus ad quadratum.

Idem obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

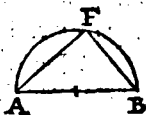
PROBL. 6. PROPOS. 30.

29.

17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPONATUR linea Rationalis AB , & inveniatur ex is , quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD , CE , quorum excessus DE , non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat ut



$C \dots E \dots D$

CD , numerus ad numerum DE , ita quadratum ex AB , ad aliud quadratum, nempe ad id, quod ex AF ; accommodeturque AF , in semicirculo ABF , circa diametrum AB , descripto: ac denique connectatur recta FB .

Quoniam ergo angulus F , rectus est in semicirculo; erit quadratum ex AB ,

æquale duobus quadratis ex AF , & FB ; hoc est, recta AB , plus poterit quam AF , quadrato rectæ FB . Et quia est quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , ut numerus CD , ad numerum DE ; erunt quadrata ex AB , AF , commensurabilia; atque adeo cum quadratum ex AB , sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB , descriptum; erit & quadratum ex AF , Rationale, proptereaque & recta AF , ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB , AF ; atque adeo commensurabiles saltem potentia. Quia vero quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus CD , ad non quadratum DE , proportionem habeat quam quadratus ad quadratum; alias & DE , quadratus esset, ut in Arithmetici est demonstratum. quod non ponitur) erunt rectæ AB , AF , longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, ut ostensum est. Igitur AB , AF , Rationales sunt potentia tantum commensurabiles.

IAM uero, quoniam est ut CD , ad DE , ita quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , erit per conversionem rationis, ut quadratus numerus CD , ad quadratum numerum CE , ita quadratum ex AB , ad quadratum ex FB . (sicut enim CD , superat DE , quadrato CE , ita etiam quadratum ex AB , superat quadratum ex AF , quadrato ex FB .) Quare rectæ AB , FB , longitudine commensurabiles sunt. Invenimus ergo duas Rationales AB , AF , potentia tantum commensurabiles, ita ut maior AB , plus possit, quam minor

AF .

31. tertij.

47. primi

6. decimi.

24. octavi

9. decimi.

9. decimi.

A F, quadrato linee FB, sub longitudine communis ferabilis.
Quod faciendum erat.

PROBL. 7. PROPOS. 3 L.

INVENIRE duas Rationales poten-
tia tantum commensurabiles , ita ut ma-
ior , quam minor , plus possit quadrato re-
cte lineæ sibi longitudine incommensura-
bilis .

EXPOSITUM. Rationalis linea A B, inuenianturque
 per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati
 CE, ED, ita ut ex illis compositus CD, non sit quadratus,
 uel certe numerus aliquis quadratus CD, fecerit in duos
 numeros non quadratos CE, ED: Vtrumuis enim horum
 fiat, totus CD, ad neutrum
 ipsorum CE, ED, propor-
 tionem habebit, quam qua-
 dratus ad quadratum, alias
 secundum priorem modum,
 effect totus CD, etiam qua-
 dratus: iuxta posteriorem
 uero, quilibet ipsorum CE,

C, 144. E, 16. D C, 60. D
 C.....E.....D



C, 144. E, 18. D C, 60. D
C.....E...D

E D, quadratus quoque, ut in Arithmetica ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. ut C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, ut ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in semicirculo A F B, circa A B, descripto. Denique, constructa recta F B. Poterit igitur, ut in precedenti, A B, plus quam A F, quadrato rectæ F B; Eruntque A B, A F, Rationales potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est demonstratio, quæ in precedenti propos. Quoniam vero rursum, ut prius, est per conversionem rationis, ut C D, ad C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B: Non habet autem C D, ad C E, proportionem quam quadratus ad quadratum, Non habebitque quadratum ex A B, ad qua-

30.

18.

24.06.2019

9. decimi.

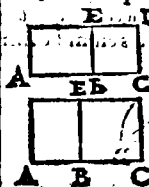
20
21

quadratum ex FB, p[ro]p[or]tionem, quā quadratus numerus ad numerum quadratum. Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commensurabiles, ita ut maior AB, plus possit quam minor AF, quadrato linearum FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ linearum inæquales, erit ut maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

Sint duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constituta, quarum AB, maior sit. Dico esse, ut AB,



ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC. Describatur ex BC, quadratum BD, compleaturque rectangulum AD; eritque rectangulum AE, sub AB, BC, contentum, quod BE, ipsi BC, sit æqualis:

1. sexi.

perspicuum autem est, esse ut AB, ad BC, ita AE, ad BD.

20. 21.

Et ob id modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, ut in secunda figura est manifestum, in qua AB, minor est, quam BC.

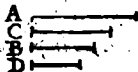
31.
24. 25.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior plus possit quam minor.

minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudi-
ne commensurabilis.

REPERTAE sint duæ Rationales A, B, potentia tan-
tum commensurabiles, ita ut A maior plus possit quam B,
minor, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis;
sitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat ut A,
ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, sunt Rationa-
les potentia solum commensurabiles;
erit rectangulum sub A, B, Irrationale, &
recta C, ipsum potens, linea Media. Et
quia est ut A, ad B, ita C, ad D; sunt au-



tem A, & B, potentia tantum commensurabiles, erunt
quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, ut in
scholio propos. 10. huius libri ostendimus. Quare D,
Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ
ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensura-
biles, Dicæ eas Rationale comprehendere. Cum enim sit
ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad
D; sit autem ut A, ad C, ita C, ad B; erit quoque ut C, ad
B, ita B, ad D; Ac propterea rectangulum sub C, & D,
æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadra-
tum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub
C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C,
D, potentia tantum commensurabiles, Rationale. Quo-
niam uero est ut A, ad B, ita C, ad D: potest autē A, plus
quam B, quadrato lineæ longitudine sibi cōmensurabilis, ex
constructione; poterit quoque C, plus quam D, quadrato
lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur
duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ
Rationale continent, ita ut maior C, plus possit quam mi-
nor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensura-
bilis. Quod faciendum erat.

Q V O D si repertæ sint A, B, Rationales potentia
tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam
B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis;
reliqua autem fiant, ut prius, ostendemus eodem mo-
do, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum
commen-

30. decimi.

22. decimi.

24. decimi.

17. sexti.

15. decimi.

commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudo sibi incommensurabilis ..

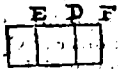
SCHOLION.

A 211 hoc problema demonstrans per demum quæcedens. Nos autem brevius ac facilius idem sine ipso ostendimus, ut facile iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse postrema solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hinc ostendimus, ac in propo. 28. huius lib.

LEMM A.

S I sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

S I N T tres rectæ A B, B C, C D, in rectum constitutæ. Dico esse ut A B, ad C D, ita rectangulum sub



A B, B C, ad rectangulum sub B C, C D. Describatur ex B C, quadratum B C D E, perficiaturque rectangulum A F; Eritque A E, contentum sub A B, B C, & C F, sub B C, C D; quod B E, C D, ipsi B C, æquales sint. Perspicuum autem est esse A B, ad C D, ut A E, ad C F. Quod est propositum.

1. sexti.

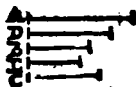
32.
26.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia solum commensurabiles, quæ Medium continent.

tineant, ita ut maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

S I N T inuenta tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, inueniatur alia B, utrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quæ in scholio propof. 31. huius lib. demonstrauimus. Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; fiatque ut D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemma antecedenti, est ut A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: Est autem rectangulum sub A, B, æquale quadratum ex D; & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque ut A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed ut quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propof. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit ut A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, ut in scholio propof. 19. huius lib. ostendimus. Quia uero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quoniam ostensum est rectangulo sub B, C, quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectangulo sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique quia ostendimus esse ut A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Mediæ D, E, potentia solum



30. decimi.

13. sexti.

12. sexti.

17. sexti.

16. sexti.

22. decimi.

24. decimi.

22. decimi.

15. decimi.

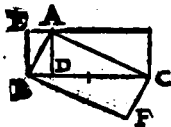
lata commensurabiles, quæ Medium continent, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

Q U O D si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, ut prius, demonstrabimus similiter, inventas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile apparere poterit ex adducta demonstratione.

LEMMA. I.

S I T triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, a quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum sub CB, BD, æquale esse quadrato ex AB: contentum autem sub BC, CD, æquale quadrato ex AC: & contentum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum denique sub BC, AD, æquale contento sub AB, AC.

Q U O N I A M ex coroll. propof. 8. lib. 6, recta AB, media proportionalis est inter CB, BD; erit rectangulum sub CB, BD, quadrato ex AB, æquale:



E A D E M ratione erit rectangulum sub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniam per idem coroll.

AC, media proportionalis est inter BC, CD.

R U R S U S quia ex eodem coroll. AD, inter BD, DC, media est proportionalis, erit eodem modo

16. sexti.

do re-

do rectángulū sub BD, DC, æquale quadrato ex A D.

POSTREMO, quia triangula ABC, ABD, similia sunt; erit ut BC, ad AC, ita AB, ad AD, Quare rectángulum sub BC, AD, æquale est rectángulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectángulū CE, contentum sub BC, AD: Item rectángulum AF, sub AB, AC, contentum. Quoniam igitur rectángulum CE, duplum est triánguli ABC, necnon & rectángulum AF, eiusdem triánguli est duplum; erunt inter se æqualia rectángula CE, AF. quod est propositum.

3. sexti.

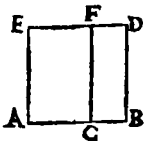
17. sexti.

41. primi

LEMMA. II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales, erit ut maior pars ad minorem, ita rectángulum sub tota & maiore parte, ad rectángulum sub tota & minore parte contentum.

SECETUR recta AB, non bifariam in C, sitq; maior pars AC. Dico esse ut AC, ad CB, ita rectángulum sub AB, AC, ad rectángulum sub AB, CB. Describatur enim ipsius AB, quadratum ABDE, ducaturq; CF, ipsi AE, parallela; eritq; AF, contentum sub AB, AC; & CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, æquales sint. Quoniam igitur est ut AC, ad CB, ita AF, ad CD; cõstat propositū.



1. sexti.

EADEM ratione erit, ut minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

L E M M A I I I .

S i sint duæ rectæ lineæ inæquales , minor autem secetur bifariam ; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli , quod sub maiori lineâ & dimidia parte minoris continetur .

S I N T duæ rectæ inæquales A B , B C , angulum rectum constituentes A B C , seceturq; minor B C , bifariam in D . Dico rectangulum sub A B , B C , duplum esse rectangulum sub A B , B D . Compleatur rectangulum A C , sub A B , B C ; ducaturq; D E , ipsi A B , parallela ; eritq; B E , contentum sub A B , &



s. sexti.

B D , dimidia minoris . Quoniam igitur A C , ipsius B E , duplum est , quod & basis B C , dupla sit basis B D ; constat propositum .

E O D E M modo , si B C , secta bifariam , sit maior , erit quod sub A B , B C , continetur , duplum eius , quod continetur sub A B , minore & B D , dimidia maioris , ut ex secunda figura apparet .

33.
27.

P R O B L . I O . P R O P O S . 34 .

I N V E N I R E duas rectas lineas potentia incommensurabiles , quæ faciant cõpositum quidem ex ipsarum quadratis , Rationale ; Rectangulum vero sub ipsis contentum , Medium .

REPERIANTUR duæ Rationales AB, CD , potentia solum commensurabiles, ita ut maior AB , plus possit, quam minor CD , quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; seceturq; CD , bifariam in E . Deinde per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. ad AB , applicetur quadrato ex CE , hoc est, quartæ parti quadrati ex CD , æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud, quod sub AF, FB , continetur. Postremo descripto semicirculo AGB , circa A , erigatur FG , ad AB , perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB . Quoniam igitur AB , plus potest, quàm CD , quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumq; est ad AB , rectangulum sub AF, FB , æquale quartæ parti quadrati ex CD , deficiens figura quadrata; erit AF , ipsi FB , longitudine incommensurabilis. Est autem ut AF , ad FB , ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF , ad rectangulum sub AB, FB ; Rectangulum vero sub AB, AF , quadrato ex AG , & rectangulum sub AB, FB , quadrato ex GB , est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; quod angulus AGB , rectus sit in semicirculo AGB . Igitur quoque erit ut AF , ad FB , ita quadratum ex AG , ad quadratum ex GB ; ac propterea cum AF, FB , longitudine sint incommensurabiles, erunt quadrata ex AG, GB , incommensurabilia. Igitur rectæ AG, GB , potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB , Rationale est, æqualeq; quadratis ex AG, GB , erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB , Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmae propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB , quod quadrato ex CE , æquale est factum, æquale est quadrato ex FG ; (propterea quod angulus AGB , rectus est, & FG , ad AB , perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE , æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE , æquales. Quare CD , dupla existens ipsius CE , dupla etiam erit ipsius FG . Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD , duplum erit rectanguli sub AB, FG . (cum FG , dimidia sit minoris CD .)



31. decimi.

19. decimi.

31. terci.

10. decimi.

4. defin.

47. primi.

22. decimi.

Sed rectangulum sub $A B$, $C D$, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub $A B$, $F G$, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub $A B$, $F G$, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub $A G$, $G B$, Contentum igitur sub $A G$, $G B$, Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ $A G$, $G B$, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum



quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum; Medium. Quod faciendum erat.

SCHOLIUM.

DEMONSTRATUR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, ut duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATUR Rationalis linea $A B$, & duo numeri C, D , quorum C , maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatque $\sqrt{C}$, ad D , ita quadratum ex $A B$, ad quadratum ex $A E$, & tandem descripto quadrato ex $A B$, educatur $E F$, ad $A B$, perpendicularis. Quoniam igitur est ut C , ad D , ita quadratum ex $A B$, ad quadratum ex $A E$: Non habet autem C , ad D , proportionem quam quadratus ad quadratum; erunt latera $A B, A E$, differentium quadratorum



9. decimi.

1. sexti.

10. decimi.

proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cum $A B$, tota longitudine sit incommensurabilis parti $A E$, erit eadem $A B$, & reliqua $E B$, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. Ut autem $A B$, ad $A E$, ita est quadratum ex $A B$, ad $A F$. Igitur cum $A B, A E$, incommensurabiles sint longitudine, erunt quadratum ex $A B$, & rectangulum $A F$, incommensurabilia. Quare quadrato ex $A B$, existente Rationa

li, quod & AB , Rationalis ponatur; erit AF , dicto quadrato incommensurable, Irrationale. Eodemq; argumento ostendimus BF , Irrationale esse. Quia vero AF , BF , component quadratum Rationale ex AB ; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.

AT vero si AF , FB , Rationalia sint, ostendimus & totum AFB , ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim utrumq; AF , FB , Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia. Igitur & totum AFB , ex ipsis compositum utriq; eorum commensurable erit. Quare AFB , totum commensurable utrique Rationali AF , FB , Rationale quoque est. Quod est propositum.

16. decimi.

9. defn.

PROBL. II. PROPOS. 35.

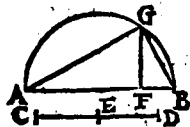
34.
28.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

REPERIANTVR duæ Mediæ AB , CD , potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior AB , plus possit quam minor CD , quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, ut in præcedenti propos. Ostendimus igitur similiter, ut in propos. antecedenti, rectas AG , GB , potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB , æquale existens quadratis rectarum AG , GB , Medium est; erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG , GB , Medium. Rursus ut in antecedenti propositione, ostendimus rectangulum sub AB , CD , duplum esse rectanguli sub AB , FG ; atq; adeo

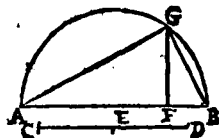
32. decimi.

47. primi.



G 4 illud

illud esse huic commensurabile Quare cum rectangulum sub A B, C D, Rationale sit, ex constructione, erit & rectangulum sub A B, F G, illi commensurabile; Rationale :



Sed per 1. lemma propos. 31 huius lib. rectangulo sub A B, F G, æquale est rectangulum sub A G, G B. Igitur & rectangulum sub A G, G B, Rationale est. O stensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum A G, G B, esse Medium. Invenitæ ergo sunt duæ

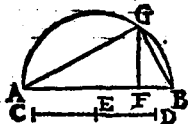
rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.

35.
29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Mediū, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis.

3. decimi. R E P E R I A N T U R duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior A B, plus possit quam minor C, D, quadrato lineæ



sibi longitudine incommensurabilis; fiantq; reliqua, ut i propos. 34. Ostēdemus igitur similiter, rectas A G, G B, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media A B, Medium est, & quadratis recta

47. primi.

rum A G, G B, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rursus, ut in 34. demonstrabimus,

bimus, rectangulum sub $A B, C D$, duplum esse rectangu-
 li sub $A B, F G$; atq; adeo illud esse huic commensurabile.
 Quare cum ex constructione, rectangulum sub $A B, C D$,
 Medium sit; erit quoque rectangulum sub $A B, F G$, hoc
 est, sub $A G, G B$, & illi per 1. lemma propos. 33. huius lib.
 æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniã
 vero $A B$, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi $C D$;
 Est autem eidẽ $C D$, ipsa $C E$, longitudine commensurabi-
 lis, quod illa huius sit dupla; erunt $A B, C E$, longitudine
 incommensurabiles: Sed ut $A B$, ad $C E$, ita est per lemma 3.
 propos. 19 huius lib. quadratum ex $A B$ ad rectangulum
 sub $A B, C E$, hoc est, ad rectangulum sub $A B, F G$, hoc
 est, sub $A G, G B$. (sunt enim rectangula sub $A B, F G$, &
 sub $A G, G B$, per 1. lemma propos. 33. huius lib. æqualia.)
 Igitur quadratum ex $A B$, hoc est, compositum ex quadra-
 tis rectarum $A G, G B$, incommensurabile est rectangulo
 sub $A G, G B$. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ $A G$,
 $G B$ potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compo-
 situm ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub
 ipsis consentum Medium, incommensurabileq; composito
 ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat,

13. decimi.

10. decimi.

S C H O L I O N.

Ex hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad
 propos. 24. huius lib. nps demonstratur recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, &
 potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadra-
 tis rectarum $A G, G B$, quam rectangulum sub ipsis, esse Me-
 dium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque
 lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum
 Medium, Mediæ, incommensurabiles tam longitudine, quam
 potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent &
 earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum
 $A G, G B$, & rectangulum sub $A G, G B$, commensurabilia,

quod

quod non ponitur. Quocirca si sumatur AB , potens compositum ex quadratis rectarum AG , GB , & alia recta potens rectangulum sub AG , GB , idest, media proportionalis inter AG , GB ; inuenta erunt duæ Media & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

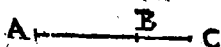
PRINCIPIVM SENARIORVM per compositionem.

36.
30.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantum cõmensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales AB , BC , potentia solum commensurabiles, inuentæ per 1. lemma proposit. 21. huius lib. Dico totam AC , Irrationalem esse.



Quoniam AB , longitudine incommensurabilis est ipsi BC , & ut AB , ita BC , ita est rectangulum sub AB , BC , ad quadratum ex BC , per lemma

10. decimi.

proposit. 31. huius lib. erit rectangulum sub AB , BC , quadrato ex BC , incommensurabile. Sed rectangulo sub AB , BC , commensurabile est eius duplum, nempe quod bis sub AB , BC , continetur; & quadrato ex BC , commensurabilia sunt quadrata rectarum AB , BC ; (omnia enim sunt Rationalia) atque adeo & compositum ex quadratis

16. decimi

rectarum AB , BC , eidem quadrato ex BC , commensurabile est. Igitur per ea, quæ in scholio proposit. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub AB , BC , continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB , BC . Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub AB , BC , & ex composito quadratorum rectarum AB , BC , hoc est, quadratum ex tota AC , (Est enim hoc quadratum æquale qua-

le quadratis rectarum AB, BC , vna cum rectangulo sub AB, BC , bis) composito ex quadratis rectarum AB, BC , incommensurable erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, BC , Rationale, quod commensurable sit ostensum quadrato Rationali ex BC , Rationali. Igitur quadratum ex AC , quadrato Rationali ex BC , incommensurable, Irrationale est; atq; adeo & recta ipsa AC , Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC , potentia solum commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commensurabiles, &c. Quod ostendendum erat.

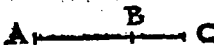
SCHOLION.

ITAQUE ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, Irrationalis est, quæ Media vocatur. At vero composita ex ipsis, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONENTUR duæ Mediæ superius inuētæ AB, BC , potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC , Irrationalem esse. Quia AB , est ad BC , vt rectangulum sub AB, BC , ad quadratum ex BC , vt in lemmate propos. 1. huius lib. est ostensum; sunt autem AB, BC , longitudine incommensurabiles; erunt rectangulum sub AB, BC , & quadratum ex BC , incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, BC ,



4. secundi.
17. decimi.

10. definit.

22. definit.

37. decimi.

37.
31.

28. decimi.

10. decimi.

com-

commensurabile est, quod sub AB, BC , bis; & quadrato ex BC , commensurabile est compositum ex quadratis rectorum AB, BC : (Nam cum AB, BC , potentia sine commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC , commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC , bis,

16. decimi.



& compositum ex quadratis rectorum AB, BC , incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propof. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectorum AB, BC , una cum rectangulo bis sub AB, BC , hoc est, quadratum ex AC , quod huic composito æquale est, incommensurabile quoque est rectangulo sub AB, BC , bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC , commensurabile rectangulum semel sub AB, BC , cum hoc sit illius dimidiū. Igitur quadratum ex AC , incommensurabile est rectangulo sub AB, BC : Ponitur autem rectangulum sub AB, BC , Rationale. Irrationale ergo est quadratum ex AC ; & ob id recta quoque AC , Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, uel ut alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendū.

4. secundi.

17. decimi

13. decimi.

10. defin.

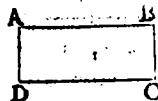
11. defin.

L E M M A.

QUOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATUR rectangulum $ABCD$, sub Rationali AB , & Irrationali BC . Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, faciet ipsum ad Rationalem AB , applicatum latitudinem BC , Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim BC , Irrationalis. Non ergo AC ,

21. decimi.



**AC, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est
propositum.**

THEOR. 27. PROPOS. 39.

SI duæ Mediæ potentia tantum com-
mensurabiles componantur, quæ Medium
contineant; tota Irrationalis erit, Vocetur
autem ex binis Medijs secunda.

38.

32.

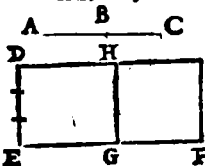
COMPONANTUR duæ Mediæ superius inuentæ
 AB, BC , potentia tantum commensurabiles, quæ Me-
 dium contineant. Dico totam AC , Irrationalem esse. Ex-
 ponatur enim Rationalis DE , ad quam applicetur rectan-
 gulum DF , æquale quadrato AC ; & composito ex qua-
 dratis rectarum AB, BC , æquale alterum ad eandem DE ,
 applicetur DG . Et quia quadratum ex AC , hoc est, re-
 ctangulum DF , æquale est duobus quadratis ex AB, BC ;
 una cum rectangulo bis sub AB, BC ; erit reliquum HF ,
 æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC , contine-
 tur. Quoniam uero, ex hypothe

29. decimi.

45. primi.

4. *secundi.*

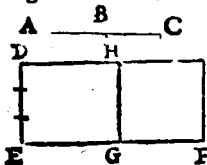
fi, rectangulum sub A B, B C, Medium est; erit & rectangulum bis sub A B, B C, ei commensurabile, hoc est, H F, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum A B, B C, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum D G, utriusque ipsorum commensurabile: Sed utrumque quadratorum ex Medijs A B, B C, Medium est. Igitur & D G, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E, (est enim G H, Rationali D E, æqualis.) erunt eorum latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Rursus quia A B, B C, longitudine incommensurabiles.



6. decimi.

34. primi
23. decimi.

menſurabiles ſunt ; & eſt vt A . B , ad B C , ita quadratum ex A B , ad rectangulum ſub A . B , B C , ex lemma 3 . propoſ. 19 . huius lib . erit quadratum ex A B , incommeſurabile re-
ctangulo ſub A B , B C , vt in ſcholio propoſ. 1 c . huius lib . oſtē-
ſum eſt : Atqui quadrato ex A B , oſtenſum eſt commēſu-
rabile compoſitum ex quadratis rectarum A B , B C ; & re-
ctangulo ſub A B , B C , commēſurabile eſt , quod contine-



tur bis ſub A B , B C , cum hoc il-
lius ſit duplum . Igitur per ea , quæ
in ſcholio propoſ. 14 . huius lib .
diximus , erit & compoſitum ex
quadratis rectarum A B , B C , hoc
eſt , rectangulum D G , incommē-
ſurabile rectangulo bis ſub A B ,

1 . ſexti .
10 . decimi .

37 . decimi .

B C , hoc eſt , rectangulo H F . Cum ergo ſit vt D G , ad H F ,
ita E G , ad G F ; erit E G , ipſi G F , longitudine incommē-
ſurabilis : oſtenſum autem iam fuit E G , G F , eſſe Rationa-
les . Rationales igitur ſunt E G , G F , potentia tantū cōmē-
ſurabiles ; ac , ppter ea , & tota E F , cōpoſita , Irrationalis eſt .
Quare , per lemma antecedens , D F , cōtētū ſub Rōnali D E ,
& Irrationali E F , Irrationale eſt ; Ac propterea & quadratū
ex A C , ipſi D F , æquale , Irrationale eſt . Quare & recta A C ,
Irrationalis eſt . Vocetur aut ex binis Medijs ſecunda , ſeu vt
alijs placet , Bimediale ſecundū . Si duæ ergo Mediæ potentia
tantum commēſurabiles , &c . Quod erat demonſtrandū .

S C H O L I O N .

V O C A V I T Euclides in præcedēti propoſitione lineā Ir-
rationalē A C , quæ cōponitur ex duabus Medijs potentia tantū
cōmēſurabilibus , quæ Rationale cōtineāt , ex binis Medijs pri-
mā : Hic vero lineā Irrationalē A C , quæ cōponitur ex duabus
Medijs potentia tantū cōmēſurabilibus , quæ Mediā cōtineāt , ex
binis Medijs ſecundā , quoniā Rationale & natura , & cognitio-
ne prius eſt Medio , quod Irrationale eſt , ex propoſ. 22 . huius lib .

L E M M A .

S i recta linea non bifariam ſecetur , erit cō-
poſitum ex quadratis partium maius , quàm re-
ctangula

Angulū sub partibus his cōprehensū, quadra-
to eius lineę, quā maior pars minorem superat.

SECEITV A recta AD , in B , non bisariam, sitq;
maior pars AB & in qua sumatur BC , minori parti
 BD , equalis, ut sit AC , excessus, quo AB , superat
 BD , hoc est, BC , ipsi BD , æqualem. Dico quadra-
ta rectarū AB , BD , simul ma-
iora esse rectangulo bis sub AB ,
 BD , quadrato rectę AC . Quo



ma quadrata ex AB , BC , equalia sunt rectangulo bis
sub AB , BC , una cum quadrato ex AC ; estq; BC , ipsi
 BD , equalis: erunt igitur quadrata ex AB , BD , equa-
lia rectangulo bis sub AB , BD , una cū quadrato ex AC .
Quare quadrata ex AB , BD , maiora sunt, quā rectan-
gulum bis sub AB , BD quadrato rectę AC . quod
est propositum.

COROLLARIUM.

Ex hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse ma-
iora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duę rectę lineę potētia incōmēsurā-
biles cōponātur, quę faciāt cōpositū quidē
ex ipsarū quadratis Rōnale; quod autē sub
ipsis cōtinetur, Mediū: totā rectā linea Irra-
tionalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duę rectę superius inuētę AB , BC , po-
tētia incōmēsurabiles, faciētes quidē cōpositū ex ipsarū qua-
dratis Rōnale; rectangulū vero sub ipsis cōtētū, Mediū. Dico
totā AC , esse Irrationālē. Qm rectangulū sub AB , BC , Mediū
ponitur, erit & rectangulū bis sub AB , BC , illi cōmēsurabile,
Mediū, ex coroll. propos. 24. huius lib. atq; adeo Irrationālē.

Ponitur

39.

33.

34. decimi.

10. *defn.* Ponitur autē cōpositū ex quadratis rectarū AB, BC. Rōnale Incōmēsurabile ergo est rectāgūlū bis sub AB, BC, cōposito ex quadratis rectarū AB, BC. Igitur & rectāgulum bis sub AB, BC, una cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex A C, incommensurabile est cōposito ex quadratis rectarū AB, BC. Cum ergo hoc cōpositum ponatur
10. *defn.* Rationale; erit quadratum ex A C, illi incommensurabile, Irrationale; Ac propterea recta A C, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia cum possit duo quadrata ex AB, BC, & rectāgūlū bis sub AB, BC, cōpositum ex quadratis rectarū AB, BC, per lemma antecedēs, maius est rectāgulo bis sub AB, BC. Quare cum cōpositum ex quadratis rectarū AB, BC, Rationale sit, rectāgulum vero bis sub AB, BC, Medium; recte uocabitur A C, Maior, si quidem a Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

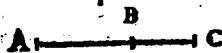


40.
34-

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant cōpositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

35. *decimi.* COMPONANTUR duæ rectæ superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes cōpositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium; rectāgulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quoniam cōpositum ex quadratis rectarū AB, BC, Medium est; quod uero continetur bis sub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub AB, BC, &c. continetur, Rationale ponatur;



ponatur; erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurable rectangulo bis sub AB, BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, una cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurable est rectangulo bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, ut diximus, sit Rationale; erit quadratum ex AC, illi incommensurable, Irrationale; Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandū erat.

10. defin.

17. decimi.

10. defin.

11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

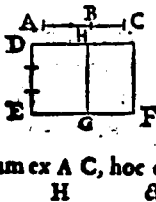
41.

35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurableque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTUR duæ rectæ superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurableque composito ex quadratis ipsarum. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et composito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, re-

36. decimi.



45. primi.

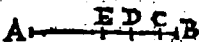
H angu-

4. *secundi.* Angulum D F, æquale est composito ex quadratis rectarum A B, B C, una cum rectangulo bis sub A B, B C, cui reliquum H F, æquale rectangulo bis sub A B, B C. Quoniam uero tam compositum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc est, rectangulum D G, quam rectangulum sub A B, B C, atque adeo ex coroll. propos. 24. huius libri, quod bis sub A B, B C, nempe ipsum H F, (cum illis sit commensurabile.) Medium ponitur; facient D G, H F, ad Rationalem D E, applicata latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum A B, B C, ad est, rectangulum D G, incommensurabile ponitur rectangulo sub A B, B C: Eidem autem rectangulo sub A B, B C, commensurabile est ipse duplex, nempe quod bis continetur sub A B, B C, hoc est, ipsum H F; erunt & D G, H F, incommensurabilia. Quare cum sit ut D G, ad H F, ita E G, ad G F; erunt E G, G F, longitudine incommensurabiles: Atqui E G, G F, ostensæ sunt Rationales. Igitur E G, G F, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; Ac propterea tota E F, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex A C, illi æquale, Irrationale est, ideoque & recta ipsa A C, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, & rectangulum bis sub A B, B C. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat demonstrandum.
23. *decimi.*
13. *decimi.*
1. *sexti.*
10. *decimi.*
37. *decimi.*
18. *defin.*

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECRETVR recta AB , inaequaliter in C , & rursus inaequaliter in D , sintque priores partes AC , CB , magis inaequales, quam posteriores AD , DB . Dico quadrata ex AC , CB , simul maiora esse quadratis ex AD , DB , simul. Diui

sa enim AB , bifariam in E ,  cadet punctum D , uel inter E , C , uel inter A , E . Cadat primum inter E , C . Quoniam igitur rectangulum sub AC , CB , una cum quadrato ex EC , aequale est quadrato ex EB : Item rectangulum sub AD , DB , una cum quadrato ex ED , aequale est eidem quadrato ex EB ; erit rectangulum sub AC , CB , una cum quadrato ex EC , aequale rectangulo sub AD , DB , una cum quadrato ex ED . Ablatis igitur quadratis inaequalibus rectarum inaequalium EC , ED , cum quadrato ex EC , maius sit quadrato ex ED ; erit reliquum rectangulum sub AC , CB , minus reliquo rectangulo sub AD , DB ; ac propterea & rectangulum bis sub AC , CB , minus erit rectangulo bis sub AD , DB . Quonia uero quadratum ex AB , aequale est tam rectangulo bis sub AC , CB , una cum quadrato ex AC , CB , quam rectangulo bis sub AD , DB , una cum quadrato ex AD , DB ; erit rectangulum bis sub AC , CB , una cum quadrato ex AC , CB , aequale rectangulo bis sub AD , DB , una cum quadrato ex AD , DB . Quare cum rectangulum bis sub AC , CB , ostensum sit minus rectangulo bis sub AD , DB ; erunt reliqua quadrata ex AC , CB , maiora reliquis quadratis ex AD , DB . Quod est propositum.

SECD CADAT IÁ D , inter A , E . Quonia igitur partes AC , CB , magis inaequales ponuntur, quam partes AD , DB ; erit AD ; (quae minor est posteriorum) maior quam

CB; (qua prioris minor est) ac proinde cū AE, EB, æ-
quales sint, erit reliqua EC, maior quā reliqua DE.

Itaque quia rectangulum sub
A C, CB, una cum quadrato ex
EC, æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum
sub AD, DB, una cum quadrato ex DE, æquale est
quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB;
erit rectangulum sub AC, CB, una cum quadrato ex
EC, æquale rectangulo sub AD, DB, una cum qua-
drato ex DE. Igitur ut prius, demonstrabimus qua-
drata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD,
DB. Quod est propositum.

5. secundi

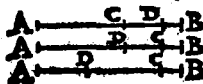
42.

36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QV AE ex binis nominibus, ad unum
duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in
sua nomina, ita ut AC, CB, sint Rationales potentia tantū
commensurabiles, ut uult propositio 37. huius libri. Dico



AB, ad aliud punctū diuidi non pos-
se in alia nomina, quæ scilicet sint etiā
Rationales lineæ potentia tantum
commensurabiles. Si enim fieri po-
test, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo

AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuidere-
tur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles. quod
est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum
commensurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam seca-
bitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantū
commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad
D, inæqualiter, ac propterea partes AC, CB, uel minus
inæquales sunt, quam partes AD, DB, uel magis inæqua-
les; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC,
CB,

CB, uel minora sunt quadratis ex A D, DB, uel maiora.
 (Neque enim partes A D, DB, ubicunque punctum D, exte-
 rit, partibus A C, C B, æquales erunt, utraque utrique,
 nempe maior maiori, & minor minori: Nam hac ratione
 secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in qua
 facta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia uero
 si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus
 excessus ablatorum æqualis est, ut in pronuntiato: 6. lib. 1.
 docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, una cum re-
 ctangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B,
 una cum rectangulo bis sub A D, D B, quod tam illa, quam
 hæc, æqualia sunt quadrato ex A B; sit, ut qui excessus fuerit
 ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati
 compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui
 rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D,
 D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C,
 C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium
 Rationale est. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint,
 & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum
 ex earum quadratis Rationale, ex ipso, quæ in scholio pro-
 pos. 34. huius libri ostendimus: eademque ratione erit &
 compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale.
 Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, ut in
 scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus, mani-
 festum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C,
 C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium
 esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C,
 C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est.
 Quoniam uero rectangulum sub A C, C B, Medium est,
 erit & quod bis sub A C, C B, illi commensurable, ex coroll.
 propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo re-
 ctangulum bis sub A D, D B, Medium erit. Quare cum
 Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus
 rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B,
 spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse.
 Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus
 ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur.
 Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
 Quod erat demonstrandum.

4. secundi

22. decimi.

27. decimi

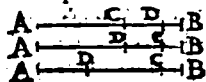
43.

37.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

QVAE ex binis Medijs prima, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut A C, C B, sint Mediae potentia solum commensurabiles, quae Rationale contineant; ut uir propositio 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quae scilicet sint etiam Mediae lineae potentia tantum commensurabiles, continentisque



Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina A D, D B. Igitur ubicunque punctum D, exiit, similiter probabimus,

ut in praecedenti propositione; excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, quae est compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B: Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. (Cum enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis sub A C, C B, ei, quod continetur semel sub A C, C B, commensurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis sub A D, D B. Quare cum Rationale superet Rationale Rationale, ut in scholio proposit. 27. huius libri ostendimus; perspicuum est, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. Quia uero rectae A C, C B, Mediae sunt, & potentia commensurabiles; erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. Quare & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum utrunque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. proposit. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus compositum ex quadratis rectarum A D, D B. Cum ergo Medium non superet Medium Rationale; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum

A C,

16. decimi.

27. decimi.

A C, CB, & compositi ex quadratis rectarum A D, DB, sunt
Rationale. Ostendimus autē & Rationale esse Quod
est absurdum. Non igitur A B, ex binis Medijs: prima ad
aliud punctum, quam ad C, in sua nomina dividitur. Quā
ob rem ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.
Quod demonstrandum erat.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44.
38.

Q V AE ex binis Medijs secunda, ad
unū duntaxat punctū dividitur in nomina.

S I T ex binis Medijs secunda A B, divisa ad punctum
C, in sua nomina, ita ut A C, CB, Medie sint potentia tan-
tum commensurabiles, quæ Medium contineant, ut uult
propos. 39. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum dividi
non posse in alia nomina, quæ scilicet
sint etiam lineæ Medie potentia tantū
commensurabiles, continentesque Me-
dium. Dividatur enim, si potest fieri,
in alia nomina A D, D B. Igitur ubi-
cunque punctum D, existat, similiter



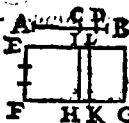
ostendamus, ut in propositione 43. quadrata ex A C, C B,
uel maiora esse quadratis ex A D, D B, uel minora. Expo-
natur Rationalis E F, ad quam applicetur rectangulū E G,
æquale quadrato ex A B. Item E H, æquale quadratis ex
A C, C B. Erunt igitur reliquum I G, æquale ei, quod conti-
netur bis sub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B,
æquale est quadratis ex A C, C B; & rectangulo bis sub
A C, C B. Eodem modo si ad E F, applicetur E K, quadratis
ex A D, D B, æquale erit reliquum L G, æquale rectangulo
bis sub A D, D B, comprehenso. Et quia quadrata ex A C,
C B, inæqualia sunt quadratis ex A D, D B, erunt quoque
rectangula E H, E K, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac pro-
pterea & rectæ F H, F K, inæquales erunt. Rursus quia quadra-
ta ex A C, C B, maiora sunt, per lemma propos. 39. huius li-
bri, rectangulo bis sub A C, C B; erit & E H, maius quā I G,
ac propterea E H, maius quā dimidium ipsius E G, ideoque &
recta F H, maior quā dimidium ipsius F G. Eadē ratione osten-

H 4 demus

45. primi

4. secundi.

demus $E K$, maiorem esse dimidio ipsius $F G$. Inaequales ergo sunt partes $F H$, $H G$; paribus $E K$, $K G$, singulae singulis. Quoniam uero $A C$, $C B$, Mediae sunt, & potentia



16. decimi.

commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile erit. Cum ergo utrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, $E H$, per coroll.

propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione, Medium erit $F K$. Quare $E H$, $E K$, ad Rationalem $E F$, applicata faciunt latitudines $F H$, $F K$, Rationales ipsi $E F$, longitudine incommensurabiles.

23. decimi.

Eodem modo cum rectangulum sub $A C$, $C B$, ponatur Medium, erit & quod bis sub $A C$, $C B$, hoc est, $I G$, illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib.

23. decimi.

Quare cum applicetur ad Rationalem $H I$, erit $H G$, Rationalis ipsi $H I$, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus $L G$, Medium esse, & $K G$, Rationalem ipsi $K L$, longitudine incommensurabile. Rursus quia $A C$, $C B$, longitudine sunt incommensurabiles; & est ut $A C$, ad $C B$, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex $A C$, ad rectangulum sub $A C$, $C B$, erit quadratum ex $A C$, rectangulo sub $A C$, $C B$, incommensurabile. Sed quadrato ex $A C$, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum $A C$, $C B$: (cum enim $A C$, $C B$, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; erit & compositum ex ipsis utriuslibet ipsorum, nimirum quadrato ex $A C$, commensurabile.) Rectangulo uero sub $A C$, $C B$, commensurabile est, quod bis sub $A C$, $C B$. Igitur & compositum ex quadratis rectarum $A C$, $C B$, hoc est, rectangulum $E H$, incommensurabile est, per scholion propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub $A C$, $C B$, hoc est, ipsi $I G$.

10. decimi.

Quocirca cum sit ut $E H$, ad $I G$, ita $F H$, ad $H G$; erunt $F H$, $H G$, longitudine incommensurabiles. Ostense sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt $F H$, $H G$, potentia solum commensurabiles. Igitur $F G$, tota Irrationalis est, quae ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H . Eodem modo ostendemus & $F G$, ex binis nominibus, diuisam

1. sexti.

10. decimi.

37. decimi.

sim esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, ut demonstratum est in præcedentibus. Igitur 43. decimi.
 A B, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendū.

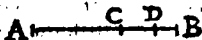
THEOR. 34. PROPOS. 46.

45.

39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita ut A C, C B, potentia sint incommensurabiles, facientes quiddam compositum ex ipsarum quadratis Rationale; & rectangulum uero sub ipsis Medijs, ut uult propositio 40. huius libri.



Dico A B, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ scilicet lineæ incommensurabiles quoque sint potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Medijs. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbiunque ergo punctum D, extiterit, demonstrabimus similiter, ut in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, cum esse, qui rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale: (quia cum utrumque compositum ex hypothesi sit Rationale, erit quoque eorum excessus spatium Rationale, ut in scholio propos. 7. huius libri ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. Quoniam uero rectangulum sub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub A C, C B, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurable. Atque eodem modo Medium erit rectangulū bis sub A D, D B. Igitur cum Medium non superet Medium Rationale; non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, spatium

27. decimi.

spatium Rationale : Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

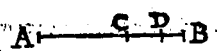
46.

40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

S i 7 linea Rationale ac Medium potens A B, diuisa in sua nomina in puncto C, ita ut A C, C B, incommensurabiles sine potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum uero sub ipsis Rationale, ut uult propos. 41. huius libri.

 Dico A B, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbiunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B. Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est; quod ostendemus, ut in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale. Quia uero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: Medium autem non superat Medium Rationale; non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum

27. decimi.

diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

47.

41.

BINA Media potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Si igitur linea potens bina Media A B, diuisa in sua nomina ad C, ita ut A C, C B, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, ut

uult propos. 42. huius libri. Dico

A B, diuidi non posse ad aliud punctum, diuisa in alia nomina, quae uidelicet sint etiam inter se potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, in-



commensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctum D, existat. Constructio autem eadem fiat, quae in propos. 45. ostendemusque ut ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inaequales esse singulas singulis.

Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi composito aequale Medium. Item quia rectangulum sub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo aequale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi incommensurabile est.

Igitur Media E H, I G, applicata ad Rationalem E F, (est enim I H, ipsi B F, aequalis) faciunt latitudines F H, H G, Rationales, longitudine ipsi E F, incommensurabiles.

Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas F K, K G, Rationales esse, longitudine incommensurabiles ipsi E F. Quia uero compositum ex quadratis rectarum A C, C B, descriptis, hoc est, rectangulum E H, incommensurabile est, ex hypothesis, rectangulo sub A C, C B, nempe rectangulo I G, estque ut E H, ad

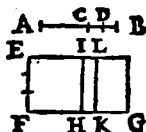
23. decimi.

ad

1. sexti.

ad I G, ita F H, ad H G; erunt F H, H G, longitudine incommensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius libri ostendimus: Sed & ostense sunt Rationales.

37. decimi.



43. decimi.

Rationales ergo sunt F H, H G, potentia solum commensurabiles. Igitur tota F G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & F G, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, iam ante demonstratum est. Igitur A B, binæ Media potius non diuiditur ad aliud punctum quàm ad C, in sua nomina. Quocirca ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina, Quod ostendendum erat.

DEFINITIONES

SECUNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomē plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

Si quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

Si uero minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali ; Vocetur ex binis nominibus tertia .

RVRSVS si maius nomen plus possit , quam minus , quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis ,

IIII.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali cōmensurabile sit longitudine ; Vocetur ex binis nominibus quarta .

V.

SI uero minus nomen ; Vocetur quinta .

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum ; Vocetur sexta .

SCHOLIUM.

NUMERVS distarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur , colligitur hac ratione . Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ potentia tantum commensurabiles , non poterit utrunque nomen exposita Rationali commensurabile esse longitudine ; (alias enim nomi-

na ipsa essent linea longitudine inter se commensurabiles, ut in scholio propo. 12. huius libri docuimus. quod non ponitur.) Sed vel unum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quae ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inaequalia sunt; (alii enim essent linea inter se longitudine commensurabiles. quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineae sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato linea longitudine sibi commensurabilis, constituentur una cum tribus dictis generibus, tres diuersae lineae ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato linea longitudine sibi incommensurabilis, efficiuntur una cum eisdem tribus generibus aliae tres diuersae lineae ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, ut ex definitionibus hinc ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersae lineae ex binis nominibus appellatae.

P V L C H R E autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod incommensurabile, antecedit incommensurabile.

R V R S V S recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine exposita lineae Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineae exposita longitudine est commensurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum exposita Rationali longitudine est commensurabile:

Et in reliquis tribus eodem modo, pri-

nam dicti secundi ordinis quar-

tam appellans; secun-

dam, quintam; &

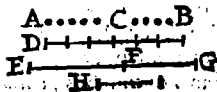
tertiam, sex-

tam.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB , CB , ex
ijs, quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quo-
rum excessus AC , non sit quadratus, ita ut AB , CB , propor-
tionem quidem habeant, quam
quadratus ad quadratum; at AB ,
 AC , proportionem non habeant,
quam quadratus ad quadratum:
Exponatur Rationalis quæpiam



D , cui longitudine commensurabilis sumatur EF . Erit er-
go & EF , Rationali D , commensurabilis, Rationalis. Fiat
deinde ut numerus AB , ad AC , ita per coroll. propos. 6.
huius libri, quadratum ex EF , ad quadratum ex FG ; Dico
 EG , esse ex binis nominibus primam. Quoniam quadra-
ta ex EF , FG , cum proportionem habeant, quam numeri
 AB , AC , commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF , FG ,
commensurabiles, saltem potentia; Ostensa autem est EF ,
Rationalis. Igitur & FG , Rationalis est. Quæ uero AB ,
ad AC , proportionem non habet, quam quadratus ad qua-
dratum, non habebunt quoque quadrata ex EF , FG , pro-
portionem, quam numerus quadratus ad quadratum. In-
commensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF , FG . Sunt
igitur EF , FG , Rationales potentia solum commensurabi-
les; AC idcirco tota EG , Irrationalis est, quæ ex binis no-
minibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit
ut numerus AB , ad numerum AC , ita quadratum ex
 EF , ad quadratum ex FG ; sit autem AB , maior, quam
 AC ; erit quoque quadratum ex EF , maius quam qua-
dratum ex FG . Sit maius, ex lemmate propos. 14. hu-
ius libri, quadrato rectæ H . Quoniam igitur est ut AB ,
numerus ad AC , ita quadratum ex EF , ad quadratum ex
 FG ; erit quoque, per conversionem rationis, ut AB , ad
 CB , uidelicet ad excessum quo antecedens A , B , supe-
rat consequentem AC , ita quadratum ex EF , ad quadra-
tum ex H , nimirum ad excessum, quo antecedens qua-
dratum

48.

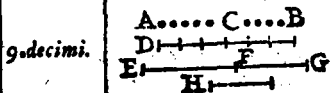
42.

6. decimi.

9. decimi.

37. decimi.

dratum ex E F, superat consequens quadratum ex F G. Habet autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionē



habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; ac proinde rectæ E F, H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniā igitur maius nomen E F, plus po-

test, quam minus F G; quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen E F, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus prima. Invenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

49.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

43.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut in præcedenti propositione, expositæque Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A C, ad numerum A B, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; erunt & rectæ F G, E F, commensurabiles, saltem potentia; Ostenſa est autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis est. Quia uero A C, A B, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur B F, F G, Rationales potentia tantum commensurabiles; Atque idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit ut numerus A C, ad numerum A B; ita quadratū ex F G, ad quadratū ex E F:

6. decimi.

9. decimi.

37. decimi.

Et

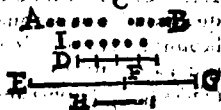
Exconuertendo vt AB , ad AC , ita quadratum ex EF , ad quadratum ex FG ; sic autem AB , maior quam AC ; erit & quadratum ex EF , maius, quam quadratum ex FG . Sit, per lemma propof. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H . Ostendemus iam, vt in præcedenti propof. H , ipsi EF , longitudine commensurabilem effe. Quoniam igitur maius nomen EF , plus potest, quam minus FG , quadrato rectæ H , sibi longitudine commensurabilis; estq; minus nomen FG , expositæ Rationali D , commensurable longitudine; erit EG , per definitionem, ex binis nominibus secundum. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB , CB , ut in propof. 49. Sumatur alius numerus I , qui ad neutrum ipsorum AB , AC , proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I , non quadratus numerus proxime maior quam AC . Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum AB , proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quā AC , differet uel sola unitate ab AC , uel binario.

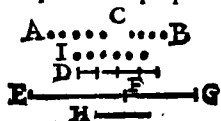
(Unitate quidem, quando AC , numerus fuerit, cui addita unitas non facit quadratum: binario vero, quando unitas addita ad AC , quadratum facit. Vt si



AC , sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8: binario; quia unitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si A C , sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. Unitate, quia unitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare ut in scholio propof. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I , & AC , medius proportionalis. Igitur non

I crunt

erunt similes plani; ac propterea neq; proportionem habebunt, quā numeri quadrati. Exposita iā Rationali quapiā D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. ut I, ad AB, ita quadratū



6. decimi.

ex D, ad quadratū ex EF. Erūt ergo quadrata ex D, & EF, proportionē habentia, quam numerus I, ad numerum AB, cōmensurabilia; atq; adeo & lineę D, EF, cōmensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia uero I, ad AB, hoc est, quadratū ex D, ad quadratū ex EF, proportionem non

9. decimi.

6. decimi

9. decimi.

17. decimi.

9. decimi.

habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratū; erunt D, & EF, rectę inter se longitudine incōmensurabiles. Rursus per dictū coroll. fiat ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG. Erūt ergo quadrata ex EF, FG, proportionē habentia, quā numerus ad numerū, cōmensurabilia; Ideoq; & lineę EF, FG, cōmensurabiles saltem potentia. Igitur cū EF, ostensa sit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratū ex EF, ad quadratū ex FG, proportionē nō habet, quā numerus quadratus ad numerum quadratū; erūt EF, FG, longitudine incōmensurabiles. Sūt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum cōmensurabiles; Atq; idcirco tota EG, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiā esse. Quoniā est ut I, ad AB, ita quadratū ex D, ad quadratū ex EF; Et ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG; erit ex æqualitate ut I, ad AC, ita quadratū ex D, ad quadratū ex FG. Nō habet autē I, ad AC, proportionē quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionē habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; ac propterea rectę D, & FG, longitudine incōmensurabiles sunt. Quoniā autē est ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG: Est autē AB, maior, quā AC; erit & quadratū ex EF, maius quā quadratū ex FG. Sit ergo mai⁹, per lēma propos. 14. huius lib. quadrato rectę H. Ostēdem⁹ iā similiter, ut in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine cōmensurabile esse. Quoniā igitur maius nomē EF, plus pōt, quā minus FG, quadrato rectę H, sibi lōgitudine cōmensurabilis; & neutra ipsarū EF, FG, lōgitudine cōmensurabilis est expositę

RATIO

Rationali D, ut demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

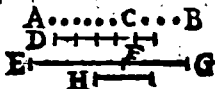
PROBL. 16. PROPOS. 52.

51.
45.

INVENIRE ex binis nominibus quartā.

REPORTIS duobus numeris AC, CB, ita ut cōpositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionē habeat, quā quadratus ad quadratū, ex ijs, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quādam D, cui longitudine cōmēsurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cū Rationali D, cōmēsurabilis

sit. Quod si reliqua cōstruantur, ut in propos. 49. ostēdemus similiter, ut ibi, totā EG, ex binis nominibus esse. Dico & quartā esse. Erit



enim rursus, ut in 49. propos. quadratū ex EF, maius quam quadratū ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodē modo, ut in 49. propos. per cōuersionē rōnis, est ut AB, ad CB, ita quadratū ex EF, ad quadratum ex H: Nō est aut AB, ad CB, ut quadratus ad quadratū; neq; quadratū ex EF, ad quadratū ex H, erit ut numerus quadratus ad numerū quadratū. Lōgitudine ergo incōmēsurabiles sūt rectæ EF, & H. Itaq; cū maius nomē EF, plus possit, quā minus FG, quadrato rectæ H, sibi lōgitudine incōmēsurabilis, & maius rursus nomē EF, lōgitudine cōmēsurabile expositæ Rōnali D; erit EG, p. defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartā. Q. d. faciendū erat.

9. decimi.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

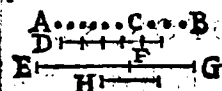
52.
46.

INVENIRE ex binis nominib⁹ quintā.

REPORTIS duobus numeris AC, CB, ut in præcedenti propos. fiat constructio, ut in propos. 50. nēpe sumatur FG, longitudine cōmēsurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo ut in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico, & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, ut in 50. propos. quadratum ex EF, maius

I 2 esse,

esse, quam quadratum ex $F G$. Sit ergo maius, quadrato rectæ H . Quoniam uero, ut in propof. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est ut $A B$, ad $C B$, ita quadratum ex $E F$, ad quadratum ex H . Ostendemus, ut in propositione antecedenti, rectas $E F$, & H , longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen $E F$, plus possit, quam minus $F G$, quadrato rectæ H , sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen $F G$, longitudine commensurable expositæ Rationali D ; erit per definitionem $E G$, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

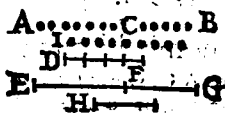


53.
47.

PROBL. 18. PROPOS. 154.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris $A C$, $C B$, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis $A B$, non sit quoque quadratus, habeatque ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. Nam hac ratione & totus ad utrumque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicumque I , qui nec ad $A B$, nec ad $A C$, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus: Hic enim ad $A B$, & $A C$, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D ; & ut I , ad $A B$, ita fiat quadratum ex D , ad quadratum ex $E F$, per coroll. propof. 6. huius lib. & reliqua fiant, ut in propof. 51.



30. septimi

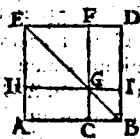
pos. 51. ostendimusq; ut ibi, rectas D, & E F, esse longitudine incommensurabiles, atq; totam E G, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, ut in 51. propos. D, & F G, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendimus quoque ut in propos. 49. per conuersionem rationes, esse ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum igitur A B, ad C B, atque adeo quadratum ex E F, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum, erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius nomen E F, plus possit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum E F, F G, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextā. Quod faciendum erat.

g. decimi.

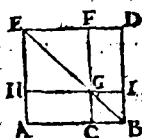
L E M M A.

Si recta linea secta sit utcumque, erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & una parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA sit recta A B, utcumq; in C. Describatur ex A B, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Dueta autem ex C, recta C F, ipsi B D, parallela, quæ diametrum secet in G, agatur per G, ipsi A B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium A C, C B; utrumq; autem rectangulorum



lorum DG, GA , comprehensum sub eisdem partibus: At uero rectangula CD, AI , sub tota AB , & parte CB , contenta. Dico DG , medium proportionale esse inter quadrata FH, CI : At CD , medium esse proportionale inter quadrata AD, CI . Quoniam ut HG , ad GI , ita est tam FH , ad DG , quam AG , ad CI ; erit ut FH , ad DG , ita AG , ad CI : Est autem AG , ipsi DG , equale. Igitur erit quoque ut FH , ad DG , ita DG , ad CI : Atque adeo DG , medium proportionale est inter quadrata FH, CI .



1. sexti.
43. primi

1. sexti.

$RVRSVS$ quia est ut AB , ad CB , ita AD , ad CD , quam AI , ad CI ; erit ut AD , ad CD , ita AI , ad CI : Est autem AI , ipsi CD , equale. Igitur erit ut AD , ad CD , ita quoque CD , ad CI . Quare CD , medium proportionale est inter quadrata AD, CI . Eodem modo erit AF , medium proportionale inter quadrata AD, FH .

54.
48.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATUR spatium AQ , sub Rationali AB , & ex binis nominibus prima AD . Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC , Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit ipsius AD , maius nomen $A E$. Erunt igitur ex defin. $A E, E D$, Rationales potentia tantum commensurabiles; & $A E$, plus poterit, quam $E D$, quadrato

drato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique
A E, expositæ Rationali A B, longitudine commensurabilis
erit. Secetur E D, bifariam in F. Quia igitur A E, plus
potest quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis; si quartæ parti quadrati ex E D, hoc est, qua-
drato ex E F, æquale parallelogrammum sub A G, G B,
contentum, per 2. lemma propos.

17. huius lib. applicitur deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. Quare A G, G E, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipsiſ A B, D C, parallelæ G H, E I, F K. Et parallelogrammo A H, æquale quadratum fiat L M: At parallelogrammo G I, æquale fiat quadratum M N; coniunganturque quadrata L M, M N, ita ad angulū M; ut latera M O, M P, unam rectam lineam conſtituant O P. Facient ergo & latera M Q, M R, unam rectam Q R, vt demonſtratum eſt a nobis ex Proclo ad propoſi-
15. lib. 1. propterea quod anguli O M Q, P M R, ad uerticem M, ſunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo L N, cum rectæ O M, M P, rectis Q M, M R, æquales ſint, ideoque & tota O P, toti Q R; ſit autem O P, ipſiſ S N, L T, & Q R, ipſiſ L S, T N, æqualis; æquilateralum erit rectangulum L N; ideoque quadratum.

Q U O N I A M uero rectangulum sub A G, G E, æquale est, per constructionem, quadrato ex E F; erit ut A G, ad E F, ita E F, ad G E; Ac propterea & ut A H, ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium proportionale est inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M, M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N, medium proportionale est T M, ex antecedenti lemmate: A Equale igitur est T M, ipsi E K. Cum ergo ipsi T M, æquale sit M S, & ipsi E K, æquale sit F C; erit & M S, ipsi F C, æquale. Quocirca totum quadratū L N, toti rectangulo A C, æquale est; atq; adeo recta O P, potest spatiū A C, con-

8. decimi.

i 4. secundi

34. primi.

17. *sexti.*

Expositio

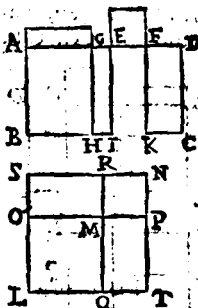
43. 36.

pripi.

tentum sub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico Q P, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

Q U O N I A M A G, G E, ostensæ sunt longitudine

16. decimi.



20. decimi.

commensurabiles; erit & tota A E, utrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem A E, cum sit maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex scholio propos. 12. huius lib. longitudine commensurabiles sunt. Atque adeo cum A B, sit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. Quare & triangula A H, G I, sub Rationalibus cetera Rationalia sunt; Ideoque

& quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Rationalia erunt. Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

Et quoniam A E, ipsi E D, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis A G; & ipsi E D, commensurabilis est longitudine E F, eius dimidia; erunt ex scholio propos. 12. huius lib. & A G, E F, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & A H, E K, eandem proportionem habentia, quam A G, E F, incommensurabilia sunt; ac proinde & L M, M T, illis æqualia, sunt incommensurabilia. Igitur & rectæ O M, M P, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T: Sunt autem & O M, M P, Rationales ostensæ. Igitur O M, M P, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, Quapropter tota O P, potens spatium A C, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

1. sexti

10. decimi.

10. decimi.

1. sexti

37. decimi.

55.

49.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

SI spatium contineatur sub Rationali,

& ex

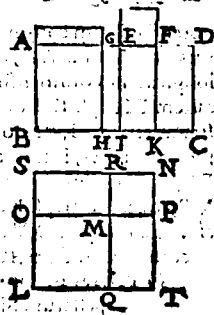
& ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus secunda A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit ipsius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit quam E D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Et denique E D, Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis. Sectetur E D, bisariam in F; & reliqua construantur, ut in antecedenti propositione. Quo facto, demonstrabimus similiter, ut ibi, rectam Q P, posse spatium A C, contentum sub Rationali A B, & ex binis nominibus secunda A D. Dico iam O P, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

Quoniam A E, longitudine incommensurabilis est ipsi E D; & E D, minus nomen existens ipsius A D, ex binis nominibus secunda, longitudine commensurabilis est Rationali A B; erunt A E, A B, longitudine incommensurabiles. Et

quia A G, G E, ostense sunt in antecedenti propositione longitudine commensurabiles; erit quoque tota A E, utraq; ipsarum commensurabilis.

Quare cum A E, maius nomen existens ipsius A D, ex binis nominibus secunda, lineæ sit Rationalis; erunt & A G, G E, Rationales; quod cum utraq; A G, G E, ipsi A E, sit longitudine commensurabilis; at vero A E, Rationali A B, longitudine incommensurabilis; erit utraq; A G, G E, eidem A B, incommensurabilis longitudine. Ac proinde tam A B, A G, quam A B, G E, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Igitur rectangula A H, G I, Media sunt, proptereaq;



13. decimi

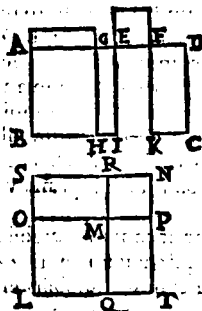
16. decimi

14. decimi

22. decimi

pterea; & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Media sunt, Ergo & rectæ O M, M P, sunt Mediæ.

10. decimi. Q V I A uero A G, G E, longitudine sunt commensurabiles; erunt & A H, H I, eandem cum illis proportionem habentia, commensurabilia; atq; idcirco & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ O M, M P, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam A E, E D, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi uero A E, ostensa est longitudine commensurabilis A G; & ipsi E D, longitudine commensurabilis est E F, eius dimidia; erunt per scholiū propo. 14. huius lib. A G, E F, longitudine incommensurabiles; Ac proinde A H, E K, eandem habentia proportionem cum ipsis, incommensurabilia sunt. Igitur & L M, M T, ipsis A H, & E K, æqualia, incommensurabilia sunt. Ideoq; & rectæ O M, M P, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T. Cum ergo ostensum sit O M, M P, Medias esse, & commensurabiles; erunt O M, M P, Mediæ



10. decimi.

10. decimi.
1. sexti.

10. decimi.

10. decimi.

10. decimi.

10. decimi.

potentia solum commensurabiles. Quoniam deniq; E D, minus nomē ipsius A D, ex binis nominibus secunda, linea est longitudine commensurabilis ipsi A B, hoc est, ipsi E I: Est autem E F, ipsi E D, quoque longitudine commensurabilis; Erunt etiam E I, E F, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum E I, Rationalis sit, erit & E F, Rationalis. Quare E K, rectangulum, Rationale est: Est autem M T, sub O M, M P, contentum ipsi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale est. Quapropter O M, M P, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, Rationalesq; continentes; atq; adeo

Q P, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo spatium continetur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

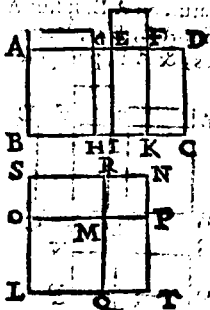
THEOR. 39. PROPOS. 57.

56.

50.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia A D. Dico recta, quæ pot spatium AC, Irrationalis esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda, Sit ipse A D, maius nomen AE. Erunt ergo A, E, E D, ex defin. Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quàm E D, quadrata recta sub longitudo commensurabilis; Et denique neutra ipsarum AE, ED, Ratio naturali exposita. AB, longitudine commensurabilis est. Secta E D, bifariam in F. reliqua omnia fiant, ut in propos. 55. Similiter ergo, ut ibi ostendimus rectam O P, posse spatium AC: Et ut in antecedenti propos. 56. rectas O M, M P, esse Medias potentia tantum commensurabiles; propterea quod



AE, Rationali AB, ponatur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem AE, ipsi AB, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam uero ED, EF, sunt commensurabiles longitudine; estq; ED, ipsi AB, Rationali, hoc est, ipsi EI, longitudine incommensurabilis; erit quoq; EF, eidem EI, longitudine incommensurabilis; Sunt autem EF, EI, Rationales, quæ EF, dimidia sit ipsius ED, Rationalis; & E I, exposita Rationali AB, æqualia. Igitur EF, EI, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; Ac propterea EK, Medium est; ideoq; & M T, æquale ipsi EK, Medium est, quod sub Medijs OM, MP, continetur. Itaque cum OP, MP, Mediarum sint potentia tantum commensurabiles, contineantur spatium Medium erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

14. decimi.

22. decimi.

39. decimi.

THEO.

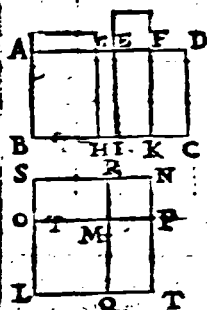
57.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

51.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit A E, ipsius A D, maius nomen. Erunt ergo ex defectu A E, E D. Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus potens, quam E D, quadrato rectæ lineæ



19. decimi.

longitudinis sibi incommensurabilis; & denique A E, ipsi A B, commensurabilis eam longitudine. Secta E D, bisariam in F, sicut reliqua omnia, ut in propos. 45. Erunt ergo A G, G E, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus ita eodem modo, ut ibi, O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam A G, G E, longitudine incommensurabiles sunt; erunt & rectangula A H, G I, eandem cum illis ha-

10. decimi.

bitia proportionem, incommensurabiles; atque adeo & quadrata L M, M N, ipsi A H, G I, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quarta, linea est longitudine commensurabilis Rationali A B; erit & A E, Rationalis; & rectangulum A I, sub ipsis contentum, Rationale. Est autem A I, æquale compositio ex quadratis L M, M N: Compositum ergo ex quadratis L M, M N, Rationale est.

20. decimi.

Per quoniam E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quarta, linea est longitudine incommensurabilis Ra-

lis Ra-

lis Rationali A B, erit & E F, ipsius dimidia eidem A B, longitudine incommensurabilis; Et est E F, Rationalis, cum sit Rationali E D, commensurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quare E K, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & M T, illi æquale, contentumq; sub O M, M P, Medium est. Quocirca cum O M, M P, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis M T, Medium; Irrationalis erit tota O P, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

22. decimi

40. decimi.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

58.

52.

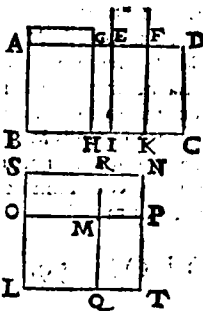
SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit ipsius A D, maius nomen A E. Erunt ergo ex defn. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus potest, quam E D, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; & denique E D, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali A B. Secta E D, bisariam, fiant reliqua eadem, quæ in propof. 55. Erunt igitur rursus A G, G E, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, ut in propof. 55. constabit rectam O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, ut in propof. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles. Et quia A B, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali A B; erunt;

19. decimi

22. decimi.

erunt A E, A B, Rationales potētia tantū commensurabiles. Quare rectangulū A I, sub ipsis contentū, Mediū est. Est autē A I, æquale cōposito ex quadratis L M, M N. Igitur & cōpositū hoc, Mediū erit. Rursus quia E D, Rōnalis ponitur lōgitudine cōmensurabilis Rōnali A B, cū sit minus nomē ipsius A D, ex binis nominibus quintæ; erit & E F, ipsius dimidia, eidē A B, cōmensurabilis lōgitudine, & Rōnalis. Quare E K, sub Rōnālibus E I, E F, lōgitudine cōmensurabilibus, Rationale est; atq; idcirco & M T, sub O M, M P, contentū Rōnale erit, cū ipsi E K, sit æquale. Quāobrē cū rectæ O M, M P, potētia incōmensurabiles sint,



20. decimi.

41. decimi.

faciantq; cōpositū quidē ex ipsarū quadratis L M, M N, Mediū; Rectangulū vero M T, sub ipsis cōtentū, Rōnale; Irrationalis erit tota O P, quę dicitur potēs Rationale & Mediū. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

59.

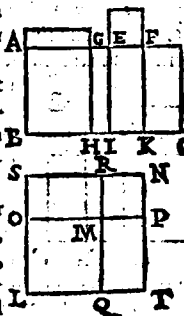
53.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta; Recta. linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus sexta A D. Dico rectā, quæ spatium A C, potest, Irrationalem esse, quę dicitur potens bina Media. Sit ipsius A D, maius nomen A E, Erunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & deniq; neutra ipsarum A E, E D, longitudine erit cōmensurabilis Rationali A B. Fiant omnia, quę in su-

in superioribus; eruntq; AG, GE, longitudinae incommensurabiles. Iam uero ostendemus similiter, ut in propos. 55. recta O P, posse spatium AC. Item, ut in propos. 58. rectas OM, MP, potentia esse incommensurabiles. Rursus, ut in antecedenti propos. erit compositum ex quadratis LM, MN, Medium. Ut autem in propos. 58. erit quoq; MT, sub OM, MP, comprehensum, Medium. Et quia duarum rectarum AB, EF, illa quidem incommensurabilis est longitudo ipsi E D; hæc uero eidem commensurabilis; erunt AE, EF, longitudine incommensurabiles. Igitur & AI, EK, incommensurabilia sunt, cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compositum ex quadratis LM, MN, quod ipsi AI, æquale est, & rectangulum MT, quod ipsi EK, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cum rectæ OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantq; & compositum ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis, erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sex-
ta, &c. Quod ostendendum erat.



19. decimi.

13. decimi.
10. decimi.
1. sexti.

42. decimi

THEOR. 43. PROPOS. 61.

60.

54.

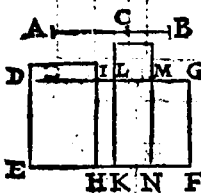
QVADRATVM, eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Si r ex binis nominib⁹ A B, cuius maius nomē AC; & ad Rōnale exposita DE, applicetur rectangulū DF, æquale quadrato ex A B, latitudinē faciēs D G. Dico D G, ex binis nomi-

45. prim.

nomi-

4. *Secundi.*



37. decimi.

16. decimi.

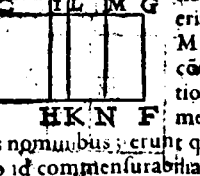
21. decimi.

22. decim

23. decimii.

13. decimi.

37. decimi.


 rectangulum D F. Secetur L G, b
 fariam in M, puncto, per quod ip
 sis L K, G F, parallela agatur M N
 erit: utrinque rectangulum L N
 M F, æquale ei, quod sub A C, C B,
 cõtinetur. Ex quoniam A C, C B, Ra
 tionales sunt potentia solum com
 menfurabiles, quod tota A B, sit ex
 binis nominibus, erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia,
 & ob id commensurabilia; quorum utrumque cum etiam co
 menfurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque composi
 tum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huius
 composito æquale, per constructionem, rectangulum D K.
 Igitur & D K, Rationale erit, quod cum applicatum sit ad
 Rationalem D E, faciat latitudinem D L, Rationalem, &
 ipsi D E, longitudine commensurabilem.
 I R O R S V S quia A C, C B, Rationales sunt solum po
 tentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis, Me
 dium, atque adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensu
 rabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit, per coroll. propo
 s. 24, huius lib. Quare L G, applicatum ad L K, Ratio
 nalem, facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K,
 hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Est au
 tem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudo
 ne, Igitur D L, L G, longitudines incommensurabiles sunt.
 Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commẽ
 furabiles, Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Di
 co & primam esse.

QVONIAM ex lemma propof. 54. huius lib. rectan-
gulum sub A. C. G. B., medium proportionale est inter qua-
drata ex A. C. C. B. erit quoque L. N., medium propor-
tionale inter D. H., I. K.; atque adeo cum rectis D. I., I. M., I. L.,
eandem

eandem rationem habeant, quam DH , LN , IK ; erit quoque recta LM , media proportionalis inter DI , IL . Quare rectangulum sub DI , IL , æquale est quadrato ex L , M . Et quia quadrata ex rectis AC , CB , commensurabilia sunt, quod AC , CB , ponuntur potentia commensurabiles, erunt & DH , IK , ipsis æqualia, commensurabilia. Igitur & rectæ DI , IL , eandem cum illis habentes rationem longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem DK , maius est, quam LF , quod & quadrata ex AC , CB , maiora sint, per lemma propos. 39 huius libri, quam rectangulum bis sub AC , CB ; erit & recta DL , maior quam LG ; cum DL , LG , eandem rationem habeant, quam DK , LF . Itaque quoniam DL , maior est, quam LG ; & ad DL , applicatur rectangulum sub DI , IL , deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex L , M , hoc est, quartæ parti quadrati ex minore LG , descripti; (ostensum enim est rectangulum sub DI , IL , æquale quadrato ex L , M .) diuiditurque DL , ad I , in partes DI , IL , longitudine commensurabiles, ut est demonstratum; poterit DL , maior plus quam LG , minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum DG , ostensa sit ex binis nominibus, & DL , maius nomen plus posse, quam LG , minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen DL , longitudine commensurabile Rationali expositæ DE ; erit ex defin. DG , ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis Medijs prima AB , cuius maius nomen AC ; & ad Rationalem DE , applicetur rectangulum DF ,
K æquale

2. sexti.

17. sexti.

10. decimi.

1. sexti.

18. decimi.

63.

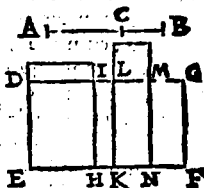
55.

45. primi

æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse secundam. Construantur eadem, quæ in propos. præcedenti, ita ut rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, C B, & utrumque ipsorum L N, M F, ei quod sub A C, C B, continetur. Quoniam igitur A C, C B, ex binis Medijs primam A B, componentes, Mediæ sunt

38. decimi.

potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex A C, C B;



16. decimi.

atque adeo rectangula ipsiæ æqualia D H, I K; commensurabilia, atque Media. Cum ergo propterea & totum D K, utriusque ipsorum D H, I K, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. D K, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E; erit eius latitudo D L, Rationalis

23. decimi.

lis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est; erit & eius duplum, nempe L F, Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem L K; erit eius latitudo L G, Rationalis ipsi

21. decimi.

L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis;

13. decimi.

erunt D L, L G, longitudine incommensurabiles. Quod cum D L, L G, ostentæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; ac propterea tota D G, ex binis nominibus est.

37. decimi.

Iam uero ut in antecedenti propos. demonstrabimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus secunda.

Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Medijs prima, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalē applicatū, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

S I T ex binis Medijs secunda A B, cuius maius nomen
A C, & ad Rationale D E, applicetur rectangulū D F, equa-
le quadrato ex A B, latitudinē faciens D G. Dico D G, esse ex
binis nominibus teripā. Constructis iisdē, quæ in propos. 61.
quoniā A C, C B, ex binis Medijs se

quoniā $A C, CB$, ex binis Medijs secundā $A B$, cōponētes, Mediæ sunt potentia solū cōmensurabiles, quæ Mediū cōtinent; Erūt quadrata ex $A C, CB$, atq; adeo rectangula ipsius æqualia $D H, I K$, cōmensurabilia, & Media. Cum ergo propter ea & totum $D K$, utriq; ipsorū $D H, I K$, sit cōmensurable; erit & ex

coroll. propos. 24. huius libri D K, Mediū; quod cum appli-
catū sit ad Rationālē D E; erit eius latitudo D L, Rationa-
lis ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Rursus quia re-
ctangulū sub A C, C B, Mediū est; erit & eius duplū L F, Me-
diū; quod cū applicatū sit ad Rationālē L K; erit latitudo
L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incō-
mēsurabilis. Et quia A C, ipsi C B, lōgitudine est incōmensu-
rabilis; estq; ut A C, ad C B, ita per lēma 3. propos. 19 huius
libri, quadratū ex A C, ad rectangulū sub A C, C B; erit quo-
que quadratū ex A C, rectangulo sub A C, C B, incōmensu-
rabilē. Est autē quadrato ex A C, cōmensurabile cōpositum
ex quadratis rectarum A C, C B, quod quadrata ex A C, C B,
commensurabilia sint, quippe cum rectę ipsę potentia pō-
nuntur cōmensurabiles; & rectangulo sub A C, C B, cōmen-
surabile est eius duplum, nimirū rectangulum bis sub A C,
C B. Igitur cōpositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc
est, rectāgulū D K, incōmēsurabile est rectāgulo bis sub A C,
C B, hoc est, rectāgulo L F, per ea, quę in scholio propos. 14.
huius libri conscripsimus. Quare rectę D L, L G, eandem

K 2 rationem

62.

56.

45. primi

39. decimi.

I 6. decimi.

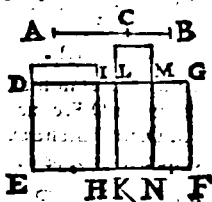
23. dec imi.

23. *decimus*

10. decimi.

16. decimi.

10. *decimi.* rationem cum D K, L F, habentes, longitudine sunt incommensurabiles: sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; ac
37. *decimi.* propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in



propos. 61. ostendimus DL, esse maius nomen, posseque plus, quā minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quā ob rem cum D L, maius nomen plus possit, quā L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, L G, Rationali exposita DE,

sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Medijs secunda, &c. Quod erat demonstrandum.

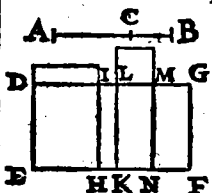
63.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

57.

QVADRATVM Maioris ad Ratio

nalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



SIT Maior A B, cuius maius nomen AC; & ad Rationale D E, applicetur rectangulū D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartā. Construantur eadē prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B,

Maiorem A B, componentes potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum uero sub ipsis, Medium; erit quoque D K, composito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale existens, Rationale; At uero L F, duplum eius, quod sub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem D E, est applicatum; erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cum L F, Medium sit

appli-

45. *primi*

40. *decimi.*

21. *decimi.*

applicatum ad Rationale L K, erit L G, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipsi D E, commensurabilis sit longitudine; hæc uero eidem D E, longitudine incommensurabilis; incommensurabiles erunt longitudine D L, L G: ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L G, Rationales potentia tantum commensurabiles; ideoque D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in propof. 61. demonstrabimus rectangulū sub D I, I L, æquale esse quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommensurabilia sunt, quod rectæ A C, C B, potentia incommensurabiles sunt; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommensurabilia; atque adeo & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam uero ut in propof. 61. ostendimus, D L, maior est, quam L G; & ad D L, applicatum est rectangulū sub D I, I L, quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam D L, ad I, in partes longitudine incommensurabiles; poterit D L, plus quam L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa D L, (maius nomen ipsius D G, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratū ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

S I T recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomen A C; & ad Rationalem D E, rectangulum D F, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinē faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam esse. Fiant eadem

K 3 omnino

23. decimi.

13. decimi.

37. decimi.

10. decimi.

19. decimi.

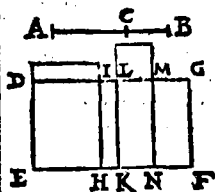
64.

58.

45. primi

41 decims.

omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, cõponentes AB, potentem Rationale ac Medium, potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis con-



tentum, Rationale; erit DK , æquale cōposito ex quadratis rectarum AC, CB , Mediū; & LN , æquale ei, quod sub AC, CB , continetur, atque adeo ipsius duplum LF , Rationale. Igitur Medium DK , applicatum ad Rationalem DE , facit latitudinem $D L$, Rationale; & longitudinem Rationali DE , incommensurabile: At uero Rationale LF ,

23. decimi.

21. decimi.

13. decimi.

37. decimi.

ad Rationale L K, applicatum, facit latitudinē L G, Rationale longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi D E, cōmensurabilem. Quia igitur duarū rectarū DL, LG, hæc quidem longitudine cōmensurabilis est Rationali D E, illa uero longitudine incommensurabilis; erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; Ac propterea D G, est ex binis nominibus. Iam uero; ut in propos. 61. ostendemus rectangulum sub D I, IL, æquale esse quadrato ex LM; & ut in antecedēti propos. DL, maius nomē esse, atq; posse plus, quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cū & minus nomen L G, oftensum sit expositæ Rationali D E, longitudine cōmensurabile; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

65.

59.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

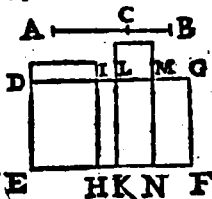
45. primi.

Si t bina Media potens recta A B, cuius maius nomen
AC; & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F,
æquale

æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus sextam. Constructis iisdem quæ in propos. 61. quoniam rectæ A C, C B, componen-
tes ipsam A B, potentem bina Media, potentia incommen-

42. decimi.

surabiles sunt, faciuntq; & cõpo-
situm ex ipsarum quadratis Me-
dium, & quod sub ipsis cõtinetur,
Medium, & in. õmensurable cõ-
posito ex quadratis ipsarum, erit
tam D K, illi composito æquale,
quam L F, rectangulo bis sub A C,
C B, æquale, Medium. Et quia
Media D K, L F, applicata sunt ad



Rationalem D E; erunt eorum latitudines D L, L G, Ratio-
nales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Quoniã uero
cõpositum ex quadratis rectarum A C, C B, incommensu-
rabile est rectangulo sub A C, C B; eadem uero rectangulo
sub A C, C B, cõmensurable est rectangulũ bis sub A C, C B,
cum hoc illius sit duplum; Erit cõpositum ex dictis quadra-
tis hoc est D K, incõmensurable rectangulo bis sub A C, C B,
hoc est, ipsi L F; Ac propterea rectæ D L, L G, eandẽ rationẽ
habentes cum D L, L G, longitudine incõmensurabiles sunt.
Rationales ergo sunt D L, L G, potentia solum cõmensura-
biles; Ac proinde D G, est ex binis nominibus. Tam uero, ut
in præcedenti propos. demonstrabimus D L, esse maius no-
men, posseq; plus quam minus L G, quadrato rectæ sibi lon-
gitudine incõmensurabilis. Cum ergo ostensum sit, neutrà
ipsarum D L, L G, longitudine commensurabilem esse expo-
sitæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus
sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, &c.
Quod erat ostendendum.

23. decimi.

42. decimi.

13. decimi.

10. decimi

37. decimi.

THEOR. 49. PROPOS. 67.

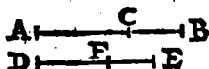
66.

60.

E I, quæ est ex binis nominibus, longitu-
dine commensurabilis, & ipsa ex binis no-
minibus est, atque ordine eadem.

Si ex binis nominibus quæcunque A B, diuisa in sua nomina, quorum maius A C, & C B, minus, sitque recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B.

Fiat ut tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F; erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, ut tota A B, ad totam D E.



12. *sexsi.*

19. *quinti*

10. *decimi.*

37. *decimi.*

10. *decimi.*

37. *decimi.*

15. *decimi.*

12. *decimi.*

14. *decimi.*

Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E; erit & D F, ipsi A C; & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis: sunt autem A C, C B, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt & D F, F E, potentia solum commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; A C propterea D E, ex binis nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quam C B, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem A C, plus potest quam C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudine Rationali exposita, ita ut A B, sit ex binis nominibus prima; erit & D F, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum utraque, & Rationalis & D F, eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si uero C B, exposita Rationali sit longitudine commensurabilis, ut A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali exposita longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis exposita Rationali, ita ut A B, sit ex binis nominibus ter tia; erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis exposita Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

At si A C, plus possit, quam C B, quadrato rectæ sibi
longi

longitudine incommensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, uel quintam, uel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, uel quinta, uel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

15. decimi.

S C H O L I O N.

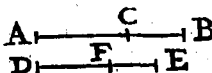
Q U O D si recta D F, potentia tantum commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodẽ modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus ubique: commensurabilis potentia tantum:) & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile exposita Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudines propterea quod non utraque, nempe exposita Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem, commensurabilis longitudine; At uero D F, potentia tantum, ex hypothesi. Immo uero, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, fieri nulla ratione potest, ut D E, illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

S I T enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, diuisa in sua nomina ad E; sitque ei commensurabilis potentia tantum D E, quam quidem, ut in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, ut D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit utraque ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumque maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali exposita commensurabilis longitudine. Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est ut A C, ad D F, ita A B, ad D E, erant propterea & A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D F, ipsi A B, potentia

12. decimi

10. decimi

potentia solum commensurabilis. Non ergo utraque AB , DE , ex binis nominibus prima est. Eodem modo neque utraque ex binis nominibus quarta erit. Sed neque secunda, vel quinta. Effet enim utrunque nomen minus CB , FE , ex defn. longitudine commensurabile Rationali exposita, atque adeo & inter se. Igitur & totæ AB , DE , longitudine, forent commensurabiles. quod non ponitur.



S E M P E R tamen verum est, si AB , est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE , ipsi AB , potentia solum commensurabilem, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC , plus quam CB , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit ut AC , ad CB , ita DF , ad FE ; poterit quoque DF , plus quam FE , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defn. erit DE , ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB , est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut AC , plus possit, quam CB , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit quoque DF , plus quam FE , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit ut AC , ad CB , ita DF , ad FE . Igitur ex defn. erit DE , ex binis nominibus eia quarta, vel quinta, vel sexta, licet nō eadē ordine ipsi AB .

In sequentibus autem quinque propositionibus necessario erit DE , eadem ordine ipsi AB , quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

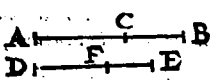
67.
61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI , quæ est ex binis Medijs, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Medijs est, atque ordine eadem.

S I T ex binis Medijs AB , quæcunque diuisa in sua nomina, quorum A C , maius, & C B , minus, sitque ei recta DE , longitudine commensurabilis. Dico DE , quoque ex binis Medijs esse, & ipsi AB , ordine eandem. Fiat ut tota AB ,

ad

ad totā D E, ita ablata A C, ad ablata D F. Erit ergo & re-
 liqua C B, ad reliquā F E, ut tota A B, ad totam D E. Et quo-
 niam ipsi A B, ponitur longitudine commensurabilis D E;
 erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B,
 longitudine commensurabilis. 
 Sunt autem A C, C B, Mediae. Igi-
 tur & D F, F E, illis commensura-
 biles, Mediae sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B,
 ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sūt
 autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt
 & D F, F E, solum commensurabiles potentia. Cum ergo
 & ostensae sint Mediae; erunt D F, F E, Mediae potentia tan-
 tum commensurabiles; Atque idcirco D E, erit ex binis Me-
 dijs. Dico & ipsi A B, eandem esse ordine. Quoniam est
 ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Est autem ut A C, ad C B,
 ita quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, & ut
 D F, ad F E ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F,
 F E, ex lemma 3. propos. 19. huius libri; erit quoque ut
 quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, ita quadra-
 tum ex D F, ad rectangulum sub D F, F E; & permutando
 ut quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulū
 sub A C, C B, ad rectangulum sub D F, F E. Commensura-
 bile est autem quadratum ex A C, quadrato ex D F; quod
 recte A C, D F, commensurabiles ostensae sint longitudine.
 Igitur & rectangulum sub A C, C B, rectangulo sub D F,
 F E, commensurabile est. Quare si rectangulum sub A C,
 C B, fuerit Rationale, ita ut A B, sit ex binis Medijs pri-
 ma; erit & rectangulum sub D F, F E, Rationale, cum illi
 sit commensurabile; atque adeo & D E, ex binis Medijs pri-
 ma erit. Si uero rectangulum sub A C, C B, fuerit Me-
 dium, ita ut A B, sit ex binis Medijs secunda; erit & rectan-
 gulum sub D F, F E, ei commensurabile, Medium, ex coroll.
 propos. 24. huius lib. Ac propterea & D E, erit ex binis Me-
 dijs secunda. Quare ei, quae ex binis Medijs, longitudine com-
 mensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

12. sexti.
 19. quinti.
 10. decimi.
 24. decimi.
 38. decimi.
 10. decimi.
 38. vel 39. decimi.
 10. decimi.
 38. decimi.
 39. decimi.

SCHOLION.

EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam
 D E,

D E, si potentia tantum fueris commensurabilis ipsi A E, quæ est ex binis Medijs; ex binis Medijs esse, atque ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus ubique: commensurabilis potentia tantum, &c. ut manifestum est.

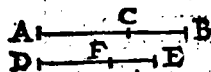
68.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

62.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

S I T linea Maior A B, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E,



Maiorem esse. Fiant enim eadẽ, quæ superius; ita ut partes A C, C B, ad partes D F, F E, eandem

habeant rationem, quam tota A B, ad totam D E. Quoniam igitur A B, D E, commensurabiles sunt uel longitudine & potentia, uel potentia tantum; erunt quoque tam A C, D F, quam C B, F E, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E, erit ut quadratum ex A C, ad quadratum ex C B, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex F E; & componendo ut compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ad quadratum ex C B, ita compositum ex quadratis rectarum D F, F E, ad quadratum ex F E; Et conueniendo ut quadratum ex C B, ad compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ita quadratum ex F E, ad compositum ex quadratis rectarum D F, F E; Et permutando ut quadratum ex C B, ad quadratum ex F E, ita compositum ex quadratis rectarum A C, C B, ad compositum ex quadratis rectarum D F, F E. Commensurabile est autẽ quadratum ex C B, quadrato ex F E, quod rectæ C B, F E, ostensa sine commensurabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile est composito ex quadratis rectarum D F, F E. Est autem compositum illud Rationale, cum rectæ A C, C B, component Maiorem A B. Igitur

10. decimi.

22. sexti.

10. decimi.

40. decimi.

tur

tur & hoc Rationale est, ex 9. defin.

R v r s v s quia est ut AC , ad CB , ita DF , ad FE ; Ut autem AC , ad CB , ita est quadratum ex A , C , ad rectangulum sub AC , CB , & ut DF , ad FE , ita quadratum ex D , F , ad rectangulum sub DF , FE , ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque ut quadratum ex A , C , ad rectangulum sub A , C , CB , ita quadratum ex D , F , ad rectangulum sub D , F , FE : et permutando ut quadratum ex AC , ad quadratum ex D , F , ita rectangulum sub A , C , CB , ad rectangulum sub D , F , FE . Est autem quadratum ex AC , quadrato ex D , F , commensurabile, quod rectæ AC , DF , ostensæ sint commensurabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum. Igitur & rectangulum sub A , C , CB , rectangulo sub D , F , FE , commensurabile est. Est autem rectangulum sub AC , CB , Medium. Igitur & rectangulum sub D , F , FE , illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam uero est ut AC , ad CB , ita DF , ad FE ; suntque AC , CB , potentia incommensurabiles, cum componant Maiorem AB ; Erunt quoque D , F , FE , potentia incommensurabiles. Itaque cum D , F , FE , sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, ut ostensum est; erit tota DE , Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

10. decimi.

40. decimi.

40. decimi.

10. decimi.

40. decimi.

THEOR. 52. PROPOS. 70.

69.

63.

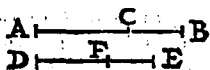
RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

Sit recta AB , potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C , eique commensurabilis DE , siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE , esse potentem Rationale ac Medium. Constructis iisdem, quæ supra, ostendemus, ut in præcedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC , CB , commensurabile esse composito

sito

41. de. imi.

sito ex quadratis rectarum DF, FE. Est autem illud compositum Medium, cum rectæ AC, CB, component ipsam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. pro



pos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Mediū est. Eodem modo, ut in eadem propos. antecedenti, erit rectan-

41. decimi.

gulum sub AC, CB, quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub DF, FE; atque adeo & rectangulum sub DF, FE, Rationale est, ex 9. defin. Denique ut in eadem superiori propos. erunt DF, FE, potentia incommensurabiles. Quare cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale, ut demonstratum est; erit tota DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

41. decimi.

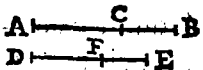
70.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

64.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse bina Media potentē. Constructis istis, quæ supra, ostendemus, ut in propo-



69. compositū ex quadratis rectarū AC, CB, cōposito ex quadratis rectarū DF, FE, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub

42. de cimi.

AC, CB, esse cōmensurabile rectangulo sub DF, FE. Cū ergo tā compositū ex quadratis rectarū AC, CB, quam rectangulū sub AC, CB, Medium sit; erit etiam ex coroll. propo. 24. huius libri, tā cōpositum ex quadratis rectarū DF, FE, quam rectangulū sub DF, FE, Mediū. Sed & DF, FE, potentia incōmensurabiles sunt, ut prius. Postremo quia cōpositum ex quadratis rectarū AC, CB, & rectangulum sub

AC,

A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod A B, bina Media potest: Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum D F, F E; & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cum rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Mediū; & quod sub ipsis continetur, Mediū; incommensurabileq; compositum ex quadratis ipsarum; erit D E, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendū.

42. decimi.

42. decimi.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

71.
65.

SI Rationale & Medium componatur, quatuor Irrationales fiunt, uel ea, quæ ex binis nominibus, uel quæ ex binis Medijs prima, uel Maior, uel Rationale ac Mediū potens.

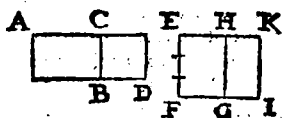
SIT Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse uel ex binis nominibus, uel ex binis Medijs primam, uel Maiorem, uel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, uel maius quam C D, uel minus: Aequale siquidem non erit; alias cum A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo



maius, & exposita Rationali E F, applicetur ad eā rectangulū E G, æquale ipsi A B; & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, ut totum E I, totū A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium; erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium: quæ cum applicentur ad

43. primi

21. *decimi.* Rationalem EF; erit EH, Rationalis, & ipsi EF longitu-
 23. *decimi.* dine commensurabilis; At uero HK, Rationalis, & eidem



EF, longitudine incommen-
 surabilis. Rursus quia EG,
 HI, incommensurabilia
 sunt, ut constar ex definitio-
 nibus; quod EG, Rationa-
 le sit, at HI, Irrationale,
 nempe Mediū, erunt EH,

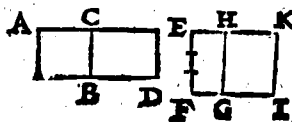
10. *decimi.* HK, eandem cum illis habentes rationem incommensura-
 biles longitudine. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia

37. *decimi.* solum commensurabiles; Ac propterea EH, ex binis no-
 minibus est. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD,
 hoc est, EG, quam HI; erit quoque EH, maior quam
 1. *sexti.* HK, cum EH, HK, eandem rationem habeant, quā EG,
 HI. Iam uero maius nomen EH, plus poterit quam mi-
 nus HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis,
 uel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, qua-
 drato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit EK, ex
 defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen
 ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF.
 Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali
 EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & spatium
 AD, compositum ex Rationali AB, & Medio CD, Irra-
 tionalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

55. *decimi.* Si uero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ sibi
 longitudine incommensurabilis; erit EK, ex binis nomini-
 bus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen ostensum sit
 longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta
 potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis
 nominibus quarta EK, atque adeo & spatium AD, Irra-
 tionalis est, quæ uocatur Maior.

38. *decimi.* Si t. secundo AB, minus quam CD; & eadem con-
 struantur, quæ prius. Erit ergo, ut prius, EK, ex binis no-
 minibus, & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et
 quia AB, minus est, quam CD, hoc est, EG, quam HI;
 erit quoque recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rur-
 sus HK, maius nomen ipsius EK, quæ est ex binis nomini-
 bus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectæ longi-
 tudine

radine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit H K, quam E H, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit E K, ex binis nominibus secunda, cum



E H, minus nomen commensurable sit longitudine Rationali E F, ut ostensum est. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis

nominibus secunda E K, atq; adeo & spatium A D, ex Rationali A B, & Medio C D, compositum, Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Medijs prima.

56. decimi.

Si vero H K, plus possit quam E H, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; erit E K, ex binis nominibus quinta, cum E H, minus nomen ostensum sit longitudine commensurable Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quinta E K, atq; adeo & spatium A D, Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

59. decimi.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

72.

66.

SI duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs secunda, vel bina Media potens.

COMPONANTUR duo Media incommensurabilia A B, C D. Dico rectam, quæ potest totum spatium A D, esse vel ex binis Medijs secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus A B, vel maius, quam C D, vel minus: A Equale siquidem non erit; alias essent A B, C D, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia A B, C D, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt

L

&

10. decimi.

23. decimi.

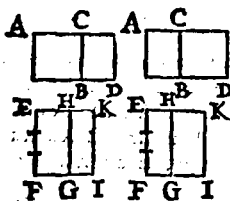
37. decimi.

47. decimi.

60. decimi.

23. decimi.

& spatia E G, H I, Media & incōmensurabilia; cum illis sint æqualia. Igitur rectæ E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtræque (cum E G, H I, Media sint, applicenturque ad Rationalem



E F.) Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis, Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solum commensurabiles; ac propterea E K, ex binis nominibus est. Quoniam vero A B, maius ponitur quam C D; erit ut in antecedenti propos. E H, maius nomen ipsius E K. Poterit ergo plus quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum utrunque nomen E H, H K, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali E F; erit E K, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus tertia E K, atque adeo & spatium A D, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

Si vero E H, plus possit quam H K, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum utrunque nomen E H, H K, longitudine sit incommensurabile Rationali E F; erit E K, ex binis nominibus sexta, ut constat ex defin. Recta igitur potens spatium E I, siue spatium A D, Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

Quod si A B, minus sit, quam C D; non aliter propositum concludemus, ut ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se incōmensurabilia componantur, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Ex his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquis ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Media, neque inter se easdem esse.

Nam si quadratum Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

61. decimi.

ET quadratum eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

62. decimi.

QUADRATUM deinde eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

63. primi.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

64. decimi.

QUADRATUM autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

65. decimi.

POSTremo quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

66. decimi.

ITAQUE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eadem ex binis nominibus; perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hætenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIUM.

HACTENUS, egit Euclides de septem senarijs.

IN primo, qui continetur propof. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propof. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuisonibus, docens singulas in singulis dumtaxat punctis diuidi posse.

IN tertio deinde contento propof. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, uidelicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta.

IN quarto, quem absoluit propof. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quenam lineæ Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, uel ex bi-

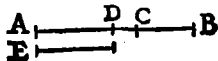
nis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

I N quinto autem, quem reperies in propo⁷ 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

I N sexto vero, qui quinque propo⁷ nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absolvitur, demonstravit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

I N septimo deniq; contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicavit rursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

R E P E R I T U R autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusvis lineæ Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit.



S I T enim quæcunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus $A B$, cuius maius nomen $A C$;

& dividatur $A B$, bifariam in D ; & eius dimidia $A D$, vel $D B$, æqualis sumatur E . Dico E , mediam esse, secundum Analogiam Arithmeticam, inter $A C$, $C B$: & E , esse quoque ex binis nominibus. Quoniam $A C$, superat dimidiam $A D$, recta $D C$; & dimidia $D B$, superat ipsam $C B$, eadem recta $D C$; perspicuum est, dimidiam ipsius $A B$, nempe E , esse mediam proportionalem inter $A C$, $C B$, in Analogia Arithmetica.

R V R S V S quia E , commensurabilis est longitudine rectæ $A B$, cum hæc illius sit dupla; erit & E , Irrationalis eadem ipsi $A B$, ut in sexto senario est demonstratum.

I D E M ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

S E Q V V N T U R iam septem alij senarij, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex alijs lineis Irrationalibus, quæ per deductionem generantur, quæ in præcedentibus septem senarijs de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM
per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

73.
68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATUR a Rationali AB , Rationalis AC , potentia solum commensurabilis ipsi AB . Dico reliquam BC Irrationalem esse. Quoniam per lemma 3. propos. 9. huius lib. est ut AB , ad AC , ita quadratum ex AB , ad rectangulū sub AB , AC : Et sunt



AB , AC , longitudine incommensurabiles; erunt incommensurabilia quadratum ex AB , & rectangulum sub AB , AC . Sed quadrato ex AB , commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB , AC ; (Cum enim AB , AC ; potentia ponantur commensurabiles; erunt quadrata ex AB , AC , commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC .) rectangulo vero sub AB , AC , commensurabile est rectangulum sub AB , AC , bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB , AC , & rectangulum sub AB , AC ; bis contentum, incommensurabilia sunt, ut in scholio propos. 14. huius libri demonstraui. Est autem compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC . Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB , AC , per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC , incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB , AC , sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AC , linea Rationali descripto;) erit quadratum ex BC , Irrationale; atq; adeo & recta ipsa BC , Irratio-

10. decimi.

16. decimi.

7. secundi.

rationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

POTUISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

37. decimi.

NAM cum AB, AC , sint Rationales potentia tantum commensurabiles; erit composita ex A — C — B ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB , & minus AC . Auferitur igitur AC , minus nomen ex maiori nomine AB , ut relinquatur Apotome BC .

74.
69.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

16. decimi.

DETRAHATUR a Media AB , Media AC , potentia solum commensurabilis ipsi AB . sitq; rectangulum sub AB, AC , Rationale. Dico reliquam BC , esse Irrationalem. Quoniam AB, AC , potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC , commensurabilia; atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit.

erit quadrato ex AC . Est autem quadratum ex AC , Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. prop. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB , AC , Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB , AC , ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB , AC , Rationale. Igitur incommensurable est compositum ex quadratis rectarum AB , AC , rectangulo bis sub AB , AC . Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale sit rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC ; erit quoque rectangulum bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC , incommensurable rectangulo bis sub AB , AC . Quare & rectangulum bis sub AB , AC , & quadratum ex BC , incommensurabilia sunt. Existent ergo rectangulo bis sub AB , AC , Rationali; erit quadratum ex BC , Irrationale; ideoque & recta BC , Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia uidelicet relinquitur post detractorem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori nomine, ut in scholio sequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotomæ prima. Quod ostendendum erat.



7. secundi.

17. decimi.

SCHOLIUM.

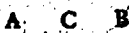
POTVISSET hæc propositio proponi hæc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CUM enim AB , AC , sint Mediæ potentia solum com-

38. decimi.

incommensurabiles, continetur; Rationale, erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomen, ad B, & minus A C. Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori B B, ut relinquatur B C, Media Apotome prima.



75.

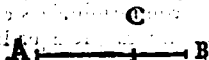
70.

THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRACTATUR a Media A B, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B, sitque rectangulum sub A B, A C, Medium. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam quadrata ex A B, A C, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt, erit & compositum ex ipsis

26. decimi.



utrique ipsorum commensurabile: Est autem utrumque ipsorum Medium, quod & rectæ A B, A C, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, utrique commensurabile. Medium est, ex coroll. propof. 24. huius lib.

7. secundi.

Rursus quia rectangulum sub A B, A C, Medium ponitur, erit & eius duplum, rectangulum uidelicet bis sub A B, A C, ex coroll. propof. 24. huius lib. Medium. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale sit rectangulo bis sub A B, A C, una cum quadrato ex B C; superabit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium est, rectangulum bis sub A B, A C, quod etiam Medium est, quadrato ex B C. Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale est. ergo Irrationale, & ipsa recta B C, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquatur post deductionem minoris nominis eius, quæ ex binis

27. decimi.

nis Medijs secunda, a maiori nomine, ut ex scholio sequenti apparebit. Si igitur a Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Hoc etiam theorema ita potuisset proponi.

Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome secunda.

Quoniam AB, AC , Media sunt potentia tantum commensurabiles, continentq; Medium; erit composita ex ipsis Irrationalis, qua ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius nomen AB , & minus AC . Auferatur igitur AC , minus nomen ex maiori AB , ut relinquatur BC , Media Apotome secunda.

39. decimi.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

76.
71.

Si a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

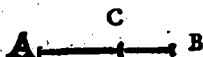
Detrahatur a recta AB , recta AC , potentia ipsi AB , incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC , Rationale; rectangulum vero sub AB, AC , Medium. Dico reliquam BC , Irrationalem esse. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AB, AC , Rationale est; rectangulum uero sub AB, AC , atq;

adco,

10. defin.

7. secundi

10. defin.



adeo, ex coroll. propof. 24. huius lib. & ei cōmenfurabile, hoc est, rectangulū bis sub AB, AC, Mediū, hoc est, Irrationale; erit cōpositū ex quadratis rectarū AB, AC, in cōmenfurabile rectangulo bis sub AB, AC. Est autē cōpositū ex quadratis rectarū AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, una cum quadrato ex B C. Igitur & cōpositum ex quadratis rectarū AB, AC, per coroll. propof. 17. huius lib. reliquo quadrato ex B C, incommensurabile erit. Ponitur autem cōpositum ex quadratis rectarū AB, AC, Rationale. Igitur quadratum ex B C, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea B C, Irrationalis. vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris, a maiori nomine, ut in scholio frequenti dicemus. Si igitur a recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

SI C etiam theorema hoc poterat proponi.

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

40. decimi. NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt cōpositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: erit cōposita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusq; maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, ut relinquatur Minor BC.

77.

72.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota

tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATUR ex recta AB , recta AC , potentia ipsi AB , incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC , esse Irrationalem. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AB , AC , Medium est,



hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB , AC , atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB , AC , Rationale; erit compositum ex quadratis rectarum AB , AC , incommensurable rectangulo bis sub AB , AC . Est autem compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC . Igitur & rectangulum bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC , incommensurable est rectangulo bis sub AB , AC . Sunt ergo & rectangulum bis sub AB , AC , & quadratum ex BC , incommensurable. Cum ergo rectangulum bis sub AB , AC , Rationale sit; erit quadratum ex BC , Irrationale, & recta BC , Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB , AC , quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB , AC , quod Medium existit. Siquidem a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua, &c. Quod ostendendum erat.

10. defn.

7. secundi.

17. decimi.

10. defn.

SCHOLION.

Hoc etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI a maiori nomine eius , quæ Rationale ac Medium potest , minus nomen auferatur ; Reliqua Irrationalis est . Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens .

CUM enim AB, AC , sint potentia incommensurabiles , quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis . Medium ; quod autem sub ipsis continetur , Rationale ; erit composita ex ipsis Irrationalis , quæ nominatur Rationale ac Medium potens , cuius maius nomen est AB , minus autem AC . Auferatur igitur minus nomen AC , a maiori AB , ut BC , cum Rationali Medium totum efficiens relinquantur .



41. decimi.

78.

73.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti , quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis , Medium ; & quod sub ipsis continetur , Medium , incommensurableq; composito ex quadratis ipsarum : Reliqua Irrationalis est . Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens .

DETRAHATUR ex recta AB , recta AC , potentia ipsi AB , incommensurabilis ; Sitq; tam compositum ex ipsarum quadratis , quam rectangulum sub ipsis , Medium , incommensurableq; composito ex ipsarum quadratis . Dico reliquam BC , esse Irrationalem . Quoniam compositum ex quadratis rectarum AB, AC , æquale est rectangulo bis sub AB, AC , una cum quadrato ex BC , superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC , quod



7. secundi

quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC , quod ex coroll. propof. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC , continetur; sit commensurable) quadrato ex BC . Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC , Rationale est. ergo Irrationale, & recta ipsa BC , Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC , quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC , quod Medium etiam est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

27. decimi.

SCHOLION.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QUONIAM cum AB, AC , sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum, erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB , & minus AC . Auferatur igitur minus nomen AC , ex maiori AB , ut relinquatur BC , cum Medio Medium totum efficiens.

42. decimi.

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam,

qui

qui inter secundam magnitudinem & quartam .

S I N T quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH , sitq; IB , excessus inter AB, CD , aequalis excessui KF , inter EF, GH . Dico eundem esse excessum inter AB, EF , qui inter CD, GH . Quoniam IB , excessus est inter $AB, \& CD$; erit AI , ipsi CD , aequalis . Eodem modo aequalis erit EK , ipsi GH . Idem igitur excessus erit inter $AI, \& EK$, qui inter $CD, \& GH$; cum haec magnitudines illis sint aequales, singulae singulis . Est autem totorum AB, EF , ex pronuntiato 15. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK ; quod IB, KF , aequales ponuntur . Igitur idem quoque excessus erit inter $AB, \& EF$, qui inter $CD, \& GH$. quod est propositum .



sum inter AB, EF , qui inter CD, GH . Quoniam IB , excessus est inter $AB, \& CD$; erit AI , ipsi CD , aequalis . Eodem modo aequalis erit

EK , ipsi GH . Idem igitur excessus erit inter $AI, \& EK$, qui inter $CD, \& GH$; cum haec magnitudines illis sint aequales, singulae singulis . Est autem totorum AB, EF , ex pronuntiato 15. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK ; quod IB, KF , aequales ponuntur . Igitur idem quoque excessus erit inter $AB, \& EF$, qui inter $CD, \& GH$. quod est propositum .

COROLLARIUM.

Ex his constat, quatuor magnitudines Arithmeticae Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticae Analogiam . quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticae habeant .

79.

74.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

APOTOMAE una tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti .

S I T Apotome AB ; congruens autem ei Rationalis BC ,

B C, potentia solum toti A C, commensurabilis. Dico ipsi A B, aliam Rationalem non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis B D, ita ut B D, ipsi A D, sit potentia solum commensurabilis. Et quia B C, $\overline{A \quad B \quad C \quad D}$

Rationalis est; erit & A C, illi solū potētia cōmēsurabilis, Rōnalis. Rōnales ergo sunt A C, B C, potētia tantum commensurabiles. Eodem modo erunt & A D, B D, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum bis sub A C, B C, qui inter compositum ex quadratis rectarum A D, B D, & rectangulum bis sub A D, B D; (superat enim compositum ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis sub A C, B C, quadrato ex A B; quod compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale sit rectangulo bis sub A C, B C, vna cum quadrato ex A B. Et eodem modo compositum ex quadratis rectarum A D, B D, superat rectangulum bis sub A D, B D, quadrato eodem ex A B; cum & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, æquale sit rectangulo bis sub A D, B D; vna cum quadrato ex A B.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. quod utrunque Rationale sit. (Nam cum A C, B C, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utriusque illorum commensurabile est, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium Rationale est. Et quia rectangulum sub A C, B C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe

7. secundi.

7. secundi.

16. decimi.

22. decimi.

27. *decimi*. nempe rectangulum bis sub A C, B C. Medium. Eadem-
que ratione Medium erit rectangulum bis sub A D, B D.
Medium autem non superat Medium Rationale. Igitur
excessus inter rectangulum bis sub A C, B C; & rectan-
gulum bis sub A D, B D, Rationale spatium non est.
Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum.
Ergo ipsi A B, aka Rationalis non congruus, præter
B C, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apo-
tomæ igitur una tantum congruit, &c. Quod erat osten-
dendum.

80.

75.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIAE Apotomæ primæ una tan-
tum congruit recta linea Media; potentia
solum commensurabilis existens toti, &
cum tota Rationale continens.

Si t Media Apotomæ prima A B; & ipsi congruat B C,
Media toti A C, potentia solum commensurabilis, & rectan-
gulum sub A C, B C, sit Rationale. Dico ipsi A B, aliam
Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum com-
mensurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Si enim fie-
ri potest, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tan-
tum commensurabilis; sitq; rectangulū
sub A D, B D, Rationale. Et quia B C,
Media est potentia solum ipsi A C, commensurabilis; erit

24. *decimi*

& A C, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo
sunt A C, B C, potentia tantum commensurabiles. Simili-
ter & A D, B D, Mediæ erunt potentia solum commensu-
rabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum
ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex qua-
dratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub
A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, ut in propos.
præcedenti ostensum est. Est autem excessus inter hæc re-
ctangula, ex scholio propos. 27. huius lib. spatium Ratio-
nale; quod utrunq; sit Rationale. (cum enim rectangulum
sub

sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurable, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub A D, B D; Igitur & ex illis inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ A C, B C, Mediarum sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utriusque ipsorum commensurable est, atque adeo & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quocumque Medium erit compositum ex quadratis rectarum A D, B D. Medium autem non superat Medium Rationale. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediarum igitur Appotomæ primæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

16. decimi.

27. decimi.

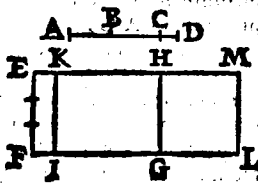
THEOR. 64. PROPOS. 82.

81.

76.

MEDIAE Apotomæ secundæ una tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediarum Apotome secundæ A B, cui congruat Media B C, toti A C, potentia tantum commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia B D, Media toti A D,



M potentia

45. primi

7. secundi.

24. decimi.

16. decimi.

23. decimi.

23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub:
 AD, BD , Medium. Exponatur Rationalis EF , ad quam
applicetur rectangulum EG , æquale composito ex qua-
dratis rectarum AC, BC ; & ad eandem BF , aliud EI paph-
 EG, EI compositum æquale quadrato
 AB . Et denique aliud
 EL , æquale composito ex
quadratis rectarum AD, BD .
Quoniam igitur composito
ex quadratis rectarum AC, BC , æquale est rectangulo
bis sub AC, BC ; una cum
quadrato ex AB ; erit EG , æquale ei, quod bis continetur
sub AC, BC . Eodemque modo erit KL , æquale ei, quod bis
continetur sub AD, BD . Et quoniam AC, BC Medie sunt,
& potentia commensurabiles; (cum enim BC , Media ponatur,
erit & AC ipsa potentia commensurabilis, Media) erunt
& earum quadrata Media, & commensurabiles. Ergo & compositum
ex ipsis commensurabile est utrique eorum;
atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib.
Igitur & EG , quod illi composito æquale est, Medium est;
quod cum applicetur ad Rationalem EF , erit EH , Ratio-
nalis ipsi EF , longitudine incommensurabilis. Rursus, quia
rectangulum sub AC, BC , Medium est; erit ex coroll.
propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe KG , Me-
dium: quod cum applicetur ad Rationalem KI , erit KH ,
Rationalis ipsi KI ; hoc est, ipsi EF , longitudine incommen-
surabiles sunt, estque ut AC , ad BC , ita quadratum ex
 AC , ad rectangulum sub AC, BC , ut ostendimus lem-
mata 3. ad propos. 9. huius lib. erit quadratum ex AC ,
incommensurabile rectangulo sub AC, BC . Est autem
quadrato ex AC , commensurabile compositum ex qua-
dratis rectarum AC, BC , hoc est, rectangulum EG . (cum
enim rectæ AC, BC , ponantur potentia commensurabiles;
erunt & earum quadrata commensurabilia. Igitur & com-
positum ex ipsis commensurabile est utrique ipsarum, nempe
quadrato ex AC .) & rectangulo sub AC, BC , commensu-
rabile est eius duplum, videlicet KG . Igitur & EG ipsi KG ,
incomm.

incommensurabile est, ex his, quæ in scholio propos. 14. huius libri docuimus. Recte igitur EH , & KH , eandem habent rationem cum EG , KG , longitudine incommensurabiles sunt. Sed & Rationales sunt ostensa. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH , auferatur Rationalis KH , potentia solum commensurabilis, si EH , erit EK , Apotome, & illi congruens KH . Similiter demonstrabimus EK , Apotomenellam, & illi congruentem KM . Non igitur Apotome una tantum congruit rectæ lineæ Rationali, potentia solum commensurabilis existens toti, quod est absurdum. Vnam autem rationem congruere, demonstratum est. Igitur Media Apotome secundæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

10. decimi.

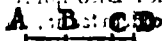
74. decimi.

80. decimi.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

MINOR una tantum congruit rectæ lineæ potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quiddam ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium

Sit Minor AB , & illi congruens BC , totum AC , potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum $A C$, $B C$, Rationale, & rectangulum sub $A C$, $B C$, Medium. Dico ipsam AB , aliam non congruere, quæ eadem præster. Si enim, si fieri potest, alia congruens BD , totum AD , potentia incommensurabilis, faciensque compo-



situm quiddam ex quadratis rectarum $A D$, $B D$, Rationale, & rectangulum sub $A D$, $B D$, Medium. Quoniam igitur, ut in propos. 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum $A C$, $B C$, & compositum ex quadratis rectarum $A D$, $B D$, qui inter rectangulum bis sub $A C$, $B C$, & rectangulum bis sub $A D$, $B D$: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 17. huius libri;

M 2 quod

quod utrunque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium est Rationale. sed & non Rationale est (Cū enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Similiterque Mediū erit rectangulum bis sub A D, B D. Quare unum non superabit alterum Rationale.) Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D

27. decimi.

83.

78.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

E I, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantum cōgruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

S i t recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum uero sub A C, B C, Rationale. Dico ipsi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc eandem faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum uero sub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur, ut in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus

A B C D

excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, ut in propos. 81 demonstrauius. Igitur & excessus inter illa composita, spatium Rationale est sed & non Rationale est, cum utrunque sit Medium. Medium enim Medium non superat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi A B, alia recta, quam B C, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

27. decimi.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

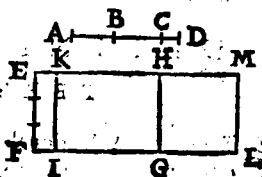
84.
79.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurableque composito ex ipsarum quadratis.

S I T recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipsi uero congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub A C, B C, Medium, incommensurableque composito

ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipsi A B, aliam non congruere, quæ eadē hæc faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi recta alia B D, toti A D, potentia incommensurabilis, ita ut & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium sit, & rectangulum sub A D, B D, Medium quoque, ac incommensurable composito ex quadratis rectarum A D, B D. Constru-

ctis autem iisdem, quæ in propos. 81. quoniam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium est; erit etiam E G,



M 3 illi

23. decimi.

23. decimi.

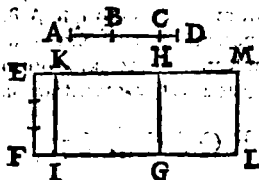
14. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

80. decimi.

illi æqualis, Medium: Recta igitur EH , Rationalis est, ipsi $E F$, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub $A C$, $B C$, Medium est, erit & eius duplum $K G$,



Medium. Igitur & recta $K H$, Rationalis est, longitudine ipsi $E F$, incommensurabilis. Et quoniam $K G$, commensurabile est rectangulo sub $A C$, $B C$, cum illud huius sit duplum, at rectangulum sub $A C$, $B C$, incommensurabile ponitur compositio ex quadratis re-

ctarum $A C$, $B C$; erit quoque $K G$, eidem compositio, hoc est, ipsi $E G$, incommensurabile; Ac propterea rectæ $B H$, $K H$, eandem habentes cum $E G$, $K G$, rationem, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali $E H$, auferatur Rationalis $K H$, potentia solum commensurabilis ipsi $E H$; erit $E K$, Apotome, & ei congruens $K H$. Non aliter ostendimus $E K$, esse Apotomen, & ei congruentem esse $K M$. Non igitur Apotomæ una tantum recta congruit, &c. Quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

DEFINITIONES

TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem tota exposita Rationali sit longi-

longitudine commensurabilis; Vocetur
Apotome prima.

II.

SI uero congruens expositæ Rationali
fit longitudine commensurabilis; Vocetur
Apotome secunda.

III.

Q V O D si neque tota; neque con-
gruens expositæ Rationali fit longitudi-
ne commensurabilis; Vocetur Apotome
tertia.

R V R S V S si tota plus possit, quam congruens, qua-
dato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem tota expositæ Rationali fit
longitudine commensurabilis; Vocetur
Apotome quarta.

V.

SI uerb congruens expositæ Rationa-
li fit longitudine commensurabilis; Voce-
tur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens exposita Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

SCHOLION.

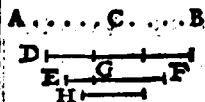
Non aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex ha Apotoma, recta linea, quae relinquuntur post subtractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quae ex binis nominibus dicuntur, ut ex definitis ionibus est perspicuum.

85.
80.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus AC, non sit quadratus; ita ut AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, non: Exponatur Rationalis quaequam D, cui



longitudine commensurabilis sit EF. Eruntq; EF, cum commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde ut numerus AB ad numerum AC, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad

quadratum ex GF. Dico EG, esse primam Apotomen. Quoniam quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; Erunt & rectae EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia uero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri;

6. decimi.

numeri, neque quadrata ex EF , GF , proportionem habebunt, quam quadrati numeri. Incommensurabiles ergo sunt longitudines rectarum EF , GF . Rationales ergo sunt EF , GF , potentia tantum commensurabiles; atque idcirco reliqua EG , Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta EF , plus quam recta GF , quadrato rectae H . Et quia est ut numerus AB , ad numerum AC , ita quadratum ex EF , ad quadratum ex GF ; erit per conversionem rationis, ut AB , ad CB , ita quadratum ex EF , ad quadratum ex H . Habent autem AB , CB , proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF , & H , proportionem habent, quam numeri quadrati; Ac propterea rectae EF , & H , longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota EF , plus potest, quam congruens GF , quadrato rectae H , sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem EF , exposita Rationali D , commensurabilis longitudines erit EG , ex defin. prima Apotome. Invenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

9. decimi.

74. decimi.

9. decimi.

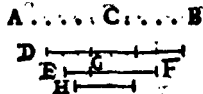
PROBL. 20. PROPOS. 87.

86.

81.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB , CB , ut in propos. praecedens; expositaque Rationali D , sumatur ei longitudine commensurabilis GF ; eritque GF , Rationali D , commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus AC , ad numerum AB , ita quadratum ex GF , ad quadratum ex EF , per coroll. propos. 6. huius libri. Dico EG , esse secundam Apotomen.



Quoniam quadrata ex GF , EF , proportionem habentia, quam numeri AC , AB , commensurabilia sunt; Erunt & rectae GF , EF , commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo GF , sit ostensa Rationalis, erit quoque EF , Rationalis. Quia vero numeri AC , AB , atque adeo & quadrata ex GF , EF , proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt GF , EF , longitudine incommensurabiles.

6. decimi.

9. decimi.

les.

74.decimi.

let. Rationales ergo sunt GF , EF , potentia solum commensurabiles; Ideoque EG , reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta EF , plus quam GF , quadrato ex H . Quotiam ergo est ut $A C$, ad $A B$, ita quadratum ex GF , ad quadratum ex EF ; & conuertendo, ut $A B$, ad $A C$, ita quadratum ex EF , ad quadratum ex GF . Ostendimus iam, ut in antecedenti propos. rectam H , ipsi EF , longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota EF , plus possit, quam congruus GF , quadrato rectae H , sibi longitudine commensurabilis, sitque congruus GF , exposita Rationali D , longitudine commensurabilis; erit EG , ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

87.

82.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

I N V E N I R E tertiam Apo-
tomen.

R E P E R T U S duobus numeris quadratis A B, C B, ut
 in propof. 86. fumatur alius numerus I, ut in propof. 51. hu-
 ius libi: docemus, quod neutrum
 A.....C.....B
 I.....
 D.....
 E.....F
 H.....
 neutrum
 ipforum A B, A C, proportio-
 nem habeat, quam quadratus ad
 quadratum. Expofita deinde Rati-
 onali D, fiat ut I, ad A B, ita
 quadratum ex D, ad quadratum
 ex E F, per coroll. propof. 6. hu-
 ius libi. Eruntque quadrata ex D,

6. decimi.

& E F, proportionem habentia, quam numeri I, & A B, cōmensurabiles; atque adeo & restæ D; & E F, cōmensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Et quia numeri I, & A B, ac propterea q u a-

quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario propos. 6. huius libri. Dico EG, esse tertiam Apotomen. Quoniam quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cum illi hæc sit commensurabilis, ut demonstravimus. Et quia AB, AC, atque adeo & quadrata ex EF, GF, proportionem non habent, quam numeri quadrati, erunt rectæ EF, GF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia solum commensurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi solum commensurabilis; reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam est ut I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo ut I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF. Non habent autem numeri I, & AC, proportionem quam numeri quadrati; Neque igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & D, EF, longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H: Ostendimusque, ut in proposi. 86. rectam H, esse ipsi EF, longitudine commensurabilem. Quapropter cum tota EF, plus possit quam congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ; erit ex defn. EG, tertia Apotome. Invenimus ergo tertiam Apotomen Quod faciendum erat.

9. decimi.

6. decimi.

9. decimi.

74. decimi.

9. decimi.

PROBL.

88.

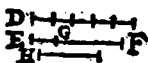
PROBL. 22. PROPOS. 89.

83.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita ut A B, ex illis compositus ad neutrum ipsorum, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit E F, eritque propterea & E F, Rationalis Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, ut ibi, E G, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit n. E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia est ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F, erit per conversionem rationis, ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum ergo A B, & C B, proportionem non habeant, quam numeri quadrati, erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota E F, commensurabilis longitudine Rationali D, erit ex defin. E G, quarta Apotome. Invenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

A C . . . B



9. decimi.

89.

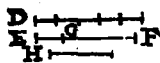
THEOR. 23. PROPOS. 90.

84.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ut in propos. precedenti, fiat constructio, ut in propos. 87. hoc est, sumatur G F, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo ut in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & secundam esse. Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, ut in propos. 86. ostendemus,

A C . . . B

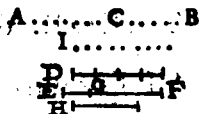


demus, per conversionem rationis, esse ut $A B$, ad $C B$, ita quadratum ex $E F$, ad quadratum ex H ; erunt rursus, ut in propos. antecedenti, rectæ $E F$, & H , longitudine incommensurabiles. Quia ergo tota $B F$, plus potest, quam congruens $G F$, quadrato rectæ H , sibi longitudine incommensurabilis; estque congruens $G F$, Rationali D , commensurabilis longitudine; erit ex defin. $E G$, quinta Apotome. Invenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

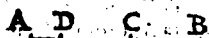
REPERTIS tribus numeris $A C$, $C B$, & I , ut in propos. 54. ita ut $A B$, ad neutrum ipsorum $A C$, $C B$; & I , ad neutrum ipsorum $A B$, $A C$, proportionem habeat, quam quadratas ad quadratum: exponatur Rationalis D , & reliqua fiant, ut in propos. 88. Ostendamus ergo similiter, ut ibi, D , & $E F$, longitudine incommensurabiles esse; & $E G$, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam ut in propos. 88. erunt D , & $G F$, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeo neutra ipsarum $E F$, $G F$, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D . Posueram $E F$, plus quam $G F$, quadrato rectæ H , quam ostendimus, ut in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi $E F$. Igitur cum tota $E F$, plus possit, quam congruens $G F$, quadrato rectæ H , sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum $E F$, $G F$, longitudine sit commensurabilis Rationali D ; erit ex defin. $E G$, sexta Apotome. Invenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.



SCHOLIUM.

SED & expeditus sex dictas Apotomas invenimus hac ratione, ut Theon docet hoc loco.

49. decimi. *Si T. inveniendae exempli gratia, prima Apotome. Repe-
riatur prius ex binis nominibus prima B. & cuius maior no-
men AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quae
a qualis sit ipsi CB. Dico AD, esse primam Apotomen. Quo-
niam A C, C B, Rationales sunt potentia tantum commensurabi-*



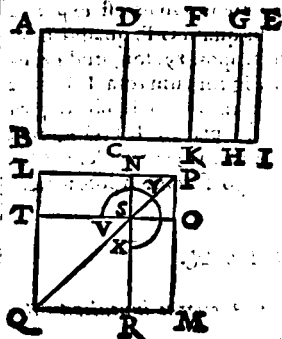
74 decimi.

*les; erant etiam AC, D C, Ratio-
nales potentia tantum commensura-
biles. Est ergo AD, Apotome. Et
quia AC, plus potest, quam CB, hoc est, quam DC, quadra-
to recta linea sibi longitudine cōmensurabilis: & est AC, Ra-
tionali expōsitae longitudine commensurabilis; ex definitione
eius, quae ex binis nominibus prima dicitur, erit ex definitione
Apotomae primae, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex
ceteris, quae ex binis nominibus dicuntur, & alias Apoto-
mas inveniuntur, ut ex secunda secundam, ex tertia tertiam,
ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam,
si minora nomina, ex maioribus auferamus.*

91.
86.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

*SI spatium contineatur sub Rationali,
& Apotoma prima; Recta linea spatium po-
tens Apotome est.*



*CONTINEATUR
spatium AC, sub Rationali
AB, & Apotoma prima
AD. Dico rectam lineam,
quae potest spatium AC,
Apotomen esse. Sit ipsi
AD, congruens DE. Erūt
igitur AE, DE, ex defin.
Apotomae primae; Ratio-
nales potentia solum commē-
surabiles; & tota AE, lon-
gitudine cōmensurabilis Ra-
tionali AB; & denique ea-
dem AE, tota plus poterit,
quam*

quam congruens DB, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis. Socerur DE, bifariam in E, & quadrato ex FE,
hoc est, quartæ parti quadrati ex D E, applicetur ad AE, re-
ctangulum æquale sub A G, G E, deficiens figura quadra-
ta, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia A B, plus
potest, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis; erunt rectæ A G, G E, longitudine commen-
surabiles; Ac propterea & utraque toti A E, longitudine
commensurabilis erit. Est autem A B, Rationali A B,
longitudine commensurabilis. Igitur & utraque A G, G E,
ipsi A B, longitudine est commensurabilis; atque ex defini-
tione 6. Rationalis. Quare ductis G H, E I, ipsi A B, paralle-
lis, quæ ipsi B C, productæ occurrant in H, I; erit utrumque
rectangulum A H, G I, contentum sub duabus Rationalibus
longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia
utraque D F, F E, longitudine commensurabilis est ipsi D E,
& D E, longitudine incommensurabilis est Rationali A B;
(Nam si commensurabilis esset longitudine, cum & A E, sit
eidem A B, longitudine commensurabilis; essent A E, D E, longi-
tudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum, po-
nuntur enim solū potentia commensurabiles.) erit etiam utraque
ipsarum D F, F E, ipsi A B, longitudine incommensurabilis. Et quo-
niā utraq; D F, F E, Rationali D E, commensurabilis, Rationa-
lis est; Erunt propterea tam A B, D F, quæ A B, F E, Rationa-
les potentia tantū commensurabiles. Quare ducta E K, ipsi A B,
parallela, erit utrumq; rectangulū D K, F I, contentū sub Ra-
tionalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

IAM uero ipsi A H, fiat quadratū æquale L M, & ipsi G I,
æquale fiat quadratū N O, communem habens cum L M, an-
gulum L P M. Erunt igitur quadrata L M, N O, circa eandem
diametrū, quæ sit P Q. Perficiatur autem figura, ut uides.
Quoniā igitur rectangulū sub A G, G E, per constructionē,
æquale est quadrato ex F B; erunt tres rectæ A G, F B, G E,
proportionales; Ac propterea cū A H, F I, G I, eandem cū ipsis
habeant rationē; erit F I, mediū proportionale inter A H
G I, hoc est, inter quadrata L M, N O, illis æqualia. Est autem
inter eadem L M, N O, per lemma propos. 4. huius lib. me-
dium quoque proportionale L O. Igitur rectangula F I, L O,
æqualia sunt: Sed ipsi F I, æquale est D K; & ipsi L O,
æquale

18. decimi.

16. decimi.

12. decimi.

20. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

14. secunda.

26. sexti.

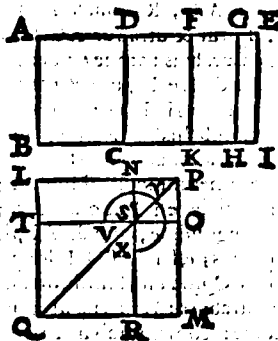
17. sexti.

1. sexti.

6. primi.

æquale est $M N$. Est ergo totum $D I$, toti gnomini $V Y X$, cum quadrato $N O$, æquale. Est autem & totum $A I$, per constructionem, æquale quadratis $L M, N O$. Igitur & reliquum $A C$, reliquo quadrato $T R$, est æquale. Ac propterea recta $T S$, potest spatium $A C$. Dico $T S$, Apotomen esse.

QVONIAM spacia A H, G I, ostendunt sunt Rationalia; & cetera equalia sunt L M,



1. sexti.
10. decimi.

74. decimi.

T S, Apotome est . Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandū erat.

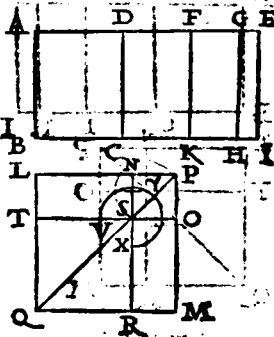
THEOR. 69. PROPOS. 93.

S: I spatium contineatur sub Rationali,
& Apotoma secunda; Recta linea spatium
potens, Mediæ est Apotome prima.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma secunda AD. Dico rectam, quæ spatium AC, præest, Medie Apotomen esse primam. Sit ipsi AD, congruens recta DE. Brunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ secundæ, Rationales potentia tantum commensurabiles, & congruens DE, longitudine commensurabilis Rationali

tionali A B; Et denique A E, plus poterit, quam D E, qua-
drato recte sibi commensurabilis longitudine. Secetur D E,
bisariam in F, & reliqua omnia contruantur, ut in propo-
sitione præcedenti. Bruta; rursus, ut in antecedenti pro-
positione, A G, G E, longitudine commensurabiles; Ac
propterea & utraq; toti A E, longitudine commensurabi-
lis. Est autem A E, Ratio-
nali A B, longitudine incom-
mensurabilis; (Si enim com-
mensurabilis esset, ipsi A B,
longitudine, cum D E, ei-
dem A B, ponatur longitu-
dine commensurabilis, esset
A E, D E, inter se quoque
commensurabiles longitu-
dine. Quod est absurdum, po-
nuntur enim potentia tanquam
commensurabiles.) Igitur &
utraq; ipsarum A G, G E, longitudine incommensurabi-
lis est eidem A B. Est autem utraque A G, G E, Rationali
A E, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt
tam A B, A G, quam A B, G E, potentia solum commen-
surabiles; Atq; idcirco rectangulum utrunq; A H, G I, con-
tentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabi-
libus, Medium est. Rursus quia utraq; D F, F E, ipsi D E,
longitudine commensurabilis est; & ponitur D E, Ratio-
nali A B, longitudine commensurabilis; erit quoque, ut in
scholio propof. 12. huius lib. ostendimus, eidem A B, Ra-
tionali longitudine commensurabilis utraq; D F, F E; atq;
adeo & Rationalis. Vtrunq; ergo rectangulum D K, F L,
contentum sub Rationalibus longitudine commensurabili-
bus, Rationale est. Iam uero ut in præcedenti propof. de-
monstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S,
Mediæ Apotomen esse primam.

Q UONIAM A G, G E, longitudine sunt commen-
surabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia ra-
tionem, commensurabilia; atque adeo & L M, N O, qua-
drato illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & late-



18. decimi.

16. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

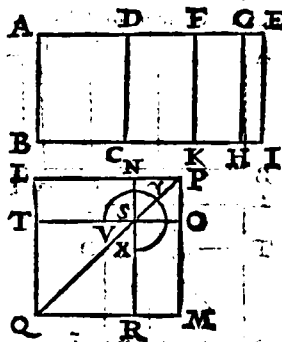
20. decimi.

16. decimi.

N

ra co-

ra eorum, nempe rectæ T O, S O, saltem potentia erunt
commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata
L M, N O, Medijs A H, G I, æqualia, (ostensa enim sunt
A H, G I, Mediæ esse.) Me



10. decimi.

75. decimi.

93.
88.

dia sint. Et quoniam F I,
atque adeo sibi æquale L O,
Rationale est, propterea que
Medio N O, incommensu-
rabile; erunt rectæ T O,
S O, eandem cum illis ratio-
nem habentes, longitudine
incommensurabiles. Cum
ergo & Mediæ sint ostensæ,
& commensurabiles; erunt
T O, S O, Mediæ potentia
tantum commensurabiles.
Cum ergo contineant L O,
quod Rationale est osten-

sum; erit T S, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium cō-
tineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod
demonstrandum erat.

THEOR. 70. PROPOS. 94.

SI spatium contineatur sub Rationali,
& Apotoma tertia; Recta linea spatium po-
tens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali
A B, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ spatium
A C, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit ipsi A D,
congruens D E. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ ter-
tiæ, A E, D E, Rationales potentia tantum commensura-
biles, & neutra ipsarum A E, D E, longitudine commensu-
rabilis Rationali A B; Et denique A E, plus poterit, quam
D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Se-
cetur D E, bifariam in F, & cætera fiant, ut in propos. 92.
eruntq; rursus, ut ibi, A G, G E, longitudine inter se com-
mensu-

menfurabiles ; Ac propterea & utraq; toti A E, longitudi-
 ne commenfurabilis erit. Eft autem A E, pofita incommen-
 furabilis longitudine Rationali A B. Igitur & utraq; A G,
 G E, eidem A B, longitudine erit incommenfurabilis. Cum
 ergo utraq; A G, G E, Rationali A E, commenfurabi-
 lis, Rationalis fit ; erunt tã
 A B, A G, quam A B, G E,
 Rationales potentia folum
 commenfurabiles ; Ac pro-
 pterea utrunque rectangu-
 lum A H, G I, Medium erit.
 Rurfus quia D E, longitu-
 dine ponitur incommenfu-
 rabilis Rationali A B ; erit
 quoque utraq; D F, F E,
 ipfi D E, longitudine com-
 menfurabilis exiftens, eidẽ
 A B, longitudine incommenfurabilis. Cum ergo utraq;
 D F, F E, Rationali D E, commenfurabilis, fit Rationa-
 lis ; erunt tam A B, D F, quam A B, F E, Rationales poten-
 tia tantum commenfurabiles ; atq; propterea utrunq; rectũ
 gulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonftrabi-
 mus, ut in propof. 92. rectam T S, poffe fpatium A C. Di-
 co T S, effe Mediæ Apotomen fecundam.

Q U O N I A M A H, G I, Media funt oftensa ; erunt &
 quadrata L M, N O, illis æqualia ; Media ; Ac propterea &
 rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem haben-
 tia rationem, quam A G, G E, quas oftendimus com-
 menfurabiles effe, commenfurabilia funt ; Erunt & quadrata
 L M, N O, commenfurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, cõ-
 menfurabiles, faltem potentia. At uero quia A E, D E, po-
 tentia folum funt commenfurabiles, hoc eft, longitudine in-
 commenfurabiles, eftq; ipfi A E, longitudine oftensa com-
 mēfurabilis G E, ipfi uero D E, cõmenfurabilis eft longitu-
 dine F E ; ertũ ex fcholio propof. 14. huius lib. & G E, F E, lōgi-
 tudine incõmenfurabiles ; ac propterea G I, F I, eandem rationẽ
 habentia, quam G E, F E, hoc eft, illis æqualia N O, L O, incõ-
 menfurabilia. Quare T O, S O, eandẽ rationem habentes

16. decimi.

14. decimi.

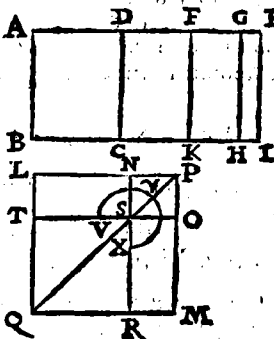
22. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

10. decimi.

10. decimi.



76. decimi.

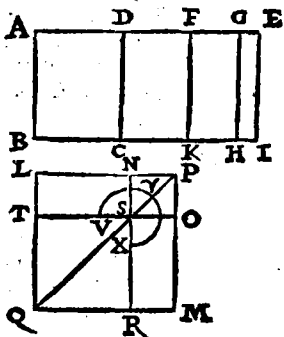
94.
89.

quam L O, N O, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensa sunt autem Medie, & commensurabiles. Medie ergo sunt T O, S O, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent L O Medium; (cum enim L O, æquale sit ipsi F I, ut constat ex propof. 92. quod Medium esse ostendimus; erit & L O, Medium.) erit T S, Medie Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

S I spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; Recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Minorem esse Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Rationales potentia solum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & A E, longitudine cõmensurabilis Rationali A B, & eadem A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, ut prius. Erunt ergo A G, G E, incommensurabiles longitudine, quandoquidem A E, plus potest, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine in-



89. decimi.

20. decimi.

commensurabilis; & ad A E, applicatum est rectangulum sub A G, G E, æquale quartæ parti quadrati ex D E, deficiensq; figura quadrata. Et quia A E, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit rectangulū A I, Rationale. Rursus quia D E, Rationalis est, & Ratio-

nali

nali A B, longitudine incommensurabilis; erit D I, atque adeo & eius dimidium F I, Medium. Amplius cum A G, G E, sint longitudine incommensurabiles; incommensurabilia erunt A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia Iam vero similiter demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse Minorem.

12. decimi.

10. decimi.

Q V O N I A M ex constructione, rectangulo A B, æquale est compositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum T O, S O, Rationale. Item quia F I, Medium est ostensum; erit & L O, contentum sub T O, S O, illi æquale; Medium. Denique quoniam A H, G I, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, incommensurabilia; Atque adeo rectæ T O, S O potentia incommensurabiles. Quia propter eundem T O, S O, potentia sint incommensurabiles, sitque compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum vero sub ipsis, Medium; erit reliqua T S, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

77. decimi.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

95.

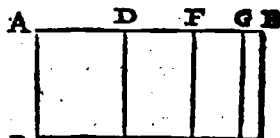
90.

S I spatium contineatur sub Rationali; & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

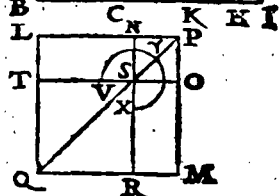
C O N T I N E A T U R spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma quinta A D. Dico rectam lineam quæ spatium A C, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, A E, D E, Rationales potentia tantum commensurabiles, & D E, Rationali A B, commensurabilis longitudine; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua con-

struantur, ut prius. Erunt ergo rursus, ut in antea deni
propos. A G, G E, longitudine incommensurabiles. Et
quia A E, Rationalis longitudine incommensurabilis est
Rationali A B, ut in propos. 93. diximus; erit rectangu-

22. decimi.



20. decimi.



lum A I, Medium. Item
quia D E, Rationalis est, &
Rationali A B, longitudine
commensurabilis; erit D I,
atq; idcirco & eius dimidiū
F I, Rationale. Rursus e-
runt, ut in precedenti pro-
pos. A H, G I, incommen-
surabiles; poteritq; ut ostē-
sum est in propos. 92. recta
T S, spatium A C. Dico
T S, esse eam, quæ cum Ra-
tionali Medium totum effi-
cit.

Q U O N I A M ostensum est A I, Medium esse; erit &
compositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O,
illi æquale, Medium. Item quia demonstraui F I, Ra-
tionale esse; erit & L O, rectangulum sub T O, S O, conten-
tum, cum illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & T O, S O,
potentia incommensurabiles, ut in propos. antecedenti est
demonstratum. Igitur cum T O, S O, potentia incommen-
surabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis,
Medium; rectangulum uero sub ipsis, Rationale; erit reli-
qua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit.
Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apo-
toma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

78. decimi.

96.

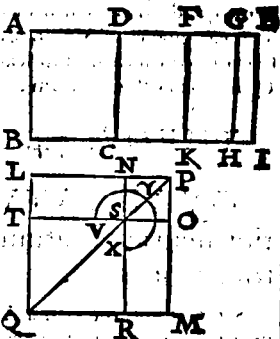
91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali,
& Apotoma sexta; Recta linea spatium po-
tens est, quæ cum Medio Medium totum
efficit.

C O N

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma sexta A D. Dico rectam, quæ potest spatium A C, esse eam, quæ tum Medio Medium totum efficit. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, A E, D E, Rationales potentia eantum cõ-
mensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, Rationali A B, cõmensurabilis longitudine; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine incõ-
mensurabilis. Secetur D E, bisariam in F, & reliqua construantur, ut supra. Erunt ergo rursus ut in propos. 95.



A G, G E, longitudine incõ-
mensurabiles. Et quia tam A E, quam D E, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine incõmensurabilis; erit tam A I, quam D I, atq; adeo & huius dimidium F I, Medium. Eruntq; ut in propos. 95. A H, G I, incõmensurabilia. Et quoniam A B, D E, potentia solum sunt cõmensurabiles; Erunt A I, D I, eandem habentia cum illis proportionem, incõmensurabilia; Atque adeo cum D I, F I, cõmensurabilia sint, erit F I, ipsi A I, incõmensurabile. Iam uero demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

22. decimi.

10. decimi.

14. decimi.

Q. V. O. N. T. A. M. A I, Medium ostendimus; erit & cõpositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale. Medium. Item, quia F I, Medium ostensum est; erit & L O, illi æquale, contentumq; sub T O, S O, Medium. Rursus quoniam F I, ipsi A I, est incõmensurabile, ut ostendimus; erit quoque L O; sub T O, S O, contentum, incõmensurabile. cõpositio ex quadratis rectarum T O, S O; propterea quod L O, ipsi F I, & cõpositum ex quadratis rectarum T O, S O, ipsi A I, sit æquale. Denique T O, S O, potentia incõ-

N 4 men-

incommensurabiles sunt, ut in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO , SO , sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc compositum quadratis ipsarum incommensurabilis; erit reliqua TS , ea quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium continetur sub Rationali, & Apotome sexta, &c. Quod erat ostendendum.

79. decimi.

97.

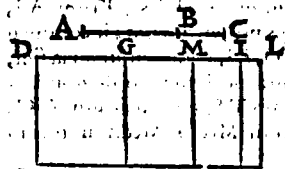
92.

THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinē facit Apotomen primam.

45. primi.

SIT Apotome prima AB , & ipsi congruens BC , ita ut AC , BC , sint Rationales potentia solum commensurabiles: & ad Rationalem DE , applicetur rectangulum DF , æquale quadrato ex AB , latitudinem faciens DG . Dico DG , esse Apotomen primam. Ad eandem DE , applicetur rectangulum DH , æquale quadrato ex AC , & ad I H ,



7. secundi.

aliud IK , æquale quadrato ex BC , ita ut totum DK , æquale sit composito ex quadratis rectarum AC , BC . Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC , BC , æquale est rectangulo bis sub AC , BC , una cum

6. decimi.

quadrato ex AB ; si auferatur quadratum ex AB , & rectangulum DF ; relinquetur GK , rectangulo bis sub AC , BC , æquale; atque adeo diuisa GL , bis in M , ductaq; MN , ipsi DE , parallela, erit MK , æquale rectangulo sub AC , BC . Et quoniam AC , BC , Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex AC , BC , Rationabilia; ideoq; commensurabilia. Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC , BC , utriusque ipsarum sit commensurabile; erit & illud compositum; hoc est, illa quæle DK , Ratio.

Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. *21. decimi.*
 Rursus quia A C, B C, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atq; adeo & eius duplum G K, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem G F, erit G L, Rationalis ipsi G F, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabiles sunt; erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem, quam D K, longitudine incommensurabiles. *23. decimi.*
 Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt D L, G L, Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam esse. *10. decimi.* *74. decimi.*

Quoniam per lemma propof. 34. huius lib rectangulum sub A C, B C, hoc est, M K, medium est proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc est, inter D H, K; erunt D H, M K, I K, continue proportionales; atq; adeo & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex M L, hoc est, quarta parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc est, illis æqualia, D H, I K, commensurabilia sunt; erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum due rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiensq; figura quadrata; atq; sit ostensa D I, ipsi I L, longitudine commensurabilis; poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensus D G, esse Apotomen, & totam D L, plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atq; eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat. *17. sexti.* *10. decimi.* *18. decimi.*

98.

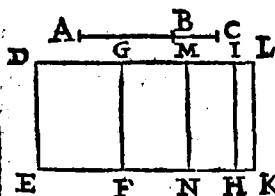
THEOR. 75. PROPOS. 99.

93.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

45. primi.

SIT Mediæ Apotome prima AB , & ipsi congruens BC , ita ut AC , BC , sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantq; Rationale: Et ad Rationalem DE , quadrato ex AB , æquale applicetur rectangulum DF , latitudinem faciens DG . Dico DG , Apotomen secundam esse. Construantur eadem, quæ in antecedenti propos. ita



16. decimi.

23. decimi.

31. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

ut rursus DH , IK , æqualia sint quadratis ex AC , BC & GK , æquale ei, quod sub AC , BC , bis continetur; a proinde MK , ei, quod sub AC , BC , continetur semel. Quoniam igitur AC , BC , Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & eorū quadrata, hoc est, illis æqualia, DH , IK , Mediæ & commensurabilia; ac proinde & totum DK , utrique illorum commensurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lib. Cum ergo DK , applicetur ad Rationalem DE , erit DL , Rationalis ipsi DE , longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC , BC , Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK , Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE , erit GL , Rationalis longitudine commensurabilis ipsi DE . Quia uero DK , Medium, id est, Irrationale, & GK , Rationale, incommensurabilia sunt; erunt rectæ DL , GL , eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL , GL , Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua DG , Apotome est: Dico & secundam esse. Nam similiter, ut in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL , plus posse, quam congruentem GL , quadrato rectæ sibi longitudine

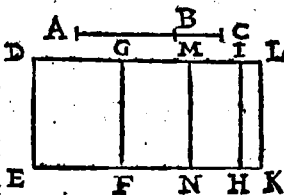
tudine commensurabilis. Quare cum congruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, & ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, sint Mediæ potentia tantum commensurabiles, contineantq; Medium: Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostendimus iam, ut in propos. præcedenti, DK, Medium esse, atque adeo rectam DL, Rationalem ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub AC,

BC, Medium est, atque ob id, & eius duplum GK; erit quoque GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine sunt incommensurabiles, estq; ut AC, ad BC, ita per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC; erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex AC, BC, ex rectis AC, BC, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo vero sub AC, BC, commensurabile est rectangulum bis sub



99.

94.

45. primi.

23. decimi.

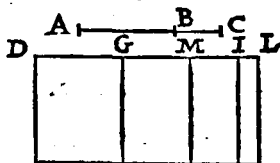
23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

sub A C, B C. Igitur ex scholio, propof. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectorum A C, B C, hoc est, D K, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, B C, hoc est, ipsi G K; Atque adeo rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles;

80. decimi.



74. decimi.

Ac proinde reliqua D G, Apotome est. Dico esse & tertiam. Si similiter enim, ut in propof. 98. demonstrabimus D L, totam plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum D L, G L, Rationali D E, longitudine sit commensurabilis, ut demonstratum est; erit ex defin. D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

100.

95.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

45. decimi.

S I T Minor A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C, potentia incommensurabiles sint, facientesque compositum quidem ex quadratis rectorum A C, B C, Rationale; rectangulum vero sub A C, B C, Medium: Et ad Rationalem D E, applicetur spatium D F, quadrato ex A B, æquale, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, ut in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectorum A C, B C, hoc est, ipsi æquale D K, Rationale est; erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est; erit G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis.

21. decimi.

23. decimi.

bilis. Rursus quoniam D K, Rationale, & G K, Irrationale, nempe Medium, incommensurabilia sunt, erunt D L, G L, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam A C, B C, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, D H, I K, incommensurabilia. Ac propterea rectæ D I, I L, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub D I, I L, æquale sit quadrato ex M L, id est, quartæ parti quadrati ex G L, ut in propof. 98. est demonstratum; poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad D L, maiorem applicatum est rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem D L, in partes D I, I L, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota D L, plus possit, quam congruens G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitq; eadem tota D L, Rationali D E, longitudine ostensæ commensurabilis; Erit ex defin. D G, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

10. decimi.

74. decimi.

10. decimi.

19. decimi.

101.

96.

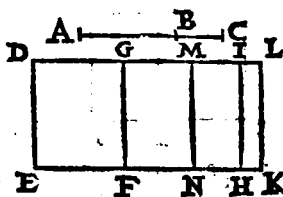
THEOR. 78. PROPOS. 102.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

S I T recta cum Rationali Medium totum efficiens A B, & ipsi

45. primi.

& ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Rationale: Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintā



23. decimi.

21. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atq; adeo & illi æquale DK, Medium est; erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atq; adeo & eius duplum GK, Rationale est; erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ: Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, ut in antecedenti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

102.

97.

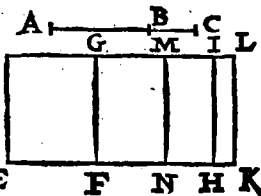
THEOR. 79. PROPOS. 103.

QUADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C, potentia sint incommensurabiles, faciantq; & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub iisdem A C, B C, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarū: Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato ex A B, spatium æquale D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem D

45. primi.

enim fiant, quæ supra. Quoniam tam compositum ex quadratis rectarū A C, B C, hoc est, illi æquale D K, quæ rectangulum sub A C, B C, E atq; adeo & eius duplū GK,



Medium est; Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub A C, B C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, B C; Et sunt rectangulum sub A C, B C, & eius duplum G K, commensurabilia; Erit & GK, eidem composito, hoc est, ipsi D K, incommensurabile; proptereaq; rectæ D L, G L eandē habentes rationē, quā D K, G K, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autē & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solū cōmensurabiles; Atq; idcirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextā. Ostendimus, n. similiter ut in propos. 101. totam D L, plus posse, quā congruentē G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cū igitur neutra ipsarum D L, G L, cōmensurabilis sit longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

23. decimi.

14. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

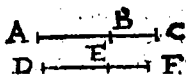
103.

98.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita ut AC, BC sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DF. Dico &



DE, Apotomen esse, atque ordine eadem ipsi AB. Fiat ut AB, ad DE, ita BC, ad EF. Erat ergo tota AC, ad

12. sexti.

12. quinti.

10. decimi.

74. decimi.

13. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

15. decimi.

totam DF, ut AB, ad DE, uel ut BC, ad EF, Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles; Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commensurabiles longitudine; Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus quia est ut AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando ut AC, ad BC, ita DF, ad EF: & sunt AC, BC, potentia solum commensurabiles; erunt quoque ex ijs, quæ ad propof. 10. huius lib. demonstrauimus, DE, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eadem esse. Possit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, ut AB, sit Apotome prima; erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si uero BC, sit longitudine commensurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo utraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare utraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

POSSIT Iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus DE, esse Apotomen

omen quartam, quintam, uel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

S C H O L I O N.

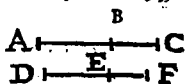
I D E M hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta D E, commensurabilis sit ipsi A B, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: utamur vocē: potentia tantum commensurabilis:) & D E, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eadem ipsi A B. Non enim sequitur, si tota A C, longitudine sit commensurabilis Rationali exposita, & D F, eidem esse commensurabilem longitudine; propterea quod non utraque, nempe Rationalis exposita, & D F; eidem A C, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero D F, potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si A B, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, ut D E, illi potentia tantum commensurabilis sit Apotome eadem ordine.

S I T enim A B, prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eique congruens B C; & sit D E, ipsi A B, potentia tantum commensurabilis, quam quidem, ut in theoremate, ostendimus Apotomen esse, eique congruentem E F; & partes A B, B C, ad partes D E, E F, eandem proportionem habere cum totis A C, D F. Dico nulla ratione D E, Apotomen esse ordine eadem ipsi A B. Nam si fieri potest, sit utraque Apotome prima. Quo posito, erit tam A C, tota, quā tota D F, ex definitione Apotome prima, Rationali exposita commensurabilis longitudine; atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt A C, et D F. Quare cum sit ut A C, ad D F, ita A B, ad D E; erunt quoque A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdū. ponitur enim D E, ipsi A B, potentia solum commensurabilis, Non ergo utraque A B, D E, Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Effet enim utraque congruens B C, E F, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali exposita, atque adeo & ipse inter se. Quocirca & A B, D E, inter se longitudine forent commensurabiles. Quod non ponitur.

12. decimi.

10. decimi.

S E M P E R tamen verum est, si AB , est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE , quæ ipsi AB , potentia solū est commensurabilis, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordi-



ne non eadem sit. Nam hoc pos-
to, poterit AC , plus quam BC ,
quadrato rectæ sibi longitudine
commensurabilis. Cum ergo sit

15. decimi.

ut AC , ad BC , ita DF , ad EF ; poterit quoque DF , plus quā EF ,
quadrato rectæ sibi cōmensurabilis. Quare ex defin.
erit DE , Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo
si AB , est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut AC , plus
possit, quā BC , quadrato rectæ sibi longitudine incōmensurabi-
lis; Erit quoque DE , Apotome quarta, vel quinta, vel sexta,
quamvis ordine non eadem ipsi AB : quia rursus, cum sit ut
 AC , ad BC , ita DF , ad EF , poterit quoque DE , plus quam
15. decimi. EF , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Qua-
re ex defin. erit AB , Apotome quarta, vel quinta, vel
sexta.

I N sequentibus autem quinque propositionibus necessario
erit DE , eadem ordine ipsi AB , licet potentia solum illi fue-
rit commensurabilis.

104.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

99.

R E C T A linea Mediæ Apotomæ com-
mensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est,
atque ordine eadem.

12. sexti.

12. quinti

10. decimi.

S I T Mediæ Apotome quæcunque AB , eique congruēs
 BC , ita ut AC , BC , sint Mediæ potentia solum commensu-
rabiles: Sit autem ipsi AB , commensurabilis DE , siue longi-
tudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE , A-
potomen esse, & ipsi AB , ordine eandem. Fiat ut A , ad
 DE , ita BC , ad EF . Erit ergo tota AC , ad totam DF , ut AB ,
ad DE , & ut BC , ad EF . Quoniam igitur AB , DE , cōmen-
surabiles ponuntur uel longitudine & potentia, uel potentia
tantum; erunt quoque BC , EF , & AC , DF , eodem modo
commensurabiles. Et quia AC , BC , Mediæ sunt, erunt
quoque

quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus 24. *decimi.*
quia est ut AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando ut

AC, ad BC, ita DF, ad EF:
Sunt autem AC, BC, potentia
solum commensurabiles, erūt
etiam, ex scholio propos. 10.



huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Qua-

re cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ; erit reliqua DE, Mediæ 75. *vel 76. decimi.*

Aporome. Dico & eandē esse ordine ipsi AB. Quoniā est
ut AC, ad BC, ita DF, ad EF; & ut AC, ad BC, ita est qua-

dratū ex AC, ad rectangulū sub AC, BC, ex lemmate 3. pro-

pos. 9 huius lib. & ut DF, ad EF, ita quadratū ex DF, ad re-

ctangulū sub DF, EF; Erit quoque ut quadratū ex AC, ad re-

ctangulū sub AC, BC, ita quadratū ex DF, ad rectangulū sub

DF, EF; Et permutando ut quadratum ex AC, ad quadra-

tum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum

sub DF, EF. Igitur cum quadratū ex AC, commensurable

sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint com-

mensurabiles; erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo
sub DF, EF, cōmensurable. Quare si rectangulū sub AC,
BC, sit Rationale, ita ut AB, sit Mediæ Apotome primā; Erit
etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit com-

mensurable; atque adeo & DE, Mediæ Apotome primā
erit. Si uero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita ut
AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoque rectangulū
sub DF, EF, ei commensurable, Medium, ex coroll. propos.
24. huius lib. Ac propterea & DE, Mediæ Apotome se-

cunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensu-

rabilis, &c. Quod erat ostendendum.

THE OR. 82. PROPOS. 106.

105, 116.
100.

RECTA linea Minori commensura-
bilis; & ipsa Minor est.

SIT Recta AB, ipsiq; congruens BC, ita ut AC, BC, po-
tentia sint incōmensurabiles, facientesq; cōpositum quidē ex
quadratis rectarū AC, BC, Rationale; rectangulū uero sub
ipsidem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, com-

O 2 mensu-

menſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, Minorem eſſe. Fiant eadem, quæ ſupra, ita ut rurfus A B, B C, ad D E, E F, eandem habeant rationem quam A C, ad D F. Erunt ergo rurfus, ut in antecedenti propoſ. D F, E F, iſtis



A C, B C, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Et quoniam eſt ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; erit ut quadratum ex A C, ad quadratum ex B C, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F; Et componendo ut compoſitum ex quadratis reſtarum A C, B C, ad quadratum ex B C, ita compoſitum ex quadratis reſtarum D F, E F, ad quadratum ex E F; Et permutando ut compoſitum ex quadratis reſtarum A C, B C, ad compoſitum ex quadratis reſtarum D F, E F, ita quadratum ex B C, ad quadratum ex E F. Eſt autem quadratum ex B C, commenſurable quadrato ex E F; quod reſtas B C, E F, oſtenderimus commenſurabiles eſſe. Igitur & compoſitum ex quadratis reſtarum A C, B C, compoſito ex quadratis reſtarum D F, E F, commenſurable eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis reſtarum A C, B C, ex hypotheſi, Rationale. Igitur & compoſitum ex quadratis reſtarum D F, E F, ex 9. defin. Rationale eſt. Rurfus quoniam ut in antecedenti propoſ. demonſtrabimus reſtângulum ſub A C, B C, reſtângulo ſub D F, E F, eſſe commenſurable: Ponitur autem reſtângulum ſub A C, B C, Medium; Erit, quoque reſtângulum ſub D F, E F, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Et quia eſt ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; ſuntque A C, B C, potentia incommenſurabiles; erunt etiã D F, E F, potentia incommenſurabiles. Quam ob rem cum D F, E F, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis reſtarum D F, E F, Rationale, reſtângulum uero ſub iſdem D F, E F, Medium; erit D E, Minor.

22. ſexti.

20. decimi.

10. decimi.

77. decimi.

Reſta ergo linea Minori commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

T H E O R.

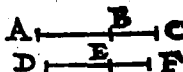
THEOR. 83. PROPOS. 107.

106. 117.

101.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum sub AC, BC, Rationale: Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis quocunque modo. Dico & DE, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit.



Constructis enim iisdem, quæ supra, ostendimus ut in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus ut in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, ut in præcedenti propos. est probatum, rectæ DF, EF, potentia incommensurabiles. Igitur cum DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum uero sub ipsis, Rationale; erit DE, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca recta linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.

78. decimi.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

107.

102.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; &

O 3 ipsa

ipsa cum Medio Medium totū efficiens est.

SIT recta A'B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque, & adhuc incommensurable composito ex ipsarum quadratis: Sit autem DE, ipsi AB, quomodolibet commensurabilis.



Dico & DE, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, ut in propof. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurable esse composito ex quadratis rectarum DE, EF. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc, ex coroll. propof. 24. huius lib. Medium. Rursus ut in propof. 105. ostendemus rectangulum sub AC, BC, commensurable esse rectangulo sub DE, EF. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item ut in propof. 106. erunt quoque DE, EF, potentia incommensurabiles: Postremo quia composito ex quadratis rectarum AC, BC, commensurable est compositum ex quadratis rectarum DE, EF, ut dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurable est rectangulum sub DE, EF: Sunt autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothefin, incommensurabilia; Erunt quoque ex scholio propof. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DE, EF, & rectangulum sub DE, EF, incommensurabilia. Quocirca cum DE, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurableq; composito ex ipsarum quadratis; erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio &c. Quod erat ostendendum.

79. decimi.

THEOR.

THEOR. 85. PROPOS. 109.

108.

103.

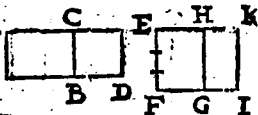
MEDIO a Rationali detracto; Recta
linea; quæ reliquum spatium potest, una
ex duabus Irrationalibus fit, uel Apotome,
uel Minor.

DETRAHATUR a Rationali AD, Medium CD.
Dico rectam, quæ potest spatium reliquum AB, esse uel
Apotomen, uel Minorem. Exponatur Rationalis EF, ad
quâ applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH,
aliud HI, æquale ipsi CD, ita ut totum EI, toti AD, sit
æquale.

45 primi.

Quoniam igitur

EI, æquale Rationali AD, A
Rationale est; erit EK, Ra
tionalis, Rationali EF, longi
tudine commensurabilis.



21. decimi.

23 decimi.

13. decimi.

74. decimi.

92. decimi.

95. quinti.

Rursum quia HI, Medio CD, æquale Medium est; erit HK,
Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaque
cum EK, quidem sit longitudine cōmensurabilis ipsi EF, &at
HK, eidem EF, longitudine incōmensurabilis; erunt EK,
HK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales.
Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles:
proptereaque reliqua EH, Apotome est, & ei congruens
HK. Aut igitur EK, plus potest quam HK, quadrato
rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensu
rabilis. Si plus pōt EK, q̄ HK, quadrato rectæ lineæ cōmen
surabilis sibi longitudine, cum tota EK, ostensa quoque sit
longitudine cōmensurabilis Rationali EF; erit ex defn. EH,
Apotome prima. Quare recta potēs spatiū EG, cōtentū sub
Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc est, spatiū AB,
sibi æquale, Apotome est. Si uero EK, plus potest, quā HK,
quadrato rectæ sibi lōgitudine incōmēsurabilis, cū tota EK,
sit ostensa cōmensurabilis lōgitudine Rationali EF; erit ex
defn. EH, Apotonie quarta. Quapropter recta potēs spa
tiū EG, cōtentū sub Rationali EF, & Apotoma quarta EH;
hoc est, spatiū AB, illi æquale, Minor est. Medio ergo a Ra
tionali detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

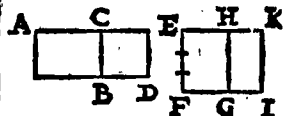
THEOR. 86. PROPOS. 110.

109.

104

RATIONALI a Medio detracto; alix duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apotome prima, uel cum Rationale Medium totum efficiens.

DETRAHATUR a Medio A D, Rationale C D. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse uel Mediæ Apotomen primam, uel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem construantur, quæ supra. Et quia



E I, Medio A D, æquale, Medium est; erit E K, Rationalis ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Itē quia H I, æquale Rationali C D, Rationale est; erit H K, Rationalis ipsi E F, longitudine commensurabilis. Itaque cum H K, quidem ipsi E F, sit commensurabilis longitudine; at E K, eidem E F, longitudine incommensurabilis; Erunt H K, E K, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles; Ac proinde reliqua E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens H K, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma secunda E H, hoc est, spatiū A B, illi æquale, Mediæ est Apotome prima. Si uero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum congruens H K, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc est, spatium illi æquale AB, est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

23. decimi.

21. decimi.

13. decimi.

74. decimi.

93. decimi.

96. decimi.

efficit. Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c.
Quod ostendendum erat.

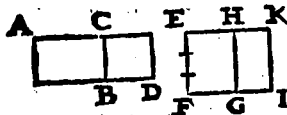
110.

105.

THEOR. 87. PROPOS. III.

MEDIO a Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; Reliquæ duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apotome secunda, uel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATUR a Medio A D, Medium C D, quod incommensurabile sit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum spatium A B, potest, esse uel Mediæ Apotomen secundam, uel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra; quoniam E I, H I, Medijs A D, C D, æqualia, Media sunt; erunt E K, H K, Rationales ipsi E F,



longitudine incommensurabiles. Et quia A D, C D, hoc est, E I, H I, ponuntur incommensurabilia; erunt E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest E K, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum neutra ipsarum E K, H K, Rationali E F, longitudine commensurabilis sit ostensa, erit ex defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, Mediæ Apotome est secunda. Si uero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum E K, H K,

23. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

74. decimi.

Rat. una

Rationali EF , sit longitudine commensurabilis, ut demon-
strauimus; erit ex defin. EH , Apotome sexta. Quam ob-
rem recta potens spatium EG , contentum sub Rationali
 EF , & Apotoma sexta EH , hoc est, spatium AB , illi equa-
le, est ea, quæ cum Medio Medium totum efficit Medio ergo
a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

97. decimi.

III.
106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non est eadem, quæ ex
binis nominibus.

SIT Apotome A , quæcunque. Dico A , non esse ean-
dem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest, A ,
aliqua ex binis nominibus. Exposita Rationali BC , appli-
cetur ad BC , rectangulum CD , æquale quadrato ex A .

45. primi

98. decimi.



Quoniam igitur A , Apotome est; erit la-
tudo BD , Apotome prima. Sit ergo ei
congruens DE . Erunt igitur ex defin. Apo-
tomæ primæ, BE , DE , Rationales poten-
tia tantum commensurabiles; poteritque

61. decimi.

BE , plus quam DE , quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis; & ipsa BE , Rationali BC , commensurabilis
erit longitudine. Rursus quia A , ponitur esse quoque ex
binis nominibus; erit latitudo eadem BD , ex binis nomi-
nibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen BF . Erunt igi-
tur ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima est, BF ,
 FD , Rationales potentia solum commensurabiles, pote-
ritque BF , plus quam FD , quadrato rectæ commensura-
bilis sibi longitudine; & ipsa BF , Rationali BC , longitudine
commensurabilis erit. Itaque cum tam BE , quam BF , lon-
gitudine sit commensurabilis eidem BC ; erunt quoque

12. decimi.

BE , BF , inter se commensurabiles longitudine. Igitur to-
ta BE , existente longitudine commensurabili parti BF ,
erit & eadem BE , reliquæ parti FE , longitudine commensurabilis,
ex coroll. propof. 16. huius libri; Atque adeo cum
 BE , Rationalis sit, & FE , Rationalis erit. Quoniam; ue-
ro duarum linearum BE , FE , longitudine commensura-
bilium,

bilium, ipsa BE, longitudine incommensurabilis est ipsi DE; (quod BE, DE, Rationales sint potentia solum commensurabiles) erit quoque altera FE, eidem DE, incommensurabilis longitudine. Sed & utraque FE, DE, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt FE, DE, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua FD, Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

14. decimi.

74. decimi.

COROLLARIUM.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ; neque inter se esse eadem.

QUADRATUM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

23. decimi.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen primam.

98. decimi.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen secundam.

99. decimi.

QUADRATUM uero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

100. decimi.

QUADRATUM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quartam.

101. decimi.

AT uero quadratum eius, quæ cuius Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quintam.

102. decimi.

QUADRATUM deniq; eius, quæ cū Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen sextam.

103. decimi.

ITAQUE cum hæc latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidē Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ uero Irrationales; inter se autem; quod ordine non sint eadem Apotomæ; Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & a Mediæ, & inter se se differre.

QUONIAM uero in hoc theoremate demonstrauimus Apotomen eandem nō esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primā, secundā, tertiam, quartam, quintam, & sextā: Ac uero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundā, tertā, quartā, quintam, ac sextā; quando constet, latitudines Apotomæ; & aliarum Irrationalium;

quæ

quæ post ipsam, eandem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam exposita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hæcenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.
4. Ex binis Medijs secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

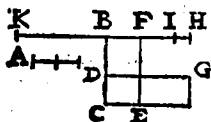
THEOR. 89. PROPOS. 113.

112.

o.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportionem; & adhuc Apotome, quæ sit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D; & ad B C, applicetur rectangulū B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportionem; & adhuc Apotomē B F, esse ordine eandem ipsi B C, ex binis nominibus. Applicetur enim rursus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; atque adeo rectangulo B E, latitudinem faciens D G; sitque ipsi D G, æqualis B H. Et quoniam æqualia sunt B E, C G; erit ut B C, ad D C, ita D G, hoc est, sibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo ut B D, ad D C, ita H F, ad F B: Est autem B D, maior, quam D C. Igitur & H F, maior est, quam F B. Ponatur F I, ipsi F B, æqualis; & fiat ut H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo ut H F, ad I F, hoc est, ad sibi æqualem B F, ita F K, ad B K. ostensum est autem esse ut H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque ut B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cum sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. Igitur & F K, B K, potentia solum commensurabiles sunt.



45. primi

45. primi

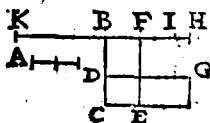
14. vel 16. sexti.

12. sexti.

10. decimi.

12. quinti

R V R S V S quia est ut H F, ad B F, ita F K, ad B K, erūt quoque H F, F K, antecedentes simul, nempe tota H K, ad B F, & B K, consequentes simul, hoc est, ad totam F K, ut F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis est inter H K, B K. Quare ut H K, pri-



ma ad B K, tertiam, ita erit, per coroll. propof. 20. lib. 6. quadratū ex H K, primā ad quadratum ex F K, secunda. Quia uero C G, cū Rationale fit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Ra-

21. decimi

tionalē D C, applicatum facit D G, latitudinem Rationale, ipsi D C, longitudine cōmensurabilem; Erit quoque H B, ipsi D G, æqualis, Rationalis & longitudine cōmensurabilis ipsi D C. Et quoniam ostensum est, esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K: Ut autē F K, ad B K, ita H K, ad F K; erit quoque ut B D, ad D C, ita H A, ad F K. Igitur ut quadratū ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, cōmensurabile est quadrato ex D C, (quod rectæ B D, D C, sint Rationales potentia cōmensurabiles, cum sint nomina ipsius B C, ex binis no-

22. sexti

minibus.) Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit ut quadratum ex H K, ad quadratū ex F K, ita recta H K, ad B K. Igitur longi-

10. decimi

tudine cōmensurabilis est H K, ipsi B K; atque adeo & reliquæ B H, ex coroll. propof. 16. huius lib. Ostensa est autem B H, Rationalis; Igitur & H K, illi commensurabilis, Ratio-

10. decimi

nalis est; ac propterea & B K, ipsi H K, commensurabilis, Rationalis existit. Cum ergo ostensa sit F K, ipsi B K, potentia solum commensurabilis; erit quoque F K, Rationalis. Quare cum F K, B K, Rationales sint, & potentia tantum ostensæ commensurabiles; erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod est primum.

74. decimi

Q U O N I A M uero ostensum est esse rectam H K, totam partē B K, longitudine commensurabilem; erunt propterea & B K, B H, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo B H, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi D C; erit quoque B K, ex scholio propof. 12. huius lib. eidem D C, longitudine commensurabilis. Rursus quia demon-

6. decimi

stratum

stratum est esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K; & permu-
rando ut B D, ad F K, ita D C, ad B K; Sunt autem modo
D C, B K, ostensæ longitudine commensurabiles; Erunt
quoque B D, F K, commensurabiles longitudine. Itaque
cum F K, ipsi B D, & B K, ipsi D C, longitudine sit commen-
surabilis; erunt ipsius Apotomæ B F, nomina F K, B K,
nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, longitu-
dine commensurabilia. Quod est secundum.

ITEM quia demonstrauius esse ut B D, ad D C, ita
F K, ad B K; erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, in
eadem ratione cum B D, D C, nominibus ipsius B C, quæ est
ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO uel B D, plus potest, quam D C, quadra-
to rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensu-
rabilis. Si plus potest B D, quam D C, quadrato rectæ sibi
longitudine commensurabilis; cum sit ut B D, ad D C, ita
F K, ad B K; poterit quoque F K, plus quam B K, quadra-
to rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si B D, plus
potest quam D C, quadrato rectæ sibi longitudine incommen-
surabilis; poterit & F K, plus quam B K, quadrato re-
ctæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem B D,
expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis;
erit & F K, quæ longitudine ostensa est commensurabi-
lis ipsi B D, commensurabilis longitudine eidem Ratio-
nali, per ea, quæ in scholio propos. 2. huius lib. demon-
strauimus. Si uero D C, sit Rationali commensurabi-
lis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Ratio-
nali longitudine commensurabilis. Si denique neutra ip-
sarum B D, D C, sit Rationali longitudine commen-
surabilis; erit quoque neutra ipsarum F K, B K, com-
mensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem

ordine est Apotome B F, ipsi B C, ex binis no-
minibus, ut constat ex definitionibus se-

cundis, atque tertijs. Quod est quar-

tum. Quadratum ergo Ratio-

nalis ad eam, quæ ex binis

nominibus, &c. Quod

demonstran-

dū erat.

10. decimi.

15. decimi.

14. decimi.

THEOR.

113.

THEOR. 90. PROPOS. 114.

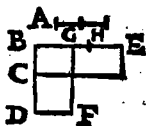
o.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionem; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

45. primi.

SIT Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD; & ad BC, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D,

45. primi.



CD, Apotomæ BC, & in eadem proportionem; & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eandem. Applicetur enim rursus ad BD, totam, rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinem

14. vel 16. sexti.

faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia sunt; erit ut BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conversionem rationis, ut BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundum proportionem BE, ad GE, ex ijs, quæ in scholio propof. 10. lib. 6. conscripsimus; ut sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est ut BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablata; erit quoque BH, reliqua ipsius BE, ad HE, reliquam ipsius GE, ut tota BE, ad totam GE: Erat autem ut BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoque ut BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BH, GH. Quare erit ut BH, prima ad GH, tertiâ, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propof. 20. lib. 6. Quia uero fuit ut BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantum

com-

commensurabiles; Erunt quoque BH , HE , potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex BH , HE , commensurabilia. Igitur rectæ BH , GH , eandem habentes rationem cum quadratis ex BH , HE , ut demonstrauius, longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota BH , longitudine commensurabilis existens parti GH , commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ BG , ex coroll. propos. 16. huius lib. At uero cum BD , Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ BC ; & rectangulum BF , quadrato ex Rationali linea A , æquale, Rationale; erit latitudo BG , Rationalis commensurabilis longitudine ipsi BD . Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & BH , eidem BD , Rationali commensurabilis est longitudine, atque adeo Rationalis existit; quandoquidem BH , BG , longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia uero BH , HE , ostensæ sunt commensurabiles potentia tantum, & BH , Rationalis; erit quoque HE , illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt BH , HE , potentia solum commensurabiles; Ac propterea BE , ex binis nominibus est. Quod est primum.

10. decimi.

10. decimi

21. decimi.

37. decimi.

QUONIAM uero ostendimus esse BH , ad HE , ut BD , ad CD ; atque adeo permutando BH , ad BD , ut HE , ad CD ; Ostensa est autem BH , ipsi BD , longitudine commensurabilis; erit quoque HE , ipsi CD , commensurabilis longitudine. Quare BH , HE , nomina ipsius BE , ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus BD , CD , Apotomæ BC . Quod est secundum.

10. decimi.

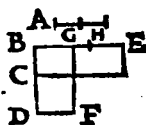
ITEM & in eadem proportionem, cum demonstratum sit esse BH , ad HE , ut BD , ad CD . Quod est tertium.

POSTREMO uel BD , plus potest quam CD ; quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; poterit quoque BH , plus quam HE , quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: Et si BD , plus potest, quam CD , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH , plus quam HE , quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD , Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH , commensurabilis existens longitudine ipsi

15. decimi

P si BD ,

si B D, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propof. 12. huius lib. Si uero C D, longitudine fit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione H E, ei-



14. decimi.

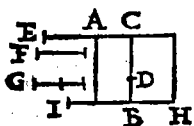
dem Rationali longitudine commensurabilis. Si uero neutra ipsarum B D, C D, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; erit quoque neutra ipsarum B H, H E, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atq; tertijs definitionibus, ipsa B E, ex binis nominibus, ordinè eadè est ipsi Apotomæ B C. Quod est quantum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionem, &c. Quod erat demonstrandum.

114.
o.

THE OR. 91. PROPOS. 115.

SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportionem; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

CONTINEATUR spatium AB, sub Apotomæ AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina C D, D B, commensurabilia sint nominibus C E, A E, Apotomæ AC;



& in eadem ratione, nempe C D, ad D B, ut C E, ad A E. Possit autem recta F, spatium A B : Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum

45. primi.
115. decimi

C H, æquale quadrato ex G. Erit ergo latitudo B H, Apotome, cuius nomina H I, B I, longitudine commensurabilia sunt nominibus C D, D B; & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, ut C D, ad D B; atque adeo ut C E, ad A E; & per-

& permutando, ut tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablata AE. Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, 19. quini.
ut tota HI, ad totam CE: Commensurabilis autem est lon- 12. decimi.
gitudine HI, ipsi CE, quod utraque HI, CE, commensu- 10. decimi.
rabilis fuit longitudine ipsi CD. Igitur & BH, ipsi AC, 1. sexti.
longitudinē est commensurabilis; Atque idcirco HC, ipsi
BA, commensurabile erit, cum sit ut HB, ad AC, ut
HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale,
Rationale erit. Igitur & BA, illi commensurabile, Ratio-
nale erit, propterea; & recta F, ipsum BA, potens, Ratio-
nalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apoto-
ma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina com-
mensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem pro-
portionē; Recta linea spatium potens, est Rationalis.
Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, fieri posse, ut spatium Rationale con-
tineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, con-
tentum sub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Ir-
rationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIUM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda
sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nomi-
nibus, commensurabilibus esse longitudine. In prioribus enim
duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In
posteriori vero, nempe in hac 115, nihil colligitur, si nomina
CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commensu-
rabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum
trium propositionum apparet.

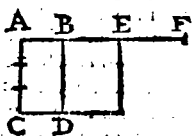
115.

THEOR. 92. PROPOS. 116.

107.

A MEDIA infinitæ Irrationales sunt,
& nulla alicui ante cedentium est eadem.

S I T Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propof. 112. huius lib. Exposita enim Rationali A C, contineatur sub A.B, Media, & Rationali A C, spatium A D. Est ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum, Irrationale, ex lemmate propof. 38. huius lib. Possit ipsum recta B E,



quæ ex defin. xj. Irrationalis erit. Dico B E, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propof. 112. huius lib. collegimus. Nam eum quadratum Medie ad Rationalem A C, applicatum, latitudinem faciat

23. decimi.

Rationalem ipsi A C, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines uel ex binis nominibus, uel Apotomas, ut constat ex propof. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At uero quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem a latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

Q u o d si compleatur rectangulum D E; erit & hoc contentum sub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propof. 38. Possit ergo ipsum recta E F, quæ ex defin. xj. Irrationalis erit. Dico rursus E F, non esse eandem alicui illarum tredecim, uel etiam ipsi B E. Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius B E, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes a B E, ut demonstratum est. Eodem modo & alie Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

118.

7.

PROPOSITVM. sit nobis ostende
re, in quadratis figuris diametrum lateri in-
commensurabilem esse longitudine.

Si r quadratum $ABCD$, in quo diameter AC . Dico
diametrum AC , longitudine incommensurabilem esse late-
ri AB . Si enim non est incommensurabilis, commensura-
bilis erit longitudine; ac propterea AC , AB , proportionē
habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC , ad
 AB , proportionem, quam numerus EF , ad numerum G ;
sintque numeri EF , & G , minimi omnium eandem propor-
tionem habentium. Quoniam ergo est ut AC , ad AB ,
ita numerus EF , ad numerum G ; Erit quoq;
ut quadratum ex AC , ad quadratum ex AB ,
ita quadratus numerus ex EF , ad quadratum
numerus ex G , (Cum enim quadrata ha-
beant suorum laterum proportionem duplicatā;
latera autē æquales habeant, proportionēs erunt
proportionēs quadratorū æquales etiā, cū sint
æqualium duplicatę.) Sed quadratū ex AC , duplū est qua-
drati ex AB , per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. osten-
dimus. Igitur & quadratus numerus ex EF , duplus erit
quadrati numeri ex G ; Ac propterea quadratus numerus
ex EF , cum dimidium habeat, atq; adeo bisariam possit di-
uidi, par erit, ex defn. Igitur & ipse EF , illum produ-
cens, par erit. (Si namq; impar esset, cum se ipsum multiplicās
producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar;
eo quod impar imparem multiplicans imparem procreet.
Quod est absurdum, ostensus est enim par.) Quia uero
 EF , & G , in sua proportionē minimi, inter se primi sunt;
& EF , ostensus est par, erit G , impar. (Si enim par etiam
esset, metiretur utrumque EF , & G , binarius; atq; adeo nō
essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam
par numerus EF , bisariam in H . Quia igitur numerus EF ,
duplus est numeri EH ; & quadrati habent proportionem
laterum duplicatā; erit quadratus ex EF , quadruplus



9. decimi.

20. sexti. &
11. octavi.

29. noni.

24. septimi.

11. octavi.

quadrati ex E H. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex E F, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex E H; qualem patitur 4. est quadratus ex E F, talium 2. erit quadratus ex G, & talium 1. quadratus ex E H. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, ut supra de numero E F, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter A C, lateri A B. Igitur incommensurabilis longitudine.

A L I T E R. Sit si potest fieri, diameter A C, commensurabilis longitudine lateri A B; habeantq; A C, A B, proportionem, quam numeri E F, & G, qui minimi sunt in sua proportione, atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, unitas. (Cum enim quadratum ex A C, duplum sit quadrati ex A B; sit autem ut quadratum ex A C, ad quadratum ex A B, ita quadratus numerus ex E F, ad quadratum numerum ex G, ut in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex E F, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est unitas, atque adeo & quadratus ex ea, unitas; erit quadratus ex E F, binarius. Quod est absurdum.) ergo numerus. Et quia, ut iam est demonstratum, quadratus ex E F duplus est quadrati ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex E F; ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri E F, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudine lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

S E D & affirmativè hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata

14. effiani.

monstrata a nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Es quia sumptis in proportionem dupla quocunque numeris ab unitate 1. 2. 3. 8. 16. 32. 64. &c. solum tertius ab unitate quadratus est, & ceteri omnes unum intermittentes; quod 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. primus ab unitate, nempe 2. quadratus non fit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

10. noni.

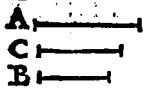
24. octavi.

9. decimi

Hoc etiā theorema aliter demonstravimus in scholio proposit. 8. lib. 8. & in scholio proposit. 9. huius libri.

C A T E R V M in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quadam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometria libris pendet, ut merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinet, visum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriae, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hac.

I N V E N T I S lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inveniuntur & alia quam plurima magnitudines, plana scilicet, atque solida incommensurabiles inter se. Sint enim recta A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. proposit. 20. lib. 6. ut A, ad B, ita est figura rectilinea quævis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque posita super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; erunt rectilinea illa figure super A, & C, incommensurabiles.



10. decimi.

2. duodecimi.

R V R S V S quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta.

P 4 Qua

11. quinti. Quadrata autem hæc, cum sint figura rectilinea similes, simili-
10. decimi. terq; posita, proportionem habent, quam rectæ A , & B , ex
coroll. propof. 20. lib. 6. Habebunt quoque circuli diametro-
rum A , C , eandem proportionem, quam rectæ A , B : Sed re-
ctæ A , B , incommensurabiles sunt longitudine. Igitur & cir-
culi diametrorum A , C , incommensurabiles sunt.

5. 6. uel 7. I AM uero si constituantur solida, nempe pyramides, vel
duodecimi. prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figura recti-
linea similes, similiterq; descriptæ super A , C ; habebunt py-
ramides, atq; prismata eandem proportionem, quam bases,
hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ il-
læ figuræ incommensurabiles sint, ut modo est demonstratum;
10. decimi. Incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyra-
mides, & prismata.

Q U O D si coni, uel cylindri æque altitudinis, quo-
rum bases circuli sint diametrorum A , C ; habebunt huiusmo-
di coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc
11. duode-
cimi. est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommen-
10. decimi. surabiles; Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cy-
lindri. Inuentæ sunt igitur non solum lineæ, & superficies in-
commensurabiles, uerum etiam & corpora, siue solida in-
commensurabilia. Quod est propositum.

F A D E M autem ratione, si rectæ A , & B , longitudine
10. decimi. cōmensurabiles sint, ostendemus earū figurarum rectilinearum similes,
5. 6. 7. & similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensu-
11. duode-
cimi. rables esse; atq; adeo & earundem pyramides, & prismata;
ac deniq; conos, & cylindros; si modo eandem habeant alti-
tudinem, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI DECIMI.



EUCLIDIS

ELEMENTVM. XI.

Et Solidorum primum.



DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinē, latitudinem, & crassitudinem habet.



OSTQVAM Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometria parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometrie, tanquam proprium, usurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinā

linearum commensurabilium, ac incommensurabilium, quas ideo luculentissime in libro decimo deinde exposuit, ut constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime disseritur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro undecimo eam partem Geometrie, quæ corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus; nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur, eam quantitatem,

quæ

qua præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita ut tres dimensiones possideat, nam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemque, appellari solidum, siue corpus, quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; qua vero longitudini latitudinem adiicit, superficies vocatur, ut in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, præcipiunt, ut imaginemur punctum aliquod e loco in locum moveri; hoc enim describit uestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quod punctum omnis sit magnitudinis expers; ut autem percipiamus superficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri; hac enim describet uestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in transversum est factus; Carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditum, consulunt, ut concipiamus superficiem aliquam æqualiter elevari, siue in transversum moveri; hac enim ratione describetur uestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, qua longa & lata existit; profundum vero seu crassum, propter elevationem illam, seu motum superficiæ. Hac ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta distincta a lineæ, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantum dimensio possit assignari, ut perspicue in commentariis, quos in spheram Ioannis de sacro bosco conscripsimus, a nobis fuit demonstratum ex Ptolemaeo in libello de Analemmate.

II.

SOLIDI autem extremum, est superficies.

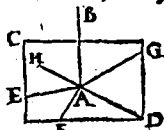
QUEMADMODUM linea finita in extremitatibus puncta,

puncta, superficies uero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit; ita nunc ais solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

LINEA recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

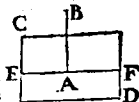
VT linea recta AB , plano CD , insitens, ita ut B , punctum sit in sublimi extra planum CD , at punctum A , in ipso plano, cum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum CD , cum rectos effecerit angulos cum lineis AE , AF , AD , AG , & cum omnibus alijs, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A . Hac enim ratione fiet, ut AB , equaliter insistas plano CD , & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet.



Nam producta recta DA , ad H , cum angulus BAD , ponatur rectus, erit quoque ei deinceps BAH , rectus. ideoque illi equalis. Eademque ratione protracta qualibet linea in plano CD , faciet AB , cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æqualiter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut AB , cum una linea ex A , in plano CD , educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB , recta ad planum CD . Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et e contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum dati rectam, demonstrandum erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos consicere.

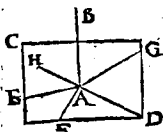
VT autem recta quæpiam plano cuiusvis, insitens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamque

ipsamq; tangentibus, satis est, ut cum duabus non efficientibus lineam unam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos efficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, ut perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam unam: quia si duæ lineæ componant unam rectam lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus alijs rectos conficere angulos. Recta enim $A'B$, insitit plano $C'D$, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis



$A'E$, AF , quæ rectam unam lineam componant. Dico $A'B$, non propterea cum omnibus alijs rectos angulos constituere, ac idcirco non esse rectam ad planum $C'D$. Hoc autem

perspicuum est, cum $A'B$, circa EF , veluti axem, circumversum queat, ita ut punctum B , modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum EF , semper eosdem rectos angulos, & æquales efficiat. Quod si ea-



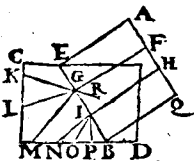
dem $A'B$, cum duabus angulum componentibus, quales sunt AG , AD , in priori figura, rectos constituas angulos, tunc demum cum omnibus alijs rectos angulos efficiet, ut diximus. Id quod dilucide demonstrabitur propos. 4. huius lib.

IIII.

PLANVM ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

INSISTAT planum AB , plano CD , ita ut lineæ AQ , sit in sublimi, hoc est, extra planum CD ; at EB , in plano: Sit autem horum planorum communis sectio EB , quæ, ut demonstrabitur propos. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem

antem sumptis quocumq; punctis G, I , ex ipsis in plano AB , ducantur GF, IH , perpendiculares ad communem sectionem EB . Si igitur linea FG, HI , ad planum alterum CD , recta fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis CK, GL, GM, IN, IO, IP , & cum alijs omnibus in plano CD , a punctis G, I , ductis, dicetur planum AB , ad planum CD , rectum;



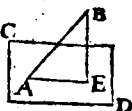
quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, sed aequaliter illi insister. Si enim KG , producat ad R , cum angulus FGK , ponatur rectus, erit & angulus ei deinceps FGR , rectus; ideoq; illi aequalis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD , sient utrobique a lineis FG, HI , anguli aequales. Quare planum AB , aequaliter plano CD , insister. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atq; a puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus ipsa insistente lineâ, & adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta AB , plano CD , non ad angulos rectos, sed inclinata, ita ut punctum B , sit extra planum in sublimi, punctum uero A , in plano. Deinde ex B , termino sublimi rectae AB , intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE , faciens in plano punctum E ; atq; ab E , ad A , adiungatur recta EA ; eritq; necessario angulus BAE acutus, cum in triangulo ABE , duo anguli B & E , diobus sint rectis minores, & angulus BEA , rectus. Angulus igitur acutus BAE , comprehensus linea insistente AB , & adiuncta AE , dicitur inclinatio rectae AB , ad dictum planum CD ; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio lineae AB , ad planum CD , quāvis est dictus angulus acutus BAE .

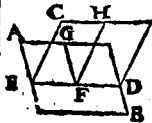
17. primi.



VI.

PLANI ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO AB , insistat planum CD , ita ut pars ad C , sit in sublimi extra planum AB , & pars ad D , in ipso plano AB , siq; CD , inclinatum ad AB , & communis eorum sectio sit DE . Si igitur ad D , communem sectionem ex eius puncto F , dua perpendiculares ducantur; FG , quidem in plano AB , at FH , in plano CD ; dicetur angulus acutus GFH , dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD , ad planum AB : Ita ut tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus



angulus acutus.

INTERDV Geometrae angulum GFH , dicunt angulum inclinationis plani CD , ad planum AB , siue is acutus sit siue rectus, obtususue; quanquam proprie solum angulus acutus inclinationem unius plani ad alterum ostendat, ut Euclides do-

des docet hoc loco: Rectus enim indicat potius equabilem elevationē vnius plani supra aliud, q̄ inclinationē vnius ad alterū; obusus vero recessum quodāmodo vnius ab altero. Verūtamen quia quilibet horū angulorū cōmōstrat sitū, seu elevationē vni⁹ plani supra alterū, generaliter dici cōsuevit a plerisq; angulus inclinationis omnis ille, qui cōprehēditur duabus rectis lineis, quæ in utroq; plano ad aliq̄ vñū punctū cōis illorū sectionis ducuntur perpendiculares; cuiusmodi est angulus $G F H$, siue is rectus sit, siue acutus, siue obusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atq; alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

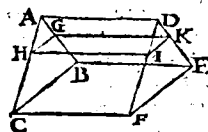
NON obscura est hæc definitio, præcedēti bene intellecta. Vnde planū ad planū magis inclinatū esse dicet, cui⁹ angul⁹ inclinationis minor existeris, atq; adeo a recto magis recesseris.

VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunq; partē, etiā infinite, producantur; hoc est, siue ad dexterā, siue ad sinistrā, & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt. n. quedā plana, quæ nec ad dexterā, nec ad sinistrā producta conueniunt; nec tamē ob id parallela sunt dicenda quia nimirū vel sursum, vel deorsum protracta, tandē coeunt. Nam si sumatur sectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum; remanentia duo plana non conueniunt, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio; idcirco non dicuntur parallela.

SIT enim tectum quoddam $AB C D E F$, contentum duobus planis $A B E D$, $A C F D$, cuius basis $B C F E$; auferaturq; fastigium $A G H D K I$. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana $G B E K$, $H C F I$, non convenire inter se, si ad partes $G B$, $H C$; vel ad partes $K E$, $I F$, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum



producta ad partes $G H$, $K I$, conveniant in fastigio $A D$. Ut igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, ut in nullam partem producta inter se conveniant. Sicut autem linea in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt esse protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atq; deorsum. Itaque duo plana quascunq;, vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; linea vero recta, vel sunt parallela, vel ad alteram partem protracta conveniunt, si nimirum in eodem existunt plano, vel tandem nec sunt parallela, nec unquam conveniunt, si videlicet in diversis sunt planis, & in transuersum posita: Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quæ nunquam conveniant.

IX.

SIMILES solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, uti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satis tamen esse iudicavit, ut brevitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, ut ex defin. 11. patet, cum illos constituent anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales;

æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

ÆQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continetur.

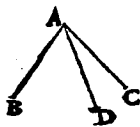
QVOD si plana similia, quibus corpora similia ex precedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figura solida non solum similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum inferitur angulorum solidorum æqualitas, ut in precedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, ut in lemma te propof. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent; ac propterea inter sese existunt æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVÆ lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad unum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, concentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quadam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum

larum planum, efficitur ad punctum A , angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel deniq; plures adiungeretur, licet anguli quātitas variaretur.



Dixit autem Euclides, lineas angulū solidū constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniā videlicet, si tres lineę AB , AC , AD , in eadē consisterent superficie, nō efficeretur angulus solidus ad punctum A , sed planus dūtaxat ex duobus planis BAD , DAC , compositus. Quod si AD sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB , AC , iam non componetur angulus planus totus ex BAD , DAC ; immo circa punctum A , tres plani consistent anguli BAD , DAC , CAB , qui ut mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineę, & idcirco plures quoque anguli plani.

A L I T E R .

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

H A E C definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti recte intellecta. Cū enim saltem tres lineę in eodē non existentes plano necessarię sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, ut angulus solidus efficiatur, ut ex superiori figura apparet. Angulus enim BAD , in plano est, in quo rectę AB , AD ; & angulus DAC , in plano, in quo rectę AD , AC ; angulus deniq; CAB , in plano, in quo rectę AC , AB ; atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A , constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad unum punctum consistant, in eodem tamen plano, non consuetur ex ipsis angulus, sed totus quidam angulus planus, ut supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiam si in diuersis sint planis. Hiabitis enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, ut tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consti-

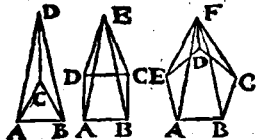
confistas. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pavimento domus, uel laqueari, ad unum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si una earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duæ superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

Ex his vero perspicuum cuius erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus solidis eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ, quam duæ, uel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac definitio angulus coni, qui unica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, una quidem plana, altera uero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

P Y R A M I S est figura solida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum constituta.

V I D E L I C E T figura solida a planis $A B C$, $A B C D$, $A B C D E$, ad puncta D , E , F , constituta appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad unum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum,



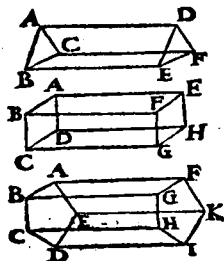
uel quadrangulum, uel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominatione sumit; ut uidelicet dicatur pyramis triangularis, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot. n. s. triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera

planum dictum continet. Vnde & basis pyramidis nuncupari solet planum huiusmodi. Vt pyramidis triangularis, præter basin, triacula sunt ABD, ACD, BCD : Quadrangula uero ABE, ADE, BCE, CDE : Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF .

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia uero parallelogramma.

FIGURAE scilicet solida, quarum plana aduersa & æqualia, & similia & parallela sunt triangula ABC, DEF :



vel quadrangula $ABCD, EFGH$: vel pentagona $ABCDE, FGHIK$, &c. Parallelogramma uero $ACFD, ABED, CBEF$: vel $ABFE, ADHE, CDHG, CBFG$: vel $ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG$; dicuntur prismata. Itaq; prisma nil aliud erit, quam columna quædam latera æqualis crassitudinis, cuius bases opposita sunt æquales, similes, & parallelae, siue hæc sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c.

Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quos latera, siue anguli in unoquoque oppositorum planorum reperiuntur, ut figurae indicant.

Ex his manifestum est, quantum hallucinentur ij. inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua uero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum una species prismatis, de-

finisio

finisio autem tradita infinita alia genera prismatis complectitur, ut constas; praesertim quod plurima demonstratione in hoc libro & 12. sequenti, ex aquo omnibus prismatibus conueniatis, perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac definitio colligunt. Sumpserunt autem forte hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propof. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propof. lib. 12. solum de eo prismate loquitur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduertunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersati, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quod tali prismati solū demonstratio illa conueniat. Quod si sola ea figura, ut ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Immo in corollario dictae propositionis septimae inferi Theon, Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, & altitudinem aequalem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quavis retilinea, aequalia tamen & similia, ut vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communis omnium sententia demonstrationes Theoni ascripta, sint Euclidis. Accedit etiam, quod a Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia solida, quae habent duo plana aduersa & aequalia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHÆRA est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, unde moueri cæperat, circumassumpta figura.

SICUT linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum; ita & semicirculus circa al-

terum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometra sphaeram appellant. Unde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, a quo omnes linea recta in peripheriam cadentes sunt aequales; propterea quod omnes aequales existant illi linea circumductae: Ita quoque in sphaera punctum reperitur, nempe medium diametri quiescens, hoc est, centrum semicirculi circumducti, a quo omnes rectae cadentes in peripheriam sunt aequales; eo quod omnes sint semidiametro dicti semicirculi aequales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphaera definiri poterit etiam hoc modo.

S P H A E R A est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam ab uno puncto eorum, quae intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectae lineae inter se sunt aequales.

C I C E R O in lib. de universitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαῖρος ἔστι Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radijs attingitur.

XV.

A X I S autem sphaerae, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

C E N T R V M sphaerae est idem, quod & semicirculi.

XVII.

D I A M E T E R autem sphaerae, est re-

Est quædam linea per centrū ducta, & vtrinque a sphaeræ superficie terminata.

Hæc tres definitiones non egent expositione; dummodo hoc solum noceatur, omnem diametrum sphaeræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphaera reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphaeræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphaeræ; propterea eam solam Euclides axem sphaeræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, unde moueri caperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si uero minor, Amblygonius: Si uero maior, Oxygonius.

Et si triangulum rectangulum ABC , circa latus quiescens AB , quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, describetur solida quadam figura, qua cõtineatur duabus superficiibus, circulari una, ac plana, quæ BC , latus alterum



circum angulum rectum, suo motu describit, & curva alia, eaq; connexa, quam latus AC , recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

QVOD si latus quiescens AB , aequale fuerit circumducto BC , ut in prima figura, dicetur conus descriptus orthogonius, seu reftangulus, quia videlicet angulus prope uerticem A , reftus est. Cum enim

3. primi



latera AB, BC , ponantur equalia; erit et angulus BAC , BCA , aequales; qui cum aequaleant uni

refto, eo quod ABC , fit reftus; erit BAC , semireftus. Eodemque modo angulus BAD , ex parte oppofita semireftus erit. Quare totus angulus CAD , reftus erit. Si uero quiescens latus AB , minus fuerit circumducto BC , ut in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusan- gulus; quoniam fcilicet angulus ad uerticem A , obtusus exi- stit. Cum enim BC , latus latere AB , fit maius; erit angu- lus BAC , maior angulo BCA . Quare cum hi duo equipol- leant uni refto, propterea quod angulus ABC , ponatur reftus, erit BAC , semirefto maior. Similiter BAD , maior erit se- mirefto, atque adeo totus CAD , refto maior erit. Si denique quiescens latus AB , maius fuerit circumducto BC , ut in tertia figura, appellabitur conus descriptus oxigonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad uerticem A , acutus est. Cum $n.$ latus AB , maius fit latere BC , erit & angulus BCA , angula BAC , maior. Quapropter cum hi duo uni refto aequaleant, eo quod angulus ABC , reftus ponatur, erit BCA , semirefto maior, ideoque reliquus BAC , semirefto minor. Non fecus ostendetur angulus BAD , minor esse semirefto. Igitur to- tus CAD , refto erit minor.

18. primi

18. primi

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa li- nea, circum quam triangulum uertitur.

VT in quolibet cono superius descripto axis est refta quie- scens AB .

XX.

BASIS uero conī est circulus, qui a circumducta linea recta describitur.

NIMIRUM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est *BC.* in superioribus conis. Ita que huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basin rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem conī descriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, ut ibi docebimus. Ita igitur scribis Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in utramque partem producat; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam; quousque ad eum locum redeat, a quo capit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiibus ad uerticem inter se se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, uoco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem uoco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter uerticē,

& cir-

& circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM conij, punctum, quod & superficie conicæ uertex est.

AXEM, rectam lineam, quæ a uertice ad circuli centrum perducitur.

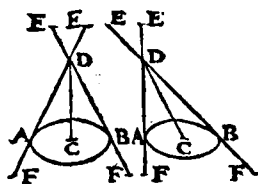
BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem uocæ, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS uero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium scripsit.

SIT circulus AB , cuius centrum C , & punctum aliquod sublime D ; iunctæque DB , in infinitum ex utraque parte producat ad puncta E, F . Si igitur recta linea DB , feratur eousque in circuli AB , circumferentia, quousque punctum B , rursus in eum locum restituitur, a quo capit moueri: descri-



perficiebus ad D , punctum se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB , ipsam describens in infinitum produciatur. Verticem superficiei dicit punctum D . Axem, rectam DC . Conum uero ap-

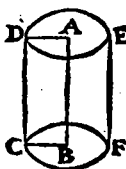
pellas figuram contentam circulo AB , & ea superficie, quam DB sola describit. Coni verticem, punctum D . Axem DC . Basim AB , circulum. Quod si DC , ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

XXI.

CYLINDRVS est, quando rectan
guli

guli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus reuoluitur, unde cæperat moueri, circumassumpta figura.

*V*ELUTI si rectangulum parallelogrammum $ABCD$, circa latus quiescens AB , circumuoluatur, donec integram expleas reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficieribus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD , BC , describunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus CD , describit, instar columnæ alicuius rotunda. Vnde factum est, ut Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

*N*EMPE recta AB , in superiori figura, dicitur axis cylindri.

XXIII.

BASES uero cylindri sunt circuli a duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

*Q*UAEQUE sunt circuli a lateribus AD , BC , oppositis descripti.

EUCLIDES uero solum cylindrum rectū hoc loco definit, cuius uidelicet axis rectus est ad utramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris sumus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, uisum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum uniuersæ, ut complectitur tam rectum, quam inclinatū. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

Si duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eū locum restituatur, a quo moueri cepit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies uocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLI N D R V S est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

CYLI N D R I bases sunt circuli ipsi.

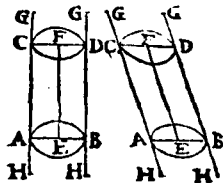
AX I S, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

LA T V S autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases utrasque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

CYLI N D R O R V M, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

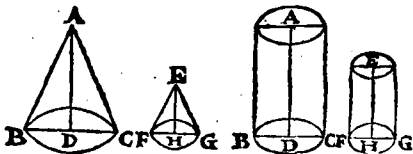
SINT duo circuli aequales, & aequidistantes AB, CD , quorum centra E, F , & diametri aequidistantes quoque AB, CD : Iunctaque recta AC , in infinitum ex utraque parte producatnr ad puncta G, H . Si igitur diametri AB, CD , circa centra E, F , in planis circularum semper aequidistantes, una cum recta AC , circumducantur, donec ad eum locum refluantur, unde moveri ceperunt; describetur a linea AC , superficies quadam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; qua & augetur in infinitum, cum recta AC , ipsam describens in infinitum producatnr. Cylindrum vero appellat figuram $ABDC$, circulis AB, CD , & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC , describis, comprehendit. Bases cylindri dicit esse circulos AB, CD . Axem, rectam EF , qua circularum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC . Quod si axis EF , perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.



XXIII.

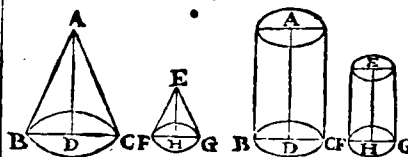
SIMILES conus & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, et basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos &



cylind-

cylindros secundū duas dimensiones esse similes, longitudinē scilicet ac latitudinē; Axis uero eosdē secundū profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni



ABC , EFG ; Itē duo cylindri; in conis autem axes AD , EH , & basium diametri BC , FG ; simili

ser & in cylindris: Itaque si fuerit, ut axis AD , ad axem EH , ita BC , diameter basis ad FG , diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se; quia uidelicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, ut diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt; Vel etiam, quia triangula ADB , EHF , ex quorum reuolutione descripti sunt coni, nec non rectangula AB , EF , quorum conuersiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit ut AD , ad EH , ita BC , ad FG ; Sit autem ut BC , ad FG , ita dimidia BD , ad dimidiam FH ; erit quoque ut AD , ad EH , ita DB , ad HF ; & permutando ut AD , ad DB , ita EH , ad HF . Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera circum aequales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula similia inter se erunt, & rectangula: Triangula quidem, propterea quod triangula unū angulum uniangulo habentia aequalem, & circum aequales angulos latera proportionalia, aequiangula sint, ideoque latera omnia circa angulos aequales habeant proportionalia, atque adeo inter se similia existant: Rectangula uero, eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD , DB , sint aequalia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habeant.

Quod si conī, vel cylindri fuerint inclinati, (de rebus enim duntaxat Euclides uerba fecit) dicentur & tum demum similes, quando eorum axes, & diametri basium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, aequales: qui quidem anguli accipiendi sunt, ut in definitione quinta dictum est. Sint enim conī inclinati, similiter & cylindri

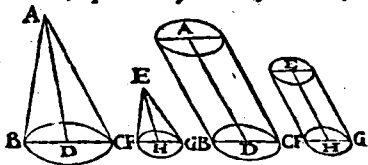
15. quinti

6. sexti.

4. sexti.

34. primi.

cylindri ABC , EFG : In conis autem axes sunt AD , EH , & basium diametri BC , FG ; similiter & in cylindris. Itaque si fueris tam in conis, quam in cylindris, ut AD , ad EH , ita BC , ad FG , existierintque anguli inclinationum ADB , EHF , tam in conis, quam in cylindris, aequales inter se; dicetur & conus inter se, &



cylindri quoque inter se se similes; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, ut supra diximus, & rursus tam triangula ADB , EHF , quam rectangula AB , EF , quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB , EHF , ponantur aequales, licet non sint recti.

XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triagulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub uiginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

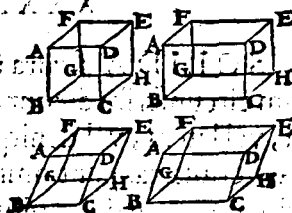
HÆC sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, eo quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, ut ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in *Tymæo* quinque mundi corpora, quæ simplicia a philosophis nuncupantur, nempe Calum, Ignem, Aerem, Aquam, atq; Terram, quinque dictis corporibus assimilet, ut in sphaera Ioannis a sacro bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propof. 11. Tetraedri vero propof. 13. Octaedri deinde propof. 14. Dodecaedri autem propof. 17. Icosædri denique propof. 18. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, ut ueram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque prædicta dari potest, ut demonstrabimus ad finem lib. 13.

QUONIAM vero in hoc lib. 11. frequens fit mentio *Parallelepipedi*, & in lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptiōneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit *Parallelepipedum*, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris, quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelae sunt, contenta.

VELUTI solida comprehensa sex quadrilateris figuris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH; Item DF, CG; Item AG, DH, sunt parallelae, nantur parallelepipeda, quæsi parallelis planis comprehensa. quæ quidem plana parallela opposita, sunt & equalia, & similia, & parallelogramma, ut demonstrabitur propof. 24. huius lib.



SUNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatæra, & rectangula, hoc est, quadrata, dicitur parallelepipedum illud, cubus, respondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatæra, sed altera pars longiora, quamuis duo sint æquilatæra, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint æquilatæra quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus: Si deniq; sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatæra, quamuis duo sint rectangula & æquilatæra, vel rectangula tantum, vel æquilatæra tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia & parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Ceterum quodcunq; parallelepipedum vocari etiam poteris Prisma, ut ex definitione prismatis constas.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

NON est necesse, ut anguli interioris figuræ constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: Sed satis est, ut omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita ut nullus angulus figuræ interioris insactus relinquantur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figuræ exterioris.

PRIMUM dua hæc postrema definitiones planius percipiuntur ex lib. 13. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusque multis corporum regularium copiose agitur.

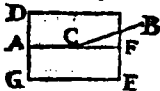
1.

THEOR. I. PROPOS. I.

RECTAE lineæ pars quædam non est
in su-

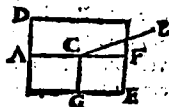
in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in subiecto plano DE, pars vero CB, in sublimi, ita ut omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta uero omnia partis CB, supra planum DE, existant, uel infra. Exit igitur in plano DE, ipsi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum posita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent segmentum AC, quod est absurdum, ut in pronunciato 13. lib. 1. demonstraui. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam uero in sublimi. Quod erat demonstrandum.



SCHOLION.

HÆC est communis demonstratio interpretum. Sed forte dicit aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe ut ostendatur, rectæ AC, esse aliquam rectam in plano DE, in directum, & continuum positam. Qui enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, esse in plano DE, partem uero CB, in sublimi, utique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fateatur ipsæ AC. Verumtamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem uolentius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, quæ ex æquali suas interioret lineas, hoc est, quæ recte, & æqualiter semper extenditur, ut & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatursque ad F, erit CF, recta rectæ AC, in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam id ipsum Geometrice, in plano uidelicet DE, ipsi AC, dari posse aliam rectam, quæ cum ipsa unam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat, AB, esse quoque rectam, eiusque partem AC, in plano DE, partem uero CB, in sublimi esse positam. Ducatur n. in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG;



R 2 & in

1. primi.

14. primi.

in eodem plano ipsi CG , perpendicularis CF . Dico CF , esse ipsi AC , positam in continuum & rectum. Cum enim AC , & FC , in eodem plano DE ; cum recta CG , duos rectos angulos constituent ACG , FCG , ex constructione; erunt A , C , & F , in directum & continuum posita. Quamobrem etiamsi quis contendat, AB , esse rectam, cuius quidem pars AC , in plano DE , subiecto, pars autem CB , in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE , erit alia recta, nempe CF , que cum AC , unam rectam constituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB , AF , sequentium commune habebunt AC . Quod est absurdum.

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atq; triangulum omne in vno est plano.

Rectæ lineæ AB , CD , se mutuo secant in E , & in E , B , E , D ; sumptis punctis F , & G , utcumque, ducatur recta FG , ut fiat triangulum EFG . Dico triangulum EFG , in vno esse plano; Item rectas AB , CD , in vno quoque plano existere. Si enim trianguli EFG , pars quædam, nimirum EHI , in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI , in sublimi, vel



contra; Existent quoque rectarum EFG , partes quidem EH , GI , in vno plano, partes vero HF , IF , in sublimi, vel contra. quod fieri non posse, iam supra demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem $EFAK$, in vno plano credatur esse, pars autem $GICK$, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EFG , partes quidem EK , FI , in vno plano, partes vero KG , IG , in sublimi, vel contra. Si denique eiusdem trianguli pars quidem FHK , in vno concedatur esse plano, pars vero EIK , in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FEG , partes quidem FH , GK , in vno plano, partes autem HE , KE ,

1. undeci.

K E, in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, vt est demonstratum. Quare triangulum E F G, in uno plano existit; eademq; est ratio in omni alio triangulo.

1. undec.

Q V I A vero, in quo plano est triangulum E F G, in eodem existunt eius latera E F, E G: In quo autem sunt rectæ E F, E G, in eodem sunt rectæ totæ C D, A B; ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ A B, C D, in uno plano, in quo nimirum triangulum E F G, consistere demonstraui-
mus. Quo circa si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.
Quod erat demonstrandum.

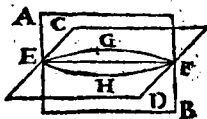
1. undec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI duo plana se mutuo secent, commu-
nis eorum sectio est linea recta.

S E C E N T se mutuo plana A B, C D, sitq; communis eorum sectio E F. Dico E F, esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano A B, recta E G F, & in plano C D, recta E H F. Rectæ igitur E G F, E H F, cum eisdem habeant terminos E, & F, superficiem inclu-
dent. Quod fieri non potest, vt in



12. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio E F, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo se-
cent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

A L I T E R. Secent se rursus plana A B, C D, sineque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta E F. Si igitur recta E F, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero E F, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur E G F, concludent rursus duæ rectæ E F, E G F, superficiem, cum eisdem habeant terminos E, & F. Si deniq; recta E F, in altero tantum plano

R 3 esse

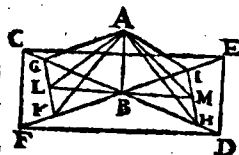
esse credatur, tunc si in altero ducatur recta E G F; indu-
dent iterum duæ rectæ E F, E G F, superficiem. Quod est
absurdum. Est ergo recta E F, in utroque plano A B, C D;
atque adeo communis eorum sectio est.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mu-
tuo secantibus, in communi sectione ad re-
ctos angulos insistat; Illa ducto etiam per
ipsas plano ad angulos rectos erit.

a. undec.



R E C T A linea A B, insistat duabus rectis C D, E F,
ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico re-
ctam A B, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per
ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo se-
cent in B; erunt ipsæ in uno plano, quod sit C E D F. Su-
mantur inter se æquales rectæ
B G, B H; Item rectæ B I, B K;
ducanturq; rectæ G K, I H; &
in eodem plano per B, ducatur
recta L M, secans rectas G K, I H,
in punctis L, & M. Demittan-
tur quoque ex A, puncto in su-

blimi ad idem planum rectæ A G, A L, A K, A H, A M,
A I. Quoniam igitur latera B G, B K, trianguli B G K, la-
teribus B H, B I, trianguli B H I, ex constructione sunt æ-
qualia; & anguli quoque ipsis contenti G B K, H B I, cum
sint ad uerticem B, oppositi, æquales: Erunt bases G K, H I;
inter se, & anguli B K G, B I H, inter se quoque æquales.

15. primi.

4. primi.

15. primi.

R V R S V S cum anguli K B L, I B M, ad uerticem B,
oppositi sint æquales; erunt duo anguli K B L, B K L, trian-
guli B K L, duobus angulis I B M, B I M, trianguli B I M,
æquales; Sunt autem & latera B K, B I, quibus adjacent,
æqualia, ex constructione. Igitur & reliqua latera K L,
L B, reliquis lateribus I M, M B, æqualia erunt.

26. primi.

P R A E T E R E A cum latera A B, B G, trianguli A B G,
æqualia

æqualia sint lateribus $A B, B H$, trianguli $A B H$, ex constructione; & anguli ipsius contenti $A B G, A B H$, æquales, nempe recti, ex hypothefi; erunt & bases $A G, A H$, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ $A I, A K$. 4. primi.

A M P L I V S quia latera $A I, I H$, trianguli $A I H$, lateribus $A K, K G$, trianguli $A K G$, æqualia sunt; & basis $A H$, basi $A G$, ex hactenus demonstratis; erunt etiam anguli $A I H, A K G$, dictis lateribus comprehensi, æquales. 5. primi.

I T A Q U E cum latera $A K, K L$, trianguli $A K L$, æqualia sint lateribus $A I, I M$, trianguli $A I M$; & anguli ipsius contenti $A K L, A I M$, æquales etiam, ut hactenus demonstrauimus; erunt quoque bases $A L, A M$, æquales. 4. primi.

Q U O N I A M denique latera $A B, B L$, trianguli $A B L$, æqualia sunt lateribus $A B, B M$, trianguli $A B M$; & basis $A L$, basi $A M$, ex demonstratis; erunt quoque anguli $A B L, A B M$, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. Quare recta $A B$, rectos angulos efficit cum recta $L M$, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B : Eademq; ratione ostendetur, rectam $A B$, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B , angulos rectos constitutere: Ac proinde recta $A B$, plano $C E D F$, quod per rectas $C D, E F$, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducta etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit. Quod demonstrandum erat. 5. primi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

S I recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

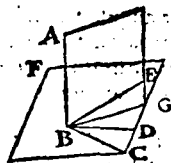
2. undec.

2. undec.

3. undec.

4. undec.

INSISTAT recta linea A B, tribus rectis lineis B C, B D, B E, secantibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas B C, B D, B E, in uno plano esse. Cum enim quilibet duarum in vno sint



plano, propterea quod productæ ad partes E, se mutuo secant in B; sint B C, B D, in plano F C; Et si fieri possit, recta B E, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. Quoniam vero duæ rectæ A B, B E, in vno sunt plano, cum se mutuo secant in B, in eadem in plano A E. Et quia plana F C, A E, sibi mu-

tuo occurrunt in B, necessario productæ se mutuo secabunt. Sit ergo eorum communis sectio recta B G. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis B C, B D, propterea & plano F C, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit recta B G, quia ipsam in B, tangit, ex defn. 3. huius lib. Quare recti anguli A B E, A B G, existentes in plano A G, per rectas A B, B E, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in uno plano F C, existentibus, non erit B E, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

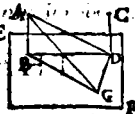
SI d^o rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, C D, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta B D, in plano E F, erunt anguli A B D, C D B, recti, ex defn. 3. huius lib. Iam in eodẽ plano E F, ducatur D G, ad B D, perpendicularis, ponanturq; æquales A B, D G. Connectantur deinde rectæ B G, G A, A D. Quoniam igitur latera A B, B D, trianguli A B D, æqua-

lia

lia sunt lateribus $G D, D B$, trianguli $G D B$, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti $A B D, G D B$, æquales, nempe recti. Erunt bases æquales $A D, G B$. Rursus quia lateribus $A B, B G$, trianguli $A B G$, æqualia sunt lateribus $G D, D A$, trianguli $G D A$, Est autem & basis commutativa $A G$. Erunt anguli $A B G, G D A$, æquales: Est autem $A B G$, rectus, ex definit. 3. huius lib. Igitur & $G D A$, rectus erit. Quomodo vero, ex eadem definit. angulus quoque $G D C$, rectus esset recta $G D$, tribus rectis $D B, D A, D C$, ad angulos rectos. Quare rectæ $D B, D A, D C$, in uno erunt plano: Est autem $A B$, in eodem plano, in quo $D B, D A$. Recta igitur $C D$, in eodem erit cum $A B$, plano. Quocirca cum anguli interni $A B D, C D B$, sint recti, erunt rectæ $A B, C D$, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eodem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

4. primi.



8. primi.

5. undec.

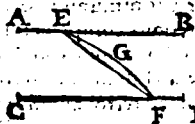
2. undec.

28. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis $A B, C D$, sumantur utcumque duo puncta E, F , quæ recta connectantur $E F$. Dico rectam $E F$ in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ $A B, C D$. Si enim recta $E F$, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra: scilicetiam aliud planum superficiem parallelarum, per puncta E, F , sitque communis sectio horum planorum $E G F$, quæ recta linea erit. Dug igitur rectæ $E F, E G F$, cum habeant eosdem terminos E, F , superficiem claudant. Quod est absurdum. Non ergo extra planum



3. undec.

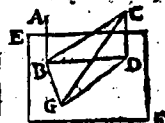
planum parallelarum AB, CD , erit recta $E F$. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodẽ est cum parallelis plano. Quod erat demonstradũ.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuiusdam plano fit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

19. primi.



4. septimi.

8. primi.

4. undec.

7. undec.

SINT parallelæ rectæ AB, CD ; sitque CD , plano EF , ad angulos rectos. Dico & AB , eidem plano EF , esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD , in plano EF ; erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB , rectus: Sunt autem duo CDB, ABD , duobus rectis æquales. Igitur & ABD , rectus erit. Iam in plano EF , ducatur BG , perpendicularis ad BD ; ponanturque æquales BG, CD . Coniungantur deinde rectæ DG, GC, CB . Quoniam igitur latera CD, DB , trianguli CDB , æqualia sunt lateribus GB, BD , trianguli GBD , ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti CDB, GBD , æquales, nimirum recti; Erunt bases CB, GD , æquales. Rursus quia latera CD, DG , trianguli CDG , æqualia sunt lateribus GB, BC , trianguli GBC ; & basis est communis CG ; Erunt anguli CDG, GBC , dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG , rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC , rectus erit. Quare recta GB , duabus rectis BD, BC , se mutuo tangentibus in B , ad rectos angulos existit; ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC , ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB ; propterea quod rectæ BD, BC , in eodem sint plano; in quo parallelæ AB, CD ; cum puncta B, C, D , existant in parallelis AB, CD . Igitur & GB , recta rectæ BA , ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum

recum $A B$, recta sit ad rectas $B G$, $B D$; erit quoque $A B$, recta ad planum per $B G$, $B D$, ductum, hoc est, ad planum $E F$. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

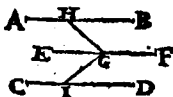
4. undec.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QV AE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

SINT rectæ lineæ $A B$, $C D$, ipsæ $E F$, parallelæ; non sint autem in eodem cum $E F$, plano. Dico $A B$, $C D$, parallelas quoque esse. Nam a quolibet puncto G , rectæ $E F$, ad ipsam $E F$, ducantur duæ perpendiculares; $G H$, quidem in plano parallelarum $A B$, $E F$; et $G I$, in plano parallelarum $C D$, $E F$.



$E F$. Quoniam igitur $E G$, recta est ad duas rectas $G H$, $G I$, se tangentibus mutuo in G ; erit recta quoque ad planum per ipsas $G H$, $G I$, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ $A B$, $E F$; & $E F$, sit recta ad planum per $G H$, $G I$, ductum; erit quoque $A B$, ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ $C D$, $E F$; Sit autem $E F$, recta ad planum per $G H$, $G I$, ductum; erit etiam $C D$, recta ad idem planum; Atque proinde rectæ $A B$, $C D$, cum rectæ sint ad idem planum per $G H$, $G I$, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

4. undec.

8. undec.

8. undec.

6. undec.

SCHOLIUM.

DAT A opera Euclides voluit, duas rectas $A B$, $C D$, non esse in eodẽ plano cũ recta $E F$, cui sunt parallela. Nā si foret in eodẽ plano cũ ipsa $E F$, essent $A B$, $C D$, inter se parallela.

ex 30. propof. 1. lib. Supermacaneum ergo effer, hūc idem de-
monſtrare.

10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes,
ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint paral-
lelæ, non autem in eodem plano : Illæ angu-
los æquales comprehendent.

SINT rectæ AB , AC , ſe tangentes in A , parallelæ re-
ctis DE , DF , ſe tangentibus in D ; non ſint autem AB ,
 AC , in eodem plano, in quo DE , DF . Dico angulos BAC , EDF , ab ipſis compre-
henſos eſſe æquales. Ponantur enim AB ,
 DE , inter ſe æquales, & AC , DF , inter ſe;
ducanturq; rectæ BC , EF , BE , AD , CF .
Quoniam igitur AB , DE , parallelæ ſunt
& æquales; erunt quoque BE , AD , paral-
lelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales
 CF , AD . Quare cū BE , CF , parallelæ & æquales ſint eidem
 AD ; erunt etiā BE , CF , inter ſe parallelæ, & æquales: Ac p-
pterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC , EF . Quia ergo
latera AB , AC , triāguli ABC , æqualia ſunt laterib⁹ DE , DF ,
triāguli DEF , ex cōſtructione; & baſis BC , baſi EF , æqualis,
vt modo demonſtrauiſus; Erunt & anguli BAC , EDF ,
dictis lateribus comprehenſi, æquales. Si igitur duæ rectæ li-
neæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum.

33. primi.

9. undec.

33. primi.

8. primi.

SCHOLIION.

CONCLUSIO huius theorematis vera etiam eſt, quā
do priores duæ lineæ in eodem ſunt plano cū duabus poſterio-
ribus. Sint enim quatuor lineæ AB , AC , DE , DF , in eodem
plano, ſitq; AB , ipſi DE , & AC , ipſi DF , parallelæ. Dico
angulos BAC , EDF , eſſe æquales. Nam ponantur æquales
 AB , DE , & AC , DF ; ducanturq; rectæ BC , EF , quæ aut

in una recta a linea erunt constitutae, aut non. Sint prius in una recta B F. Quoniam igitur parallelae sunt A B, D E; aequales erunt anguli A B C, D E F, internus & externus. Similiter aequales erunt anguli A C B, D F E; Sunt enim & A C, D F, parallelae. Quare duo anguli A B C, A C B, trianguli A B C, aequales sunt duobus angulis D E F, D F E, trianguli D E F. Igitur anguli quoque reliqui B A C, E D F, aequales erunt. Quod est propositum.

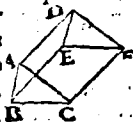
29. primi.



32. primi.

NON sunt item B C, E F, in una recta linea constitutae. Ductis rectis A D, B E, C F, cum A B, D E, sint parallelae & aequales; erunt & A D, B E, parallelae & aequales. Eadem ratione A D, C F, parallelae erunt & aequales; eo quod A C, D F, parallelae ponantur & aequales. Quare & B E, C F, eidem A D, parallelae existentes & aequales, inter se parallelae erunt & aequales. Ac proinde parallelae & aequales quoque erunt B C, E F. Itaque cum duo latera A B, A C, trianguli A B C, & B C, ba- aequalia sint lateribus D E, D F, trianguli D E F, & basi B C, ba- si E F; erunt anguli B A C, E D F, contenti dictis lateribus, aequales. Quod est propositum.

33. primi.



30. primi.

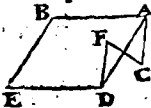
33. primi.

2. primi

C A E T E R U M ut conclusio huius theorematidis recte ex data hypothese colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (sive omnes sint in eodem plano, sive non,) ut tres rectae A D, B E, C F, nulla ratione se mutuo secant; ut ex prima, & ultima figura apparet. Nam alias conclusio vera non erit.

S U N T enim rectae A B, A C, rectis D E, D F, parallelae in hac figura; & tamen anguli B A C, E D F, quos comprehendunt, non sunt aequales, cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem id eo evenit, quod A D, C F, se mutuo secant.

Vnde quamvis A C, D F, sint parallelae & aequales, non tamen propterea A D, C F, quae eas coniungunt, parallelae sunt & aequales, propterea quod eas non coniungunt ad easdem partes, ut vult proposit. 33 lib. 1. Quare demonstratio huius theorematidis locum non habet, deficiente hac conditione; quae tamen in superioribus figuris servatur.



P R O-

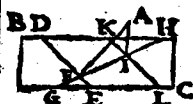
II.

PROBL. I. PROPOS. II.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

12. primi.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta ut-
cunque D E; ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F:



Quæ si fuerit perpendicularis ad pla-
num B C, factum erit, quod pro-
ponitur: Si uero non fuerit A F, ad
planum B C, perpendicularis, ducatur
in plano B C, per F, ad D E, per

18. primi.

12. primi.

31. primi.

4. undec.

8. undec.

2. undec.

4. undec.

perpendicularis G H; ad quam ex A, perpendicularis demittatur
A I. Dico A I, esse perpendicularem ad planum subiec-
tum B C. Ducta enim in plano B C, per I, ipsi D E, paral-
lela K L; cum D F, ad rectos angulos sit duabus F A, F H,
ex constructione, ac proinde recta ad planum per F A, F H,
ductum; erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H,
ductum recta. Quoniam uero A I, in eodem est cum re-
ctis F A, F H, plano, tangitq; rectam K I, in I; erit per de-
finitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atq; adeo
A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. Igitur A I, ad
planum per K I, I F, ductum, hoc est, ad planum B C, re-
cta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum pla-
num perpendicularem rectam lineam duximus. Quod fa-
ciendum erat.

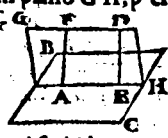
12.

PROBL. 2. PROPOS. 12.

DATO plano, a puncto, quod in illo
datum est, ad rectos angulos rectam lineam
excitare.

17. undec.

SIT a dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendi-
cularis ad datum planum B C. Ex quouis puncto D, in su-
blimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E: quæ
si ceci-

si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse.  sc ad planum datum BC. Cū enim DE, AF, parallele sint; & DE, recta ad planū BC, ex constructione, erit quoq; AF, ad idem planū BC, recta. Itaq; dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat

31. primi.

8. undec.

THEOR. II. PROPOS. 13.

13.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

SIT datum planum AB. Dico a datoq; puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB; & per CD, CE, quæ in uno eodēq; plano sunt, ducatur planum EG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defn 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datū est, duæ rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

1. undec.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planū AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planū AB; erunt ipsæ inter se paralele, cū tamē conueniant in puncto C. Quod est absurdū.

6. undec.

SCHOLIION.

EOD E M modo, a puncto in sublimi ad subiectum planum dua recta linea ad angulos rectos non demissentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi, ad subiectum planum BC,

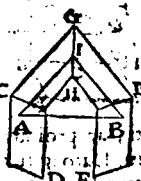
2. undec. *B C*, si fieri potest, est, due perpendicularares *A D*, & *E*. Ducatur per *A D*, & *E*, quae in uno plano sunt, planum *E G*, secans planum *B C*, per rectam *G H*. Cuius igitur *A D*, & *E*, rectae sunt ad planum *B C*; itaque per def. 3. huius lib. duo anguli *A D E*, & *E D*, recti, interni in triangulo *A D E*. Quod est absurdum; cum sint duobus rectis minores quolibet duo anguli in triangulo quous assumpti.
6. undec. *A L I E N*. Si *A D*, & *E*, rectae sunt ad planum *B C*, ipsae erunt inter se parallelae, cum tamen conveniant in puncto *A*. Quod est absurdum.

14.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

AD quae plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallelae.

3. undec. *S I* v. recta *A B*, ad plana *C D*, & *E F*, recta. Dico parallelae esse plana *C D*, & *E F*. Si enim non credantur esse parallelae, productae inter se convenient. Conveniant ad partes *C*, & *E*, & faciant communem sectionem rectam lineam *G H*. In qua sumpto puncto utrunque *I*, ducantur rectae *I A*, & *I B*, in planis *G C D*, & *E F*. Quia igitur *A B*, recta ponitur ad plana *G C D*, & *E F*; erunt per def. 3. huius lib. duo anguli *A B I*, & *I B A*, recti, in triangulo *A B I*. Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana *C D*, & *E F*, productae nunquam inter se convenient. Parallelae ergo sunt. Ad quae igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

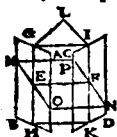


SCHOLIUM.

FACILE etiam demonstrari poterit inversum huius, videlicet. Si fuerint duo plana parallelae, recta linea, quae ad unum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT

SINT duo plana parallela AB, CD , ad quorum alterum AB , recta sit linea recta EF . Dico EF , rectam quoque esse ad planum reliquum CD . Secet enim planum aliquod, nempe GK , plana AB, CD , per lineam recta EF , incidens, faciatq; communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK : eruntque anguli GEF, HEF , recti, per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE . (Si enim aliter eorum, nempe IFE , dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE , duobus rectis minores. Quare recta EG, FI , ad partes G, I , convenient, nimirum in puncto L ; atque adeo & plana AB, CD , in quibus existunt, ad easdem partes convenient ad punctum L ; cum tota recta HGL , sit in uno plano, nempe in AB , producta; Item tota recta KIL , in uno quoque plano, nimirum in CD , protracta. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE .) Eodem modo si aliud planum videlicet MN , eadem plana secet per EF , faciens alias rectas, communes sectiones cum ipsis, MO, PN ; erunt anguli PFE, NFE , recti. Itaque cum EF , sit recta ad duas rectas IK, PN , recta quoque erit EF , ad planum CD , per ipsas ductum. Quod est propositum.



1. undec.

4. undec.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illas ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC , se tangentes in A , duabus rectis lineis DE, DF , se tangentibus in D , existentibusque in alio cum illis plano parallelæ. Dico & plana BC, EF , per ipsas ducta, esse parallela. Ex A , enim deducatur ad planum EF , perpendicularis AG , occurrens plano EF , in puncto G . Deinde in plano EF , per G , ducantur GH, GI ,

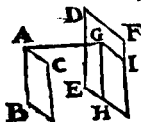
11. undec.

31. primi.

S ipsis

9. undec.
29. primi.

ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE: erunt & AB, GH, inter se parallelæ; Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit



4. undec.

14. undec.

& angulus BAG. Simili argumento concludetur, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC; recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. Igitur parallelæ sunt plana BC, DE. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema subsequens. Videlicet.

D A T O plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

31. primi

D A T U M planum sit AB, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vicunque duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, agatur CE, ipsi DB, parallela; Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EFC, per rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallela sint; parallela erunt plana AB, EFC, per ipsas ducta. Quod est propositum.

15. undec.

16.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam secentur

secuntur : communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECUNTUR plana AB, CD , plano EF , per rectas EH, GF . Dico communes sectiones eorum EH, GF , esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient. Cõueniant igitur in puncto I . Quia ergo tota recta HEI , in uno est plano, nimirum in $A B$, producta; Item tota recta FGI , in uno quoque est plano, uidelicet in CD , producta; conuenient etiã plana $A B, CD$, producta ad I . Quod est absurdum, cū ponantur parallelæ. Sunt igitur rectæ EH, GF , parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secuntur, &c. Quod erat demonstrandũ.



i. undec.

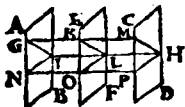
SCHOLION.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, ut hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum cõmunes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallelæ, parallelæ sunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantum sunt parallelæ, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theorema 30. lib. 1. nimirum.

QUAE eidem plano parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT duo plana AB, CD , plano EF , parallelæ. Dico & AB, CD , parallelæ esse. Secetur enim oĩa tria plana plano GH , sintq; cõmunes eorũ sectiones rectæ GI, KL, MH . Secetur rursum alio plano NH , sintq; communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH , hac tamen lege, ut duo plana secantia GH, NH ,



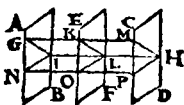
S 2 sc



se quoque mutuo secant, quarum sectio communis sit linea recta $H I$. Quia igitur parallela plana $A B$, $E F$, secantur plano $G H$, erunt communes sectiones $G I$, $K L$, parallelæ. Eodem modo parallela erunt $M H$, $K I$; atque adeo parallela erunt inter se $G I$, $M H$. Nō aliter ostendimus, parallelas esse $N I$, $P H$. Itaque cum $I G$, $I N$, se mutuo tangentes in I , parallela sint rectis $H M$, $H P$, se tangentibus in H , existentibusque in alio plano; erunt plana $A B$, $C D$, per ipsas ducta, parallela. Quod est propositum.

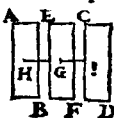
16. undec.

30. primi



15. undec.

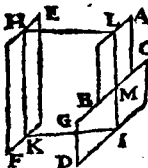
A L I T E R. Sumatur in tertio plano $E F$, punctū quodlibet G , a quo in utramque partem educatur ad planum $E F$, linea recta perpendicularis, occurrens plano $A B$, in puncto H , & plano $C D$, in puncto I .



Quoniam igitur linea $H G$, recta est ad planum $E F$, recta quoque erit ad planum $A B$, si bi parallelum, per ea, quæ in scholio propositi huius lib. demonstravimus. Eadem ratione $G I$, recta erit ad planum $C D$. Quamobrem cum recta $H I$ sit recta ad plana $A B$, $C D$; parallela inter se erunt plana $A B$, $C D$. Quod est propositum.

14. undec.

Q U O D si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conveniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conveniant, unam rectam constituunt lineam, veluti ad proposit. 30. lib. 1. demonstravimus. Sint enim plana $A B$, $C D$, plano $E F$, parallelæ, conveniantque producta secundum rectam $C G$. Dico plana $A B$, $C D$. unum planum constituere. Seces enim planum quodpiam $H I$, omnia tria plana per lineas rectas $H K$, $L M$, $M I$. Quoniam igitur parallela sunt plana $A B$, $E F$, erunt & communes sectiones $L M$, $H K$, parallela. Eadem ratione parallela erunt $I M$, $H K$. Quamobrem cum recta $L M$, $I M$, parallela sint ipsæ $H K$, existantque in eodem plano secante $H I$, & conveniant in M ; ipsæ erunt in rectum & continuum posse, per ea, quæ ad 30. proposit. 1. lib. ostendimus. Ac proinde plana $A B$, $C D$, unum



16. undec.

unum

unum planum efficiens; propterea quod recta LI , in uno iaceat plano. Quod est propositum.

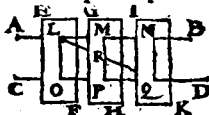
ITAQUE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conveniant, unum planum efficiens.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur; In easdem rationes secabuntur.

RECTÆ lineæ AB , CD , (siue eæ parallelæ sint, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transversum positæ, in diuersis existentes planis) secantur planis parallelis EF , GH , IK , in punctis L , M , N , O , P , Q . Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, ut quidem LM , ad MN , ita esse OP , ad PQ .



Ducantur enim rectæ LO , NQ , in planis EF , IK , & coniungatur recta LQ , occurrens plano GH , in R , puncto, a quo ad puncta M , P , rectæ ducantur RM , RP , in eodem plano GH . Eritque triangulum LNQ , in uno plano: similiter triangulum LOQ , in uno plano. Quoniam uero plana parallela GH , IK secantur plano trianguli LNQ , erunt communes sectiones eorum MR , NQ , parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP , LO . Quam ob rem erit ut LR , ad RQ , ita LM , ad MN ; Item ut LR , ad RQ , ita OP , ad PQ ; Ac proinde ut LM , ad MN , ita OP , ad PQ . Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur, &c. Quod erat demonstrandum.

2. undec.

16. undec.

2. sexti.

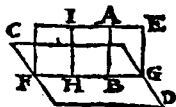
THEOR. 16. PROPOS. 18.

18.

SI recta linea plano cuiquam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, pla-

na eidem plano ad rectos angulos erunt.

S I T recta A B, ad planum C D, recta. Dico omnia plana per rectam A B, ducta, esse recta ad idem planum C D. Ductum enim sit per A B, planum E F, secans planum C D, per rectam lineam F G. Sumpto deinde puncto H, utcunque in recta F G, ducatur in plano E F, ipsi A B, parallela H I. Quoniam igitur anguli A B H, I H B, duobus rectis sunt æqua-



31. primi

29. primi

8. undec.

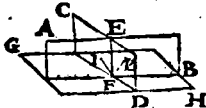
les: Est autem A B H, rectus, per 3. defin huius lib. erit & angulus I H B, rectus. Rursus quia A B, ponitur recta ad planum C D; erit quoque I H, ad idem planum C D, recta. Eadem ratione erunt omnes I n e æ, quæ in plano E F, ipsi A B, ducentur parallelae, ad planum C D, rectæ: Quæ cum ducantur in plano E F, ad communem sectionem F G, perpendiculares; rectum erit planum E F, ad planum C D, per defin. 4. huius lib. Similique argumento ostenduntur omnia alia plana per rectam A B, ducta ad planum C D, esse recta. Si igitur recta linea plano cuiuspiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

19.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

S I N T duo plana A B, C D, se mutuo secantia per lineam rectam E F, ad planum G H, recta. Dico communem illorum sectionem E F, rectam quoque esse ad idem planum G H. Aut enim E F, ad B F, D F, communes sectiones



planorum A B, C D, cum plano G H, recta est, aut non. Si recta est E F, ad B F, D F, recta quoque erit ad planum G H,

4. undec.

GH, quod per ipsas ducitur. Si uero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum; Sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum CD, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano CD, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

11. primi

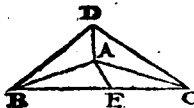
13. undec.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

20.

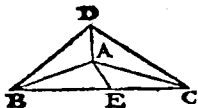
SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATUR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si uero duo tantum sint æquales, & tertius utrovis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si unus, uidelicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quælibet horum



S 4 cum

23. primi.



cum maximo illo BAC , reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC , maiores quoque esse angulos duos BAD , DAC . In plano enim per AB, AC , ducto fiat angulus BAE , angulo BAD , æqualis; & recta AE , æqualis rectæ AD . Deinde in eodem plano per E , extendatur recta BC , secans rectas AB, AC , in B , & C ,

4. primi.

20. primi.

coniunganturque rectæ BD, DC . Quoniam igitur latera AD, AB , trianguli BAD , æqualia sunt lateribus AE, AB , trianguli BAE ; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; erunt bases BD, BE , æquales. Quia uero latera DB, DC , maiora sunt latere BC ; si demantur æquales rectæ BD, BE , relinquetur recta CD , maior quam CE . Cum igitur latera AD, AC , trianguli DAC , æqualia sint lateribus AE, AC , trianguli EAC ; & basis CD , maior basi CE ; erit angulus CAD , angulo CAE , maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE , erunt duo anguli CAD, BAD , maiores duobus angulis CAE, BAE , hoc est, toto angulo BAC , qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde quilibet duo multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendū.

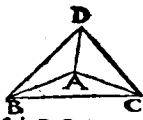
25. primi.

21.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis, continetur.

SIT angulus solidus A , contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB . Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis



BC, CD, DB , erunt constituti tres anguli solidi B, C, D , quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B , sub CBA, ABD, DBC . At C , sub BCA, ACD, DCB ; D , uero sub CDA, ADB, BDC .

B D C. Quoniam uero duo anguli C B A, A B D, maiores sunt angulo C B D; similiterque duo anguli B C A, A C D, maiores angulo B C D; & duo anguli C D A, A D B, maiores angulo C D B: erunt sex anguli C B A, A B D, B C A, A C D, C D A, A D B, tribus angulis C B D, B C D, C D B, maiores: Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi una cum tribus ad A, æquales sint sex rectis, propter triangula tria B A C, C A D, D A B, (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) Si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus &c. Quod erat demonstrandum.

20. undec.

32. primi.

32. primi.

SCHOLIUM.

QUONIAM hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendimus hoc modo.

SIT angulus solidus quicumque contentus quocunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoque minores. Nam si omnibus angulis planis recte subiendantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumque, sub quos angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambiens. Unde omnes anguli horum triangulorum (cum anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales)

bis tot rectis erunt æquales, quos angulos continet basis; Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, & horum

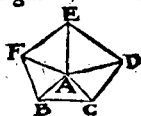


32. primi

horum

20. vndet. horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorundem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum component, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

VERVM ut res melius percipiat, sis gratia exempli angulus solidus A , contentus quinque angulis planis BAC ,



CAD, DAE, EAF, FAB , quibus subtrahantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB , ita ut constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in an-

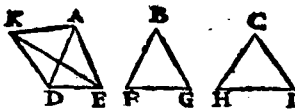
bis quinque triacula, tot videlicet, quot anguli plani component angulum solidum A . Quia vero omnes anguli quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB , æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis $BCDEF$, æquales sunt sex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B , tribus planis angulis ABC, ABF, CBF , contineatur; erunt duo CBA, ABF , qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF , qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A , constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, ut dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in alijs omnibus angulis solidis.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, ut ex lineis æquales illas rectas

rectas cōnectentibus triangulū cōstituatur.

S I N T tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus A D, A E, B F, B G, C H, C I, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis D E, F G, H I, quæ rectas illas æquales cōnectunt, triangulū posse cōstitui; hoc est, trium rectarū D E, F G, H I, quaslibet



duas reliqua esse maiores, Nam hoc posito, ex ipsis triangulū facile conficietur. Quod enim duæ D E, F G, maiores sint, quam H I. ita ostēdetur. Fiat angulus D A K, angulo B, æqualis, cadatq; primo A K, ad partes A D, ita ut fiat totus quidā angulus E A K, ex duobus E A D, D A K, cōpositus; quod quidē cōtinget, quādo duo anguli D A E, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur autē A K, ipsi A D, æqualis, cōnectanturq; rectæ K D, K E. Quoniam igitur latera A K, A D, triāguli A K D, æqualia sunt lateribus B F, B G, triāguli B F G, & anguli ipsi cōtinenti D A K, & B, æquales; erūt & bases K D, F G, æquales. Rursus quia latera A K, A E, triāguli A K E, æqualia sunt lateribus C H, C I; & angulus E A K, maior angulo C; propterea quod duo anguli D A E, & B, maiores ponuntur angulo C; erit & basis E K, maior base H I: Sunt autē rectæ E D, D K, maiores recta E K. Igitur multo maiores erūt E D, D K, quā H I. Cū ergo D K, ostēsa sit æqualis rectæ F G; erūt quoq; D E, F G, maiores quā H I. Quod est, ppositū.

22. primi.

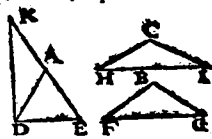
23. primi.

4. primi.

24. primi.

20. primi.

CADAT secundo A K, in rectum & cōtinuum ipsi A E, quod quidē accidet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturq; A K, ipsi A D, æqualis rursū, & cōnectatur recta K D. Erit igitur, ut prius, K D, ipsi F G, æqualis. Quoniam uero rectæ E D, D K, maiores sunt recta K E, & K E, æqualis est rectis C H, C I, ex hypothesi, & cōstructione; erunt quoque



4. primi.

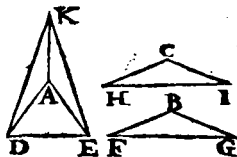
20. primi.

E D, D K, maiores duabus C H, C I: Hæ autem maiores sunt, quam H I. Igitur multo maiores erunt E D, D K, quam H I. Cum ergo D K, ostēsa sit æqualis ipsi

20. primi.

ipsi FG ; erunt quoque DE , FG , maiores quam HI . Quod est propositum.

CADAT postremo AK , ad partes AE , ita ut nec angulus totus componatur ex angulis EAD , DAK ; nec recta sit EAK ; quod demum eveniet, quando duo, anguli DAE , & B , duobus rectis sunt maiores. Ponaturque rursus AK , ipsi AD , æqualis, & ducatur rectæ KD , KE . Erit igitur, ut prius KD , ipsi FG , æ-



4. primi.

21. primi.

20. primi.

22. primi.

4. primi.

4. primi.

24. primi.

24. primi.

23. primi.

qualis. Quoniam uero duæ DE , DK , maiores sunt duabus AE , AK ; & AE , AK , æquales duabus CH , CI , ex hypothesi, & constructione; erunt quoque DE , DK , maiores quam CH , CI : Hæ autem maiores sunt, quam HI . Igitur multo erunt maiores DE , DK , quam HI . Cum ergo DK , ostensa sit æqualis ipsi FG ; erunt quoque DE , FG , maiores quam HI . quod est propositum. Eodem modo concludemus DE , HI , maiores esse, quam FG , si angulus DAK , angulo C , fiat æqualis; Item FG , HI , maiores, quam DE , si angulo C , ad FG , constituatur angulus æqualis, &c. Quare ex tribus rectis DE , FG , HI , triangulum cõstitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Si tres anguli A , B , C , sunt æquales; erunt quoque bases DE , FG , HI , æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si uero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor; erunt quoque duæ illorum bases æquales, & basis tertij utraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua.



Quod si unus eorum, nempe A , sit maximus, siue reliqui B , & C , sint inter se æquales, siue inæquales; erit quoque basis DE , omnium maxima. Quare DE , FG , maiores erunt quam HI : Item DE , HI , maiores, quam FG . Dico iam & rectas FG , HI , maiores esse recta DE . Fiat enim angulus DAK , æqualis angulo B , ponaturque AK , ipsi AD , æqualis, . Cadet ergo punctum K ,

infra

infra D E ; propterea quod per puncta D , K , E , transeat
circumferentia circuli ex A , ad interuallum A D , descripta ,
ob æqualitatem rectarum A D , A K , A E . Connectantur
deinde rectæ D K , K E . Quoniam igitur duo anguli B , &
C , maiores ponuntur angulo D A E ; & B , æqualis est an-
gulo D A K , per constructionem ; erit angulus C , maior re-
liquo angulo K A E . Et quia latera A D , A K , trianguli
A D K , æqualia sunt lateribus B F , B G ; trianguli B F G ;
& anguli ipsis contenti D A K , & B , æquales ; erit basis
D K , basi F G , æqualis . Rursus quia latera C H , C I ,
trianguli C H I , æqualia sunt lateribus A K , A E , trianguli
A K E ; & angulus C , ostensus maior angulo K A E ; erit
& basis H I , maior base K E . Quare cum D K , ostensa sit
æqualis ipsi F G ; erunt F G , H I , maiores quam D K , K E :
Sed D K , K E , maiores sunt , quam D E . Igitur multo
maiores erunt F G , H I , quam D E . Quod est propositū .

4. primi.

24. primi.

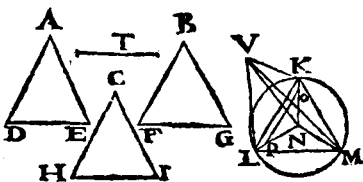
20. primi.

PROBL. 3. PROPOS. 23.

23.

EX tribus angulis planis , quorum duo
quomodocunque assumpti reliquo sunt
maiores , solidum angulum constituere .
Oportet autem illos tres angulos quatuor
rectis minores esse .

SINT tres anguli A , B , C , quatuor rectis minores ,
hac cōditione , ut quilibet duo sint maiores reliquo . Oportet
iam ex tribus angulis A , B , C , angulum solidum conficere ,
qui nimirum con-
tineatur tribus an-
gulis planis , qui di-
ctis tribus angulis
sint æquales . Pon-
antur sex lineæ
angulos dictos cō-
prehendentes , nē-
pe A D , A E , B F ,
B G , C H , C I , æquales ; subtendanturque bases D E , F G ,
H I . Fieri ergo potest , ut ex D E , F G , H I , triangulum con-

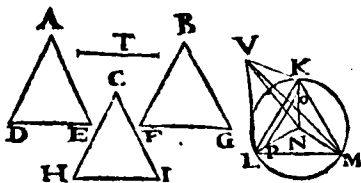


2. un lec

stituitur.

3. quarti.

stirnatur. Constituat^r ex ipsis igitur triangulū KLM, sicq;
latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG; & latus KM,
rectæ HI, æquale. Describatur circa triangulum KLM, cir-



culus, cuius centrū
N, a quo ducan-
tur rectæ NK, NL,
NM. Enīq; quæli-
bet rectarum angu-
los planos compre-
hendentū, nempe
AD, AE, &c.
maior qualibet du-

8. primi.

ctarum ex centro N. Quod ita ostenditur. Cadat primo
centrū N, intra triangulū KLM; quod quidem fiet, quando
triangulū est oxygenium. Si igitur AD, AE, maiores non
credantur, quā NK, NL, erūt uel æquales, uel minores. Sint
ergo æquales. Quoniā igitur latera AD, AE, triāguli ADE,
æqualia sunt lateribus NK, NL, triāguli NKL; & basīs
DE, basī KL, æqualis: erit angulus A, angulo KNL, æqua-
lis Eodē argumento erit angulus B, angulo LNM; & angu-
lus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa
N, æquales sint quatuor rectis, ex coroll. propof. 15. lib. 1. erūt
quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est
absurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores Non igitur
æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neq; mi-
nores. Si. n. minores sint AD, AE, quā NK, NL; abscindan-
tur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP.
Quoniā igitur est ut NK, ad NO, ita NL, ad NP, cū & an-
tecedētia inter se, & cōsequentia sint inter se æqualia; erunt
latera NK, NL, triāguli NKL, secta proportionaliter; ac
proinde OP, ipsi KL, parallelā erit. Quare anguli NOP,
NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum
NOP, triāgulo NKL, æquiangulum. Igitur erit ut NK, ad
KL, ita NO, ad OP. Est autē NK, maior quā NO. Igitur
& KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quā
OP. Quocirca cū latera AD, AE, triāguli ADE, sint æqua-
lia lateribus NO, NP, triāguli NOP; & basīs DE, maior base
OP; erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadē ratione
angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, ma-
ior

2. sexti.

29. primi.

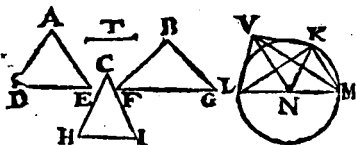
4. sexti.

14. quinti

25. primi

ior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N , quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propof. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C , maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE , quā NK, NL ; sed neq; æquales: Igitur maiores.

CADAT secundo centrum N , in latus LM ; quod tum continget, quando triangulum KLM , angulum LKM , habuerit rectum. Si igitur AD, AE , dicantur esse æquales ipsis NK, NL ; erunt quæ BF, BG , æquales eisdē NK, NL . Cum ergo NK , æqualis sit ipsi NM ; æquales erunt BF, BG , rectæ LM : Po-



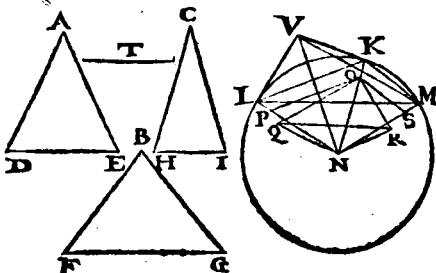
lita autē fuit LM , æqualis ipsi FG . Igitur BF, BG , æquales quoq; sunt rectæ FG . Sunt autē & maiores BF, BG , quā FG . Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE , ipsis NK, NL . Quod si AD, AE , minores credantur, quam NK, NL ; erunt quoq; BF, BG , minores quā NK, NL . Cū ergo NK , æqualis sit ipsi NM ; minores erunt BF, BG , quā recta LM : Posita autem fuit LM , ipsi FG , æqualis. Igitur BF, BG , minores quoq; sunt rectæ FG . Quod est absurdum, cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE , quam NK, NL ; sed neque æquales: Igitur maiores.

20. primi.

20. primi.

CADAT postremo centrū N , extra triāgulum KLM ,

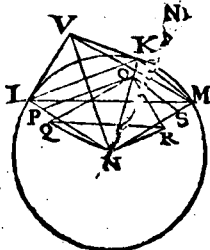
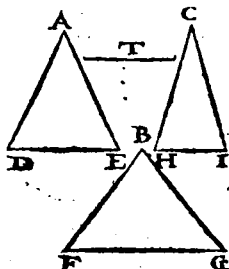
infra latus LM ; quod demum accider, quādo angulus LKM , fuerit obtusus. Si igitur dicatur AD, AE , esse æquales ipsis



NK, NL ; cū & basis DE , basi KL , ponatur æqualis; erit angulus A , angulo KNL , æqualis. Eadē ratione angulus C , angulo

8. primi.

8. primi.



maiorē ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur equales sunt A D, A E, ipsis N K, N L, quod si A D, A E,

23. primi

29. primi

4. primi

lo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit: Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & basis NM, basi FG, æqualis; erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorē ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur equales sunt AD, AE, ipsis NK, NL, quod si AD, AE, credantur esse minores, quam NK, NL; Si abscondantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP, demonstrabitur, ut in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadē ratione angulus C, maior angulo KNM. Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis: ponanturque NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetq; OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transeat circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. Quare cum angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadeit enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam uero latera AD, AE, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem; erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus

& angulus LKM , maior angulo QOR , ut ostendimus: erit basis LM , hoc est FG , maior base QR . Quoniam igitur latera BF , BG , trianguli BFG , æqualia sunt lateribus NQ , NR , trianguli NQR ; & basis FG , maior base QR , erit angulus B , maior angulo QNR . Rursus quia angulus ONQ , angulo A ; & angulus ONR , angulo C , factus est æqualis, erit angulus totus QNR , duobus A , & C , æqualis: Sed A , & C , maiores ponuntur angulo B . Igitur & angulus QNR , maior erit angulo B . Quod est absurdum, cum B , ostensus sit maior angulo QNR . Non ergo minores sunt AD , AE , quam NK , NL ; sed neque æquales: Igitur maiores.

24. primi.

25. primi.

IAM uero, cum rectæ AD , AE , maiores sint rectis NK , NL , ubicunque centrum N , existat; possit recta AD , plus quam recta NK , quadrato lineæ T , per lemma propof. 14. lib. 10. ita ut quadratum rectæ AD , æquale sit quadratis rectarum NK , & T . Ex centro N , excutetur ad planum circuli KLM , perpendicularis NV , rectæ T , æqualis; connectanturq; rectæ KV , LV , MV . Quoniam igitur NV , recta est ad planum circuli KLM , recta quoque eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK , NL , NM ; ac proinde quadratum rectæ VK , quadratis rectarum KN , NV , æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD , æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN , NV ; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK , & AD . Ac propterea æquales erunt rectæ VK , AD . Rursus quia latera VN , NK , trianguli VNK , æqualia sunt lateribus VN , NL , trianguli VNL ; & anguli ipsis contenti VNR , VNL , recti; erit basis VK , æqualis basi VL ; Atq; eadem ratione rectæ VM . Quare tres rectæ VK , VL , VM , æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK , æqualis rectæ AD . Tres ergo rectæ VK , VL , VM , æquales sunt rectæ AD , & ob id, rectis AE , BF , BG , CH , CI . Quamobrem, cum latera VK , VL , trianguli VKL , æqualia sint lateribus AD , AE , trianguli ADE ; & basis KL , basi DE ; erit angulus KVL , angulo A , æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum $LV M$, angulo B ; & angulum KVM , angulo C , esse æqualem. Quare angulus solidus V , continetur tribus angulis planis KVL , $LV M$, MVK ,

12. undec.

47. primi.

4. primi.

8. undec.

T qui

qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

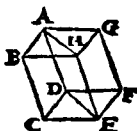
24.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum AB EF, (de hoc enim intelligēda est propositio) contentum iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarū aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC; erunt communes sectiones AB, DC, parallelæ. Similiter cum plana

26. undec.



parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam

opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemq; argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit ut AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea ut BH, ad HG, ita CE, ad EF, &c. eadē de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis ita diametris AH, DE; cū latera AB, BH, triânguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, triânguli DCE; & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, ut ostensum est; erunt triângula ABH, DCE, æqualia inter se. Quare cū triângula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabim⁹, similia & æqualia esse parallelogram-

30. undec.

34. primi.

34. primi.

10. undec.

4. primi.

3. primi.

lelogrāma opposita AC, GE, & AF, BE. Si solidū ergo paral-
leli planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogram-
ma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

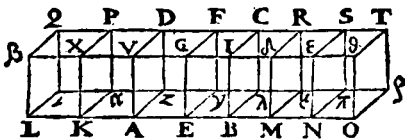
THEOR. 22. PROPOS. 25.

25.

SI solidum parallelepipedum plano se-
cetur aduersis planis parallelo: Erit quem-
admodū basis ad basim, ita solidū ad solidū.

SECEPVR parallelepipedū ABCD, plano EF, paral-
lelo oppositis planis AD, BC. Dico ut est basis AG, ad basim
BG, ita esse solidū AEFD, ad solidū BEFC. Intelligat enim
parallelepipedū ABCD, productū in utramq; partē quan-
tumlibet, sumaturq; in AB, protracta quocunq; rectæ AK,
KL, ipsi AE; & quocunq; rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æ-

qua $\frac{a}{b}$. Dein-
de per pūcta
K, L, M, N,
O, ducantur
plana KP,
LQ, MR,



NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, p scholion appos. 15.
huius lib. Quoniā igitur solidū AEFD, cōtinetur planis pa-
rallelis ex hypothesi, ipsum erit parallelepipedū, ex definitio-
ne, habebitq; plana opposita, parallelogrāma, similia, & æqua-
lia. Eodē mō erūt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF,
BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebūtq; plana
opposita, parallelogrāma, similia, & æqualia. Quoniam uero
parallelogrāma AK, KV, LX, cū sint sup. æquales bases AE,
AK, KL, æqualia sunt; & similia quoq; cū anguli unius sint
æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æ-
qualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportio-
nalia. Eademque ratione æqualia, & similia sunt parallelo-
grāma AY, KZ, LZ. Cū ip̄it æqualia quoq; sint, & similia pa-
rallelogrāma AD, KP, LQ; Erūt tria plana AG, AY, AD,
solidi AEFD, æqualia, & similia tribus planis KV,
KZ, KP, solidi AKPD; & tribus planis LX, LZ,
LQ; solidi KLQP: Sunt autē tria in unoquo-

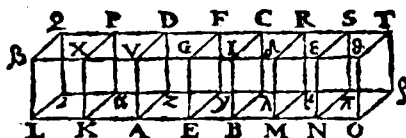
24. undec.

36. primi.

29. primi.

24. undec.

que solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe A G, ipsi Z F; & A Y, ipsi V F; & A D, ipsi E F, &c. Igitur per defin. 10. huius libri, æqualia sunt solida A E F D, A K P D, K L Q P. Eodem argumento æqualia ostendentur solida E B C F, B M R C, M N S R,



NOTS.

Quare quam multiplex est basis L G, basis A G, tam multiplex erit

solidum L E F Q, solidi A E F D; Et quam multiplex est basis O G, basis B G, tam multiplex erit solidum O E F T, solidi B E F C. Quoniam uero si basis L G (multiplex basis A G, primæ magnitudinis,) æqualis est basi O G, (multiplici basis B G, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum L E F Q, (multiplex solidi A E F D, tertiæ magnitudinis) solido O E F T, (multiplici solidi B E F C, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus L G, O G, æqualibus existentibus, æqualia quoque sint & similia sex parallelogramma solidi L E F Q, sex parallelogrammis solidi O E F T: Si autem basis maior est base, solidum quoque solido maius est; & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut basis A G, prima magnitudo, ad basin B G, secundam magnitudinem, ita solidum A E F D, tertia magnitudo, ad solidum B E F C, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis D Y, ad basin C Y; & ut basis A Y, ad basin B Y; & ut basis D G, ad basin C G. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

H A E C propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo, eris quemadmodum basis ad basin, ita solidum ad solidum. Sis enim primo prisma A B C D E F, cuius plana aduersa sunt triangula A B C, D E F, seceturq; plano G H I, aduersis

neris planis parallelo. Dico ut est basis AI , ad basin FI , ita esse solidum $ABCIHG$, ad solidum $FEDIHG$. Intelligatur prisma $ABCDEF$, in utramque partem quantumlibet productum,

et ex A F , producta utrinque; capiantur quotcumque recta AK , KL , ipsi AG ;



et quotcumque recta FM , MN , NO , ipsi FG , equales. Deinde per puncta K , L , M , N , O , ducantur plana KPQ , LRS , MTV , NXY , $OZ\alpha$, parallela planis ABC , GHI , FED , per scholion propof. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC , GHI , secantur plano AI ; erunt communes sectiones AC , GI , parallela: Sunt autem et AG , CI , parallela ex hypothesi, ob parallelogrammum AD . Igitur parallelogrammum est AI . Rursus quia plana parallela ABC , GHI , secantur plano AH ; erunt communes sectiones AB , GH , parallela: Sunt autem et AG , BH , parallela, ob parallelogrammum AE . Igitur parallelogrammum est AH . Eodem modo parallelogrammum ostendetur CH . Quoniam vero latera AC , AB , trianguli ABC , equalia sunt lateribus GI , GH , trianguli GHI ; cum AC , ipsi GI , et AB , ipsi GH , sit equalia; et anguli CAB , IGH , sunt quotque equalia, eo quod rectae CA , AB , parallelae sint rectis IG , GH , et non in eodem plano: Erunt triangula ABC , GHI , equalia inter se, et aequiangula. Quare latera circum equalia angulo proportionalia habebunt; Ac idcirco similia erunt. Igitur solidum $ABCIHG$, contentum duobus planis oppositis ABC , GHI , equalibus et similibus, atque parallelogrammis AI , IB , BG , prisma est. Eadem arte prismata erunt $ABCQPK$, $KPQ SRL$; $FEDIHG$, $FEDVTM$, $MTVYXN$, $NXY\alpha ZO$, $LRSIHG$, $OZ\alpha IHG$. Quoniam vero parallelogramma AI , KC , LQ , equalia sunt et similia; necnon AH , KB , LP ; et CH , QB , SP ; Erunt omnia plana prismatis $ABCIHG$, equalia et similia omnibus planis prismatum $ABCQPK$, $KPQ SRL$. Quare, per defin. 10. huius lib. equalia erunt prismata $ABCIHG$, $ABCQPK$, $KPQ SRL$. Eadem ratione equalia erunt

16. undec.

16. undec.

34. primi.

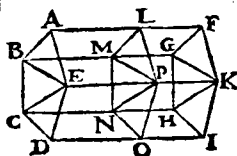
10. undec.

4. primi.

4. sexti.

prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYAZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; Et quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma OZαIHG, prismatis FEDIHG. Quia uero si basis LI, (multiplex basis AI, prima magnitudinis) equalis est basi OI, (multiplici basis FI, secunda magnitudinis;) equale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertia magnitudinis,) prismati OZαIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quarta magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus equalibus, equalia quoque sint & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. ut basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, ut est basis AH, ad basin FH: & ut basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

Si T secundo prisma ABCDEFGHIK, cuius oppo-



sita plana sint polygona, nēpe pentagona, seceturq; plano LMNOP. Dico rursum, ut est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluan-

tur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, que demonstrata sunt. Eodem modo erit ut basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPNQ, ad prisma NOPKHI. Ut autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, ut CN, ad NH; Et ut CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNQ, ad prismata

1. fixi.

L M-

$LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI$, eandem habent proportionem ei, quam habet CM , ad NG ; ac proinde eandem inter se. Ut autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit ut prisma $BCEPMN$, ad prisma $MNPKGH$, hoc est, ut basis CM , ad basin NG ; ita prisma $ABCEDELMNOP$, ex tribus compositum ad prisma $LMNOPFGHIK$, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.

12. quinsi.

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua usi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producat prisma in utranque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se aequalia, & similia; propterea quod latera eorum sint parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum; ac proinde angulos aequales comprehendant, &c. Unde, ut prius, ostenditur prismata ex una parte inter se aequalia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

16. undec.

10. undec.

COROLLARIUM.

Ex his inferitur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante; Sectionem esse figuram æqualem. & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est, in priori prismate, triangulum GHI , æquale esse & simile triangulo ABC , atque adeo triangulo DEF . Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

PROBL. 4. PROPOS. 26.

26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

Si T ad punctum A , in data recta AB , constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C , cõrecto tribus angulis planis DCE, DCF, FCE , non in eodẽ plano existentibus. Ducat ex F , ad planũ p CD, CE , ductũ perpendicularis FG ;

11. undec.

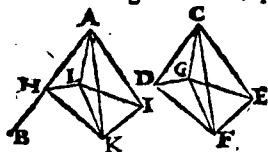
T +

connc.

29. *primi.*

connectanturq; rectæ D F, D G, E F, E G, C G. Deinde abscindatur A H, æqualis ipsi C D, fiatq; angulus H A I, angulo D C E, æqualis; & recta A I, rectæ C E, æqualis. Rursus in plano per A H, A I, ductum constitutur angulus H A L, angulo D C G, qui in plano per C D, C E, ducto existit; & recta A L, rectæ C G, æqualis. Ex L, vero ad planum, in quo sunt tres A H, A L, A I, erigatur perpendicularis L K, quæ ipsi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta K A. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis H A I, H A K, K A I, equalem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis H K, H L, I K, I L, cum latera A H, A L, trianguli A H L, æqualia sint lateribus C D, C G, trianguli C D G; & anguli H A L, D C G, æquales, per constructionem; Erunt bases H L, D G, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus H A L, D C G, ab æqualibus H A I, D C E, reliqui æquales sunt L A I, G C E: Cum igitur & latera A L, A I, trianguli A L I, æqualia sint lateribus C G, C E, trianguli C G E, per constructionem; æquales quoque erunt bases L I, G E. Quia igitur latera L H, L K, æqualia sunt lateribus G D, G F; & anguli H L K, D G F, recti, ex defin. 3. huius lib. erunt & bases H K, D F, æquales. Quare cum & latera A H, A K, trianguli A H K, sint æqualia lateribus C D, C F, ex constructione; Erunt quoque anguli H A K, D C F, æquales. Denique quia latera L I, L K, sunt æqualia lateribus G E, G F; & anguli I L K, E G F, recti, ex defin. 3. huius lib. Erunt bases I K, E F, æquales: Cum igitur & latera A I, A K, trianguli A I K, lateribus C E, C F, trianguli C E F, sint æqualia, ex constructione; Erunt quoque anguli I A K, E C F, æquales. Sunt ergo tres anguli plani H A I, H A K, K A I, solidum angulum A, componentibus, æquales tribus angulis planis D C E, D C F, F C E, angulum solidum C, componentibus; Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaq; rectam lineam, eiusq; punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendū.

12. *undec.*



4. *primi.*

4. *primi.*

4. *primi.*

8. *primi.*

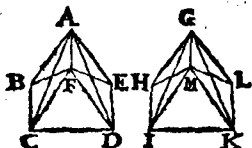
4. *primi.*

8. *primi.*

SCHOLION.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendenda erunt omnibus angulis planis recta in uno eodemq; existentes plano, (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita ut figuram planam polygonam constituent, pyramisq; quadā multilatera efficiatur. Si enim figura polygonā in triangula resolnatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quot triangula in figura polygonā continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium aequales solidi anguli constituentur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido equalis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus equalis, subtendenda sunt, angulis planis recta BC, CD, DE, EF, FB, ut fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula resolnatur BCF, FCD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus equalis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, equalis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, equalis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, equalis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido equalis angulus solidus constituetur.



PROBL. 5. PROPOS. 27.

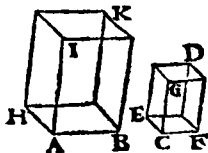
27.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT

26. undec.

12. sexvi.



24. undec.

28.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

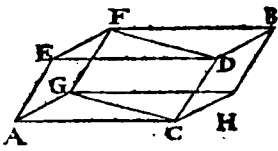
SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum : Bifariam secabitur solidum ab ipso plano .

S i t parallelepipedum A B, in quo plana opposita sint A H,

S i t a data recta A B, describendum paralle'epipedum simile, similiterq; positum parallelepipedo C D. Fiar ad rectam A B, eiusq; punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita ut tres anguli plani H A I, I A B, B A H, æquales sint tribus angulis planis E C G, G C F, F C E. Deinde ut est C F, ad C G, sic fiat A B, ad A I, & ut C G, ad C E, ita A I, ad A H; eritq; ex æquo, ut C F, ad C E,

ita A B, ad A H. Post hæc, perficiatur parallelepipedum A K, completis nimirum parallelogrammis B H, H I, I B, & per I, B, H, ductis planis I K, B K, H K, quæ parallela sint parallelogrammis B H, H I, I B. Dico parallelepipedum A K, parallelepipedo C D, simile esse similiterq; positum. Cum enim anguli B A H, F C E, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe ut B A, ad A H, ita F C, ad C E, ex constructione; erunt parallelogramma H B, E F, similia, similiterq; posita. Eadem ratione similia erunt, similiterq; posita parallelogramma H I, E G; & I B, G F. Tria igitur plana B H, H I, I B, solidi A K, similia sunt, similiterq; posita tribus planis F E, E G, G F, solidi C D. Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis.

Quare sex plana solidi A K, similia sunt, similiterq; posita sex planis solidi C D; Ac proinde, ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterq; posita, solida A K, C D. A data ergo recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.

A H, E B, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ C G, D F. Quoniam igitur utraque C D, G F, parallela est, & æqualis ipsi A B, cum sint parallelogramma C E, G E, erunt & inter se parallele, & æquales C D, G F. Ac proinde, quæ ipsas coniungunt C G, D F, parallele erunt, & æquales, ideoq; in uno plano. Dico planū quod per C G, D F, ducitur, secare bifariam parallelepipedum A B. Cum enim plana A H, E B, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangu-


 la tera circa angulos æquales G A C, C H G; F E D, D B F, proportionalia, Igitur similia quoque erunt dicta triangu-
 la. Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale sit & si-
 mile parallelogrammo C B; & A D, ipsi G B; & C F, com-
 mune: Erunt duo triangu-
 la A G C, E F D, & parallelo-
 grammum A F, A D, C F, prismatis A C G F E D, æqualia
 & similia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrā-
 mis C B, B G, C F, prismatis H G C D B F; propterea-
 que prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum
 componant parallelepipedum A B, sectum erit parallelepi-
 pedum A B, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum
 plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

34. primi.

9. undec.

33. primi.

24. undec.

6. sexti.

24. undec.

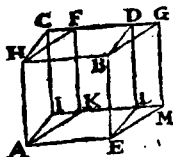
THEOR. 24. PROPOS. 29.

29.

SOLIDA parallelepipeda super ean-
 dem basin constituta, & in eadem altitudi-
 ne, quorum insistentes lineæ in iisdem col-
 locantur rectis lineis: sunt inter se æqua-
 lia.

SUPER basin A B, in eadem altitudine, hoc est, inter
 eadem

eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda $A C D E, A F G E$, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe



35. primi.

$A I, A K, E L, E M$, in recta $I M$; & $H C, H F, B D, B G$, in recta $C G$. Dico parallelepipeda $A C D E, A F G E$, esse inter se equalia Cum enim equalia sint parallelogramma $A L, A M$, super eadem basi $A E$, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato communi

trapezio $A E L K$, equalia quoque triangula $A I K, E L M$.

34. primi.

Quoniam uero omnia latera trianguli $A I K$, equalia sunt omnibus lateribus trianguli $H C F$; erit triangulum $A I K$, triangulo $H C F$, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; Ac propterea latera circa æ-

4. sexui.

quales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum $E L M$, triangulo $B D G$, æquale erit & simile. Rursus quia parallelogrammum $A C$, æquale est, & simile parallelogrammo $E D$; & eadem ratione parallelogrammum $A F$, parallelogrammo $E G$; Sed & $I F$, ipsi $L G$, cum bases $I K, L M$, sint æquales, (Nam cum rectæ $I L, K M$, æquales sint ipsi $A E$, erunt quoque inter se æquales; quare communi dempta $K L$, æquales erunt $I K, L M$.) Erunt omnia plana prismatis $A I K F C H$, æqualia & similia omnibus planis prismatis $E L M G D B$.

24. undec.

36. primi.

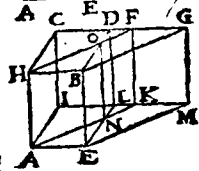
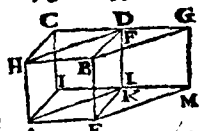
34. primi.

Igitur ex defn. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido $A H F K L D B E$, æqualia fient parallelepipeda $A C D E, A F G E$. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

$H A E C$ propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere medijs, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, ut ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K , in punctum L , cadit, vel ultra L , eodem modo demonstrabuntur, ut in his si-

his figuris apparet. Nam in secundo casu si ex parallelogram-



mis aequalibus AL, AM , auferatur
triangulum commune ALE , erunt re-
liqua triangula AIK, ELM , aequa-
lia. Vnde, ut prius, aequalia erunt
prismata $AIKFCH, ELMGDB$.
Addito ergo prismate cōi $AKEBHD$,
equalia fiet parallelepipeda $ACDE,$
 $AFGE$.

In tertio uero casu, si ex parallelo-
grammis aequalibus AL, AM , dema-
tur triangulum commune ANE ,
erunt reliqua trapezia $AILN,$

$NKME$, aequalia; quibus si addatur triangulum commune
 KLN , tota triangula AIK, ELM , aequalia fient. Vnde,
ut prius, aequalia erunt prismata $AIKFCH, ELMGDB$;
a quibus si auferatur prisma commune $KLNO$ DF; (Nam
communis sectio planorum AF, DE , est recta NO .) remane-
bit solidum comprehensum planis $AILN, NOHA, AICH,$
 $HCD, CDLI, DLNO$, aequale solido contento planis
 $ENKM, MKFG, GFOB, FKN, O, BGME, EBON$.
Si igitur addatur utrique prisma cōmune $AENOBH$; fient
parallelepipeda $ACDE, AFGE$, inter se aequalia.

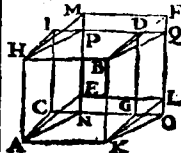
THEOR. 25. PROPOS. 30.

30.

SOLIDA parallelepipeda super ean-
dem basin constituta, & in eadem altitudi-
ne, quorum insistentes lineæ nō ī iisdem col-
locantur rectis lineis: inter se sunt aequalia.

SUPER basin AB , in eadem altitudine, hoc est, inter
eadē plana parallela, sint constituta parallelepipeda $AIDK,$
 $AMFK$, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis ba-
sis excurrentes $AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF$, non
sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD , protractæ
transcant per puncta M, E, F, L , neque CG, ID , produ-
ctæ,

æ, &c. Dico parallelepipedum A I D K, A M F K, esse æqualia. Cum enim plana C D, E F, opposita basi A B, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ C G, I D, quarum C G, secet E M, L F, protractas in punctis N, O; Et I D, eisdem in punctis P, Q; adiunganturque rectæ A N, K O, H P, B Q. Quia igitur rectæ P Q, M F, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo F P; & M F, ipsi H B, est æqualis; erunt & P Q, H B, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter



34. primi.

33. primi. parallelogrammum H, I D B. Igitur & H P, B Q, parallelæ sunt & æquales, ideoq; parallelogrammum est H P Q B. Eadem ratione parallelogramma erunt H P N A, A N O K, K O Q B: Est autem & parallelogrammum N O Q P. Igitur parallelepipedum est A P Q K. Quamobrem parallelepipedum A I D K, æquale est parallelepipedo, A P Q K, cum utriusque eadem sit basis A B, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem C O, I Q. Eodem modo eidem parallelepipedo A P Q K, æquale erit parallelepipedum A M F K, cū utriusque eadem sit basis A B, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem N M, O F. Quare parallelepipedum A I D K, A M F K, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipedum super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

29. undec.

S C H O L I O N.

CONVERTITUR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipedum æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocantur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si unum dicatur aliud; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum,

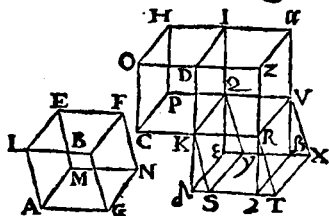
abscissum, & reliquum. Cum igitur & totum huic reliquo po- 29. vel 30.
natur aequale, aequale eris abscissum totum. Quod est absurdum. undec.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

31. 32.

SOLIDA parallelepipedata super æ-
quales bases constituta, & in eadem altitu-
dine: æqualia sunt inter se.

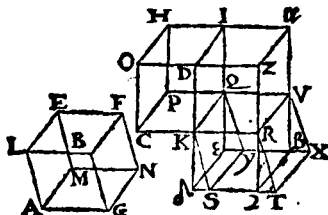
SUPER æquales bases AB, CD, in eadē altitudine sint
constituta parallelepipedata A EFG, CHIK. Dico hæc paral-
lepipeda esse æqualia inter se. Sint. n. primū insistentes lineæ
AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH,
DI, ad basin CD, per-
pendiculares. Quo po-
sito, erunt omnes di-
ctæ perpendiculares in-
ter se æquales, propter
eandem parallelepipe-
dorum altitudinem.
Producatur CK, in
rectum, sitq; KR, æ-



qualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso
æqualis angulo BLA, ponaturq; KS, æqualis ipsi LA, & per-
ficiatur parallelogrammum KT, super quod, ad altitudinē
perpendicularis KQ, construatur parallelepipedū QSTV.
Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LP,
LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma
KT, LG, æqualia & similia. Rursum quia latera KQ, KS, æ-
qualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti,
per defin. 2. huius lib. eo quod & Q. LE, rectæ ponantur ad
plana KT, LG; erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia
& similia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia sint
lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem de-
fin. 3. huius lib. erunt quoq; parallelogramma KV, LF, æ-
qualia & similia. Quare cū tria plana KT, QS, KV, paral-
lepipedi QSTV, æqualia sint & similia tribus planis LG, EA, 24. undec.
LF, parallelepipedis A EFG; Tā aut illa, quæ hæc æqualia sint
& simi-

24. undec. & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda $QSTV$, $EAGF$, inter se æqualia.

CONVENIANT rectæ DK , TS , productæ in δ ;



& IQ , XY , in ϵ , compleaturq; parallelepipedum $Q\delta\gamma V$. Itē $H\iota$, βV , protractæ conveniant in α ; & OD , γR , in Z , perficiaturq; parallelepipedum $IKR\alpha$. Quoniam igitur parallele-

pipeda $QSTV$, $Q\delta\gamma V$, eandē habent basin KV , suntq; in eadem altitudine, nempe inter eadē plana parallela KV , δX , & insistentes ipsorum lineæ KS , $K\delta$, RT , $R\gamma$; QY , $Q\epsilon$, VX , $V\beta$, collocantur in eisdem rectis δT , ϵX ; ipsa inter se æqualia erunt. Est autē parallelepipedum $QSTV$, parallelepipedo $EAGF$, æquale: Igitur eodem parallelepipedo $EAGF$, æquale erit parallelepipedum $Q\delta\gamma V$.

29. undec.

35. primi.

7. quinti.

25. undec.

9. quinti.

QUONIAM vero parallelogramma KT , $K\gamma$, æqualia sunt inter se; & KT , æquale est ipsi LG , erit & $K\gamma$, ipsi LG , hoc est, ipsi CD , æquale; cum bases LG , CD , ponantur æquales. Quare erit, ut CD , ad DR , ita $K\gamma$, ad DR : Vt autē CD , basis ad basin DR , ita est solidū $CHIK$, ad solidum $KI\alpha R$; cum parallelepipedum $CH\alpha R$, secetur plano IK , planis oppositis CH , αR , parallelo: Et eadem ratione ut $K\gamma$, ad DR , ita est solidum $Q\delta\gamma V$, ad solidum $IKR\alpha$; cum & parallelepipedū $I\delta\gamma\alpha$, secetur plano KV , oppositis planis $D\alpha$, $\delta\beta$, parallelo. Igitur æqualia erunt parallelepipeda $CHIK$, $Q\delta\gamma V$; cum eandem habeant proportionem ad idem solidum $IKR\alpha$. Quare cum parallelepipedum $Q\delta\gamma V$, sit ostensum æquale parallelepipedo $AEGF$; æqualia quoque erunt parallelepipeda $AEGF$, $CHIK$. Quod est propositum.

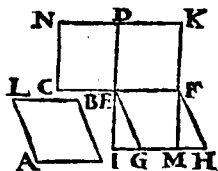
21. undec.

SINT iam neque insistentes lineæ $A-M$, GN , LE , BF , ad basin AB ; neque CP , KQ , OH , DI , ad basin CD , perpendiculares: Et a punctis E , F , M , N , demittantur ER , FS , MT , NV , ad planum, in quo basis AB , perpendiculares; Item a punctis H , I , P , Q , ad planum, in quo basis CD ,

29. nel 30.
undecimi.

SCHOLIŌN.

sciaturque parallelogrammum $E H$, quod æquale erit, & simile parallelogrammo $A B$. Conveniat autem $H G$, producta cum $D E$, producta in I , & compleatur parallelogrammum $I K$. Iam vero intelligantur super bases $E H$, $I F$, $E K$, con-



stituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super $A B$, $C D$, constructis; sintque insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Per spicuum est igitur, solidum super $E H$, æquale esse ac simile solido super $A B$, ex defin. 10.

huius lib. cum plana illius æqualia sint et similia planis huius, per constructionem: Sunt autem & æqualia parallelepipeda super $E H$, $I F$, cum habeant basin eandem, cuius infimum latus $E F$, erectam super planum $I K$; Item plana basi opposita, quorum latera infima $G H$, $I M$, in eodem plano, cuius infimum latus $I H$; atque insistentes lineas $E G$, $F H$, $E I$, $F M$, &c. in eisdem rectis lineis $I H$, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum super $I F$, parallelepipedo super $A B$. Quoniam vero parallelogramma $E H$, $I F$, æqualia sunt; & $E H$, æquale est ipsi $C D$: æqualia erunt $I F$, $C D$. Erit igitur, ut $I F$, ad $E K$, ita $C D$, ad $E K$: Est autem ut $I F$, ad $E K$, ita solidum super $I F$, ad solidum super $E K$, quod solidum super $I K$, secetur plano super $E F$, erecto parallelo planis super $D K$, $I M$, erectis. Et eadem ratione, ut $C D$, ad $E K$, ita solidum super $C D$, ad solidum super $E K$. cum solidum super $E K$, secetur plano super $D E$, erecto parallelo planis super $C N$, $F K$, erectis. Quare erit ut solidum super $I F$, ad solidum super $E K$, ita solidum super $C D$, ad solidum super $E K$; Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super $I F$, & $C D$. Offensum est autem parallelepipedum super $I F$, æquale parallelepipedo super $A B$. Æqualia ergo erunt et parallelepipeda super $A B$, $C D$. Quod est propositum.

CONVERTETUR quoque hac proposit. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia, super æquales bases, in eadē sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadē altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin:

Si enim unum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine; fient equalia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur

31. undec.

aequale alteri; aequale erit abscissum toti. Quod est absurdum. Quod si in eadem sint altitudine, & basis unius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis equalis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis; demonstrabimus eodem modo, partem toti esse aequalem. Quod est absurdum.

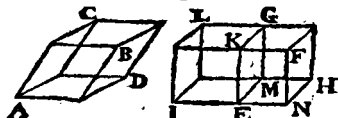
THEOR. 27. PROPOS. 32.

33.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, ut bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidum, ut est basis ad basin. Super rectam enim EK, construatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, q. sit equalis angulo ENF. Constituent autem parallelograma EF, IF, totum parallelogrammum unum FI, ut in 45. propof. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum unum parallelepipedum IFLH; erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cum habeant æquales bases, per constructionem AB, IK; & eandem altitudinem, ex hypothesi. Quare erit ut solidum IKLM, ad solidum EFGH, ita solidum ABCD, ad solidum EFGH: Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, ut basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, ut basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

45. primi.



31. undec.

7. quinti.

25. undec.

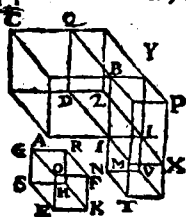
S C H O L I O N .

32. undec. 9. quinsi. *CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, ut bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori equalis, & ducatur planum basi parallelum; eritque ut bases ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum. Abscissum ergo aequale est toti. Quod est absurdum.*

36. THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

S I N T similia parallelepipeda $A B C D, E F G H$, super bases similes $A B, E F$, in quibus latera homologa sint $A I, E K$. Dico proportionem parallelepipedi $A B C D$, ad parallelepipedum $E F G H$, esse triplicatam proportionis laterum



homologorum $A I, E K$. Productur enim $A I$, ad L , & sit $I L$, æqualis ipsi $E K$, uel $G R$; Item $D I$, ad M , & sit $I M$, æqualis ipsi $H K$, uel $G O$; Item $B I$, ad N , & sit $I N$, æqualis ipsi $K F$, uel $G S$. Deinde completis parallelogrammis $L M, L N, I T$, perficiatur parallelepipedum $T X I V$. Quo-

15. primi.

niam uero latera $I L, I M$, æqualia sunt lateribus $G R, G O$; & anguli contenti æquales, cum angulus $L I M$, sit æqualis angulo $A I D$, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo $E K H$, seu $R G O$: Erunt parallelogramma $I X, G F$, similia & æqualia. Eadem ratione similia erunt & æqualia $L N, R S$; Item $I T, G E$. Quare tria plana $I X, L N, I T$, parallelepipedi $T X I V$, similia sunt & æqualia tribus planis $G F, R S, G E$, parallelepipedi $E F G H$:

24. undec.

Sunt autem tria cuiusque similia & æqualia tribus reliquis oppo-

oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipedum TXIV, EFGH, ex defin. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur, ob similitudinem parallelepipedorum ABCD, EFGH, est ut AI, ad EK, hoc est, ad IL, ita DI, ad HK, hoc est, ad IM; & BI, ad FK, hoc est, ad IN. Vt autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL; Et ut DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & ut BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit ut AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. Sed ut AD, basis ad DL, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & ut basis DL, ad basin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; Et ut basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, ut parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoque proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad secundam DLYQ, ex definitione 10. lib. 5. Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basin DL; Et ut AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipedum, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonstrandum.

2. sexti.

32. undec.

32. undec.

1. sexti.

COROLLARIUM.

Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, ut est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonstratum est, quam prima linea ad quar-

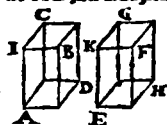
tam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirū laterum homologorū.

34. 35.

THEOR. 29. PROPOS. 34.

AEQUALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur : Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur ; Illa sunt æqualia .

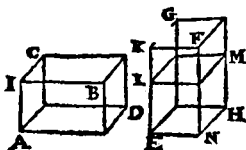
SINT æqualia parallelepipeda $ADCB$, $EHGF$, super bases AD , EH . Dico bases AD , EH , & altitudines parallelepipedorum $ADCB$, $EHGF$, esse reciprocas, hoc est, esse ut AD , ad EH , ita altitudinem solidi $EHGF$, ad altitudinem



solidi $ADCB$. Sint enim primo insistentes lineæ AI , EK , perpendiculares ad bases AD , EH , ita ut AI , EK , sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum . Si igitur altitudines AI , EK ,

sunt æquales ; cum & parallelepipeda æqualia ponantur ; erunt & bases AD , EH , æquales, per ea, quæ ad finem proposit. 3. huius lib. ostendimus. Quare erit, ut basis AD , ad basin EH , ita altitudo EK , ad altitudinem AI . Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocae.

QVOD si altitudines AI , EK , inæquales fuerint ; sit EK , maior, ex qua abscindatur EL , ipsi AI , æqualis ; & per L , ducatur planum LM , parallelum basi EH , per scholion



propos. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida $ADCB$, $EHGF$; erit ut $ADCB$, ad solidum $EHML$, ita $EHGF$, ad idem solidum $EHML$: Vt autem solidum $ADCB$, ad solidum

7. quinti.

32. undec.

$EHML$, ita est basis AD , ad basin EH , cum æquales ponantur altitudines AI , EL ; Et ut solidum $EHGF$, ad solidum

FH .

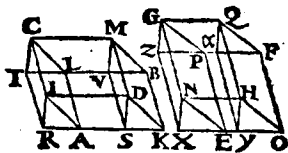
EHML, ita est, eadem ratione, basis KN, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; Erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit ut basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: Sed ut KN, ad LN, ita est recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciproce sunt bases, & altitudines.

SINT iam bases & altitudines reciproce. Dico parallelepipedum esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, ut altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. Quare parallelepipedum ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se equalia erunt.

Quod si altitudo EK, maior fuerit, abscindatur EI, ipsi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur ex hypothesi est, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad EI, ipsi AI, æqualem; Vt autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EI, æquales ponantur; Et ut EK, ad EI, ita est KN, ad LN; Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum DHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; Erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH: Erit ut solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML; ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH,

æqualia, quorū insistentes lineæ AI, KD, BM, LC, EN, OH, FQ, PG, nō sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem a punctis I, D, M, C, ad planum basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item a punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares



1. sexti.

31. undec.

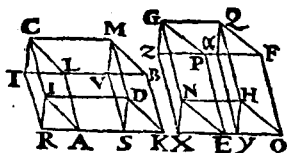
32. undec.

1. sexti.

32. undec.

9. quinti.

diculares $NX, HY, Q\alpha, GZ$; connectanturque rectæ $RS, TV, RT, SV; XY, Z\alpha, XZ, Y\alpha$: Eruntque perpendiculares RI, XN , parallelepipedorum altitudines, ex



defin. 4. lib 6. Dico rursus, ut basis AB , ad basin EF , ita esse altitudinē XN , ad altitudinem RI . Cum enim æqualia sint solida $ABCD, EFGH$, ex hypothesi, sic autem

29. nel 30.
undecimi.

$ABCD$, æquale solido $RVCD$, eo quod habeant eandem basin CD , eandemque altitudinem RI ; & $EFGH$, eadē ratione, æquale solido $X\alpha GH$: Erunt & parallelepipeda $RVCD, X\alpha GH$, æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH ; erit, ut iam demonstratum est, ut basis CD , ad basin GH , hoc est, ut basis AB , ad basin EF , ita altitudo XN , ad altitudinem RI . Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.

24. undec.

Sit nunc iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Cōstructa enim figura, ut prius; Cum sit ut basis AB , ad basin EF , ita altitudo XN , ad altitudinem RI ; Sit autē AB , ipsi CD , & EF , ipsi GH , equalis; Erit quoque ut basis CD , solidi $RVCD$, ad basin GH , solidi $X\alpha GH$, ita altitudo XN , ad altitudinem RI . Quare, cum XN, RI , sint insistentes lineæ, perpendiculares ad bases CD, GH ; erunt, ut iam ostensum est, æqualia parallelepipeda $RVCD, X\alpha GH$: Sunt autem hæc parallele-

29. nel 30.
undecimi.

pipeda parallelepipedis $ABCD, EFGH$, æqualia. Ignitur æqualia quoque erunt parallelepipeda $ABCD, EFGH$: Idemque ostendetur, si insistentes lineæ unius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius uero non. Quam ob rem, Equalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

OMNIA hæc, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conveniunt quoque

quoque prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædictæ hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basim, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficiuntur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases existentia. Quare æqualia erunt huiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.

29. 30. mel
31. undec.

R V R S V S, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis, adijciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficiuntur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, ut basis ad basim; Atque adeo prisma ad prisma, nempe dimidium unius parallelepipedi, vel dimidium alterius, ut eadem basis ad basim, si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe ut triangulum ad triangulum, dimidium scilicet unius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangularia.

32. undec.
15. quinsi

P R A E T E R E A, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, conficiuntur duo parallelepipeda similia, quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.

33. undec.
15. quinsi

D E N I Q U E si dictis duobus prismatis æqualibus adiantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componuntur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum prismatis. Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciproca; & bases prismatum eadem sint, vel certe triangularia earum dimidia habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciproca.

34. undec.
15. quinsi

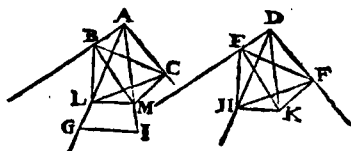
THEOR. 30. PROPOS. 35.

37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum uerticibus sublimes rectæ lineæ insistant,

sistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis uero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC , EDF , quorum uerticibus A , & D , insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG , DH , ita ut angulus BAG , angulo EDH , & angulus CAG , angulo FDH , sit equalis. A sumptis autem punctis G , H , in rectis AG , DH , demittantur

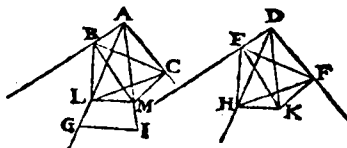


ad plana, in quibus anguli BAC , EDF , existunt, perpendiculares GI , HK , incidentes in puncta I , K , & adiungantur rectæ IA , KD . Dico

angulos GAI , HDK , esse æquales inter se. Nā si AG , DH , sunt inæquales, auferatur a maiori AG , ipsi DH , æqualis linea AL ; & ex L , ad planum anguli BAC , perpendicularis demittatur LM . Quoniam igitur GI , LM , rectæ sunt ad planum anguli BAC , ipsæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli AGI . Quare LM , cadet in rectam AI . Ducantur iam ex punctis M , K , ad rectas AB , AC , DE , DF , perpendiculares MB , MC , KE , KF ; & connectantur rectæ BC , BL , LC , EF , EH , HF . Et quia LM , recta est ad planum anguli BAC , ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM , in eodem plano ducta, per defin. 3. huius lib. Quare quadratum rectæ

rectæ AL , æquale erat quadratis rectarum AM , ML : 47. primi.
 Est autem quadratum rectæ AM , æquale quadratis recta- 47. primi.
 rum AC , CM , cum & angulus ACM , rectus sit, ex con-
 structione. Quadratum ergo rectæ AL , æquale est qua-
 dratis rectarum AC , CM , ML : At quadratis rectarum CM ,
 ML , æquale est quadratum rectæ CL , cum angulus CML , 47. primi.
 rectus sit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ
 AL , æquale est quadratis rectarum AC , CL ; Ac proinde
 angulus ACL , rectus erit. Rursus quia quadratum 48. primi.
 rectæ AL , æquale est quadratis rectarum AM , ML : 47. primi.
 Est autem quadratum rectæ AM , æquale quadratis recta- 47. primi.
 rum AB , BM , cum angulus ABM , per constructionem,
 sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL , æquale
 est quadratis rectarum AB , BM , ML : At quadratis recta-
 rum BM , ML , æquale est quadratum rectæ BL , quod 47. primi
 & angulus BLM , sit rectus ex defin. 3. huius lib. Qua-
 dratum ergo rectæ AL , æquale est quadratis rectarum
 AB , BL ; proptereaque angulus ABL , erit rectus. Non 48. primi.
 aliter ostenduntur recti, anguli DFH , DEH . Quo-
 niam igitur anguli ABL , LAB , trianguli ABL , æqua-
 les sunt angulis DEH , HDE , trianguli DEH ; suntque 26. primi.
 latera AL , DH , æqualia; Erunt & reliqua latera AB , BL ,
 reliquis lateribus DE , EH , æqualia. Eodem argumen-
 to æquales erunt rectæ AC , GL , rectis DF , FH . Qua
 re cum latera AB , AC , trianguli ABC , æqualia sint late-
 ribus DE , DF , trianguli DEF ; & anguli cōtenti BAC ,
 EDF , æquales, ex hypothēsi; erunt & bases BC , EF , inter
 se, & anguli ABC , ACB , angulis DEF , $D FE$, æqua- 4. primi.
 les: Sunt autem & toti anguli ABM , ACM , totis angulis
 DEK , DFK , æquales, cum omnes sint recti. Igitur & reli-
 qui anguli MBC , MCB , reliquis angulis KEF , KFE ,
 æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC , EF , sint
 ostensa æqualia; erunt latera BM , CM , lateribus EK , FK , 26. primi.
 æqualia. Quia igitur latera AC , CM , trianguli ACM ,
 æqualia sunt ostensa lateribus DF , FK , trianguli DFK ; &
 anguli ACM , DFK , sunt recti; erunt & bases AM , DK ,
 inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensa re-
 ctæ BL , EH , erunt etiam earum quadrata æqualia:
 Quia uero quadratum rectæ BL , æquale est qua-
 dratis

dratis rectarum $B M, M L$; & quadratum rectæ $E H$, quadratis rectarum $E K, K H$, quod anguli $B M L, E K H$, recti sint, ex d. fin. 3. huiuslib. Erunt & quadrata rectarum



$B M, M L$, æqualia quadrat; rectarum $E K, K H$. Ablatis ergo quadratis rectarum $B M, E K$, quæ æqualia sunt, quod rectæ $B M, E K$ ostē

se sint æquales; reliqua quadrata rectarum $L M, H K$, æqualia erunt, ac proinde rectæ $L M, H K$, æquales. Quam ob rem, cum latera $A L, A M$, trianguli $A L M$, æqualia sint lateribus $D H, D K$, trianguli $D H K$, & basis $L M$, basi $H K$, æqualis; erunt & anguli $L A M, H D K$, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum uerticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.

8, primi.

COROLLARIUM.

ITAEQUE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum uerticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utriusque. Erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani $B A C, E D F$, ponuntur æquales, & sublimes æquales $A L, D H$, constituunt angulos æquales $L A B, H D E$; Item $L A C, H D F$; demonstratum fuit, demissas perpendiculares $L M, H K$, esse æquales.

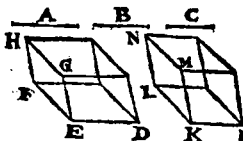
38.

THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum paralelepipedum, æquale est descripto a media linea solido paralelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum uero prædicto.

SINT

SINT continue proportionales tres rectæ A, B, C. Constituanturque angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunque D E F, D E G, F E G, ita ut recta D E, ipsi A, & E F, ipsi B; & E G, ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelogrammis D F, F G, G D, perficiatur parallelepipedum D H; quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. Deinde ad rectam I K, eiusque punctum K, fiat solidus angulus K, æqualis solidulo angulo E, ex tribus angulis planis I K L, I K M, L K M, qui æquales sint tribus D E F, D E G, F E G; ita ut rectæ I K, K L, K M, æquales sint mediæ lineæ B.



25. undec.

Completis uero parallelogrammis I L, L M, M I, perficiatur parallelepipedum I N; quod contineri dicitur sub linea B, seu ex ipsa describi. Dico solidum D H, æquale esse solidulo I N. Cum enim sit ut D E, ad I K, ita K M, ad E G, (quod D E, ipsi A; & I K, K M, ipsi B; & E G, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli D E G, I K M, æquales: Erunt parallelogramma D G, I M, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam uero anguli plani D E G, I K M, sunt æquales, quorum uerticibus insunt sublimēs lineæ æquales E F, K L, quæ & quales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium D G, I M, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum D H, I N, si bases sint D G, I M, inter se æquales, per coroll. propos. præcedentis. Quare parallelepipeda D H, I N, cū habeant bases D G, I M, æquales, & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

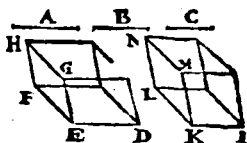
14. sexti.

31 undec.

SCHOLIUM.

VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æqui- angulo a media linea descripto: Erunt tres rectæ continue pro- portionales.

portionales. Sis enim parallelepipedum DH , descriptum ex rectis A, B, C , ut dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo IK , descripto a media B . Dico tres A, B, C , esse continue proportionales. Nam,



veluti prius, ostenduntur eorum altitudines ex F, L , demissa esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases DE, IM , æquales, per ea, quæ

ad finem propof. 31. huius lib. demonstramus. Quæ bases cum angulos habeant æquales DEG, IKM , ex constructione; habebunt latera circa illos angulos reciproca; hoc est, erit ut DE , ad IK , ita KM , ad EG . Quapropter cum DE , ipsi A ; & IK , KM , ipsi B ; & EG , ipsi C , sumpta sit æqualis; Erit quoque ut A , ad B , ita B , ad C . Quod est propositum.

14. sexsi.

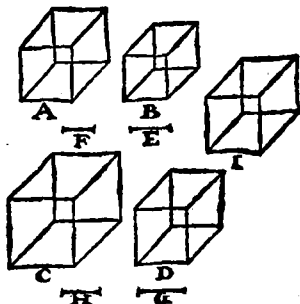
39.

THEOR. 32. PROPOS. 37.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SIN T quatuor rectæ proportionales A, B, C, D ; Vt quidem A , ad B , ita C , ad D ; constituenturque super A , & B , duo parallelepipeda A , & B , similia similiterque descripta; Item super C , & D , alia duo C , & D , similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida A, B, C, D , proportionalia; Vt quidem solidum A , ad solidum B , ita solidum C , ad solidum D . Inueniantur enim per scholion propof. 11. lib. 6. duabus rectis A, B , aliarum duarum continue proportionales E, F ; Item duabus

duabus C, D, alię duę G, H Quoniam igitur sunt quatuor li-
neę A, B, E, F, & qua-
tuor lineę alię C, D, G,
H, quę binę in eadem
ratione sumuntur, erit
ex equo, ut A, ad F,
ita C, ad H. Vt au-
tem A, ad F, ita est so-
lidum A, ad solidum
B; Et ut C, ad H, ita
solidum C, ad solidum
D, ex coroll. propos.
33. huius lib. Igitur erit
ut solidum A, ad soli-
dum B, ita solidum C,
ad solidum D. Quod est propositum.



SINT iam e contrario solida A, B, C, D, proportiona-
lia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales. Tri-
bus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I,
super quam describatur parallelepipedum ipsi D, uel C, simi-
le similiterque positum. Quoniam igitur est, ut recta A, ad
rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, ut iam est
ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad
solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita poni-
tur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit ut soli-
dum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D.
Ac idcirco equalia erunt solida I, & D. Quę cū sint similia,
similiterq; descripta, continebuntur planis equalibus & simi-
libus, per defin. 10. huius lib. Sed plana equalia & similia
habent latera homologa equalia, per lemma propos. 22. lib.
6. Igitur rectę I, & D, equalēs sunt, Ac propterea erit,
ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Po-
sita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut
recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si
quatuor rectę lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat
demonstrandum.

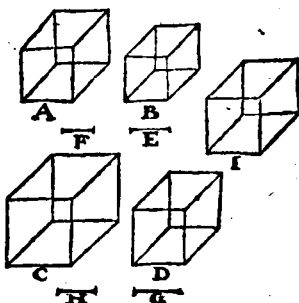
BREVIUS tota hęc propositio demonstrabitur cum
Theone, hoc modo. Ponatur primo ut recta A, ad rectam B,
ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A,

ad

12. sexti.
27. undec.

9. quinti.

33. undec. ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum



D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: Erunt proportionēs solidi A, ad solidū B, & solidi C, ad solidum D, equales; quandoquidē triplicatę sunt proportionum equalium, nempe rectę A, ad rectam B; & rectę C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus

ponatur secundo esse, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, ut recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportionēs rectarum A, ad B, & C, ad D, equales; quandoquidem earum proportionēs triplicatę, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidū D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

SCHOLIUM.

EODEM modo, si fuerint tres rectę proportionales, erūt & parallelepipeda similia similiterque descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusque solidum sumatur bis, habebuntur quatuor rectę proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, ut demonstratum est. Cum igitur solidum secunda linea æquale sit solido tertia linea; & linea secunda æqualis tertia linea; perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hæc propositio conuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia, sunt vel triangula, vel parallelogramma, ut Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula

singula singulis sint equalia, exurgent parallelepipeda, quæ ut hic est demonstratum, proportionalia erunt. Cum igitur prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.

15. quinti.

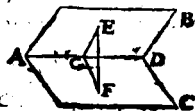
THEOR. 33. PROPOS. 38.

13.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

PLANVM A B, rectum sit ad planum A C, sitque eorum communis sectio recta A D; Et ab E, puncto plani A B, ad planum A C, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem A D. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F; & ab F, in plano A C, ducatur ad rectam A D, perpendicularis F G, connectaturque recta E G, in plano A B. Quoniam igitur F G, perpendicularis est ad communem sectionem A D; erit quoque perpendicularis ad planum A B, ex defin. 4. huius lib. atque adeo ad rectam G E, per 3. defin. huius lib. Est autem & E F, recta ad F G, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo E F G, duo anguli E F G, E G F, recti sunt, quod est absurdum; cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum A C, non extra communem sectionem A D, cadet. ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum,

12. primi.



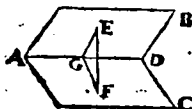
17. primi.

SCHOLIUM.

H AEC est demonstratio Theoriae. Nos tamen idem demonstrabimus brevius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano
X A B,

12. primi.

AB, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem; ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto F, extra planum AC, ductæ sunt ad ipsum planum AC, due perpendiculares EF, EG. Quod fieri nequit, ut in scholio propof. 13. huius lib. demonstravimus.

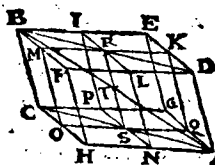


40.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI solidi parallelepipedum eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedum diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedum AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB.



Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC, considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH; & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS.) & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus

34. primi.

29. primi.

4. primi.

13. primi.

duobus sunt rectis æquales; Ac propterea AS, CS, vnā rectā
lineam constituent. Eodem modo ostenduntur esse æquales
BR, DR, & vnā ex eis componi lineam rectā. Rursus quia
AD, FC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob paral-
logramma AF, FC: ipsæ quoq; inter se parallele erunt, &
æquales. Quare & rectæ AC, BD, eādem extrema comuni-
gentes, parallele sunt, & æquales; Ac proinde ipsarum dimi-
diæ AS, BS, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallele
sunt; erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoq;
se mutuo secabunt, in puncto uidelicet T. Cum autem duo
anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus an-
gulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR:
Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR;
æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in
T. Sumitur solidi parallelepipedī corū, quæ ex aduerso, &c.
Quod erat ostendendum.

14. primi.

9. undec.

13. primi.

7. undec.

10. & 15.

primi.

16. primi.

COROLLARIUM.

Hinc efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se
mutuo bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in
quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est, rectam RS.

SCHOLIUM.

Hic theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod
ad propof. 34. primi lib. demonstrauimus, uidelicet.

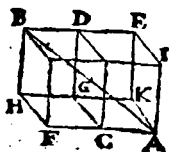
Si solidum parallelepipedum plano secetur
per centrum: bifariam secabitur solidum ab ip-
so plano. Et si solidum parallelepipedum plano
secetur bifariam: per centrum transibit ipsam
planum.

SECETUR parallelepipedum AB, plano CD, per cen-
trum, hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G.
Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo planū
CD, oppositis planis AE, BF, parallelū. Et quia plana parallelā
BF, DC, EA, secant rectas quasq; proportionaliter, secatur autē

17. undec.

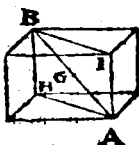
X 2 BA,

25. undec.



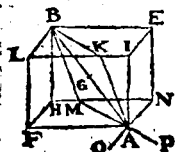
TRANSIAT secundo planum secans $AIBH$, per diametros BI , AH , planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G , ducto.

7. undec.
28. undec.



TERTIO planum secans $AKBM$, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A , & B , planorum AH , BI . Quoniam igitur plana parallela AH , BI , secantur plano $AKBM$; erunt communes sectiones AM , BK , parallela. Similiter parallela erunt AK , BM , cum sint communes sectiones planorum parallelorum AL , BN , factae a plano $AKBM$. Quare parallelogrammum est $AKBM$; ideoque tam recta AK , BM , quam re-

16. undec.



24. primi.

10. undec.

13. primi

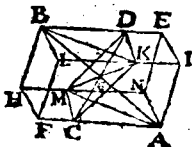
4. primi.

4. sexti.

cta AM , BK , interseerunt aequales. Quia ergo latera BK , BL , trianguli BKL , aequalia sunt lateribus AM , AN , trianguli AMN ; & angulus KBL , angulo MAN , equalis. (Productis enim NK , MA , ad O , P , erunt AO , AP , rectis BL , BK , parallela; ac proinde aequales anguli erunt OAP , LBK . Cum igitur OAP , equalis sit angulo MAN ; aequales quoque erunt anguli KBL , MAN .) Erunt bases KL , MN , inter se, & anguli BKL , BLK , angulis AMN , ANM , aequales; & triangulum BKL triangulo AMN aequale. Quare & similia erunt triangula BKL , AMN , cum latera habeant circa aequos angulos proportionalia. Quoniam nero recta KL , recta MN ; & angulus BKL , angulo AMN ; & angulus KBL , angulo MAN , est equalis, ut ostendi-

ostendimus; eris & reliqua $I K$, reliqua $H M$; & reliquis angulis $B K I$, reliquo $A M H$; & reliquis $K B E$, reliquo $M A F$, aequalis. (Est .n. tota $L I$, toti $N H$, aequalis, & ita anguli $B K L$, $B K I$, quam anguli $A M N$, $A M H$, duobus rectis aequales; & totus angulus $L B E$, toti angulo $N A F$, aequalis, ob similitudinem parallelogrammorum $L E$, $P N$.) Sunt autem & latera $B E$, $E I$, lateribus $A F$, $F H$, aequalia; & anguli $B E I$, $E I K$, angulis $A F H$, $F H M$; ob parallelogramma $L E$, $F N$. Igitur quadrilaterum $B K I E$, & aequilaterum, & equiangulum est quadrilatero $A M H F$; Ac propterea aequale & simile, cum singula singulis conveniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo aequalia erunt & similia triangula $B H M$, $A I K$; & quadrilatera $A K L F$, $B M N E$; cum inter se sint & aequilatera & equiangula. Quapropter solidum contentum planis $A K L F$, $F H M A$, $A K B M$, $M H B$, $B K I$, $L B H F$, aequale erit solido contento planis $B M N E$, $E I K B$, $B M A K$, $K I A$, $A M N$, $N A I E$, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & aequalia, ut demonstratum est. Parallelepipedum ergo $A B$, sectum est plano $A K B M$, per centrum G , bifariam.

POSTREMO planum secans $C D$, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neq; per illos angulos eorum ductum, sed utcumque secet plana opposita $A H B I$. Ostendemus autem, ut prius, planum secans $C D$, esse parallelogrammum, & tam rectas $C K$, $D M$, quam rectas $C M$, $D K$, esse aequales. Ducantur in parallelogrammo $C D$, diametri $C D$, $K M$; connectanturque rectae $A M$, $B K$, quae parallelae erunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum $A H$, $B I$, factae a plano per rectas $A B$, $K M$, ducto. Quoniam igitur $A F$, $B E$, parallelae ipsi $L I$, ob parallelogramma $A L$, $L E$, inter se sunt parallelae; Erunt $A B$, $C D$, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G ; In solo enim centro G , recta $A B$, per hypothresin, secat planum $C D$, in quo existit recta $C D$. Simili argumento, cum $A M$, $B K$, sint ostensa parallelae; erunt $A B$, $M K$, in eodem cum



16. undec.

9. undec.

7. undec.

X 3

illis

15. primi.

4. primi

illis plano, seq; mutuo secabunt in centro G. Quare diametri CD, KM, per centrum G, transibunt, ibiq; se mutuo secabunt; atq; adeo bisariā, per ea, quæ ad propof. 34. lib. 1. offendimus. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, equalia sūt laterib; AG, GC, trianguli AGC; & angulus BGD, æqualis angulo AGC; Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodem argumen- to æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera ED, DK, KB, trianguli BDK, equalia sint tribus lateribus



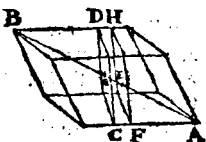
AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propof. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Est autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum BL, AH. Itur & reliquæ KBL, reliquo MAN,

4. primi.

erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, equalia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; Erit & basis KL, basi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur, æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterū est, & equiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum singula conveniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis; Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterū est quadrilatero CFHM: Sed & equiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogrammorum BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HCM, æquales, quod æquales offensi sint eorum anguli alteri LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, equalia sunt & similia. Non aliter ostendemus, equalia esse & similia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conveniant, ut perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHCM, CCKD, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. def. huius lib. æquale est so-
lido

in octo planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN, cum hisce illa sint demonstrata & equalia & similia. Parallelepipedum igitur A B, sectum est per centrum G, plano C D, bisariam.

SE D secetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedum transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, ut sit E, centrum parallelepipedum. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, secabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, ut demonstratum est. Ponitur autem & bifariam secari plano CD, igitur solida CB, FE, cum sint dimidia parallelepipedum AB, inter se equalia sunt pars & totum. Quod est absurdum. Nō ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, bifariam; Ac pinde G, centrum eris parallelepipedum. Qd̄ demonstrandum erat.



THEOR. 35. PROPOS. 40.

41.

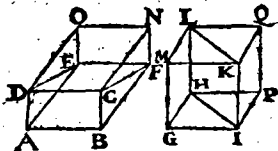
SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: AEQUALIA erunt ipsa prismata.

S I N T duo prismata æqualis altitudinis A B C D E F, G H I K L M, quorū illud basin habeat parallelogrāmū A B C D, hoc uero, triāgulū G H I; sitq; parallelogrāmū A C, triāguli G H I, duplū. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur. n. parallelepipeda A N, G Q; Quod quidē fiet, si plana triangulorū extendātur, perficianturq; parallelogrāma B N, A O; G P, M Q. Si enim connectantur rectæ N O, P Q, constituta erūt duo parallelepipeda A N, G Q, eiusdē altitudinis cū prismatis. Nam plana horum solidorū opposita esse

X 4 paral

34. primi.

parallela, facile colligetur ex propof. 14. huius lib. Quoniam igitur parallelogrammum GP , duplum est trianguli GHI ; Ponitur autem



& parallelogrammū AC , eiusdem trianguli GHI , duplum: æqualia erunt parallelogramma AC , GP . Quare parallelepipeda AN , GQ , eiusdem al-

31. undec.

titudinis super æquales bases AC , GP , inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata $ABCDEF$, $GHIKLM$, (Nam parallelepipeda AN , GQ , per diametros CF , LE ; HI , LK , planorum aduer-

28. undec.

sorum secantur bisariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipeda compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammū $ABCD$, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE , BCF . Eset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.



EVCLIDIS

ELEMENTVM XII.

Et Solidorum secundum.



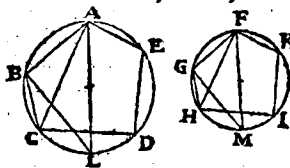
THEOR. I. PROPOS. I.

I.

QVAE in circulis polygona similia inter se sunt, vt a diametris quadrata.



INT duo polygona similia $ABCDE$, $FGHIK$, descripta in circulis, quorum diametri AL , FM . Dico ita esse polygonum $ABCDE$, ad polygonum $FGHIK$, ut quadratum diametri AL , ad quadratum diametri FM . Subtendantur enim angulis æqualibus ABC , FGH , rectæ AC , FH , & connectantur rectæ BL , GM . Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est ut AB , ad BC , ita FG , ad GH ; erunt triangu-
la ABC , FGH , æquiangula, cum circa angulos æquales ABC , FGH , habeant latera proportionalia: Est autem angulus ALB , angulo ACB ; & angulus FMG , angulo FHG , æqualis. Igitur & anguli ALB , FMG , æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL , FGM , æquales sint, nempe recti in semicirculis existentes; erunt & reliqui BAL , FGM , æquales. Quare erit ut AL , ad AB , ita FM , ad FG ; & permutando, vt AL , ad



6. sexti.

21. tertij.

31. quartij.

32. primi.

4. sexti.

22. sexti.

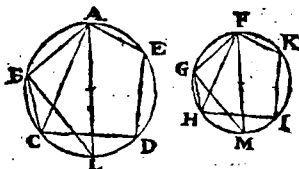
A L, ad F M, ita A B, ad F G, Igitur est ut quadratum ex A L, ad quadratum ex F M, ita polygonum A B C D E, super A B, ad polygonum F G H I K, super F G; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, ut a diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.
CIRCULI inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata.

SINT duo circuli A B C D, E F G H, quorum diametri A C, E G. Dico esse, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circum A B C D, ad circum E F G H. Si enim res non ita se habet; Sit ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ uel minor erit, uel maior circulo E F G H. Si .n. esset æqualis, haberet circulus A B C D, ad circum E F G H, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus A B C D, ad circum E F G H, ut quadratum diametri

7. quinti.



A C, ad quadratum diametri E G, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor quam circulus E F G H, magnitudine scilicet K, ita ut circulus E F G H, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribebatur in circulo E F G H, quadratū E F G H; qđ quia dimidiū est quadrati circa eundē circulū descripti, ut ad ppos. 9 lib. 4. ostēdimus, maius erit, q̄ dimidiū circuli E F G H. Secentur bifariam peripheriæ E F, F G, G H, H E, in punctis L, M, N, O, adiunganturq; rectæ L E, L F, M F, M G, N G, N H, O H, O E. Ducatur per L, recta T V, tangens circulū in L, quæ parallela erit ipsi E F, ut ad ppos. 27 lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis H E, G F, productæ in T, & V. Quia ergo triangulū E L F, dimidiū est parallelogrammi T E F V; maius erit triangulū E L F, quā dimidiū segmenti circuli E L F. Eadē ratione erunt reliqua triangu-

41. primi.

la

la maiora, quam dimidia segmentorū, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quā dimidium omnium segmentorū simul. Quod si rursus peripheriæ EL , LF , & c. secentur bisariā & adiungantur rectæ linæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quā dimidium omnium segmentorū simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam utro, si a circulo $EFGH$, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratū $EFGH$; & a reliquis segmentis plus quā dimidiū, nempe triangula ELF , FMG , &c. atque in hūc modum semper fiat detractio; relinquatur tandem minor magnitudo, quam K , excessus inter circulum $EFGH$, & magnitudinem I . Sint iam circuli segmenta reliqua EL , LF , FM , &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K . Cum igitur circulus $EFGH$, æqualis ponatur magnitudinibus I , & K , simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I , & K , ipsa magnitudo K , quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonū $ELFMGNHO$, maius reliqua magnitudine I . Inscribebatur in circulo $ABCD$, polygonum $APBQCRDS$, simile polygono $ELFMGNHO$. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC , ADC , bisariā secentur in B , & D ; & rursus circumferentiæ AB , BC , CD , DA , bisariā in P , Q , R , S ; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferētia $ABCD$, in quor distributa ē circumferētia $EFGH$. Nā iūctis rectis AP , PB , BQ , &c. erit figura inscripta simili figura $ELFMGNHO$, ut patet. Quoniam igitur est polygonū $APBQCRDS$, ad polygonū $ELFMGNHO$, ut quadratū diametri AC , ad quadratū diametri EG , hoc est, per hypothesin, ut circulus $ABCD$, ad I : Est aut polygonum $APBQCRDS$, minus circulo $ABCD$. Igitur & polygonum $ELFMGNHO$, minus erit quam I . Oñsum aut est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I , circulo $EFGH$.

1. decimi.

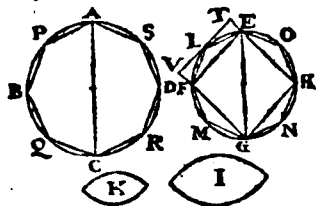
1. duodec.

14. quinti.

Sit secundo magnitudo I , maior circulo $EFGH$. Cum ergo ponatur circulus $ABCD$, ad I , esse ut quadratū diametri AC , ad quadratū diametri EG ; erit & conuertēdo I , ad circulum $ABCD$, ut quadratū diametri EG , ad quadratū diametri AC . Ponatur ut I , ad circulum $ABCD$, ita circulus $EFGH$, ad magnitudinē aliquā, nempe ad K . Et quia I , maior ponitur circulo $EFGH$, maior quoque erit circulus

circulus A B C D, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C, ita circulus E F G H, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo A B C D. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H. Sed neq; minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G,

7. quinti.



ita circulus A B C D, ad I; sic autem ut circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque ut quadratum diametri A C, ad qua-

dratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc fit, ita esse circulum ad circulum, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descripto. Quoniam tñ circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratū est.

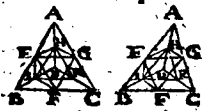
3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT

SIT pyramis, cuius basis triangulum ABC, uertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & uertices H, D; nec non in duo solida EBF, GH I K, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBF, & triangula opposita EHG, BIF; huius uero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulum KIH, habensq; hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGH I; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, ut constet, si recte concipiatur pyramidis uertex D, in sublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter, erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC; & HK, AC; & EG, BG; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC. Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE, EBF, GHKC, CKIF, FGH I. Quoniam uero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. Proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propof. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9. huius lib. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ, erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. Quare latera trian-



2. sexti.

9. undec.

10. undec.

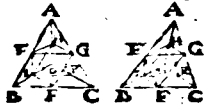
4. sexti.

10. undec.

guli

4. *sexii.*

guli $H I K$, lateribus trianguli $A B C$, circa æquales angulos sunt propoportionata; ac propterea triangulum $H I K$, triangulo $A B C$, simile est: Sunt autem & triangula $D H I$, $D I N$, $D A H$, triangula $D A B$, $D B C$, $D C A$, similia, per idem coroll. propof. 4. lib. 5. Pyramis ergo $H I K D$,



similis est quoque eadem pyramidi $A B C D$, per defia. 9. huius lib. Quoniam autem triangula $A H E$, $H D I$, similia sunt trian-

11. *sexii.*

gulo $A D B$, ut ostensum est ex coroll. propof. 4. lib. 6. ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales $A H$, $H D$, constitutæ; plæ erunt æqualia, per lemma propof. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula $A H G$, $H D K$, cum similia sint ostensa triangulo $A D C$, & constituta super æquales rectas $A H$, $H D$. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula $A E G$, $H I K$, cum similia sint ostensa triangulo

34. *primi.*

$A B C$, & super rectas posita $A E$, $H I$, quæ æquales sunt, ob parallelogrammum $A E I H$. Non secus æqualia erunt & similia triangula $E H G$, $I D K$, cum sint ostensa similia triangulo $B D C$, & habeant rectas $H E$,

34. *primi.*

$D I$, quæ æquales sunt, ob parallelogrammum $H E I D$. Pyramides igitur $A E G H$, $H I K D$, æquales sunt: & similes, per 10. defia. huius lib. quandoquidem omnia trian- gula unius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, ut demonstratum est.

31. *primi.*

$R V N S V S$, quia rectæ $E H$, $H G$, $G E$, æquales sunt, & parallelæ rectis $B I$, $I F$, $F B$, ob parallelogramma $E H I B$, $F G H I$, $B F G E$; erunt triangula $E H G$, $B I E$, æ- quiangula inter se, & æqualia, per coroll. propof. 2. lib. 1.

15. *undec.*

Ac propterea & similia: Sunt autem & parallelæ; cum $E H$, $H G$, per quas ducitur planum $E H G$, parallelæ sint rectis $B I$, $I F$, per quas planum $B I F$, ducitur. Igitur solidum $B I F G H E$, contentum duobus triangulis $E H G$, $B I F$, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis $E G F B$, $B E H I$, $I F G H$, prisma est, ex definitione. Eodem modo prisma ostendetur solidum $C F G H I K$. Cum enim rectæ $F C$, $C G$, $G F$,

4 *primi.*

æquales sint, & parallelæ rectis $I H$, $H K$, $K I$, ob parallelogram-

logramma $CFIK$, $CGHK$, $FGHI$; erunt triangula CFG , HIK , æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: Sunt autem & parallela, quod rectæ CF , CG , per quas ducitur planum CFG , parallelæ sint rectis KI , KH , per quas planum KIH , ducitur. Igitur solidum $CFGHIK$, contentum duobus triangulis CFG , KIH , ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis $CFIK$, $KHGC$, $IFGH$, prisma est. Quoniam uero prismata $EBFGHI$, $CFGHIK$, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCE , HIK ; & parallelogrammum $EBFG$, basis illius, duplum est trianguli CFG , basis huius, per scholion propos. 4. lib. 1. ipsa inter se æqualia erunt. 15. undec.

DENIQUE quia prisma $EBFGHI$, maius est pyramide $EBFI$, totum parte; Est autem pyramis $EBFI$, æqualis & similis pyramidi $AEGH$, necnon pyramidi $HIKD$, ut perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorū: Maiora erunt prismata $EBFGHI$, $CFGHIK$, pyramidis $AEGH$, $HIKD$. Ac proinde illa quidē dimidiū pyramidis $ABCD$, excedent, hæc uero a dimidio eiusdē deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor uero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum. 40. undec.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habētes bases; sit autē illarū utraq; diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodē modo diuisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim,

basin, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismaticata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismaticata multitudine æqualia.

SINT duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bisariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtrique secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM,



MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST, GQ RSTV, vt vult propositio præcedens: Eodemque modo intelligantur esse diuise pyramides factæ AILM,

MNOD; EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit ut BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod utraque linea sit diuisa bisariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Erit quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG: Et permutando, ut ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ut mox ostendemus, atque adeo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prisma, uidelicet IBKLMN, ad unum prisma PFQRST, ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, ut sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases

22. sexti.

12. quinti.

ad bases EPR , STV , harum pyramidum; & sic deinceps, eadem semper facta diuisione. Sed ut ille æ bases ad has, ita est LAC , basis, quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQS , quæ his est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC , ad basin EFG . Igitur erunt quoque, ut bases ABC , ad basin EFG , ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide $ABCD$, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide $EFGH$: Ac propterea erunt quoque, ut prismata pyramidis $ABCD$, ad prismata pyramidis $EFGH$, ita prismata tam pyramidis $AILM$, ad prismata pyramidis $EPRS$, quam prismata pyramidis $MNOD$, ad prismata pyramidis $STVH$; & ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis $ABCD$, ad duo prismata pyramidis $EFGH$, ita omnia prismata in pyramidibus $ABCD$, $AILM$, $MNOD$, &c. simul, ad omnia prismata in pyramidibus $EFGH$, $EPRS$, $STVH$, &c. simul, si hæc illis multitudines sint equalia; Erunt quoque, ut bases ABC , ad basin EFG , ita omnia prismata in pyramide $ABCD$, ad omnia prismata in pyramide $EFGH$. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

12. quinti

L E M M A.

Q U O D autem sit LKC , ad RQG , ita prisma $CKLMNO$, ad prisma $GQRSTV$, ita ostendimus. Intelligantur ex uerticibus D, H , ad bases ABC , EFG , demissa perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum $ABCD$, $EFGH$. Quoniam igitur plana parallela ABC , MNO , secant duas rectas, nempe DC , & perpendicularem ex D , demissam proportionaliter; secatur autem DC , bisariam in O ; secabitur quoque perpendicularis ex D , demissa bisariam in puncto, cui planum MNO , occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H , demissa bisariam secabitur a plano STV . Quare cum totæ perpendicu-

17. undec.

Y lars

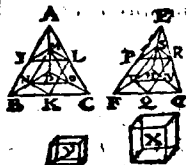
lares ponantur æquales, erunt & dimidia, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata $CKLMNO, GQRSTV$, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases LKC, RQG , per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstramus.

5.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis $ABCD, EFGH$, quarum bases triangula ABC, EFG . Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis ABC , ad basin EFG , ita pyramis $ABCD$, ad solidum X ; quod vel minus erit, vel maius pyramide $EFGH$.



Sit primo minus, magnitudinē Y . Diuidatur pyramis $EFGH$, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide

$EFGH$, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide $EFGH$, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata $PQRS, T, GQRSTV$, quæ maiora sunt dimidio pyramidis $EFGH$: Item a reliquis pyramidibus $EPRS, STVH$, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y , excessus pyramidis $EFGH$, supra solidū X . Sit ergo iam relictæ magnitudo minor. Cum autem pyramis $EFGH$, æqualis ponatur solidis X, Y ; erunt reliqua prismata in pyramide $EFGH$, maiora solidō X . Diuidatur pyramis $ABCD$, in duas pyramides æquales, & duo pris-

3. duodecim.

1. decimo

mata

metata æqualia; & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, a tota omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, ut basis ABC, ad basin EFG, hoc est, ut pyramis ABCD, ad solidum X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quàm tota pyramis ABCD; Erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora, quàm solidum X. Ostensa uero sunt, & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.

4. duodec.

4. quinti

Si t. secundo solidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, ut basis ABC, ad basin EFG; Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, ut basis EFG, ad basin ABC. Ponatur ut solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide EFGH; erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit, ut basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, ut est basis ab basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum pyramide EFGH, sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur, ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; Sit autem pyramis ABCD, ut ad solidum X, ita ad pyramidem EFGH, solido X, æquale: Erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

14. quinti

7. quinti.

SCHOLIION.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sint, ut bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim vnus alius maior credatur, abscindatur ab ea equalis minori, & a puncto abscissionis ad oēs angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritq; ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo cōstitutā: Sed sic quoq; erat ad ipsā pyramidem. Pyramis ergo cōstitutā

Y 2 æqualis

9. quinti. *aqualis erit totae pyramidi, pars tota. Quod est; absurdum.*

COROLLARIUM.

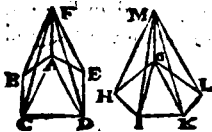
Hinc sit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel aequales bases triangulares constitutas, esse inter se aequales; propterea quod eandem proportionem habeant eum basibus, quae aequales ponuntur, vel certe una & eadem.

Item sequitur, e converso pyramides triangulares aequales super eandem, vel aequales bases, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares aequales eandemque habentes altitudinem, bases habere aequales, si non eandem habuerint. Quae quidem duo ex prima parte corollarii eodem argumento ostendemus, quo in converso propos. 30. & 31. lib. 21. demonstrando usi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constitutatur alia pyramis, &c.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

S V B eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, ut bases.

S I N T pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonae ABCDE, GHIKL, latera multitudine aequalia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resolutis enim basibus in triangula numero aequalia, erit quaelibet pyramis in totidem pyramides triangulares divisa. Quia vero



est, ut basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABGF, ad pyramidem ACD F; Erit componendo ut basis ABCD, ad basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACD F: Sed rursus est ut basis

ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACD F, ad pyramidem ADE F. Ig tur ex aequo ut basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADE F. Componendo ergo erit ut basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADE F. Simili argumento erit ut basis GHIKL, ad basin GKL, ita pyramis GHIKLM,

KLM,

K L M, ad pyramidem G K L M; Et conuertendo ut basis G K L. ad basin G H I K L, ita pyramis G K L M, ad pyramidem G H I K L M. Rursus quoniam est, ut basis A D E, ad basin G K L, ita pyramis A D E F, ad pyramidem G K L M; Erunt quatuor bases A B C D E, A D E, G K L, G H I K L, in eisdem proportionibus cum quatuor pyramidibus A B C D E F, A D E F, G K L M, G H I K L M, ut in hac formula uides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit ut basis A B C D E, ad basin G H I K L, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M; Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D E	A B C D E F
A D E	A D E F
G K L	G K L M
G H I K L	G H I K L M

5. duodec.

SCHOLIUM.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quorum bases polygonæ latera habent multisitudine equalia; facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum unius basis plura contines latera, quam basis alterius. Sins enim primum duæ pyramides eiusdem altitudinis A B C D E F, G H I K, quarum illius basis sit polygonæ, nempe pentagonæ, huius uero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin.



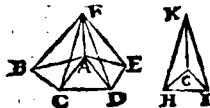
Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuisa. Quoniam uero est, ut basis A B C, prima quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; Et eodem modo, ut basis A C D, quinta quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A C D F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem: Erit ut basis A B C D, prima quantitas cum quinta, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis A B C D, prima quanti-

5. duodec.

24. quinti

tas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis AB ,
 CDE , tertia quantitas, ad pyramidem $GHIK$, quartam quanti-
 tatem, ut modo est offensum: & ut basis ADE , quinta quan-
 titas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis AD .

5. duodec.

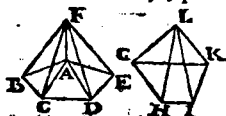


EF , sexta quantitas, ad pyramidem
 $GHIK$, quartam quantitatem;
 Erit etiam ut basis $ABCDE$, pri-
 ma quantitas cum quinta, ad basin
 GHI , secundam quantitatem, ita

24. quinti

pyramis $ABCDEF$, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem
 $GHIK$, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eo-
 dem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula
 in basi polygona. Cum autem, ut demonstratum est, sit ut ba-
 sis polygona $ABCDE$, ad basin triangularem GHI , ita pyra-
 mis $ABCDEF$, ad pyramidem $GHIK$; Erit quoque con-
 uertendo, ut basis GHI , ad basin $ABCDE$, ita pyramis GHI
 K , ad pyramidem $ABCDEF$. Quam ob rem due pyramides
 qualibet, quarum unus basis est polygona, alterius triangula-
 ris, suis basibus sunt proportionales, undecunque incipias.
 Quamuis enim demonstratio incipiat a polygono, eiusque pyra-
 mide, ut ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit
 initium quoque sumere a triangulo, eiusque pyramide, ut di-
 ctum est.

Si d iam sint due pyramides eiusdem altitudinis ABC -
 DEF , $GHIKL$, quarum bases sint polygonae, sintque plura
 latera in una base, quam in altera. Dico rursus esse pyramidem



ad pyramidem, ut est basis ad ba-
 sin. Resoluo enim polygono AB -
 CDE , in triangula ABC , ACD ,
 ADE , erit pyramis eius in totidem
 diuisa pyramides. Quia vero, ut

iam est demonstratum, est ut basis ABC , triangularis prima
 quantitas, ad basin $GHIK$, polygonam, secundam quantitatem;
 ita pyramis $ABCF$, tertia quantitas ad pyramidem $GHIKL$,
 quartam quantitatem; & ut basis ACD , quinta quantitas, ad
 basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ACDF$, sex-
 ta quantitas, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem;
 Erit etiam ut basis $ABCD$, prima quantitas cum quinta, ad ba-
 sin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ABCF$, ter-
 tia

24. quinti

tia

ia quantitas cum sexta, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis $ABCD$, prima quantitas, ad basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ABCD$, tertia quantitas, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem, ut proxime demonstratum est. Et est quoque ut basis ADE , quinta quantitas, ad basin $GHIK$, secundam quantitatem; ita pyramis $ADEF$, sexta quantitas, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem, ut ante est ostensum; Erit etiam ut basis $ABCE$, prima quantitas cum quinta, ad basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ABCE$, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi $ABCE$.

24. quini

HANC autem propositionem 6. & ea, quae in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quae inter se sunt, ut bases; eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quae in scholio proposit. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIUM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super aequales bases multangulas, uel eandem constitutas, esse inter se aequales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quae aequales ponuntur, uel certe una & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas aequales, & super aequales bases, uel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas aequales, eandemque habentes altitudinem, aequales habere bases, si non habuerint eandem. Haec autem duo demonstrabuntur, ut in coroll. proposit. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

6.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides

T 4 aequales

æquales inter se, triangulares bases habentes.

34. primi

5. duodec.



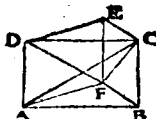
Sit prisma $ABCDEF$, cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia ABF , DCE . Dico ipsam prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur in tribus parallelogramis tres diametri, nempe AC , in $ABCD$; CF , in $BCEF$; FD , in $ADEF$. Quoniam igitur triangula ABC , ADC , æqualia sunt; estque ut basis ABC , ad basin ADC , ita pyramis $ABCF$, ad pyramidem $ADCF$, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F , uertice ad planum $ABCD$, demissam; Erunt & pyramides $ABCF$, $ADCF$, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADF , EDF , EDC , super æquales bases ADF , EDF , constituta, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari a uertice C , ad planum $ADEF$, demissa. Est autem pyramis $ADCF$, eadem pyramidi ADF , cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC , & triangulis ADF , ACF , DCF ; hæc uero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF , & triangulis ADC , ACF , DCF . Igitur tres pyramides $ABCF$, $ADCF$, EDC , seu $CDEF$, (quæ eadem est pyramidi EDF , cum tam EDF , quam $CDEF$, contineatur planis CDE , EDF , DCF , FCE , totum prisma componentes, ut perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma $ABCDEF$, in tres pyramides est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basim, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM. I.

Hinc colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim, & altitudinem.

Sit enim primum pyramis $ABFC$, triangularem habens basim ABF ; & prisma $ABCDEF$, sub eadem altitudine eandem habens basim triangularem ABF . Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis.

prismatis. Nam si ducatur recta DF , erit prisma diuisum in tres pyramides aequales $ABCF, ADCF, CDEF$; ut demonstratum est; Ac propterea pyramis $ABCF$, hoc est, pyramis $ABFC$, (cum hac illi sit aequalis, immo eadem, quod eidem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, BCF ;) tertia pars erit prismatis $ABCD\&F$. Cum igitur pyramis $ABFC$, aequalis sit cuiusque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim ABF , constituta, coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est quamlibet pyramidem se tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma e contrario esse pyramidis triplum.



7. duodec.

Si r secundo pyramis $ABCDE$, cuius basim rectilineam quodcumque $A B C D$, quolibet laterum; & prisma $ABCDEFGH$, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem et prismatis partem tertiam. Resoluta enim basim $ABCD$, & plano opposito $EFGH$, in triangulorum numero aequalia $ADB, BCD; EHF, FGH$; erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis $AH, BH; DF, CF$; erit, ut demonstratum est, pyramis $ADBH$, tertia pars prismatis $ABFEHD$; Item pyramis $BCDF$, tertia pars prismatis $CDHGFB$. Quare erit, ut pyramis $ADBH$, ad prisma $ABFEHD$, ita pyramis $BCDF$, ad prisma $CDHGFB$; Ac propterea ut una pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma $ABCDEFGH$. Igitur pyramides $ADBH, BCDF$, simul tertia partem constituent prismatis $ABCDEFGH$. sunt autem pyramides $ADBH, BCDF$, aequales pyramidi $ABCD$; propterea quod pyramides $ADBH, ADBE$, super eandem basim, & sub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt aequales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademque ratione aequales sunt pyramides $BCDF, BCDE$, super eandem basim, & sub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides $ADBH, BCDE$, component totam pyramidem $ABCDE$; erit & pyramis $ABCDE$, tertia pars prismatis $ABCDEFGH$. Cum igitur pyramis $ABCDE$, aequalis sit cuiusque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim ABC , constituta, per coroll. propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.



12. quinti

Quod si basim pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostenderetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singulae pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiae partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes haec pyramides aequales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

P O S M modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basim

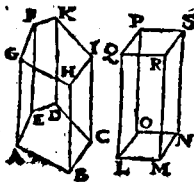
sem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem Nam eipf. modi pyramis æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propof. 6 huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIION. I.

Ex dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

S V B eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases; inter se sunt ut bases.

Q V A M V I S enim hoc demonstratum sit in lib. II. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & equalia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ; nec nõ de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen id ipsum demonstrabimus uniuersæ de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygonæ, quamuis plura latera seu anguli in vnus base reperiantur, quam in base alterius. Sinti igitur duo prismata eiusdem altitudinis $ABCDEF GHIK$, $LMNOPQRS$, quorum bases sint figura multilatera. Dico, ut est basis $ABCDE$, ad basim $LMNO$, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis utriusque ba-



sis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent due pyramides sub eadem altitudine cum prismatis, habentes easdem bases: Ac proinde, per coroll. prædictum, qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. Quam ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, ut basis ad basim, ut ostensum est propof. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque ut basis ad basim, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.

CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, ut bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholion propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIUM. II.

VND ϵ prismata eiusdem altitudinis super eandem, uel α quales bases quasunque, inter se sunt α qualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ α quales ponuntur, uel certe una & eadem.

E CONTRARIO, Prismata α qualia super α quales bases, uel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata α qualia eiusdem altitudinis, bases habent α quales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.

SCHOLION. II.

CAETERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa, quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quæ in vertice habent plana basi parallela, α qualia, & similia. Quid dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, α qualibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod uidelicet Campanus cum alijs putat tantummodo prisma dici ab Euclide, ut in defn. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis unum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, ut in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebis, quam basis ad basim, ut in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis concipiatur unum parallelogrammorum, ita ut in vertice sit linea recta, non eris pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed dua tertia partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebis sesquialteram, quam uidelicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud α quale & simile, ut parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedum, ex corollario

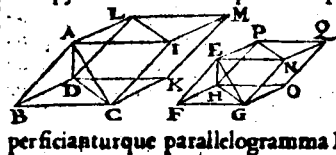
lario pradiſſo, cum parallelepipedum ſit priſma eandem & altitudinem, & baſin habens cum pyramide. Quare ſi pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum priſma propoſitum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum ſeſqui alteram. Ex quo efficitur, pyramidem ſuper dimidium parallelogrammum conſtitutam, quæ eandem cum tali priſmate habeas altitudinem, cum ſit dimidium prioris pyramidis, eſſe tertiam partem priſmatis. Quæ cum ita ſint, non habebit tale priſma ita conſtitutum ad aliud priſma eiſdem altitudinis, eandem proportionem, quam baſis ad baſin, niſi hoc aliud priſma in vertice lineam rectam habeat quoque, & baſin parallelogrammum. Itaque ea, quæ oſtendimus in ſcholio, intelligenda ſunt de priſmatis eiſdem altitudinis, quorum vertices vel linea rectæ ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atque ſimilia. Hac enim ratione, ſi vertices priſmatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eiſdem baſibus, eiſdemque altitudinis, duæ tertie partes priſmatum, ut modo demonſtravimus. Quare eandem habebunt rationem, quam priſmata, &c.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

S I N T pyramides ſimiles triangulares ABCD, EFGH, ita ut baſes ABC, EFG, ſint ſimiles, & reliqua triangula unius ſimilia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG.



Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur

cantur L M, I M, rectis A I, A L, parallelæ & æquales, convenientes in M, connectaturque recta K M. Erit igitur cōpletum parallelepipedum B M, eiusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi B M, sint parallela, ut facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum F Q. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani A B C, E F G, sunt æquales, estque ut A B, ad B C, ita E F, ad F G; erunt parallelogramma B I, F N, similia. Eodem modo cū anguli A B D, E F H, sint æquales, sitque ut A B, ad B D, ita E F, ad F H; Item anguli D B C, H F G, æquales, & ut D B, ad B C, ita H F, ad F G; erunt & parallelogramma B L, B K, parallelogrammis F P, F O, similia. Sed tam tria B I, B K, B L, parallelepipedum B M, reliquis tribus oppositis D M, A M, C M; quam tria F N, F O, F P, parallelepipedum F Q, reliquis oppositis tribus H Q, E Q, G Q, sunt æqualia & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum B M, similia sunt sex planis solidum F Q, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda B M, F Q. Quoniā uero ductis rectis L I, P N, prismata D B C I L A, H F G N P E, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda B M, F Q, eorum dupla; & pyramides A B C D, E F G H, eandem, quā prismata dicta, eādem tripla; habebūt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. Cum igitur proportio parallelepipedum B M, ad parallelepipedum F Q, sit triplicata proportionis homologorum laterū B C, F G; erit quoque proportio pyramidis A B C D, ad pyramidem E F G H, proportionis B C, ad F G, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

S I N T pyramides similes, quarum bases rectilineæ similia plurius laterum A B C D E, G H I K L. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera, homologa A B, G H.

24. undec.

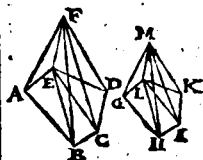
15. quinti

11. quinti

33. undec.

20. *sexii.*

GH. Nam si ex angulis A, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ AB, EC; LH, LI, distinxerunt bases similes in triangula numero aequalia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, equalis; erit ut FE, ad EA, ita GL, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum ABE, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita GL, ad LH. Rursus quia est ut EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et ut BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula



ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH; & ut EB, ad BF, ita LH, ad HM; erit etiam ex æquo, ut FE, ad BF, ita ML, ad HM. Quare æquiangula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH: Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MOH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Itē CDEF, IKLM. Quapropter, ut demonstratū est, pyramides AB-EP, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singule ad singulas, triplicatā proportionē habebunt laterū homologorū AB, BC, CD; ad GH, HI, IK; singulorū ad singula. Cum igitur AB, EC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unā & eandē proportionē, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque, pyramides AB-EP, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemque proportionē, triplicatā scilicet illas; Atque idcirco erit, ut una pyramis ABEP, ad unā pyramidem GHLM, ita oēs pyramides nempe pyramis ABCDEF, ad oēs pyramides, nimirum ad pyramidē GHIKLM. Quam ob rē, cum pyramis ABEP, ad pyramidē GHLM, habeat triplicatā proportionē homologorū laterū AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidē GHIKLM, triplicatā proportionē eorundē laterū homologorū AB, GH. Quod est propōitū.

5. *sexii.*

8. *duodec.*

12. *quinti.*

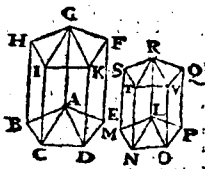
8. *duodec.*

S C H O L I O N.

EAD E M ratione, prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LQ, erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ

20. *sexii.*

recta GI, GK ; RT, RV , erunt triangula GHI, IKG, KFG , & triangulis RST, TRV, VQR , & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam uero, ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS , similia sunt; erit ut IC , ad CB , ita TN , ad NM . Ut autem CB , ad $C A$, ita quoque est NM , ad NL , ob similitudinem triangularum BCA, MNL . Igitur ex aequo erit ut IC , ad $C A$, ita TN , ad NL .



Rursus quoniam angulus solidus N , equalis est solido angulo C , ob similitudinem prismatum, si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus MNO , angulo BCD , & angulus TNM , angulo ICB , & angulus TNO , angulo ICD : Conuenit autem & recta NL , recta CA , eo quod anguli MNL, BCA , sine aequales, igitur anguli ICA, TNL , aequales sunt; Ac propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma CG, NR , similia. Atqui & parallelogramma CH, HA , parallelogrammis NS, SL ; & triangula ABC, GHI , triangularibus LMN, RST , similia sunt. Igitur prismata $ABCIGH, LMNTRS$, similia sunt, ex definitione solidorum similium. Non aliter ostenduntur esse similia prismata $CDAGIK, NOLRTV$; nec non prismata $AEDKGF, LPOVRQ$. Quapropter prismata $ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF$, ad prismata $LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ$, per ea, quae demonstrauimus, ad propof. 3 4 lib. 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterum homologorum BC, CD, DE , ad MN, NO, OP , singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata $ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV$, proportionem habere homologorum laterum BC, MN , triplicatam, quo paulo ante usi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

Ex quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes dimidi in pyramides triangulares similes, et numero aequales, et homologas totis. Hoc manifestum est ex demonstratione praecedens coroll.

Eodem modo inferri, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero aequalia, et homologa totis. Ut apparet ex huius scholij demonstratione.

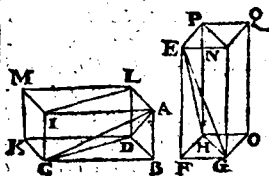
THEOR

7.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

AEQUALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares $ABCD, EFGH$. Dico earum bases ABC, EFG , & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut ABC , ad EFG , ita altitudinem pyramidis $EFGH$, ad altitudinem pyramidis $ABCD$. Si enim perficiantur, ut in præcedenti propos.



dictum est, parallelepipeda BM, FQ , earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN ; erunt prismata $DBCILA, HFGNPE$, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se

æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ , cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit ut basis BI , ad basin FN , ita altitudo solidi FQ , ad altitudinem solidi BM . Ut autem basis BI , ad basin FN , ita est triangulum ABC , ad triangulum EFG . Igitur erit quoque ut basis ABC , ad basin EFG , ita altitudo pyramidis $EFGH$, ad altitudinem pyramidis $ABCD$, cum altitudines pyramidum eadem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

SINT iam bases & altitudines reciprocae. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, ut prius, cum sit ut ABC , ad EFG , ita parallelogrammum BI , ad parallelogrammum FN ; sintque eadem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum

34. undec.

15. quinti

15. quinti

pipedorū & altitudines eorundem reciproce; Ac propterea inter se equalia erunt parallelepipeda BM, FQ . Quare & prismata $DBCILA, HFGNPE$, eorum dimidia, equalia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertię partes, equalia erunt. Aequalium igitur pyramidū, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

34. undec.

S C H O L I O N.

E A D E M ratione Aequalium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, recipiuntur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium recipiuntur bases & altitudines, illa sunt equalia. Sint enim primum dua pyramides equalia, quarum quidem $ABCD$, basin habeat triangularem; at uero $EFGHI$, non triangularem. Fiat basi non triangulari $EFGH$, equalis triangulū KLM . Quod quidem fiet, si basis multilatera remocetur ad parallelogrammum, per propof. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammū facile ad triangulum reduce-



tur, per ea, quę demonstravimus ad propof. 42. lib. 1. Deinde super KLM , fiat pyramis $KLMN$, eiusdem altitudinis cum pyramide $EFGHI$. Quoniam ergo pyramides $EFGHI, KLMN$, equalia habent bases, & eandem altitudinem, ipsę erunt equalia, per ea, quę in scholio propof. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis $EFGHI$, equalis pyramidi $ABCD$. Igitur & pyramis $KLMN$, pyramidi $ABCD$, equalis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides $ABCD, KLMN$, bases triangulares; erit ut basis ABC , ad basin KLM , hoc est, ad hanc equalē basin $EFGH$, ita altitudo pyramidis $KLMN$, hoc est, altitudo pyramidis $EFGH$, (ponuntur enim hæ altitudines equalia) ad altitudinem pyramidis $ABCD$. Ac proinde pyramidum $ABCD, EFGHI$, equalis bases & altitudines recipiuntur.

9. duodec.

S E D recipiuntur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse equalia. Constructa enim figura eodem modo; cum basis KLM , equalis sit basi $EFGH$, & alti-

Z

tudo

9. duodec.

tudo pyramidis $KLMN$, eadem qua pyramidis $EFGHI$; ponatur autem esse ut ABC , ad $EFGH$, ita altitudo pyramidis $EFGHI$, ad pyramidis $ABCD$, altitudinem; erit quoque ut basis



ABC , ad basin KLM , ita altitudo pyramidis $KLMN$, ad altitudinem pyramidis $ABCD$. Quamobrem aequales sunt pyramides $ABCD$, $KLMN$. Cum er

go pyramis $KLMN$, equalis sit pyramidi $EFGHI$, per ea, quae ostensa sunt in scholio propof. 6. huius lib. Erit & pyramis $ABCD$, pyramidi $EFGHI$, equalis. Quod est propositum.

S I N T secundo pyramides aequales $ABCDE$, $FGHIKL$, quarum bases sint multangula. Fiat rursus triangulum MNO , aequale basi $ABCD$, & pyramis $MNOP$, eiusdem altitudinis



cum pyramide $ABCDE$: Eritque ex scholio propof. 6. huius lib. pyramis $MNOP$, equalis pyramidi $ABCDE$: Sed hac a-

qualis ponitur pyramidi $FGHIKL$. Igitur & pyramis $MNOP$, equalis est pyramidi $FGHIKL$. Quare, ut nunc demonstramus, erit ut basis MNO , hoc est, basis $ABCD$, sibi equalis, ad basin $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinem pyramidis $MNOP$, hoc est, ad altitudinem pyramidis $ABCDE$; (ponuntur enim haec altitudines aequales.) Ac propterea pyramidum aequalium $ABCDE$, $FGHIKL$, bases & altitudines reciprocantur.

S I D reciprocetur iam bases harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse aequales. Constituta enim eodem modo figura, cum basis MNO , equalis sit basi $ABCD$, & altitudo pyramidis $MNOP$, eadem qua pyramidis $ABCDE$; ponatur autem ut $ABCD$, ad $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinem pyramidis $ABCDE$; Erit quoque ut MNO , ad $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinem pyramidis $MNOP$. Quare ut ante ostendimus, aequales erunt pyramides $MNOP$, $FGHIKL$: Est autem pyramis $MNOP$, pyramidi $ABCDE$, equalis, ex scholio propof. 6. huius lib. Igitur & pyramis $ABCDE$, pyramidi $FGHIKL$, equalis erit. Quod est propositum.

OMNIA hac facile quoque demonstrabuntur convenire prismatis quibuscumque. Nam si prismata fuerint aequalia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinis cum ipsis, & super easdem bases, aequales;

aquales; cū sint eorū tertia partes, ex coroll. propos. 7. huius lib. Vel certe quia tertia, si nimirū prismatū bases fuerint parallelograma, & eorū uertices, linea recta, ut in scholio eiusdē propos. ostensum est. Quare, ut modo demonstrauimus, bases harū pyramidū atq; altitudines reciprocantur. Cū ergo ha bases & altitudines eadem sint quae prismatū; reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

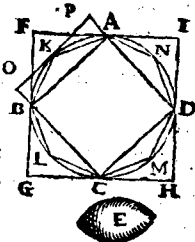
R V R S V S, si prismatū bases, & altitudines reciprocantur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines pyramidū eadē bases & altitudines cum prismatis habentium. Quare, ut demonstratū est, pyramides aequales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint tripla, uel certe sesquialtera, aequalia quoque sunt. Quod est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

9.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus basin eandē circulū ABCD, & altitudinē eandē. Dico conū cylindri esse tertiā partē. Si .n. conus nō credatur esse tertia pars cylindri, nō erit cylindrus conī triplus, sed uel maior, uel minor triplo conī. Sit primū maior quā triplo conī, magnitudine E, ita ut cylindrus sit æqualis triplo conī & magnitudini E, simul. Inscribebatur in circulo quadratū ABCD, & circa eundē, quadratū FGHI; intelligaturq; super hęc quadrata sub altitudine conī, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratū ABCD, dimidiū est quadrati FGHI, ut ad propos. 9.

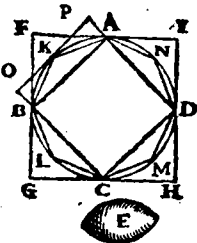


lib. 4. ostēdimus; estq; ut basis ad basin, ita parallelepipedū ad parallelepipedū eiusdē altitudinis; Erit & parallelepipedū basis ABCD, dimidiū parallelepipedi basis FGHI; Ac proinde parallelepipedū basis ABCD, mai⁹ erit, q̄ dimidiū cylindri, cuius

32. undec.

cuius basis circulus ABCD Secetur bifaria peripheriæ A B, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, ut ad propof. 27 lib. 3. ostendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intel

ligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulū AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP; erit quoque prisma basis AKB, dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis ABOP: cum sit prisma ad prisma, ut basis ad basin, quemadmodum ad propof. 7. huius lib. demonstrauiamus; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit, quam dimidium segmenti cylindri, cuius



basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangu-
 gula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, &c. secetur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cylindro, cuius basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedium basis ABCD; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri reliqua basium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta), simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex tri-
 plo

41. primi.

2. decimi.

plo coni una cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ A K B L C M D N, eandem habens altitudinē cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propof. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.

SIT secundo cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita ut conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscríbatur rursus in circulo quadratum A P C D, & circa eundem, quadratum F G H I; intelliganturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I, ut ad propof. 9. lib. 4. demonstrauimus; estq; ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus A B C D. Secentur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiungantq; rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, ut ad propof. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A K B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulum A K B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoque pyramis super basin A K B, dimidium pyramidis super basin A B O P, cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin A K B, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæc pyramides simul maiores sunt, quam dimidia

6. duodec.

41. primi.

6. duodec.

x. decimi.

media omnium segmentorum conī simul. Quod si rursus peripheriæ $A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A$, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum conī simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cono, cuius basis circulus $A B C D$, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basim $A B C D$, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium conī, cuius basis est circulus $A B C D$; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium $A K B, B L C, C M D, D N A$; atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E , excessus conī supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta conī relicta basium $A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A$, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam E . Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E , simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine E , ipsa magnitudo E , quæ maior est præfatis conī segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum $A K B L C M D N$, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in corollario propositionis septimæ huius libri a nobis est demonstratum; erit huiusmodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo conī:

Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo conī, proptereaq; conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem.

Quod erat demonstrandum.

SCHO.

SCHOLION.

QVAMVIS propositio hac solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hoc duntaxat Euclides definieris lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis convenit, ut perspicuum est eius demonstratione diligenter insuenti. Itaque propositio uniuersa ita proponi poterit.

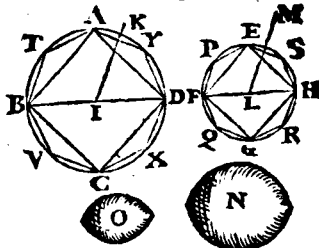
OMNIS conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis conici & cylindri.

THEOR. II. PROPOS. II.

II.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases.

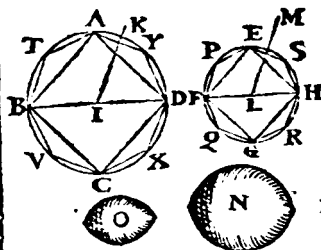
SINT sub eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, altitudines uero æquales IK, LM. Dico ut est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit ut basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ uel maior



erit, uel minor cono EFGHM. Si enim esset æqualis, haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conum, ut basis ad basin: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribe in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidaturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bisariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quæ igitur ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH, eiusdem

7. quinti.

1. decimi.



quam O. excessus con-
ni EFGHM, super N.
Sint ergo iam segmen-
ta conī relictā basium
EP, PF, FQ, &c.
(quæ quidem bases
sunt circuli segmenta)
simul sumpta, mino-
ra quam O. Cum igitur
conus EFGHM,
ponatur æqualis ma-

gnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta
conī segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ præ-
dicti conī segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius
basis polygonum EPFQ GRHS, eiusdem altitudinis cum
cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribebatur in
circulo ABCD, polygonum ATBV CXDY, simile polygo-
no EPFQ GRHS, ut in propof. 2. huius lib. docuimus, du-
canturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur,
per coroll. propof. 2. huius lib. est ut circulus ABCD, ad
circulum EFGH, ita polygonum ATBV CXDY, ad poly-
gonum EPFQ GRHS: Vt autem circulus ABCD, ad cir-
culum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudi-
nem N; & ut polygonum ad polygonum, ita est pyramis
ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque
ut pyramis ATBV CXDYK, ad pyramidem EPFQ-
GRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis
ATBV CXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, erit
& pyramis EPFQ GRHSM, minor quam N: Ostensa au-
tem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor
est magnitudo N, cono EFGHM.

Si T secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur
ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus
ABCDK, ad N; Erit & conuertendo ut circulus EFGH,
ad c

6. duodec.

ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM; Sed neque minor est ostensa; AEqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Sit autem, ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

14. quinti.

7. quinti.

Quoniam autem, ut conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni EFGHM) Erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo usi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

15. quinti.

SCHOLION.

PERSPICVVM quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, ut eius demonstratio manifeste indicat, ita ut propositio vniuersæ proponatur in hunc modum.

SUB eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

Con-

CONVERTETVR hæc propositio quoq; hoc modo.

SI coni & cylindri inter se sint, ut bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

COROLLARIUM.

Hæc fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, uel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, uel scaleni, siue unus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habeant, quam bases, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

ITEM sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, uel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendimus non aliter ac conuersum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

10.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

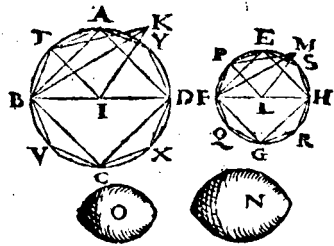
SINT similes coni, & cylindri, quorum bases circuli A B C D, E F G H, axes uero I K, L M, & diametri basium B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus A B C D K, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H. Eritque N, uel minor, uel maior cono E F G H M. Si enim esset æqualis, haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni A B C D K, ad conum E F G H M, esset quoque triplicata proportionis diametri B D, ad diametrum F H; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor, quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita ut rursus pyramis E P F Q G R H S M, maior ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ K B, K T; M F, M P, ut habeantur duo trian-

7. quinti.

gula

pula B K T, F M P, pyramidum A T B V C X D Y K,
E P F Q G R H S M;

& cōnectantur re-
ctæ T I, P L. Quo-
niam igitur coni
A B C D K, E F-
G H M, similes
ponuntur, erit,
ex 24. defin. lib. 11.
ut diameter B D;
ad diametrū F H,
ac propterea ut se-
midiameter B I, ad semidiametrum F L, ita axis I K, ad axem



L M; Ac permutādo ut B I, ad I K, ita F L, ad L M. Cū igitur anguli B I K, F L M, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, proptereaq; axes recti ad eorum bases; Erunt triangula B I K, F L M, æquiangula; Ac propterea ut K B, ad B I, ita M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita F L, ad F P; ob similitudinem triangulorum B I T, F L P. (Cum enim anguli B I T, F L P, insistentes similibus arcibus B T, F P, sint æquales, ut in scholio propos. 3. lib. 6. ostensum est; sitq; ut B I, ad I T, ita F L, ad L P, ob æqualitatē tā linearū B I, I T, quam F L, L P; erunt triangula B I T, F L P, similia.) Igitur ex æquo, ut K B, ad B T, ita M F, ad F P. Rursus quia latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia sūt lateribus K I, I T, trianguli K I T, & anguli dictis lateribus cōprehēsi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cū axis I K, rectus ponatur ad circulū A B C D; erunt bases K B, K T, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ M F, M P; Ac propterea rectæ K B, K T, rectis M F, M P, proportionales erūt, cū utrobique sit proportio æqualitatis. Quoniā uero, ut K B, ad B T, ita K T, ad eandē B T; Itē ut M F, ad F P, ita M P, ad eandē F P: Erat autē ut K B, ad B T, ita M F, ad F P; Erit quoque ut K T, ad B T, ita M P, ad F P; Et cōuertēdo ut B T, ad T K, ita F P, ad P M. Quare cū sit ut T K, ad K B, ita P M, ad M F; & ut K B, ad B T, ita M F, ad F P; Et ut B T, ad T K, ita F P, ad P M, ueluti ostēsū est; habebūt triāgula B K T, F M P, latera pportionalia, ideoque æquiāgula erūt; Ac pinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides

A T-

15. quinti.

6. sexti.
4. sexti.

6. sexti.

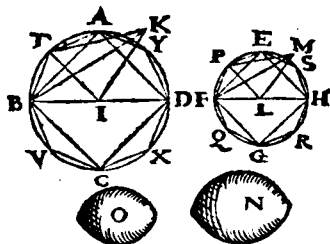
4. primi.

7. quinti.

5. sexti.

ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudinis æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportionem erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propof. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FL P; Et ut BI, ad

15. quinti. FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habe-



bit quoq; proportionem triplicatâ diametrorū BD, FH. Ponatur autem & proportio conii ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Erit ergo ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyra-

midem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. ostensa autē est & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

14. quinti.

S I T secundo N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidē EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime ostendimus: Erit ut conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo ut N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc est, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoque N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, propor-

proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM, erit quoque conus ABCDK, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor est ostensa. Aequalis igitur est; ac proinde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad conum EMGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportionem diametrorum BD, & FH; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportionem triplicata.

14. quinti.

7. quinti.

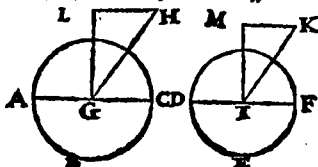
QUONIAM uero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

15. quinti.

SCHOLIUM.

HABC propositio, quamvis etiam extendatur ad similes conas & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis relictis conis & cylindris similibus, cū in demonstratione assumantur axes recti ad bases.

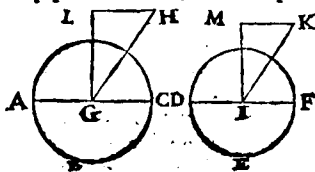
Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli



ABC, DEF, axes uero GH, IK, & diametri basium AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere

habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligentur super easdem bases duo con. & cylindri recti eandem cum scalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducanturq; per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana secantia bases lincis rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF; erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad easdem recta AC propterea perpendicularares lineae ex H, K, ad bases demissa cadent in AC, DF, communes sectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui aequales inter se erunt, cum con. & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, aequales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. reliqui igitur HGL, KIM, aequales quoq; erunt. Quoniam uero con. ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis, erit recta HL, per axium uertices ducta ipsa AC, parallela, ideoq; angulus L, rectus: Eodemq; argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, aequales erunt, cum sint aequales eorum alteri anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, equiangula sunt; atq; idcirco erit ut GH, ad GL, ita IK, ad IM; & permutando, ut GH, ad IK, ita GL, ad IM. Ut autem axis GH, ad axem IK, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod con. & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, ut diameter AC, ad DF, diametrum; Et proinde con. & cylindri recti ABCL, DEFM, similes erunt, ex definitione. Quare proportionem habebunt diametrorum triplicata. Quia uero ita conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinē,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) est aequalis, ut constet ex coroll. propof. 11. huius lib. Erat ut conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK; ideoq; proportio con. & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, triplicata quoq; erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.

THEOR.



18. undec.

38. undec.

32. primi.

29. primi.

4. sexti.

12. duodec.

7. quinsi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

II.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo : Erit ut cylindrus ad cylindrū, ita axis ad axem .

SECTUR cylindrus ABCD, plano GH parallelo ad uersis planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico ut est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in utramq; partem, una cum eius axe, & rectangulo EC, ad cuius reuolutionē descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet; Sumaturq; in axe productio quotcūq; rectæ EK, KL, æquales ipsi EI; Itē quotcūq; rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidē ad reuolutionē rectanguli EC, describent circulos GH, PR, QS, Ta, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur.

Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componentes totum cylindrum SQXY. Quoniam uero tam cylindri SP, PA, AH, super



bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, Ta, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex corollario propof. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudi-

gnitudinis) æqualis quoque est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propos. 11. huius lib. liquet. Si uero



axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, se-

cundam magnitudinem, ut cylindrus A H, tertiæ magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

ET S I hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri



scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita ut quemadmodum in conis rectis rectangulū circa quie-

scen latius circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, E A, &c. semper æquidistantes circa centra L, K, E, &c. una cum recta S Y, semidiametros coniungente; hac enim ratione semper cylindri describuntur, ut constet ex ijs, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

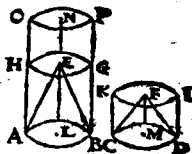
II.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

S I N T

SINT super bases æquales AB, CD , duo conī ABE , CDF , & duo cylindri $ABGH, CDIK$, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipsi sunt altitudines) LE, MF . Dico esse conum ABE , ad conū CDF , & cylindrum $ABGH$, ad cylindrum $CDIK$, ut est altitudo LE , ad altitudinem MF . Extendatur enim cylindrus $ABGH$, ad partes GH , una cum eius axe LE , & rectangulo AE ; abscindaturque axis EN , æqualis axi MF , & circa centrum N , intelligatur circulus OP , æqualis & parallelus circulo GH , ut fiat cylindrus $GHOP$, eiusdem altitudinis cum cylindro $CDIK$. Quoniam igitur cylindri HP, CI , cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propof. 11. huius lib. proptereaque cylindrus AG , ad ipsos



7. quintus.
19. duodec.

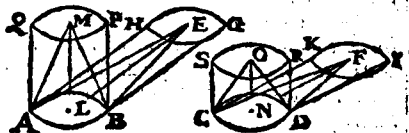
Est autem cylindrus AG , ad cylindrum HP , ut axis, seu altitudo LE , ad axem, seu altitudinem EN , hoc est, ad altitudinem MF , sibi æqualem. Igitur & cylindrus AG , ad cylindrum CI , erit quoque, ut altitudo LE , ad altitudinem MF . Quia uero conī ABE, CDF , sunt tertie partes cylindrorum AG, CI ; ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE , ad conum CDF , ut altitudo LE , ad altitudinem MF . Super æqualibus igitur basibus existentes conī & cylindri, inter se sunt, ut altitudines. Quod ostendendum erat.

10. duodec.
15. quintus

SCHOLIUM

Hoc idem convenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint

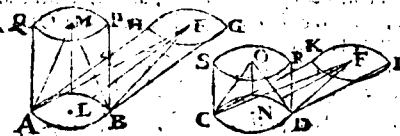
super bases æquales AB, CD , conī ABE, CDF , & cylindri $ABGH, CDIK$,



scaleni, quorum altitudines LM, NO . Dico conum ABE , ad

conum

conum CDF , & cylindrum $ABGH$, ad cylindrum $CDIK$,
esse, ut est altitudo LM , ad altitudinem NO . Super basin AB ,
cōstruatur cy-
lindrus rectus



cōstruatur cy-
lindrus rectus
 $ABPQ$, sub
altitudine, LM ;
Item su-
per basin CD ,
cylindrus re-

14. duodec.

ctus $CDRS$, sub altitudine NO . Quoniam igitur est cylin-
drus rectus $ABPQ$, ad cylindrum rectum $CDRS$, ut alti-
tudo LM , ad altitudinem NO : Est autem cylindrus $ABPQ$,
cylindrus $ABGH$; Item cylindrus $CDRS$, cylindrus $CDIK$,
aqualis, ex coroll. propos. 13, huius lib. Erit quoque cylindrus
 $ABGH$, ad cylindrum $CDIK$, ut altitudo LM , ad altitudi-
nem NO : Quod est propositum.

19. duodec.

15. quinti

Quoniam autem coni, cum sint tertie partes cylin-
drom, eandem habent proportionem, quam cylindri. Erit
quoque conus ABE , ad conum CDO , ut altitudo LM , ad alti-
tudinem NO . Quod tamen eodem argumento, quo rsi sumus in
cylindris, confirmari potest, ut perspicuum est, si super bases
 AB, CD , frant coni recti ABM, CDO , earundem altitudinum
cum cylindris $ABPQ, CDRS$.

Idem concludetur, quamvis unus conorum, & cylindro
rum, nempe conus ABE , & cylindrus $ABGH$, fuerit scalenus,
alter vero, nempe conus CDO , & cylindrus $CDRS$, rectus. Nam
cū cylindrus scalenus $ABGH$, equalis sit cylindro recto $ABPQ$,
sit autē cylindrus rectus $ABPQ$, ad cylindrum rectum
 $CDRS$, ut altitudo LM , ad altitudinem NO , ut Euclides demō-
stravit: Erit quoque cylindrus scalenus $ABGH$, ad cylindrum re-
ctum $CDRS$, ut altitudo LM , ad altitudinem NO . Quod est
propositum.

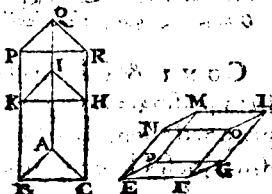
15. quinti

10. duodec.

Quoniam vero coni eandem habent proportionem, quam cy-
lindri, cum illi horum sint tertie partes: Erit etiā conus scalenus
 ABE , ad conum rectum CDO , ut altitudo LM , ad altitudinem NO .
Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua rsi sumus in cy-
lindris, ut manifestum est.

Eadem quoque hæc propositio convenit prismatis, parallele-
pipedis, & pyramidibus super aequales bases cōstitutis. Sims. a.
super

super bases aequales $ABC, DEFG$, prismata $ABCHIK, DEFG-
LMNO$, & pyramides sub eisdē altitudinibus. Dico: esse pris-
ma ad prisma, & pyramidē ad
pyramidem, ut est altitudo ad
altitudinem. Sini namque in-
sistentes lineae AI, CH, BK ,
prismatis $ABCHIK$, ad basin
 ABC , perpendiculares, ita ut
 EK sit altitudo prismatis $AB-
CHIK$; Productis autem rectis
 AI, CH, BK , sumantur $I Q,$



IK, KP , aequales altitudini prismatis EL ; & ductis rectis
 PQ, QR, RP , compleatur prisma $HIKPQR$, eiusdē al-
titudinis cū prismate EL . Eruntq; prismata $HIKPQR, EL$,
cum habeant & bases, & altitudines aequales, inter se aequalia,
ex coroll. 2: propof. 7. huius lib. Ac propterea prisma $ABC-
HIK$, ad utrumq; eandē habebit proportionem. Quia vero, ex
scholio propof. 25. lib. 11. prisma $ABCHIK$, ad prisma $HIK-
PQR$, est ut planū BI , ad planum KQ ; Et si planū BI , ad
planum KQ , ita est recta BK , ad KP ; Erit prisma $ABC-
HIK$, ad prisma $HIKPQR$, hoc est, ad prisma EL ; ut BK ,
altitudo prismatis $ABCHIK$, ad KP , altitudinem prismatis
 $HIKPQR$, hoc est, prismatis EL . Quod est propositum.

QVOD si insistentes lineae AI, CH, BK , nō sint perpendiculā-
res ad basin ABC , cōstitutū erit sup basin ABC , aliud prisma,
cuius insistentes sint perpendiculares ad basin, et aequales altitu-
dini prismatis $ABCHIK$. Nam cū ex 2. coroll. propof. 7. huius
lib. hac duo prismata eandem habentia altitudinem, & basiv,
sint aequalia, sitq; prisma cōstitutū ad prisma EL , ut illius al-
titudo ad huius altitudinem; erit & prisma $ABCHIK$, ad pris-
ma EL , ut altitudo illius, ad altitudinem huius.

QVONIAM vero pyramides eandem habent proportio-
nem cū prismatis, quod illa sint horum remota partes: Perspi-
cuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, ut est al-
titudo ad altitudinem.

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis,
cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismat-
um, ut dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit
accommodari.

7. quinti

1. sexti.

15. quinti

HÆC omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

OMNIA quoque hac facile conuerti possunt hoc modo.

CONI & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

NAM altæ pars æqualis foret toti, ut in conuerso, propos. 31. lib. 11. ostensum est.

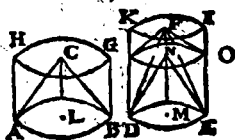
12. THEOR. 15. PROPOS. 15.

ÆQUALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

SINT æquales coni ABC , DEF , & æquales cylindri $ABGH$, $DEIK$, quorum bases AB , DE : axes, altitudinesve LC , MF . Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut AB , ad DE , ita MF , ad LC . In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines LC , MF , sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales, erunt & bases æquales, ex coroll. prop. f. 11. huius lib. Quare erit ut basis AB , ad basin æqualem DE , ita altitudo MF , ad altitudinē æqualem LC . Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocae.

QVOD si altitudines LC , MF , inæquales fuerint, sit MF , maior, ex qua abscindatur MN , ipsi LC , æqualis; & per N , ducatur planum ON , basi DE , parallelum, ut in scholio propos. 15. lib. 11. docuimus, ut fiant duo cylindri DO , OK . Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri $ABGH$, DE .

DEIK; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. Est autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita basis AB, ad basin DE, cum æquales sint altitudines: Itē ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint æquales, immo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc est, ad huc æqualem LC; Ac propterea reciproce sunt bases & altitudines.



7. quinti.

11. duodec.

14. duodec.

IN conis uero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, cum coni sint cylindrorum tertiæ partes; Quare ut ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam consequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo usi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus MN, NF, constituentur duo coni, ut in figura.

10. duodec.

SED iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propof. 11. huius lib.

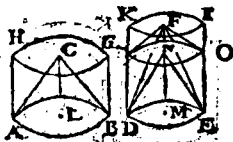
QUOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huc æqualem MN; Est autem, ut basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: Item ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

11. duodec.

14. duodec.

9. quinti.

AT vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum



ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eadem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut ostensum fuit, cylindri, ideoque coni,

eorum tertiae partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo, conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoque recti easdem cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propof. 11. huius lib. Quare ut ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, ut demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propof. 11. huius lib. inter se quoque erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet unus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, ut perspicuum est ex his, quæ in scholio propof. 14. huius lib. docuimus.

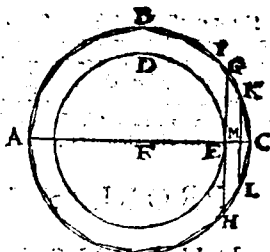
13.

PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBUS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inferi-

inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrū F, oportetq; in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tãget circulum DE, in E, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu CG, si ex AGC, auferatur dimidiū AB, & ex residuo BC, dimidiū BI, & ex residuo IC, dimidiū IK, & sic deinceps; relinquetur tandē minor arcus, quā CG. Si igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectā CK, esse unum latūs polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrās AB', in totidē partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans BC; nec nō semicirculus AHC, in totidē partes, quot cōtinet semicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ linæ subtendantur, quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant. Descriptum erit polygonum in circulo ABC, cum æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt, erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cū recta GH, tangat circulum DE, in solo puncto E; recta KL, erit rota extra dictum circulū, nec unquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius a circulo DE, abest, quam KL, circulum DB, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, ideoque æqualiter cum CK, a cen-



1. decimi.

29. terij.

28. primi.

4. terij.

tro F, distant, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod est diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed totam extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quae cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, convenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.

14.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS sphaeris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaera solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphaerae superficiem.

SINT duae sphaerae ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphaeram EFGH. Secentur ambae sphaerae plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factae in sphaeris plana ABCD, EFGH, quae circuli erunt, ex descriptione sphaerae, habentes idem centrum sphaerarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumvolutionem sphaerae describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictae sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineae rectae cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt aequales, cum ducantur ex centro sphaerarum ad earum superficiem, erunt ipsae sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD, se se in centro I, secantes ad angulos rectos, ut sint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem, ut

facilius

facilius omnia demonstrentur, in hunc modum. efficiatur.
 Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G γ , ad circumferen-
 tiam usque circuli ABCD, quæ circumulum EFGH, tanget in
 G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectæ G γ , applicetur in
 circulo A B C D, recta æqualis A ϵ . Quia uero, si arcui
 C γ , intelligatur subtendi recta, ut fiat triangulum G C γ ,
 latus C γ , oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est
 latere G γ , quod minori angulo opponitur, nimirum acuto;
 erit quoque recta C γ , maior recta A ϵ ; ac proinde arcus
 C γ , arcu A ϵ , maior erit, ut constat ex scholio propos. 28.
 lib. 3. Abcindatur ergo arcus C δ , arcui A ϵ , æqualis. Quod
 si ex quadratæ C D, dimidium auferatur D L, & ex reliquo
 C L, dimidium L K, & sic deinceps; relinquetur tandem ar-
 cus minor arcu C δ , seu arcu A ϵ . Sit ergo iam arcus C K,
 minor; Eritque recta C K, subtensa minor quam recta A ϵ ,
 hoc est, quam G γ , ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur,
 rectam C K, esse unum latus polygoni æquilateri inscri-
 bendi. Nam cum recta subtendens arcum C δ , minorem ar-
 cu C γ , non tangat circumulum EFGH, ut ex demonstratione
 præcedentis propos. patet, multo minus recta C K, subten-
 dens arcum minorem arcu C δ , eundem circumulum tanget.
 Rursus ducta diametro K N, erigatur ex centro I, ad plana
 circumulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occur-
 rens superficiæ spheræ maioris in O; Et per rectas O I, A C,
 & O I, K N, plana ducantur, quæ ad circumulum A B C D,
 recta erunt, efficientque communes sectiones, circulos, ut
 iam dictum est, quorum semicirculi sint A O C, N O K. Quia
 uero anguli O I C, O I K, recti sunt, ex defin. 3. lib. 1, qua
 diætes erunt O C, O K; atque adeo, cum circuli A B C D,
 A O C, N O K, æquales sint, quod eorum diametri sint &
 spheræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes C D,
 O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes equa-
 les distribuatur, in quot diuisus fuit arcus C L; Et quadran-
 tes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales ar-
 cubus quadrantis C D; Erunt rectæ his omnibus arcubus
 æqualibus subtensæ, nimirum C K, K L, L M, M D; C P,
 P Q, Q R, R O; K S, S T, T V, V O, æquales. Coniun-
 ctis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad
 planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, quæ in
 commu-

1. quarti

19. primi

1. decimi.

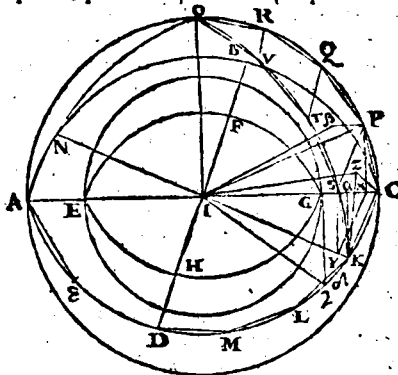
12. undec.

18. undec.

29. tercij.

38. & 6
undec.
27. terrij.

cōmunes sectiones AC, NK, cadēt; eruntq; inter se parallelę.
QVONIAM igitur triāgulorū PCX, SKY; anguli PXC,
SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. & anguli PCX, SKY,
æquales, quod & æquales sint periphæriæ AOP, NOS, qui-



bus insistūt;
(Nam si ex
semicirculis
AOC, NO-
K, æqualibus
demantur ar-
cus æquales
CP, KS; reli-
qui arcus A-
OP, NOS,
æquales quo-
que erunt.)
Erūt duo an-
guli PCX,
PXC, triāgu-

26. primi.

33. primi
2. sexti.

9. undec.

7. undec.

2. undec.

li PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, triāguli SKY:
Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqua-
lia. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK,
æqualia erunt. Quare cum rectę PX, SY, æquales sint & pa-
rallę; si connectatur recta XY; æquales quoque erunt &
parallelę PS, XY. At quia & rectę CK, XY, parallelę sunt,
quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex
semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectę
CX, KY, relinquentur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, ut
IX, ad XC, ita IY, ad YK.) Erunt parallelę quoq; PS, CK,
inter se, cum utraq; parallelā sit ipsę XY; ideoque eas coniu-
gentes rectę CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent.
Totū igitur quadrilaterū CKSP, in uno erit plano. Quod
si ex Q, & T, demittantur ad planū circuli ABCD, per-
pendicularēs, & connectantur rectę QC, TK, ostendemus
similiter CK, QT, esse parallelas; atq; adeo ipsas PS, QT,
inter se parallelas esse, cū eidē CK, sint parallelę; totumque
quadrilaterum PSTQ, in uno esse plano. Eadem ratione
in uno erit plano quadrilaterū QTVR: Est autē & trian-
gulum RVO, in uno plano. Si igitur eadem cōstructio exhi-
beatur

beatut super reliqua latera KL, LM; M D, ductis scilicet quadrantibus OL, OM; OD; necnon in reliquis tribus quartis; ac reliquo hemisphærio; ut tota sphaera maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis; inscriptum erit in sphaera maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris, atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphaeram minorem EFGH.

DVCATVR ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Quoniam igitur, ex definit. 3. lib. 1. anguli IZC, IZK, recti sunt; erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint; erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto cõmuni quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoque, & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad B, ducuntur, æquales esse & inter se, & rectis ZC, ZK; Quare circulus ex Z, ad interuallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam uero, ut postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

47. primi.

12. secundi.

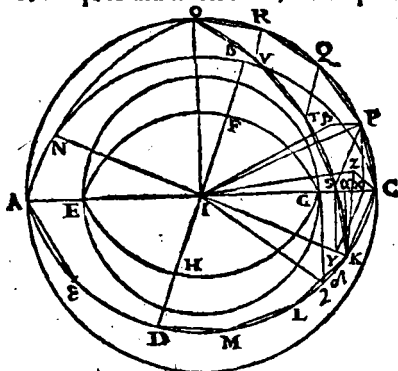
DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Ka. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI & Aa, maior sit, quàm AI, erit AC, minor duplo ipsius Aa. Quam ob rem cum sit, ut AC, ad Aa, ita rectangulum sub AC, aC, ad rectangulum sub Aa, aC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aa, & eadem altitudo aC, erit quoque rectangulum sub AC, aC, minus duplo rectanguli sub Aa, aC. Est autem rectangulum sub AC, aC, æquale quadrato rectæ CK; & rectangulum sub Aa, aC, æquale quadrato rectæ Ka; quod rectæ CK, inter AC, aC, sit media proportionalis; & recta Ka, inter Aa, aC, ex coroll. propof. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum

1. sexti.

7. sexti.

gulum $A K C$. Igitur & quadratum rectæ CK , minus erit duplo quadrati rectæ Ka . Ac propterea cum quadratum rectæ CK , ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ $Z C$, erit quadratum rectæ Ka , maius quadrato rectæ $Z C$.

47. primi.



Quoniā uero quadratū rectæ IC , æquale est quadratis rectarū IZ , $Z C$; & quadratū rectæ IK , quadratis rectarū Ia , $a K$: Suntq; æqualia quadrata rectarū æqualiū IC , IK ; Erunt

& quadrata rectarum IZ , $Z C$, æqualia quadratis rectarū Ia , $a K$. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ $a K$; & ex illis minus, uidelicet rectæ $Z C$, erit reliquum quadratum rectæ IZ , maius quadrato reliquo rectæ Ia ; ideoque recta IZ , maior quam recta Ia . Quapropter cum punctum a , non tangat spheram minorem $EFGH$, quod per coroll. propos. præcedentis recta Ka , tota sit extra dictam spheram; multo minus punctum Z , longius distans, eandem spheram contingeret. Ac proinde cum omnia alia puncta plani $CKSP$, longius absint a sphaera $EFGH$, quam punctum Z , ut mox ostendemus, non tanget planum $CKSP$, spheram $EFGH$.

49. primi.

SBD & expeditius ex ipsa fere cōstructione figurę ostendemus, planum $CKSP$, non tangere spheram minorem $EFGH$, si prius ducatur recta Iy , hoc modo. Quoniam ex cōstructione ostensum fuit, rectam CK , minorem esse recta Gy : Est autem CK , maior, quam $Z C$, quod angulus CZK , obtrusus sit, ut mox demonstrabitur; Multo maior erit Gy , quam $Z C$; Ac proinde quadratum rectæ Gy , maius quadrato rectæ $Z C$. Quia uero quadratum

Iy ,

I γ , æquale est quadratis rectarum I G, G γ ; & quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C; sunt autem quadrata rectarum I γ , I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ , quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempro ergo illinc quadrato rectæ G γ , & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quam ob rem, cum I G, sit sphaeræ minoris E F G H, semidiameter; exister punctum Z, extra eandem sphaeram; Et proinde, ut prius, planum C K S P, sphaeram E F G H, nequaquam continget.

47. primi

D V C A T V R, rursus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis I β , eritque β , centrum circuli circa P S T Q, descripti, ut demonstratum est: Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus sit, ex 3. defin. hb. 1. erit quadratum rectæ I P, æquale quadratis rectarum I β , β P. Quia uero & quadratum rectæ I C, (quod æquale est quadrato rectæ I P, ob æqualitatem rectarum I C, I P) æquale est quadratis rectarum I Z, Z C; erunt quadrata rectarum I β , β P, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia: est uero quadratum rectæ Z C, maius quadrato rectæ β P, quod & linea Z C, maior sit, quàm linea β P, ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ I β , reliquo quadrato rectæ I Z, maius erit; ideoque & linea I β , maior quam linea I Z: Ac proinde multo magis punctum β , extra sphaeram E F G H, exister, quàm punctum Z; proptereaque multo minus planum P S T Q, quam C K S P, tanget sphaeram minorem E F G H. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphaeram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphaeris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaera solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphaeræ superficiem. Quod erat faciendum.

47. primi.

COROLLARIUM.

Ex ijs, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum simile predicto solide polyedro, proportionem polyedri in una sphaera ad polyedrum in altera sphaera esse triplicatam eius, quam habent sphaerarum diametri. Nam si ex centris sphaerarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuantur polyedra

in

in pyramides sunt æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphaerarum; ut constat, si intelligatur hæc sphaerarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi æquali lineæ rectæ ductæ a centris ad basium angulos, ob similitudinem basium; Ac propterea pyramides efficiuntur similes. Quare quæ singulæ pyramides in una sphaera ad singulas pyramides illis similes in altera sphaera habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphaerarum, ut constet ex coroll. propof. 8. huius lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem, ita omnes pyramides, id est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, hoc est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Hæbit quoque polyedrum unius sphaeræ ad polyedrum alterius sphaeræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphaerarum, cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

SCHOLI ON

Q U O N I A M vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in eâ assumpta fuerunt, ut vera, quæ tamen nondum sunt demonstrata; Idcirco ea nunc breuiter à nobis seruantur demonstranda.

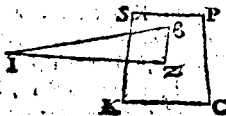
P R I M O itaque ostendendum est, angulum CZK , in quadrilatero $CKSP$, esse obtusum. Quod ut commodius fiat, describatur circa dictam quadrilaterum ex centro Z , circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est ut IK , ad KC , ita IY , ad YX , (quod per coroll. propof. 4. lib. 6. triangula ICK , IXY , similia sunt.) Est autem IK , maior quam IY , ertit & KC , maior quam YX . Cum igitur YX , equalis sit ostensa ipsi SP , erit quoque KC , maior quam SP ; Ac propterea arcus CK , maior erit arcu SP , ex scholio propof. 28. lib.



3. Quare cum arcus CP , KS , arcui CK , sint æquales, quod & lineæ CP , KS , ipsi KC , lineæ sint æquales demonstrata; (subtenduntur enim arcibus circularum æqualibus, ut ex constructione figura superioris constat) erunt quoque arcus CP , KS , arcu PS , maiores; Ac idcirco quilibet arcuum CK , CP , KS , quadrantem circuli $CKSP$, excedet; atque adeo angulus CZK , obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, ut perspicuum est ex coroll. ultima propof. lib. 6.

S E C U N D O demonstrandum est, omnia alia puncta quadri-

quadrilateri $CKSP$, longius a centro I , abesse, quam punctum Z . Sumatur enim quodcumque aliud punctum θ , in quadrilatero $CKSP$, & adiungantur rectæ $I\theta$, & $Z\theta$.

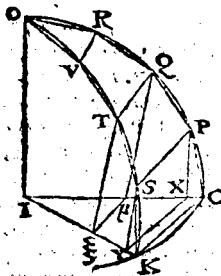


Quoniam ergo angulus $I\theta Z$, rectus est ex defn. 3. lib. 11.

Erit latus illi oppositum $I\theta$, maius latere $I Z$, quod minori angulo $I\theta Z$, nimirum a. utro, opponitur; Ac propterea punctum θ , longius a centro I , distat, quam punctum Z . Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.

TERTIO, ac ultimo probandum est, rectam ZC , maiorem esse recta βP . Quod ut aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS , maiorem esse recta QT . Describatur igitur pars superioris figure, ea videlicet, qua continetur

semidiametris IC, IQ , & quadransibus OC, OK , &c. Demittantur deinde ex Q , & T , ad planum circuli $ABCD$, in quo est triangulum IQK , perpendiculares $Q\mu$, $T\xi$, quæ in communes sectiones IC, IK , cadent, eruntque inter se se parallelæ, ut de rectis PX, ST , dictum est. Quod si adiungatur recta $\mu\xi$, erunt $QT, \mu\xi$, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum



fuit parallelas esse & æquales PS, XT . Quia vero $\mu\xi$, ipsi CK , parallelæ est, quod latera IC, IK , proportionaliter sint secta in μ , & ξ , veluti diximus de recta XY ; erit quoque $\mu\xi, XT$, parallelæ. Quare erit, ex coroll. propof. 4. lib. 6. ut IT , ad YX , ita $I\xi$, ad $\xi\mu$; est autem IT , maior quam $I\xi$. Igaur & TX , maior erit quam $\xi\mu$; Ac proinde & PS , quæ æqualis est ipsi XY , maior erit quam QT , quæ æqualis est ipsi $\xi\mu$.

Hoc ergo demonstrato, describamur ex centro Z , β , circa quadrilatera $CKSP, PSTQ$, circuli, egradianturq; e centro rectæ $ZC, ZK, ZS, ZP, \beta P, \beta S, \beta T, \beta Q$. Si igitur ZC , non credatur maior, quâ βP , erit, vel æqualis, vel minor. Sit

primum

19. primi.

38. undec.
6. undec.

2. sexti.
20. primi.

25. primi.

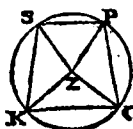
8. primi.

2. sexti.

14. quinti.

primum equalis. Quia ergo latera ZK, ZC , equalia ponuntur lateribus $\beta S, \beta P$; & basis KC , maior est base PS ; erit angulus KZC , maior angulo $\beta \beta P$. Eadem ratione maior erit angulus SZP , angulo $T \beta Q$. At quoniam bases KS, CP , basibus ST, PQ , sunt aequales; erunt anguli KZS, CZP , angulis $S \beta T, P \beta Q$, aequales. Igitur quatuor anguli ad Z , maiores erunt quatuor angulis ad β : Sunt autem & aequales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint aequales, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur aequalis est recta ZC , recta βP .

SIT secundo ZC , minor, quam βP . Es abscindantur $\beta \pi$,



$\beta p, \beta \omega, \beta \phi$, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP , aequales, connectantur; rectae $\pi p, \pi \omega, \pi \phi$, quae parallelae erunt rectis PS, ST, TQ, QP , eo quod recta ex ceteris secta sint proportionaliter;

Ac proinde, ex coroll. propof. 4. lib. 6. erit ut βS , ad SP , ita βp , ad $p \pi$. Cum ergo βS , maior sit, quam βp , erit & SP , maior quam $p \pi$. Eademque ratione maiores erunt ST, TQ, QP , rectis $p \omega, \omega \phi, \phi \pi$; Ac propterea cum PS , minor sit quam CK , & ST, PQ , aequalis rectis KS, CP ; & TQ , minor quam PS , erunt recta $\pi p, p \omega, \omega \phi, \phi \pi$, minores rectis CK, KS, SP, PC . Quare cum recta $\beta \pi, \beta p, \beta \omega, \beta \phi$, rectis ZC, ZK, ZS, ZP , sint aequales; erunt anguli ad Z , maiores angulis ad β : Sunt autem & aequales, quod tam illi, quam hi sint quatuor rectis aequales ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC , quam βP : Sed neque aequalis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.

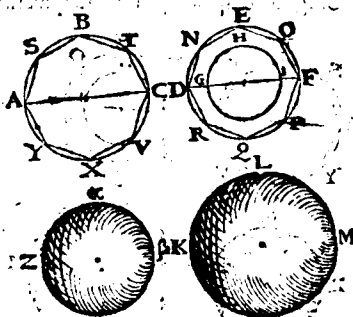
15.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

$SPHAE RAE$ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SIT duae sphaerae ABC, DEF , quarum diametri AC, DF . Dico sphaeram ABC , ad sphaeram DEF , habere proportionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF . Si enim hoc non concedatur, habebit sphaera ABC , ad aliam

aliam sphaeram GHI , minorem, vel KLM , maiorem quam
 DEF , triplicatam proportionem diametri AC , ad diametrum
 DF . Habeat primum sphaera ABC , ad sphaeram GHI , mino-
 rem sphaera DEF ,
 proportionem tri-
 plicatam diametri
 AC , ad diametrum
 DF , intelligaturq;
 sphaera GHI , con-
 centrica sphaerae
 DEF . Inscribeatur
 in sphaera maiori
 DEF , polyedrum
 $DNEOFFQR$,
 non tangens mi-
 norem sphaeram
 GHI ; Atq; huius



7. duodec.

simile polyedrum $ASBTCVXY$, inscribatur in sphaera
 ABC . Quoniam igitur ponitur proportio sphaerae ABC ,
 ad sphaeram GHI , triplicata proportionis diametri AC ,
 ad diametrum DF : Est autem, per coroll. praecedentis propo-
 sit. & proportio polyedri $ASBTCVXY$, ad polyedrum
 $DNEOFFQR$, triplicata proportionis diametri AC , ad
 diametrum DF : Erit ut sphaera ABC , ad sphaeram GHI ,
 ita polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFFQR$.
 Quare cum sphaera ABC , maior sit polyedro $ASBTCVXY$,
 erit & sphaera GHI , maior polyedro $DNEOFFQR$,
 pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphae-
 ra ABC , ad sphaeram GHI , minorem sphaera DEF , propor-
 tionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF .

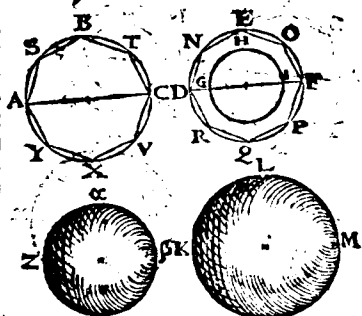
4. quinti.

HABEAT secundo sphaera ABC , ad sphaeram KLM ,
 maiorem sphaera DEF , proportionem triplicatam diame-
 tri AC , ad diametrum DF . Cum igitur, ex coroll. praec-
 edentis propo. & polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum
 $DNEOFFQR$, habeat proportionem triplicatam diametri
 AC , ad diametrum DF : Erit ut sphaera ABC , ad sphaeram
 KLM , ita polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFFQR$.
 Et conuertendo, ut sphaera KLM , ad sphaeram
 ABC , ita polyedrum $DNEOFFQR$, ad polyedrum $AS-$

Bb

BTCVXY:

BT CV XY: Est autem ex dicto coroll. præcedentis propol. polyedrum DNEOPQ R, ad polyedrum A S B T C VXY, in triplicata proportionem diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & sphaera KLM, ad sphaeram ABC, erit in tripli-



cata proportionem diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut sphaera KLM, ad sphaeram ABC, ut sphaera DEF, ad aliam sphaeram Z a β. Habebit igitur & sphaera DEF, ad sphaera Z a β, proportionem triplicatā diametri DE, ad diametrum AC.

Et quia sphaera KLM, maior ponitur, quam sphaera DEF, erit quoq; sphaera ABC, maior, quam sphaera Z a β. Quapropter sphaera DEF, ad sphaeram Z a β, minorem, sphaera ABC, proportionem habet triplicatā diametri DE, ad diametrum AC. Quod est absurdum. Oñsum enim est nō posse sphaeram ad sphaeram alia sphaera minorem, proportionem habere triplicatā diametrorū. Non ergo habebit sphaera ABC, ad sphaeram KLM, maiorem sphaera DEF, proportionem triplicatā diametri AC, ad diametrum DF; Sed neq; ad minorem habet, ut demonstratum est: Igitur habebit ad sphaeram DEF, proportionem triplicatā diametri AC, ad diametrum DF. Sphaera itaq; inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendū.

COROLLARIUM.

Hinc fit, ita esse sphaeram ad sphaeram, ut polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tā sphaera ad sphaeram, qm polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS

E V C L I D I S

E L E M E N T V M XIII.

Et Solidorum tertium.



THEOR. I. PROPOS.

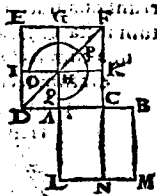
I.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumens dimidiam totius; quintuplum potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati.



ECCEVR recta AB, in C, extrema ac media ratione; sitq; maius segmentum AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectae CD, quintuplum esse quadrati rectae AD. Describatur, ut super CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela; secans

diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela ipsi CD. Producta deinde GA, produciatur quadratum AM, protrahaturq; FC, ad N. eruntq; ex coroll. propof. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. Quia ergo est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, quadrato rectae AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipsi AD, sitq; AL, ipsi AB; & AH ipsi AD, æqualis; erit quoq; AL, ipsius AH, dupla: Est autem ut

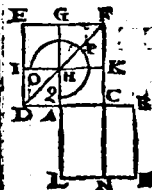


3. defn. sex.
17. sexti.

1. sexti.

tem ut A L, ad A H, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur est AN, ipsius AK. Quoniam autem

43. primi.



AK, ipsi I G, est æquale; erit AN, æquale duobus AK, I G. Additis igitur æqualibus CM, KG, erit quadratū AM, gnomoni O P Q, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propof. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineæ AD; erit & gnomon O P Q, eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni O P Q, addatur ipsum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.

ALITER. Ex scholio propof. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ AD, ponatur; Est autem quadratū rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, comprehensis; Errursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB, ipsius AD, est

2. secundi.

dupla, ita quoque erit rectangulum sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplum, cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumptum æquale erit rectangulo sub AB, AC.) Quod uero sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ AC, cum sit ut AB, ad AG, ita AG, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, una cum rectangulo sub AD, AC, bis, quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarū AC, AD, una cum rectangulo sub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD. Quo circa cum quadratum rectæ CD, æquale sit quadrati rectarū AC, AD, una cum rectangulo sub AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum, Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

1. sexti.



ALITER. Ex scholio propof. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ AD, ponatur; Est autem quadratū rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, comprehensis; Errursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB, ipsius AD, est

17. sexti.

dupla, ita quoque erit rectangulum sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplum, cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumptum æquale erit rectangulo sub AB, AC.) Quod uero sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ AC, cum sit ut AB, ad AG, ita AG, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, una cum rectangulo sub AD, AC, bis, quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarū AC, AD, una cum rectangulo sub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD. Quo circa cum quadratum rectæ CD, æquale sit quadrati rectarū AC, AD, una cum rectangulo sub AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum, Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

4. secundi.

ALITER. Ex scholio propof. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ AD, ponatur; Est autem quadratū rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, comprehensis; Errursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB, ipsius AD, est

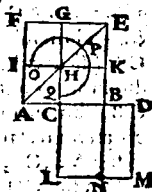
THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 20

2.

SI recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Dupla prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB , in C , possitque quintuplum segmenti AC ; sumatur autem ipsius AC , dupla CD , quæ, ut post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC . Dico si CD , secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB , reliquam partem prioris lineæ. Describatur super AB , quadratum BF , in quo ducta diametro AE , ex C , ducatur ipsi AF , parallela CG , secans diametrum in puncto H , per quod agatur IK , parallela ipsi AB . Producta deinde GC , perficiatur quadratum CM , protrahaturq; EB , ad N . Eruntq; ex coroll. propof. 4. lib. 2. CI , KG , quadrata rectarum AO , CB . Quia igitur quadratum BF , quintuplum ponitur quadrati CI ; Si tollatur quadratum CI , relinquetur gnomon OPQ , eiusdem quadrati CI , quadruplus: Est autem & quadratum CM , quadruplū quadrati CI , ex scholio propof. 4. lib. 2. quod recta CD , dupla sit rectæ AC . Igitur gnomon OPQ , quadrato CM , æqualis erit. Rursus quoniam CD , ponitur ipsius AC , dupla; estq; LC , ipsi CD ; & CH , ipsi AC , æqualis; erit & LC , ipsius CH , dupla. Cum igitur sit ut LC , ad CH , ita rectangulum LB , ad rectangulum CH ; erit quoque illud huius duplum: Est autem CK , ipsi HF , æquale. Aequale igitur est LB , ipsis CK , HF ; Ac proinde & reliquum quadratum KG , reliquo rectangulo BM . Quoniam ergo sunt tres rectæ CD , CB , BD ; estq; rectangulum BM , sub CD , BD , comprehensum æquale ipsi KG , quadrato rectæ CB ; Erit ut CD , ad CB , ita CB , ad BD . Quamobrem, ex definitione, recta CD , secta est in



1. sexti.

43. primi.

17. sexti.

Bb 3

B,extre-

4. *secundi.* B, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum C B.
A L I T E R. Quoniam quadratum rectæ A B, quintu-
 plum ponitur quadrati rectæ A C; estq; quadratum rectæ
 A B, æquale quadratis rectarum C B, A C, una cum rectan-
 gulo sub A C, C B, bis; Erunt & quadrata rectarum C B,
 A C, una cum rectangulo sub
 A C, C B, bis, quintuplum qua-
 drati rectæ A C. Dempto igitur
 quadrato rectæ A C, relinquetur quadratum rectæ C B, &
 rectangulum sub A C, C B, bis, quadruplum eiusdem qua-
 drati rectæ A C: Est autem & quadratum rectæ C D, eius-
 dem quadrati rectæ A C, quadruplum, ex scholio propos. 4.
 lib. 2. A Equale igitur est quadratum rectæ C B, & rectan-
 gulum sub A C, C B, bis, quadrato rectæ C D. Cum ergo re-
 ctangulum sub A C, C B, bis æquale sit rectangulo sub C D,
 C B; (sicut enim recta C D, dupla est rectæ A C, ita quoque
 duplum erit rectangulum sub C D, C B, rectanguli sub A C,
 C B; cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo C B; Ac
 propterea rectangulum sub C D, C B, æquale erit rectangu-
 lo sub A C, C B, bis.) Erit & quadratum rectæ C B, & rectan-
 gulum sub C D, C B, quadrato rectæ C D, æquale: At qua-
 dratum rectæ C D, æquale est rectangulis sub C D, C B, &
 sub C D, B D. Igitur quadratum rectæ C B, & rectangu-
 lum sub C D, C B, æquale erit rectangulis sub C D, C B, &
 sub C D, B D; Ac proinde dempto communi rectangulo
 sub C D, C B, relinquetur quadratum rectæ C B, æquale re-
 ctangulo sub C D, B D; ideoque erit ut C D, ad C B, ita C B,
 ad B D. Quare ex defin. recta C D, secta est in B, extrema
 ac media ratione, estq; segmentum maius C B. Si igitur re-
 cta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit, &c. Quod
 erat demonstrandum.
1. *sexsi.*
2. *secundi.*
17. *sexsi.*

L E M M A.

Q U O D autem recta C D, maior sit necessario,
 quam C B, ita ostendemus ex hypothesi. Quia qua-
 dratum rectæ C D, quadruplum est, ex scholio pro-
 pos. 4. lib. 2. quadrati rectæ A C; Addito quadrato
 rectæ

rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, una cum recti angulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod est propositum.

4. secundi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECTVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quintuplum esse quadrati rectæ CD. Describatur super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex coroll. propof. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propof. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit ut AB, ad AC,



Bb 4

ita

17. *sexti.*

ita: A C, ad G B, erit rectangulum sub A B, C B, nempe C E, æquale quadrato rectæ A C, nimirum ipsi L G,) Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia uero æqualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum A D, G D; erunt etiam



34. *primi.*

36. *primi.*

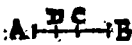
43. *primi.*

latera H K, I Q, æqualia; ac proinde rectæ P O, O M, ipsius oppositæ æquales erunt. Quare rectangula I O, Q E, æqualia erunt. Est autem I O, ipsi I D, æquale.

Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communis C O; gnomon R S T, rectangulo C E, erit æqualis. Cum igitur C E, ostensum sit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus; Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta B D, quintuplum quadrati P Q, ex recta C D.

6. *secundi.*

A L I T E R. Cum A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; erit rectangulum sub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulum



17. *sexti.*

sub A B, B C, quadruplum est quadrati rectæ C D; (Nam cum sit, ut A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum sub A B, B C, æquale

quadrato rectæ A C: quod cum, ex scholio propof. 4 lib. 1. quadruplum sit quadrati rectæ C D; erit & rectangulum sub A B, B C, quadruplum eiusdem quadrati rectæ C D.) Ac propterea rectangulum sub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratum rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

CONVERSUM huius theoremat is demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

S i recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmen

si quia

ti quintuplum possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AB , diuisa inaequaliter in C , cuius maius segmentum AC , bisariam sectum sit in D ; sitque quadratum rectae BD , quintuplum quadrati rectae CD . Dico rectam AB , diuisam esse in C , extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum LG , recta AC , quadruplum quadrati PQ , recta CD , ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST , eiusdem quadrati PQ , quadruplus. (cum enim quadratum DO , rectae BD , quintuplum ponatur quadrati PQ , ex recta CD ; dempto quadrato PQ , relinquetur gnomon RST , eiusdem quadrati PQ , quadruplus.) Igitur gnomon RST , equalis erit quadrato LG : At gnomoni RST , aequale est rectangulum CE , ut supra ostensum est. Ergo & quadrato LG , recta AC , aequale erit idem rectangulum CE , sub AB , BC , comprehensum: Ac proinde erit, ut AB , ad AC , ita AC , ad CB . Quocirca, ex definitione, secta erit AC , in C , extrema ac media ratione. Quod est propositum.

17. sexii.

ALTERA. Cum AC , diuisa sit bisariam in D , & ei addita CB ; erit rectangulum sub AB , BC una cum quadrato rectae CD , aequale quadrato rectae BD ; At propterea cum quadratum ex recta linea BD , descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD , descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis AB , BC , descriptum, una cum quadrato rectae CD , quintuplum eiusdem quadrati rectae CD . Quare ablato quadrato rectae CD ; rectangulum sub AB , BC , quadruplum erit quadrati rectae CD : Est autem eiusdem quadrati rectae CD , quadruplum quadratum rectae AC , ex scholio propos. 4.

6. sexii.

lib. 2. Igitur quadrato rectae AC , aequale est rectangulum sub AB , BC . Quamobrem erit,

ut AB , ad AC ; ita AC , ad CB ; Ac

proinde secta AB , in C , extrema

ac media ratione, ex

definitione.

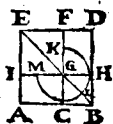
17. sexii.

5.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur, quadrati.

S I **E** **C** **T** **U** **R** recta **A** **B**, in **C**, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius **A** **C**, & minus **C** **B**. Dico quadrata rectarum **A** **B**, **B** **C**, simul tripla esse quadrati rectæ **A** **C**. Describatur enim super **A** **B**, quadratum **A** **D**, in quo ducta diametro **B** **E**, ducatur ex **C**, ipsi **B** **D**, parallela **C** **F**, secans diametrum in puncto **G**, per quod agatur **H** **I**, parallela ipsi **A** **B**. Eruntque **C** **H**, **I** **F**, quadrata rectarum **B** **C**, **A** **C**, ex coroll. propos. 4, lib. 2. Quoniam igitur est, ut **A** **B**, ad



17. sexti.

A **C**, ita **A** **C**, ad **C** **B**, erit rectangulum sub **A** **B**, **B** **C**, nempe **A** **H**, æquale ipsi **I** **F**, quadrato rectæ **A** **C**. Cum ergo **A** **H**, æquale sit ipsi **C** **D**; erit gnomon **K** **L** **M**, una cum quadrato **C** **H**, duplus quadrati **I** **F**; Ac proinde, addito quadrato **I** **F**, erit quadratum **A** **D**, rectæ **A** **B**, una cum quadrato **C** **H**, rectæ **B** **C**, eiusdem quadrati **I** **F**, rectæ **A** **C**, triplum.

17. sexti.

A **L** **I** **T** **E** **R**. Quoniam est, ut **A** **B**, ad **A** **C**, ita **A** **C**, ad **C** **B**; erit rectangulum sub **A** **B**, **B** **C**, æquale quadrato rectæ **A** **C**; Atque adeo rectangulum sub **A** **B**, **B** **C**, bis, una cum quadrato rectæ **A** **C**, triplum quadrati rectæ **A** **C**. Sunt autem quadrata rectarum **A** **B**, **B** **C**, simul æqualia quadrato rectæ **A** **C**; una cum rectangulo sub **A** **B**, **B** **C**, bis. Igitur & quadrata rectarum **A** **B**, **B** **C**, tripla sunt quadrati rectæ **A** **C**. Quocirca si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodque a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

7. secundi

SCHO.

SCHOLIUM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

Si recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA fit recta AB , inæqualiter in C , ita ut quadratum totius AB , & quadratum minoris segmenti BC , utraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC . Dico rectam AB , sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, ut prius, cum quadrata AD , CH , tripla sint quadrati IF ; Dempso quadrato IF , erit gnomon KLM , una cum quadrato CH , duplus eiusdem quadrati IF . Est autem gnomon KLM , una cum quadrato CH , equalis duobus rectangulis AH , CD . Igitur & rectangula AH , CD , dupla sunt quadrati IF ; Ac propterea cum equalia sint AH , & CD ; erit AH , ipse IF , equalis. Quapropter cum rectangulum AH , sub AB , BC , equalis sit quadrato IF , recta AC ; erit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; Ac proinde AB , diuisa erit in C , extrema & media ratione. 17. sexti.

ALITER. Cum quadrata rectarum AB , BC , tripla sint quadrati recte AC ; Sint vero quadrata rectarum AB , BC , equalia quadrato recte AC , & rectangulo sub AB , BC , bis, erit & quadratum recte AC , una cum rectangulo sub AB , BC , bis, triplum quadrati recte AC . 7. secundi.

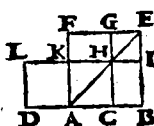


Dempso ergo quadrato recte AC , relinquetur rectangulum sub AB , BC , bis duplum quadrati recte AC ; Et proinde rectangulum sub AB , BC , semel, equalis quadrato recte AC . Quare ut prius, erit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; deoque AB , in C , secta erit extrema ac media ratione. 17. sexti.

THEOR.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturq; ei æqualis maiori segmento : Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ a principio, recta linea.

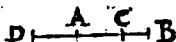
S E C T V R recta $A B$, in C , extrema ac media ratio-
ne, sitq; maius segmentum $A C$, & adiiciatur ei in rectum
 $A D$, æqualis maiori segmento $A C$. Dico rectam $B D$, se-
cari in A , extrema ac media ratione, effeq; maius segmen-
tum $A B$. Describatur enim super $A B$, quadratum $B F$, in



quo ducta diametro A E, ducatur ex C, ipsi B E, parallela C G, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi B D, parallela I K, & ex D, ducatur ipsi A F, parallela D L, occurrens ipsi I K, producta in L. Eruntq;

ex coroll. propof. 4. lib. 2. *CK*, *IG*, quadrata rectarum
AC, *BC*. Quoniam igitur est ut *AB*, ad *AC*, ita *AC*,
ad *CB*; erit rectangulum *IF*, contentum sub *AB*, *BC*,
æquale quadrato *CK*, rectæ *AC*: Est autem *CK*, ipsi *AL*,
æquale. Igitur *IF*, æquale erit ipsi *AL*; additoq; commu-
ni *BK*, erit rectangulum *BL*, contentum sub *BD*, *DA*, æ-
quale quadrato *AB*, rectæ *AB*; *AC* proinde erit ut *BD*, ad
AB, ita *AB*, ad *DA*. Quare *BD*, æccatur in *A*, extrema ac
media ratione, estq; maius segmentum *AB*.

A L I T E R. Quoniam est ut $A B$, ad $A C$, hoc est, ad $A D$, ita $A C$, ad $C B$; Erit conuertendo ut $D A$, ad $A B$, ita $B C$, ad $C A$; & componendo ut $D B$, ad $A B$, ita $A B$, ad $C A$, hoc est, ad $A D$. Secunda igitur est $B D$, in A , extrema ac media ratione. Itaque si recta linea



secundum extremam & mediam rationem secetur, appo-
naturq;

17. *sexti.*
36. *primi.*

17. *sexti.*

naturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea BD , extrema ac media ratione secetur in A , cuius maius segmentum AB , minus autem segmentum AD ; & ex maiori segmento AB , detrahatur recta AC , æqualis minori segmento AD . Dico maius segmentum AB , diuisum esse in C , extrema ac media ratione, & maius segmentum esse rectam AC , quæ æqualis est minori segmento AD . Facta enim prioris figura constructione, cum sit ut BD , ad AB , ita AB , ad AD ; erit rectangulum BL , contentum sub BD , AD , æquale quadrato BF , recta AB ; & ablato communi BK , erit AL , æquale ipsi IF : Est autem AL , ipsi CK , æquale. AE quale igitur est IF , contentum sub AB , CB , quadrato CK , recta AC ; Ac proinde erit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB . Quare AB , secta est in C , extrema ac media ratione, cuius segmentum maius est AC , minus uero segmentum recta CB . Quod est propositum.

ALITER. Quoniam est ut tota BD , ad totam AB , ita AB , detracta ex BD , ad AD , hoc est, ad AC , detractam ex AB ; erit quoque ita AD , reliqua ipsius BD , hoc est, AC , ad CB , reliquam ipsius AB , ut tota BD , ad totam AB , hoc est, ut AB , ad AC ; Ac propterea diuisa erit AB , in C , extrema & media ratione.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

17. sexti.
36. primi.

17. sexti.

19. quinti.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidium maioris segmenti; Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATUR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse DF. Cum enim sit ut AB, tota ad DE, totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum utrobique sit proportio du-



19. quinti.

15. quinti.

plas erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, ut tota ad totam; Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. Quoniam uero est ut AB, ad AC, ita DE, dimidia illius ad DF, dimidiam huius: Item ut AC, ad CB, ita DF, dimidia illius ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, ut AC, ad CB: Erit quoque DE, ad DF, ut DF, ad FE; Ac proinde ex eadē defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac mediaratione secetur; Vtrunque segmentorum Irrationalis linea est, quæ uocatur Apotome.

SECTUR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico utrunque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur .n. maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. Quoniā igitur quadratū rectæ CD, quintuplū est quadrati

1. serij de.

drati recte AD, habebit quadratum recte CD, ad quadratū recte AD, proportionem, quā numerus ad numerū. Quare commensurabilia erunt quadrata rectarū CD, AD, propterea; ipsae rectae CD, AD, commensurabiles quoque existēt, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineae Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia uero quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut constat ex coroll. propof. 24. lib. 8. Habent. n. proportionem quam 5. ad 1. uel 25. ad 5.) erunt rectae CD, AD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis, erit reliqua AC, Irrationalis, quae appellatur Apotome.

RURSUS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, GB; cum sit ut AB, ad AC, ita GB, ad CB, erit rectangulum AE, æquale quadrato recte AC. Quamobrem quadratum Apotomae AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

SED & hoc theorema cum Campano offendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa. n. AC, bisariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis.

6. decimi.

9. decimi.

74. decimi.

17. fensi.

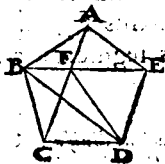
98. decimi.

3. tertijdec. commensurabilis. Quoniam autem quadratum recte BD , quinsuplum est quod ad rectam CD ; habebunt quadrata rectarum BD , CD proportionem, quam numerus ad numerum; ut propterea commensurabiles existant. Quare & ipsae rectae BD , CD , commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD , sit Rationalis; erit quoque BD , Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD , CD , non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 1.) erunt rectae BD , CD , longitudine incommensurabiles; At proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex BD , Rationali detrahatur CD , Rationalis potentia tantum commensurabilis; erit reliqua CB , Irrationalis, quae vocatur Apotome.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint, AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero $ABCDE$, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A , B , C . Dicō ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BB , AC , BD ; & ex puncto F , ubi se. intersecant rectæ BE , AC , recta, ducatur FD . Quoniam igitur latera AB , AE , trianguli ABE , æqualia sunt lateribus CB , CD , trianguli CBD ; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothese; Erunt & bases BE , BD . & anguli AEB , CDB , æquales: Sunt autem & anguli BED , BDE , æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE , BD ;



4. primi.
5. primi.

$B D$; Toti igitur anguli $A B D, C D E$, æquales erunt. Rur-
sus quia latera $A B, A E$, trianguli ABE , æqualia sunt lateri-
bus $B A, B C$, trianguli BAC ; & anguli quoque ipsis con-
tenti æquales, ex hypothesi: Erunt & basis BE , basi AC , æqua-
lis, & anguli $A BE, A EB$, angulis BAO, BCA , æquales. Cum
ergo æquales sint anguli ABE, BAC , trianguli ABF ; erunt
quoque latera $B F, A F$, æqualia; Ac propterea si ipsa de-
monstratur ex rectis æqualibus BE, AC , erunt reliquæ lineæ $FE,$
 EC , æquales: Itaque cum latera FE, ED , trianguli FED ,
æqualia sint lateribus FC, CD , trianguli FCD ; & basis com-
munis FD ; erunt & anguli dictis lateribus contenti $FED,$
 FCD , æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA , ostensi
æquales. Acquales igitur sunt toti anguli AED, BCD ;
Ac proinde cum angulo AED , ostensus sit equalis angulus
 CDE , & angulo BCD ; æquales ponantur anguli $ABC,$
 BAE ; erunt omnes anguli pentagoni æquales, adeoque æqui-
angulum erit ipsum pentagonum.

4. primi.

6. primi.

8. primi.

S I N T secundo tres anguli non deinceps æquales $A, C,$
 D . Quoniam igitur latera AB, AE , trianguli ABE , æqua-
lia sunt lateribus CB, CD , trianguli CBD ; & anguli quo-
que ipsis contenti æquales, ex hypothesi: Erunt & bases $BE,$
 BD , & anguli AEB, CDB , æquales; Sunt autem & anguli
 BED, BDE , æquales, quod æqualia ostensa sunt latera $BE,$
 BD . Igitur toti anguli AED, CDE , æquales erunt. Quare
cum æquales ponantur anguli BAE, CDE , erunt tres anguli
deinceps æquales A, E, D ; Ac proinde, ut iam demonstra-
tum est, pentagonus æquiangulum erit. Si pentagoni igitur
æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

4. primi.

5. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

II.

S I pentagoni æquilateri, & æquiangu-
li duos angulos, qui deinceps sint, subten-
dant rectæ lineæ: hæ extrema & mediæ ra-
tione se mutuo secant, & maiora ipsarum
segmenta æqualia sunt pentagoni lateri. **T**

Cc

SVB.

1. 4. quars.
28. terij.

4. primi.

32. primi.
33. sexti.

6. primi.
27. terij.

3. primi.
4. sexti.

9.

SVB TENDANTVR in pentagono æquilatero & equi
angulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, &
D, rectæ D B, C E, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari
extrema & media ratione, maioraque
earum segmenta FB, F E, æqualia esse
latcri cuiuslibet pentagoni. Descripto
enim circulo circa pentagonum, erunt
quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA,
æquales. Quia necesse est latera CD, CB,
trianguli CDB, æqualia sunt lateribus
DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsi contem
ti æquales, ex hypothesi; Erunt & basæ D B, C E, & angus
h C D B, D C E, æquales; Ac proinde, cum in triangulo
C D F, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, & ipsi æqua
les sit externus angulus B F C; erit angulus B F C, duplex
anguli D C E: Est autem & angulus B C E, eiusdem an
guli D C E, duplex, quod & arcus B A B, arcus D E, sit du
plus. Agitur anguli B F C, B C E, æquales sunt; Ideoque
recta B F, lateri pentagoni B C, æqualis. Quoniam au
tem anguli D B C, E C D, arcibus æqualibus insistentes
æquales sunt; erunt duo anguli D B C, C D B, trianguli
B C D, æquales duobus angulis D C F, F D C, trianguli
C F D; Ac proinde æquiangula erunt triangula B C D,
C F D. Quare erit ut B D, ad D C, hoc est, ad B F, æqua
lem ipsi D C, ita C D, hoc est, sibi æqualis B F, ad F D;
Ac propterea B D, secta est in F, extrema ac media ratione,
estque maius segmentum B F, lateri pentagoni æquale,
ut ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam C E,
secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius seg
mentum E F, æquale esse lateri pentagoni D E. Itaque si
pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod
erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eo
dem circulo descriptorum, componantur.
Tota recta linea extrema ac media ratione
secatur,

secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

In circulo A B C, sit latus decagoni A B, cuius rectam addatur B E, equalis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico E A, rectam secantem esse in B, extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse E B, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diametris A C, coniunganturque recta D B, D E. Quoniam igitur A B, arcus, est decima pars totius peripherie circuli, continebit arcus semicirculi arcum A B, quinque; Ac proinde arcus B C, quadruplus erit arcus A B. Quare & angulus B D C, anguli A D B, quadruplus erit. Rursus quia latera B D, B E, sunt equalia, nempe latera hexagoni, est erunt B E, latus hexagoni semidiametro B D, æquale, ex coroll. propos. 5. lib. 4. Ierunt & anguli B D E, B E D, æquales: quibus cum æqualis sit, externus A B D, erit angulus A B D, duplus anguli B E D: Est autem angulo A B D, æqualis angulus B A D, ob æqualitatem laterum D A, D B. Igitur & angulus B A D, duplus erit anguli B E D: Ac proinde duo anguli D A B, D B A, simul quadrupli erunt anguli B E D. Cum ergo angulis D A B, D B A, æqualis sit externus B D C, erit angulus B D C, quadruplus eiusdem anguli B E D: Atqui idem angulus B D C, ostensus fuit quadruplus anguli A D B. Igitur æquales sunt anguli A E D, A D B. Quocirca cum duo anguli A E D, D A E, trianguli A D E, æquales sint duobus angulis A D B, B A D, trianguli A B D, erunt triangula A D E, A B D, æquiangula. Igitur erit ut E A, ad A D, hoc est, ad E B, ipsi A D, æqualem, ita A D, hoc est, E B, sub æqualis ad B A, Ac idcirco recta E A, secans est in B, extrema ac media ratione, estque maius segmentum E B, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur. Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.



33. sexti.

5. primi

32. primi.

5. primi

32. undec.

32. primi.

4. sexti.

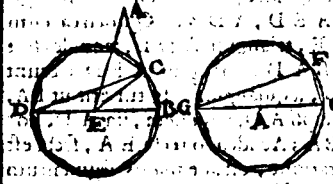
S C H O L I O N .

QVIA vero demonstravimus ad propof. 5. huius lib. si minus segmentum lineae divise extrema ad media ratione, ex maiori segmento detrahatur, maius segmentum sesqui quaque extrema et media ratione, eiusque segmentum maius esse minus segmentum detrahatur; Hic rursus ostendimus si plures hexagoni compositum cum latere decagoni, sedari extranea ac media ratione; Et si latus hexagoni facatur extranea ac media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, dimisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, ut ad propof. 5. huius lib. ostendimus. Hic tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propof. 4.

S O N V B E R S V M quique huius theoremati facile cum Corollario deinde scribimus. Idcirco.

Si lineae divise extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

S I T enim AB , divisa in C , extrema et media ratione, fiatque prima AC , latus hexagoni circuli BCD . Dico minus segmentum CB esse eiusdem circuli latus decagoni.



Coaptare enim BC , in circulo, ita ut C sit, extra circuli cadat. Et ducta ex B , per centrum F , diametro BED , connectam circuli EA , EC . Quia ergo est in AB , ad FC , ita AC , ad CB ; et si AC , latus hexagoni, aequale semidiametro FB , ex coroll. propof. 14. lib. 4. Erit quoque ut AB , ad BE , ita EE , ad BC , ideoque triangula ABE , EBC , aequiangula erant, cum habeant latera

6. sexsi.

latera circa communem angulum B, proportionalia; erisque angulus A, angulo BEC, equalis. Rursus quia latera CA, CE, equalia sunt, nempe latera hexagoni; erunt anguli CAE, CEA, equales; quibus cum equalis sit externus BCF, erit BCE, duplus anguli A; Est autem angulo BCE, angulus CBE, ob equalitatem laterum EB, EC, equalis. Igitur & CBF, duplus erit anguli A; Ad proinde duo anguli BBE, CBE, simul quadrupli erunt eiusdem anguli. Cum ergo angulis BCE, CBE, equalis sit externus CED; erit quoque angulus CED, eiusdem anguli A, triplex anguli BEC, qui equalis ostensus est angulo A, quadruplus erit. Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ad proinde arcus semicirculi BCD, eiusdem arcus BC, quintuplus existet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus est decagoni.

5. primi.

32. primi

5. primi.

32. primi

33. sexsi.

Si tunc secundo CB, minus segmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius segmentum AC, esse eiusdem circuli latus hexagoni; Coaptetur enim rursus BC, in circulo BCD, ducaturque diameter BED. Deinde interuallo AC, describasur circulus CFG, cuius diameter CAG; erisque ex coroll. propos. 45. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniam igitur AB, secta est in C, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; eris, etiam ostensum est, minus segmentum CB, latus decagoni eiusdem circuli CFG. Describasur ergo in circulo CFG, decagonum equilaterum & equiangularum CFG; Item in circulo BCD, decagonum equilaterum, & equiangularum BCD; eruntque latera BC, CF, inter se equalia. Quoniam vero, si connectantur recta CD, FG, anguli CDB, FGC, sunt aequales, ut in scholio propos. 33. lib. 6. ostendimus, quod insistant arcibus similibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoque anguli BCD, CFG, in semicirculis aequales, nimirum, recti. Erunt quoque latera BD, FG, inter se equalia. Quam ob rem cum diametri BD, CG, sint aequales, aequales quoque erunt circuli BCD, CFG. Ad proinde, cum recta AC, sit latus hexagoni circuli CFG, erit quoque eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod est propositum.

32. sexsi.

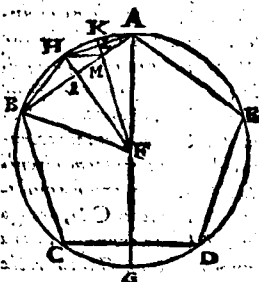
26. primi

10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

IN circulo $A B C D E$, cuius centrum F , descriptum sit pentagonum æquilaterum: Dico quadratum lateris $A B$, æquale esse quadrato lateris hexagoni, una cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter $A F G$, & connectatur recta $F B$. Diuiso deinde arcu $A B$, bifariam in H , connectantur rectæ $A H$, $B H$, & $F H$, secans rectam $A B$, in I : eritque recta $A H$, latus decagoni, & $B F$, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu $A H$, bifariam in K , adiungatur recta $F K$, secans rectam $A H$, in L , & rectam $A B$, in M , puncto; ad quod recta ducatur $H M$. Quoniam igitur arcus $A H$, $B H$, æquales sunt; erunt & anguli ipsis insistentes $A F H$, $B F H$, æquales. Quare cum latera $A F$, $F I$, trianguli $A F I$, æqualia sint lateribus $B F$, $F I$, trianguli $B F I$; & anguli ipsis contenti, æquales quoque; erunt & bases $A I$, $B I$, æquales, & anguli $A I F$, $B I F$, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ $A L$, $H L$, & anguli $A L F$, $H L F$, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus $A B C G$, $A E D G$, demantur æquales arcus $A B C$, $A E D$; relinquentur arcus $C G$, $D G$, inter se æquales, ideoque erit arcus $C G$, dimidium arcus $C D$: Est autem & arcus $A H$, dimidium arcus $A B$. Igitur cum arcus $A B$, $C D$, æquales sint;



27. versj.

4. primi

anguli $A F I$, æqualia sint lateribus $B F$, $F I$, trianguli $B F I$; & anguli ipsis contenti, æquales quoque; erunt & bases $A I$, $B I$, æquales, & anguli $A I F$, $B I F$, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ $A L$, $H L$, & anguli $A L F$, $H L F$, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus $A B C G$, $A E D G$, demantur æquales arcus $A B C$, $A E D$; relinquentur arcus $C G$, $D G$, inter se æquales, ideoque erit arcus $C G$, dimidium arcus $C D$: Est autem & arcus $A H$, dimidium arcus $A B$. Igitur cum arcus $A B$, $C D$, æquales sint;

sint; erunt quoque eorum dimidij arcus CG , AH , æquales; Ac proinde cum arcus AH , duplus sit arcus HK , erit & arcus CG , duplus eiusdem arcus HK . Eodem modo, quia arcus AB , BC , æquales sunt, & est arcus AB , duplus arcus BH ; erit etiam arcus BC , eiusdem arcus BH , duplus. Quare arcus CG , BC , æquemultiplices sunt, nempe dupli, arcuum HK , BH ; Ac propterea totus arcus BG , duplus quoque erit totius arcus BK ; & idcirco angulus quoque BFG , duplus anguli BFK : Sed quia (cum anguli FAB , FBA , ob æqualitatem laterum FA , FB , æquales sint, ipsisque æqualis externus BFG ;) idem angulus BFG , duplus est quoque anguli FAB ; erunt idcirco anguli BFM , FAB , æquales; Ac propterea triangula ABF , FBM , cum habeant angulos FAB , MBF , æquales, & angulum ABF , communem, æquiangula erunt. Quocirca erit ut AB , ad BF , ita BF , ad BM ; ideoque rectangulum sub AB , BM ; æquale erit quadrato rectæ BF . Rursus quia latera AL , LM , trianguli ALM , æqualia sunt lateribus HL , LM , trianguli HLM , & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti: erunt & bases AM , HM , & anguli LAM , LHM , æquales: Est autem angulus LAM , angulus HBA , æqualis, quod & latera HA , HB , æqualia sint. Igitur & angulus LHM , eidem angulo HBA , æqualis erit; Ac propterea triangula ABH , AHM , cum habeant angulos ABH , AHM , æquales, & angulum HAM , communem, æquiangula erunt. Quam ob rem erit ut AB , ad AH , ita AH , ad AM ; ideoque rectangulum sub AB , AM , æquale erit quadrato rectæ AH : ostensum est autem & rectangulum sub AB , BM , æquale quadrato rectæ BF . Igitur rectangula sub AB , BM , & sub AB , AM , simul æqualia sunt quadratis rectarum BF , AH : At uero rectangula sub AB , BM , & sub AB , AM , æqualia sunt quadrato rectæ AB . Quadratum ergo rectæ AB , nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF , AH , lateris uidelicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c.

Quod erat demonstrandum.

1. quinti.
3. sexti.
5. primi
2. primi.

32 primi.
4. sexti.
17. sexti.

4. primi
5. primi.

32. primi.
4. sexti.
17. sexti.

2. secundi

EUCLID. GEOM.

COROLLARIUM. I.

Hinc sequitur, lineam rectam, quæ ex centro ducta dividit arcum quempiam bisariam, dividere quoque rectam illi arcui subtentam bisariam, & ad angulos rectos. Oportet enim, ut rectam FM, præposita quædam arcum A B, dividit bisariam, dividere quoque rectam A B, bisariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

COROLLARIUM. II.

PERSPICUUM quoque est, diametrum circuli ex angulo quovis pentagoni ductam dividere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & lineas ipsum oppositum bisariam, & ad angulos rectos. Demonstratum enim est diametrum A G, ex puncto A, ductam dividere arcum C D, quem latus oppositum C D, subtendit, bisariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoque latus C D, bisariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatere in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, ut constat.

SCHOLIUM.

QUONIAM ad finem lib. 4. præxim quandam ex Ptolemaeo irradidimus, quæ una eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, eiusque demonstrationem in hunc locum diffusimus, paucis nunc a nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrum D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde divisa semidiametro C D, bisariâ in E, ducatur recta E A, cui equalis abscondatur E F, adiungaturque recta A F. Dico rectam A F, esse latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cum enim C D, secta sit bisariam in E, eique addita



DF, erit rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoque quadrato rectæ E A, quæ ipsæ E F, est equalis: Est autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale est quadratis rectarum A D, D E; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E,

6. secundi

47. primi.

D F, erit rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoque quadrato rectæ E A, quæ ipsæ E F, est equalis: Est autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale est quadratis rectarum A D, D E; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E,

D. E. relinquetur rectangulum sub CF, DF, equale quadrato recte AD, hoc est, quadrato recte CD. Quam obrem erit ut CF, ad CD, ita GD, ad DF; proptereaque recta CF, dimissa erit in D, extrema ad media ratione. Cum igitur maius segmentum CD, sit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propos. 15, lib. 4. erit minus segmentum DF, latus decagoni eiusdem circuli, ut demonstravimus ad propos. 9. huius lib. Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, una cum quadrato lateris decagoni DF, equale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli, Est autem eisdem quadratis rectarum AD, DE, equale quadratum recte AF, erit quadratum lateris pentagoni equale quadrato recte AF; ac propterea recta AE, lateri pentagoni equalis. Quod est propositum.

17. sexsi.

10. tertijdes.
47. primi.

THEOR. II. PROPOS. II.

12.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCE, habente diametrum Rationalem, describatur pentagonum æquilaterum ABCE. Di eo eius latus AB, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, secetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AC, secet diametrum BH, in K: Abscindatur quoque ex semidiametro FH, quarta ei⁹ pars FL; Itē ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoque FL, BF, illi incommensurabiles, cum sint eius partes aliquotæ, Rationales, Atque idcirco & tota BL, composita, eum sit incommensurabilis utrique FL, BF, Rationalis erit. Rursus quoniam recta FB, ex centro, ducta secat arcum AC, bisariam in B; secabit quoque recta AC, bisariam



16. decimi.

bisariam in K , & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propof. Secat autem & recta $A G$, rectam $C D$, in I , bisariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propof. Triangula ergo $A C I$, $A F K$, cum habeant angulos $A I C$,



$A K F$, rectos, & angulum $C A I$, communem, æquiangula inter se erunt. Quam ob rem erit, ut $C I$, ad $C A$, ita $F K$, ad $F A$; & permutando ut $C I$, ad $F K$, ita $C A$, ad $F A$: Ut autem $C A$, ad $A F$, ita est $C M$, quarta pars ipsius $C A$, ad $F L$, quartā partem ipsius $F A$. Erit igitur ut $C I$, ad $F K$, ita $C M$, ad $F L$; & permutando, ut $C I$, ad $C M$, hoc est, ut $C D$, dupla ipsius $C I$, ad $C K$, duplam ipsius $C M$, ita $F K$, ad $F L$; Atque componendo, ut $C D$, $C K$, simul ad $C K$, ita $F K$, $F L$, simul, nimirum recta $K L$, ad $F L$; Ac propterea erit, ut quadratum rectæ compositz ex $C D$, $C K$, ad quadratum rectæ $C K$, ita quadratum rectæ $K L$, ad quadratum rectæ $F L$. Quia uero si $A C$, secetur extrema ac media ratione, (ducta uidelicet recta $B D$,) maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi $C D$; Erit quadratum rectæ compositz ex $C D$, maiori segmento, & $C K$, dimidia totius, quintuplū quadrati rectæ $C K$, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ $K L$, quintuplum erit quadrati rectæ $F L$, ideoque quadratum rectæ $K L$, commensurabile erit quadrato rectæ $F L$; Ac proinde rectæ $K L$, $F L$, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autē $F L$, ostensa Rationalis. Igitur & $K L$, Rationalis erit. Deinde quia qualium partium 4. est $B F$, talium 1. est $F L$; ac propterea qualium 5. est $B L$, talium 1. est $F L$; erit quadratum rectæ $B L$, talium partium 25. qualium 1. est quadratum rectæ $F L$, (ut in his numeris patet 1. 5. 25. habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. est quadratum rectæ $F L$, talium 5. ostensum est quadratum rectæ $K L$. Qualium igitur 25. est quadratum rectæ $B L$, talium 5. est quadratum rectæ $K L$; ac proinde quadratum rectæ $B L$, quintuplum erit quadrati rectæ $K L$. Quia ergo quadrata rectarum $B L$,

$A L$,

32. primi

4. sexti.

5. quinti

22. sexti.

8. tersijdec.

1. tersijdec.

6. decimi.

20. sexti.

$K L$, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut patet ex coroll. propof. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. uel 5. ad 1.) Erunt rectæ $B L$, $K L$, longitudine incommensurabiles; idcircoque cum ostense sint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali $B L$, dematur Rationalis $K L$, potentia tantum commensurabilis; erit reliqua $B K$, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei uero congruens erit $K L$.

9. decimi.

74. decimi

Et si uero recta $B L$, possit plus, quam recta $K L$, quadrato rectæ N . Quoniam igitur quadratum rectæ $B L$, æquale est quadrato rectarum $K L$, & N ; Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ $B L$, talium 1. fuit quadratum rectæ $K L$; Erit reliquum quadratum rectæ N , talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ $B L$. Ac propterea quadrata rectarum $B L$, & N , proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Quare commensurabilia erunt; proptereaque rectæ ipsæ $B L$, & N , commensurabiles, saltem potentia. Est autem $B L$, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N . Quia uero quadrata rectarum $B L$, & N , proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut perspicuum est ex coroll. propof. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) Erunt rectæ $B L$, & N , longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta $B L$, Rationalis, longitudine sit commensurabilis Rationali $B H$; (Qualium enim partium 8. est $B H$, talium 5. est $B L$.) possitque plus, quam congruens $K L$, quadrato rectæ N , sibi longitudine incommensurabilis, ut ostensum est; Erit $B K$, Apotome quarta, ex definitione.

6. decimi.

9. decimi.

31. terii.

17. sexti.

95. decimi.

PROBREMUS quia recta $A B$, est media proportionalis inter $B H$, $B K$, ex coroll. propof. 8. lib. 6. (quod triangulum $A B H$, habeat angulum $B A H$, rectum, a quo ducta est $A K$, ad basin perpendicularis) erit quadratum rectæ $A B$, æquale rectangulo sub $B H$, $B K$. Quocirca cum sufficienter contentam sub Rationali $B H$, & Apotoma quarta $B K$, possit recta linea $A B$; Erit $A B$, linea Minor. Siquidem in circulo Rationalem habentem diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

8.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur A B C. Dico quadratum lateris A B, triplum esse quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro



A E, quæ secet, ex coroll. propof. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectâ B C, bifariam quoque & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus B C, sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus B E, eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoque coniuncta rectâ B E, latus erit hexagoni, & equalis semidiametro circuli, ex coroll. propof. 15. lib. 4.

47. primi.
31. sexij.

Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale est quadrato rectarum A B, B E, quod angulus A B E, in semicirculo rectus sit: est autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ B E, ex scholio propof. 4. lib. 2. quod linea A E, dupla sit lineæ B E, erunt quadrata rectarum A B, B E, simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ B E; Ac propterea talium partium 4. sunt quadrata rectarum A B, B E, talium partium 1. erit quadratum rectæ B E; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ A B, triplum est quadrati rectæ B E, quæ equalis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc facile colligi potest, semidiametrum D B, bifariam secari in P, a latere trianguli B C. Cum enim quadratum rectæ A B, triplum sit quadrati rectæ B E; si ponatur quadratum rectæ A B, partium 12. erit quadratum rectæ B E, talium partium 4. Est autem quadratum rectæ B E, æquale quadratis rectarum B P, P B. Igitur & talium

47. primi.

Et talium partium 4. erunt quadrata rectarum BF , FE . Est autem talium partium 3. quadratum recte BF , (quod quadratum recte AB , quadruplum fit quadrati recte BF , ex scholio propof. 4. lib. 2. Est enim $A B$, dupla ipsius $B F$.) Igitur talium 1. erit quadratum recte FE ; Ac proinde quadratum recte BE , hoc est, quadratum recte DE , sibi æquale, quadruplum erit quadrati recte FE . Cum igitur, ex scholio propof. 4. lib. 1. idem quadratum recte DE , quadruplum fit quadrati dimidiæ lineæ ipsius DE ; erit FE , dimidia ipsius DE . Quocirca DE , bifariam secatur in F .

SCHOLIUM.

Hoc tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate propofito.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex uno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque uicissim bifariam, & angulos rectos secabitur a latere opposito.

In circulo ABC , cuius centrum D , triangulum æquilaterum inscribat ABC . Dico rectam AE , per centrum D , ductam, hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC , & latus BC , nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque DE , secari a latere BC , bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD , CD , BE ; cum latera A , BA , D , trianguli BAD ; equalia sint lateribus A , C , AD , trianguli CAD ; & bases BD , CD , æquales quoque: Erunt anguli BAD , CAD , æquales. Quod est primum.



3. primi

DEINDE, cum latera AB , AF , trianguli BAF , equalia sint lateribus AC , AF , trianguli CAF , & anguli ipsi consenti æquales ostens: Erunt & bases BF , CF , & anguli ad F , æquales, ideoque recti. Quod est secundum.

4. primi.

POSTREMO, cum anguli BAE , CAE , demonstrati sint esse æquales; erunt & arcus BE , CE , æquales. Quare

26. tertij.

cum

5. primi cum BEC , arcus BE recta pari circumferentia, BE , sexta pari eiusdem; Ac propterea recta BE , latus hexagoni, aique semidiametro proinde BD , equalis, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Igitur anguli BDE , BED , equaliter erunt. Quoniam, ergo anguli BDF , BFD , trianguli DBF , equaliter sunt angulis BFE , BFE , trianguli EBF , & latus BF , commune; Erunt & latera DF , EF , equalia.

26. primi

13.

PROBL. 4. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphaera complecti; & demonstrare, quod sphaerae diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT datae sphaerae diameter AB , circa quam semicirculus describatur ACB ; & ex A, B , auferatur tertia pars BD , ut sit AD , ipsius DB , dupla; at uero AB , eiusdem DB , tripla; & ipsius AD , sesquialtera. Deinde ducta DC , perpendiculari ad AB , consuecantur rectae AC , BC . Ad interval lum rectae HE , quae equalis sit ipsi DC , describatur circulus EFG , cuius centrum H , in quo triangulum equilaterum inscribatur EFG , adiunganturque rectae HF , HG , quae singulae equaliter erunt ipsi DC , cum equaliter sint ipsi HE , ad cuius intervallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H , ad planum circuli perpendicularis HI , quae equalis ponatur rectae AD , & ex I , demittantur rectae IE , IF , IG . Dico solidum contentum quatuor triangulis FEI , IEF , IFG , IEG , esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam latera DA , DC , trianguli ADC , equalia sunt lateribus HI , HE , trianguli IEH ; & anguli ipsi contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defin. lib. 1. erit basis AC , basi IE , equalis. Non aliter ostendemus tandem rectam AC , equaliter esse rectis IF , IG . Rursus quia tres lineae AD , DC , DB , proportionales sunt



13. primi

4. primi

4. primi

sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut $A D$, ad $D B$, ita quadratū rectę $A D$, ad quadratū rectę $D C$; & cōponēdo, ut $A B$, ad $D B$, ita quadrata rectarū $A D$, $D C$, simul ad quadratū rectę $D C$. Sunt autē quadrata rectarū $A D$, $D C$, æqualia quadrato rectę $A C$. Igitur erit quoq; ut $A B$, ad $D B$, ita quadratū rectę $A C$, ad quadratū rectę $D C$; Ac proinde cū $A B$, sit ipsius $D B$, tripla, erit quoq; quadratū rectę $A G$, triplum quadrati rectę $H E$, cū $H E$, æqualis sit ipsi $D C$. Atqui & quadratum rectę $E F$, triplum quoque est eiusdem quadrati rectę $H E$. Quadratū ergo rectę $A C$, quadrato rectę $E F$, æquale erit; & propterea rectę $A C$, rectę $E F$. Quare cū recta $A C$, ostensa quoque sit æqualis rectis $I E$, $I F$, $I G$; erunt quatuor triangula $E F G$, $E F I$, $F G I$, $G E I$, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu Tetraedrum, cuius basis $E F G$, uertex uero I . Dico pyramidē hanc comprehendī spherā datā, cuius diameter $A B$; & diametrum spherę $A B$, potentia sequilateram esse lateris $E F$, uel $A C$.

47. primi.

12. tertij dec.

EXTENDATUR perpendicularis $I H$, usque ad K , ut sit $H K$, ipsi $D B$, & tota $I K$, toti $A B$, æqualis. Quia ergo tres rectę $A D$, $D C$, $D B$, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres $I H$, $H E$, $H K$; erunt quoq; $I H$, $H E$, $H K$, proportionales. Quare cū $H E$, sit ad $I K$, perpendicularis, & media proportionalis inter $I H$, $H K$, semicirculus circa $I K$; descriptus in plano rectarū $I K$, $H E$, transibit per E , ut mox ostentur; Eodemq; argumento tam semicirculus circa eandem rectam $I K$, descriptus in plano rectarū $I K$, $H F$, transibit per F , quam semicirculus circa eandem $I K$, descriptus in plano rectarū $I K$, $H G$, per G . Igitur, quilibet horum semicirculorum circunductus, manente fixa diametro, spheram describet, quę constitutum Tetraedrum completur, cum per omnes illius angulos E , F , G , I , incedat. Cum ergo hæc spherā descripta æqualis sit spherę datę, quod diameter $I K$, æqualis ponatur diametro $A B$, comprehendetur idem Tetraedrum spherā datā.

QVONIAM vero tres rectę $A B$, $A C$, $A D$, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit ut $A B$, ad $A D$, ita quadratū rectę $A B$, ad quadratū rectę $A C$, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Est autē recta $A B$, & sequilatera rectę $A D$, qđ qualis partiū 3.

est

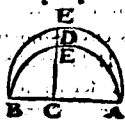
est AB, taliū 2. sit A D. Igitur & quadratū rectę AB, scilicet alterū erit quadrati rectę AC; Ac propterea cum AB, sit diameter sphęrę, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqualis, perspicuum est, diametrum sphęrę potētia scilicet aequalē esse lateri Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem ergo constituimus, & data sphęra cōplexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

L E M M A .

Q U O D autem semicirculus circa I K, in plano rectorum I K, H E, descriptus, transeat per E, facile demonstrabitur hoc proposito theoremate.

S I ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quę sit media propotionalis inter segmenta lineę; semicirculus circa illam lineam rectam descriptus transibit per extremum punctum lineę perpendicularis.

S I T enim ad A B, perpendicularis C D, & media propotionalis inter A C, & C B. Dico semicirculum circa A B, descriptum transire per D. Nam si transeat citra D, vel ultra, nimirum per punctum E; erit quoque C E, media propotionalis inter A C, & C B, ex coroll. propos. 13. lib. 6.



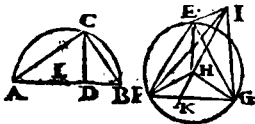
Quare iam quadratum rectę C D, quam quadratum rectę C E, æquale erit rectangulo sub A C, C B; Ac proinde quadrata rectorum C D, C E, inter se æqualia, & ipsę rectę C D, C E, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Transibit ergo semicirculus per D.

H I N C manifestum est, semicirculum in superiori figura

figura descriptum circa IK , in plano rectorum IK ,
 HE , transire per E , cum HE , sit ad IK , perpendi-
 cularis, & media proportionalis inter IH , HK .

COROLLARIUM I.

Hinc facile colligemus, diametrum sphaerae esse quadruplam
 sesquialteram semidiametri circuli circa basim pyramidis descri-
 pti. Cum enim diameter sphaerae AB , ostensa sit sesquialtera la-
 teris pyramidis EF ; erit quadratum rectae EF , talium partium 6:
 qualium 9. est quadratum rectae
 AB : At qualium partium 6. est
 quadratum rectae EF , talium
 partium 2. est quadratum rectae
 HB , quod quadratum rectae EF ,
 triplum sit quadrati rectae HB .
 Qualium igitur partium 9. est
 quadratum rectae AB , talium
 partium 2. erit quadratum rectae HB ; Ac propterea diameter sphae-
 ra AB , potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri HB , cum
 proportio quadratorum sit, quae 9. ad 2.



12. versjde

COROLLARIUM II.

Recta perpendicularis ex centro sphaerae ad planum basis
 pyramidis demissa, sexta pars erit diametri sphaerae, & tertia pars
 semidiametri. Sit enim L , centrum semicirculi ACB , eritque L ,
 centrum quoque sphaerae. Dico rectam LD , (quae nimirum ex cen-
 tro sphaerae ad basim EBG , ducitur perpendicularis; cum AD ,
 equalis sit ipsi IH , & ideo punctum D , idem quod H , quemad-
 modum & L , idem est quod centrum sphaerae) esse sextam partem
 diametri sphaerae, nempe rectae AB . & tertiam partem semidiamet-
 ri AL . Quoniam AD , dupla est ipsius DB ; Qualium partium 4.
 est AD , talium 2. erit DB ; ac proinde talium 6. tota AB , & semi-
 diameter AL , talium 3. Quare si AD , est 4. & AL , 3. erit LD , 1.
 & idcirco LD , sexta pars erit rectae AB , quae fuit partium earun-
 dem 6. & tertia pars rectae AL , quae fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis HI , duas tertias partes
 continebit ipsius diametri. Est enim HI , eadem, quae AD , conti-
 nens duas tertias diametri, ex constructione.

Recta perpendicularis, qualium partium 9. ponetur quadratum dia-
 metri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyra-
 midis. Nam proportio 9. ad 4. est du-
 plicata proportionis 3. ad 2.

ut hic apparet 9.

6. 4.

Dd

SCHO-

SCHOLIION

Quod si ex materia aliqua conficiantur quatuor trian-
gula equilatera aequalia, disponanturque, ut hec figura indi-
cat, facile ex ipsis rite inter se compli-
tatis componitur Tetraedrum, secun-
dum totam soliditatem. Hanc vero pra-
xim, & sequentes quatuor, quibus re-
liqua quatuor solida regularia in materia quavis sensibili con-
ficiantur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scri-
ptore.



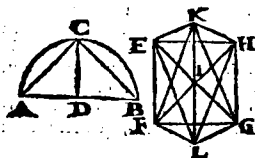
15.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituit ; &
sphaera complecti, qua & pyramidem ; &
demonstrare, quod sphaerae diameter poten-
tia sit dupla lateris ipsius octaedri.

4. prima

Si r. sphaerae, quae constitutata pyramidem comprehen-
dit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur
ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC,
connectanturque rectae AC, BC, quae aequales inter se erunt.
Sumpta iam recta EF, quae aequalis sit ipsi AC, uel BC, de-



scribatur super eam quadra-
tum EFGH, in quo ducan-
tur diametri EG, FH, & mu-
tuo secantes in I: eruntque re-
ctae IE, IF, IG, IH, aequales,
cum sint semidiametri circuli
circa quadratum descripti, ut
in 4. lib. demonstratum est.

Deinde ex I, in utranque partem ad planum quadrati
erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL,
aequales ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur
ad angulos quadrati rectae KE, KF, KG, KH;
LF.

LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo-
triangulis KEF, KFG, KGH, KEH, LRE, LEH,
LHG, LFG, esse octaedrum, quod queritur. Quoniam
latera EI, IK, trianguli EIK, equalia sunt lateribus EI,
IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse
quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At uero EIH, eo quod
sit equalis angulo GIH, sibi deinceps, ob equalitatem late-
rum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) Erit & basis
EK, basi EH, equalis; Eodemq; modo eidem EH, equa-
lis erit KH; ideoque triangulum equilaterum erit KEH.
Simili argumento concludemus, reliqua triagula esse equi-
latera; atque adeo equalia triangulo KEH, cum illorum
latera equalia sint lateribus quadrati EFGH, singula sin-
gulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo trian-
gulis æquilateris & equalibus. Quod octaedrum dico com-
prehendi sphaera diametri AB, qua nimirum & pyramis
construca comprehenditur; & diametrum sphaere AB, po-
tentia duplam esse lateris EF, uel AC.

Q U O N I A M IE, perpendicularis est ad KL, ex 3.
defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI,
IL; (quod tres recte KI, IE, IL, equalis sint, ideoque
eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL,
in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per pun-
ctum E, ex lemmate precedentis propos. Eadem ratione se-
micirculus descriptus circa eandem KL, in plano recta-
rum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicen-
dum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicircu-
lorum circumductus, manente fixa diametro KL, descri-
bet sphaeram, quæ complectitur octaedrum constitutum,
cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc sphae-
ra equalis sit datæ sphaere, cuius diameter AB; (Nam
cum recte AC, EF, equalis sint, ideoque ipsarum
quadrata equalia; Sit autem tam quadratum recte
AC, duplum quadrati recte AD, quam quadratum
recte EF, quadrati recte EI; Erunt & recte AD,
EI, hoc est, KI, semidiametri equalis. Quare & to-
te diametri AB, KL, equalis erunt; ac proinde
sphaere ipsarum equalis existent.) comprehendetur idem
octaedrum data sphaera.

3. primi.

4. primi.

2.

1. 2.

47. primi.

Quia vero quadratum rectæ AB, æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM. I.

Ex dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti.

Atque proinde, cum KI, recta sit ad lineas EG, HF; recta quoque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum; Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, ut paucis re complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, se mutuo ad angulos rectos secabunt;

Quæ quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, ut ostendimus,) quadratum diametri EF, æquale existat quadratis laterum octaedri FK, KH. Ita enim efficitur, ut angulus, FKH, rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis.

COROLLARIUM. II.

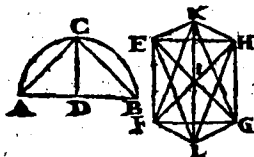
OCTAEDRUM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, uertices uero K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana unius sunt similia & æqualia planis alterius, ut constat, cum sint triangula æquilatæ, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, ut est demonstratum.

COROLLARIUM. III.

Si tetraedrum, & octaedrum in eadem sphærâ describantur, erit tetraedri laevis potentia sesquitergium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. Quo etiam igitur diameter sphæræ est potentia sesquialtera lateris tetraedri.

4. undec.

18. undec.



48. primi.

13. tersijde

edri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphaerae. Rursus quia diameter sphaerae est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 1: qualium 6. est quadratum diametri sphaerae. Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.

14. secedit

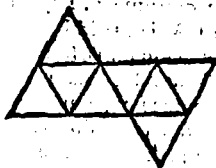
COROLLARIUM. IIII.

Demonstratur, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectae FG; & in quadrato BLGK, recta BK, recta GL: Erit planum BHK, per EH, BK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de ceteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

15. undec.

SCHOLIUM.

Quod si ex materia aliqua consiciantur octo triangula aequaliter inter se aequalia, disponanturque, ut haec figura indicat, facile ex ipsis rite inter sese complicatis componetur octaedrum secundum totam soliditatem, ut ait Albertus Durerus.



PROBL. 3. PROPOS. 15.

14.

CVBVM constituere; & sphaera complecti, qua & priores figuras; & demonstrare, quod sphaerae diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

Si t sphaerae, quae praedictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, ut sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectae AC, BC. Super rectam EF, quae rectam BC, sit equalis, quadratum constituitur EFGH, super quod erigantur

Dd 3 perpen-

4. undec.

33. primi.

34. primi.

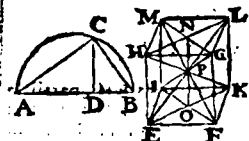
34. undec.

35. undec.

38. undec.

4. undec.

perpendiculares BI, FK, GL, HM , æquales quoque ipsi BC , quarum extrema coniungantur rectis IK, KL, LM, MI . Quoniam ergo anguli IEF, KFE , recti sunt, ex



defin. 3. lib. 11. erunt rectæ EI, FK , parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque æqualis posita sit ipsi BC , hoc est, ipsi EF . Igitur & EF, IK , parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est $EFKI$; In quo, cum lineæ EI, IK, KF , æquales sint ip-

si EF , omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti; cum EIK, FKI , æquales sint oppositis rectis KFE, IEF . Igitur $EFKI$, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt $FKLG, GLMH, HMI E$; Atque ideo & $IKLM$, quadratum erit, cum simile sit & æquale quadrato opposito $EFGH$.

Est enim EL , solidum parallelepipedum, quod eius plana opposita sint parallelæ, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL . Quem dico comprehendi sphaera diametri AB . Sint enim planorum oppositorum $EFKI, GHML$, diametri EK, FI, GM, HL , per quæ ducantur plana $EKLH, FIMG$. Quia igitur tam planum $EKLH$, quam $FIMG$, cubum bisariam secat, utrumque per centrum cubi transibit, ex scholio propof.

39. lib. 11. per punctum uidelicet P , in quo, ex coroll. eiusdem propof. se mutuo quoque bisariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum sectio, recta scilicet NO , per idem punctum P , incedet. Quia uero plana $EKLH, FIMG$, rectangula sunt, (Cum enim HE , perpendicularis sit duabus rectis EI, EF , ob quadrata EM, EK ; perpendicularis quoque erit ad planum EK , ideoq; ad rectam EK , ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus est HEK . Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano $EKLH$, nec nō & anguli in plano $FIMG$. Rectangula ergo sunt plana $EKLH, FIMG$,) & æqualia, quod latera unius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI , æquales, ut constet ex scholio propof. 34. lib. 1.

Ac proinde & semidiametri PE, PL, PH, PK, PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, sphaeram describet per omnes cubi angulos transeuntem, quam quidem æqualem esse sphaeræ diametri AB, ita demonstrabitur.

Cum quadratum rectæ EK, æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL. Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL. Est autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc est, quadrati rectæ BC. At uero eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipsius BD, sit tripla, erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt; Ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphaerarum, ideoque & ipsarum sphaeræ, æquales existunt.

47. primi.

47. primi.

Quia uero ostensum est quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL; manifestum est, diametrum sphaeræ potentia triplum esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphaera complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

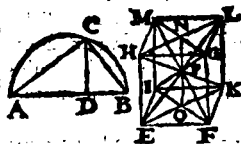
COROLLARIUM. I.

Ex demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bisariam in centro sphaeræ secare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bisariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseque mutuo bisariam secare in cetro P. Quod uero & recta NO, coniungens cetra N, & O, quadratorum oppositorum GHML, EFKI, in eodẽ cetro P, bisariam diuidatur, hac rone ostendit. Duo anguli OPP, OPF, trianguli OPP, æquales sũt duobus angulis

29. primi.
16. undec.

NMP, NPM, trianguli NMP: (Nam angulus OFF, æqualis est al-

25. primi.



ternò NMP, inter lineas FI, GM, quæ parallèle sunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum EFKI, GHML; & angulus OFF, æqualis est opposito ad verticem NPM. Sunt autem & latera PF, PM, quibus adjacent, æqualia, cum sint semidia-

COROLLARIUM. II.

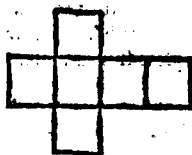
13. serijde.

15. serijde.

47. primi.

RVSVS potentia diametri sphaeræ, seu cubi, æqualis est potentijs laterum tetraedri & cubi simul sumptis. Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri: Qualium uero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quæ admodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis distinctum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphaeræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi uero BC. Perspicuum autem est, diametrum sphaeræ AB, posse & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, sit rectus.

SCHOLIUM.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur seu quadrata inter se æqualia, disponanturque, ut hæc figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complacentur inter se. Efficietur enim

ex illa figura quadam solida octo angulos solidos continens infiar tessera cuiuspiam, ut constat.

16.

PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM constituere; & sphaera

sphæra completi, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.

SIT sphæra, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, ut AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta; At uero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad intervallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntq; omnes inter se æquales; sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX, (quas tamen omnes, ut uisatemus confusione, non duximus.) binæ inter se æquales erunt; Ac proinde, cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoq; erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. Quia uero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: Eademq; ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto: conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficiant hæc duo plana unum planum, per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere unum planum; nec non planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad intervallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritq; æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta

II. quarti.

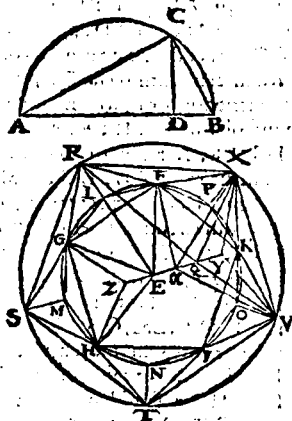
6. undec.

33. primi.

15. undec.

6. undec.
33. primi.
28. tertijs de.

puncta R, S, T, V, X, rectis RS, ST, TV, VX, XR. Quia igitur LR, PX, æquales sunt & parallelæ; si concipiatur duci recta LP, erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus



argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera equalia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis

10. tertijs de.
47. primi.

ris LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK; & est LF, latus decagoni; erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR, quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 1. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus utriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem tria gula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia, cum eorum omnia latera equalia sint lateribus pentagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in utramque partem extendatur,

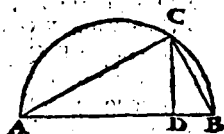
redatur, sinq; rectę QY, EZ æquales singule, lateri decagoni circuli FGHK, uel RSTVX; & connectantur rectę VQ, VY, XQ, XY; GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni; & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; erit quadratum lateris pentagoni, XV, æquale quadratis rectarum QX, QY. Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectę XY, quod angulus XQY, rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione; erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano ..) Igitur quadratum rectę XY, æquale est quadrato rectę XV, proptereaque recta XY, rectę XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectę RY, SY, TY, (quas tamen, ut uitaremus confusionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse; & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, EZG, (quorum tamen lineas, ne parceremus confusionem, non duximus) quę omnia prioribus quindecim æqualia erant, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula uiginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturq; singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosædnum. Quod dico cõprehendi sphaera diametri AB.

DISVIS A recta EQ, bifariam in a, ducantur rectę aF, aX, aV. Quoniam igitur latera aQ, QV, trianguli aQV, æqualia sunt lateribus aQ, QX, trianguli aQX, cum QV, QX, sint semidiametri circuli RSTVX;

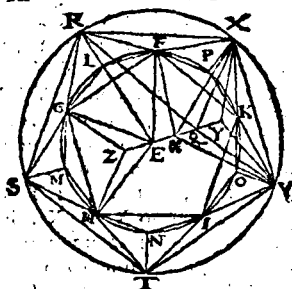
10. verside.
47. primi.

4. primi.

VX : Sunt autem & anguli α QV, α QX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. Erunt & bases α V, α X, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α , Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ α R, α S, α T, æquales & inter se, & ipsæ α V, α X. Rursus quia latera α Q, QX, trianguli α QX, æqualia sunt lateribus α B, BF, trianguli α EF, cum QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, di-



4. primi.



9. scilicet dec.

9. scilicet dec.

47. primi.

est, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiusdem circuli, erit QZ, diuisa in E, extrema ac media ratione; maiusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens Ea, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta α Z, quintuplum potest eius, quod ex Ea, describitur, quadrati: Potest autem & recta α F, quintuplum eiusdem quadrati rectæ Ea. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ α E, ex scholio propof. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla sit ipsius Ea; erunt quadrata rectarum EF, Ez, simul quintupla quadrati rectæ Ea. Cū ergo quadratis rectarum EF, Ez, æquale sit quadratū rectæ α F, erit quoque quadratū rectæ α F, quintuplū quadrati rectæ Ea.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum α Z, α F, ac proinde rectæ ipsæ α Z, α F, æquales erunt. Cū igitur ZY, bifariam secet in α , propterea quod

quod si æqualibus αB , & αQ , æquales rectæ addantur $E Z$, $Q Y$, totæ $Z \alpha$, $Y \alpha$, æquales fiant.) Erunt omnes rectæ du-
ctæ ex α , ad omnes angulos Icosædri æquales. Quo circa
sphæra descripta circa diametrum $Z Y$, ex centro α , per om-
nes angulos Icosædri constituti transibit. Hanc ergo sphæ-
ram dico æqualem esse sphæræ diametri $A B$.

Cum sit ut αZ , ad αE , ita $Y Z$, dupla ipsius αZ , ad
 $Q E$, duplam ipsius αE ; Ac propterea ut quadratum re- 15. quimi.
ctæ αZ , ad quadratum rectæ αE , ita quadratum rectæ $Y Z$, 22. sexti.
ad quadratum rectæ $Q E$; sit autem quadratum rectæ αZ ,
ostensum quintuplum quadrati rectæ αE : Erit quoque
quadratum rectæ $Y Z$, quintuplum quadrati rectæ $Q E$, hoc
est, quadrati rectæ $B C$; quod recta $Q E$, æqualis sit posita
semidiametro $E F$, hoc est, rectæ $B C$: Est autem & eius-
dem quadrati rectæ $B C$, quintuplum quadratum rectæ $A B$.
(Nam cum, ex coroll. propof. 8. lib. 6. sit ut $A B$, ad $B C$, ita
 $B C$, ad $B D$; erit ut $A B$, ad $B D$, ita quadratum rectæ $A B$,
ad quadratum rectæ $B C$, ex coroll. propof. 20. lib. 6. Ac pro-
inde existente $A B$, quintupla ipsius $B D$, erit etiam quadra-
tum rectæ $A B$, quintuplum quadrati rectæ $B C$.) Quadrata
igitur rectarum $Y Z$, $A B$, æqualia sunt, ideoque & rectæ $Y Z$,
 $A B$; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.

Quoniam denique diameter sphæræ $A B$, Rationalis
ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est,
latus Icosædri esse lineam Irrationalem, quæ Minor uoca-
tur.) potestque quintuplum quadrati rectæ $B C$, hoc est, re-
ctæ illi æqualis $E F$; erit quoque semidiameter $E F$; circuli
 $F G H I K$, Rationalis. (Nam quadrata rectarum $A B$, $E F$,
eum habent proportionem, quam numerus ad numerum,
nempe quam 5. ad 1. uel 10. ad 2. erunt commensurabilia;
Ac propterea & rectæ $A B$, $E F$, commensurabiles erunt,
saltem potentia. Cum ergo $A B$, sit Rationalis, erit & $E F$,
Rationalis.) Quare & tota diameter circuli $F G H I K$, Ra-
tionalis erit; Ac propterea $F G$, latus pentagoni, hoc est,
latus Icosædri, Irrationalis erit linea, quæ uocatur Minor.
Icosædrum igitur constituimus, & sphæra sumus complexi,
qua & ante dictas figuras; & demonstrauimus, quod Ico-
sædri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.
quod erat faciendum.

6. decimi

COROL.

COROLLARIUM. I.

Ex dictis inferitur, sphaeræ diametrum esse potentia quintuplâ semidiametri circuli, quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos interdit. Ostensum enim est, quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectæ BC, hoc est, semidiametri EF.

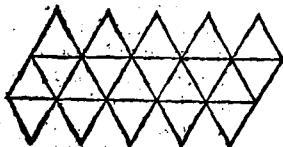
COROLLARIUM. II.

ITEM manifestum est, sphaeræ diametrum esse compositum ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli. Nam YZ, diameter sphaeræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHK.

COROLLARIUM. III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nā recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ LP, sit quoque parallela recta HI, ut in scholio. propos. 27. lib. 3. demonstravimus; (eo quod æquales sint arcus HL, LP; continet enim uterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eadēq; est ratio de cæteris lateribus oppositis.

SCHOLIUM.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, ut hæc figura indicat, componitur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si vise inter sese aptentur.

17.

PROBL. 5. PROPOS. 17.

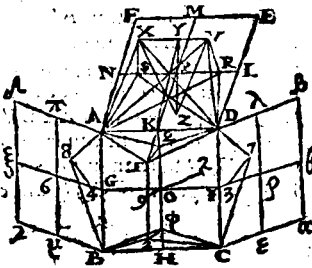
DODECAEDRVM constituere; & sphaera complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, qd Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT una basis cubi data sphaera comprehensi, quadratum $ABCD$, cui insistat aliud aequale ad rectos angulos $ADEF$, ut sit communis horum sectio recta AD . (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in praecedentibus, ut cubus constitueretur, erectae sunt ex angulis basis $EFGH$, quatuor lineae EI, FK, GL, HM , ipsi basi $EFGH$ perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. Quare & bases cubi per ipsas ductae, rectae erunt ad eandem basin $EFGH$.)

Divisus itaque cunctis
 lateribus bifariā in pun-
 ctis G, H, I, K, L, M, N,
 quæ rectis connectan-
 tur secatibus sese in O,
 P, cœtris quadratorum,
 ut constat ex demon-
 stratione octavi pro-
 blematis lib. 4. Secen-
 tur QK, PL, PN, extre-
 ma ac media ratione

in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorū educantur
extra cubū perpendicularēs Q T, R V, S X, æquales segmentis
maioribus Q Q, P R, P S. Coniunctis deinde rectis A T, A X,
D T, D V, V X, Dico A T D V X, esse unū ex duodecim pēta-
gonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri cōstituēdi. Qd̄
enim pentagonū A T D V X, sit in uno plano, ita ostendetur.
Cū R V, S X, sint ad quadratū A D E F, rectæ, ipsæ erūt paral-
lelæ; Ac p̄inde, cū sint æquales, (quia segmenta maiora P R,
P S, quibus æquales sunt posita, æqualia sunt, cum & lineæ
sectæ P L, P N, æquales sint.) erūt quoq; cōiungētes rectæ
R S, V X, æquales & parallelæ: Est aut̄ & A D, eide m R S,
siue L N, parallelæ, eo qd̄ A N, D L, parallelæ sint & æqua-
les, igit̄ & A D, V X, parallelæ sūt; Ac p̄pterea rectæ cōiun-
gētes A X, D V, in eodē cū ipsis erūt plano; ideoq; trapeziū
A D V X, in uno existet plano: Est aut̄ & triāgulū A T D, in
uno plano. Dico qd̄ & in eodē plāno cū trapezio A D V X.
Ex P, ducat P Y, parallelā ipsi R V, q̄ erit recta ad quadratū
A D E F, qd̄ ad idē recta sit R V: Et cōnectant rectæ K T, K Y.
Qm̄ igitur est ut O K, ad O Q, ita O Q, ad Q K, ob sectionē

TABLE



1. 8. under.

6. undec.

33. primi.

33. *primi.*

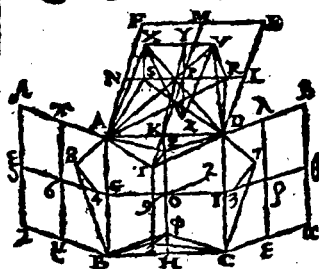
9. undec.

7. undec.

8. ~~under~~

rectæ OK : Est autem KP , ipsi OK , æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & PY , ipsi OQ , (cum æqualis sit ipsi RV , quæ posita fuit æqualis ipsi OQ , maiori segmento; Erat quoque ut KP , ad PY , ita OQ , hoc est, QT , illi æqualis, ad QK . Quare cum triangula PKY , QTK , duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad unum angulum K , composita, ita ut homologa latera sint parallela, nempe PK , & QT , inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum $ABCD$; & PY , QK , inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum $ADEF$: Erunt reliqua latera KY , KT , in rectam lineam collocata; Ac propterea recta TY , in uno erit plano, ideoque planum ATD , & planum $ADVX$, unum planum constituent, per rectas TY , AD , ductum. Quocirca pentagonum $ATDVX$, in uno existit plano.

Quod vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN , NS , trianguli ANS , æqualia sint lateribus AK , KQ , trianguli AKQ ; (Sunt enim AN , AK , dimidia la-



tera cubi, & NS , KQ , segmenta minora rectarum æqualium sectorum.) & anguli ANS , AKQ , recti; si ducatur recta AQ , erunt bases AS , AQ , æquales. Rursus cum latera AS , SX , trianguli ASX , sint æqualia lateribus AQ , QT ; tri-

anguli AQT ; (Nam rectæ AS , AQ , ostensæ sunt æquales, & SX , QT , sunt segmenta maiora rectarum æqualium sectorum) & anguli ASX , AQT , recti, ex defin. 3. lib. 1. Erunt quoque bases AX , AT , æquales. Quod si ducatur recta DQ , ostendemus eodem argumento, rectam DT , rectæ AT ; si uero ducatur recta DR , rectam DV , rectæ DT , esse æquale. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA , AT , TD , DV , equalia; quibus etiam æquale ostendemus reliquum VX , hac ratione. Quadrata rectarum PN , NS , simul tripla sunt quadrati rectæ PS , hoc est, quadrati rectæ SX : Est autem quadrato rectæ PN , æquale quadratum rectæ AN . Igitur & quadra-

6. undec.

33. sexti.

1. undec.

4. primi.

4. primi.

4. tertijdec.

quadrata rectorum AN, NS, simul tripla sunt quadrati recte SX. Cum ergo quadratis rectorum AN, NS, æquale sit quadratum recte AS; erit quoque quadratum recte AS, triplum quadrati recte SX; Ac proinde quadrata rectorum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati recte SX: Est autem quadratis rectorum AS, SX, æquale quadratum recte AX. Quadratum ergo recte AX, quadruplum quoque erit quadrati recte SX, hoc est; quadrati recte P, hoc est, quadrati recte XY; Sunt enim recte PS, XY, æquales. Cum igitur & quadratum recte VX, quadruplum sit eiusdem quadrati recte XY, ex scholio propof. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectorum AX, VX, æqualia; Ac proinde recte ipse æquales. Quare cū & XA, AT, TD, DV, ostense sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.

Quod autem & æquiangulū sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, æqualis maiori segmento PR, erit quoque NR, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP. Quadrata igitur rectorum NR, RP, simul tripla sunt quadrati recte NP, hoc est, quadrati recte AN: Est autem quadratum recte RV, æquale quadrato recte RP. Ergo & quadrata rectorum NR, RV, tripla sunt quadrati recte AN; Ac proinde quadrata rectorum NR, RV, AN, quadrupla sunt eiusdem quadrati recte AN: Sunt autem quadrata rectorum NR, AN, æqualia quadrato recte AR. Igitur & quadrata rectorum RV, AR, quadrupla sunt quadrati recte AN. Cum ergo quadratis rectorum AR, RV, æquale sit quadratum recte AV; Erit quoque quadratum recte AV, eiusdem quadrati recte AN, quadruplum. At vero eiusdem quadrati recte AN, quadruplum est quadratum recte AD, ex scholio propof. 4. lib. 2. quod AD, dupla sit ipsius AN. Acqualia igitur sunt quadrata rectorum AV, AD, ideoque & recte AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX, ostendimus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres recte AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & bases AD, DX, æquales quoque; Erunt & anguli ATD, D V X,

47. primi.

47. primi.

44. primi.

5. tertijdec.

4. tertijdec.

47. primi.

47. primi.

8. primi.

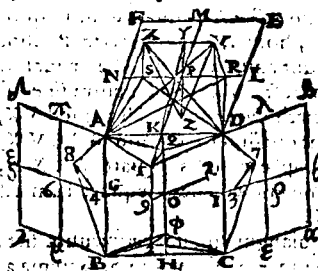
Ec

DVX.

DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV; Ac proinde, cum in pentagono æquilatelo ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, ipsum erit æquiangulum.

7. verij dec.

Quod si sumantur alia duo cubi quadrata $C\alpha\beta D$, $B\gamma\delta A$, recta ad quadratum ABCD, in cõmunibus sectio-



nibus CD, AB, quorũ singula latera bisariam secantur in $\epsilon, \theta, \lambda, I, \mu, \xi, \pi, G$, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ, σ . Secantur deinde OH, OK, $\rho I, \sigma G$, extrema æ media ratione in punctis $\phi, Q, 3, 4$, ex quibus

ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares $\phi 2, Q T, 3 7, 4 8$, æquales segmentis maioribus $\phi O, Q O, 3 \rho, 4 \sigma$, coniunganturq; rectæ $T 2, 2 C, C 7, 7 D, D T, T A, A 8, 8 B, B 2$, demonstrabimus eadem ratione, pentagona $T 2 C 7 D, T Z B 8 A$, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob cõmunia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo cõherentia lateribus cõmunibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia novem similia pentagona tangentia reliqua novẽ cubi latera, constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphaera comprehendi, qua & cubum, & præcedentes figuras, hac arte demonstrabimus.

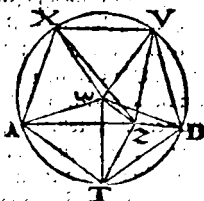
INTELLIGANTUR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorũ latera bisariam secantes ducuntur, nempe planũ ADEF, & eius oppositũ, planis ductis per rectas KM, LN; Itẽ planũ ABCD, & eius oppositũ, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniã igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basib⁹ cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD: Erunt & communes eorũ sectiones ad eadẽ cubi plana rectæ. Quare cũ YP, recta sit ad planũ ADEF, ipsa producta, uel usq; Z, erit cõmunis sectio plano-

19. undec.

planorum per rectas KM, LN ductorum. Eodē pacto, si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis, & OZ, erit ipsa, communis sectio planorum quę per rectas GI, HK, ducuntur. Quia uero dictę cōmunes sectiones, & diametri cubi se mutuo bisariam secant; secant se mutuo bisariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bisariam in centro sphaerę cubum complectentis, ex coroll. r. propos. 15. huius lib. Punctū igitur Z, centrum erit sphaerę circa cubum descriptę. Ac proinde omnes rectę ex Z, ad omnes angulos cubi ductę, inter se, quales erunt: Quibus omnibus equales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. Quoniam parallele sunt KP, OZ, quod utraque recta sit ad planum ABCD; Item parallele sunt OK, ZP, quod utraque recta sit ad planum ADE; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrammum, ac propterea PZ, equalis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidij lateris cubi: Est autem & PY, ipsi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, equalis erit. Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectę NP, quod NR, in P, secta sit extrema, & media, ratione; erunt quoque quadrata rectarum ZY, PR, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectę PZ: (Est enim YX, equalis ipsi PS, hoc est, ipsi PY:) Est autem quadratis rectarum ZY, YX, equalis quadratum rectę ZX. Igitur & quadratū rectę ZX, triplum erit quadrati rectę ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoque quadratum semidiametri sphaerę cubum cōprehēdis. (Nam ut diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; Ac proinde ut quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratū semidiametri ad quadratum dimidij lateris. Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Aequale igitur est quadratum rectę ZX, quadrato semidiametri sphaerę, seu cubi. Ac propterea ZX, equalis semidiametro. Eadē ratione erit ducta recta ZV, semidiametro equalis. Vel certe, quia cum latera ZY, YX, triāguli ZYX, equalia sint lateribus ZY, YV, triāguli ZYV, & anguli cōtenti recti. (cum n. PY, sit perpen-

4. primi.

dicularis ad L N, erit quoque eadem ad sibi parallelam V X, perpendicularis.) Erunt bases Z X, Z V, æquales : Eademq; ratione semidiametro sphære æquales erunt rectæ ductæ Z A, Z D. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphære ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphære. Ve autem ostendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquangulum, circulus A T D V X, & in planum ipsius ex Z, centro sphære



47. primi.

perpendicularis demittatur Z o, connectanturque rectæ o A, o T, o D, o V, o X. Quoniam igitur quadratæ rectæ Z A, æquale est quadratis rectarum Z o, o A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z o, o X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, æqualia, quod rectæ Z A, Z X, ostensæ

sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z o, o A, quadratis rectarum Z o, o X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Z o, æqualia relinquentur quadrata rectarum o A, o X, idcoque rectæ ipsæ o A, o X, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ o V, o D, & inter se, & ipsis o A, o X, æquales, quod & rectæ Z V, Z D, æquales sint ostensæ rectis Z X, Z X. Quare cum ex o, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quam duæ punctum o, centrum erit circuli; Ac proinde o T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarum Z o, o A, æqualia erunt quadratis rectarum Z o, o T. Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his uero quadratum rectæ Z T; Erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T; proptereaq; & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare sphaera complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque A T D V X; Eodemq; modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem sphaera comprehendetur Dodecaedrum, quæ cubus.

9. tercij.

47. primi

15. quinsi.

P o s t r a t e m o cum sit ut N P, ad P S, ita P S, ad S N: erit quoque ut N L, dupla ipsius N P, ad R S duplatam ipsius P S, ita R S, dupla ipsius P S, ad rectam compositam ex S N, R L,

RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit S R: Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratū commensurable est quadrato diametri sphaeræ, quæ Rationalis ponitur, cum sit illud tertia pars huius.) Igitur maius segmentum S R, hoc est, dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphaera complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

6. tersijdec.

COROLLARIUM I.

Cum ergo demonstratum sit; recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam R S: sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti.

COROLLARIUM II.

Si c quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, etique ostensum æquale rectis A V, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdē pentagoni.

Quoniam uero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum latus pentagoni; ac propterea recta composita ex dicta recta, subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphaeræ.

8. tersijdec.
5. tersijdec.

COROLLARIUM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt Y Z, T A, quæ uidelicet parallela sunt, lateribus cubi E F, A B; aliaque quatuor reperiuntur super reliquis quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cū parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos, a lineis

Ec 3 rectis,

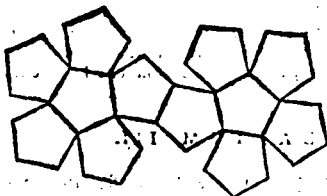
rectis, quæ centra basi cubi oppositarum coniungunt, quales sunt rectæ YZ , gZ . &c. quæ ut demonstratum est, se mutuo intersectant in centro Z . Dico se mutuo secare bisariam & ad angulos rectos: bisariam quidem, quoniam cum rectæ PZ , OZ , æquales sint dimidio lateri cubi; & YP , gO , æquales maioribus segmentis æqualibus PS , OQ ; erunt totæ YZ , gZ , æquales; Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z , ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bisariam in centro Z , mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo $KOZP$, angulus OZP , rectus est, cum opponatur recto: OKP . Non aliter offenduntur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos. Ocs enim parallele sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, ut perspicuum uest.

COROLLARIUM. IIII.

DEVIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bisariam, & ad angulos rectos, ut dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Cum enim quadrata rectarum ZY , YP , tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ ; erit ZY , secta in P , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit PZ , ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit ut ZY , ad ZP , ita ZP , ad PY ; ideoque ut dupla ipsius ZY , nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bisariam, ad duplā ipsius ZP , nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP , ad duplā ipsius PY , hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bisariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eiusdem sphaera.

15. quinti.

SCHOLIUM.



tem, si rursus inter se complicantur.

QVOD si ex aliqua materia cōficiantur duodecim pentagona æquilatere, & æquiangula, inter se æqualia, disponanturque ut hac figura indicat, cōponetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem.

18.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum expo-

nere,

nere, & inter se comparare.

Si r sphaerę diameter A B, quę in C, secetur bifariam; In D, uero ita, ut B D, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, ut B E sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa A B, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsi A B, perpendiculares C F, D G, E H; connectanturque rectę A F, B F, A G, B G, A H, B H. Post hæc ex H A, abscindatur H I, equalis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est B H; connectaturque recta B I. Postremo B G, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum B K.

Quod igitur attinet ad expositionem laterũ prædictarũ figurarum, dico A G, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; A F, latus Octaedri; B G, latus cubi; B I, latus Icosaedri; B K, denique latus Dodecaedri. Quoniam A G, media proportionalis est inter B A, A D, ex coroll. propof. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propof. 20. eiusdẽ lib. ut B A, ad A D, ita quadratũ rectę B A, ad quadratũ rectę A G: Est autem B A, ipsius A D, sesquialtera; cum talium partium 2 sit A D, qualium 3, est B A. Igitur & quadratum rectę B A, sesquialterum est quadrati rectę A G; Ac proinde cum diameter sphaerę sit potentia sesqui-

13. tertijdec.

altera lateris Tetraedri; Erit A G, latus Tetraedri. **R**ursus quoniã A F, est media proportionalis inter B A, A C, ex eodẽ coroll. p. 8. lib. 6. Ac proinde ut B A, ad A C, ita quadratũ rectę B A, ad quadratũ rectę A F, ex adducto coroll. propof. 20. lib. 6. Est autẽ B A, ipsius A C; dupla: Erit quadratũ rectę B A, duplũ quadrati rectę A F. Quare cum diameter sphaerę potentia sit dupla lateris Octaedri; Erit A F, latus Octaedri. Eodem modo erit B F, latus Octaedri.

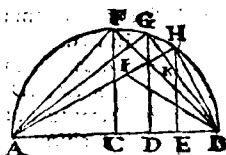
14. tertijdec.

Deinde cũ B G, sit media proportionalis inter A B, B D, ideoque ut A B, ad B D, ita quadratũ rectę A B, ad quadratum rectę B G, ex præfatis duobus corollarijs lib. 6. Sit autem A B, ipsius B D, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectę A B, triplum quadrati rectę B G. Quocirca cum sphaerę diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit B G, latus cubi.

15. tertijdec.

PRAETEREA quia, ex eisdẽ corollarijs, B H, est media proportionalis inter A B, B E, atque ideo ut A B, ad B E,

ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Est autem, ex constructione A B, ipsius B E; quintupla: Erit qua-



dratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter spheræ potentia sit quintupla semidiametri circuli, quinque latera Icosædri ambiens, ex coroll. 1. propos. 16. huius lib. Erit B H, semi-

diameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli: Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. Igitur latus pentagoni poterit & B H, & H I, simul; Ac proinde eum quadratum rectæ B I, equale sit quadratis rectarum B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiusdem. Quam ob rem B I, latus est Icosædri.

10. tertij dec.
47. primi.

16. tertij dec.

D E N I Q U E, cum B G, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius segmentum, latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphaera descriptarum.

Q U O D uero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit, diametrum spheræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia uero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi,

	perspicuum est, qualium partium 6.
Diameter.	6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse
Tetraed.	4. quadratum lateris Tetraedri; talium uero
Octaed.	3. 10 quadratum lateris Octaedri; & denique
Cub.	2. quadratum lateris cubi, talium 2.

Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitercium lateris Octaedri, potentia uero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex spheræ diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum; Ac propterea diameter spheræ, & latera dictarum figurarum lineæ sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter spheræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia.

6. decimi.

tionalia : Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ut constat ex coroll. propof. 24. lib. 2. Erunt huiusmodi lineę, nimirum diameter sphere, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

9. decimi.

A T uero, latera Icoſaedri, & Dodecaedri, quoniam ſunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor; hoc uero, Apotome, ut demonſtratum eſt, nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commensurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum ſint diametro ſphęrę commensurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum. oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.

S E D neque inter ſe ullo pacto commensurabilia ſunt dicta latera Icoſaedri, & Dodecaedri, Si namque credantur eſſe commensurabilia longitudine inter ſe, cum latus Dodecaedri ſit Apotome, erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. Item cum latus Icoſaedri ſit linea Minor, erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod ſi dicantur commensurabilia eſſe potentia tantum, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam Minorem, ex eo, quod latus Icoſaedri Minor ſit. Quod eſt abſurdum. Nā ex ſcholio propof. 112. lib. 10. Apotome, & Minor ſunt lineę Irrationales prorsus inter ſe differentes, ita ut neutra ſit eadem alteri.

104. decimi

106. decimi

106. decimi

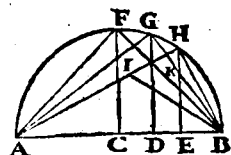
I T A Q U E quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commensurabilia & inter ſe, & diametro ſphęrę, ideoque Rationalia exiſtant; duo uero poſteriora incommensurabilia & inter ſe, & diametro, reliquiſque lateribus; ac proinde Irrationalia ſint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, ut latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri; Latus denique Icoſaedri maius latere Dodecaedri; Hoc eſt, eo ordine ſe mutuo excedunt dicta latera, quo præſatas figuras conſtruimus. Quę forte cauſa fuit, cur Euclides non eodem

codem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propof. 28. lib. 3.

Eodem modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri BI, hac arte demonstrabimus.



Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD, & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum recte AB, noncuplum quadrati recte BD, cum nōcupla propor-

tio sit duplicata proportionis triplę, ut hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectę AB, talium 1. erit quadratum rectę BD. Qualium autem partium 9. est quadratum rectę AB, talium 3. est quadratum rectę BG, quod illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cū equalia sint quadrato rectę BG. Igitur si auferatur quadratum rectę BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectę GD. Quoniam uero quadratum rectę AB, quintuplum est quadrati rectę BH, erit quadratum rectę BH, minus quatuor talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratū rectę GD, maius est quadrato rectę BH, ideoque recta GD, maior, quam recta BH. Rursus quia diameter si hęre AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propof. 16 huius lib. constat latus decagoni HI, minus esse tertia parte rectę AB, hoc est minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertię parti rectę AB; erit dupla illius, æqualis duabus

10. sexti.

15. septijdec.

8. quinti.

10. quinti

duabus tertijs partibus, nempe ipsi AD ; Ac propterea BH , reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD ; Atque adeo, cum quadratum rectæ AB , noncuplum sit ostensum quadrati rectæ BD , erit idem quadratum rectæ AB , noncuplum quadrati rectæ BH : Quod est absurdum. quintuplū enim est demonstratū. Non ergo HI , tertia pars est ipsius AB : Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI , dicatur maior tertia parte rectæ AB , & proinde dupla ipsius HI , maior quam duæ tertiæ, hoc est, quam AD ; erit BH , minor quam tertia pars BD . Quare quadratum rectæ AB , maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BD . Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI , tertia parte ipsius AB : Sed neque æqualis tertiæ parti, ut ostendimus. Minor ergo est quam tertia pars, hoc est, quam BD . Itaque cum rectæ GD , DB , maiores sint rectis BH , HI , ut demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: Est autem quadratum rectæ BG , æquale quadratis rectarum GD , DB ; & quadratum rectæ BI , quadratis rectarum BH , HI . Quadratum ergo rectæ BG , maius quoque erit quadrato rectæ BI ; Ac proinde recta BG , nempe latus cubi, maior erit quam recta BI , latus scilicet Icosædri.

MAIUS denique esse latus Icosædri BI , latere Dodecaedri BK , hac ratione patebit. Cum rectæ BG , diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK , & minus GK , erit rectangulum sub BG , BK , maius rectangulo sub BG , GK ; atque adeo rectangula sub BG , BK , & sub BG , GK , simul maiora duplo rectanguli sub BG , GK : Est autem rectangulis sub BG , BK , & sub BG , GK , æquale quadratum rectæ BG ; Et duobus rectangulis sub BG , GK , æqualia sunt duo quadrata rectæ BK (Nā cū sit, ut BG , ad BK , ita BK , ad GK , erit quadratū rectæ BK , æquale rectangulo sub BG , GK ; ideoque duo quadrata rectæ BK , æqualia duobus rectangulis sub BG , GK .) Maius igitur quoque est quadratū rectæ BG , duobus quadratis rectæ BK ; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG , sex quadratis rectæ BK : Atqui tribus quadratis rectæ BG , æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH . (Cum enim quadratum rectæ AB , triplum sit quadrati rectæ BG ,

47. primi

2. secundi

17. sexti

& quin-

& quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quam quinque quadrata rectæ B H, equalia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa his quinque equalia.) Igitur & quinque quadrata rectæ B H, maiora erunt sex quadratis rectæ B K; Ac proinde unum quadratum rectæ B H, maius erit uno quadrato rectæ B K. (si namque equale esset quadratum rectæ B H, quadrato rectæ B K, uel minus; forent quinque quadrata rectæ B H, minora sex quadratis rectæ B K. quod est absurdū, cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quam recta B K; Ac propterea cum B I, maior sit quā B H, multo maior erit B I, latus uidelicet Icosædri, quam B K; latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

S C H O L I O N.

. I N T E R P R E T E S hoc loco demonstrans, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis cōtineatur, inter se equalibus; hac fere ratione.

Ex duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

Ex tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus;

Ex quatuor, Octaædri angulus;

Ex quinque angulus Icosædri;

Ex sex autem huiusmodi triangulis ad idē punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertias partes unius recti, hoc est, quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. Nam solidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

Ex tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor

quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quā quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, ut ostendimus ad propof. 32. lib. 1. Ac proinde unus angulus contineat unū rectum, ac propterea quintam partem unius recti, & continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes unius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulis solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cum enim unus, ut dictum est, maior sit recto, eo quod contineat unum rectum, & insuper recti quintam partem, erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cum sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, ut ad propof. 32. lib. 1. est demonstratum; Ac proinde unus angulus contineat unam rectam, ac propterea duæ partes sextas unius rectis continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectus. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus eiusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

Nam si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in unum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituerunt Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

Si vero quatuor eiusmodi triangula conveniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

Si denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti triangulis eiusmodi contentum.

QUOD si tria quadrata equalia coeant in vnum punctū, ut constituent angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona equilatera, & equiangula, inter se equalia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicte Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figurae regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnus basis latera, ut habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnus lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, ut numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnus trianguli, ut in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modū & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum cōponentia multiplicentur in vnus quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnus trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnus trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnus pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QUOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeas; Multiplicanda sunt omnes bases in vnus basis angulos, ut habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnus anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeant angulum solidum constituendum, ut

numerus

numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLUM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, sunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt unum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum unius quadrati, sunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli faciunt unum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo tria'gula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius tria'guli, sunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri.) faciunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, sunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri.) producant 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum unius pentagoni, sunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli constituunt unum angulum solidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

ELEMENTI DECIMITERTII FINIS.



EVCLIDIS

ELEMENTVM XIII.

ET SOLIDORVM QVARTVM,

Vt quidam arbitrantur : vt alij uero,

Hypsiclis Alexandrini de quin-
que corporibus.

LIBER PRIMVS.



PROOEMIUM HYPsiclis ALE-
xandrinī ad Protarchum.



BASILIDES Tyrus, Protar-
che, Alexandriam profectus, pa-
trique nostro ob disciplina societa-
tem commendatus, longissimo pere-
grinationis tempore cum eo uersa-
tus est. Cumq; differerent aliquan-
do de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri
& Icosaedri eidem sphaera in scriptorum, quam hac in-
ter se habeant rationem, censuerunt ea non recte tra-
didisse Apollonium; quae a se emendata, ut pater meus
dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi
in alterum librum ab Apollonio editum, qui demon-
strationem accurate completebatur de re proposita,
ex cuiusque problematis indagatione magnam equidem

capi

capere uoluptatem. Illud certe ab omnibus perspicere potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conicere licet, studio nos postea scripsisse uidemur, id maqummentis consignatum tibi dedicandum duximus: ut qui feliciter cum in quonibz disciplinis, cum uel maxime in Geometria uersatus, scire ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam uero, quæ tibi cum patre fuit, ut & consuetudinem, quaque nos complecteris, beneuolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, ut proœmio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidis ascribuntur: Duo uero subsequentes a plerisque Hypsicle Alexandrino recte, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidam priori inter se comparantur Icosædron, & Dodecædron, quam secundum superficies, quam soliditates. In posteriori uero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium uero inter aliam; ut hi duo libri sint instar appendicis cuiusdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle sciri non iniucunda, quæ spectant ad comparationes dictarum quinque corporum regularium, eorumque multas inscriptiones unius in alio; quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quatuordecimus, quinque uero problematibus decimus quintus absolutus: Visum est, ut aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo uberius de dictis figuris regularibus in uniuersum disserere, proponenda uaria theorematum, atque problemata, quibus et prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutua inscribuntur. Quæ in re maximo nobis adiumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatam Candalam, qui diligentem operam, & sedulam in hoc negotio collocant, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quam plurimis theorematibus et problematibus locupletauit; uerum etiam integrum librum, qui decimus sextus est ordine adiunxit, in quo proprias res illas

stres de dictis corporibus proponis. Ceteram præcipuum fuisse Hypsicles institutum, in hoc lib. 1. ad dissipanda de ordinis arithmetici mutua Icosædri & Dodecaedri, facile intelligi potest, ex eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

QUONIAM vero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in eandem ordine, & inter se, & a Francisco Basso, adeoque a Nobis disceptant, annotavit in margine ordinem utriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsicles, inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine unicus tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem significat. Quod si aliquando loco superioris numeri apparet hæc nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

I.

THEOR. I. PROPOS. I.

QVAE ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque linearum simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse linearum compositarum ex latere hexagoni, & decagoni eiusdem circuli. Extensa enim AE, in utramque partem, ut perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, equali ipsi EF, connectantur rectæ AC, CG, CF, BF. Quoniam igitur perpendicularis AE, secat rectam BC, bisariam, erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CE, EF. Cum igitur & anguli contenti sint æquales, nempe recti, erunt bases CF, BF, æquales, ideoque & arcus

CE.

3. versij.

4. primi.

CF, BF, $\hat{e}$ quales; Ac proinde existente arcu BC; quinta parte totius circumferentiae, erit CF, eiusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rursus quia latera CE, EF, triantuli CEF, equalia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, suntque anguli contenti, recti, $\hat{e}$ runt & bases CF, CG, & anguli CFG, CGF, $\hat{e}$ quales. Quare utro arcus CF, quinta pars est totius circumferentiae DC, cum sit totius circumferentiae decima pars. Erit itaque partium 1. arcus CF, qualium 4. est arcus DC, hoc est, arcus DC, quadruplus erit arcus CF. Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: Est autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem sit basis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi $\hat{e}$ qualis ostensus CGF, duplus erit anguli CAF: Atque angulus CGF, externus, $\hat{e}$ qualis est internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAO sit dimidium anguli CGF, ut ostensum est, erit GCA, reliquum dimidium eiusdem anguli CGF, idcirco $\hat{e}$ quales erunt anguli GAC, GCA; ac proinde & latera AG, CG, $\hat{e}$ qualia: Est autem CG, recta ostensa $\hat{e}$ qualis rectae CF. Igitur & AG, recta $\hat{e}$ qualis erit eidem CF. Quare additis $\hat{e}$ qualibus GE, EF, fiet AE, $\hat{e}$ qualis duobus EBF, simul: Ac proinde tres simul AE, EF, FC, hoc est, duae simul AEF, tripliciter erunt ipsius AE, atque idcirco $\hat{e}$ omnino erit AE, ducta uidelicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia quarum simul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quae ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Ex his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo apertam, secare arcum quem dicta haec linea recta subtendit, bisariam. Demonstratum enim est rectam AE, quae ex centro perpendi-

F f 2

28. *terrij.*4. *primi.*33. *sextri.*20. *terrij.*2. *primi.*6. *primi.*

qualis est ad B C, dividere arcum B C, bisariam in E.

COROLLARIUM. II

Hi uero quoque si, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam, æqualem esse utrique lineæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eodem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam ut in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni, æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; ER autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propos. 11. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni, esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

4.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

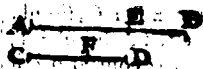
SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secantur; ipsæ similiter secabuntur, in eadem scilicet proportionēs.

Si cernitur binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in eadem proportionēs secari, hoc est, esse ut A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item ut A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cum enim sit

ut A B, ad A E, ita A E, ad E B; & ut C D, ad C F, ita C F, ad F D; erit rectangulum sub A B, E B, æquale quadrato rectæ A E; & rectangulum sub C D, F D, æquale quadrato rectæ C F.

Quotobrem erit ut rectangulum sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F; (est enim utrobique A E equalitas proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstravimus in scholio propos. 4. lib. 5. ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: Et componendo, ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ C F:

17. sexti.



C F:

CF: Sed quod quater continetur sub A B, EB, una cum quadrato rectæ AE, æquale est quadrato lineæ compositæ ex AB, EB; Et quod quater continetur sub C D, FD, una cum quadrato rectæ CF, æquale est quadrato lineæ compositæ ex C D, FD. Igitur erit quoque, ut quadratum lineæ compositæ ex AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadratum lineæ compositæ ex C D, FD, ad quadratum rectæ CF; Ac prout, ut recta composita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta composita ex C D, FD, ad rectam CF: Et componendo, ut composita recta ex AB, EB, & recta AF, hoc est, dupla ipsius AB, ad rectam AE, ita recta composita ex C D, FD, & recta CF, id est, dupla ipsius C D, ad rectam CF; Et permutando, ut dupla ipsius AB, ad duplam ipsius C D, ita AE, ad CF: Vt autem dupla ipsius AB, ad duplam ipsius C D, ita est AB, ad C D. Erit ergo ut AB, ad C D, ita AE, ad CF; Ac propterea, cum sit ut tota A B, ad totam C D, ita AE, ablata ad CF ablatam, erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, ut tota ad totam. Quare ut AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum utraque proportio eadem sit. proportioni AB, ad C D: Et permutando, erit ut AE, ad EB, sic CF, ad FD; & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendimus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secantur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM

Ex hac propositione & præcedenti inferemus hoc theorema.

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscripti.

Ex centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli

duplo; minus vero segmentum E D, æquale esse dimidio lateris decagoni, cuiuslibet circuli. Extenso namq. e recta A D, ad F, &



9. terijdec.

connexa recta F C; erit F C, latus decagoni. cum ex coroll. 1. propoſit. huius libræus B C, nempe quinta pars totius circumſerætiæ, biſariam ſecetur in F; Ac proinde recta compoſita ex A F, latere hexagoni, & F C, latere decagoni, ſecta erit extrema æ media ratione, cuius maius ſegmentum A F, latus hexagoni, minus vero ſegmentum F C, latus decagoni. Quæ ut in hac propoſ. oſtenſum eſt, erit ut tota A D,

diuiſa ſecundum extremam æ media rationem, ad totam compoſitam ex A F, F C, ſimiliter diuiſam, ita A E, maius ſegmentum ad A F, maius ſegmentum; & E D, minus ſegmentum ad F C, minus ſegmentum: Eſt autem tota A D, dimidium totus compoſita ex A F, F C. Igitur & A E, ipſius A F, ſemidiameter, & E D, ipſius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per coroll. propoſ. 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, equalis ſit dimidio ſemidiæ metri, perſpicuum eſt, maius ſegmentum A E, æquale eſſe dictæ perpendiculari, minus vero E D, dimidio lateris decagoni.

1. quæſide.

2.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

4

SI in circulo pentagonum æquilaterū deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, utraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eiſ, quod ex ſemidiæ metro deſcribitur, quadrati.

DESCRIBATUR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, ſubtendatque recta A C,



lina latera A B, B C. Dico quadrata reſtarum C D, A C, ſimul quinquẽpla eſſe quadrati ex ſemidiæ metro circuli deſcripti. Ducta enim ex A, per centrum recta A F G, quæ per coroll. 1. propoſ. 10. lib. 13. diuidat & arcum C D, & latus C D, biſariam in G, & H; erit arcus C G, decima pars totius circumſerætiæ,

rentia, ideoque recta subiens CG latus decagoni. Quoniam igitur recta AG , dupla est recte FG , hinc ex scholio propof. 4. lib. 2. quadratum recte AG , quadruplum quadrati recte FG . Sunt autem quadrato recte AG , equalia quadrata rectarum AC , CG . Igitur & quadrata rectarum AC , CG , quadrupla sunt quadrati recte FG . Atque adeo tria quadrata rectarum AQ , CG , FG , quintupla quadrati eiusdem recte FG . Cum ergo quadratis rectarum FG , CG , nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, equalis sit quadratum recte CD , lateris uidelicet pentagoni. Erunt quoque quadrata rectarum AC , CD , quintupla quadrati recte FG , nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, &c. Quod erat demonstrandum.

47. primi

10. tertide.

COROLLARIUM.

INFERTUR ex his theorema huiusmodi.

S. I. in sphaera eadem cubus, & dodecaedrum inscribatur, quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, utraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribitis.

CIRCUMSCRIBAT, enim circulus $ABCDE$ pentagonum unum Dodecaedri in quapiam sphaera descripti; eritque ex coroll. 2. propof. 17. lib. 13. recta AC , subrendens pentagoni angulum B , latus cubi in eadem sphaera descripti. Perspicuum est autem, quadrata rectarum AC , CD , lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri FG , &c.

3. quartide.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli sece-
tur extrema ac media ratione; maius illius
segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

S. B. C. E. T. U. R. AB , latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C , sitque maius segmentum AC . Dico AC , esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim AD ,

Ff 4 latus

o.
3.

9. versij dec.

2. quarside.

5. versij dec.

Ad id decagoni et eadem circuli, adiungaturque in rectum ipsi A B, etque tota composita B D, ex hinc hexagoni, & late re decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum BA: Ponatur autem & A C, secta in C, similiter: Igitur erit ut B D, tota ad maius sui segmentum A B, ita A B, tota ad maius sui segmentum A C: Sed est quocumque ut B D, tota ad maius sui segmentum A B, ita A B, maius segmentum ad A D, segmentum minus, per definitio nem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit ut A B, ad A C, ita eadem A B, ad A D: At propterea A C, A D, æquales erunt: Cum ergo A D, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est A B, erit & A C, eiusdem circuli latus decagoni.

A L I T E R. Adiungatur ipsi A B, in rectum recta A D, æqualis maiori segmento A C, eritque tota recta B D, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur A B, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 9. lib. 1. A D, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipsi A D, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius A B, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erit ostendendum.

2.

5.

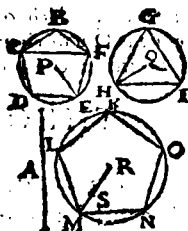
THEOR. 5. PROPOS. 5.

I D E M circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphaeræ inscriptorum.

In sphaera; cuius diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius unum pentagonum B C D E F, & Icosaedrum, cuius unum triangulum G H I. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum B C D E F, & triangulum G H I, hoc est, circulos B C D E F, G H I, ipsa circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus K L M.

N O,

NO, pentagonum KLMNO, ex quo Icosaedrum sphaerae 16. *serijside.*
 inscribitur, ita ut quinque latera huius pentagoni sint late-
 ra Icosaedri, debique quolibet ipsorum aequale cuiuslibet la-
 teri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectae
 PE, QH, RM; Seceturq; RM, extrema ac media ratione in
 S; eritque maius segmentum RS, latus decagoni in circulo 4. *quarside.*
 KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni. Subtendat quo-
 que recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quae erit,
 per coroll. 2. propof. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphaera
 descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propof.
 B F, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris cubi
 CF, secti extrema ac media ratione; erit ut tota CF, ad tota 2. *quarside.*
 RM, ita BF, maius segmentum ad RS, maius segmentum; Ac
 propterea ut quadratum rectae CF,
 ad quadratum rectae RM, ita qua-
 dratum rectae BF, ad quadratum re-
 ctae RS; Atque adeo; per ea, quae
 demonstrata sunt in scholio pro-
 pos. 4. lib. 5. ut triplum quadrati re-
 ctae CF, ad quintuplum quadrati re-
 ctae RM, ita triplum quadrati rectae
 BF, ad quintuplum quadrati rectae
 RS: Est autem triplum quadrati re-
 ctae CF, aequale quintuplo quadrati
 rectae RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex
 propof. 17. lib. 13. quam quintuplum quadrati semidia-
 metri RM, ex coroll. 1. propof. 16. lib. 13. aequale est quadra-
 to ex A, diametro sphaerae.) Igitur & triplum quadrati re-
 ctae BF, aequale erit quintuplo quadrati rectae RS: Quia ue-
 ro quadratum rectae MN, lateris pentagoni, aequale est qua-
 drato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectae RS, lateris de-
 cagoni; erunt quoque quinque quadrata rectae MN, aequa-
 lia quinque quadratis rectae RM, & quinque quadratis re-
 ctae RS. Igitur & quinque quadrata rectae MN, aequalia
 sunt tribus quadratis rectae CF, (cum haec ostensa sint ae-
 qualia quinque quadratis rectae RM,) & tribus quadratis
 rectae BF, quae aequalia sunt quinque quadratis rectae R.
 Sed quoniam; (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque
 quadratis semidiametri PE, sint aequalia;) ita quadrata re-



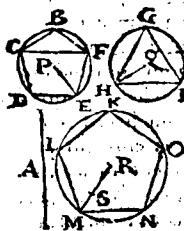
22. *scati.*

10. *serijside.*

1. *quarside*

CTE

12. tertij de.



Atque CF, & tria quadrata rectæ BF; æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri isosædri, seu trianguli æquilateri, sit autem quadratū ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) Erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea unū quadratum rectæ PE, uni quadrato rectæ QH, & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandū.

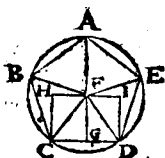
3.
6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Dodecaedri superficiei æquale.

Ex centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum contentum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resolvetur pentagonum in quinque triângula æqualia, ex coroll. propof. 8. lib. 1. cum bina latera unius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque unius basis aliorum æqualis.

qualis. Ductatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est, sub FG, & CD. Quoniam uero rectangulum CI, duplum est trianguli FCD, atque adeo, quilibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, equalium, erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia sint uni pentagono. Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirum rectangulum CI, sumptum trigices, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiæ Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



41. primi.

ALITER. Facta eadem figure constructione, cum rectangulum CI, duplum sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigices sumptum æquale triangulo FCD, bis sumpto trigices, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiæ Dodecaedri. Cum enim unum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Ac idcirco triangulum FCD, sumptum sexagesies æqualis erit superficiæ Dodecaedri.

41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

3.

7.

SI ex centro circuli triangulum Ico-
saedri circumscribentis, perpendicularis
ducatur ad unum latus trianguli; Erit,
quod sub dicto latere, & perpendicu-

lari

lari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icofaedri superficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumscribentis triangulum Icofaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, trigesies sumptum,



æquale esse toti superficiei Icofaedri. Ducitis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resolvetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propof. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera unius binis lateribus aliorum æqualia, & basis unius basis aliorum æqualis. Ducatur

quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritq; rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. Quoniam uero rectangulum BG, duplum est rectanguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum rectangulorum ipsi BDC, æqualium: Erit rectangulum BG, iter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icofaedri, cum tria talia triangula in quælibet sint uni triangulo Icofaedri; Atque adeo idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, iter sumpti, æquale erit uiginti triangulis Icofaedri, hoc est, toti superficiei Icofaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icofaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icofaedri, &c. Quod erat ostendendum.

ALITER. Facta eadem constructione figuræ, cum rectangulum BG, duplum sit trianguli BDC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale triangulo BDC, sumpto sexagesies: Atqui sexagesies huiusmodi triangula conficiunt uiginti triangula Icofaedri, eo quod tria conficiunt unum. Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icofaedri.

COROLLARIUM.

Itaque superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscun-

41. primi.

41. primi.

cuiuscunque Icosaedri, etiam si non describantur ambæ figura in eadem sphaera, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. Cum enim superficies Dodecaedri aequalis sit illi rectangulo trigies sumpto; Item superficies Icosaedri aequalis huic rectangulo trigies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. Quare erit superficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ut rectangulum illud, trigesima uidelicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propostum.

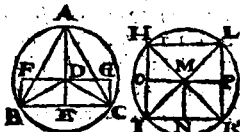
6. quartide.

7. quartide.

15. quinsi.

SCHOLIUM.

Nō v. dissimili argumento indagabimus superficies reliquarum trium corporum regularium. Tetraedri uidelicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, uel Octaedri, seu quadratum cubi, circumscribantur perpendicularis ducatur ad unum aliquod eorum latus. Erit, quod sub dicta latere ex perpendiculari continetur, rectangulum. in Tetraedro quidem sumptum sexies superficiei Tetraedri; In Octaedro uero, & cubo duodecies sumptum superficiei Octaedri, & cubi aequale. Sit enim prima triangulum Tetraedri ABC, circumscriptum a circulo, cuius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BE, & reliqua fiant, ut de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum BG, sexies sumptum, aequale esse superficiei Tetraedri. Quoniam rectangulum BG, duplum est trianguli DBC, hoc est, aequale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum aequale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula aequilatera ipsi ABC, equalia, eo quod tria confluent unum; Erit rectangulum BG, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis aequale.



7. quartide.

41. primi.

SIT secundo idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies sumptum, aequale esse superficiei Octaedri. Cum enim rectangulum BG, duplum sit trianguli

41. primi.

DBC,

DBC , hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit idem



rectangulum duodecies sumptum æquale viginti quatuor huiusmodi triangulis. Sed viginti quatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri; propterea quod tria conficiant unum. Igitur rectangulum BO , duodecies sumptum æquale est superficiem Octaedri.

SIT tertio quadratum cubi $HIKL$, circa quod circulus ex cetro M , describatur, & ducta MD , perpendiculari ad IK , ducantur ex M , ad omnes angulos quadrati recte lineæ, ut quadratum resolvatur in quatuor triangula æqualia, & quæ per M , agatur OP , ipsi IK , parallela. Dico rectangulum IP , contentum sub OI , hoc est sub MN , & K , sumptum duodecies, æquale esse superficiem cubi. Quoniam rectangulum IP , duplum est trianguli MIK , hoc est, æquale duobus talibus triangulis. Erit idem duodecies sumptum æquale viginti quatuor eiusmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula unum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP , duodecies sumptum æquale superficiem cubi. Quod est propositum.

ALITER. Cum duo rectangula IP , conficiant quadratum $HIKL$; (sunt. n. IP , PH , æqualia, tñ recta OI , sit dimidiū lateris HI , nāpe æqualis ipsi MN) cōstituent duodecies talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

4.
8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentū sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinq; sextis partibus lineæ subtendētis angulū pentagoni æquilateri in eodē circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrū F , describatur pentagonū æquilaterum $ABODE$, & ducta diameter AG , diuidatur in quatuor

(cum ex coroll. propos. 12. lib. 13. fecerit semidiametrum FG , bifariam, quemadmodum & punctum H , eandem semidiametrum FG , bifariam dividit.) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad unum eius latus ducta, nempe sub AH , & sub quinque lateris partibus lateris cubi eidem sphaera, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI , aequale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphaera constituti.

4.
8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SUPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphaera descripti, eandem proportionem habet, quam, latus cubi ad latus Icosaedri.

1. quatuordecim.

5. octid.

In circulo $ABCD$, circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD , & trianguli $A D$, & ex centro E , ducantur ad $A D, BD$, perpendiculares EF, EG , secabunturque $A D, BD$, bifariam; & EG , protracta secabit quoque arcum BD , bifariam in C , ex



coroll. 1. propos. 1. huius lib. atque adeo connexa recta CD , latus erit decagoni eiusdem circuli. Sit denique H , latus cubi, in eadem sphaera cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse ut H , latus cubi, ad AD , latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam lateris cubi H , fecit extrema ac media ratione, maius segmentum est BD , latus Dodecaedri, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. Recta autem EG , secat quoque extrema ac media ratione, maius segmentum est EF , ex coroll. propos. 2. huius lib. Erunt, ut H , tota ad BD , maius sui segmentum, ita EG , tota ad EF , maius sui segmentum; Ac prout rectangulum sub extremis H, EF , æquale erit rectangulo sub medijs BD, EG . Quia vero est, ut H , ad AD , ita rectangulum sub H, EF , ad rectangulum sub AD, EF , cum bases sint H, AD , altitudo vero semper eadem EF ; Erunt quoque ut H , ad AD , ita rectangulum

2. quatuordecim.

16. sexti.

1. sexti.

sub

tes ipsius BE ; continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integeras rectas BE.) Recta uero IF, uigesies sumpta æqualis est lateri Icosædri FG, decies sumpto (eo quod FG, sit ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosædri, ut latus cubi BE, decies sumptum ad latus Icosædri FG, decies sumptum;



15. quinti

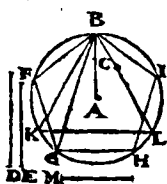
Ac propterea, cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosædri, quæ unum latus cubi ad unum latus Icosædri, perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosædri, ut latus cubi ad latus Icosædri. Quod est propositum.

4.
9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit ut recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori segmento, ad rectam potentem id, quod a tota, & id quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosædri eidem sphaeræ cum cubo inscripti.

SECTUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosædri in sphaera eadem cum cubo descripti. Ex



A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphaeræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphaera descripti, ex coroll. 2. proposit. 17. lib. 13. Quoniam uero AC, maius segmentum semidiametri AB, sectæ extrema ac media

dia

dia ratione, est latus Decagoni in circulo $B F G H I$, in quo nimirum $A B$, latus est Hexagoni; poterit $B F$, latus pentagoni & totam $A B$, latus uidelicet hexagoni, & maius segmentum $A C$, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possitiam & secta M , totam $A B$, & minus segmentum $B C$, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstraui. Dico sic esse D , latus propositum cubi ad E , latus propositum Icosædri, ut est $B F$, potens totam $A B$, & maius segmentum $A C$, ad M , potentem totam $A B$, & minus segmentum $B C$. Quoniam quadratum lateris trianguli æquilateri $B K$, triplum est quadrati semidiametri $A B$; Item quadrata rectarum $A B$, $B C$, tripla sunt quadrati rectæ $A C$; Erit ut quadratum rectæ $B K$, ad quadratum rectæ $A B$, ita quadrata rectarum $A B$, $B C$, hoc est, quadratum rectæ M , ipsis æquale, ad quadratum rectæ $A C$. Utrobique enim proportio est tripla: Permutando ergo erit, ut quadratum rectæ $B K$, ad quadratum rectæ M , ita quadratum rectæ $A B$, ad quadratum rectæ $A C$: Est autem ut quadratum rectæ $A B$, ad quadratum rectæ $A C$, ita quadratum rectæ $B G$, ad quadratum rectæ $B F$. (Nam cum rectæ $B G$, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit $B F$, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. eo quod $B G$, est latus cubi, & $B F$, latus Do decaedri eiusdem sphaeræ; Erit ut tota $A B$, ad maius segmentum $A C$, ita tota $B G$, ad maius segmentum $B F$: Ac proinde ut quadratum rectæ $A B$, ad quadratum rectæ $A C$, ita quadratum rectæ $B G$, ad quadratum rectæ $B F$.) Igitur erit quoque, ut quadratum rectæ $B G$, ad quadratum rectæ $B F$, ita quadratum rectæ $B K$, ad quadratum rectæ M : Et permutando, ut quadratum rectæ $B G$, ad quadratum rectæ $B K$, ita quadratum rectæ $B F$, ad quadratum rectæ M ; Ac propterea erit ut recta $B G$, ad rectam $B K$, ita recta $B F$, potens totam $A B$, & maius segmentum $A C$, ad rectam M , potentem totam $A B$, & minus segmentum $B C$. Cum igitur proposita latera D, E , cubi, & Icosædri, eandem habeant proportionem, quam rectæ $B G$, $B K$, ut mox ostendemus; perspicuum est, ut se habet recta $B F$, potens totam $A B$, & maius segmentum $A C$, ad rectam M , potentem totam $A B$, & minus segmentum $B C$, ita se habere propositum cubi latus D , ad Icosædri propositum latus E . Si recta itaq; linea secetur

4. quartide.

10. serti ydec.

12. serti ydec.

4. serti ydec.

2. quartide.

22. sexti;

22. sexti.

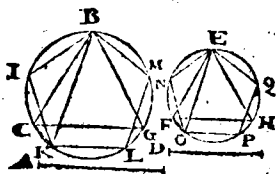
extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphaerae eandem habeant proportionem, quam recta BG, BK; demonstrabimus hoc proposita theorema.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphaerae, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quavis alia sphaera descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphaerae: Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quavis alia sphaera. Dico esse ut A, ad B C, ita D, ad EF. Perficitur namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona aequalitera BIKLM, ENOPQ, connectanturque rectae BK, CK; EO, FO.



Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphaerae; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphaera descripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphaera descripti; Ac propterea, ex coroll. 2. propof. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphaera, ideoque ipsi A, equalis. Simili argumento equalis erit recta EO, lateri cubi D. Rursum quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam uterque constiterit duas quintas partes suae circumferentiae.) Item arcus BMGK, EQPO; (uterque enim tres quintas partes totius circumferentiae comprehendit.) Erunt itaque anguli BCK, EFO, ex definitione segmentorum similium, aequales inter se, quam anguli BKC, EOF, inter se, cum iam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ex coroll. 1. propof.

5. quando. *lus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphaerae; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphaera descripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphaera descripti; Ac propterea, ex coroll. 2. propof. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphaera, ideoque ipsi A, equalis. Simili argumento equalis erit recta EO, lateri cubi D. Rursum quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam uterque constiterit duas quintas partes suae circumferentiae.) Item arcus BMGK, EQPO; (uterque enim tres quintas partes totius circumferentiae comprehendit.) Erunt itaque anguli BCK, EFO, ex definitione segmentorum similium, aequales inter se, quam anguli BKC, EOF, inter se, cum iam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ex coroll. 1. propof.*

32. lib. 1. reliquus angulus $C B K$, trianguli BCK , reliquo angulo $F E O$, trianguli EFO , equalis erit, & totum triangulum BCK , toti triangulo EFO , equiangulum. Quare erit, ut BK , hoc est, recta A , illi equalis, nempe latus cubi, ad BC , latus Icosædri, ita EO , hoc est, recta D , illi equalis, latus scilicet alterius cubi, ad EP , latus Icosædri. Quod est propositum.

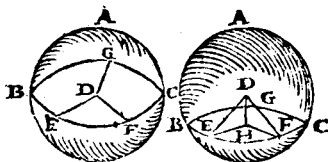
PERSPICUUM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D , & F , latera cubi & Icosædri in una sphaera, quam habent $B G$, $B K$, latera cubi & Icosædri in alia sphaera.

Ex hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosædri non solum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosædri in eadem sphaera cum ipsis, ut vult proposit. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosædri in quacunque alia sphaera.

LEMMA I.

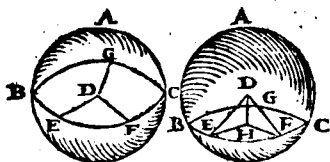
Si sphaera plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECETUR sphaera ABC , cuius centrum D , plano aliquo faciente communem sectionem planum $BEFCG$. Dico $BEFCG$, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphaera, ita ut centrum D , sit in plano, seu communi sectione $BEFCG$; ducanturque ex D , centro sphaera ad extremitatem communis sectionis, lineae rectae quotcunque DE , DF , DG . Quoniam igitur omnes haec lineae, ductae, quotcunque fuerint, aequales sunt, ex definitione sphaerae, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit figura plana



BEFCG, unica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphaerae.

TRANSEAT secundo planum secans non per



centrum sphaerae:

Ducatur autem ex

D, centro sphaerae

ad planum secans

perpendicularis

DH, emittaturque;

ex H, rectae utcunque HE, HF, ad extremitatem usque communis sectionis; & connectantur rectae DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defn. 3. lib. 11. recti sunt; erit tam quadratum rectae DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectae DF, quadratis rectarum DH, HF, aequale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, aequalium ex centro sphaerae ad eius superficiem cadentium, aequalia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, aequalia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectae DH, reliquum quadratum rectae AE, reliquo quadrato rectae HF, aequale erit. Quare & rectae HE, HF, aequales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse aequales & inter se, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, unica linea contenta, circulus erit; eiusque centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.

47. primi.

COROLLARIUM.

ITAEQUE si planum secans transierit per centrum sphaerae, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphaera. Si uero planum secans

secans per sphaeræ centrum non transferit, efficitur circulus habens aliud centrum, quam sphaera; illud uidelicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphaeræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, ut perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCULI in sphaera æquales, æqualiter distant a centro sphaeræ: & circuli æqualiter distantes a centro sphaeræ, æquales sunt.

IN sphaera ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter a centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum utcunque, connectanturque rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex defn. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis

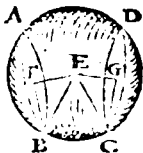


tis rectarum EF, FB, quam quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphaeræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato

47. primi

rectæ EG , æquale; A que adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF , EG . Quam ob rem circuli AB , DC , æqualiter distant a centro E .

SE D iam æqualiter distant circuli AB , DC , a centro sphaera E . Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, ut prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF , FB , æqualia esse quadratis rectarum EG , GC ; Ac proinde, demptis quadratis æ-



qualibus rectarum æqualium EF , EG , cum circuli æqualiter ponantur distare a centro, reliquum quadratum rectæ FB , reliquo quadrato rectæ GC ; atque adeo æquales erunt rectæ FB , GC , semidiametri scilicet circulorum AB , DC . Circuli igitur AB , DC , æquales sunt. Quod est propositum.

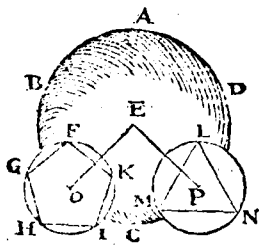
4.
10.

THEOR. II. PROPOS. II.

DODECAEDRUM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphaera descriptum, est ut cubi latus ad latus Icosaedri, in una eademque sphaera.

In sphaera $ABCD$, cuius centrum E , inscriptum sit Dodecaedrum, cuius unum pentagonum $FGHIK$: Item Icosaedrum, cuius unum triangulum LMN . Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, ut latus cubi ad latus Icosaedri, in una eademque sphaera, siue hæc eadem sit, quæ sphaera $ABCD$, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphaerae tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficiuntur, per Lemma præcedens, duo circuli in sphaera $FGHIK$, LMN ,

L M N, comprehendentes pentagonum, & triangulum. Quia uero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli F G H I K, L M N; Ac propterea per lemma præcedens, æqualiter ab E, centro sphaeræ distabunt, ideoque perpendicularares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lem matis 1. cadentes, quales sunt E O, E P, æquales erunt.



Non aliter ostendentur perpendicularares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri, & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in 12. pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter se, ex coroll. propof. 6. lib. 1. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales; quarum altitudines æquales erunt altitudinib⁹ pyramidum Dodecaedri. Quoniam autem est, ut basis F G H I K, ad basin L M N, ita pyramis F G H I K E, ad pyramidem L M N E, cum utriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propof. 5. lib. 5. demonstraui, ut duodecim bases Dodecaedri, tota uidelicet superficies Dodecaedri, ad basin L M N, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem L M N E. Rursus quia est, ut tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin L M N, ita Dodecaedrum ad pyramidem L M N E; erit, per idem scholion, ut tota superficies Dodecaedri ad 10. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrū ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiē, ut cubi latus ad Icosaedri latus eiusdē cū ipsis sphaeræ; atque adeo, ex scholio propof. 10. huius lib. ut latus cubi ad

6. duodes.

9. quarside

bi ad

bi ad latus Icofaedri cuiuscunque alterius sphaerae unius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icofaedrum, ut latus cubi ad latus Icofaedri cuiuscunque sphaerae. Quapropter Dodecaedrum ad Icofaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

9. quartide. QVONIAM vero ostensum est quoque, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icofaedri eiusdem sphaerae, ut latus cubi ad latus Icofaedri in eadem cum ipsis sphaera: Item ita esse cubi latus ad latus Icofaedri unius eiusdemque sphaerae, ut est linea potens totam diuisam quamcumque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: Item ita esse Dodecaedrum ad Icofaedrum eiusdem sphaerae, ut latus cubi ad latus Icofaedri in una eademque sphaera; Perspicuum est, has quatuor proportionales, nimirum lateris cubi ad latus Icofaedri; & superficiei Dodecaedri, ad superficiem Icofaedri; & lineae potentis totam quamcumque sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icofaedrum eiusdem sphaerae, esse inter se aequales.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

L A T V S trianguli aequilateri potentia sesquitertium est lineae perpendicularis ab uno angulo ad latus oppositum deductae.

IN triangulo aequilatero ABC , ducatur ex angulo A , ad latus oppositum BC , perpendicularis AD . Dico quadratum lateris AB , sesquitertium esse quadrati perpendicularis

3. primi.



26. primi

AD . Quoniam ob aequalitatem laterum AB , AC , anguli B , & C , aequales sunt; & anguli ad D , recti: Erunt duo anguli B , & D , trianguli ADB , aequales duobus angulis C , & D , trianguli ADC ; habent autem & latus AD , commune, uel AB , AC , aequalia. Igitur & reliqua latera BD , CD , aequalia sunt; ac propterea latus BC , hoc est, latus AB , duplum rectae BD , & idcirco

circo quadratum lateris AB , quadruplum quadrati rectæ BD , ex scholio propof. 4. lib. 2. Cum igitur quadrato rectæ AB , æqualia sint quadrata rectarum AD , BD ; erunt quoque quadrata rectarum AD , BD , quadrupla quadrati rectæ BD ; Ac proinde, qualium partium 4. est quadratum rectæ AB , uel quadrata rectarum AD , BD , talium 1. erit quadratum rectæ BD , ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD . Quare quadratum rectæ AB , partium 4. sesquitercium est quadrati rectæ AD , partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitercium est, &c. Quod ostendendum erat.

47. primi.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, lineam perpendicularem ex uno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bisariam. Demonstratum enim est BD , & CD , rectas æquales esse, hoc est, latus BC , secari bisariam a perpendiculari AD . Quare cum latera AB , AD , trianguli ABD , æqualia sint lateribus AC , AD , trianguli ACD ; & basis BD , basi CD , æqualis; Erunt & anguli BAD , CAD , æquales, id est, angulus BAC , bisariam secabitur ab eadem perpendiculari AD .

8. primi.

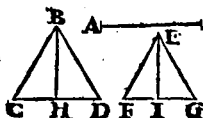
THEOR. 13. PROPOS. 13.

o.

13.

SI sphaeræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphaera, Media.

SI r sphaeræ diameter Rationalis A . Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphaera, esse Mediâ. Sit enim BCD , unum triangulû Tetraedri, & EFG , Octaedri illius sphaeræ, ducanturque ex angulis B , & E , ad latera opposita CD , FG , perpendiculares BH , EI . Quoniam igitur quadratû diametri A , sesquialterû est quadrati lateris Tetraedri BC , & duplû quadrati lateris Octaedri EF ; habebunt quadrata rectarû A , BC , EF , proportionē, quâ numeri 6. 4. 3. ideoque commensu-



14. tertijdec

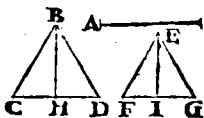
14. tertijdec

6. decimi.

commensurabilia erunt. Quare & lineæ ipsæ A, BC, EF, cō-
menturabiles existent, saltem potentia; Atque adeo, cum
A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF; &
ideir. o & earum dimidiæ Rationales eiunt CH, FI.

12. quarti-
decimi.

R v k s v s, quia tam quadratum rectæ BC, quadrati re-
ctæ BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI,



6. decimi.

sesquitercium est; habebunt tam
quadrata rectarum BC, BH, quā
quadrata rectarum EF, EI, pro-
portionem inter se, quam numeri
4, 3. ideoque tam illa, quam hæc
inter se commensurabilia erunt.

Quare & tam lineæ ipsæ BC, BH,
quam lineæ EF, EI, commensurabiles existent. Est autem
& tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia videlicet to-
ti, commensurabilis. Igitur & tam BH, CH, quam EI,
FI, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum CH,
& FI, ostensæ sint Rationales, erunt quoque BH, EI,
Rationales. Quoniam uero tam CH, BH, quam FI, EI,

12. decimi

9. decimi.

12. quarti-
decimi.

12. decimi.

longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadra-
ta non habeant proportionem, quam numerus quadratus
ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propof.
24. lib. 8. Habent enim proportionem, quā 1, ad 3, cum osten-
sum sit talium partium 1. esse tam CH, quam FI, qualium
3. est tam BH, quam EI.) Erunt tam CH, BH, quam FI,
EI, Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac pro-
inde tam rectangulum sub CH, BH, Rationalibus poten-
tia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub FI,
EI, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus con-
tentum, Medium erit: Sunt autem triângula BCD, EFG,
æqualia rectangulis sub CH, BH, & sub FI, EI, ex scholio
propof. 41. lib. 1. cum bases triângulorum CD, FG, duplæ
sint basium rectangulorum CH, FI. Igitur & triângula
BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota superficies
Tetraedri triângulo BCD, sit commensurabilis; (est enim
triangulum BCD, totius superficiei quarta pars.) Item to-
ta superficies Octaedri triângulo EFG, commensurabilis;
(Est enim triângulū EFG, totius superficiei quarta pars.)
Erunt quoque, ex coroll. propof. 24. lib. 10. superficies Te-
traedri,

traedri, & Octaedri, Mediae. Si igitur sphaerae diameter fuerit Rationalis, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum aequilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse Superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, BE, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, EI, hoc est, triangula BCD, EFG, ipsis aequalia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo aequilatero, cuius unum latus sit Rationale; perspicuum est, quod inferitur.

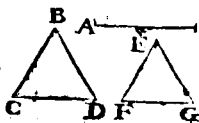
THEOR. 14. PROPOS. 14.

O.
I 4.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eisdem sphaerae inscribantur; erit basis Tetraedri sesquiquarta basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphaerae diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri uero basis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, sesquitercium esse triangulo EFG; At uero superficiem Octaedri esse sesquialteram superficiei Tetraedri. Quonia

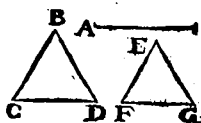
quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri CD; duplum uero quadrati lateris Octaedri FG; sit, ut quadratum partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. sit quadratum lateris CD, & talium 2. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectae CD, sesquitercium est quadrati rectae FG: Vt autem quadratum rectae CD, ad quadratum rectae FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum EFG. (quia tam



13. tertij de.

14. tertij de c.

19. *sexi.* tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum CD, FG, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangulum BCD, sesquitergium est trianguli EFG.



R V R S V S, quoniam ostensum est triangulū BCD, sesquitergiū trianguli EFG; Ac propterea qualium partiū 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulū EFG; Efficitur, ut triangulū EFG, octies sumptū, hoc est, tota

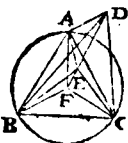
superficies Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulū BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphaeræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphaeræ inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

0.
15.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphaera descripti per centrum sphaeræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

S I T Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in sphaera, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E, centrum sphaeræ recta DEF, incidens in basim ABC, circulo inscriptam, ad punctum F. Dico F, esse centrum basis ABC, & DF, perpendicularem esse ad eandem basim. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro sphaeræ ad eius superficiem, æquales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus



bus EC , ED , trianguli CED ; Sunt autem & bases AD , CD , æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli AED , CED , æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF , CEF , æquales erunt, eo quod tã AED , AEF , quam CED , CEF , duobus rectis æquivalent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF , CEF , si considerentur triangula BED , CED . Quoniam igitur latera EA , EF , trianguli EAF , equalia sunt lateribus EC , EF , trianguli ECF ; & anguli ipsi contenti, ostensi æquales; Erunt bases FA , FC , æquales. Sic quoque æquales erunt FB , FC , si considerentur triangula EBF , ECF . Quare cum tres rectæ FA , FB , FC , ex F , in circumferentiã circuli cadentes sint æquales; erit F , centrum basis ABC , seu circuli eam circumscribentis.

2. primi.

3. primi.

4. primi.

9. tertij.

Quia uero, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E , centro spheræ ad planum circuli ABC , demissa in centrum circuli cadit; efficitur, ut recta DE , per centrum ducta, & in centrum circuli F , cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC . Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F , quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli, haberet unus idemque circulus duo centra. quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

O.
I. 6.

OCTAEDRVM in spherâ descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis uero utriusque est quadratum subduplum quadrati diametri spheræ.

Si T Octaedrum $ABCDEFG$, contentum octo triangulis æquilateris & equalibus EAD , EAB , EBC , ECD , FBC , FBA , FAD , FDC , & in spherâ descriptum, cuius centrum G . Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium

14. tertijdec.



48. primi.

14. primi.

2. undec.

7. undec.

48. primi.

4. undec.

lium altitudinum, quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphaere. Ductis enim ex G, centro sphaere ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quae aequales sunt, cum sint semidiametri sphaerae: quoniam quadratum diametri sphaerae duplum est quadrati lateris Octaedri AB, & quadruplum quadrati semidiametri AG, ex scholio. propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphaerae, talium partium 2. erit quadratum recte AB, & talium partium 1. quadratum recte AG; Ac proinde quadratum recte AB, duplum erit quadrati recte AG. Cum ergo quadratum recte AG, aequale sit quadrato recte BG; erit quadratum recte AB, aequale duobus quadratis rectarum AG, BG; Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, DGC, CGB, recti. Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctae; atque adeo recte AC, BD, sese secantes in G, in uno existent plano; Ac propterea recte earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum ABCD, in uno plano est situm. Divisum est ergo Octaedrum in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum basis communis ABCD, uertices uero E, & F; quae pyramides aequales sunt & similes, ex def. 10. lib. 11. cum quilibet constet ex quatuor triangulis equilateralibus Octaedri, quae equalia sunt & similia, & basi communi ABCD. Dico iam earum altitudines esse aequales, & basin ABCD, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphaerae. Quoniam ostensum est, quadratum lateris Octaedri AB, aequale esse duobus quadratis semidiametrorum AG, FG; erit quoque quadratum lateris AE, aequale duobus quadratis semidiametrorum AG, EG, Ac propterea angulus AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, se mutuo secantibus in G, ad rectos angulos insitit, ipsa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nempe ad basin pyramidum. Quare EG, altitudo est pyramidis ABCDE. Similiter ostendemus FG, altitudinem esse pyramidis ABCDF. Cum ergo

ergo EG, FG, sint semidiametri sphaerae aequales, perspicuum est, distas pyramides esse aequalium altitudinum. Rursus quia AC, est diameter sphaerae; erit eius quadratum duplum quadrati lateris AD; AC propterea aequale duobus quadratis laterum AD, DC. Quare, angulus ADC, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est: Sed & equilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere octaedri AB, constat, ipsum esse subduplum quadrati diametri sphaerae. Octaedri igitur ergo in sphaera descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

14. tertijde.

48. primi.

14. tertijde.

SCHOLION.

M V I T O brevis hanc propositionem demonstravimus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione octaedri. Verum tamen quia hic demonstratur a Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, cuiusmodi erat demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

o.

17.

TETRAEDRVM sphaerae inscriptum ad Octaedrum in eadem sphaera descriptum se habet, ut rectangulum sub linea potente uigintisepté sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum ad quadratum diametri sphaerae.

V 2 L, ut Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphaerae inscriptum

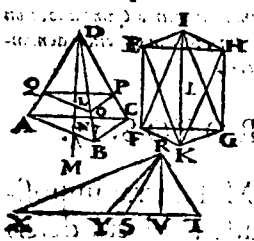
H h

tum

tum ad octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, ut rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia triū quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquintupartiente uigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphære.

S I T Tetraedrum $ABCD$, & octaedrum $EFGHIK$, in una eademque sphæra, cuius centrum L . Ducatur ex angulo D , per centrum L , diameter sphære DM , incidens in basin ABC , ad punctum N . Erigatur DN , centrū basis A, B, C ,

15. quatuordecimi.



& DN , perpendicularis ad eandem basin. Quia uero pars diametri LN , inter centrum sphære & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia pars semidiametri, per coroll. 2. propof. 13. lib. 13. Erigatur DL , semidiameter totius partium 3. quælibet 1. est LN ; Ac propterea DN , totum 4.

16. undec.

10. undec.

Ducatur deinde, ex scholio propof. 15. lib. 11. per centrum L , planum OPQ , parallelum plano ABC ; eruntque rectæ QQ, OP, PQ , parallelæ rectis AB, BC, CA ; Ac propter eandem triangulum QOP , æquiangulum erit triangulo æquila tero ABC ; cum anguli illius æquales sint angulis huius, singulis singulis: At ABC , est æquiangulum, ex coroll. propof. 5. lib. 1. Igitur & QOP , æquiangulum erit; Ac propterea & equilaterum, ex coroll. propof. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC : Sunt autem & trianguia DQO, DOP, DQP , triangulis DAB, DBC, DAC , æquilateris similia, ex coroll. propof. 4. lib. 6. Igitur pyramides $ABCD, QOPD$, similes sunt, ex def. 9. lib. 11. Rursus quia plana parallela ABC, QOP , secant rectas DN, DC , proportionaliter; erit ut DN , ad DL , ita DC ,

17. undec.

DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, ut 4 ad 3. (cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, ad DP, erit ut 4. ad 3. Ac proinde, cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam; erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, ut 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. ut constat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportionem 4. ad 3. ut constat ex 2. propof. lib. 8. Rursus quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, ut 64. ad 36. ut in iisdem numeris constat.

8. duodec.

10. sexti.

12. quarti
decimi.

S i t iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP; demittaturq; ex R, ad ST, perpendicularis RV. Eritq; latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquiterium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV: Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens uigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri.

R v r s v s extensa TS, fiat TX, ad TS, ut 64. ad 27. ex coroll. propof. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bifariam in Y, ut sit TY, taliū partiū 32. qualiū 27. est TS, seu illi æqualis DP. Quoniā uero proportio DC, ad DP, erat, ut 4. ad 3. nempe sesquiteria; erit DC, taliū partiū 36. qualiū DP, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquiteria) Ac propterea qualiū partiū TY, est 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedri A. B. CD, ad octaedri EFGHIK, ut rectangulū contentū sub recta RV, (quæ potest uigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris DC) & sub recta TY, (quæ continet octo nonas partes eiusdem lateris) ad quadratū diametri sphære DM.

1. sexti.

C v m enim ductis rectis RX, RY, triangulum RTX, duplum sit trianguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis TY: Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum eiusdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo sub RV, TY. Ac propterea erit ut triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulū sub RV, TY, ad idem triangulū RST: Est autem triangulum RTX, ad triangulum RST, ut basis TX, ad basin ST, nimirum

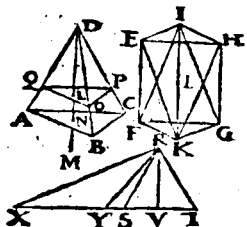
41. primi.

7. quinti.

1. sexti.

H h 2 ut 64.

ut 64. ad 27. Igitur & rectangulum sub R V, T.Y, ad trian-
gulum RST; hoc est, ad triangulum DQ P, siue QOP, si-
bi æquale, erit, ut 64. ad 27. Fuit autem & pyramis ABCD,
ad pyramidem QOPD, ut 64. ad 27. Erat ergo ut rectangu-



lum sub RV, TY, ad triangu-
lum QOP, ita pyramis AB-
CD, ad pyramidē QOPD :
At uero ut triangulū QOP,
ad quadratum diametri sphæ-
rę DM, ita est pyramis QO-
PD, ad octaedrum EFGH-
IK. (Nam cum DN, recta
sit ad planum ABC, recta
quoque erit ad planū QOP,

16. quarti-
decimi.

ex scholio propos 14. lib. 11. ideoque sphærę semidiameter
DL, altitudo erit pyramidis, seu tetraedri QOPD : Octae-
dru autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æqua-
les EFGHI, EFGHK, quarum basis communis quadratum
EFGH, dimidium quadrati diametri sphærę ; & altitudines
æquales semidiametri sphærę LI, LK. Pyramides ergo QO-
PD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex scholio
propos. 6. lib. 12. erit ut basis QOP, ad basin EFGH, ita py-
ramis QOPD, ad pyramidem EFGHI ; Ac propterea, per
ea, quę in scholio propos. 4. lib. 5. ostendimus, ut basis
QOP, ad duplum basis EFGH, hoc est, ad quadratum dia-
metri sphærę DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyra-
midis EFGHI, hoc est, ad Octaedrū EFGHIK.) Ex quo
igitur erit, ut rectangulum sub R V, potente uiginti septem
sexagesimas quattor partes quadrati lateris tetraedri DC, &
sub TY, octo nonis eiusdem lateris DC, contentum, ad qua-
dratum diametri sphærę DM, ita pyramis, seu tetraedrum
ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo sphæ-
rę impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demon-
strandum.

SCHOLION.

QVONIAM uero DC, talium partium 4. fuit, qua-
lium 3. DP continebit DP, seu illi æqualis RT, tres quar-
tas par-

1. ac partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, cum recta RT, sit potentia sesquitercia recta RV; erit RV, potentia subse-
 quitercia ipsius RT, nempe trium quartarum partium late-
 ris Tetraedri. Rursus quia TY, fuit salium partium 32. qua-
 lium 27. ST, seu DP; (tres videlicet quarta partes lateris te-
 traedri.) erit TY, superquintupartiens vigesima septimas par-
 tes ipsius ST, nimirum trium quartarum partium lateris te-
 traedri. Quare constat, esse quoque tetraedrum ABCD, ad
 octaedrum EFGHIK, ut rectangulum sub RV, quæ potentia
 subsequitercia est trium quartarum partium lateris tetraedri,
 & sub TY, quæ superquintupartiens est vigesima septimas
 partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri,
 ut volebat Campanus.

12. quatti-
 decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

o.
 17.

LINEA perpendicularis ex quolibet
 angulo trianguli æquilateri ad basin oppo-
 sitam demissa; tripla est eius perpendicula-
 ris, quæ ex centro trianguli ad eandem ba-
 sin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D.
 Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad
 BC, eamq; bisariam dividet, ex coroll. 2. propof. 10. lib. 13.
 Dico AE, triplicem esse rectæ DE, quæ scili-
 cet perpendicularis est e centro ad basin du-
 cta. Ductis enim rectis BD, CD, cum late-
 ra DA, DB, trianguli ADB, æqualia sint la-
 teribus DB, DC, trianguli BDC; e centro e-
 nim ducuntur; sit autem & basis AB, basi
 BC, æqualis: Erunt triangula ADB, BDC, æqualia ex co-
 roll. propof. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt
 triangula ADB, ADC. Quare, ob æqualitatem trium trian-
 gulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplicem est
 trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum sub AE, EB,



Hh 3

triangulo

1. *sexi.*

triangulo ABC , & rectangulū sub DE , EB , triangulo BDC , æquale est, ex scholio propof. 4. 1. lib. 1. cū basis triāguli BC , dupla sit basis BE , utriusq; rectanguli: Erit quoq; rectangulum sub AE , EB , triplum rectanguli sub DE , EB : Est autē ut rectangulum sub AE , EB , ad rectangulum sub DE , EB , eiusdem altitudinis EB , ita basis AE , ad basin DE . Igitur & AE , tripla est ipsius DE . Linea ergo perpendicularis ex quo libet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

ITAEQUE eadem perpendicularis AE , sesquialtera est reliquæ rectæ AD , inter angulum, & cētrum comprehensæ. Cum enim AE , tripla sit ipsius DE ; qualium partium 3. ponetur AE , talium 1. erit DE ; Reliqua igitur AD , earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE , sesquialtera erit ipsius AD .

Ex quibus rursus fit, rectam AD , rectæ DE , duplam esse.

o.
17.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum sphaeræ inscribatur; erit semidiameter sphaeræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphaeræ in basin quamcunq; octaedri deducitur.

SI T basis aliqua octaedri in sphaera, cuius centrum D , descripti, triangulum æquilaterum ABC , in quod e centro sphaeræ D , perpendicularis demittatur DE ; ducaturq; semidiameter sphaeræ DB . Dico semidiameterum DB , potētia triplam esse perpendicularis DE . Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. huius lib. perpendicularis DE , in centrum circuli sphaeræ, qui triangulum ABC , circū scribit, cadat, erit E , centrum triāguli.



14. *tertiyde.*

Ducta igitur recta BE ; quoniam quadratum diametri sphaeræ duplum est quadrati lateris octaedri AB ; & quadruplum quadrati semidiametri sphaeræ DB , ex scholio propof. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 4. 2. erit quadratum lateris AB , 6, & quadratum semidiametri

mediametri sphaeræ DB, 3. Quia uero quadratū lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambien-
tis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium par-
tium 2. qualium 6. suis quadratum lateris AB. Quare cum
quadratum rectæ DB, æquale sit quadratis rectarū BE, DE;
sit autem quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit
reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium
1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati
rectæ DE. Si igitur octaedrum sphaeræ inscribatur, &c.
Quod demonstrandum erat.

12. serij de.

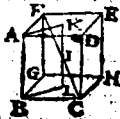
47. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

0.
18.

DVPLVM quadrati ex diametro cui-
uslibet sphaeræ descripti, æquale est super-
ficie cubi in illa sphaera collocati: Perpen-
dicularis autem a centro sphaeræ in aliquam
basin cubi demissa, æqualis est dimidio late-
ris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphaera descriptus, cuius
centrum I, ex quo I-K, perpendicularis ducatur ad unam
basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati dia-
metri sphaeræ æquale esse superficiei cubi;
& perpendicularem IK, æqualem esse dimi-
dio lateris cubi. Cum enim quadratum dia-
metri sphaeræ triplum sit quadrati lateris cu-
bi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi;
Erit duplum eiusdem quadrati ex diame-
tro sphaeræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti su-
perficiei cubi.



15. serij de.

PRODUCTA autem HI, ad basin oppositam BC-
HG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad pla-
num AE, recta quoque erit ad planum BH, illi pa-
rallelum, per scholion propos. 14. lib. 11. Rursus, quia
AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE;

6. undec.

H h 4

ducatur

16. undec.

ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis A E, B H, communes sectiones, lineas rectas A K, B L, quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit A B L K; atque adeo recta K L, æqualis lateri cubi A B. Quoniam vero perpendicularis K L, e centro sphaeræ I, cadit in bases A E, B H, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphaera, per coroll. lem. matis 1. propof. 10. huius lib. Quare K L, in centro I, bifariam secabitur a dicta diametro C F, ut in coroll. 1. propof. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea, cum K L, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit I K, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphaeræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.



C O L L A R I U M

15. serijde.

31. undec.

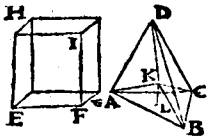
Ex dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphaeræ dictum cubum comprehendens, æquale esse cubo. Cum enim quadratum diametri sphaeræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata A E, B H, duæ tertie partes quadrati diametri sphaeræ: Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex I K, dimidio lateris cubi in A E, tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, æquale esse solido, quod fit ex I L, dimidio lateris cubi in B H, tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphaeræ, æquale esse toti cubo: Quod est propositum.

A L I T E R proponi potest hoc corollarium, ut dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, æquale esse cubo. Nam cubus B E, producitur ex B A, latere cubi in quadratum A B, quod est tertia pars quadrati diametri sphaeræ: Ut perspicuum est.

S C H O L I O N

P N E V R R S I Antem Solidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiusvis corporis regularis, ad aliquam eius basem ducta, in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposita corpori regulari. Sit enim corpus regulare quod-

quodcunque $ABCD$, contentum planis ABC , ABD , ACD , BCD , solidum autem $EFGH$, contentum sub EI , tertia parte superficiei corporis $ABCD$, & sub altitudine FG , quæ aequalis sit perpendiculari KL , ducta ex centro K , ad basin ABC . Dico solidum $EFGH$, æquale esse dato corpori regulari $ABCD$. Nam ductis ex centro K , rectis KA , KB , KC , KD , ad omnes angulos corporis, resolvetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli distas bases ambientes, æquales sint 3 ipsi æqualiter a centro distabunt, per lemma 2. propos. 10 huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K , centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam uero prisma contentum sub basi ABC , & altitudine KL , triplum est pyramidis $ABCK$, per coroll. 1. propos. 7. lib 12. Atque eadem ratione prisma contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL , tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL , (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis $ABCD$. Quamobrem, cum idem prisma triplum sit prismatis $EFGH$, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida $EFGH$, $ABCD$, æqualia. Quod est propositum.



THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphaeræ.

IN sphaera, cuius diameter A , intelligatur descriptus cubus, cuius unum quadratum $BCDE$, & octaedrum, cuius unum triangulum FGH . Dico eundem circulum circumscribere & quadratum $BCL E$, & triangulum FGH , hoc est, circulos $BCDE$, FGH , ipsa circumscribentes, esse æquales.

15. *tertijs de.*

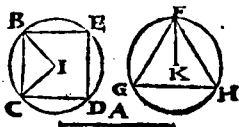
47. *primi.*

14. *tertijs de.*

12. *tertijs de.*

21. *quarti
decimi.*

les. Sim enim rectæ e centris IB, KF. Quia igitur quadrati
diametri A, triplum est quadrati lateris cubi BC; & quadra-
tum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta re-
cta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum subtendat quadrantē;
Ac proinde quadratum rectæ B C, æquale erit quadratis re-
ctarum BI, IC. Quare cū rectarum æqualium BI, IC, æqua-
lia sint quadrata; duplum erit quadratum rectæ B C, qua-



drati rectæ BI.) qualium par-
tium 6. ponetur quadratum
diametri A, talium 2. erit qua-
dratum lateris B C, & talium
1. quadratum rectæ BI. Rur-
sus quia quadratum diame-

tri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG; & quadratū
lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qua-
lium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3.
erit quadratum lateris F G, & talium 1. quadratum rectæ
FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadra-
tum rectæ BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac
propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti B C D E,
F G H, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c.
Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM

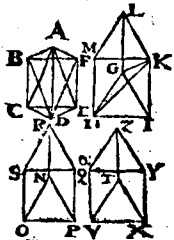
Hic fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulo-
rum, qui bases oppositas tam cubi quam octaedri circumscribunt,
æquales esse. Si enim ex cetro sphaeræ ad bases cubi & octaedri per-
pendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas cir-
cumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. huius lib. qui
cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt a centro sphaeræ, ex
lemmate 1. eiusdem propof. Ac proinde æquales erunt diæ per-
pendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra
oppositarum basium connectunt (Nam si producantur, perpendi-
culares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propof. 14.
lib. 11.) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium
coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. Quod est propofitū.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidē
sphaeræ inscribantur; Erit octaedrum ad tri-
plum

plum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphaera inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, dividetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune est ipsa diameter AD, & uertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD, in BDF, cuius basis BDF, in CDEA, cuius basis CDA; & in DEF, cuius basis DEF; quæ quidem omnes bases infra quadratum BDEF, existunt continentes cum ipso dimidiatam partem octaedri. Quoniam uero quælibet harum pyramidum constat duobus triangulis æqui-



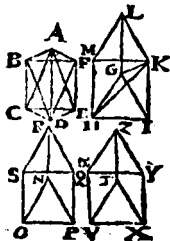
lateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ qm latus ipsorum commune est AD, diameter, & reliqua latera ipsius octaedri latera existunt, inter se qualia sunt, efficitur has quatuor pyramides æquales esse inter se, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Constituantur super GHI, basin tetraedri, prisma GHIKLM, eiusdem cum tetraedro altitudinis; quod ipsius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propof. 7. lib. 1. Rursus, super basin octaedri NOP, & TVX, basi tetraedri æqualem, constituentur duo prismata NOPQRS, TVXYZ, eiusdem cum octaedro, seu pyramide ACDE, altitudinis. Quia igitur GHI, hoc est, TVX, basis tetraedri sesquitercia est ipsius NOP, basis octaedri: Erit quoque prisma TVXYZ, prismatis NOPQRS, ses-

8. primi.

quitercium, cum prismata eiusdem altitudinis sint, ut bases, ex ijs, quæ ad propof. 7. lib. 1. demonstrauimus. Est autem & octaedrum ABCDEF, eiusdem prismatis NOPQRS, sesquitercium; (Nā prisma æquale est tribus pyramidibus, ex coroll. 1. propof. 7. lib. 1. qualium quatuor continere diximus octaedrum) Igitur æquale est octaedrum prismati TVXYZ. Quia uero prisma TVXYZ, ad prisma GHIKLM, proportionē habet, quā altitudo illius ad altitudinem huius, ex scholio propof. 14. lib. 1. Est autem altitudo prismatis TVXYZ, quod octaedro

14. quarti
decimi.

octaedro æquale est, eademque octaedri, ex constructione: Erit quoque octaedrum ad prismam $GHIKLM$, hoc est, ad triplum tetraedri $GHIK$, ut altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Est autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra basium oppositarum coniungens, equalis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra basium oppositarum connectenti, per coroll. propos. 21. huius lib.



Atque ut latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita est latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetra-

dri, est, ut 3. ad 4. Posito enim quadrato diametri sphaerae 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propos. 15 lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, est ut 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphaerae 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Est igitur octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque tetraedrum eidem sphaerae inscribantur, &c. Quod demonstrandum erat.

18. verside.

COROLLARIUM.

Ex dictis inferitur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphaerae ad latus tetraedri, ut latus octaedri ad latus cubi. Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram.

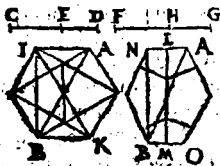
18. verside.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita potuerit totam aliquam

aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosædri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphaeræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius segmentum maius CE; Item rectam FG, & eius segmentum minus HG, Dico CE, esse latus Icosædri, & HG, latus Dodecaedri, eius sphaeræ, cuius AB, diameter existit. Intelligatur enim in sphaera, cuius diameter AB, descriptum Icosædru ABK, & Dodecaedru ANBO. Latera deinde Icosædri opposita AI, BK, connectantur recta IB, quæ subtrahet unum angulum pentagoni ex Icosædri lateribus compositi, ut constat ex propof. 16. lib. 13. quod etiam videre licet in aliquo Icosædro materiali. Quia uero AI, BK, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propof. 15. lib. 13. erunt anguli AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro IK; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & bases quoque AB, IK, æquales; Erunt anguli AIB, IBK, æquales) re-



29. primi.

8. primi.

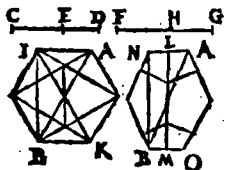
47. primi.

cti erunt, ideoque quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB. Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothefi, quadratis rectarum CD, CE. Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, sit maius segmentum ipsius CD, diuifæ extrema ac media ratione; Item IA, maius segmentum ipsius IB, similiter diuifæ; (Nam IB, subtrahit angulum pentagoni, cuius latus est, IA, latus Icosædri. Constat autem, rectæ subtrahentis angulum pentagoni,

8. *tertydec.* tagoni, si secetur extrema ac media ratione, maius segmen-
tum esse equale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit CE,
maius segmentum ipsi I A, lateri Icosaedri. Cum enim sit

2. *quartide.* ut C D, ad C E, ita I B, ad I A; erit quoque ut quadratum

22. *sexi.*



rectæ C D, ad quadratum re-
ctæ C E, ita quadratum rectæ
I B, ad quadratum rectæ I A;
Ac componendo, ut quadrata
rectarum C D, C E, ad qua-
dratum rectæ C E, ita quadra-
ta rectarum I B, I A, ad quadra-
tum rectæ I A: Ostensa sunt

14. *quinti.*

autem quadratis rectarum C D, C E, æqualia quadrata re-
ctarum I B, I A. Igitur & quadrato rectæ C E, æquale est
quadratum rectæ I A; ideoque rectæ C E, I A, æquales
sunt. Quod est propositum.

33. *primi.*

R v u s v s latera Dodecaedri opposita A N, B O, secen-
tur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta L M, & ipsa la-
tera recta N B, coniungantur. Quoniam igitur N L, B M,
æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13.
erunt quoque L M, N B, æquales & parallelæ: Est autem
recta L M, secans latera opposita bifariam, perpendiculari-
s ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & N B,
ad eadem perpendicularis erit; Ac proinde quadratum re-
ctæ propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum N B,
N A. Quare cum idem quadratum rectæ A B, æquale
sit positum quadratis rectatum F G, H G; æqualia erunt
quadrata rectarum N B, N A, quadratis rectarum F G,
H G. Ac propterea, cum H G, sit minus segmentum ipsius
F G, sectæ extrema ac media ratione; Item N A, minus
segmentum ipsius N B, hoc est, ipsius L M, similiter diui-
sæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit H G, mi-
nus segmentum ipsi N A, lateri Dodecaedri. Quod qui-
dem non aliter ostendemus, ac supra demonstrauius CE,
maius segmentum æquale esse ipsi I A, lateri Icosaedri. Si
recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam
sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmen-
tum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius seg-
mentum: Exit maius segmentum prioris lineæ latus Ico-
saedri;

47. *primi.*

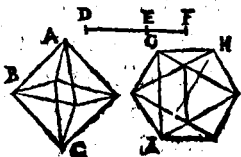
facdri; minus autem segmentum posterioris, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ & lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphaera descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem sphaeræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF.

Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius unum angulū subtendit recta GI; erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione; Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto, extrema ac media ratione. Quia uero quadratū diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, ut in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, ut quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: Est autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam cum sit ut GI, ad GH, ita DE, ad EF: Erit quoq;



8. tertijdec.

5. tertijdec.

47. primi.

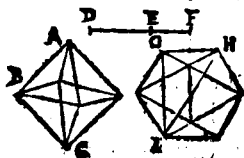
14. tertijdec.

2. quartide.

ut ena-

12. *sexti.*

ut quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF, & componendo, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadratū rectæ GH,



ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratū rectæ EF.

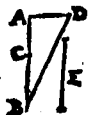
Et permutando, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Quadratum igitur rectæ GH, du-

plum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphaeræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

L I N E A recta AB, secta in C, extremâ ac media ratione constituat cum recta AD, quæ æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD; sitq; recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E, latus esse octaedri illius sphaeræ, in qua AD, uel AC, latus est Dodecaedri. Cū enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphaeræ, cuius minus segmentum AC, uel AD, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphaeræ potentia tripla maioris seg-



ris segmenti BC, nempe lateris cubi: Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphaeræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphaeræ. Quare cum diameter sphaeræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphaeræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

4. tersijdec.

14. tersijdec.

COROLLARIUM.

18. tersijdec.

QUONIAM uero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, ut constat ex ijs, quæ ostendimus ad propol. 4. lib. 13. cum BC, sit maius segmentum. & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratio ne diuisa: Perस्पicuū est, si linea quæuis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum esse latus Dodecaedri eiusdem sphaeræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

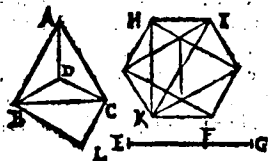
SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: latus Icosaedri eidem sphaeræ inscripti sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuisæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icosaedri HI K, eiusdem sphaeræ. Dico HI, rectam potentia esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta IK, diameter. Quia igitur HI, est maius segmentum re-

8. tersijdec.

5. tertijdec.
22. primi.
48. primi.

At $H K$, diuisa extrema ac media ratione; Erit quoque composita $K H I$, diuisa eodem modo in H , maiusque segmentum $H K$, & minus $H I$. Fiat ex rectis $B C$, $E F$, $F G$, triangulum $B C L$, ita ut $B L$, recta ipsi $B F$, & $C L$, ipsi $F G$,



2. quartide.

6. sexti.
4. sexti.
13. tertijdec.

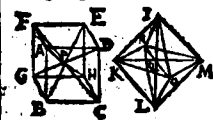
fit æqualis: Entque angulus L , rectus, quod recta $B C$, ponatur posse rectas $B L$, $C L$, hoc est, rectas $E F$, $F G$: Est autem & angulus $I H K$, rectus, ut propos. 23. huius lib. ostendimus; Estq; ut $B L$, ad $L C$, ita $K H$, ad $H I$. Igitur triangu-

la $B L C$, $K H I$, equiangula sunt: Ac propterea ut $K I$, ad $I H$, ita $B C$, ad $C L$; & permutando, ut $K I$, ad $B C$, ita $H I$, ad $C L$: Atqui $I K$, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri $B C$. Ergo & $H I$, latus Icosaedri erit potentia sesquialtera ipsius $C L$, hoc est, minoris segmenti $F G$. Si latus itaq; Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

C V B V S ad Octaedrum in eadē cum ipso sphaera descriptum est, ut superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item ut latus cubi ad semidiametrum sphaerae.

S I N T in eadem sphaera cubus $A B C D E F G H$, & Octaedrum $I K L M N O$, quorum centra P , & Q . Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiē Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphaerae.



Ductis enim ex centrīs P , & Q , ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines: (cum enim circuli descripti circa pyramides, seu cubi bases æquales, sint æquales,

ac

ac propterea æqualiter a centro sphaeræ distent; erunt linea perpendiculariter ex centro P. ad plana circulatorum, seu basium distarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propof. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. Quoniam autem idem circulus, cōplectitur & cubi quadratum, & Octaedri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & Octaedri a centro sphaeræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, ut una pyramis cubi ad unam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propof. 6. lib. 12. Ac proinde, ex his, quæ in scholio propof. 4. lib. 5. demonstrauimus, ut sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies uidelicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoque rursus, ex eodẽ scholio, ut cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

S I N T rursus in eadem sphaera cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK, sitque diametrum sphaeræ, seu Octaedri EG, & centrũ L. Auferatur autem ex A B, lateri cubi tertia pars A M; Item ex semidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam uero quadratũ I F K H, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propof. 16. huius lib. sesquialterum est quadrati B D, lateris cubi B C. Est autem & recta AB, rectæ B M, sesquialtera, ex constructione; reciprocabatur bases I F K H, B D, & altitudines A B, B M: Ac propterea parallelepipedũ super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale erit parallelepipedo super basim B D, & sub altitudine A B, nimirum cubo ABCD. Rursus quia recta EL, rectæ EN, tripla est, erit & parallelepipedũ super basim I F K H, & sub altitudine EL, triplũ parallelepipedũ super eandem basim, & sub altitudine E N, ut in scholio propof. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine EL, triplum est pyramidis I F K H E, ex corollario 1. propof. 7. lib. 12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo

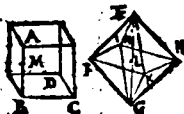
21. quarti.
decimi.

18. tertijdec.

34. undec.

I 1 2 super

16. quæritur



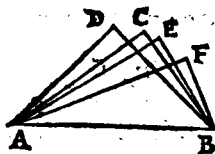
super basim I F K H, & sub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedum duplum est parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ex scholio propof. 14. lib. 12, quod & altitudo L N, dupla fit altitudinis E N: Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E. Aequale igitur erit parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cætesum quia parallelepipedum super basim I F K H, & altitudine B M, est ad parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ut altitudo B M, ad altitudinem L N, ex scholio propof. 14. lib. 12. Vt autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L: (Cum enim sit ut A M, ad M B, ita E N, ad N L, & componendo, ut A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoque permutando, ut A B, ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale est ostensum cubo A B C D; Et parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, æquale Octaedro E F G H I K. Igitur erit quoque ut cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, semidiametrum sphaerae. Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphaera descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIION.

13. serijdec.

Q V I A demonstratum est, diametrum sphaerae, in qua omnia quinque corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, quam si quadratum diametri ponatur 3. partium, eundem 2. fit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in scholio propof. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam, si quadrato diametri constituentur duo quadrata aequalia, quae proportionem habeant duplam, ex eodem scholio; maioris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partis, da

ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. Vt si diameter sphaera ponatur AB , ex cuius quadrato deiratur quadratum rectae AC , continens duas tertias partes quadrati diametri AB ; Vel si constituentur duo quadrata rectarum AC , BC , quadrato diametri AB , equalia, ita ut quadratum rectae AC , duplum sit quadrati rectae BC ; Erit recta AC , latus Tetraedri.



RURSUS cum ostensum sit, diametrum sphaerae potentia duplam esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri AB , dematur quadratum rectae AD , quod dimidium sit quadrati diametri AB ; Vel si constituentur duo quadrata rectarum AD , BD , quadrato diametri AB , equalia, & inter se proportionem habentia aequalitatis, secundum doctrinam scholij propof. 33. lib. 6. rectam AD , latus esse Octaedri.

DEINDE, quoniam docuimus diametrum sphaerae potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri AB , auferatur quadratum rectae BC , quod tertia pars sit quadrati diametri AB ; Vel si quadrato diametri AB , constituentur duo quadrata equalia rectarum AC , BC , ita ut quadratum rectae AC , duplum sit quadrati rectae BC ; iuxta doctrinam eiusdem scholij propof. 33. lib. 6. Lineam rectam BC , cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB , possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB , auferatur quadratum lateris Tetraedri AC , relinqui quadratum lateris cubi BC ; Quemadmodum e contrario, si ex quadrato diametri AB , tollatur quadratum lateris cubi BC , remanet quadratum lateris Tetraedri AC .

PRAETerea, quia si recta aliqua posuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum; Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphaerae, cuius diameter est recta prior linea; Constat, si quadrato diametri AB , exhibeantur, iuxta ea, quae in scholio propof. 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata equalia rectarum AE , BE , proportionem habentium, quam recta quavis extre-

ma ac media ratione diuisa ad maius segmentum: Rectam minorem BE, esse Icoſaedri latus.

POSTREMO, quoniam ſi recta quępiam poſuerit eorū aliquā rectam diuiſam extrema ac media ratione, & minus illius ſegmentum; Minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri eius ſphęrę, cuius diameter prior linea: Liqueſcit, ſi quadrato diametri AB, conſtituantur duo quadrata equalia reſtarum AF, BF, propor-

tionem habentium, quam quęcunque recta linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum: Minorem lineam BF, latus eſſe Dodecaedri.

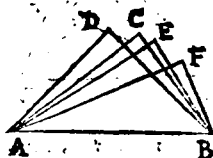
HACTENVS ergo Hypſicler, Campanus, & Franciſcus Candalla de comparatione ſolidorum regularium eidem ſphęrę impoſitorum ſcripſerunt: Sequentes autem quinque propoſ. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de proportionibus, ad hunc qui ſequitur, modum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI ſint quatuor lineę rectę continue proportionales, nec non & alię quatuor, ita ut ſit eadē antecedens omnium. Erit proportio tertię ad tertiam proportionis ſecundę ad ſecundam duplicata; & proportio quartę ad quartam eiufdem proportionis ſecundę ad ſecundam triplicata.

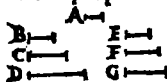
SINT quatuor rectę A, B, C, D, continue proportionales; nec non quatuor A, E, F, G, ita ut A, recta antecedens ſit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertię ad tertiam, eſſe duplicatam proportionis B, ad E, ſecundę ad ſecundam, & proportionem D, ad G, quartę ad quartam, eſſe

23 'quarti-
decimi.



esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundę ad secundam: Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin.

10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectę B, ad rectam A; habeat autem & quadratum rectę B, ad quadratum rectę A, duplicatam proportionem eiusdem proportionis re-



20. sexti.

ctę B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita quadratum rectę B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, ut recta F, ad rectam A, ita quadratum rectę E, ad quadratum rectę A: Et conuertendo, ut recta A, ad rectam F, ita quadratum rectę A, ad quadratum rectę E. Quoniam igitur est quadratum rectę B, ad

quadratum rectę A, ut recta C, ad rectam A; & quadratum rectę A, ad quadratum rectę E, ut recta A, ad rectam F; Erit ex

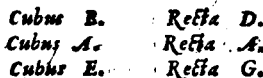
equo, quadratum rectę B, ad quadratum rectę E, ut recta C, ad rectam F: Est autem proportio quadrati rectę B, ad quadratum rectę E, duplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & proportio rectę C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectę B, ad rectam E. Quod est primum,

20. sexti.

R v r s v s cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectę B, ad rectam A; habeat autem & cubus rectę B, ad cubum rectę A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectę B, ad rectam A; Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus rectę B, ad cubum rectę A.

33. undec.

Eadem ratione erit ut recta G, ad rectam A, ita cubus rectę E, ad cubum rectę A; Et conuertendo ut



recta A, ad rectam G, ita cubus rectę A, ad cubum rectę E. Quia ergo est cubus rectę B, ad cubum rectę A, ut recta D, ad rectam A; & cubus rectę A, ad cubum rectę E, ut recta A, ad rectam G; Erit ex equo, cubus rectę B, ad cubum rectę E, ut recta D, ad rectam G: Est autem proportio cubi rectę B, ad cubum rectę E, triplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & proportio rectę D, ad rectam G,

33. undec.

triplicata est. proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I O N.

Hoc idem demonstramus ad propof. lib. 3 de quocumque numero continus proportionalibus duorum ordinum ab uno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

Q V A D R A T V M lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

I N triangulo æquilatere A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, recta perpendicularis A D, quæ bifariam secabit latus B C, ut in coroll. propof. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. Inveniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E.

Cum enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, ut perspicuum est ex scholio propof. 41. lib. 1. Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. Quoniam uero quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam late-

ris

13. sexti.



17. tertij.

20. sexti.

is AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

ITAQUE, si in triangulo æquilatèro perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. Oñtensum enim est, quadratum rectæ B, quæ media proportionalis est inter A D, & D B, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadè sphæra describantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiusvis A B C D, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta diuidens F G, latus b. sariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum A C ad triangulum E F G, ut latus trianguli E F, ad perpendicularem E H.



Posita enim inter E, H, F H, media proportionali I K, cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum sit quadrati lateris cubi A B; sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, & dimidio eius F H, eo, quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F. Erit rectangulum sub B F, F H, æquale quadrato lateris A B; Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc est, tres rectæ F H, A B, E F, continue erunt proportionales: Sūt autem & tres rectæ F H, I K, E H, continue proportionales,

ex

18. tertidec.

1. sexti.

17. sexti.

28. quarti.
decimi.

ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit FH ,
erit proportio rectæ EF , ad rectam EH ,
tertiam ad tertiam, proportionis rectæ AB ,
 FH . ad rectam IK , secundæ ad secundam du-
 AB . IK . plicata. Quare cum & quadratum AC , re-
 EF . EH . ctæ AB , ad quadratum rectæ IK , hoc est,
ad triangulum EFG , (est enim ex coroll. propos. 29. huius
lib. quadratum rectæ IK , æquale triangulo EFG ,) pro-
portionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB , ad
rectam IK ; Erit quadratum cubi AC , ad triangulum
Tetraedri EFG , ut latus EF , ad perpendicularem EH .
Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphaera descri-
bantur, &c. Quod erat demonstrandum.

20. sexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquial-
terū est axis, seu altitudinis ipsius: Axis ue-
ro, siue altitudo Tetraedri potētia sesquiter-
tia est lateris cubi in eadē sphaera descripti.

3. quarti.



47. primi.

12. tertii dec.

SIT Tetraedri triangulum ABC , & altitudo, seu axis
Tetraedri DE , latusque cubi eiusdem sphaeræ F . Dico latus
Tetraedri AB , esse potentia sesquialterum axis DE : Axem
uero DE , potentia sesquitercium lateris cubi F . Nam circa
triangulum descripto circulo ABC , ad cen-
trum D , in quod uidelicet cadit axis DE , ut cō-
stat ex propos. 13. huius lib. ducatur AD , se-
midiameter, & AE , latus Tetraedri. Quia
igitur quadratum lateris AE , hoc est, lateris
 AB , æquale est quadratis rectarum AD ,
 DE , & triplū quadrati semidiametri AD ; Fit, ut posito qua-
drato lateris AB , seu AE , partium 3. quadratum rectæ
 AD , sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum qua-
dratum axis DE , talium partium 4. Quapropter qua-
dratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis
Tetraedri.

Q. v. o.

QUONIAM uero latus Tetraedri A.B., potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris A.B.; Oñtensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

18. tertijdec.

COROLLARIUM. I.

QUIA uero, posito quadrato lateris A.B., partium 6. quadratum diametri sphaerae talium partium est 9. quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri. Earundem uero partium 4. ostensum est quadratum axis DE; perspicuum est, diametrum sphaerae potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde, cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialtera enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, ut in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 15. lib. 13.

19. tertijdec.

20. sexti.

COROLLARIUM. II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphaerae inscripti, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia uidelicet tam latus trianguli aequilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex uno angulo ad latus oppositum deductae; quam ex hac praepos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

21. quarti-decimi.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

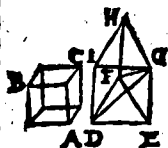
CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphaerae inscripti.

DESCRIBANTUR in eadem sphaera cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habes cum Tetraedro altitudinem. Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad lat^{us} oppositum. Ut autem lat^{us} Tetraedri

22. quarti-decimi.

ad

ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 3. huiuslibet. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEF.



GHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEF GHI, ut huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quae ad propos. 9. lib. 12. demonstraui, aequalia erunt prismata ABC, DEF GHI.

cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEF GHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEF; ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiusdem Tetraedri DEF. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphaerae inscripti. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Vnde prisma, eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, aequale est cubo in eadem sphaera, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, aequalem esse prismati DEF GHI, &c.

ELEMENTI DECIMIQUARTI FINIS.



E V C L I D I S

E L E M E N T V M XV.

ET SOLIDORVM QVINTVM,

ut nonnulli putant. Vt uero alij, Hyp-
ficlis Alexandrini de quin-
que corporibus.

LIBER SECVNDVS.



PROBL. I. PROPOS. I.

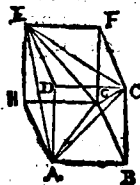
I.

IN dato cubo pyramidem describere.



IN cubo dato $A B C D E F G H$, oportet describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab uno eius angulo, nempe ab E , ducantur in basibus tribus ipsum con-
stituentibus tres diametri EA , EG , EC , a quarum extremitatibus A , G , C , similiter diametri ducantur AG , GC , CA , in reliquis tribus ba-

sibus. Quoniam igitur diametri quadratorum equalium equalia sunt, quod potentia duplæ sunt laterum equalium quadratorum, ut in scholio propof. 47. lib. I. demonstrauimus; perspicuum est, quatuor triangu-
la ACE , GAC , GAE , GCE , ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se equalia; Ac propterea pyrami-
dem,



dem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quia uero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus: Quod faciendum erat.

2.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro ABCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bisariis in E, F, G, H, I, K, & duobus duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum E I



.I

4. primi.

KG, quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt. Quoniam uero latera AE, AH, trianguli AEH, & equalia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod sint dimidia rectarum equalium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, & equalis, quod sint anguli triangulorum & equaliterum ABD, ACD: & equalis erunt bases EH, GH. Eademque ratione & equalis erunt rectae EH, HI, & reliquae eodem modo. Quare recta octo triangula & equaliterum sunt, & & equalia inter se; ideoque octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex definitione 31. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

QUONIAM uero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt & equalia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, ut in coroll. 1. propos. 12. lib. 13. demonstrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bisariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD; & prisma HIKGAB; nec non

non in pyramidem $BBFI$, & prismam $BFCGKI$; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prismam prismati: Eodemque modo reliqua quadrata $GHIF$, $FKHE$, diuidunt bifariam eandem pyramidem $ABCD$. Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

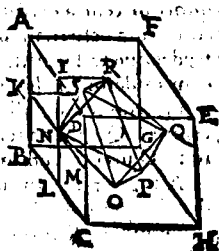
3. duodec.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo octaedrum describere.

3.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH . Diuidantur latera basis $ABCD$, bifariam in punctis I, K, L, M , quæ connectantur rectis IL, KM , secantibus sese in N , puncto, quod quidem centrũ est quadrati $ABCD$, ut constet ex demonstratiõne propof. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S . Et tunc igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK , &c. æquales dimidijs lateribus cubi, seu quadratorum, ut perspicuum est ex prædicta demonstratione propof. 8. lib. 4. Postremo si præfata centra coniungantur duodecim rectis $NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS$; constituta erunt octo triangu-
la, quorũ quidẽ quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN , supra planum $NOQR$; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO , infra idem planum consistunt. Quoniam uero latera IN, IR , trianguli INR , æqualia sunt lateribus KN, KS , trianguli KNS , quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, ut dictum est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum NI, IR , parallele sint rectis BA, AF ; angulus $NI R$, æqualis sit recto angulo KAF , in quadrato AG , eademque ratione angulus NKS , angulo

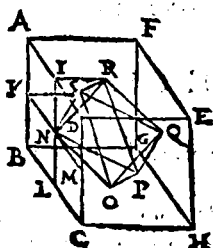


10. undec.

angulo

4. primi

gulo recto $I A F$, in quadrato $A E$; Erunt bases $N R$, $N S$, æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum e centrīs ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, ut quælibet duæ



ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus uidelicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim uides duas rectas $N I$, $R I$, ductas esse ad I , dimidium lateris $A D$, quod cōmune est quadratis $A C$, $A E$, quorum centra sunt puncta N , & R : Ita quoque duæ rectæ $N K$, $S K$, ductæ sunt ad K , dimi-

dium lateris $A B$, quod commune est quadratis $A C$, $A G$, quorum centra existunt puncta N , & S , &c. Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatera sunt, & equalia inter se; deinde Octaedrum constituunt $N O Q$, $S P$; Quod quidem ex definit. 3. lib. 1. intra cubum est descriptum, cum omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centrīs. Quam ob rem in dato cubo, Octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

1. quintide

2. quintide

A L I T E R. In cubo dato inscribatur pyramis; In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque sit, quod propositum. Cum enim ex demonstratione propof. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera uero pyramidis, ex demonstratione propof. 1. huius lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri, perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi, atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

C O R O L L A R I U M.

Q U I A uero diametri Octaedri in cubo descripti $N Q$, $R O$, si ducantur, se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. propof. 14. lib. 13. quæ quidem coniungit centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum se se mutuo bisariam, ut docuimus coroll. 7. propof. 13. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, ut hic ostendimus, diuidere.

P R O B L.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

IN dato octaedro cubum inscribere.

DATUM octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum uidelicet uertices sunt sex anguli octaedri, & quælibet duæ octaedrum constituunt sit una earum pyramis ABCDE, cuius basis ABCD, quadratum, triangula uero æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triāgulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propof. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habeant communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; Et denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulum EMN, hoc uero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sunt. Quia uero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP; Est autem ut EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, tripli erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportionem secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; æqualis erit angulus MLO, an- gulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, ut ostendimus in coroll. 1. propof. 14. lib. 13. & in propof. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non se- cus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam uero tam planum per LO, L M, quam per NM, NO, ductum, parallelum est plano



18. quartide
2. sexti.

10. undec.

15. undec.

K K ABCD;

A B C D, ipsa quoque inter se parallela erunt, atque adeo, cum conueniant in punctis M, & O, unum planum efficiet, ex scholio propof. 16. lib. 1. Quocirca LMNO, quadratū



4. primi.

erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera E L, E K, trianguli E L K, æqualia sint lateribus E O, E K, trianguli E O K, & anguli quoq; ipsis cōtēti, & quales, quod recta E K, ex angulo E, p centrū K, trianguli æquilateri E A D, ducta bifariā secet angulū A E D, per coroll. ppos. 12 lib. 3. Erunt & bases K L, K O, æquales, hoc est, recta L O, bifariam secabitur in K.

Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac proinde rectæ GL, GM, HM, HN, I N, I O, K O, K L, cum sint laterum quadrati L N, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, & quales erunt & rectæ GH, HI, I K, A G, centra G H, I, K, connectentes. Quia uero hæ rectæ in plano existunt quadrati L N, angulosque comprehendunt rectos; (cum enim anguli L K G, G K I, I K O, duobus sint rectis æquales; Sint autem L K G, I K O, per coroll. 2. propof. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus G K I; Eademque ratione recti erunt anguli K G H, G H I, H I K.) quadratum erit G H I K, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 1. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubū descripsimus. Quod faciendū erat.

4. primi.

13. primi

5.

6.

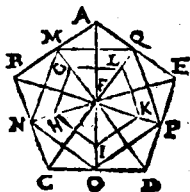
PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrū inscribere.

S i r ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continentur, quarum uidelicet bases sunt pentagona

ex

ex quinque Icosaedri lateribus composita, uertices uero, duodecim anguli Icosaedri, una pyramis ABCDEF, cuius basis pentagonum ABCDE, triangula uero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, sintque horum triangularum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rursus ex uertice F, per centra triangularum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ, ex scholio propof. 12. lib. 3 bifariam secabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita ut decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint: quæ cum



angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, æquales quoque erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFP, QFM, æquales erunt; quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangularum æquilaterorum, equalium ad bases oppositas demissæ. Cum enim latera FB, BM, trianguli FBM, lateribus FB, BN, trianguli FBN, æqualia sint, contineantq; angulos æquales, nempe triangularum æquilaterorum; erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam uero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL, nimirum semidiametri circularum equalium triangula æquilatera equalia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, ut demonstratum est; Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. Rursus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quæ anguli BNM, MNO, ONC, æquales sunt duobus rectis, Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademq; ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & equiangularum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, existens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter secantur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales sint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplæ sunt ipsarum

4. primi.

8. primi

4. primi.

4. primi.

13. primi.

4. primi

Kk 2 GM,

2. *sexti.* GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propof. 18. lib. 1. parallelae erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ, QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis aequalibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter fe aequales erunt. Quia uero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela sunt plano pentagoni MNO PQ, per rectas MN, NO, OP, ducto, conueniuntq; in recta HI, ipsa unum planum efficient, ex scholio propof. 16. lib. 1. Eodemque modo ostendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum constituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL pentagonum est aequilaterum & equiangulum, cum & latera habeat aequalia & angulos. Quod si eadem arte in reliquis undecim pyramidibus Icofaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona aequilatera & equiangula: quae cum latera habeant communia, aequalia inter se erunt. Quamobrem duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icofaedro est descriptum, cum uiginti anguli Dodecaedri in centris uiginti basium Icofaedri consistant. Quapropter in dato Icofaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

ITAQUE cum omnes rectae ex centro Icofaedri ad centra basium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint aequales; Cum enim ex coroll. lemm. 1. propof. 10. lib. 14. perpendiculares sint ad plana circulorum aequalium bases Icofaedri circumscribentium, atque adeo eorundem distantiae existant a centro sphaerae, seu Icofaedri; aequales erunt inter se, ex lemm. 2. eiusdem propof. 10. lib. 14. Idem erit centrum Icofaedri, atque sibi inscripti Dodecaedri.

0.
5.

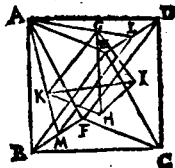
PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidē describere.

PRÆMIIS describenda sit in octaedro ABCDEF. In pyramide octaedri superiori ABCDE, sumantur G, & H, cen-

H, centra triangulorū ex aduerso sibi respondentiu A E D, B E C; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AFB: quę quidem centra coniungantur sex rectis G H, G I, G K, H I, H K, I K, ut fiat pyramis H I K G. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectę AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M per scholiū propof. 12. lib. 13. coniungaturq; recta LM, quę ipfi BE, uel FD, equalis & parallela erit, cum EL, BM; Item DL, FM, rectę æquales sint, & parallelę, nimirū dimidia laterum D E, B F, oppositorum in quadrato E F. Quoniam uero rectę AL, A M, sectę sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod A G, A K, duplę sint ipsarum GL, KM, ex coroll. propof. 18. lib. 14. Erunt GK, LM, parallelę; Ac propterea, per coroll. propof. 4. lib. 6. triangula ALM, AGK, similia. Quare erit ut AL ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, ut AL, ad AG, ita LM, ad GK: Est autem AL, ipsius AG, sesquialtera, quod GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, diu tertię. I. utur & L M, hoc est, ipsi æqualis D F, sesquialtera erit ipsius G K. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentium sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem H I K G, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoque Tetraedrum constitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 1. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

ALITER. In octaedro dato inscribatur cubus, & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; Et in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.



33. primi.

2. sexti.

4. sexti.

18. quarti.
decimi.

1. quinside.
1. quinside.

COROLLARIUM. I.

9. undec.

15. undec.

QVIA uero ostensum est, utramque GK , DF , parallelam esse ipsi LM ; ac propterea & GK , ipsi DF , atque adeo ipsi BE , parallelam esse: Atque eadem ratione KH , ipsi FC , EA , parallelam esse; Atque idcirco planum GKH , per GK , KH , ductum, parallelum esse plano DFC , per DF , FC , necnon & plano BEA , per BE , EA , ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singulas uidelicet binis oppositis.

COROLLARIUM. II.

PRÆTEREA, cum octaedrum circumscribat & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centrīs basium octaedri constituantur; Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphaerae circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, ut constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphaerae sesquialtera axis tetraedri in ea sphaera descripti, per coroll. 1. propos. 21. lib. 14. uel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quae centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deductae.

o.

7.

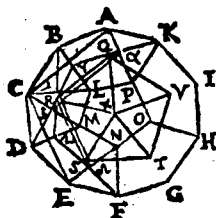
PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis $ABLPK$, $PKIHO$, $OHGFN$, $NFEDM$, $MDCBL$, $LMNOP$, quorum centra Q , R , S , T , V , X , quælibet duo proxima, rectis iungantur QR , RS , ST , TV , VQ , QX , RX , SX , TX , VX : Et ex angulis K , D , quos subtendant rectae AP , CM , per centra Q , R , recte ducantur KY , DY , quae per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bisariam diuident latus oppositum BL , & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y , conuenient: Diuidunt autem & rectae eadem YK , YD , rectas AP , CM , bisariam & ad angulos rectos in α , β , ex 1. coroll. eiusdē propositionis, quod

& arcus

& arcus AKP, CDM, circularum circa pentagona descri-
ptorum bisariam diuidant, (constat enim rectas AK, PK;
Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) Igitur $A\alpha$, $C\beta$, 28. *tertij.*
parallelæ sunt rectæ BY; atque adeo & inter se parallelæ : 28. *primi.*
Sunt autem & æquales nempe di-
midia rectarum AP, CM, quæ æ-
quales sunt, cum late a KA, KP,
lateribus DC, DM, æqualia sint,
angulosque contineant æquales.
Rectæ ergo ipsas connectentes
 AC , $\alpha\beta$, æquales erunt, & paral-
læ. Non aliter ostendemus, si
ex angulis B, F, quos subtendant
rectæ CL, EN, per centra R, S, re-
ctæ ducantur BZ, FZ, cōnectanturque rectæ CE, $\gamma\delta$, æqua-
les esse ipsas CE, $\gamma\delta$: Sunt autem AC, CE, inter se æquales,
cum contineant angulos æquales æqualibus lineis compre-
hen- os. Igitur & $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter, cū
& rectæ $Y\alpha$, $Y\beta$, $Z\gamma$, $Z\delta$, æquales sint. (Nam YQ , YR ,
 ZR , ZS , perpendiculares, distantiz sunt æqualium rectarum
 BL , DM , a centris Q, R, S, circularum æqualium,
qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, atq; adeo
æquales. Item $Q\alpha$, $R\beta$, $R\gamma$, $S\delta$, distantiz sunt rectarum
æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulo-
rum æqualium, ideoque æquales; Ac proinde & totæ $Y\alpha$,
 $Y\beta$, $Z\gamma$, $Z\delta$, æquales erunt,) Erunt quoque anguli $\alpha Y\beta$,
 $\gamma Z\delta$, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ , YR , ZR ,
 ZS , æquales sint; æquales quoque erunt rectæ QR, RS,
centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales
demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum co-
pulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV,
VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N,
O, P, constituta, æquilatera erunt, & equalia. Quod
si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dode-
caedri, similia triangula construantur; (Habet enim
Dodecaedrum uiginti angulos solidos.) quæ quidem latera
habent communia, descriptum erit Icosædrum intra
Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosædri
constant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato



ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

o.
8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubū describere.

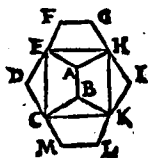
28. tertij.

9. undec.
33. primi.
7. undec.

4. primi.

22. tertij.
34. primi.

PROPONANTUR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus, $ABCDE$, $EFGHA$, $AHIK B$, $BKLMC$, convenientia ad latus AB ; duo quidem $ABCDE$, $ABKIH$, & m latus idem commune AB ; alia autē duo $AEFGH$, $BCMLK$, & m angulos EAH , CBK . In his uero pentagonis subtrahantur angulis A, B, D, I , rectæ EH , CK, CB, HK , quadrilaterum efficientes $EHKC$. Quoniam igitur rectæ AE, BC , æquales, auferunt ex circulo pentagonum $ABCDE$, circumscribente arcus æquales; Erunt, ex scholio propof. 27. lib. 3. rectæ AB, CE , parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt AB, HK . Quare, & EC, HK , inter



se parallelæ erunt; Ac propterea rectæ EH, CK , quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, in eodemq; cum ipsis planis; Ideoq; parallelogrammum erit $EHKC$; quod dico esse æquilaterum. Cum enim omnia latera $AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK$, æqualia sint, angulosque contineant æquales, ex hypothesis; æquales erunt bases EH, HK, KC, CE . Quia uero planum $ECKH$, productum communem sectionem in sphaera facit circulum, per lemma 1. propof. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK , descriptum; Erunt tam anguli oppositi E, K , quam C, H , duobus rectis æquales; Ac propterea cum oppositi E, K , sint æquales, nec non & oppositi C, H , erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H , recti. Quare EK , quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtrahantur eodem ordine; constitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia, eo quod eorum latera æquales angulos pen-

los pen-

los pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subrendentia æqualia sint; cubum constituent intra Dodecaedrū descriptum, propterea quod duodecim eius latera iaceant in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, cuiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis resideant. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.

4. primi.

COROLLARIUM.

Hinc fit, rectam, quæ subrendit unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Oñsum enim est, C B, ipsi A B, esse parallelam.

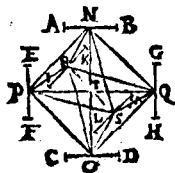
PROBL. 9. PROPOS. 9.

o.

9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SUMANTUR in Dodecaedro; cui inscribendum sit octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propof. 17. lib. 13. nimirum A B, C D; E F, G H, I K, L M, quæ bifariam secantur in N, O, P, Q, R, S. Rectę igitur N O, P Q, R S, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphaeræ bifariam, & ad angulos rectos diident, per coroll. 3. propof. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoque erunt earum dimidiatae partes N T, O T, P T, Q T, R T, S T. Quo



circu duodecim rectę subrendentes duodecim angulos rectos N T P, P T O, O T Q, Q T N, N T R, R T P, P T S, S T Q, Q T R, R T O, O T S, S T Q, quales sunt N P, P O, O Q, Q N, N R, R P, P S, S Q, Q R, R O, O S, S N, æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo trianguia N R P, P R O, O R Q, Q R N, O S P, P S N, N S Q, Q S O, æquilatera, & æqualia erunt; constituentque octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli

4. primi.

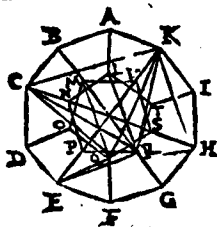
guli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum describimus. Quod faciendum erat.

o.
10.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MQQSV; BCDOM, DEFQQ, FGHSQ, HIAVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C,



K, R, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At uero K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, ut

sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphaeræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; quoniam Dodecaedrū in sphaera describitur; si planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphaera circulus, per lemma 1. propos. 1. lib. 14. Ac propterea angulus CAH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus rectos esse angulos CRH, ARE, KQE, RQM, CQH. Quo circa cū in omni triangulo rectangulo quadratū lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Aequalia erunt quadrata rectarum CK, AH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum K R,

17. tertijde.

31. tertij.

47. primi.

KR, RE, & quadratis rectarum K Q, QE, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualibus KH, RH, RE, QE, Q M, & Q H; (Hæ enim rectæ cum subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales sunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, K Q, R Q, & C Q; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, equilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraëdron componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedron. Itaque in dato Dodecaedro Pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

4. primi.

ALITER. In proposito Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit.

8. quintide.
1. quintide.

PROBL. II. PROPOS. II.

O.
II.

IN dato Icosaedro cubum describere.

DESCRIBATUR in dato Icosaedro Dodecaedri, & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; anguli uero Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam obrem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

5. quintide.
8. quintide.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

O.
12.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

IN dato Icosaedro cubus describatur, & huius cubo pyramis, factumque

11. quinti.
decimi.

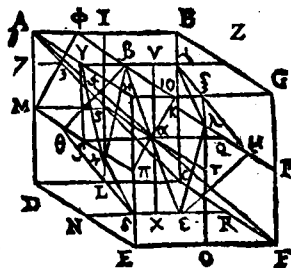
11. quintide.
1. quinside.

Quamque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi tangent centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi uniantur, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri; Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrū. Secentur singula latera bisariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mπ, KP, NR, nusquā



inter se cbeuntibus, quæ rursus bisariam secentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ se mutuo in cetro a, bisariam secant, & ad angulos rectos, ut in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, suntque lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia re-
ctarum YZ, Mπ, secentur

extrema ac media ratione in β, γ, δ, κ, ut sint maiora segmēta, Yβ, Zγ, Mδ, πκ, ductis rectis Yρ, Yκ, ββ, βκ. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & ρκ βV, segmenta minora rectarū equalium YV, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yρ, πκ, tripla quadrati rectæ Yβ. Quare, cum quadratis rectarum Yρ, πκ, æquale sit quadratum rectæ Yκ, quod angulus Y ρ κ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, recta est ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum; rectus erit an-
gulus

4. tertiydec.

47. primi

29. primi

4. donec.

gulus $\beta Y\kappa$, ex defin. 3. lib. 11. Ac propterea quadratum rectæ β , æquale quadratis rectarum Y , $Y\beta$, existens, quadruplum erit quadrati rectæ $Y\beta$. (quia nimirum quadrata rectarum Y , $Y\beta$, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ $Y\beta$, cum quadratum rectæ Y , triplum sit ostensum quadrati rectæ $Y\beta$.) Ideoque cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatâ, dupla erit recta β , rectæ $Y\beta$. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut in his numeris 1.2.4. apparet: Est autem $\&$, dupla ipsius ρ , quod minora segmenta ρ , ρ , rectarum æqualiū $M\rho$, $\pi\rho$, æqualia sint. Erit igitur ut $Y\beta$, ad ρ , ita β , dupla ipsius $Y\beta$, ad ρ , duplam ipsius ρ : Est autem $Y\beta$, maius segmentum ad ρ , rectam minori segmento βV , æqualem, ut tota ad maius segmentum. Ergo $\&\beta$, ad ρ , erit ut tota ad maius segmentum. Ac proinde $\&\beta$, erit maius segmentum rectæ β , sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus $\&\beta$, maius esse segmentum rectæ β , extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta Y . Quare æquales erunt β , β , constituentes triangulum isosceles β , simile illi, quod ab Euclide constructum est propof. 10. lib. 4. ut postea demonstrabimus; Ac proinde $\&\beta$, erit latus pentagoni in circulo triangulum β , circumscribente descripsi, ut perspicuum est ex 11. propof. lib. 4.

INTELLIGATUR iam planum trianguli β , extendi, (ducta per β , recta $\beta\phi$, ipsi $M\pi$, parallela,) per parallelas $M\pi$, $\phi\iota$, ut sit planum extensum $\phi\pi$, occurrens diametro AC , quadrati $ABCD$, in puncto 3. cubi uero diametro AF , in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi $A\phi$, parallela, connectaturque $M\delta$, quæ parallela est utrique $A\phi$, 73. Quoniam igitur, per coroll. propof. 4. lib. 6. triangulum $A73$, simile est triangulo AMS ; ac proinde ut AM , ad MS , ita est $A7$, ad 73. Sunt autem AM , MS , æquales, nēpe dimidia cubi latera; Erunt quoque $A7$, 73. æquales Eadem ratione erit ut MA , ad $A\phi$, ita $M7$, ad 73. Est autem $A\phi$, maius segmentum rectæ MA , diuisæ extrema ac media ratione. (quod æquales sint $A\phi$, $Y\beta$, nec non $\&MA$, YV , dimidia cubi latera. Igitur $\&73$, hoc est, 7A, maius segmentum erit rectæ $M7$, extrema ac media ratione sectæ; Ac propterea tota MA , diuisa erit extrema ac media ratione, in 7. mai-

47. primi.

20. sexti.

15. quinti.

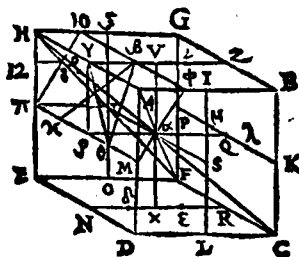
33. primi.

4. sexti.

34. primi.

5. tertijdec.

2. *sexti.* sique segmentum erit M 7. Atqui ut M 7. ad 7 A, ita est S 3. ad 3 A. Secta est ergo & S A, extrema ac media ratione in
33. *primi.* 3. maiusque segmentum est S 3. Quia uero S α T, parallela est ipsi M π , quod & recta ducta π T, π qualis & parallela sit ipsi MS; si per S α T, planum ducatur parallelum plano
17. *undec.* ϕ π , ducto per M π , secabuntur rectæ AS, A α , in eadē rationes, in punctis 3. & 4. Atq; idcirco, cum AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, lecta erit eodem modō A α , semidiameter cubi, in 4. maiusq; segmentum erit α 4. Iisdem argumentis ostēdemus, ducta diametro H F, quadrati EFGH, & diametro cubi H C, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione a plano ϕ π , ut perspicuū est,



si cubus inuertatur, ut in hac figura secūda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figure, licet bases cubi sedes mutauerint, ita ut quadratum AC, locū quadrati HF, & quadratum HF, locū quadrati, AC, obtineat in hac secunda figura. Ostēdamus nūc,

si rectæ iungātur θ 4. β 4. β 9. κ 9. rectilincū β 4 κ θ 5. in plano ϕ π , existēs, pentagonum esse ϕ quilaterū, & ϕ quiāgulū.

INVERTATUR rursus cubus, ut quadrata ADEH, ABGH, quę nimirū continent triangulū β θ κ , siue planum ϕ π , hunc situm habeant, quę mōstrat tertia hæc figura. Deinde in plano ϕ π , recta coniuncta θ 4. extēdatur usq; ad rectam ϕ 10. in punctū 13. Quoniā igitur ducta recta K P, & iūctis rectis M P, π P, planū M P, parallelū est planō AG, (quod & rectę PK, KM, parallelę sint rectis GB, BA,) secatq; cubū bisatiā; ideoq; per cētrū α , trāsīt, per ea, quę in scholio propos 39 lib. 11. ostēsa sunt; si per rectas α 4 A, δ 4 13. planū extēdatur, fient α θ , A 13. communes sectiones planorū M P, AG, parallelę; Ac proinde triangula α 4. A 13 4. ϕ quiāgula erūt; Eritq; ut α 4. ad 4 A, ita 4. ad 4 13. Quare cū α A, in 4. secta sit extrema ac media rōne, ut ostēdimus, eodē modo erit

15. *undec.*

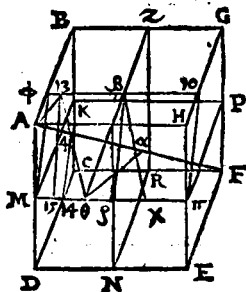
32. *undec.*

16. *undec.*

4. *sexti.*

do erit secta Δ 13. in 4. Rursus plano NZ, per centrū α , tran-
seunti, parallelū ducatur planū per punctū 4. ex scholio propo-
siti 15. lib. 11. secans planū $\phi\pi$, recta 4 14. Est autē eidē plano
NZ, parallelū planum DB.

Rectæ igitur αA , ρM , in
eisdem rationes secabūtur
in punctis 4 & 1. Quocir-
ca & ρM , in 14. secta erit
extrema ac media ratione,
minuſq; erit segmentū 14
M, ideoque æquale minori
 $\rho\Delta$, ipsius $M\rho$. Quare cum
ex ρ 14. maiori segmentō ip-
sius ρM , auferatur $\rho\Delta$, mi-
nus segmentū; Erit, ut de-
monſtrauiſmus ad propoſi-



5. lib. 13. ρ 14. diuſa in 3, extrem 1 ac media ratione, maiuſq;
segmentū erit $\rho\Delta$. Postremo acta p 13. recta 13 15. rectæ 4 14,
parallela, secabūtur rectæ Δ 13. Δ 15. proportionaliter; Ac pro-
inde & Δ 15. secta erit in 14. extrema ac media rōne, maiuſq;
segmentū erit Δ 14. Quapropter erit ut $\rho\Delta$, maius segmentum
ad Δ 14. minuſ, ita Δ 14. maius ad 14 15 minuſ: Vt autē
 Δ 14. ad 14 15. ita est tota Δ 1. ad Δ 14. maius segmentū. Igit
erit ut $\rho\Delta$, ad Δ 14. ita Δ 15. ad eandē Δ 14. Ac propterea re-
ctæ $\rho\Delta$, uel $\rho\kappa$, & Δ 14. æquales erūt. Quā uero planū NZ, &
planū illi parallelū per 4 14. ductū, secatur plano $\phi\pi$; erunt
cōſeſſiones $\beta\rho$, 4 14. parallelæ, ideoq; & 13 15. $\beta\rho$, paralle-
læ erūt, anguluſq; externuſ $\beta\rho\kappa$, interno 1 15 Δ , æqualiſ.
Cū igitur & latera $\beta\rho$, $\rho\kappa$, lateribus 13 15. 15 Δ , ſint equalia,
A Equales erūt quoq; rectæ $\beta\kappa$, 13 Δ ; Ac proinde & earum
segmenta maiora $\Delta\kappa$, Δ 4. (Oſteſum n. eſt $\Delta\kappa$, eſſe maiuſ segmē-
tū ipſiuſ $\beta\kappa$.) æqualia erūt. Eandē arte & β 4. ipſi $\beta\gamma$, in prima
figura oſtendet equaliſ, ſi ſimili ſitu triagulū Iſoſceles forme-
tur ſup baſin $\beta\gamma$, cui⁹ uertex cōſtitat in pūcto, qđ rectā 18. di-
uidit extrema ac media rōne. Eodēq; modo eundē $\Delta\kappa$, $\beta\gamma$, æ-
quales erūt κ 9. β 9. A Equilaterū ergo eſt pētagonū β 4. Δ 9.
Sed & equiagulū, ut mox oſtēdem⁹. Si igitur hac arte duodecim
triagula, nimirū ad ſingulaſ rectaſ $M\pi$, YZ , NR , IL , ϕO , KP ,
bina ipſi β $\Delta\kappa$, ſimilia, & equalia cōſtruat (Ita n. ad $M\pi$, duo
hu. uſ. nod

15. undec.

17. undec.

2. ſexti.

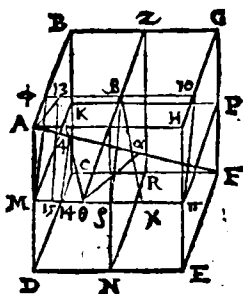
2. quartide.

16. undec.

19. primi.

4. primi

huiusmodi triangula uides $\beta\theta\kappa$, $\beta\theta\kappa$ & ipsoꝝ officio duodecim pentagona ipsi β 4. θ κ 9. similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cuius duodecim

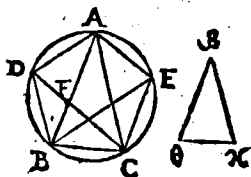


quidem anguli in sex rectis lineis, $M\pi$, YZ , NR , IL , ξO , KP , bini nimirum in singulis, octo uero reliqui in octo semidiаметris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ ipsas extrema ac media ratione diuidunt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiаметris $A\alpha$, $H\alpha$, secundæ fi-

gure; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicitur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cū non omnes eius anguli uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo uero in punctis, quæ octo semidiámetros cubi extrema ac media ratione secant, residant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem triangulum $\beta\theta\kappa$; cuius basis $\theta\kappa$, maius segmentum existit utriusque lateris $\beta\theta$,



$\beta\kappa$, extrema ac media ratione diuisi, simile sit illi, quod Euclides construxit propof. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum isosceles ABC , quale Euclides construere docet propof. 10. lib. 4. circulus $ADBCE$, diuifisq;

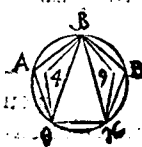
indivisisque angulis ABC, ACB , bisariam rectis BE ,
 CD , perficiatur pentagonum equilaterum, & equi-
 angulum $ADBC E$, ut propos. 11. lib. 4. tradidimus,
 secantque se mutuo recte AB, CD ; in F . Quoniam
 ergo AB , in F , secatur extrema ac media ratione, ma-
 iusque eius segmentum est AF , æquale lateri BC ;
 Erit ut $A B$, tota ad maius suum segmentum BC , ita
 $\beta \alpha$, tota ad maius suum segmentum $\alpha \theta$; Eodemque
 modo, ut tota AC ad maius segmentum CB , ita $\beta \alpha$,
 tota ad maius segmentum $\alpha \theta$: Est autem quoque ut
 AB , ad AC , ita $\beta \theta$, ad $\beta \alpha$, utrobique enim est propor-
 tio æqualitatis. Triangula igitur $\beta \theta \alpha, A B C$, pro-
 portionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqua-
 lesque erunt anguli, B ; Item α, C , & β, A ; pro-
 ptereaque uterque angulorum θ, α , duplus erit anguli
 β ; & triangula $\beta \theta \alpha, A B C$, similia.

8. tertij dec.

2. quærtide.

5. sextid.

PENTAGONVM vero $\beta \alpha \theta \alpha \beta$, equilate-
 rum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostende-
 mus. Describatur circa triangulum $\beta \theta \alpha$, circulus



$\beta A \alpha B$, qui si transeat per puncta α
 et θ , perspicuum est ex ijs, quæ ad propos.
 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquian-
 gulum esse. Si vero non incedat per puncta
 α , et θ . Describatur in circulo dicto, iux-

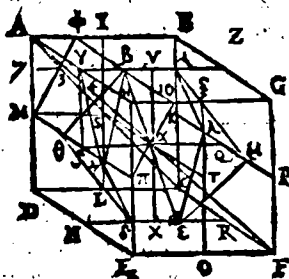
ta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum equila-
 terum & æquiangulum $\beta A \alpha B$. Quoniam igitur
 tam rectæ $AD, A \beta$, quam rectæ $\alpha D, \alpha \beta$, æquales
 sunt rectæ $\alpha \theta$, cum & $\beta \alpha \theta \alpha \beta$, & $\beta A \alpha B$, pen-
 tagonum sit equilaterum; Erunt tam due rectæ βA ,
 $\beta \alpha$, quam due $\beta A, \beta \alpha$, æquales, quod fieri non pos-
 se demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo cir-

culus triangulo $\beta \theta x$, circumscribitur per puncta 4,
& 9. Ac proinde pentagonum $\beta 4 \theta 2 9$, equiangulum est.

SCHOLIUM.

Ex his colligere licebit sequentes propositiones.

L. DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo dodecaedrum describitur.



DV CATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri $\beta \epsilon$, intelligaturque coniuncta recta $\gamma \epsilon$, equalis existens & parallela lateri cubi $K X$, quod & $V Y$, $X \epsilon$, equalis sunt, & parallela. Quoniam igitur angulus $\beta V X$, rectus est; rectus quoque erit angulus $\beta \gamma \epsilon$, ad γ , confusus; Ac proinde quadratum diametri $\beta \epsilon$, equale erit quadratis

lateralum $\beta \gamma$, $\gamma \epsilon$, nempe Dodecaedri, & cubi.

II. Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, cum sit ut γV , ad βV , ita γZ , dupla ipsius γV , ad $\beta \gamma$, duplam ipsius βV ; Sit autem βV , minus segmentum ipsius γV , secta extrema ac media ratione: Erit & $\beta \gamma$, minus segmentum lateris cubi γZ , secta extrema ac media ratione; composita vero ex $\gamma \beta$, γZ , hoc est, recta βZ , (qua dupla fuit offensa ipsius $\gamma \beta$, ideoque composita ex $\gamma \beta$, γZ , equalis) maius segmentum. Constat autem ex constructione $\beta \gamma$, esse latus Dodecaedri, & βZ , seu $\beta \epsilon$, esse

esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subiendae angulum pentagoni β 9 x, vel β 4 d.

L A T U S cubi aequalis est duobus lateribus, Dodecaedri nidelicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

III.

N A M in prima rursus figura, latus cubi γ Z, componitur ex latere Dodecaedri β 7, in ipso descripti, & ex recta composita ex γ β 7 Z, quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim γ Z, ubi latus subiendae angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, ut perspicuum est ex 8. propos. huius lib. Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris γ Z, secti extrema ac media ratione: Erit β 9, existens quoque maius segmentum eiusdem lateris γ Z, ut iam demonstravimus, latus Dodecaedri cubo lateris γ Z, circumscripti.

8. tertijdec.

R E C T A duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est aequalis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IIII.

I N prima enim figura, recta connectens puncta β , d, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θ x, oppositi, aequalis est rectae γ x, (quod & β 7, d x, aequales sint, & parallela) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

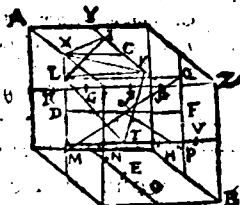
I N dato cubo Icosaedrum describere.

C Y B U S datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit A B, per cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectae lineae parallelae agantur usquā inter se convenientes, & harū medietates extrema ac media ratione secantur, ita ut maiora segmenta prope centra sint, in punctis, I, K, L, M, N, O; P, Q; R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor

E U C L I D . G E O M .

uicinioribus connectatur, ut L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. ut constituentur uiginti trian- gula. I K L, I K Q, L M R, L M T, N O M, N O P, P Q V, P Q S, R S I, S N, T V K, T V O, I L R, I S Q, K T L, K Q V, O P V, O T M, N S P, N M R; quorum priora, duodecim subtrahuntur duodecim cubi lateribus, posteriora uero octo eiusdem cubi octo angulis subseruuntur. Connectantur iam rectæ X C, X I, X K. Quoniam igitur latera X C, C I, trianguli X C I, æqualia sunt lateribus X C, C K, trianguli X C K; & anguli contenti, recti, quod X C, parallela sit ipsi

29. primi.
4. primi.



4. primi.
47. primi.

A Y, Erunt & bases X I, X K, æquales. Deinde quia linea L X, recta est ad planum A Z, per defn. 4. lib. 11. recta quoque erit ad lineas X I, X K; Ac propterea cum latera L X, X I, trianguli L X I, æqualia sint lateribus L X, X K, trian- guli L X K, & anguli conten- ti, recti; æquales erunt bases L I, L K. Rursus quoniam quadratum rectæ L I, æquale est quadratis rectarum L X, X I; Et quadratum rectæ L X, quadrato rectæ I Y; quadra- tum uero rectæ X I, quadratis rectarum X C, C I, est æqua- le: Acquale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis recta- rum X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igi- tur quadratum rectæ L I, æquale est tribus quadratis recta- rum C Y, C I, I Y: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ C I: (Cum enim quadrata rectarum C Y, I Y, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ C I, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ C I, illis, duo- bus, erunt tria quadrata rectarum C Y, O I, I Y; quadrupla eiusdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergo rectæ L I, quadruplum est quoque quadrato rectæ C I; Ac propterea, cum eiusdem quadrati rectæ C I, quadruplum sit quadratū rectæ K I, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadra- ta rectarum L I, I K, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Aequila- terum igitur est triangulum I K L, lateri cubi A G, sub- stratum.

4. terijdec.

N O N

NON aliter ostendemus, reliqua undecim triangula, undecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera I K, L M, N O, P Q, R S, T V, æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; ut in triangulo K T L, latus K L, commune est triangulo I K L; & latus K T, triangulo T V K; & latus T L, triangulo L M T; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia uiginti huiusmodi triangula Icosædri component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosædri descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

COLLIGEMUS ex hoc propositiones sequentes.

DIAMETER Icosædri potest & latus Icosædri, & cubi Icosædri ambientis.

I.

DUCTA enim recta L Q, qua lateri cubi D F, parallela est, & æqualis, quod & D L, F Q, parallela sint, & æquales; manifestum est, quadratum diametri Q M, æquale esse quadratis rectarum L M, lateris Icosædri, & L Q, lateris cubi, in quo Icosædri describitur, cum angulus M L Q, sit rectus, quod & L D F, rectus sit, per coroll. 1. propos. 15. lib. 13.

33. primi

47. primi

29. primi

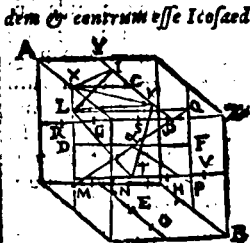
BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosædri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosædri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

II.

NAM huiusmodi tres lineæ, nimirum D F, C E, G H, cum coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, seseque per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α , diuidunt. Quod quidem

lib. 3. dem

4. primi



dem & contrarium esse Icoſaedri, ita offenditur, ducta recta a P. Quoniam latera a F, F Q, trianguli a F Q, equalia sunt lateribus a P, F P, trianguli a F P, angulosque comprehendunt rectas; equalēs erunt recta a Q, a P. Eademque ratione equalēs erunt omnes rectae ex a, ad angulos Icoſaedri prodentes. Igitur a, centrum est Icoſaedri.

III.

Si latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum latus est Icoſaedri in dicto cubo deſcripti.

15. quinsi
2. quartide.

Cum enim CI, ſis maius ſegmentum rectae CT; ſitque ut CI, ad CT, ita KI, dupla ipſius CI, ad β T, duplam ipſius CT; eris quoque KI, latus Icoſaedri, ſegmentum maius lateris cubi β T.

IIII.

Icoſaedri tam latera, quam triangula oppoſita, inter ſe ſunt parallela.

15. undec.

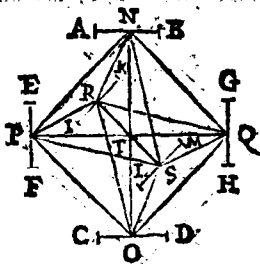
Si enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta duabus diametris connectantur, ſicut duo triangula inter ſe equalia, angulosque alternos habentia equalēs, ex 4. propoſ. lib. 1. qua quidem in centro conveniunt. Quare qualibet latera oppoſita parallela erunt; Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe erunt parallela.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.

EXPONANTUR dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita, AB, CD; EF, GH; IK, LM, quorum bifarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, iugant tres rectae NO, PQ, RS, & equalēs ſe ſe in centro T, bifariam, & ad angulos

angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt, ducanturque rectæ N.P., N.R., N.S., N.Q., O.P., O.R., O.S., O.Q.; P.R., P.S.; Q.R., Q.S., constituentes octo triangula SNP, SPO, SIOQ, SQN, RNP, RPO, ROQ, RON. Quia igitur hæc tria TN, TS, trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum sint rectarum equalium dimidia) angulosque continent rectos, ut dictum est. Æquales erunt bases NS, NP: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hæc duabus, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia; Ideoque Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro descriptum est, cum eius anguli retideant in bifarijs sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.



4. primi

COROLLARIUM.

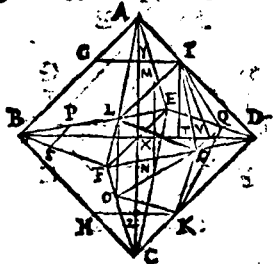
Si QVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in ea descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrū Icosaedri incidentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrū Icosaedri, ubi se interfecit, centrū quoque est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.

DATUM Octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit ABCDEF. Cum a quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur a singulis bina non proxima, sed sibi e regione respondentia, hoc est, quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nam la-

tera A B, A D; C B, C D, quadrati A B C D, iuxta eodẽm angulos A, C, iam sumpta fuere,) E B, E D; F D; F B, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati E B F D; (Nam latera E A, E C; F C, F A, quadrati A B C F, iuxta eodẽm angulos E, F, iam accepta sunt,)



que omnia secantur extrema ac media ratione, hac lege, ut maiora segmenta fiat prope angulos a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a singulis ad quinque proxi-

mas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, ut ex R, rectæ R Q, R I, R L, R O, R K. Et ex I, rectæ I Q, I R, I M, I L, I G, & sic de cæteris, quamvis non omnes ductæ sint in figura, ad evitandam linearum confusionem; Post hæc, ductis tribus Octædri diametris A C, B D, E F, se se in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propof. 14 lib 13. quarum A C, B D, secant rectas G I, R Q, in Y, & V; connectaturque recta I V, agaturque I T, parallela ipsi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I, æqualia sunt lateribus D R, D I; (Sunt enim D Q, D R; minora segmenta rectarum equalium D E, D F,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octædri A D E, A D F; Erunt bases I Q, I R, æquales. Deinde cum sit, ut B G, ad G A, ita D I, ad I A; erit G I, rectæ B D, parallela. Eademque ratione Q R, ipsi E F, parallela; Ac prouide ut D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursum quia est ut A X, ad X D, ita A Y, ad Y I, (quod triangulum A Y I, simile sit triangulo A X D, per coroll. propof. 1. lib. 6.) Est autem A X, ipsi X D, æqualis; Erit & A Y, ipsi Y I, æqualis. Quare Y I, minus segmentum est rectæ X A. Non autem ostendimus A Y, ipsi Y G, esse æqualem; ideoque G I, rectam bifariam in Y; similiterque Q R, in V, secari. Cum uero latera A G, A I, trianguli A G I, æqualia sint lateribus D Q, D R, trianguli D Q R, (nimirum minora segmenta minoribus

- 4. primi.
- 2. quartide.
- 2. sexti.
- 4. sexti.

bus segmentis æqualium rectarum) angulosque comprehen-
dunt rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF. Acqua-
les erunt bases G I, Q R. Eadem ratione his æquales osten-
duntur rectæ H K, P S, M N, L O, quæ nimirum subtendunt
reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in
singulis uidelicet quadratis binos oppositos, complectun-
turque duo segmenta laterum minora. Deinde quia Y I,
minus segmentum ipsius X A, ostensum, maius est segmen-
tum maioris segmenti X Y, diuisi extrema ac media ratione,
ut demonstrauius ad. propof. 5. lib. 13. Est autem X Y, re-
ctæ X V, æqualis, (cum ambæ sint maiora segmenta æqualiū
rectarum X A, X D.) & Y I, rectæ X T; est X T, maius
segmentum ipsius X V, & idcirco T V, segmentum minus
eiusdem X V. Quare quadrata rectarum X V, totius, hoc
est, ipsius I T, (cum & recta I T, æqualis sit ipsi X Y) & T V,
minoris segmenti, tripla sunt quadrati rectæ X T, maioris
segmenti. Atque adeo quadratum rectæ I V, æquale exi-
stens quadratis rectarum I T, T V, triplum est eiusdem qua-
drati rectæ X T, hoc est, rectæ R V, quæ æqualis est ipsi
X T, seu ipsi Y I, ex demonstratis, cum R V, Y I, dimidia
sint æqualium rectarum R Q, G I. Addito igitur quadra-
to rectæ R V, ipsi quadrato rectæ I V; erunt quadrata recta-
rum I V, V R, quadrupla quadrati rectæ R V: At quadra-
tis rectarum I V, V R, æquale est quadratum rectæ I R, quod
anguli I V R, I V Q, comprehensi lateribus æqualibus
I V, V R; I V, V Q, & subtensi basibus æqualibus I R, I Q,
æquales sunt, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ I R;
quadruplum est quadrati rectæ V R; Ac propterea cū eius-
dem quadrati rectæ V R, quadruplum quoque sit, per scho-
lium propof. 4. lib. 2. quadratum rectæ Q R; Acqualia erunt
quadrata rectarum I R, Q R, ideoque & rectæ ipsæ æqua-
les: Erat autem I Q, ipsi I R, æqualis. Triangulum igitur
equilaterum est I Q R. Non secus demonstrabimus, equi-
latera esse triangula similem situm cum I Q R, habentia,
nempe K Q R; G I L, G I M; G P S, H P S; N H K, O P K;
R L O, S L O; P M N, Q M N; atq; adeo triangulo I Q R,
æqualia, cum latera omnium sint æqualia inter se. Cum enim
in quolibet horum triangulorum unum latus subtendat an-
gulum rectum quadrati comprehensum duobus segmentis
minoribus

4. primi.

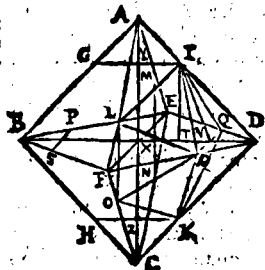
4. primi.

34. primi.
4. tertijdec.
47. primi.

47. primi.
8. primi.

22 EVCLID. GEOM. 23

minoribus laterū Octaedri; Duo uero reliqua subtrahunt
duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum conten-
tos singulos duobus segmentis laterū Octaedri, maiore &
minore: Erunt latera unius trianguli lateribus aliorū æqua-



lia; ac propterea & ipsa
triangula æqualia, per co-
roll. prop. of. 8. lib. 1. Vt in
triangulis IQR, GIL, la-
tera KQ, GI, subtrahen-
tia angulos rectos QDR,
GAI, quadratorū DEBF,
ABCD, comprehensos mi-
noribus segmentis DQ,
DR; AG, AI, æqualia: ut
Eodem modo latera IQ,

IL æqualia erunt, cum subtrahant angulos æquales IDQ,
IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorum
ille continetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore
& minore; hic uero segmentis AL, AI, maiore & minore
quoque. Nonsecus latera IR, GL, æqualia erunt. Ac æqualia
igitur sunt triangula IQR, GIL, per coroll. prop. 8. lib. 1.
Atqui IQR, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & GIL,
æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda.
Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex
angulis Octaedri, bina uidelicet singulis. Ex his consequitur
reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, uide-
licet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ,
in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD;
ILR, in AFD, æquilatera quoque esse, & prædictis æqua-
lia, cum horum latera cum illorū lateribus communia sint.
Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis se-
ctionibus laterum Octaedri conueniunt ad constitutionem
anguli solidi, (ut uides in quinque RQI, RIL, RLO,
ROK, RKQ, solidum angulum R, componentibus.)
Icosædron componunt Octaedro inscriptum, cum Icosæ-
dri duodecim anguli duodecim sectioes laterum
Octaedri possideant. In dato itaque Octae-
dro Icosædron descripsimus. Qued
faciendum erat.

COROL.

COROLLARIUM. I.

COLLIGITUR ex demonstratis, si duo latera trianguli equilateri secantur extremis ac media ratione, ita ut unius maius segmentum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cum enim in triangulo aequilatero ADE , maius segmentum lateris AD , sit DI , & DQ , minus lateris DE ; Sic autem recta IQ , ostensa equalis rectae QI , qua duplum potest minoris segmenti AI , cum quadratum rectae GI , equaliter sit duobus quadratis equalibus rectarum equalium AG , AI : Perspicuum est, & rectam IQ , duplum posse eiusdem segmenti minoris AI .

47. primi.

COROLLARIUM. II.

RURSUS fit, cum octo Icosaedri bases collocatae sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basium Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namque Octaedri superioris triangulum AED , in quo collocatum est triangulum Icosaedri IMQ , sitque C , centrum trianguli AED , ex quo rectae educantur CA , CE , CD , CI , CM , CQ . Quoniam igitur latera CA , AM , trianguli $CA M$, equalia sunt lateribus CE , EQ , trianguli $CE Q$, (quod haec latera sint ex centro, & maiora segmenta equalium rectarum) angulosque comprehendunt equaliter; nempe dimidios angulorum trianguli aequilateri, ut in scholio propositi lib. 13. ostendimus; Erunt bases CM , CQ , equaliter. Non secus demonstrabimus CI , equaliter esse lineis CM , CQ . Quare C , centrum erit trianguli IMQ .



COROLLARIUM. III.

NOW difficile est denique ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X , centro Octaedri, quibus rectis ad quoscunque duos, angulos Icosaedri, nimirum rectis XG , XO , ad angulos G , & O ; cum latera XA , AG , trianguli XAG , equalia sint lateribus XF , FO , trianguli XFO . (Nam XA , XF , semidiametri sunt Octaedri, & AG , FO , segmenta minora laterum equalium Octaedri sectionum extrema ac media ratione.) angulosque complebantur equaliter semirectos ut delictis; (cum AC , EF , diametri sint quadratorum $ABCD$, $EAF C$; ac proinde, per demostrata in scholio propositi lib. 1. angulos quadratorum bisariam fecerit.) Aequales erunt & bases XG , XO . Eodemque argumento ostendentur omnes aliae rectae ex X , ductae ad angulos Icosaedri equaliter esse. Igitur X , centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

48. primi.

PROBL.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

16. quinside.
5. quinside.

INSGRIBATUR dato Octaedro Icosaedrum; & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituentur in centrīs basium Icosædri, quarū octo concentri, & sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulo: in eisdem centrīs octo basium Octaedri, reliquos autē duodecim in centrīs duodecim basium Icosædri, quarum binę singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quamquam non proprie, ut ex definitione 31. lib. 11 apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Qued erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

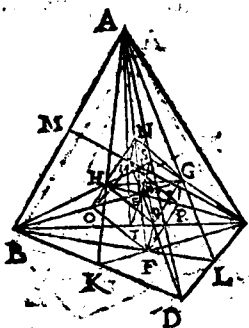
IN data Pyramide cubum describere.

15. quarti.
decimi.

DETVR Pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur AEF, BEG, CEH, DEI, quę cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectę ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariā, & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectę ex solidis angulis per centrum E, demissę AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centrīs basium rectis lineis coniungantur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H.

Dico

Dico solidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum esse. Cum enim latera AF, FK, trianguli AFK, equalia sint lateribus AF, FL, trianguli AFL; (quod FK, FL, cum perpendicularares sint ad BD, CD, ex centro F, ductis; ostendat equalis distantias rectarum equalium BD, CD, a centro F) angulosque contineat rectos, ex 3. definit. lib. 11. Aequales erunt & bases AK, AL & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, equalia sunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (sunt enim AH, AG, semidiametri triangulorum equilateralium ABD, ACD,) angulos



4. primi

item comprehendunt equalis, ut demonstravimus; Aequales erunt bases NH, NG. Haud secus ostendentur equalis recte QG, QH, si recte ducantur DG, DH, nec non & relique, cum omnes subtendant equalis angulos equalibus lateribus comprehensos; ut perspicuum est. Si enim recta ducatur FT, cum latera AF, FT, equalia sint lateribus AF, FK. (Sunt namque FT, FK, distantie rectarum equalium BC, BD, a centro) & anguli contenti recti, ex definit. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, equalia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorum equilateralium ABC, ABD;) angulosque contineant equalis: Aequales erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, equilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangula, ut tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.

4. primi.

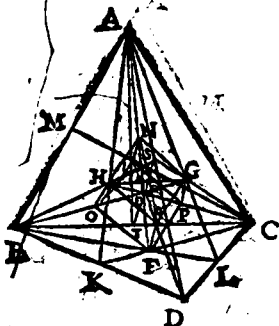
ASSUMATUR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, non coeunt in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter Octaedri in pyramide descripti, ut constat ex figura proposit. 2.

4. primi.

huius

EVCLID. GEOM.

huius lib. Nam punctum S, huius figuræ responder puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint latera opposita, siue non coeuntia B C, A D. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis, & Octaedri in ipsa descripti, ut



mox demonstrabimus, trau sibi ST, per E, centrum Py ramidis, æqualesque erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, p. scholiū ppos. 12. lib. 13. erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiarum partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter secantur, atque idcirco HG, parallela est lateri B C,

secatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC,) proportionaliter; Ideoque & SR, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rursus quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propof. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoque eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1, atque idcirco EQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter secantur, recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidē pars est trianguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE, tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes ejusdem SE. Quoniam igitur utraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur SE, a rectis HG, NQ; Ac idcirco & ipsæ HG, NQ, in eodem se se puncto intersectabunt. Quare in eodem sunt plano, proptereaque & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum

17. quarti.
decimi.

2. sexti.

15. quarti.
decimi.

2. sexti.

2. undec.

cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ . Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum, nunc demonstremus.

Cum ostensa sit HG , ipsi BC , parallela, atque adeo triangulum SHG , simile triangulo $SB C$, ex coroll. propof. 4. lib. 6. Erit ut SH , ad HG , ita SB , ad BC ; & permutando, ut SH , ad SB , ita HG , ad BC : Est autem SH , tertia pars ipsius SB : Igitur & HG , tertia pars erit lateris BC . Haud secus ostendemus NQ , tertiam esse partem lateris AD . Cum ergo latera BC , AD , sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG , NQ , æquales. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus HN , GN ; GQ , HQ ; NG , QG ; NH , QH ; æquales erunt quatuor anguli HNG , NHQ , GQH , QHN . Quocirca cum ipsi sint quatuor recti æquales, ut ostendimus ad propof. 32. lib. 1. recti erunt; ideoque quadratum erit NQ . Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent: qui ideo Pyramidi dicitur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F , G , H , I , in centris quatuor basium pyramidis, quatuor uero reliqui N , O , P , Q , in bifarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum residant, ut constat. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

4. sexti.

8. primi.

COROLLARIUM. I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi NF , OG , PH , QI , cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E , centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIUM. II.

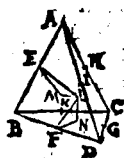
INFERTUR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim BR , ex E , centro cubi, in R , centrum basis $GNHQ$, ducta dimidium sit lateris cubi, ut constat; Recta RS , dupla sit lateris ER ,

E U C L I D . G E O M .

E R, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur R S, ostensa sit tertia pars ipsius S T; perspicuum est, rectam S T, coniungere eam S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis A D, B C, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi R S.

L E M M A .

I D E M autem esse centrum Pyramidis, & Octædri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit Pyramis



ABC D, cuius omnia sex latera bifariam secantur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro Pyramidis in bases A B, D, B C D, perpendiculares demittantur L M, L N, quæ in centra circulo-

rum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis L E, E M, L F, F N; quoniam latera L M, M E, trianguli L M E, æqualia sunt lateribus L N, N F, trianguli L N F. (cum enim circuli bases A B D, B C D, circumscribentes sint æquales; æqualiter distant ipsi a centro L, per lemma 2. propof. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantie L M, L N, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt M E, N F, distantie rectarum æqualium A B, B D, a centris M, & N, circuloꝝ æqualium) angulosque comprehendunt rectos, per defin. 3. lib. 11. Æquales erunt rectæ L E, L F. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ L G, L H, L I, L K. Quare cum anguli Octædri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, ut ex 2. propof. huius lib. constat; Erit L, centrum Octædri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit ce-

4. primi

trum pyramidis, & octaedri in ea descripti,

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describerei.

DIACONAE Pyramidi ABCD, inscribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secantur extrema ac media ratione, hac lege, ut bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum octaedri cadentia, ut in propof. 16. huius lib. diximus, quia sunt EG, EK, HK, HG, KE, KI, GL, GF, FH, FE, IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniungamus lineis rectis, ut M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrum in dicto octaedro, ut constat ex propof. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim praefatis sectionibus duodecim laterum octaedri. Cum ergo haec ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK, KE; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDG, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases

M X Q, R O Y, L S V, N P T, in quatuor basibus Pyramidis existunt, ut constat.

stat. In data igitur Pyramide

Icosaedrum descripsi

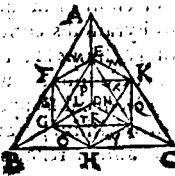
mus. Quod e-

rat facien-

dum.

M m

POR.



2. quinside.

Amuse

Amuse

31

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum describere.

19. quinside.
5. quinside.

Pyramidi datae inscribatur Icosaedrum, & in hoc Dodecaedrum habens uiginti suos angulos in centris uiginti basium Icosaedri; Factumque erit; quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, ut in præcedente propos. diximus; consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis; nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, ut constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat; Item cubus pyramidi inscriptus, quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bisarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bisarijs sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicitur in pyramide proposita, etiam si non proprie. Quamobrem in data Pyramide Dodecaedrum descriptum est. Quod faciendum erat.

8. quinside.

18. quinside.

13.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato solido regulari sphaeram describere.

Ex centro sphaerae datum solidum complectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulo-
rum

rum bases circunferentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter a centro distent, exlemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphaera, cuius semidiametri sunt prælatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficia conuexa singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLIUM.

ITAEQUE, cum quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, ut sint in uniuersum viginti inscriptiones; unum duntaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, octaedro, atque Pyramide, ut perspicuum est ex propos. 13. 17. & 10. huius lib. Similiter unus tantummodo cubus non proprie in Pyramide describitur, ut ex propos. 18. huius lib. est manifestum. Nam, ut proprie solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constare, uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, ut defin. 31. lib. 11. exposuimus: Quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.

CAETERVM inter omnia quinque solida regularia, unum octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta. In octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro inscriptum est, ut constet ex propos. 17. huius lib. Post hoc in Dodecaedro describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est. Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro diciatur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resident. Hoc autem privilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

NAMQUE uero prætereundum est, Dodecaedrum, sibiq;

MM 2

inscriptum

16. quinside

5. quinside.

8. quinside.

1. quinside.

1. quintide.
8. quintide.

in scriptum cubum, & hinc cubo inscribitur pyramidem, eadem sphaera comprehendit. Cum enim quatuor anguli Pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideamus, convenientiq; omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat, sphaeram Dodecaedro circumscribitur complecti quoque cubum atque Pyramidem, omnem sphaeram illius superficies per horum solidorum angulos incedat.

P A R I ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centrīs consistuntur, ut demonstratum est. In centrīs quidem basium Icosaedri, propof. 4. 11. & 12. In centrīs uero basium octaedri, propof. 17. 4. & 6. In centrīs denique basium Pyramidis, propof. 20. & 18. huius libri.

V. G. I. N. T. I. porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesque quinque solidorum regularium, unius in aliis, quotquot excogitari possunt, absolvimus, cum in quolibet reliqua quatuor designaverimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propof. 2. 18. 19. 20. In octaedro uero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propof. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde, Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propof. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propof. 12. 15. 14. 3. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum, propof. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At uero posteriori unica propositione, quia arte in quouis solido regulari sphaera depingatur, docuimus.

ELEMENTI DECIMI QVINTI FINIS.



ELEMEN-

ELEMENTVM

DECIMVMSEXTVM,

*Quo uariae solidorum regularium sibi mutuo inscri-
ptorum, & laterum eorundem comparationes
explicantur, a Francisco Flussate Candalla
adiectum, & de quinq; corporibus.*

LIBER TERTIVS.



*VENIAMODVM in lib. 14. tra-
dia sunt comparationes quam plurima
figurarum regularium, & laterum ea-
rundem in eadem sphaera descriptarum,
quarum quidem descriptione in lib. 13.
exposuit Euclides; ita etiam Franciscus
Flussas Candalla in hoc lib. 16. inter se
comparat easdem figuras regulares sibi
mutuo inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem
inscriptionem in praecedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam
connexionem habet hic liber 16. cum praecedenti 15. quam quar-
tusdecimus cum tertio decimo habuit; ut imperfecta quodam-
modo uideri possit tractatio haec quinq; corporum regularium,
si liber hic decimus sextus non adiungatur.*

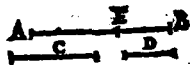
THEOR. I. PROPOS. I.

*SI in Dodecaedro cubus describatur,
& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit
proportio Dodecaedri exterioris ad Do-*

M m 3 decaedrum

decaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.

Latus cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius segmen-



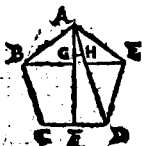
tum ad EB, minus. Cum enim, ut in scholio ultimæ propof. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusque in illo descriptus, eadem comprehendantur sphaera; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphaera cum cubo descripti, ex coroll. 1. propof. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphaera, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propof. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit ut C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, ut AE, maius segmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propof. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris segmenti AE, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo

gulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in
latus oppositum demissa, secatur a recta illū
angulum subtendente, extrema ac media ra-
tione.

In pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex
angulo A, ad latus oppositum CD, perpendicularis demit-
tatur AF. Dico AF, a recta BE, subtendente angulum A, se-
cari in G, extrema ac media ratione. Du-
cta enim recta AD, que secet BE, in H;
quoniam BE, recta lateri CD, per coroll.
propos. 8. lib. 15. est parallela; secabun-
tur rectæ AF, AD, proportionaliter:
Atqui AD, in H, secta est extrema ac me-
dia ratione; estque maius segmentū DH.
Igitur & AF, in G, similiter erit secta. Quocirca linea per-
pendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demon-
strandum.

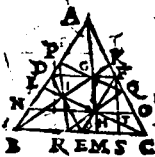


2. sexti.
8. tersijdec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducan-
tur rectæ opposita latera secantes extrema
ac media ratione, ita ut prope quemuis an-
gulum sit maius segmentum unius lateris,
& minus alterius: Hæ sectionibus suis in me-
dio producent basin Icosædri in dicta pyra-
mide descripti, inscriptam quidem alij trian-
gulo æquilatero, cuius anguli latera trian-
guli pyramidis secant extrema ac media ra-
tione, & latera ipsa bifariam secantur ab an-
gulis basis Icosædri.

TRIANGVLVM pyramidis sit ABC . cuius latera secentur bisariam in D, E, F , iunctis rectis DE, EF, FD , quibus rursus sectis extrema ac media ratione in G, H, I ; iungantur rectæ GH, HI, IG , constituentes $GH I$, triangulum Icosædri in dicta pyramide descripti, ut constet ex propo. 1. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli ABC , extrema ac media ratione in K, L, M , iunctis rectis BK, CL, AM . Di-



co has rectas suis sectionibus producat triangulum Icosædri $GH I$, hoc est, rectam BK , transire per puncta G, I ; & rectam CL , per puncta H, I ; & rectam AM , per puncta G, H . Ducta enim per H , recta NO , ipsi BC , parallela; erit triangulum FHO , triangulo FBC , simile, ex coroll. propo. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC , æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo ABC , per idem coroll. Quare HO , recta æqualis est rectæ FH , maiori segmento rectæ FE , seu DF , ipsi æqualis: (Est enim & DEF , triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendāt angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidijs scilicet æqualibus laterum eiusdem trianguli comprehensos; ideoque æqualia sint.) Est autem & NH , æqualis toti DF , in parallelogrammo DH , propterea quod FH, DF , parallelae sint rectis AB, BC , seu NO . Igitur recta NO , composita ex NH , tota, & HO , maiori segmento, secta erit in H , extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelae BC, NO, DF , similiter sint sectæ in M, H, G , nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM , ex ijs, quæ demonstrauimus ad propo. 4. lib. 6. secet easdem similiter; siquid constat, ipsam AM , transire per puncta G, H . Haud secus ostendemus BK , per puncta G, I ; & CL , per puncta H, I , transire, si per $G, & I$, rectæ ducantur parallelae lateribus AC, AB ; Atque ideo rectæ BK, CL, AM , suis sectionibus producent triangulum Icosædri $GH I$.

$ADATVR$ iam per G , recta PQ , rectæ CL parallela. Quoniam igitur AF , æqualis est rectæ DF , seu rectæ FE , cuius maius segmentum sunt FH , hoc est, FO , illi æqualis; Erit quoque FO , maius segmentum rectæ AE , & ac proinde tota AO , secta in F , extre-

4. primi.
34. primi.
2. sexti.
5. tertijdec.

5. tertijdec.

F, extre-

F, extrema ac media ratione: Est autem ut AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO; & ut AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectę AH, AC, AE, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntque maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectę ergo AL, segmenta maiora rectarum æqualiū AG, AB, æquales erunt. Quia uero est ut AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum; Et est AQ, recta rectę AL, æqualis: Erit & QC, recta, æqualis rectę AP. Quare & recta AP, minus segmentū cruraliteris AB, maiusque reliqua AP; ac propterea, recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quę per H, ducitur parallela rectę AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectę BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione, atque adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam uero singula latera trianguli PQR, cum subtenduntur angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, æqualia inter se sunt; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosædri GHI: (Cum enim in angulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL, secabuntur PQ, LC, in eadem rationes, ex ijs, quę ad propos. 4. lib. 6. demonstrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H; ob triangulum AOL, in quo FH, parallela est lateri AL, secans proportiona liter latera CA, CL, igitur & PQ, bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis Q, R, RP.) Ac propterea, triangulum Icosædri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsi bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosædri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

2. sexti.

2. quartide.

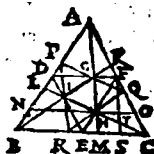
4. primi.

2. sexti.

COROLLARIUM

Ex his facile colligi potest, latus Icosædri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectę diuise extrema ac media ratione, quę ab uno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum; extrema quoque

1. sexti.
34. primi.



2. sexti.
34. primi.

quoque ac media ratione. Cum enim, ut constat ex propof. 16. lib. 15. GHI , triangulum fit Icofaedri in octaedro, cuius bafis DEF , defcripti; ducatur ex angulo F , trianguli FEC , quod triangulo DEF , eft aequale, recta FS , parallela rectae AM , fecans EC , HO , in S , & T . Cum igitur MC , bifariam fecerit in S , ob triangulum AMC ; fitque MS , ipfi GF , aequalis, ob parallelogrammum GS ; Erit & SC , aequalis eidem GF , minori segmento rectae DF ; Ac propterea cum totae DF , EC , aequales fint; erit quoque reliqua ES , reliqua DG , maiori segmento aequalis: Ideoque EC in S , fecta erit extrema ac media ratione. Deinde quia FE , FS , fimiliter fecantur; fecatur autem FE , extrema ac media ratione; fecabitur & FS , in T , extrema ac media ratione, manifeftumque segmentum erit FT , recta aequalis exilientis lateri Icofaedri GH , ob parallelogrammum GT . Igitur FT , latus Icofaedri octaedro infcripti, maius eft segmentum rectae FS , quae diuidit EC , latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F , demiffa. Quod eft propofitum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione fecta, duplum eft potentia lateris Icofaedri in ea pyramide defcripti.

BASIS. Pyramidis fit ABC , cuius latera extrema ac media ratione fcoetur in K , L , M , &c ductis rectis BK , CL , AM ,



producentibus GHI , bafim Icofaedri in illa pyramide defcripti, infcriptam triangulo aequilatero PQR , cuius anguli latera trianguli ABC , fecent extrema ac media ratione in P , Q , R , & ipfa latera PQ , QR , RP , bifariam diuidantur in G , H , I , ut in propof. praecedenti demonftratum eft. Dico AP , minus segmentum lateris Pyramidis duplum effe potentia lateris Icofaedri HI . Cum $n. PQ$, dupla fit potentia minoris segmenti AP , ex coroll. 1. propof. 16. lib. 1. quadrupla uero potentia rectae HI , ex fcholio propof. 4. lib. 2. quod PQ , recta dupla fit rectae PG , hoc eft, fibi aequalis HI , ob parallelogrammum PH ; Erit PQ , potentia 4. &

AP 2.

AP, 2. & HI, 1. Quāobrē AP, dupla erit potētia rectę HI.
Minus ergo segmentū lateris, &c. Quod erat demonstrādū.

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex his latus Icofaedri in pyramide descripti, esse Apotomeni. Cum enim diameter sphaerae potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis; si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationalē, cū diametro potētia sit cōmēsurabile. Quare minus segmentū lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit; Atq; adeo cū maiori segmentō lateris Pyramidis latus Icofaedri potentia sit cōmēsurabile; (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icofaedri.) Erit & latus Icofaedri, ex scholio propof. 104. lib. 10. Apotome.

13. serijde.

6. decimi.

6. serijdec.

6. decimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATUS cubi potētia dimidiū est lateris Pyramidis ī eo descriptę. Latus uero Pyramidis duplū est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus deniq; cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CUM enim latus Pyramidis in cubo descriptę diameter sit basis cubi, ut cōstat ex propof. 1. lib. 1. Sit autē quadratū huius diametri duplū basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propof. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potētia lateris Pyramidis in cubo illo descriptę.

RURSUS, quia rectę coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, ut liquet ex propof. 2. lib. 1. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectę coniungentis bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, ut cōstat ex 4. propof. lib. 4. Perspicuum est, latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.

DENIQUE quia diameter sphaerae, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro octaedri sibi inscripti, cū diameter octaedri cōiungat cētra basium cubi oppositarū, ut in coroll. propof. 3. lib. 1. diximus: patet, lat⁹ cubi potētia esse duplū lateris octaedri in eo de.

14. serijde.

eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

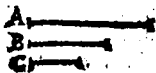
LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

3. *sexidec.* CUM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, ut docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; existat denique latus cubi dimidium potentia lateris Pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex ijs, quæ in scholio propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A, & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit



fit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, ut B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ propos. 18. lib. 15. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti; (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramidis BC,) Et quadrata proportionē habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cum noncupla proportio sit triplæ duplicata, ut in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare, cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, ut si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi & quadratum eiusdem basis diametri sit 1. & quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inscribitur, ut docuimus in scholio ppos. ultimæ lib. 13. Erit latus Pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi & Dodecaedro inscripti:

inſcripti : Huius autem lateris cubi extrema ac media ratio-
ne ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13.
latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cu-
bus eſt deſcriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octode-
cuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius ma-
ius ſegmentum laſus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.
Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur:
Erit latus Icoſaedri potentia duplum mino-
ris ſegmenti lateris octaedri extrema ac me-
dia ratione diuifi.

47. *primi.*

VT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta coniun-
gens duas ſectiões duorum laterum octaedri rectum angu-
lum continentium prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi
recta GI, ſubtendens angulum rectum GAI, minoribus ſeg-
mentis AG, AI, comprehenſum;) latus eſt Icoſaedri in octae-
dro deſcripti. Quare, cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſſit
duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit unius
minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcriba-
tur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadru-
plum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo
deſcripti.

SI T una ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis
quadratum ABCD, triangula uero ad E, uerticem, ABE,
EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F,
G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis
AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod ſi coniungantur rectæ
FG,

FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro
descripti, ut demonstrauius propof. 4. lib. 15. Quoniam au-
tem ducta recta EHO, feſquialtera eſt rectæ
EH, per coroll. propof. 18. lib. 14. qualium
partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH:
Aequi ut EO, ad EH, ita eſt EB, ad EL. Igi-
tur qualium partium 3. continet EB, talium
2. erit EL, ſeu LM, ſibi æqualis; Ac propte-
rea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9: & qua-
dratum rectæ EM, nimirum KLMN, partium 4. ideoque
& quadratum lateris cubi GH, uidelicet FGHI, talium par-
tium 2. cum quadratum LN, duplum ſit quadrati GI, ſi-
bi inſcripti, per ea, quæ in ſcholio propof. 47. lib. 1. de-
monſtrauius. Eſt enim LN, quadratum ex diametro
quadrati GI, deſcriptum; cum GI, diameter (ſignificatur)
æqualis ſit lateri LM. Quapropter later octaedri EB, po-
tentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi GH, cum
eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus
igitur octaedri potentia quadruplum, &c. Quod erat de-
monſtrandum.

2. ſexti.

33. primi.

COROLLARIUM.

QVIA uero latus cubi extrema ac media ratione diuiſum eſt
ſic maius ſegmentum latus Dodecaedri, cui inſcribitur, per co-
roll. 2. propof. 13. lib. 15. Inſcribunturque Dodecaedrum, & cu-
bus ſibi inſcriptus, eidem octaedro, ut docuimus in ſcholio pro-
poſ. ultime lib. 15. Perſpicuum ſit, octaedri latus eſſe potentia qua-
druplum ſeſquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diui-
ſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti.
Eſt. n. eiufmodi recta latus cubi eidem octaedro inſcripti, cuius qua-
druplum ſeſquialterum potentia eſſe offendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum
eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſe-
ctæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri
in Icoſaedro deſcripti.

QVO.

Q V O N I A M Icosædri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum basarias sectiones coniungunt res rectę lateri cubi æquales, ut constat ex propof. 14. lib. 15. eiusque scholio. Et in basarijs sectionibus dictorum sex laterum Icosædri resident sex anguli octaedri in Icosædro descripti, ex propof. 15. eiusdem lib. 15. Fit, diametrum octaedri in dicto Icosædro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosædram describitur. Quare, cū per ea, quę ad propof. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosædri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi, Erat quoque idem latus Icosædri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosædro descripti: Atqui diameter spherę, seu octaedri duplę est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosædri maius segmentum est eius rectę extrema ac media ratione sectę, quę potentia duplę est lateris octaedri in Icosædro descripti. Quod ostendendum erat.

14. versijde.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

L A T V S cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectę lineę diuisę extrema ac media ratione. Latus uero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectę lineę.

O S T E N S V M est in scholio propof. 13. lib. 15. Minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineę ad maius segmentum, uel maioris segmenti ad minus, (quod tota

tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres recte continue proportionales;) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus Octaedri, in ipso descripti, esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

P R A E T E R I A, cum constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse ut latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, ut tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, ut maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

L A T V S Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

S I T una sex pyramidum Octaedri $ABCDE$, cuius basis quadratum $ABCD$, triangula autem ad uerticem E , sine ABE, EBC, CED, DEA , sintque horum triangulorum centra F, G, H, I , quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF , quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, ut docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam uero Pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, ut in scholio propos. ultimæ lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, ut constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI , latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri BC , sesquialterum esse lateris Pyramidis GI . Ductis enim rectis $E G K, E I L$, diuidentur latera AB, CD , bisariam in K, L , ex scholio propos. 12. lib. 13. ipseque $E K, E L$, sesquialteræ erunt rectarum EG, EL , per coroll. propos. 8.



2. *sexthi*

lib. 14. Ac propterea GI , parallela erit rectæ KL , auferens, per coroll. propof. 4. lib. 6. triangulum EGI , fimile triangulo EKL . Quare erit, ut $E K$, ad KL , ita EG , ad GI & permutando, ut $E K$, ad EG , ita KL , ad GI ;

33. *primi*



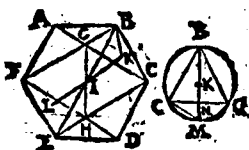
ideoque cum $E K$, sesquialtera fit ipsius $B G$, erit & KL , sesquialtera ipsius GI . Cum ergo BC , æqualis sit ipsi KL , quod & $B K$, CL , æquales sint, & parallelæ; Erit BO , latus octaedri

sesquialterum lateris Pyramidis GI , sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquiter-tium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum $ABCDEFGHI$, cuius diameter BE , & centrum I ; triangu-la uero opposita & parallela, per coroll 4. propof. 14. lib. 13. BCG , EFH , quorum centra



KL . Ducatur ex centro I , ad planū BCG , perpendicularis IK , cadens. ex coroll. lem-matis 1. propof. 10. lib. 14. in cētrū K . Producta igitur KI , perpendicularis quoque erit ad planum EFH , parallelum plano BCG , per scholiū pro-pof. 14. lib. 11. cadetque

idcirco in centrum L , per coroll. præfati lemmatis. Quā ob rem, cum cubus in Icosaedro descriptus statuatur suos angulos in centris basium Icosaedri, ut constat ex propof. 11. lib. 13. atque adeo angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit KL , diameter cubi in Icosaedro descripti, transiens per L , centrum Icosaedri. Cum ergo eadē ratione reli-quē-

quē-

quæ diametri cubi per idem centrū I, tranſcant, erit I, quoq;
centrum cubi inſcripti, ideoque I K, I L, ſemidiametri æqua-
les: Coniuncta autem K B, ſemidiametro circuli triangulum
B C G, circumscribentis, erit angulus B K I, reſtus, ex defin.
3. lib. 11. Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadra-
tis rectarum B K; K I. Igitur & quadratum diametri B E,
quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri B I, ut in ſcho-
lio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis dua-
rum rectarum, nempe diametri circuli triangulum B C G,
circumscribentis, & K L. Sunt enim & hæc quadrata, per
idem ſcholiū, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris
B K, K I, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri
cubi K L, (quod triplum eſt quadrati lateris cubi,) ex
quadrato diametri Icoſaedri B E, remanet quadratum dia-
metri circuli triangulum B C G, circumscribentis. Hoc
igitur dico ſeſquitergium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C.
Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilate-
rum B C G; circulus, extenſaque B K, uſque ad M, quæ
ſecet C G, in N, ducatur quoque recta C M. Quoniam igitur
B N, per centrum K, ducta perpendicularis eſt ad C G,
per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. erit
recta B C, potentia ſeſquitertia rectæ B N; Vt autem B C,
ad B N, ita eſt B M, ad B C, quod B C, ſit media proportio-
nalis inter B M, & B N, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. cum angu-
lus B C M, reſtus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur
B M, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ B C; Ac pro-
pterea quadratum diametri B M, ſeſquitergium eſt quadra-
ti lateris B C. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſae-
dri, &c. Quod erat demonſtrandum.

47. primi.

15. tertij dec.

12. quarti.
decimi.

31. tertij.

COROLLARIUM.

Hinc ſit diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, dia-
metrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangu-
lū Icoſaedri ambientis, oſtenſum ſiquidem eſt, quadra-
tum diametri Icoſaedri B E, æquale eſſe quadra-
to diametri cubi K L, & diametri circuli
triangulum B C G, cir-
cumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmen-
tum est rectæ lineæ extrema ac media ratio-
ne diuisæ, quæ duplum potest lateris Octæ-
dri in eo descripti.

11. serij dec. QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descri-
pti duplum potens lateris octaedri; coniungit bifarias sectio-
nes laterum oppositorum Dodecaedri, ut manifestum est
ex propos. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones con-
iungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmen-
tum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. lib. 13. Lique-
t, latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema
ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris octaedri
in eo descripti; cum huiusmodi recta coniungat bifarias se-
ctiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem mi-
nus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll.
Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est, &c. Quod
erat demonstrandum.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui
ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyra-
midis in eo descriptæ sesquialterum.

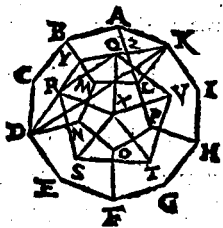
13. serij dec. CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Ico-
saedro describantur, ut docuimus in scholio propos. ultime
lib. 15. eademque sphaera comprehendantur; eadem erit dia-
meter cubi, & diameter sphaeræ pyramidem circumdantis:
potest autem diameter sphaeræ sesquialterum lateris pyrami-
dis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo &
Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris Pyrami-
dis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter cir-
culi basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest
lateris

lateris Icofaedri, ut in demonstratione propof. 15. huius lib. demonftrauimus. Igitur diameter Icofaedri potens & diametrum cubi in ipfo defcripti, & diametrum circuli bafin Icofaedri circumdantis, ex coroll. propof. 15. huius lib. potest & fumpfius lateris fefquitercium, nimirum diametrum circuli circa bafim Icofaedri defcripti, & lateris Pyramidis in eo defcriptæ fefquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonftrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

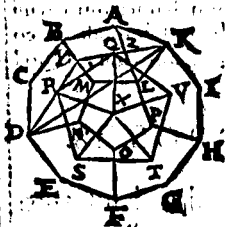
LATVS Dodecaedri ad fibi infcripti Icofaedri latus fe habet, ut minus fegmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppofitum ductæ, atque extrema ac media ratione diuifæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſitæ.

Si igitur dimidium Dodecaedri contentum ſex pentagonis ABMLK, LKIH P, PHGFO, OFBDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet uidelicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque trianguſa Icofaedri in Dodecaedro defcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, ut oſtenſum eſt in demonſtratione propof. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propof. 10. lib. 12. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſe-



2. sextidec.

abitur perpendicularis KY , in Z , extrema ac media ratione. Dico, ita esse latus Dodecaedri LM , ad latus Icosaedri sibi inscripti QR , ut KZ , minus segmentum perpendicularis KY , ad rectam QY , inter centrum Q , & latus BM , interceptam. Subtensa enim recta



DK , quæ, per demonstrata in scholio propof. 13. lib. 13. latusest cubi, in quo Dodecaedrũ propofitum describitur; erit LM , latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK , si extrema ac media ratione secetur, ex eodẽ scholio propof. 13. lib. 13. Quoniã uero latera YD , YK , trianguli YDK , pro-

portionaliter fecantur in R , & Q ; (sunt enim RD , QK , semidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR , YQ , distantie nimirũ recte BM , a centeris R , & Q , eorundem circulorũ æqualium) parallela erit QR , ipsi DK ; Ideoq; triangulũ YRQ , triangulo YDK , simile, per coroll. propof. 4. lib. 6. Quã ob rẽ erit, ut DK , ad KY , ita QR , ad QY . Ut autẽ DK , tota ad totã KY , ita est LM , minus segmentũ ad minus KZ . Ut igitur LM , ad KZ , ita erit QR , ad QY . Et permuando, ut LM , latus Dodecaedri, ad QR , latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ , minus segmentum perpendicularis KY , ad QY , inter centrum Q , & latus BM , interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.

2. sexti.

4. sexti.

1. quartide.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum a toto latere Icosaedri sublatum; A reliqua quoque recta pars rursus tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA

CIRCA pentagonum $ABCDE$, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F ; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excidentur constituentia angulum solidum Icosaedri G , ex q̄s, quæ in propoſ. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI . Quoniam igitur arcus ABC , AED , æquales sunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH , AEI , cum sint tertie partes eiusdem circumferentiæ, sunt reliqui arcus HC , ID , æquales, proptereaque rectæ HI , CD ; parallelæ, per scholium propoſ. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F , perpendicularis deducatur FKL , secans rectas



3. tercij.

HI , CD , bisariam in K , & L , coniunganturque rectæ FC , FD . Suscipiantur insuper triangulorum æquilateralorum GBC , GCD , centra N , & O , per quæ rectæ ducantur GNP , GOL , diidentes, per scholium propoſ. 12. lib. 13. latera opposita BC , CD , bisariam, & ad angulos rectos: Itaque recta GO , in punctum L , in quo diuisa est CD , bisariam, cader. Iungantur autem centra N , O , recta NO , quæ, ut constat ex demonstratis in propoſ. 5. lib. 15. latus erit Dodecaedri in Icosaedro descripti. Denique BP , dimidium lateris Icosaedri secetur in Q , extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ , ex toto latere BC , reliquæ CQ , tertia pars detrahatur CR . Dico reliquam QR , æqualem esse lateri Dodecaedri NO . Cum enim FL , perpendicularis a latere trianguli æquilateri HI , secetur in K , extrema ac media ratione; (quod FL , hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK , per corollariū propositionis 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento FK , æqualis recta KM , per corollariū propoſ. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonstrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. maius segmentum KM , sectum quoque in L , a minori segmento KL , extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM , excedit rectam FL , minore dimidiæ suūpsius

EUCLID. GEOM.

segmento L M. Quoniam uero iuncta P L, est latus petita
goni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, de-
scripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio ultimo lib. 4.



ideoque similis illi; erunt triangula
 FCD, FPL , (si recta duceretur FP),
 similia, per scholium propof. 2. & lib. 6.
 Quare ut FC , ad CD , ita erit FL , ad
 LP ; & permutando, ut FC , ad FL ,
 ita CD , ad LP : Atqui FC , hoc est,
 sibi æqualis FM , excedit rectam FL ,
 minore segmento dimidii ipsius FM ,
 nempe minore segmento rectæ KM ,
 ut ostendimus. Recta igitur CD ,

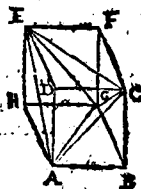
uel sibi æqualis BC , excedet quoque rectam LP , minore segmento dimidij ipsius $B C$, nimirum minore segmento rectæ BP , quod fuit $B Q$; ideoque reliqua $C Q$, rectæ PL , æqualis erit. Rursus quia GP , GL , proportionaliter secantur in centris N, O ; (quod GN, GO , duplæ sint ipsarum NP, OL , per coroll. propof. 18. lib. 4.) parallelæ erunt PL, NO ; ac proinde triangulum $GN O$, triangulo GPL , simile, ex coroll. propof. 4. lib. 6. Igitur erit ut GP , ad PL , ita GN , ad NO ; & permutando, ut GP , ad GN , ita PL , ad NO : Est autem GP , ipsius GN , sesquialtera, per coroll. propof. 18. lib. 4. Quare & PL , hoc est, sibi æqualis $C Q$, sesquialtera erit ipsius NO ; Ac proinde, cum $C Q$, sesquialtera quoque sit rectæ QR . (Nam qualium partium 3. est $C Q$, talium 1. est CR , per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR .) æqualis erit QR , ipsi NO , lateri Dodecaedri in Ico sacdro descrypti. Si dimidium itaque lateris Dodecaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inſcriptæ Pyramidis tri-
plus eſt.

**In cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum
pyramide**

pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, uertices uero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non resident quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin A C E, fundatur pyramis A C E D; super basin A E G, pyramis A E G H; super basin C E G, pyramis C E G F; & super basin A C G, pyramis A C G B: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. defin. lib. 11.



cum contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine, & magnitudine: Quælibet enim constat tribus æqualibus, & similibus triangulis, dimidijs scilicet quadratorum cubi, ut patet, & uno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ.) Sic autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sexuplus; (Nam exempli causa, pyramis A B C G, basim habens A B C, dimidium basis cubi B D, altitudinem uero eandem, quam cubus, rectam uidelicet B G, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. prismatis eandem basim, & altitudinem habentis. Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem A B C G, sextam partem esse cubi, proptereaque cubum pyramidis illius esse sexuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Atque proinde reliquam pyramidem æquilateram A C E G, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.

A L I T E R. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphaera comprehendantur, ut docuimus in scholio proposit. ultimæ lib. 12, Cubus uero triplus sit pyramidis in eadem sphaera descriptæ, ut demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis; quandoquidem hæc in eadem sphaera, in qua cubus, continetur.

THEOR.

32. vnder

32. quæsti-
decim.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri du-
pla est.

In pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum E I K-
G H F. Dico Pyramidem octaedri esse duplam. Cum enim
octaedrum circumsistent quatuor pyramides pyramidi A B-
CD, similes, ut propof. 3. lib. 12. demon-



stratum est fundare super quatuor ba-
ses octaedri E G H, E F I, F G K, H I K;
quales sunt pyramides B G H A, E F I B,
F G K C, H I K D: (quæ quidem equa-
les inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum
contineantur triangulis similibus, equali-

busque numero & magnitudine, quippe quæ similia sint ba-
sibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propof. 4. lib.
6. lateraque habeant equalia, nempe dimidia laterum æqua-
lium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione pro-
pos. 2. lib. 12.) Habeant autem pyramides similes propor-
tionem homologorum laterum, triplicatâ; Erit pyramis A B-
CD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octae-
dro circumpositarum; (cum octupla proportio, sit propor-
tionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad
latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, ut in his
numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illa-
rum quatuor pyramidum pars erit octava pyramidis A B-
CD; Ac idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor
partes octavas, id est, dimidium pyramidis ABCD, con-
ficient. Quare & reliquum octaedrum E I K G H F, reli-
qua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Py-
ramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat
demonstrandum.

8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextu-
plus est.

QVONIAM si pyramisin cuba describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, ut constat ex secunda demonstratione propof. 3. lib. 15. Est autem cubus pyramidis in eo descriptę triplus, & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, ut qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti Octaedri sextuplus est. Quod erat ostendendum.

20. sextide.
21. sextide.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

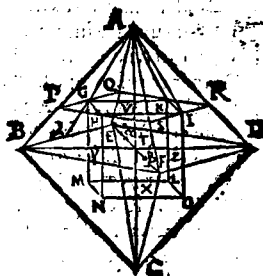
OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectę PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallela, quadratum cōstituentes PQRS, ut in propof. 4. lib. 15. est demonstratum; quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quę ostendimus in coroll. 1. propof. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholion propof. 14 lib. 11. Est autem V, centrū quadrati PQRS: (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter, erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales.

15. undec.

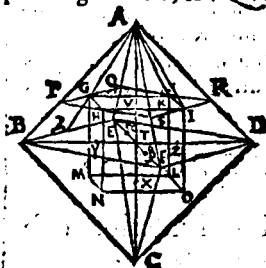
17. undec.

Intelli-



47. primi.

Intelligentur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. Quoniam
gitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ,
æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ,
quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 1. dem



pro communi quadrato
rectæ AV; æqualia erunt
reliqua quadrata rectarum
VP, VQ, proptereaque
& rectę ipse VP, VQ,
æquales. Non aliter osten
demus & hęc, & inter se
æquales esse rectas VR,
VS. Quare V, centrum
est quadrati PQRS.)

Igitur & centrum erit qua

drati GHIK, in illo descripti, per scholium ultimum lib. 4.
Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bisariam in G, K,
I, H, ut constar ex demonstratis in propof. 4. lib. 15. Eodem
argumento concludemus X, centrum esse basis LMNO;
Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β,
centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta A γ,
per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla
ipsius Gγ, per coroll. propof. 8. lib. 14. Cum ergo plana PR,
BD, parallela secent rectas A γ, AT, proportionaliter; du
pla quoque erit AV, ipsius VT. Eodem modo dupla pro
babitur CX, ipsius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT,
similiter secantur in V, & X; æquales erunt AV, CX; nec
non VT, XT. Recta igitur VX, coniungens centra basium
cubi oppositarum bisariam secatur in T. Quare cum ad
eundem modum YZ, αβ, bisariam secantur in T; erit T,
centrum cubi; cum, per coroll. 1. propof. 5. lib. 13. rectę cen
tra basium cubi oppositarum connectentes se se bisariam se
cant in centro. Iam uero, quoniam VX, ipsius VT, dupla
est; dupla autem fuit & AV, eiusdem VT; æqualis erit
AV, ipsi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GH
I, KA, ductis rectis AI, AK, tertia pars est cubi, seu prisma
tis GO, per coroll. 1. propof. 7. lib. 12. cum utriusque eadem
sit basis GI, & altitudines æquales AV, VX: Est autem
pyramis PQRSA, pyramidis GHIA, dupla, quod &
basis

17. undec.

6. duodec.

basis P Q R S, dupla sit basis GHIK, illi inscriptæ. Igitur pyramis P Q R S A, duas tertias partes cubi G O, continet. Quia uero pyramides BEDFA, P Q R S A, similes existentes, per defn. 9. lib. 11. (cum triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4, lib. 6. triangulis illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus A B, lateris A P, sesquialterum, quod & recta A γ, proportionaliter secta ipsi A B, sesquialtera sit ipsius A G; Erit pyramis B E D F A, ad pyramidem P Q R S A, ut 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. ut in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum A B C D E F, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem P Q R S A, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis P Q R S A, talium 12. esse cubum G O, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum A B C D E F, ad cubum G O, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

8. duodec.
2. sexii.

COROLLARIUM. I.

Idem ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti, ostendimus enim T, utriusque esse centrum.

COROLLARIUM. II.

PERSPICUE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem uidelicet demonstraui-
mus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

11. sextide.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRUM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVO-

23. sextide.

20. sextide.

QVONIAM ut ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibi; inscripta Pyramis in eodē octaedro describuntur; Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesqui alterum; Et cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis triplus: Qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & eandem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN Pyramide $ABDC$, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G, H , centra duarum basium ACD, ABD , commune latus AD , habentium, per quæ ex angulis C, B , ad latus commune oppositum AD , rectæ ducantur CGS, BHS , diuidentes latus AD , bisariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S . Connexa uero recta GH , cum BH, CG , duplæ sint rectarum HS, GS , ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secantur BS, CS , parallæle erunt BC, HG , & per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum HGS , triangulo BCS , simile. Erit ergo ut BC , ad CS , ita HG , ad GS ; & permutando, ut BC , ad HG , ita CS , ad GS : Est autem CS , ipsius GS , tripla. Igitur & BC , tripla erit ipsius HG . Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, ut in propos. 1. lib. 15. demonstratum est; Rectæ uero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, ut perspicuum est ex demonstratis in propos.



2. tertij.

4. sexti.

18. quartidecimi.

pos. 18. lib. 15. (ibi enim recta GH , iungens centra G , H ,
 basium ACD , ABD , commune latus $A'D$, habentium dia-
 meter fuit basis $GNHQ$, cubi descripti in pyramide.) Erit
 latus pyramidis BC , diameter basis cubi pyramidem AB
 DC , circumscribentis, GH , uero diameter basis cubi in ea-
 dem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant propor-
 tionem diametri quadratorum, quam latera; (Est enim ut
 diameter unius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius
 quadrati ad suum latus, quod proportio utraque sit poten-
 tia dupla: Permutando ergo, ut diameter ad diametrum, ita
 latus ad latus) habeat autem BC , diameter basis cubi cir-
 cumscripti ad GH , diametrum basis cubi inscripti proportio-
 nem triplam, ut ostendimus; habebit quoque latus cubi cir-
 cumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At
 uero cubi, cum sint parallelepipeda similia, proportionem
 habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur
 circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi $ABDC$,
 proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim propor-
 tio triplicata est triplæ proportionis, ut hic 1. 3. 9. 27. uide-
 re licet. Quam ob rem, cum cubus ad pyramidem inscri-
 ptam proportionem habeat, quam 27. ad 9. uidelicet tri-
 plam; Habebit pyramis $ABDC$, ad cubum sibi inscrip-
 tum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam;
 Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod
 erat demonstrandum.

33. undec.

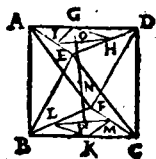
20. sextide.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum
 Icosaedrum proportionem habet, quâ duæ
 bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN octaedro $ABCD.EF$, concipiatur descriptum Icosæ-
 drum. Dico Octaedrum esse ad Icosaedrum, ut sunt duæ
 bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Cum enim ut ex
 demonstratis in propof. 16. lib. 15. liquet, octo bases Icosæ-
 dri in octo basibus octaedri reponantur; Sint duæ bases Icosæ-
 dri GHI , KLM , in duabus basibus oppositis octaedri ADE ,
 BCF

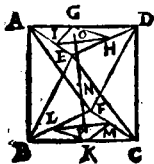
B C F, Atque ex N, centro octaedri, nec non & Icofaedri (idem enim utriusque est centrum, per coroll. 3. propof. 6. lib. 15.) ad bafim A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, feu circuli ipfum ambientis,



ex coroll. lemm. 3. propof. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque est trianguli G H I, per coroll. 2. propof. 16. lib. 15. Cū ergo plana oppofita A D E, B C F, parallela fint, ex coroll. 4. propof. 14. lib. 13. Recta ON, producta perpendicularis quoque erit, per

scholion propof. 14. lib. 11. ad planum B C F, in cuiusque proterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta altitudo est & octaedri, & Icofaedri fubi infcripti. Quia uero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo est N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icofaedrū in 20. pyramides æquales eiusdem altitudinis N O: Est autem prisma triplum pyramidis eandem cum ipfo & bafim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propof. 7. lib. 12. Erit prisma, cuius bafis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At uero prisma, cuius eadem bafis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum est prismatis, cuius bafis eadem A D E, altitudo uero O N, per ea, quæ in scholio propof. 14. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cuius bafis A D E, & altitudo O P, æquale est sex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex conftituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super bafim A D E, & sub altitudine O P, conftitui; prisma uidelicet, cuius bafis tertia pars est trianguli A D E, altitudo uero eadem O P. Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super bafem A D E, & sub altitudine O P; cum per ea, quæ docuimus ad propof. 7. lib. 12. prismata eiusdem altitudinis inter fe fint, ut bafes. Quare duo prismata, quorum vnus bafis A D E, & altitudo O P, alterius autem bafis tertia pars bafis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia sunt octaedro A B C D E F. Non fecus demonftrabimus prisma, cuius bafis G H I, altitudo uero O P, æquale esse

esse sex pyramidibus Icoſaedri : proptereaque triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis GHI , altitudo autem eadem OP , æquale esse 18. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icoſaedri constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem GHI , & sub altitudine OP , constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI , altitudo uero eadem OP ; Atque idcirco duo prismata, quorum unius basis tripla sit trianguli GHI , altitudo autem OP , alterius uero basis tertia pars basis GHI , & altitudo eadem OP , æqualia erunt Icoſaedro in dicto octaedro descripto. Iam uero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icoſaedro æqualia, sint, per ea, quæ ostendimus ad propoſ. 7. lib. 12. ut bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE , continent, (cum unius basis sit ADE , nempe tres tertie partes ipsius ADE , completens, alterius uero basis tertia pars ipsius ADE , ad bases prismatum Icoſaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI , comprehendentes; (cum unius basis tripla sit trianguli GHI , nimirum nouem tertias partes ipsius GHI , continens, alterius uero basis tertia pars ipsius GHI ,) Sint autem, ut quatuor tertie partes trianguli ADE , ad decem partes tertias trianguli GHI , ita duæ tertie partes ipsius ADE , nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius GHI , hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et ut duæ tertie partes ipsius ADE , ad quinque tertias partes ipsius GHI , ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauiſmus in ſcholio propoſ. 4. lib. 6. sex tertie partes ipsius ADE , (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum unius basis constituentes, cum sex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius GHI , (id est, ad quinque bases Icoſaedri, triplum quinque tertiarum unius basis completentes, cum quindecim tertias complectantur, Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icoſaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icoſaedrum, ut



15. quinti.

duæ bases octaedri ad quinque bases Icofaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icofaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptũ Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icofaedri ad latus cubi in eadem cum Icofaedro sphæra descripti, & ex proportionem triplicata eius, quam habet diameter Icofaedri ad rectam centra basium Icofaedri oppositarum coniungentem.

EXHIBEATUR Icofaedrum ABC, in quo recta DE, coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit AC; & F, sit latus Icofaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icofaedro descripti. Dico proportionẽ Icofaedri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportionem F, lateris Icofaedri ad G, latus cubi, & ex



proportionem triplicata diametri AC, ad rectam DE. Cum enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icofaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icofaedri, atque adeo oppositos angulos in centris basium oppo-

sitarum; Erit DE, diameter dodecaedri in Icofaedro ABC, descripti, cum copulet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icofaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icofaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri AC, hoc est, in eadem sphæra, in qua Icofaedrum ABC, descripto, cum utriusque eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri DE, intra Icofaedrum uide-

licet,

licet ABC, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nēpe Icosaedri ABC, ad tertiam, uidelicet ad Dodecaedrum diametri DE, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadem sphaera cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri AC ad Dodecaedrum diametri DE, in Icosaedro ABC, descriptum. Cum ergo Icosaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem sphaera comprehensum sit ut F, latus Icosaedri ad G, latus cubi. (Nam Dodecaedrum diametri AC, ad Icosaedrum ABC, eiusdem diametri est, ut G, latus cubi ad F, latus Icosaedri. Conuertendo igitur, erit Icosaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, ut F, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) At uero Dodecaedrum eiusdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE, in Icosaedro uidelicet ABC, descriptum proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 1. Manifestum est, proportionem Icosaedri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametri DE, componi quoque ex proportionem F, lateris Icosaedri, ad G, latus cubi, & ex proportionem triplicatam proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

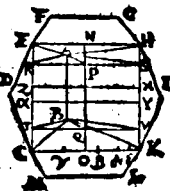
11. quarti
decimi.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At uero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineam

quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

Q V O N I A M ex demonstratis propof. 8. lib. 1. e. quatuor latera basis cubi in Dodæcaedro defcripti subterdunt quatuor angulos quatuor bafium Dodæcaedri ad unum latus convenientium; ſint huiusmodi pentagona $ABCDE$, $EFGHA$, $AHIKB$, $BKLMC$, convenientia ad latus AB ; duo quidem $ABCDE$, $AHIKB$, ſecundum latus



idem commune AB , alia autem duo $A EFGH$, $BCMLK$, ſecundum angulos EAH , CBK . His uero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi $ECKH$, ſuper quod conſiſtat pars Dodæcaedri cubum circunſcribentis, ſolidum ſcilicet $CBKHA E$, conſiſtens quinque planis CBK , EAH , $ABCE$, $ABKH$, $ECKH$; quorū duo CBK ,

4. primi.

EAH , trianguſa ſunt æqualia, cum latera pentagoni BCE , BK , æqualia ſint lateribus pentagoni AE , AH , anguloſque comprehendant æquales pentagonorum EAH , CBK . Duo uero $ABCE$, $ABKH$, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona $ABCDE$, $ABKIH$, per hypoteſin, & trianguſa ex ipſis ablata CDE , HIK , æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia $ABCE$, $ABKH$;) Quintum denique eſt bafis cubi inſcripti $ECKH$. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huius ſimilia & æqualia, per 10. defin. lib. 1. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita ut Dodæcaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiusmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circunſtantiſus conſtatū, æqualē eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit a $C E H K$, baſe cubi, reſtanguſo contento ſub latere cubi CK , tertiaq; parte minoris ſegmenti eiſdem lateris cubi; at uero altitudo ab alitudo, ſeu latere cubi, minore ſegmento eiſdem lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus BH , CK , biſariam in N , O , iunctaq; recta NO , quæ parallela eſt lateri pentagoni AB , & in quā cadunt

4. primi.

cadunt perpendiculares AP, BQ , demissæ in planum EK , ut constat ex demonstratis propof. 17. lib. 13. (Exprimunt enim linæ NO, AB, AP, BQ , huius figuræ lineas LN, VX, VR, XS , figuræ propof. 17. lib. 13.) Erit utraque recta AB, PQ , maius segmentum lateris cubi NO , uel HQ , & utraque AP, BQ , equalis dimidio lateris pentagoni AB , seu maioris segmenti lateris cubi, ut liquet ex eadem propof. 17. lib. 13. Ac propterea si per P, Q , ducantur rectæ RS, TV , rectis EH, CK , parallelæ; erunt quoque RT, SV , maiora segmenta laterum EC, HK ; atque adeo ER, CT , simul, & HS, KV , simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV , constituentur duæ pyramides $ERSHA, CTVKB$, quæ per coroll. propof. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cum & earum bases $ERSH, TCKV$, & altitudines PA, QB , æquales sint; consistentque extra solidum $ABTVSR$. Quoniam autem AS , ipsi BV , & AR , ipsi BT , æqualis est, & parallela, cum coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT ; parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV , atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propof. 8. lib. 1. cum latera unius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum $ABTVSR$, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis ARS, BTV , & tribus parallelogrammis RV, AT, AV , prisma est, ex definitione.

33. primi.

15. undec.

Iam uero, cum ostensum sit, rectas HS, KV , minus segmentum efficere lateris HK , fiat illis æqualis VX , dupla nimirum utriusque HS , & KV ; & ipsius VX , minoris segmenti lateris HK , duas tertias partes contineat Y , tertia uero pars sit XY , ducanturque $XZ, Y\alpha$, rectæ TV , parallelæ. Quoniam igitur pyramides $ERSHA, CTVKB$, æquales sunt ostensæ; utriusque uero earum dupla est pyramis super basem TX , & sub eadem altitudine PA , uel QB , constituta, quod & basis TX , dupla sit basis CV , uel RH ; Æqualis erit pyramis $TVXZB$, utrique pyramidi $ERSHA, CTVKB$, simul: At pyramis $TVXZB$, duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem TX , & altitudo eadem QB , uertex uero linea recta, pars uidelicet rectæ AB , quæ æqualis sit ipsi VX , ut demonstraui in scholio

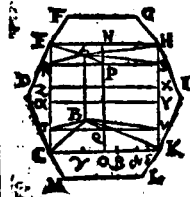
6. duodec.

1. sexti.

EVLID. GEOM.

1. *sexth.*

propof. 7. lib. 12. Item eiuſdem priſmatis, cuius baſis TX , & altitudo QB , uertex uero pars rectæ AB , æqualis ipſi VX , duas tertias partes continet priſma, cuius baſis TY , & altitudo eadem QB , uertex uero pars rectæ AB , æqualis ipſi VY , ex ſcholio propof. 25. lib. 11. quod & baſis TY , duas partes tertias completatur baſis TX . Igitur & priſma, cuius baſis TY , & altitudo QB , uertex uero pars rectæ AB , æqualis ipſi VY , æquale erit duabus pyramidibus $ERSHA$, $CTVKB$; Ac proinde hoc priſma appoſitum priſmati $ABTVSR$, efficiet priſma æquale ſolido $CBKHA E$, habens baſin rectangulum contentum ſub latere cubi TV , & ſub recta cõpoſita ex VY , duas tertias partes minoris ſegmenti VX , cõprehendente, & ex VS , maiore ſegmento, ideoque a baſe cubi deficientem rectangulo EX , contento ſub latere cubi XY , & ſub XY ,



tertia parte minoris ſegmenti VX . Nõ diſſimili ratione inueſtigabimus alia ſimilia quinque priſmata æqualia & proxime dicto priſmati. & reliquis quinque ſolidis ſuper reliquas quinque cubi baſes conſtitutis. Sex igitur huiuſmodi priſmata æqualia

erunt ſex illis ſolidis, exceſſui nimirum Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum. Quia autem duo quelibet priſmata illiuſmodi inter ſe aptata componunt parallelepipedum eiuſdem altitudinis; conſtruentur ex ſex illis priſmatis tria parallelepipeda ſub eadem altitudine QB , quæ æqualis eſt dimidio lateris pentagoni AB , ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, & ſuper baſes a baſe cubi deficientes ſingulas rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter ſe compoſitis exurget parallelepipedum exceſſui eidem Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum æquale, cuius baſis a baſe cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo uero æqualis eſt tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc eſt, altitudini QB , quæ æqualis fuit dimidio maioris ſegmenti lateris cubi, ter ſumptæ. Hanc igitur altitudinẽ dico ab altitudine, ſeu latere cubi deficte

ficet minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β : Itemq; C β , maius segmentum, & β K, minus bifariam in γ , δ ; atq; ex β K, abscindatur β ϵ , æqualis ipsi γ , seu C γ , ita ut C γ , uel γ β , uel β ϵ , dimidia pars maioris segmenti C β , æqualis sit ipsi Q B, & C ϵ , toti altitudini præfati parallelepipedo. Quoniam igitur est, ut rota CK, ad maius segmentum C β , ita maius segmentum C β , ad minus β K; erit quoque ut CO, dimidia ipsius CK, ad C γ , uel β ϵ , dimidiam ipsius C β , ita C γ , uel β ϵ , ad β δ , dimidiam ipsius β K; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C γ , uel β ϵ , & minus β δ . Quare & β δ , minus segmentum secabit β ϵ , maius segmentum extrema ac media ratione, ut demonstrauimus ad propos. 3. lib. 13 eritq; maius segmentum β δ , minus autem δ ϵ ; Ac propterea rursus δ ϵ , minus segmentum secabit rectam δ K, maiori segmento β δ , æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit ϵ K. Deficit igitur C ϵ , altitudo præfati parallelepipedo ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmento ϵ K, rectæ δ K, uel sibi æqualis rectæ β δ , quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostendit. Constat ergo basem parallelepipedo, quo dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum a base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem uero ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Vnde elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit; Alterius uero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum

addatur illi parallelepipedo, quo cubum a Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, quæ cubus, altitudo uero a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, ut Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, defunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo uero alter cubus, ut demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportionem triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportionem lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphaera cum cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At uero F, latus cubi,



& G, latus Icosaedri in eadem sphaera cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportionem triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportionem F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri.

Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta DE, centra

centra basium Dodecaedri oppositarum connectens , diameter Icosaedri inscripti ; Ac propterea Dodecaedrum , cuius diameter D E , in eadem sphaera cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C , collocato describetur , cum eandem habeant diametrum D E . Intellectis iam tribus magnitudinibus , Dodecaedro scilicet A B C ; Dodecaedro diametri D E ; & Icosaedro eiusdem diametri D E , intra Dodecaedrum uidelicet A B C , descripto ; Proportio Dodecaedri A B C , primae magnitudinis , ad Icosaedrum sibi inscriptum , tertiam magnitudinem , componetur per ea , quae ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata , ex proportionibus Dodecaedri A B C , primae magnitudinis , ad Dodecaedrum diametri D E , secundae magnitudinem , & Dodecaedri ex diametro D E , descripti secundae magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C , descriptum , tertiam magnitudinem . Cum ergo Dodecaedrum A B C , ad Dodecaedrum diametri D E , proportionem habeat triplicatam diametri A C , ad diametrum D E , ex coroll. propos. 17. lib. 12. Dodecaedrum uero diametri D E , ad Icosaedrum eiusdem diametri D E , quod nimirum in Dodecaedro A B C , describitur , proportionem habeat , quam F , latus cubi ad G , latus Icosaedri ; liquido constat proportionem Dodecaedri A B C , ad Icosaedrum sibi inscriptum , cuius scilicet diameter D E , componi quoque ex triplicata proportionem proportionis diametri A C , ad diametrum D E , rectam uidelicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem , & ex proportionem F , lateris cubi , ad G , latus Icosaedri , in eadem sphaera cum cubo descripti . Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam , &c. Quod erat demonstrandum .

11. quarti
decimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis , in qua describitur , duas nonas partes continet , minus duobus parallelepipedis , pro-

rum

rum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo uero tertiæ parti minoris segmēti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo uero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

25. fesside. QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, ut ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis in qua describitur, nona pars est, cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, ut magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propof. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in uerbis propositionis huius, non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis, adeo ut si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

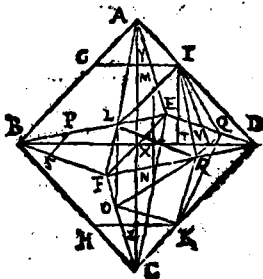
THEOR.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscri-
ptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius
basis est quadratum lateris Icosaedri; alti-
tudo uero maius segmentum semidiametri
octaedri extrema ac media a ratione sectæ.

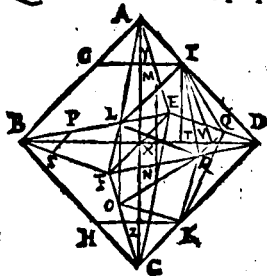
OCTAEDRUM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit
ABCDEF, repetita figura propof. 16. lib. 15. ubi demon-
stratum est, uiginti triangula Icosaedrum inscriptum com-
ponentia esse IQR, KQ. A.

R, GIL, GIM, GPS, HP, S, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, I L R, quorum octo pos-
sirema octo basibus etae
dri sunt imposita, secantia
videlicet omnia eius. late-
ra extrema ac media ra-
tione; Item rectam I T



perpendicularem ad BD, æqualē esse maiori segmentō XY,
semidiametri AX. Dico octaedrū ABCDEF, superare Ico-
saedrū sibi inscriptū parallelepipedo, cuius basis est quadrā-
tum lateris Icosaedri QR, altitudo uero IT, maius segmē-
tum semidiametri AX. Cū enim in quatuor basibus octae-
dri DEA, DFA, DEB, DFC, angulū solidū octaedri D, cō-
stituentibus posite sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR,
KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in
eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula IQD,
IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Ico-
saedri, IQR, KQR, & commune triangulum DQR, con-
stituentur duæ pyramides super communē basem DQR,
nempe IDQR, K DQR, inter se æquale, per coroll.
propos. 5. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem
IT, maius uidelicet segmentum semidiametri octaedri. (Nam
quemad-

34 primi.



quemadmodum $A X$, secta est a recta $G I$, in Y , extrema ac media ratione, ita quoque secta est $C X$, a recta $H K$, in Z . Quare si ex K , ad $B D$, perpendicularis ducatur, altitudo

nimirum pyramidis $K D-Q R$; erit ea æqualis rectæ $Z X$, maiori segmento semidiametri $C X$, hoc est ipsi $I T$. Quæ quidem pyramides extra Icosædrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se & distis duabus

æquales, extra Icosædrum prædictum: Ita ut octaedrum superet Icosædrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum $D Q R$, dimidium est quadrati lateris $D Q$, (cum $D Q$, $D R$, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumque contineant rectum.) erit recta $Q R$, diameter illius quadrati, Ac proinde quadratum ipsius $Q R$, duplum erit quadrati lateris $D Q$, ideoque quadruplum trianguli $D Q R$. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, & altitudo $I T$, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum $D Q R$, & altitudo eadē $I T$, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis $D Q R$, & altitudo $I T$, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis $I D Q R$, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosædrum consistere diximus. Prisma ergo, uel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, & altitudo $I T$, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosædrum ambientes; A Equale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, lateris nimirum Icosædri, & altitudo $I T$, maius segmentum semidiametri $A X$, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra

pra Icofaedrum sibi inscriptum; Ac proinde octaedrum superabit Icofaedrum dicto prismate, uel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icofaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icofaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hence inferitur, Pyramidem excedere duplum Icofaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icofaedri, altitudo uero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icofaedri coniungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icofaedrum imponatur, Icofaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum; octaedrum autem superet Icofaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icofaedri, nempe recta QR, altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri, recta uide licet IT, seu YX: Fit, ut octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, (quod Pyramis dupla sit sibi inscripti octaedri) superet idem Icofaedrum in octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedo, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icofaedri, altitudo uero recta YZ, coniungens bifarias sectiones laterum Icofaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata a nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icofaedri, altitudo uero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icofaedri copulans, Pyramis duplum Icofaedri sibi inscripti excedit.

31. sextide.

21. sextide.

INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS duarum basium cuiuscunque solidi regularis, unius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis preceptore.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, unius ad alteram, inuenire.

I.

EUCLID. GEOM.

SIT Pyramis ABCD, cuius latere BD, bisariam
 secto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppositis re-
 ctis ducantur AE, CE: quae cum perpendicularares sint
 ad BD, communem sectionem pla-
 norum ABD, CBD, in quibus ex-
 stant, ut ostensum est in scholio pro-
 pos. 12. huius lib. angulum incli-
 nationis AEC, basium ABD, CBD,



continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo aequalem
 exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assum-
 tur FGH, triangulum equilaterum super rectam FG,
 lateri pyramidis aequalem constructum, atque idcirco
 triangulo cuiusque pyramidis propositae, ipsi nimi-
 rum ABD, aequale, in quo ducta HI, perpendicu-
 lari ad FG, constituitur super FG, triangulum FGH, habet
 utrumque latus FK, GK, aequale perpendiculari HI, hoc est,
 utrique perpendiculari AE, CE, cum perpendicularares HI,
 AE, CE, sint aequales in triangulis aequalibus. Dico an-
 gulum FKG, aequale esse angulo inclinationis AEC, ba-
 sium ABD, CBD. Cum n. latera KF, KG, aequalia sint la-
 teribus EA, EC; & basis FG, basi AC: Aequales erunt
 anguli FKG, AEC. Dico insuper angulum inclinatio-
 nis AEC, acutum esse. Cum n. latus AD, non illi equa-
 le AC, sesquitercium sit potentia utriusque perpendicu-
 laris AE, CE: qualium partium 4. ponetur quadratum
 rectae AC, talium 3. erit quadratum utriusque rectae AE,
 CE; ideoque earundem partium 6. erunt ambo simul qua-
 drata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC,
 quadratum lateris AC, minus sit quadratis simul la-
 terum AE, CE, acutus erit angulus AEC, ut in
 scholio propos. 13. lib. 2. demonstraui.

8. primi.

12. quarti
 decimi.

COROL.

COROLLARIUM.

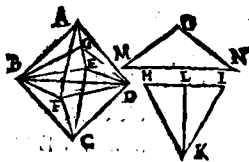
FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum continentur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt AE, CE , subtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit AC ; omnes erunt inter se æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & latera pyramidis eosdem subtendentia.

8. primi

ANGULVM inclinationis duarum octaedri basium, unius ad alteram, reperire.

II.

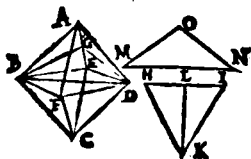
EXHIBEATUR Octaedrum $ABCDEF$, cuius diameter BD . Ex angulis B, D , ad latus AE , triangulis ABE, ADE , commune, bisatramque sectionem in G , rectæ ducantur BG, DG ; quæ cū perpendiculares sint ad AE , communem sectionem planorum ABE, ADE , in quibus existunt (quod in triangu-



lis BGA, BGE , anguli ad G , æquales sint, &c.) continebunt angulum BGD , inclinationis basium ABE, ADE , per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK , triangulum æquilaterum super rectam HI , lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propositi, triangulo scilicet ABE , æquale, in quo ducta KL , perpendiculari ad HI , constitutatur super recta MN , quæ æqualis sit diametro octaedri BD , hoc est, diametro quadrati $ABCD$, ex AB , latere octaedri descripti triangulū OMN , habēs utrunq; latus MO, NO , perpendiculari KL , æquale,

8. primi

aquale, hoc est, utrique perpendiculari BG, DG, cum perpendicularibus KL, BG, DG, in triangulis aequalibus aequales sint. Dico angulum MON, aequalem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON, equalia sunt lateribus GB, GD; & basis MN, basi



BD; Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico praeterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum. Cum enim diameter

8. primi.

14. secunde.
12. quarti
decimi.

octaedri BD, dupla sit potentia lateris AB; latus uero AB, potentia sesquitertium rectae BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemque 3. quadratum rectae BG; ideoque ambo simul quadrata rectorum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius est quadratis simul laterum GB, GD; Ac propterea angulus BGD, obtusus erit, ut in scholio propof. 12. lib. 2. ostendimus.

COROLLARIUM.

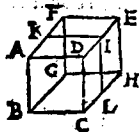
Hinc fit, omnes inclinationes basium octaedri aequales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, DG, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est BD; omnes inter se aequales erunt, quod & omnes illae perpendiculares, quae ipsos continent, aequales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes.

8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, unius ad alteram, inuenire.

SIT cubus $ABCDEFGH$, in quo secetur latus DE , bifariam in I , nec non & latera illi opposita in quadratis AE , EC , commune latus illud DE , habentibus, in punctis K , L . Deinde rectæ ducantur IK , IL ; quæ cum æquales, ac parallelæ sint lateribus EF , EH , (quod & KF , IE , inter se, nec non & IE , LH , inter se æquales existant, et parallelæ) ideoque angulos rectos ad latus DE , efficiant, continebunt KIL , angulum inclinationis basium AE , EC , ex defn. 6. lib. 11. Quoniam uero rectæ IK , IL , parallelæ existentes rectis EF , EH , & non in eodem cum illis plano, angulum KIL , æqualem continent angulo recto FEH ; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare ut angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, ut modo demonstramus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



33. primi.

10. undec.

COROLLARIUM.

QUOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum; perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

ANGVLVM inclinationis duarū basium Icosaedri, unius ad alteram, inuenire.

IIII.

ESTO pyramis $ABCDE$, una ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentagonum $ABCD$, ex quinque Icosaedri lateribus cōpositum, uertex autem E . Diuiso itaque latere AE , bifariam in G , ducantur ex triangulorum ABE , AEC , latus AG , commune ha-

P p bentium

ita ut rectæ AB, AE , rectas OM, ON , prorsus includant. Angulus ergo O , maior erit angulo BAE . At hic obtusus est. (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ a nobis sunt demonstrata in scholio propof. 3. 2. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum unum, ac insuper unius recti partem quintam. obtusus ergo erit, cum recto sit maior) multo igitur magis obtusus erit angulus MON , hoc est, sibi æqualis BGE .

2. 1. primi.

COROLLARIUM.

NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosædri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum anguli anguli inclinationum contineantur bipis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BO, EG , subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE ; omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales existant.

2. primi.

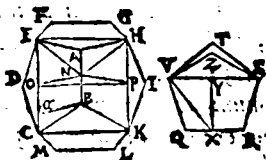
4. primi

ANGVLVM inclinationis duarum basium Dodecaedri, unius ad alteram, reperire.

V.

CUM per ea, quæ ostendimus in propof. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus coeuntium; sint huiusmodi pentagona $ABCDE, EFGH, AHIKB, BKL MC$, ad latus AB , conuenientia; duo quidem $ABCDE, AHIKB$, secundum idem latus commune AB ; alia autem duo $EFGH, BCLMK$, secundum angulos EAH, CBK . His porro pentagonis inscriptum sit

quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera sub-
tendunt quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A.



Diviso autem latere AB,
bisariam in N, ducantur
ex N, in planis pentago-
norum ABCDE, AB-
KIH, ad AB, perpen-
diculares NO, NP, se-
cantes latera EC, HK, in O, P, ad angulos quoque
rectos, cum rectis EC, HK, ipsi AB, sint parallelae,
per coroll. propos. 8. lib. 15. Comprehendunt igitur
NO, NP, angulum ONP, inclinationis basium
ABCDE, ABKI H. Cui equalem in quonvis pla-
no hac arte construemus. Super rectam QR, late-
ri Dodecaedri AB, equalem constituitur pentagonum
equilaterum & equiangulum QRS TV, hoc est,
cuius pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi ABCDE,
equale, cuius angulo T, recta subtendatur VS, equa-
lis existens recta EC, cum & latera TV, TS, lateri-
bus DC, DE, equalia sint, angulosque contineant
equales. Divisa deinde recta QR, bisariam in X,
ducatur a puncto X, ad QR, perpendicularis XT:
proptereaque perpendicularis ad VS, cum VS, sit pa-
rallala ipsi QR, per coroll. propos. 8. lib. 15. Ac po-
stremo super recta VS, triangulum fabricetur VZS,
habens utrumque latus ZV, ZS, perpendiculari XT,
equale. Dico angulum VZS, equalem esse angulo in-
clinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH,
VX; cum latera BA, AN, equalia sint lateribus
HA, AN; item lateribus VQ, QX, angulosque com-
prehendens aequales; aequales erunt & bases NE,
NH,

4. primi.

NH, VX , & anguli ANE, ANH, QXV ; 4. primi
 ideoque & residui ex rectis, anguli uidelicet ENO, HNP, VXY , aequales erunt. Quoniam igitur an-
 guli ENO, EON , trianguli ENO , aequales sunt
 angulis HNP, HPN , trianguli HNP ; nec non
 & angulis VXY, VYX , trianguli VXY ; (sunt
 enim EON, HPN, VYX , ostensi recti.) Et la-
 tus NE , lateribus NH, VX , aequale demonstratum
 Aequalia erunt reliqua latera NO, OE , reliquis la- 26. primi.
 teribus NP, PH , Item lateribus XY, YV . Quare
 rectae ZV, ZS , aequales existentes ipsi XY , rectis
 NO, NP , aequales erunt. Iam uero, quia OE, PH ,
 aequales sunt, ac parallelae; erit quoque recta coniu- 3. primi.
 ncta OP , equalis & parallela ipsi EH , ideoque aequa-
 lis ipsi EC , hoc est, recta VS . Quam ob rem, cum
 latera ZV, ZS , lateribus NO, NP , aequalia sint; ba-
 sis item VS , basi OP ; Aequalis erit angulus ZS , an- 8. primi.
 gulo inclinationis ONP . Dico etiam, angulum hunc
 ONP , inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta
 $B\alpha$, ipsi NO , parallela; cum sit quoque AB , ipsi
 $O\alpha$, parallela, per coroll. propof. 8. lib. 15. Paralle-
 logrammum erit $NO\alpha B$, ideoque recta $B\alpha$, ipsi NO , 34. primi.
 aequalis. Quia uero BC , latus pentagoni oppositum
 angulo αB , qui rectus est, (aequalis huiusmodi interno 29. primi
 CON ,) maius est latere $B\alpha$, hoc est, recta NO , 19. primi
 uel utraque ZV, ZS , quae ipsi NO , ostensa sunt
 aequales; Erunt duae rectae TV, TS , maiores duabus
 rectis ZV, ZS . Cadit igitur punctum Z , intra trian-
 gulum TVS , ita ut rectae TV, TS , rectas ZV, ZS ,
 includant omnino; Atque proinde angulus VZS ,
 ideoque illi aequalis ONP , maior est angulo pentago 22. primi.

ni T : Hic uero , cum sit pentagoni angulus , paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto . Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

COROLLARIUM.

PATET igitur ex his , omnes inclinationes basium Dodecaedri equales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris

Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis; quales sunt NO, NP, subtrahanturque a rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, uel certe, quæ rectis subtrahentibus an-

gulos pentagonorum equales sunt, cuiusmodi est, recta OP, lateri cu-

bi inscripti EH, quod angu-

lum pentagoni EAH,

subtendit, æqua-

lis; Erunt om-

nes in-

ter

se æquales, cum & omnes illæ perpendicularæ,

quæ ipsos continent, æquales sint, nec

non & rectæ illæ omnes, quæ

eisdem subtendunt, la-

tera uidelicet cu-

bi, inter se etiã

sunt æqua-

les.

8. primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.





R O M A E,

Apud Vincentium Accoltum .

M. D. LXXIIII.

Cum licentia Superiorum.