EVCLIDIS

Salvador Bournonville

POSTERIORES

Libri ſex a x. ad xv.

ACCESSIT XVI. DE SOlidorum Regularium comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEmonſtrationibus, accuratisq́; ſcholijs illuſtrati.

AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI.

SOCIETATIS IESV.

ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

EVCLIDIS

ELEMENTVM X.

DEFINITIONES.

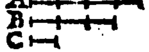
I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.

ABSOLVIT *Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros ſpectant, quantũ ſatis viſum eſt ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad diſputationem linearum commenſurabilium, & incõmenſurabilium, quarum cauſa numerorum tractationem ab eo ſuſceptam eſſe ſuperius diximus. Nam ſine cognitione harũ linearũ cõplures magnitudines cũ ſolidæ, tũ planæ, neq; ꝑfecte intelligi poſſunt, neq; cũ res tulerit, in opus atq; vſum cõferri; propterea quòd plerunq; latera earũ incõmenſurabilia ſunt: Id quod & de planis ipſis atq; ſolidis dici poteſt, quippe cum & hæc incõmenſurabilia ſæpe numero exiſtant, vt ad finẽ huius libri demonſtrabimus. Quoniã vero hic liber multis obſtructus eſt difficultatibus, ob linearũ, de quibus diſſerit, obſcuritatẽ; oẽs neruos induſtriæ meæ in eo cõtendã, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide ſunt demõſtrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt ſine multo labore a quouis, qui præcedentiũ tamẽ librorũ demõſtrationes recte intellexerit, poſſit percipi. Neq; n. in eorũ poſſum ſententiã ire, qui putãt ad eius intelligentiã eſſe neceſſariã eã partẽ Arith-*

metices, quæ de radicibus numerorũ, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocãt, ſermonẽ inſtituit: Immo cõtra perſuaſum mihi prorſus habeo, cognitionẽ ꝑfectã illius partis Arithmetices pẽdere ex hoc 10. lib. tãtũ abeſt, vt exiſtimẽ, tractationẽ illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum qui rationem radicum atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quã qui illarum omnino ſit ignarus, propterea quod ille demonſtrationes ad vſum poteſt reuocare, hic vero nullo modo. Hæc enim de cauſa & nos priora decem theoremata ſecundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo ſtudioſus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonſtrantur, facilius arbitraremur intelligi poſſe ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vſurpaſti; vt ea res & maiori voluptati eſſet, & commodo legentibus? In promptu cauſa eſt, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci ſint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars ſit cognita, videbantur numeri illi, ſi adhiberentur, tenebras potius offuſuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perſpicuitatis; quippe ita ingenia ſtudioſorum pro adiumento, ac luce, quam his noſtris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minuſq; demonſtrationes ipſæ perciperent? Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ ſolæ neceſſariæ ibi fuerunt, nemo fere ſit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra ſunt verſati, facili negotio demonſtrationes huius lib. ad numeros accommodare poſſunt per ſe ipſos, quando volunt, præſertim cum iam hoc ipſum non multo ante a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inſcripſit, diligenter effectum ſit, & accurate.

ITAQVE, vt ad inſtitutum redeamus, inchoans rem ipſam Euclides, more ſuo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commenſurabiles, definiens eas eſſe, quas eadem menſura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem menſura C, metitur, (metitur enim C, ipſam A, quater repetita, & ter ſumpta ipſam B,) dicuntur commenſurabiles. Eodem



dem modo commenſurabiles ſunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum quia eas linea tam vnius palmi; quam dimidiati palmi, quam tertia partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commenſurabiles dicuntur ſuperficies, quas vna, & eadem ſuperficies metitur; Necnon corpora, ſolidauè commenſurabilia, quæ metitur idem corpus, ſeu ſolidum.

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.

TALES *magnitudines ſunt, diameter quadrati cuiuſuis, & latus eiuſdem; quoniam nullam habent menſuram communem, vt propoſitione vltima huius lib. demonſtrabitur ab* Euclide. *Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommenſurabiles, quibus ſcilicet menſura aliqua communis dari nullo modo poteſt, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq; quanam ratione inueniri poſſint. Rurſus, ſuperficies dicentur incommenſurabiles, nec non, & ſolida, quæ nullam admittunt menſuram communem.*

III.

RECTAE lineæ potentia commenſurabiles ſunt, cum quadrata earum idem ſpatium metitur.

LINEARVM *rectarum quædam commenſurabiles ſunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam menſura communis, metitur; cuiuſmodi ſunt illæ, quas in expoſitione defin. 1 commenſurabiles ſimpliciter diximus: quædam vero longitudine incommenſurabiles, quas ſcilicet nulla linea, tanquam menſura communis, metitur. Rurſus linearum, quæ ſunt incommenſurabiles longitudine, aliæ ſunt eiuſmodi, vt earũ quadrata ſint commenſurabilia; aliæ vero ita ſe habent, vt & qua* *drata earum incommenſurabilia ſint. Lineæ ergo illæ longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata ſunt commenſurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundum earum potentias, hoc eſt ſecundum earum quadrata (eſt enim, vt ad propoſ. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiuſq; lineæ, quadratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ipſæ ſecundum longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles.*

Q V O D *ſi quis roget, cur Euclides definierit ſeorſum lineas potentia cõmenſurabiles, nõ autẽ cõmenſurabiles longitudinẽ; reſpondendũ eſt, lineas longitudinẽ cõmenſurabiles ſatis ſuperq; eſſe explicatas in definitione cõmenſurabiliũ magnitudinũ, cũ huiuſmodi lineas vna cõmunis menſura metiatur, vt dictũ eſt: At vero quoniã lineas potẽtia cõmenſurabiles nulla cõmunis menſura metiri poteſt, ſed tantũmodo earum quadrata idem ſpacium metitur, ideo neceſſarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.*

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit communis eorum menſura, contingit reperiri.

L I N E A S *reliquas longitudine incommenſurabiles, quarum etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, vocat incommenſurabiles potentia.*

H A B E N T *autem lineæ cõmenſurabiles tã longitudine quàm potẽtia, hãc quaſi conuenientiã inter ſe, & connexionẽ; vt lineæ longitudine cõmenſurabiles, ſint etiã cõmenſurabiles potentia, ita vt nulla lineæ dari poſſint cõmenſurabiles longitudine, quin earũ quadrata cõmenſurabilia quoq; ſint; quoniam quadratum ex cõmuni earum menſura deſcriptum metitur tanquã menſura cõmunis earũ quadrata, vt in ſubiecta figura apparet:*

paret: ſicut enim recta A B, metitur rectas C D, E F, ita quoq; quadratũ A G, quadrata C H, E I, metitur: Non autẽ, vt omnes lineæ potentia cõmenſurabiles, ſint etiã cõmenſurabiles lõgitudine; multæ enim lineæ ſunt potentia commenſurabiles, hoc eſt, quadrata habent commenſurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommenſurabiles ſunt, vt in hoc libro demonſtrabitur. Rurſus inter lineas incõmenſurabiles tam longitudine quàm potentia, huiuſmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint etiam incommenſurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommenſurabiles, ſint quoq; incommenſurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter ſe incommẽſurabiles, cum tamen potentiæ, hoc eſt, ſecundum earum quadrata, commenſurabiles exiſtant. Quæ quidem omnia perſpicua erunt ex coroll. propoſ. 9. huius libri.

V.

HIS poſitis, oſtenditur, cuicunq; rectæ lineæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea notæ magnitudinis, erũt omnium aliarum, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum: Item quædam illi incommenſurabiles longitudine tantum; quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonſtrabitur uarijs in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis oſtendi, ſeu colligi, (quamuis eius verba hoc ſonare videantur) hæc ita ſe habere: ſed ſolum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quaſdam dici poſſe propoſitæ rectæ lineæ commenſurabiles longitudine,

& potentia; quaſdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo ſequitur, ſed demonſtrabitur in ſequentibus, vt diximus.

LINEA *autem illa propoſita, ratione cuius aliæ commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles, dicitur Græcis* ῥητὴ; *Latinis vero Rationalis; quoniam ea penitus ſemper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non ſemper notæ ſunt, quamuis ſingulæ ſeorſum ſumptæ exiſtant certæ quoq; ac notæ; cũ qualibet in quotcunq; partes æquales poſſit diuidi.*

VI.

ET huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum, Rationales.

DOCET *lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commenſurabiles quomodocunque, appellari quoq; Rationales; non quidem ex poſitione, vt illæ, ſed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commenſurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum.*

ITAQVE *ex ſententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem eſt, linea recta, cuius quadratum eſt 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia ſit commenſurabilis lineæ Rationali, quamuis longitudine ſit eidem incommenſurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui eam Irrationalem vocant, eo quod numero non poſſit exprimi.*

VII.

HVIC vero incommenſurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM *in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum ſunt cõmenſurabiles propoſita rectæ Rationali, appellauit Rationa-*

les; liquido conſtat, cum hic eas dicere Irrationales, quæ propoſitæ rectæ Rationali incommenſurabiles ſunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifeſtum eſt, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. ſeu (quod idem eſt) lineam, cuius quadratum eſt 20. vel 1000. &c. non poſſe appellari Irrationalem, cum non ſit longitudine, & potentia, ſed longitudine tãtum Rationali lineæ propoſitæ incommenſurabilis.

VIII.

ET quadratum; quod a propoſita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM *linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea deſcriptum, Rationale vocatur, quia & ipſum certum eſt, ac notũ, comparationeq; illius aliæ ſuperficies, commenſurabiles, incommenſurabilesue dicuntur.*

IX.

ET huic commenſurabilia quidem, Rationalia.

OMNES *planæ ſuperficies quadrato Rationalis lineæ propoſitæ commenſurabiles, Rationales dicuntur; non quidẽ ex poſitione, vt illud, ſed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commenſurabiles, vel incommenſurabiles: quemadmodũ etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commenſurabiles ſunt, Rationales appellantur.*

QVONIAM *vero lineæ potentes ipſa ſpatia commenſurabilia quadrato Rationalis lineæ propoſitæ, ſunt ſaltem potentia commenſurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perſpicuum eſt, ipſas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.*

HVIC

X.

HVIC vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies planæ quadrato a Rationali linea deſcripto incommenſurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatijs incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita vt ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidem quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia; ſi vero non fuerint quadrata, ſed aliæ quæcunq; figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatijs incommenſurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſupra ex 6. defin. collegimus, lineas quæ poſſunt ſpatia commenſurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoq; incommenſurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonſtrabiturq; in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas,

illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRAETEREVNDVM *quoq; non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atq; potentia tantum: apponere fere ſemper vocibus iſtis: commenſurabiles, ac incommenſurabiles: Vix autem, & rariſſime his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantũ; Item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occaſionem multis præbuit, vt varie, & obſcure in hoc* 10 *lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibusq;, nec non Rationalibus, Irrationalibusq; ſint locuti.*

CAETERVM *his definitionibus adiungemus poſtulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vſus in hoc libro reperitur.*

POSTVLATVM,
ſiue Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

PROPOSITIS *enim duabus magnitudinibus eiuſdem generis inæqualibus, cum maior infinita non ſit, minor vero infinite poſſit augeri; perſpicuum eſt, minorem toties poſſe multiplicari, donec ſuperet maiorem.*

AXIOMATA, SIVE
Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quotcunq; magnitudines metiens, compoſitam quoq; ex ipſis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunq; magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totā magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquā.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt a nobis in vltimis tribus pronunciatis lib.7. Quare cum ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quod fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quod ad verbum huc poſſint transferri, mutata ſolum voce numeri in vocē magnitudinis.

CAETERVM quia hoc in libro diſcedendum nobis fuit a numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ.13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani negleximus, vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine e regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autem Campani ſeriem demonſtrat. Quod ſi vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter

Theonē

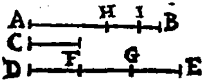
Theonem, & Campanum diſcrepantiam, intelligas, quod ad numerum propoſitionum attinet.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

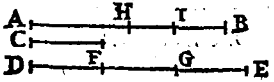
1.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiori auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quam dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITAE ſint duæ magnitudines inæquale A B, & C, quarum A B, ſit maior. Dico ſi ex A B, auferatu maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum maius quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quãdam, quæ minor ſit quam C. Multiplicetur C, toties, donec magnitudo facta D E, maior ſit quam A B, ita vt D E, ſit multiplex ipſius C, proxime maior quam A B. Diuiſa autem D E, in partes D F, F G, G E, ipſi C, æquales; detrahatur ex A B, maius quam dimidium A H, & ex reliqua H B, maius quam dimidium H I; atque hoc ſemper fiat, donec partes ipſius A B, multitudine æquales ſint partibus ipſius D E. Sint ergo iam partes A H, H I, I B, tot, quot ſunt ipſæ D F, F G, G E. Quia igitur D E, maior eſt quam A B; At ex D E, ablatum eſt D F, minus quam dimidium, vel certe dimidium, ſi D E, ipſius C, ſit duplex; ex A B, vero maius quam dimidium A H: Erit reliquum F E, reliquo H B, maius. (Cum enim D E, maior ſit quam A B; ſi ex D E, dimidium auferretur, nec non & ex A B, dimidium, eſſet quoque reliquũ ex D E, maius reliquo ex A B. Si ergo ex D E, auferatur minus quã dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium;

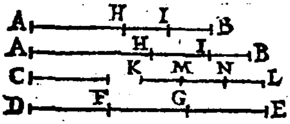


midium; erit reliquum ex D E, maius reliquo ex A B.) Rurſus quoniam F E, maior eſt quàm H B, auferturq; ex F E, dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, ſi F E, maior ſit quam duplex ipſius C; at ex H B, maius quam dimidium H I; erit eôdem modo reliquum G E, maius reliquo I B; atque ita procedendo oſtendemus tandem poſtremam partem ipſius D E, qualis hic eſt G E, maiorem eſſe poſtrema parte ipſius A B, qualis hic eſt I B. Cum ergo G E, poſtrema pars ipſius D E, æqualis ſit ipſi C; erit quoq; C, maior quam I B, poſtrema pars ipſius A B. Relicta igitur eſt IB, magnitudo, quæ minor eſt magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonſtrandum.



IDEM demõſtrabitur, ſi ex A B, auferat dimidiũ A H, & ex reliquo H B, rurſus dimidiũ H I, &c. Nã eadẽ rõne erit reliquũ FE, maiꝰ reliquo HB, nec nõ & reliquũ GE, maius reliquo I B; Cũ ex maiori DE, ablatũ ſit DF, minꝰ q̄ dimidiũ, vel certe dimidiũ; & ex *minori* A B, dimidiũ A H, &c.

ALITER. Facta conſtructione, vt prius, ſumatur K L, ita multiplex ipſius I B, vt eſt multiplex D E, ipſius C. Diuiſa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipſi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam vero AH,



maior eſt quam H B, vel certe illi æqualis, ſi ablatũ ſit dimidium ex A B; & HB, maior eſt, quam IB; erit quoq; A H, maior quam I B, hoc eſt, quam K M. Rurſus quia H I, maior eſt quã I B, vel certe illi æqualis; eſt autẽ IB, ipſi M N, æqualis: erit quoq; HI, maior quã MN, vel illi æqualis; atq; adeo tota AI, *maior*, quã *tota* KN. Additis ergo æqualibꝰ IB, NL, erit tota AB, maior quã tota KL: Eſt aũt DE, maior adhuc, quã AB. Multo ergo maior erit DE, quã KL. Quare cũ ſit vt DE ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta.n. fuit KL, ipſius IB, tã multiplex, quã multiplex *14. quinti.* eſt DE, ipſius C,) erit quoq; C, maior quã IB. Ac proinde relicta eſt I B, minor quam C. Quod erat demonſtrãdum.

SCHO-

SCHOLION.

LVCE clarius ex demonſtratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propoſitas debere eſſe tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem poſſit ſuperare. Id quod ad propoſ. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

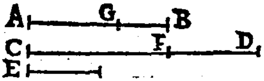
THEOR. 2. PROPOS. 2.

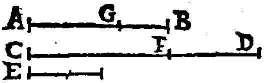
2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propoſitis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB; & ſic deinceps, alterna quadam detractione, auferatur ſemper minor de maiore, & nunquā reliqua metiatur præcedentē. Dico magnitudines AB, CD, incommenſurabiles eſſe. Si. n. non ſunt incõmenſurabiles, metietur eas aliqua mẽſura cõmunis. Metiatur eas ſi fieri poteſt, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipſi AB, vel minor. Detracta aũt AB, ex CD, quoties põt, relinquat FD, ſe minorẽ, ita vt AB, ipſam CF, metiatur. Rurſus detracta FD, ex AB, relinquat ſe minorē GB, ita vt FD, metiatur ipſam AG; atq; hoc ſemꝑ fiat. Relinquetur ergo tādē ex CD, vel AB, magnitudo quędā minor quā E. (Qm̃ cū AB, ablata ex CD, relinquat FD, ſe minorem, erit CF, ablata maior, quā dimidia ipſius CD, alias ſi eſſet dimidia, vel minor quā dimidia, poſſet adhuc AB, detrahi ex CD. Eodē modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipſius AB: Et ſic deinceps ſemper fiet. Quare cum ſemper auferatur maius, quam

1.decimi.



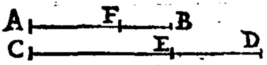


1. *decimi* quam dimidium, relinquetur tandem magnitudo quædã
minor quam E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quam E.
Quoniam igitur E, metitur AB;& AB, metitur CF;
2. *pron.* metietur quoque E, ipſam
C F: Metitur autem E, &
3. *pron.* totam C D. Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At
2. *pron.* F D, metitur A G: quare & E, ipſam A G, metietur. Metitur
3. *pron.* autem E, & totam A B: ergo E, reliquam etiam G B,
metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo
A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur.
Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus
inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.



SINT incommenſurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturq; minor A B, ex D, & reliqua ſit E D. Item E D, ex A B, auferatur, relinquaturq; F B, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquã reliquam metiri præcedentẽ. Si enim fieri poteſt, metiatur F B, præcedentem E D. Quoniam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur
2. *pron.* *quoque F B, ipſam A F: Metitur autem & ſe ipſam: Igitur*
1. *pron.* *F B, & totam A B, metietur: Metitur autem A B, ipſam C E.*
2. *pron.* *Igitur & F B, ipſam CE, metietur. Ponitur autem & F B, metiri*
1. *pron.* *ipſam E D: Igitur & F B, totam C D, metietur. Oſtenſa*
eſt autem & F B, ipſam A B, metiri. Quare F B, vtranq; A B,
C D, metitur. quod eſt abſurdum. ponuntur enim A B, C D,
incommen-

incommenſurabiles, Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitū.

SIMILITER *& hoc demonſtrabimus.*

SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemp minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

NAM *ſi nunquam reliqua metiretur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines, incommenſurabiles, ut demonſtrauit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim commenſurabiles.*

ITAQVE *facile ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ, ſint commenſurabiles, nec ne: Nam detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propoſitæ commenſurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur utramque magnitudinem propoſitam, ut conſtat ex demonſtratione primi theorematis huius ſcholij: Ex eo enim, quod reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, oſtenſum eſt, eandem reliquam F B, metiri utranque magnitudinem A B, C D. Si vero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonſtrauit.*

PROBL. 1. PROPOS. 3.

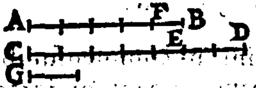
3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

DATAE duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB, CD, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam AB, CD, commenſurabiles ſunt, fit ut ſi minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties poteſt, relinquat E D;

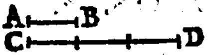
B &ED,

& E D, detracta ex A B, quoties poteſt, relinquat FB, & hoc ſemper fiat alterna quadam detractione; tandẽ reliqua quępiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iam FB, reliqua præcedentẽ E D. Dico FB, eſſe maximam menſuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim utranque metiatur, ita
oſtendemus. Quoniã FB, metitur E D; & E D, metitur A F;
2. pron. metietur quoq; FB, ipſam A F. At metitur FB, & ſe ipſam:
1. & 2. pron. Igitur F B, totam A B, metietur; atque adeo & ipſam C E,
quã A B, metitur. Cũ ergo, & ipſam E D, metiatur; metie-
1. pron. tur quoq; FB, totã CD. Metitur ergo F B, utranq; A B, C D.
Quare utriuſque AB, C D, communis menſura eſt F B.



Quod autem FB, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia cõmunis earum menſura, maior quam FB. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quam FB. Quia
igitur G, metitur utranque A B, CB; metitur autem & A B,
2. pron. ipſam CE; metietur quoque G, ipſam CE. At metitur quo-
3. pron. que totam C D. Igitur G, reliquam quoque E D, metietur.
2. pron. Metitur autem E D, ipſam A F: Ergo & G, ipſam A F, metie-
tur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; metietur
3. pron. quoque eadem G, reliquam FB, maior minorem. Quod eſt
abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis menſura eſt ipſarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis menſura eſt.

Quod ſi minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita ut detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipſa A B, ambarum maxima menſura cõmunis; cũ & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

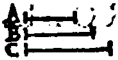
Elicitur hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt F B, eſſe maximam menſuram communem ipſarum A B, C D.

Demon-

Demonſtratum enim eſt ibi, magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam menſuram F E. Eademque eſt ratio de cæteris.

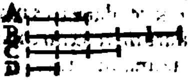
SCHOLION.

Ex his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, necne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propoſ. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non.

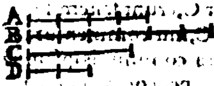


Quæ ſi fuerint incommenſurabiles; perſpicuum eſt, omnes tres A, B, C, eſſe incommenſurabiles, quod nullam habere poſſint communem menſuram, propter incommenſurabiles magnitudines A, & B.

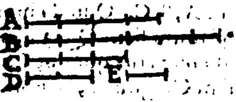
Si vero A, & B, fuerint commenſurabiles; ſit earum maxima communis menſura inuenta D; quæ ſi metiatur quoque magnitudinem C, manifeſtum eſt, tres magnitudines A, B, C, commenſurabiles eſſe, cum habeant communem menſuram D. 3. decimi.



Quod ſi D, maxima menſura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commenſurabiles, vel non. Si ſunt incommenſurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommenſurabiles. Si enim credantur eſſe commenſurabiles, metietur earum maxima communis menſura ipſam D, maximam menſuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propoſ. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommenſurabiles. Quod eſt contra hypotheſim.



Si vero C, & D, ſunt commẽſurabiles, erũt quoq; tres A, B, C, cõmenſurabiles. Inuenta n. E, maxima mẽſura ipſarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipſas A, & B; metiatur quoque



3. decimi.
2. pron.

E, ipſas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.

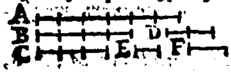
SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quam tres, ſint commenſurabiles, nec ne. Nam ſi datæ ſint quatuor, experiemur id primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus eſt dictum.

4.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commenſurabiles A, B, C, quarum maximam menſuram inuenire oporteat. Sit
3. decimi D, maxima menſura ipſarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perſpicuum eſt D, maximam eſſe menſuram omnium trium A, B, C. Nã ſi maior magnitudo quã D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib maximã menſuram ipſarum A, B, nempe ipſam D, maior magnitudo minorem, quod fieri non poteſt. Si uero D, non metiatur C, erunt ſaltem D, C, commenſurabiles. Cum enim A, B, C, ſint commenſurabiles, metietur quælibet earum menſura communis ipſam D, maximam mẽſuram ipſarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoque ipſam C; erunt D, & C, commenſurabiles.
3. decimi Sit igitur E, maxima menſura ipſarum inuẽta. Dico E, maximam menſuram eſſe datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim ſit communis earum menſura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A,
2. pron. & B; metietur quoque E, ipſas A, & B. Metitur autem & ipſam C: Igitur E, menſura eſt communis ipſarum A, B, C. QVOD autem E, ſit earum maxima menſura, hoc modo



do confirmari poteſt. Si non eſt maxima, ſit F, maior quā E, ſi fieri poteſt, earum menſura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque D, earum maximam menſuram, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, earum menſuram maximam, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earum communis menſura: Quam ob rem tribus magnitudinibus commēſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.

INFERTVR autem hoc ex ultima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem F, ſi metiatur ipſas A, B, C; metiri quoque E, maximam illarum communem menſuram. Eademque de cęteris eſt ratio.

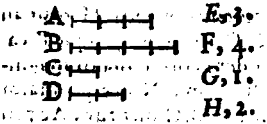
SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, quam tribus, maximam earum menſuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua uero omnia abſoluenda erunt, ut de tribus magnitudinibus eſt dictum.

LEMMA.

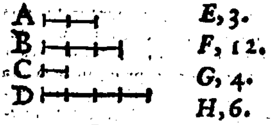
SI ſint quotcunque magnitudines; & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eiſdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita F, ad

G; & ut C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo eſſe, ut A, ad D, ita E, ad H. Quoniam ex iis, quæ ad defin. 5 lib. 6. a nobis demonſtrata ſunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perſpicuum eſt, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compoſitas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales eſſe, hoc eſt, eſſe ut A, ad D, ita E, ad H. Quod eſt propoſitum.



IDEM ſequitur, ſi magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, ut in hoc exemplo apparet, in quo eſt, ut A, ad B, ita G, ad H; & ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.



SCHOLION.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur, & in aliis multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonſtrare, cum non facile videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diuerſa genera quantitatis conſtituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris oſtenſa tantũ eſt in quantitatibus eiuſdẽ generis; In numeris quidem lib. 7. Libro uero 5. in magnitudinibus. quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiã ad hoc lemma transferri poſſit, cũ omnes demonſtrationes illius libri numeris quoq; cõueniant. Vel certe demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B,

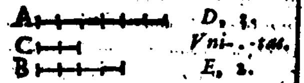
C, D,

C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commenſurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter ſe, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima menſura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties unitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B toties unitas repetita metiatur numerũ E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & unitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinẽ C, atq; numerus D, unitatem. Quare erit ut A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Eſt autẽ & ut C, ad B, ita unitas ad numerũ E; quod C, ipſam B, atq; unitas numerũ E, æque metiatur. Igitur per lẽma præcedẽs, erit ex æquo, ut A, magnitudo ad B, magnitudinẽ, ita D, numerus ad E, numerum. Cõmenſurabiles ergo magnitudines inter ſe rationẽ habent, &c. Quod erat demõſtrandum. *3. decimi.*

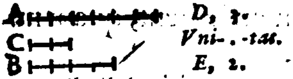


SCHOLION.

CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximã cõmunẽ menſurã propoſitarũ magnitudinũ cõmẽſurabiliũ, qualis fuit C, ipſarũ A, & B; perſpicuũ eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potẽtia quoq; cõmenſurabiles, ut rationẽ habeãt inter ſe, quã numerus ad numerũ. Hæ.n. ſolæ cõmunẽ recipiũt mẽſurã, atq; adeo in eis demõſtratio locũ habet.

QVOD ſi lineæ ſint potentia tantum commenſurabiles, habebunt quidẽ earũ quadrata inter ſe rationẽ, quã numerus ad numerũ, quia cõmenſurabilia ſunt, atq; idcirco menſurã habent cõmunẽ, ipſisq; demõſtratio huius theorematis cõuenit: At ipſæ lineæ nequaquã, quia lõgitudine incõmenſurabiles cũ ſint, *communis menſuræ ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.*

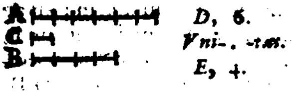
Ex demonſtratione porro eiuſdem huius theorematis liquido conſtat, commenſurabilium magnitudinum proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum communis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere



proportionē magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

Vnde, ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac communis magnitudinum commenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam ut demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habēt, quam numeri D, & E.

Quod ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quācunque communem earum menſuram, nihilo minus hoc theorema demonſtrabimus eodē



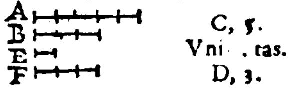
argumento. Quāuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac poſteriori demonſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, ut ex appoſita figura apparet. Quoniam uero in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omnium eandem cum ipſis proportionem habentium; propterea forte Euclides in demonſtratione maximam communem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

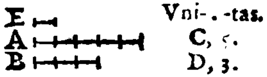
SI duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerū: commenſurabiles erunt magnitudines.

Habeant duæ magnitudines A, B, eam proportionem

nem quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines eſſe cõmenſurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuiſa intelligatur magnitudo A, quarum partiũ uni ęqualis ſit magnitudo E. Deinde quoties unitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandã aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties unitas in C; continebit æqualiter A, ipſam E, & C, numerus unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad unitatem: Eſt autem & ut E, ad F, ita unitas ad D, quod E, ipſam F, & unitas ipſum D, æque metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, ut A ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam ut C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit ut A, ad B, ita A, ad F; ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter ſe ſunt. *9. quinti.* Quocirca cum E, ipſam F, metiatur, metietur quoque eadem E, ipſam B: Metiebatur autem & ipſam A. Igitur magnitudo E, utranque A, & B, metitur; *1. defin.* Ac proinde A, & B, commenſurabiles ſunt. Si igitur duæ magnitudines inter ſe proportionẽ habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.

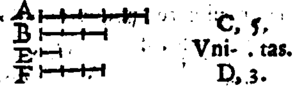


ALITER. Quot ſunt unitates in C, in tot partes ęquales intelligatur diuiſa magnitudo A, quarum partium uni æqualis ſit magnitudo E. Quoniam igitur eſt ut E, ad A, ita unitas ad C, quod E, ipſam A, & unitas ipſum C, æque metiantur; poniturq; ut A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma ſuperius, ex æquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metitur autem unitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipſam quoque A. Igitur A, & B, habentes eandem communem menſuram E, commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.

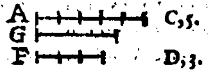


COROLLARIVM.

Ex priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis uia qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita ſe habeat quæuis alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam ſi inuenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; diuidenda erit A, in tot æquales partes, quot unitates ſunt in C; & ſumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, ut C, ad D, ut demonſtratũ eſt.



Hinc rurſus apparet, quanam arte poſſit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, ut numerus ad numerum. Si namque inuenienda ſit linea, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum lineæ datæ A, ut numerus C, ad numerum D, inueniẽda erit primum linea F, ex iis, quæ modo diximus, ad quã ſic ſe habeat A, ut C, ad D: Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, ut C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, ſint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut A, ad F, atque adeo ut numerus C, ad numerum D, (cum ſit ut A, ad F, ita C, ad D,) ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta. *13. ſexti.*



SCHOLION.

In hoc eiam theoremate manifeſtum eſt, lineas proportionem habentes quam numerus ad numerum, commenſurabiles eſſe longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, ut ex demonſtratione conſtat, menſuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, menſuram communem E, habere demonſtratum eſt.

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

0. INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint incõmẽſurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionẽ nõ habere, quam habet numerus ad numerũ. Si enim A, & B, proportionẽ dicantur habere, quam numerus ad numerum; erunt ipſæ cõmmenſurabiles. *6. decimi* Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non igitur A, &

A, & B, proportionē habēt, quā numerus ad numerū. Quare incommenſurabiles magnitudines, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

QVOCVNQVE modo lineæ incōmenſurabiles ſint, ſiue longitudine & potentia, ſiue longitudine tantum, ſemper colligemus eas proportionem non habere, quam numerus ad numerū, vt vult theorema. Nam alias, vt demonſtratum eſt, eſſent longitudine commenſurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

8.
o.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionē nō habeant, quā numerus ad numerū: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter ſe proportionem, quā numerus ad numerū. Dico eas incōmenſurabiles eſſe. Si enim A, & B, credantur eſſe cōmenſurabiles, erit earū proportio, quę numeri ad numerum. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerū. Nō igitur cōmēſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionē habeāt, &c. Quod erat oſtēdendū.

5. decimi

SCHOLION.

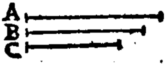
QVOD ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſæ neceſſario, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionē haberēt, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonſtrauimus. quod eſt contra hypotheſim. Non autē colligendū eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionē nō habent, quā numerus ad numerū, neceſſario & potētia incōmenſurabiles eſſe, vt manifeſtū eſt ex demonſtratione. Non enim ſequitur, ſi potentia tantū ſint cōmēſurabiles, eas proportionē habere, quā numerus ad numerum, vt in demonſtratione theorematis aſſumitur; immo nullo modo talem proportionem habere poſſunt, vt in ſcholio propos.

propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonſtratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine eſſe incommenſurabiles.

LEMMA.

SI ſint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportionales; ſitque ut prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & ut prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundã.

SINT *continue proportionales tam quantitates A, B,* C, *quam* D, *E, F; ſiue priores in eodem genere ſint, in quo poſteriores, ſiue non; ſitque ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad F. Dico quoque eſſe ut A, ad B, ita* D, *ad E. Quoniam tam proportio* A, *ad* C, *proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportiones D, ad E, duplicata eſt; ponunturque proportiones* A, *ad* C, *&* D, *ad F, æquales; Erunt quoque proportiones* A, *ad B, & D, ad* E, *æquales, quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales ſunt.*



D, 35.
E, 28.
F, 21.

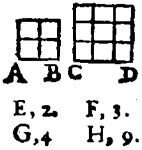
IDEM *ſequitur, ſi plures quantitates ſint, quã tres; ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonſtrationem; & in quinque, quadruplicatam, &c.*

7. THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine com

menſu-

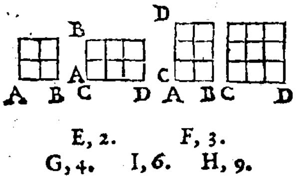
menſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ uero a rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.



SINT primum rectæ A B, C D, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: Quoniam rectæ A B, C D, longitudine ſunt commenſurabiles; erit A B, ad C D, ut numerus ad numerum: 5. decimi. Sit ut E, numerus ad numerũ F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt A B, ad C D, ut E, numerus ad numerum F: habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: 20. ſexti. Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; 11. octaui Erit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex C D, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionũ æqualium. Quod eſt propoſitum.

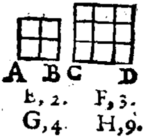
ALITER.

ALITER. Poſita eadem conſtructione, contineatur rectangulum B D, ſub rectis A B, C D. Et E, F, ſe mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, ut conſtat ex demonſtratione propos. 11. lib. 8. atq; adeo in proportione lateris E, ad latus F, ut diximus in ſcholio eiuſdem propos. Quoniā igitur eſt A B, ad C D, ut E, ad F: Vt autē A B, ad C D,



1. *ſexti.* ita eſt quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ob eandē altitudinem A B, ſi C D, ponatur baſis rectanguli; Item ut E, ad F, ita eſt G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ut quadratus numerus G, ad numerū I. Rurſus quia eſt A B, ad C D, ut E, ad F: Vt autē A B, ad C D,
1. *ſexti.* ita eſt rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ob eandē altitudinem C D, ſi A B, ponatur baſis rectanguli; Item ut E ad F, ita eſt I, ad H: Erit quoque rectangulū B D, ad quadratū ex C D, ut I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulū B D, & quadratū ex C D, in eadē ratione ſunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lēma ꝓpos. 4. huius lib. erit quadratū ex A B, ad quadratū ex C D, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod eſt propoſitum.

SIT ſecundo quadratū ex A B, ad quadratū ex C D, ut numerus quadratus G, ad numerū quadratū H. Dico rectas A B, C D, eſſe longitudine cōmenſurabiles. Sint numeri E, & F, latera quadratorū numerorū G, & H, ut in priori figura. Quoniā igitur eſt quadratū ex A B, ad quadratum ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratū numerum H: Habet autem quadratum ex A B ad quadratum

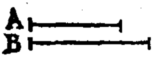


20. *ſexti.* ex C D, proportionem duplicatam lateris A B, ad latus C D; Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerū H,
11. *octaui* proportionē habet duplicatā lateris E, ad latus F: Erit proportio

portio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones, æquales ſunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant, quam numeri E, F, ipſæ commenſurabiles *6. decimi* erunt longitudine. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris. Quia igitur eſt ut A B, ad C D, ita quadratũ ex A B, ad rectangulũ B D; Itẽ ut A B, rurſum ad C D, ita rectangulum *1. ſexti.* B D, ad quadratũ ex C D, ut ſupra diximus; erunt quadratũ ex A B, rectangulũ B D, & quadratũ ex C D, continue proportionalia in ratione lineæ A B, ad lineã C D: Sunt autem & numeri G, I, H, continue proportionales in ratione numeri E, ad numerũ F, ut ſupra oſtendimus; poniturq; quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratũ numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, ut G, ad I, hoc eſt, ut E, ad F; Ac propterea A B, C D, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, cõmenſurabiles ſunt longitudine. Quod eſt propoſitũ. *6. decimi.*

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommenſurabiles. Dico earũ quadrata proportionẽ non habere, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Si enim quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, proportionẽ dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine cõmenſurabiles, ut iam eſt demonſtratũ. Quod eſt abſurdũ. ponuntur enim longitudine incommenſurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionẽ habet, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quod eſt propoſitum.



QVARTO, ac poſtremo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, nõ habeat proportionẽ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Dico eas longitudine eſſe incõmenſurabiles. Si enim longitudine cõmenſurabiles credantur; habebũt earũ quadrata, ut eſt demonſtratũ, proportionẽ quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. Quod eſt abſurdũ. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine cõmenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitum. Quapropter quæ a rectis lineis longitudine commẽſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles eſſe: Quæ uero potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles: Quæ uero potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

QVONIAM quadrata linearum longitudine commenſurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate demõſtratum eſt, *6. decimi* hoc eſt, ſimpliciter quam numerus ad numerum; ipſa commenſurabilia erũt; *3. defin.* Ac propterea & latera ipſorum potentia commenſurabilia exiſtẽt: Quare lineæ longitudine commenſurabiles, omnino & potentia cõmenſurabiles ſunt.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed tamẽ *3. defin.* quam numerus ſimpliciter ad numerum, potentia quidem commen- *6 decimi* ſurabiles ſunt, cum earum quadrata commenſurabilia ſint; at longitudine nequaquam, ut in hoc theoremate eſt oſtenſum; perſpicuum eſt, lineas potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine commenſurabiles eſſe. Solum enim eæ lineæ potentia commenſurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque ſunt commenſurabiles, ut conſtat ex ſecunda parte huius theorematis.

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ſed tamen, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles quidẽ ſunt longitudine, at potentia commenſurabiles, ut modo diximus; liquido conſtat, lineas longitudine incommenſurabiles, non omnino & potentia incommenſurabiles eſſe. ſolum enim eæ lineæ longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata proportionẽ non habent, *4. defin.* quam numerus ad numerum, potentia quoque incommenſurabi- *8. decimi.* les ſunt, cum earum quadrata incommenſurabilia ſint.

POSTREMO lineas potentia incommenſurabiles, eſſe omnino & longitudine incommenſurabiles, perſpicuum eſt. Nam ſi longitudine eſſent commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles forent, ut patet ex prima parte corollarij. Quod eſt abſurdũ. Ponuntur enim potentia incommenſurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt.

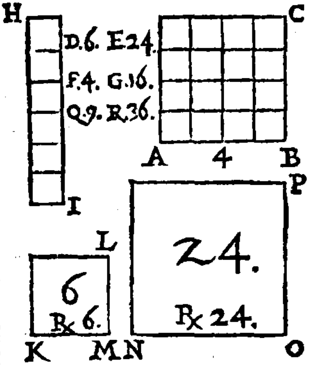
SCHOLION.

VT autem ſcopus priorum duarum partium huius theorematis

matis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter conſideranda ſunt hæc, quæ ſequuntur. Primum lineas rectas longitudine commenſurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non ſolum eſſe eas, quæ numeris exprimi poſſunt, ſi cum linea Rationali propoſita comparentur; quales ſunt illæ, quæ in demonſtratione ſunt poſitæ: (eſt enim recta A B, 2. & C D, 3.) verum etiam illas, quæ nullis poſſunt numeris efferri, ſi cum Rationali linea propoſita conferantur; Deinde e contrario, quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, ſeu latera, ex ſecunda theorematis parte longitudine ſunt commenſurabilia, non ſolum ea eſſe intelligenda quæ continent totidem quadratas menſuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ reſoluitur, quot ſunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipſis proportionem habentibus; cuiuſmodi ſunt quadrata in demonſtratione deſcripta: (continet enim quadratum ex A B, quatuor menſuras quadratas, & quadratum ex C D, nouem; quot nimirum vnitates ſunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures menſuras quadratas complectuntur, quã ſunt vnitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpe numero enim lineæ datæ commenſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi non poſſunt, propterea quod Rationali lineæ propoſitæ ſunt longitudine incommenſurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum, at pauciores quadratas menſuras, vel plures continent, quam ſunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perſpicua faciemus hac demonſtratione.

EXPONATVR linea Rationalis A B, expreſſa numero 4. cuius quadratum A C, cõtinebit menſuras quadratas 16. Sint quoq; numeri D, E, plani ſimiles non quadrati, habentes tamen proportionem, vt in Arithmeticis eſt demonſtratum, 26. octaui quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur rectangulum H I, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadrati A C, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; atq; ipſi H I, quadratum 24. ſecundi

14. ſeptimi. æquale conſtituatur K L, cuius latus K M. Poſtremo per ea, quæ ĩ coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita ſe habeat K L, quadratum rectæ K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratũ G. Quoniam igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per conſtructionem; Continet autem quadratum K L, 6. menſuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale A C: (conſtructum enim eſt quadratum K L, æquale rectangulo H I, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris.) continebit quadratum N P, earundem menſurarum quadratarum 24 ac propterea M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt ℞. 6. & ℞. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cũ 6. & 24. non ſint numeri quadrati, eruntq; lineæ Rationali A B, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cum quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum K M, N O; ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1, ad 4. erit proportio laterum ſubdupla videlicet 1. ad 2 huius enim illa duplicata eſt, vt hic 6. decimi. apparet 1. 2. 4. Quare longitudine commenſurabiles ſunt rectæ K M, N O, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ ſunt ergo in hoc theoremate lineæ etiã illæ longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi, ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi conſiderentur eædem lineæ K M, N O, ſimpliciter, & abſolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cum



ri. Cum enim proportionem habeant ſubduplam, ſi K M, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales ſũt partibꝰ lineæ Rationalis AB, immo illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles.

RURSUS, quia quadrata K L, N P, proportionem habentia quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas menſuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, reſoluitur, quam vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam K L, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & N P, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadem proportione ſumãtur Q, R, pauciores tales menſuras complectuntur quadrata K L, N P, quam ſunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cum alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus cõſtituatur; manifeſtũ eſt, in hoc theoremate intelligẽda quoq; eſſe quadrata proportionẽ habentia, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, quæ pauciores quadratas menſuras, vel plures cõprehẽdũt, quã vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur cũ quadrato lineæ Rationalis propoſitæ. Quod ſi eadẽ quadrata K L, N P, cõſiderentur abſolute, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali linea AB, deſcripti, reſolui poterũt in totidẽ mẽſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, cõtinentur. Nã ſi recta K M, diuidatur in duas partes, & N O, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratũ K L, quatuor menſuras quadratas, & quadratũ N P, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiũtur in quadratis numeris F, G. Item, ſi eædẽ lineæ ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earũ quadrata mẽſuras quadratas 9. & 36. quot nimirũ vnitates cõprehẽdũtur in numeris quadratis Q, R, &c. At hmõi mẽſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratũ A C, Rationalis lineæ A B, reſoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumq; lateribus, quorũ ſuperficies nõ exprimuntur numeris quadratis, dũmodo proportionẽ habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint 12, & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum eſt de lineis longitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali lineæ incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus. Quadrata quæ deſcribuntur a rectis lineis longitudine inter ſe commenſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſita, proportionem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpe numero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ Rationali ſint longitudine incommenſurabilia, &c.

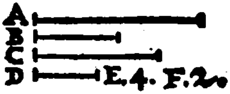
COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem eſſe poteſt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8 oſtendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera, nempe diameter & latus in vno eodemq; quadrato, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabilia. Hoc etiam nos demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. Quod tamen clarius oſtendet Euclides propoſ. vltima huius lib.

11.
10.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis; & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, ſitq; A, prima ſecundæ B, commenſurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commenſurabilem eſſe. Quoniam A, & B, inter ſe commenſurabiles ſunt, habebit A, ad B, pro-
portionem quam numerus ad 5. decimi.
numerum, nempe quam E, ad F: Ponitur autē vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam
numerus E, ad numerū F. Quare C, & D, commenſura- 6. decimi.
biles inter ſe ſunt.



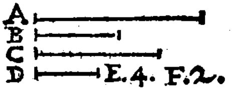
SED ſit iam A, ipſi B, incommenſurabilis. Dico & C, ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Quoniam A, & B, incom-
menſurabiles ſunt, non habebit A, ad B, proportionē quā 7. decimi.
numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet quam nu-
merus ad numerum. Quare C, & D, incommenſurabiles 8. decimi.
ſunt inter ſe. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION. I.

QVOD ſi quatuor propoſitæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem ſecundæ commenſurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commenſurabilis, vt ex demonſtratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo oſtendemus poſteriores duas proportionē habere numeri ad numerum. Quare, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, longitudine commenſurabiles ſunt.

SI autem prima ſecundæ fuerit commenſurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commenſurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, com-
menſurabilis eſt potentia ipſi B, erunt earum quadrata com- 3. defin.
menſurabilia; ac propterea proportion[illegible]bebunt, quam nu- 5. decimi.
merus ad numerum. Eſt autem, vt q[illegible]ratum ex A, ad qua-

22. ſexti. dratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D: (quod quatuor lineæ propoſitæ A, B, C, D, proportionales ſint, & earũ quadrata figuræ ſimiles ſimiliterq; deſcriptæ) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Quare commenſurabi- 6. decimi.
lia erunt ; Ac propterea lineæ 3. defin.
C, D, potentia cõmenſurabiles.



Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita manifeſtum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum ſint commenſurabiles potentia tantum, longitudine incommenſurabiles ſunt ; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. docuimus ; Ac propterea neq; C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt C, D, ex ſcholio propoſ. 8. huius lib. Sunt autem potentia commenſurabiles, vt oſtendimus : Igitur potentia tantum ſunt commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

EADEM rõne, ſi prima ſecũda ſit incõmẽſurabilis longitudine tãtũ, erit & tertia quartæ longitudine tantũ incõmẽſurabilis. Nã ſi A, & B, ſint lõgitudine tãtũ incõmẽſurabiles, erũt ipſarũ potẽtiæ cõmenſurabiles ; ac propterea ipſæ potẽtia tantũ cõmẽſurabiles erũt. Igitur, vt nũc oſtẽdimus, erunt quoq; rectæ C, D, potẽtia tãtum cõmenſurabiles, Ac idcirco longitudine tantum incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS, ſi quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ ſuperficies, vel ſolida ; ſequetur nihilo minus, ſi lineæ ſint longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles, & reliquas duas magnitudines commenſurabiles, vel incommenſurabiles eſſe. Si enim lineæ longitudine ſint commenſurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Cũ ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandẽ, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum ; atq; adeo commenſurabiles erunt. 6. decimi. Si vero lineæ longitudine incommenſurabiles ſint, ſiue potentia commenſurabiles exiſtant, ſiue non ; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. Qua

re in

re incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

8. decimi.

5. decimi.

EODEM *modo, ſi priores duæ magnitudines fuerint ſuperſicies, vel ſolida, poſteriores vero duæ, lineæ, demõſtrabimus, ſi plana, vel ſolida cõmenſurabilia ſint, vel incõmẽſurabilia, lineas lõgitudine cõmẽſurabiles eſſe, vel incõmenſurabiles. Si.n. plana, ſolidaue cõmẽſurabilia ſint, habebũt ipſa pportionẽ, quã numerꝰ ad numerũ. Igiĩ & lineæ eandẽ cũ ipſis rõnẽ habẽtes, proportionẽ habebũt, quã numerꝰ ad numerũ; ac propterea lõgitudine cõmẽſurabiles erũt, vt diximꝰ in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Si vero plana, vel ſolida ſint incõmenſurabilia, nõ habebũt ea proportionẽ, quã numerꝰ ad numerũ. Igiĩ neq; lineæ eãdẽ cũ ipſis proportionẽ habẽtes, proportionẽ habebunt, quã numerus ad numerũ. Ergo longitudine incommenſurabiles erũt per ea, quæ docuimus in ſcholio propoſ. 8. huius lib. Quod eſt propoſitũ.*

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR *duo plani numeri non ſimiles, per ea, quæ ad finẽ lib. 8. docuimus. Nam huiuſmodi numeri non habebunt proportionem, quã quadratus numerus ad quadratum numerũ, ut in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.*

QVOD *ſi plures numeros inuenire uelimus, quorum quilibet duo proportionẽ nõ habeant, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunq; numeros primos, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli.n. horũ primorũ acceptorũ proportionẽ inter ſe habẽt, ex ſcholio prop. 26. lib. 8. quã numeri quadrati ad numeros quadratos, cũ nõ ſint plani ſimiles, ut ad finẽ lib. 8. docuimus.*

A, 3. *B*, 5. C, 7. D, 11. *E*, 13.

SCHOLION. II.

PORRO inuentionẽ numerorũ planorũ nõ ſimilium, qui videlicet proportionẽ nõ habeãt, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco. Quod vt oſtendamus, adducenda eſt eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non ſit ſicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perſpicuum igitur eſt E, F, numeros planos eſſe, planos autem diſſimiles; quoniam latera proportionalia nõ ſũt, qđ facere oportebat.

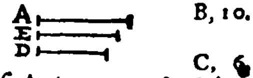
A, 2.	C, 3.
B, 6.	D, 16.
E, 12.	F, 48.

HAEC eſt eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non ſimilium. Errant autem huiuſmodi interpretes, quia ſæpe numero inuenti numeri ſecundum eorum doctrinam, plani ſimiles ſunt. Nam numeri ex eorum demonſtratione inuenti, 12. & 48. ſunt plani ſimiles, cum proportionem habeant, quã quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus poſterioris 6. & 8. vt cõſtat; quamuis latera prioris ab illis aſſumpta 2. & 6. non ſint proportionalia lateribus poſterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim eſt, vt duo numeri plani ſint ſimiles, aliqua duo latera vnius proportionalia eſſe quibuſdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quacunque duo latera vnius proportionalia ſint quibuſcunq; duobus lateribus alterius; qua de re plura ſcripſimus in defin. 21. lib. 7. & in ſcholio propoſ. 23. lib. 8. 10.

11. PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta propoſita A, cui primum inuenienda ſit linea incommenſurabilis longitudine tantum. Inueniantur,



per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Deinde ex corollario propoſ. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum ſic ſe habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine ſint incommenſurabiles ita probabitur. Quoniam eſt quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non eſt autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommenſurabiles ſunt. *9. decimi.* Quod autẽ tantũ longitudine ſint incõmenſurabiles, patet. Cũ enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, ipſa commenſurabilia erunt. *6. decimi.* Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commenſurabiles. Quare longitudine tantũ incõmenſurabiles ſunt.

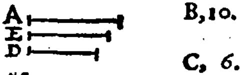
Sit iam eidem rectæ propoſitæ A, inuenienda linea incommenſurabilis longitudine, & potentia. Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommenſurabiles, media proportionalis. *13. ſexti.* Dico E, ipſi A, incommenſurabilem eſſe longitudine, & potentia. Quoniam eſt quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommenſurabilis eſt longitudine ipſi D, vt iam eſt oſtenſum; erit & quadratum ex A, incõmenſurabile quadrato ex E. *10. decimi.* Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia ſunt incommenſurabiles; ac proinde ex coroll. propoſ 9. huius lib. & omnino longitudine incommenſurarabiles ſunt. Eſt igitur E, ipſi A, incommenſurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propoſitæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas lineas, &c. Quod erat demonſtrandũ.

SCHOLION.

Si igitur recta A, propoſita ſtatuatur Rationalis, ita vt ab ea menſura cæterarum ſumantur; erit & recta D, *per defin.*

ſin. 6. Rationalis, quia potentia illi eſt commenſurabilis, licet eidem longitudine incommenſurabilis ſit. At vero E, Irrationalis, ex defin. 7. cum Rationali A, incommenſurabilis ſit longitudine, & potentia.

CAETERVM, *ex demonſtratione huius theorematis liquido conſtat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantũ cõmenſurabiles, vel quod idẽ eſt, inter duas longitudine tantũ incõmenſurabiles, eſſe vtrilibet illarũ incõmenſurabilẽ longitudine, & potentia; atq; adeo appellari Irrationalẽ, ſi alterutra illarũ ſtatuatur Rationalis. Ex eo n. quod recta A, D, ſunt lõgitudine tãtũ incõmenſurabiles, vel commẽſurabiles potẽtia tantũ, demõſtrauimus rectã E, inter illas mediã proportionalẽ, eſſe ipſi A, incõmenſurabilẽ lõgitudine, & potẽtia: Eodẽq; argumẽto oſtẽdemus eandẽ longitudine, & potẽtia ipſi D, eſſe incõmenſurabilẽ. Cũ n. recta D, E, A, ſint cõtinue proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt quadratũ ex D, ad quadratũ ex E, ita recta D, ad rectã A: Eſt aũt recta D, recta A, incõmenſurabilis* 10.decimi. *longitudine. Igit̃ & quadratũ ex D, quadrato ex E, incõmenſurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incõmẽſurabiles ſunt potẽtia, atq; adeo & longitudine, per coroll. propoſ. 9. huius lib.*



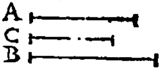
IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propoſitio a Theone propoſitioni decimæ præcedẽti: quod errore librariorum factum eſſe puto; cum ſecunda pars huius ex præcedenti propoſitione decima demonſtretur, vt ex dictis apparet.

12.
8.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVAE eidem magnitudini ſunt commẽſurabiles, & inter ſe ſunt cõmẽſurabiles.

SIT vtraq; magnitudo A, B, magnitudini C, cõmenſurabilis. Dico & A, B, inter ſe eſſe cõmenſurabiles. Cũ n. A, & 5. decimi. C, ſint cõmenſurabiles, habebit A, ad C, proportionẽ, quã numerus ad numerũ: habeat quã numerus D, ad numerũ E. Rurſus quia C, B, cõmenſurabiles ſunt, habebit quoq; C, ad B, proportionẽ, quã numerus ad numerũ: habeat quã nu- 4.octaui merus F, ad numerũ G. ſumãturq; tres numeri H, I, K, minimi de-



D. 10. E, 8.
F, 2. G, 3.
H, 5. I,4. K,6.

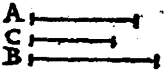
mi deinceps proportionales in proportionibus D,ad E,& F, ad G; ſitq; H, ad I, vt D,ad E, hoc eſt, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G, hoc eſt, vt C, ad B. Quoniã igitur eſt A,ad C,vt H,ad I; & C,ad B,vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B,vt H,ad K, numerus ad numerũ. Quare A,B, proportionẽ habẽtes, quam numeri H, K, inter 6.decimi. ſe commenſurabiles ſunt. Quæ ergo eidem magnitudini cōmenſurabiles ſunt,&c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

QVOD ſi magnitudines A,B,C, ſint lineæ, atq; A, & B, ipſi C, longitudine cõmenſurabiles exiſtant, erunt quoq; A, & B, inter ſe longitudine commenſurabiles, vt conſtat ex demonſtratione theorematis, quia eodem modo oſtendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K: Quare longitudine commenſurabiles erunt, vt ad propoſ.6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipſi C, potentia commenſurabiles, licet eidem longitudine ſint incommenſurabiles, demonſtrabuntur eodem modo, & A,B, inter ſe commenſurabiles potẽtia. Cum enim A, & C, ſint potentia commenſurabiles, erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nem- 5.decimi. pe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. ſint commenſurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerũ, nimirũ vt F, ad G. Sumptis ergo in eiſdẽ rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, 4 octaui I, K, deinceps proportionalibus; erit rurſum ex æquo quadratũ ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerũ K. Quare quadrata ex A, & B, commenſurabilia ſunt; atq; adeo lineæ 6.decimi. A, B, potentia commenſurabiles. Non tamen ex hoc ſequitur, A, & B, potentia tantum eſſe commenſurabiles. Poſſunt enim eſſe duæ lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantum ſit commenſurabilis; quales ſunt duæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, potentia vero tantum Rationali expoſitæ commenſurabiles, quas quidem inueniemus poſtea in ſcholio 2. propoſ.19. huius lib.

Sed & conuerſum quodammodo huius theorematis demonſtrabimus hoc modo.

Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera vero ſit vni cuipiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis.



Sint enim A, & B, commenſurabiles, ſitq; A, ipſi C, commenſurabilis. Dico & B, eidem C, *commenſurabilem eſſe. Cum enim tam B, quam* C, *ipſi* A, *ſit commenſurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.*

Qvod ſi magnitudines A, *B, C, ſint lineæ, & A,* B, *commenſurabiles longitudine, ſit autem* A, *ipſi* C, *commenſurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem* C, *longitudine commenſurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipſi A, longitudine ſit commenſurabilis, erunt etiam B, C, inter ſe commenſurabiles longitudine, vt oſtendimus. At vero ſi lineæ A, & B, potentia tantum ſint commenſurabiles, &* A, *ipſi* C, *commenſurabilis ſiue longitudine, & potentia, ſiue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia eſſe commenſurabilem; quia vtraq;* B, C, *ipſi A, hæc ratione potentia eſt commenſurabilis ex hypotheſi. Non autem colligere licebit, ſi A, ipſi C, commenſurabilis ſit longitudine, reliquam* B, *eidem* C, *longitudine commenſurabilem eſſe, quia non vtraque B, C, ipſi A, longitudine commenſurabilis eſt, ſed C, quidem longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypotheſi conſtat.*

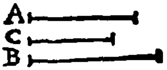
12.

0.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera vero incommenſurabilis: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A,& B,quarum A,ſit ipſi C, commenſurabilis, & B,eidem C, incommenſurabilis. Dico A,& B,inter ſe incommenſurabiles eſſe. Si enim B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi A; cum eidem A, commenſurabilis ponatur C; erunt B, & C, inter ſe commenſurabiles. quod eſt abſurdum. ponitur enim B,ipſi C,incommenſurabilis. Non ergo B,ipſi A,cōmenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat oſtendendum. 12. decimi.



SCHOLION.

SI magnitudines A, B,C,ſint lineæ,& A,quidem ipſi C, longitudine commenſurabilis, at B, eidem C, incommenſurabilis longitudine; erunt A, & B,longitudine incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles eſſent, oſtenderemus quoque B, C, eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles. (cum hoc poſito, vtraque B,C, ipſi A, commenſurabilis eſſet longitudine) quod non ponitur. Pari ratione,ſi A, ipſi C, potentia ſit commenſurabilis ſiue tantum, ſiue etiam longitudine, at vero B,eidem C,potentia incommenſurabilis; erunt A, & B, potentia incommenſurabiles. Si enim eſſent commenſurabiles potentia, eſſent quoque B, & C,potentia commenſurabiles. (cum hoc poſito,vtraque B,C, ipſi A, potentia eſſet commenſurabilis,) Quod eſt abſurdum. Ponitur enim B,ipſi C, potentia incommenſurabilis. 12.decimi.

QVONIAM *vero hæc propoſitio 13.apud Theonem lemma eſt, fit, vt poſt hac in noſtra editione numerus propoſitionũ Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus.n. dedita opera ordinem ac ſeriem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.*

THEOR. 11. PROPOS. 14.

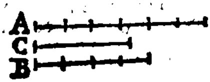
13.
8.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera autem ipſarum magnitudini

a cuipiam

cuipiam incommenſurabilis fuerit; Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.

SINT duę magnitudines cõmenſurabiles A, & B, quarum A, incommenſurabilis ſit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem. Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi C, ac propterea & C, ipſi B; cum & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis; erunt



12. decimi. & A, C, inter ſe cõmenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demõſtrandum erat.

SCHOLION.

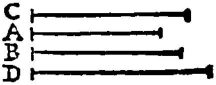
HIC quoq;, ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantum, ſiue longitudine & potentia incommenſurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommenſurabilis. Si enim B, & C, eſſent longitudine commenſurabiles, eſſent 12. decimi. *quoque A, & C, commenſurabiles longitudine. (Cum hoc poſito, vtraque A, & C, ipſi B, longitudine eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum. ponitur enim A, ipſi C, longitudine incõmenſurabilis. Quod ſi A, & B, commenſurabiles ſint potentia tantum, & A, ipſi C, potentia incommenſurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipſi C, potentia incommenſurabilem eſſe. Alias ſi B, C, potentia eſſent com-* 12. decimi. *menſurabiles; & A, C, potentia commenſurabiles eſſent. (cum hoc poſito, vtraque A, C, ipſi B, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod non ponitur.*

COLLIGVNT *porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis ſequens theorema ad ea, q̃ in hoc lib. demonſtrantur, perutile.*

QVAE incommenſurabilibus ſunt commẽſurabiles; & inter ſe incommenſurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommenſurabiles A, B, quibus

bus commenſurabiles ſint C,& D,nempe C,ipſi A, & D, ipſi B. Dico C,& D,inter ſe incommenſurabiles eſſe. Quoniam A, & C, commenſurabiles ponuntur,& eſt A,ipſi B,incommenſurabilis; erit quoq; reliqua C, eidem B, incommenſurabilis. 14.decimi.



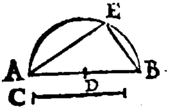
Rurſus quia D,& B,commenſurabiles ponuntur,& eſt B,oſtenſa ipſi C,incommenſurabilis; erit & D, reliqua eidem C, incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum. 14 decimi.

SI autem magnitudines A,B,C, D, ſint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommenſurabiles, vel longitudine & potentia; ſint autem C, D, ipſis A, B, longitudine commenſurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommenſurabiles. Si vero A, & B, incommenſurabiles ſint potentia, & ipſis potentia tantum commenſurabiles C, & D; oſtendemus ſimiliter C, & D, potentia eſſe incommenſurabiles; vt perſpicuum eſt.

LEMMA.

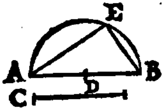
DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus poteſt, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, oſtenderimus antea ad propoſ. 47. lib. 1. tamē quia hic breuius ex ijs, quæ tradita ſunt in lib. 3. & 4. demonſtratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ ĩæquales AB, & C, quarū AB, maior. oporteatq; ĩuenire, quo AB, plus poſſit quā C. Diuiſa AB, bifariā in D, deſcribatur ex centro D, & interuallo DA, uel DB, ſemicirculus AEB, in quo aptetur recta AE, ipſi C, æqualis, iungaturque recta 1.quarti. *EB. Dico rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ EB. Cum enim angulus E, in ſemicirculo* 1 terti. *rectus*



47.primi. *rectus ſit; erit quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B; atq; idcirco A B, plus poterit quam A E, hoc eſt, quam C, quadrato rectæ E B. Quod eſt propoſitum.* *Similiter*

Duabus datis rectis lineis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt.



Hoc etiam aliter tradidimus ad propoſ. 47. lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ A E, E B, quæ ſi coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta A B, quippe cũ 47.primi. *quadratum ex A B, æquale ſit quadratis ex A E, E B.*

14.
12.

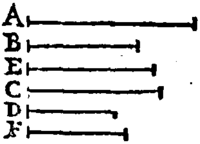
THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tanto plus poſſit quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum

rectæ

rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D; poſſitque A, prima plus quam B, ſecunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus poſſit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A, & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C: Si uero E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilem eſſe. Quoniã eſt ut A, ad B, ita C, ad D; erit quoque ut quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, *22. ſexti.* ad quadratum ex D. Eſt autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypotheſim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, ut quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, ut quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; Ac propterea erit etiam ut recta E, ad rectam B, ita recta F, *22. ſexti.* ad rectam D; conuertendoque ut B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt ut A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, ut A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commenſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incõmenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, ut in ſcholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantum commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantum ipſi C, eſſe commenſurabilem, ut conſtat ex ijs, quæ in ſcholio propos. 10. huius lib. ſcripſimus.

15.
9.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo uni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duę magnitudines commenſurabiles A B, BC. Dico totam quoque magnitudinem A C, utrique ipſarum A B, B C, commenſurabilem eſſe. Sit enim ipſarũ A B, BC, communis menſura D. *3. decimi* Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, metietur quoque D, *1. pron.* totam AC, ex ipſis cõpoſitam. Cum ergo D, metiatur A C, & AB; erunt AC, A B, commenſurabiles. Similiter cum D, metiatur A C, & BC; erũt & AC, BC, cõmenſurabiles; Ac propterea A C, utrique ipſarũ AB, BC, cõmenſurabilis erit.

SED iam tota A C, ex A B, BC, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum AB, BC, nempe ipſi A B. Dico & A B, B C, inter ſe commẽſurabiles eſſe. Sit enim D, *3. decimi* communis menſura ipſarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur *3. pron.* totam A C, & ablatã A B; metietur quoque D, reliquã B C. Quare cum D, metiatur AB, BC; cõmenſurabiles erũt A B, BC, inter ſe. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, eſſe commenſurabiles, ſi A C, ipſi B C, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines commenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

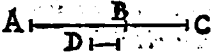
HINC ſequitur, ſi tota magnitudo ex duabus cõpoſita, cõmenſurabilis ſit alteri ipſarũ, eandẽ & reliquę cõmẽſurabilẽ eſſe. Vt ſi AC, ipſi AB, ſit cõmenſurabilis, eſſe quoq; eandem AC, reliquæ BC, cõmenſurabilẽ. Nã ut in poſteriori parte theorematis oſtenſum eſt, ſemper D, communis menſura totius A C, & ablatæ AB, cum metiatur totã AC, & ablatã A B, metietur quoque reliquã BC, ex 3. pronunciato. Quare cõmenſurabiles ſunt AC, BC. Quod eſt propoſitũ.

THEOR.

THEOR. 14. PROPOS. 17. 16. 9.

SI duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & tota magnitudo utrique ipſarum incõmenſurabilis erit: Quod ſi tota magnitudo uni ipſarum incommenſurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines incommenſurabiles erunt.

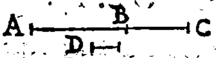
COMPONANTVR duæ magnitudines incommenſurabiles AB, B C. Dico totam quoque magnitudinẽ A C, utrique ipſarum A B, BC, incommenſurabile eſſe. Si enim non eſt utrique incommẽſurabilis, ſit alteri commenſurabilis, ſi fieri poteſt, nempe ipſi A B, ſitque D, communis menſuta ipſarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; metietur quoque D, reliquam B C; Ac propterea cum D, metiatur utranq; A B, B C, erunt A B, B C, commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non ergo commenſurabilis eſt A C, ipſi A B; Eademque ratione neque ipſi B C, commenſurabilis erit. Quare utrique ipſarum A B, B C, incommenſurabilis eſt. 3. decimi 3. pron.



SED iã tota AC, cõpoſita ex AB, BC, incõmenſurabilis ſit uni ipſarũ cõponentium, nempe ipſi A B. Dico quoque AB, BC, incõmenſurabiles eſſe. Si enim ſint cõmenſurabiles, erit quoque tota A C, utriq; ipſarũ AB, BC, cõmenſurabilis. 16. decimi. Quod eſt abſurdũ. Ponitur enim AC, alteri ipſarũ, nempe ipſi A B, incõmenſurabilis. Non ergo cõmenſurabiles ſunt AB, BC. Eodẽ argumento oſtendemus AB, BC, incommenſurabiles eſſe, ſi A C, ipſi B C, incommenſurabilis fuerit. Quapropter ſi duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ incommenſurabilem eſſe. Nempe ſi A C, incommenſurabilis ſit ipſi A B, eſſe quoque eandem A C, reliquæ BC, incommenſurabilem. Si enim A C, ipſi BC, foret commenſurabilis, eſſet quoque A C, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ A B, commenſurabilis. Quod eſt abſurdum. ponitur enim incommenſurabilis. Non eſt ergo A C, ipſi B C, commenſurabilis, ſed incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.



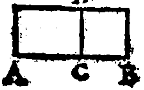
SCHOLION. I.

PERSPICVVM eſt, in duabus proximis antecedentibus propoſitionibus, earumque corollarijs, ſi de lineis agatur, intelligendas eſſe lineas longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles. Aſſumitur enim ad vtriuſque propoſitionis demonſtrationem communis menſura D, &c. quam quidem ſolum lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

AD rectam A B, *applicetur parallelogrammum A* D, *deficiens figura quadrata* B D. *Dico parallelogrammum A* D, *æquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis A* C, C *B, comprehenſo. Cum enim B* D, *quadratum ſit, erit angulus* AC*D, rectus. Parallelogrammum igitur rectangulum eſt A D, contentum ſub* A C, *C D, rectis. Quare cum C D, æqualis ſit recta C* B, *ob quadratum* B D; *continebitur idem parallelogrammum rectangulum A* D, *ſub ſegmentis*



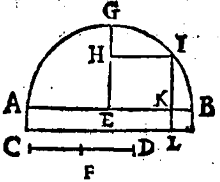
A C,

A C, C B; ac proinde parallelogrammum A D, applicatum æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis A C, C B, quæ ex applicatione in recta A B, ſunt facta, comprehenſo. Quod eſt propoſitum.

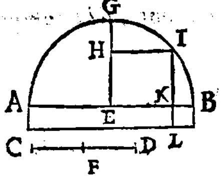
LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.

QVAMVIS *id, quod in hoc lemmate proponitur, facile abſolui poſſit ex propos. 28. lib. 6. libet tamen idipſum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales A B, C D, quarũ A B, maior ſit, oporteatque ad A B, applicare parallelogrammũ deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale ſit quartæ parti quadrati ex recta C D, deſcripti. Sectis rectis A B, C D, bifariam in E, & F, deſcribatur ex centro E, & interuallo E A, uel E B, ſemicirculus A G B; & ex E, perpendicularis ad A B, ducatur E G. Et quia tota A B, maior ponitur quam tota C D, erit quoque A E, dimidia ipſius A B, hoc eſt E G, ipſi A E, æqualis, maior quam C F, dimidia ipſius C D. Poſita igitur E H, æquali ipſi C F, agatur per H, ipſi A B, parallela H I, demittaturque I K L, ad A B, perpendicularis, & ſit K L, ipſi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum A L, & quadratum B L. Dico parallelogrammũ A L,*



applicatum ad rectam A B, *deficiens figura quadrata* B L, *æquale eſſe quartæ parti quadrati rectæ* C D.



Quoniam KI, *media proportionalis eſt inter* A K, K B, *ut in ſcholio propos.* 13. *lib.* 6. *tradidimus; erit rectãgulũ ſub* AK, KB, *hoc eſt, rectangulum* AL, 17. *ſexti.* *æquale quadrato ex* KI, *hoc eſt,* 34. *primi* *quadrato ex* EH; (*eſt enim* KI, *ipſi* EH, *æqualis, ob parallelogrammum* EI,) *hoc eſt, quadrato ex* CF: *Eſt autem quadratum ex* C F, *quarta pars quadrati ex* C D; *quod quadratum ex* C D, *per ſcholium propos.* 4. *lib.* 2. *quadruplum ſit quadrati ex* C F. *Igitur parallelogrammũ* A L, *ad rectam* A B, *applicatum deficienſq; quadrato* B L, *æquale eſt quartæ parti quadrati ex* C D, *deſcripti.* Quod *eſt propoſitum.*

SCHOLION.

Ex hoc lemmate abſoluemus & hoc problema, quod ſequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita ſecare, ut rectangulum ſub partibus contentum, æquale ſit dato rectilineo, quod tamen maius non ſit, quàm quadratum a dimidia linea deſcriptum.

Sit enim recta data A B, *& rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex* CF, *nõ maius quam quadratum ex dimidia* A E, *ita ut latus* C F, *non maius ſit latere* A E. *Educta ergo ad* A B, *perpendiculari* E G, *ſit* E H, *æqualis ipſi* C F. *Deinde acta* H I, *parallela ipſi* A B, *demittatur* I K, *perpendicularis ad* A B. *Quibus peractis oſtendemus, ut prius, rectangulum ſub partibus* A K, K B, *æquale eſſe quadrato ex* I K,

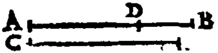
hoc

hoc eſt, quadrato ex C F, atque adeo & rectilineo dato, cui æquale eſt poſitum quadratum ex C F. Quod eſt propoſitum. Diximus autem, rectilineum datum non debere eſſe maius quam quadratum ex dimidia linea deſcriptum; quia ſi maius eſſet, eſſet quoque recta C F, maior quam recta E G. Quare ex E G, abſcindi non poſſet recta ipſi C F, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, ut ex demonſtratione manifeſtum eſt.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata; Non erũt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C; & ad maiorem A B, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ſitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, deſcripti, ita ut D B, latus ſit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico ſegmenta A D, DB, inæqualia eſſe. Si enim A D, D B, ſegmenta dicantur eſſe æqualia; cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad A B, deficienſque figura quadrata ex D B, deſcripta, æquale ſit rectangulo ſub A D, D B; ſit autem quod ſub æqualibus A D, D B, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex A D, dimidio ipſius A B, deſcriptum; atq; adeo ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum ex A B, quadruplum erit ipſius parallelogrãmi: Eſt autem & quadratum ex C, per hypotheſim, quadruplũ eiuſdẽ parallelogrãmi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarũ ex AB, et C, æqualia ſunt, atq; rectæ A B, et C, æquales.



Quod eſt abſurdum. ponuntur enim inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur ſunt ſegmenta AD, DB. Quod eſt propoſitum.

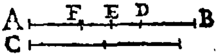
HOC facile etiam apparet ex conſtructione problematus in antecedente lemmate. Cum enim abſciſſa ſit per conſtructionem, EH, æqualis dimidiatæ parti ipſius CD, nempe ipſi CF, ductaque HI, parallela ipſi AB, & tandem demiſſa perpendicularis IK, ut partes factæ ex applicatione ſint AK, KB; manifeſtum eſt AK, KB, ſegmenta eſſe inæqualia, cum AB, in E, ſecta ſit bifariam. Immo hinc conſtat, prius ſegmentum maius eſſe, & poſterius, quod latus eſt quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

17.
13.

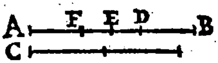
THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorẽ applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat; maior tantò plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit quam minor, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelorallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior AB; quartæ autem parti quadrati ex minori C, deſcripti, per lemma ſecundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum deficiens figura quadrata, faciatque ſegmenta A D, D B, longitudine commenſurabilia. Dico A B, plus poſſe quam C, quadrato lineę longitudine ſibi commenſurabilis. Quoniam per 3. lemma præcedentis propos. A D, maior eſt, quam D B; diuidatur A B, biſariam in E, & ipſi E D, æqualis ſumatur E F. Quo facto, cum totæ E A, E B, æquales ſint, & ablatæ quoque E F, E D; erunt & reliquæ A F, B D, æquales. Et quia recta A B, diuiſa eſt biſariam in E, & non biſariam in D; erit rectangulum ſub A D, DB, una cum quadrato ex E D, æquale quadrato 5. ſecundi ex E B; Ac propterea quadruplum rectanguli ſub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B: Eſt autem quadruplo rectanguli ſub A D, D B, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum ſub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale eſt quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum eſt ex ſcholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cum F D, dupla ſit ipſius E D.) & quadruplo quadrati ex E B, æquale eſt quadratum ex A B. (quod quadratum ex A B, quadruplum ſit per ſcholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipſius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia ſunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus poteſt quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonſtrare oportet longitudine cõmenſurabilem eſſe ipſi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commenſurabiles; erit quoque tota A B, parti D B, commenſurabilis longitudine. 16. decimi. Eſt autem & ipſi D B, compoſita ex D B, A F, longitudine commenſurabilis: (quod cõpoſita ex D B, A F, dupla ſit ipſius D B) Igitur cum utraque A B, & compoſita ex D B, A F, longitudine



dine ſit commenſurabilis ipſi D B ; erunt quoque A B, & cõpoſita
12. decimi. ex D B, A F, longitudine inter ſe commenſurabiles ;



Ac propterea cum A B, compoſita ex A F, D B, tanquam una, & ex F D, commenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex A F, D B ; erit eadem A B, ex coroll. propos. 16. huius lib. cõmenſurabilis longitudine reliquæ F D. Ergo AB, plus poteſt quam C, quadrato rectæ FD, longitudine ſibi commenſurabilis.

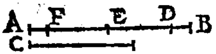
SED iam AB, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, ęquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque ſegmenta A D, D B. Dico & rectas A D, D B, longitudine eſſe commenſurabiles. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus poſſe, quam C, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit recta A B, ipſi FD, longitudine commenſurabilis. Igitur cum tota AB, compoſita ex FD, & ex A F, DB, tanquã una, cõmenſurabilis ſit longitudine ipſi FD ; erit eadem A B, longitudine cõmenſurabilis reliquæ compoſitæ ex A F, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Eſt autẽ & compoſita ex A F, DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis, cum ipſius ſit dupla : Igitur cum utraque AB, DB, longitudine ſit commenſurabilis compoſitæ ex A F, D B ; erunt quoque A B, D B,
12. decimi. longitudine inter ſe commenſurabiles : Atque adeo cũ tota A B, compoſita ex A D, D B, commenſurabilis ſit longitudine
16. decimi. ipſi DB ; erunt ipſæ A D, DB, longitudine quoque inter ſe commenſurabiles. Quocirca ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonſtrandum.

18. THEOR. 16. PROPOS. 19.

14. SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, &

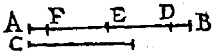
in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit, quàm minor, quātum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit, quam minor, quantum eſt quadratū rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrāmum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.

Sint duæ rectæ inæquales A B, & C, quarū maior A B; quartæ autem parti quadrati ex C, minori deſcripti applicetur ad A B, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommenſurabiles. Dico A B, plus poſſe quam C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus A B, plus poſſe quam C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonſtrare oportet ipſi A, longitudine eſſe incommenſurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommenſurabiles; erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommenſurabilis. 17. decimi. Sed D B, longitudine commenſurabilis eſt compoſitæ ex D B, A F, cum hæc illius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commenſurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipſa D B, longitudine ſit incommenſurabilis rectæ A B: erit quoque reliqua compoſita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommenſurabilis: 14. decimi. Ac propterea cum A B, compoſita ex A F, D B, tanquam una, & ex F D, incommenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex A F, D B, erit eadem AB, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ FD, longitudine



ne incommenſurabilis. Ergo A B, plus poteſt quam C, quadrato rectæ F D, longitudine ſibi incommenſurabilis.

IAM uero A B, plus poſſit quam C, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, eſſe incommenſurabiles longitudine. Iiſdem enim conſtructis, oſtendemus ut prius, rectam A B, plus poſſe quam C, quadrato rectæ F D Quare cum A B, ponatur plus poſſe, quam C, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; erit A B, ipſi F D incommenſurabilis longitudine. Igitur cum tota A B, compoſita ex F D, & ex A F, D B, tanquam una, longitudine incommenſurabilis ſit ipſi F D; erit eadem A B, per coroll. propos 17. huius lib. & reliquæ compoſitæ ex A F, D B, longitudine incommenſurabilis: Eſt autem compoſita ex A F, D B, ipſi D B, longitudine commenſurabilis, cum illa huius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commenſurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur, & D B, ipſa compoſita ex A F, D B, longitudine incommenſurabilis ſit rectæ A B; *14. decimi* erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommenſurabilis; Ac proinde cum tota A B, compoſita ex A D, D B, incommenſurabilis ſit ipſi D B, longitudine; *17. decimi* erunt & ipſæ A D, D B longitudine inter ſe incommenſurabiles. Quam ob rem ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autẽ parti quadrati, &c. Quod erat demonſtrandũ.



SCHOLION. I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus; nunc ad Rationales & Medias tranſit in ſequentibus.

LEMMA. I.

QVONIAM *demonſtratum eſt, lineas longitudine commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles*

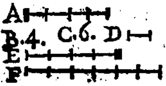
rabiles eſſe, potentia uero commenſurabiles, non omnino & longitudine, ſed poſſe & longitudine commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles; manifeſtum eſt, ſi expoſitæ Rationali aliqua linea cõmenſurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem uocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si uero expoſitæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quod ſi expoſitæ Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis; dicetur & ſic Rationalis, potentia tantum ipſi commenſurabilis.

LEMMA. II.

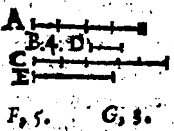
EX PROCLO. *Rationales uocat eas lineas, quæ expoſitæ Rationali uel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, uel potentia ſolum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſitæ Rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolum commenſurabiles; atq; ob id rurſus dicuntur Rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus Rationales; commenſurabiles, inquam, inter ſe uel longitudine & potentia, uel potentia ſolum.* Et *ſi quidẽ longitudine, dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe cõmenſurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commenſurabiles eſſe; Si uero potentia inter ſe ſolum ſunt commenſurabiles, dicuntur ipſæ quoque Rationales, potentia ſolum inter ſe commenſurabiles.*

SCHOLION. II.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali; ac proinde utraque Rationali commenſurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis: Aut denique utraque expoſitæ Rationali commenſurabilis eſt ſolum potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes, quot nimirum unitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas eſt in G, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cum habeant D, communem menſuram. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine cõmenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarũ una, nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

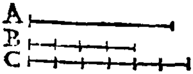


IAM uero D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit, qui B, ita vt vtraque linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communem D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles, Rationales ſunt. Cum ergo & inter ſe ſint longitudine commenſurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commenſurabiles & intet ſe, & expoſitæ Rationali A,

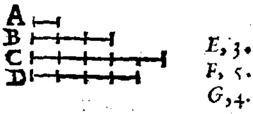


li A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

POSTREMO *expoſitæ Rationali A, inueniatur recta*
B, longitudine tantum incommenſurabilis, quæ ſecetur in quotcunque 11. decimi.
partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolum eſſe commenſurabiles. Quoniam A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C, quod B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeo, & potentia; Igitur quadrata rectarum
A, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, ipſi 12. decimi.
A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine
incommenſurabilis; erit quoque reliqua C, eidem A, 14. decimi.
longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolum potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia uero tantum commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.



QVOD *ſi quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles; id efficiet hoc modo. Sumpta menſura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipſi A, æqualibus, quot ſunt unitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communẽ menſuram A, longitudine cummenſurabiles erunt.*

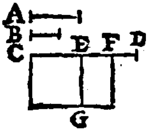


CAETERVM *& omnes lineas Rationales, non ſolũ expoſitæ Rationali, ſed etiã inter ſe eſſe cõmenſurabiles, facile hoc modo demonſtrabimus. Quoniã Rationales lineæ ſunt, quæ expoſitæ Rationali ſunt commenſurabiles uel longitudine & potentia,* 6. defin.
uel potentia tantum; quæ autem eidem commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt; manifeſtum eſt, 12. decimi.

Rationales lineas quaſcunque inter ſe commenſurabiles eſſe.

LEMMA. III.

Si ſint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratũ ex prima.



Sint *duæ rectæ* A, *& B. Dico eſſe ut* A, *ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum ſub* A, *& B, comprehenſum. Ex quantacunque linea recta* CD, *abſcindatur* CE, *ipſi A, æqualis, & EF, ipſi* B. *Deinde ſuper* CE, *deſcribatur quadratum C G, perficiaturque rectangulum G F, contentum ſub CE, & EF, hoc eſt, ſub* A, *& B.* 1. ſexti. *Quoniam igitur eſt ut C E, ad E F, hoc eſt, ut A, ad B, ita parallelogrammum* C *G, hoc eſt, quadratum ex* A, *ad parallelogrammum G F, ſub* A, *& B, comprehenſum; perſpicuum eſt, ſi ſint duæ rectæ lineæ, eſſe primam ad ſecundam, ut quadratum ex prima deſcriptum, ad rectangulum ſub ipſis comprehenſum.*

Eodem *modo erit, ut B, ad* A, *ita rectangulũ FG, ad quadratum G*C. *Quod eſt propoſitum.*

LEMMA IIII.

Spatium Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

Sit *ſpatium* A, *commenſurabile Rationali ſpatio*

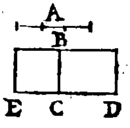
tio B. Dico & A, Rationale eſſe. Sit C, quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, uel irrationalia, quod nimirum ab expoſita Rationali deſcribitur. Quoniã igitur B, Rationale eſt, erit ipſum Rationali C, commenſurabile: 9. defin. 1 *Eſt autem & A, ipſi B, commenſurabile. Igitur A, & C, cum commenſurabilia ſint ipſi B, inter ſe quoque commenſurabilia erunt;* 12. decimi *ac proinde A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripto commenſurabile, Rationale eſt.* 9. defin. *Quod erat demonſtrandum.*

19.
15.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus B C, C D, ſecundum aliquem prædictorum modorum (hoc eſt, ſecundum aliquem trium modorum, quos in ſcholio 2. antecedentis propoſ. explicuimus; ita vt vel altera ipſarum B C, C D, Rationali expoſitæ A, ſit æqualis, vel neutra, ſed tamen ei vtraque commenſurabilis ſit aut longitudine, aut potentia tantum.) Dico B D, rectangulum Rationale eſſe. Deſcribatur enim ex altera earum, nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expoſitæ A, commenſurabilis eſt vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum; erit quoque quadratum B E, ex B C, deſcriptum quadrato ex A, commenſurabile: Eſt autem quadra 3. defin.



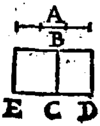
8. *defin.* tum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vo-
9. *defin.* cantur, vel Irrationalia. Igitur & B E, *illi* commenſurabile
Rationale eſt. Quia vero B C, hoc eſt, E C, & C D, longitu
dine commenſurabiles ſunt; (ponuntur enim B C, C D,
Rationales inter ſe longitudine commenſurabiles.) & eſt vt
1. *ſexti.* E C, ad G D, ita E B, ad B D; erunt quoq; E B, B D, com-
10. *decimi.* menſurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propoſ.
B D, Rationali B E, commenſurabile, Rationale eſt. Quod
igitur ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus re
ctis, &c. Quod erat demonſtrandum.

20.
16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.

SIT rurſum expoſita Rationalis A, & alia Rationalis B C, ſecundum aliquem modorum, quos in ſcholio 2. propoſ. præcedentis expoſuimus, hoc eſt, ſiue B C, æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non, commenſurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, *latitudinem faciens* C D. *Dico* C D, Rationalem eſſe, & ipſi B C, commenſurabilem longitudine. Deſcribatur ex B C, quadratum B E; quod ſimiliter, vt in antecedenti propoſ. oſtendemus Rationale eſſe. Quia igi-



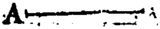
tur B E, B D, Rationalia ſunt, ipſa commenſurabilia erunt
9. *defin.* quadrato ex linea Rationali expoſita A, deſcripto; Ac pro-
12. *decimi.* pterea & commenſurabilia inter ſe erunt: Eſt autem vt
1. *ſexti.* B E, ad B D, ita E C, hoc eſt, B C, ad C D. Igitur, &
B C, C D, commenſurabiles ſunt longitudine, vt in ſcho-
lio propoſ. 10. huius lib. docuimus. Eſt ergo C D, ipſi B C,
6. *defin.* commenſurabilis longitudine: ſed & Rationalis, quippe
quæ Rationali BC, atq; idcirco Rationali expoſitæ A, com-
menſu-

menſurabilis ſit, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare latitudo C D, Rationalis eſt, & longitudine commenſurabilis ipſi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

Recta linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

Possit *recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoq; , ut in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.*

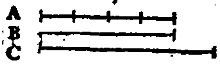


Hoc *idem conſtat ex definitione* 11. *huius lib. Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, uocantur Irrationales.*

LEMMA II.

Dvas rectas Rationales potentia ſolum commenſurabiles inuenire.

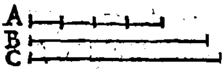
Dvo *genera ſunt linearum Rationalium potentia tantum inter ſe commenſurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, inueniatur C, longitudine tantum incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt)* 11 decimi.



poten-

potentia tantum commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt; (B, quidem, quod ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quod inuenta ſit potentia tantum commenſurabilis ipſi B, atque adeo ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolum commenſurabiles. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.

POSTERIORIS *autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantum incommenſurabilis inueniatur B,* 11. *decimi.* *& huic rurſum longitudine tantum incommenſurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quod enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commenſurabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, ut in ſcholio propoſ.* 12. *huius lib. demonſtrauimus. Quare cum utraque B, C, expoſitæ Rationali A, ſit potentia commenſurabilis; erunt B, C, Rationales.* 6. *defin.* *Inuentæ ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles.*



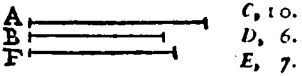
SCHOLION.

QVOD *ſi inueniendæ ſint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, exequemur id hac ratione.*

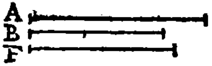
SVMANTVR *per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur,*

tur, nempe, A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E.
fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in
coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus. Item vt B, ad C, ita
quadratum ex F, ad qua-
dratum ex G; & deniq;
vt C, ad D, ita quadra-
tum ex G, ad quadratum
ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales eſſe, & potentia tan-
tum commenſurabiles inter ſe. Quod enim Rationales ſint,
manifeſtum eſt. Cum enim earum quadrata proportionem ha-
beant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad
quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex conſtru-
ctione; ſimiliterq; quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B,
ad C; & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At
vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad
C; ſimiliterque quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt
A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex
H, vt B, ad D.) erunt ipſa inter ſe commenſurabilia; ac pro- 6. decimi
pterea & rectæ ipſæ potentia ſaltem commenſurabiles. Exiſten
te ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales.
Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita oſten-
demus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt nume-
ris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non
habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus;
non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportio-
nem, quam numeri quadrati. Quare rectæ E, F, G, H, longitu- 9. decimi.
dine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Rationales,
& potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & poten
tia tantum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi propoſitis quotcunque Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, inuenienda ſit adhuc alia, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero, qui ad quemlibet ipſorum C, D primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur pri-



mus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad F, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, pro- 6. decimi. *portionem habentia, quam numeri D, E, commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. oſtendimus, quod* 9. decimi. *D, & E, ſint inter ſe primi; erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratũ; erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.*



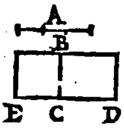
C, 10.
D, 6.
E, 7.

21.
19.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commenſurabilibus ſecundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum B D, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi B D, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E,



quod

quod erit Rationale, vt in demonſtratione propos. 10. diximus. Et quoniam eſt vt EC, hoc eſt, BC, ad C D, vt *1. ſexti.* B E, ad B D: Eſt autem B C, ipſi C D, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus, B E, ipſi B D incommenſurabile. Quare cum B E, commenſurabile ſit quadrato ex *9. defin.* Rationali expoſita A: Sit autem B E, ipſi B D, incommenſurabile; erit quoque quadratum ex Rationali expoſita A, *14. decimi.* eidem B D, incommenſurabile; Ac propterea B D, quadrato Rationalis expoſitę incommenſurabile exiſtens, Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum B D, Irrationalis eſt, *10. defin.* ex 1. lemmate propoſ. antecedentis.

VOCETVR autem hæc linea potens ipſum B D, Media; propterea quod media proportionalis ſit inter duas BC, *17. ſexti.* C D, Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, quippe cum eius quadratum æquale ſit rectangulo B D, ſub ipſis B C, C D, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, Media vocabitur. Cum enim eius quadratum æquale ſit rectangulo *17. ſexti.* *ſub talibus Rationalibus comprehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile deſcribemus, ſi dicamus eam eſſe lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantum inter ſe incommenſurabiles. Vel quæ poteſt rectangulũ ſub duabus Rationalibus potẽtia tãtũ inter ſe cõmẽſurabilibus cõtẽtũ. Nã ſola hæc linea Media hoc loco appellat̃.*

VT autem recte hoc loco monet Campanus, nõ ſolũ recta potens rectãgulũ Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potẽtia tãtũ cõmẽſurabilibus cõtentũ, Irrationalis eſt, vocaturq; Media: Verũ etiã quadratum ipſius, vel rectangulum illud Mediũ dicit̃, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia ſolum commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint continue proportionales, quales ſunt B C, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & C D; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata, proportionalia, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptũ proportionale eſt inter quadrata rectarum B C, C D, ideoq; Medium appellari poteſt.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omnẽ rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quale eſt Medium B D. Hoc enim falſum eſt, cum & ſpatium Medium contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26. huius lib. conſtabit. Itaque non reciprocantur rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alias recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

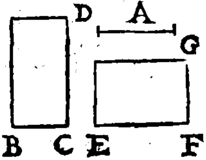
VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum cõmenſurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

THEOR. 20. PROPOS. 23. 22.

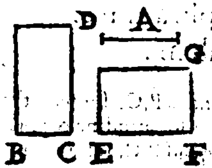
20.

QVOD a Media ſit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis B C, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; applicetur q; ad B C, rectangulũ B D, 45. primi æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale eſt, faciatq; latitudinem C D. Dico C D, Rationalem eſſe, & ipſi B C, longitudine incommenſurabilem. Quoniam A, Media eſt, ipſa poterit rectangulum ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus inter ſe contentum; alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulũ E G, ſub Rationalibus E F, F G, potẽtia tantum commenſurabilibus contentum. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt etiam ipſum B D; æqualia erunt B D, & E G, lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; 14. ſexti. nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad ad C D; Ac propterea quoque vt quadratum ex BC, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: 22. ſexti. Sed quadratum ex B C, commenſurabile eſt quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F ponantur Rationales; atq; adeo inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur & quadratum ex F G, commẽſurabile erit quadrato ex C D; 10. decimi. proptereaq; & rectę F G, C D, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cũ F G, Rationalis expoſitæ Rationali ſit commenſurabilis, ſi ipſa nõ eſt expoſita Rationalis; erit quoq; C D, expoſitę Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incõmenſurabilis ipſi B C. Quoniam



niam E F, F G. Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles; & eſt vt E F, ad F G, ita quadratum ex E F ad rectangulum E G, ſub E F, F B, contentum, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit 10. decimi. quadratum ex E F, incommenſurabile rectangulo E G; atq; adeo rectangulo B D, quod huic æquale eſt. Atqui quadratum ex E F, commenſurabile eſt quadrato ex C D. (quod E F, C D, Rationales ſint, atq; idcirco ſaltem potentia commenſurabiles.) Igitur cum quadratum ex C D, commenſurabile ſit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incom- 13. decimi. menſurabile; incommenſurabilia erunt quadratũ ex C D, & rectangulum B D. Eſt autem ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt re- 10. decimi. cta C D, ad rectam B C. Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine C D, & B C. Rationalis ergo eſt C D, & Rationali B C, longitudine incõmenſurabilis. Quamobrẽ, quod a Media fit, ad Rationalẽ applicatũ, &c. Quod demonſtrandũ erat.



SCHOLION.

FACILIVS quam ex propoſ. 45. lib. 1. applicabimus ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale, ſi ipſis B C, & A, 11. ſexti. *ſumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim B C, A, & C D, proportionales ſint; erit rectangulũ B D, ſub extremis* 17. ſexti. *B C, C D, contentum, æquale quadrato mediæ proportionalis A.*

HAC arte vtendum erit & in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuſpiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifeſtum eſt, omne Mediũ, hoc eſt, ſpatium, quod linea Media poteſt, æquale eſſe cuidã alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus. Nam ſi illi Medio ad Rationalẽ lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommenſurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Me

dio

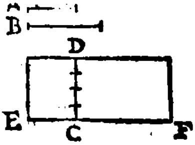
dio æquale, Medium erit ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus contentum. Atque hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus.

23.
21.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIAE cõmenſurabilis, Media eſt.

SIT Mediæ A, recta B, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & B, Mediam eſſe. Expoſita enim ſit Rationalis C D, ad quam applicetur
rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. 45. *primi.* Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinẽ; erit C E, Rationalis ipſi C D, longitudine incommenſurabilis. 23. *decimi.* Rurſus ad C D, Rationalem applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. 45. *primi.* Et quia rectæ A, B, ponuntur commenſurabiles, erunt quoque earum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia, DE, DF, commenſurabilia. 1. *ſexti.* Eſt autem vt D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. 10. *decimi.* Igitur E C, C F, longitudine ſunt commenſurabiles: Sed E C, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine ipſi C D, incommenſurabilis. Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommenſurabilis eſt. 14. *decimi.* Cum ergo & Rationalis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ C D, ſit commenſurabilis; (Nam cum E C, C F, ſint longitudine oſtenſæ commenſurabiles, & E C, ipſi C D, cõmenſurabilis ſaltẽ potentia, quod Rationalis ſit; erit & C F, eidem C D, commenſurabilis potentia, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. ſcripſimus.) erunt C D, C F, Rationales potentia tantum commenſurabiles; Ac proinde recta B, potens rectangulum D F, ſub Rationalibus potentia tantum cõmenſurabilibus C D, C F, 22. *decimi.* Media eſt. Mediæ igitur commenſurabilis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.

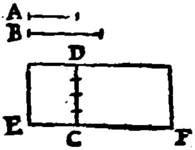


COROL.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabi bile, Medium eſſe. Poſtquam demonſtratum eſt D F, commenſu rabile eſſe Medio D E, oſtenſum ex eo mox fuit D F, eſſe quoq; Medium. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

Sit ſpatium, DF, ſpatio Medio D E, commenſurabile. Dico & D F, Medium eſſe. Poſſit enim A, Media ipſum D E, Medium. (Nam cũ DE, Medium ſit, poterit ipſum recta, quæ Media dicitur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipſum D F. Quoniam D E, D F, commenſurabili ſunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipſis æqualia, commenſurabilia. Quar A, B, rectæ potentia ſaltem ſunt commenſurabiles; Ac idcirco e ſtente A, Media, erit & B, illi commenſurabilis Media, vt in ho theoremate oſtenſum eſt. Igitur & D F, Medium erit. Omne eni ſpatium, quod poteſt Media, Medium appellatur, vt in ſcholi propoſ. 22. huius lib. docuimus.



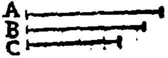
LEMMA. I.

Quemadmodum autem in lemmate ı *propoſ. 19. huius lib. de Rationalibus dictum eſt, it & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam linea Mediæ longitudine commenſurabilem, dici Median & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſ & potentia; Vniuerſe enim quæ longitudine comm ſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt commenſurabile Si uero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit c menſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſ Media, & ipſi commenſurabilis longitudine & p tentia. Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commen rabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Media ipſi potentia ſolum commenſurabilis.*

LEMMA. II.

Dvas rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.

Sit *Media aliqua linea* A, *cui ſi inueniantur duæ rectæ commenſurabiles* B, C; *illa quidem longitudine, hæc uero potentia tantum; erit utraque* B, C, *Mediæ* A, *commenſurabilis, Media. Cum ergo* A, B, *ſint longitudine commenſurabiles; &* A, C, *potentia tantum; erunt inuentæ* A, B, *Mediæ longitudine commenſurabiles; &* A, C, *Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.* 24. *decimi*



SCHOLION.

Qvamvis omnis linea recta Mediæ commenſurabilis, Media ſit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ eſt commenſurabilis; cum duæ Mediæ dari poſſint prorſus incommenſurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propoſ. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inuenienda ſint duæ Mediæ longitudine & potentia incommenſurabiles.

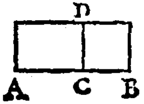
24.

THEOR. 22. PROPOS. 25. 23.

QVOD ſub Medijs longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

Contineatvr rectangulum AD, ſub Medijs AC, CD, longitudine commenſurabilibus. Dico AD, Medium

dium eſſe. Deſcribatur ex CD, Media quadratũ BD, quod
1. ſexti erit Mediũ. Et quoniam eſt vt AC, ad CB, ita AD, ad DB:
Sunt autem AC, CB, hoc eſt, AC, CD,
longitudine cõmẽſurabiles; erunt AD,
10. decimi. DB, cõmẽſurabilia. Quare ſpatiũ AD,
Medio DB, cõmenſurabile, Mediũ eſt,
ex coroll. præcedentis propoſ. Quod ergo ſub Medijs longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

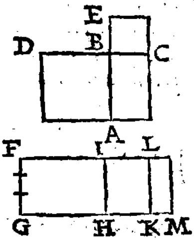


25.
23.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD ſub Medijs potentia tantum cõmenſurabilibus rectis lineis cõtinetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

Sit rectangulum AC, comprehenſum ſub Medijs AB, BC, petentia tantum commenſurabilibus. Dico AC, eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribãtur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib docuimus; cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, ad quam applicetur
45. primi. rectangulum FH, quadrato AD,
ex AB, deſcripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, deſcripto; eritque totum FM, vnum rectangulum, quemadmodum propoſ. 45. lib 1. eſt oſtẽſum. Quia vero AD, CE, Media ſunt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL,
34. primi. (eſt enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH,
23. decimi. KM, erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipſi FG, ſeu KL,
longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earũ quadra



drata A D, C E, atque adeo ipſis ęqualia rectangula F H,
L M, commenſurabilia : Vt autem F H, ad L M, ita eſt recta *1. ſexti*
G H, ad K M. Igitur G H, K M, longitudine inter ſe *10. decimi.*
commenſurabiles ſunt. Quare G H, K M Rationales oſtenſæ,
ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles, Rationali
uero F G, ſolum commenſurabiles potentia, cum ei oſtenſæ
ſint longitudine incommenſurabiles ; Ac propterea rectangulum
ſub ipſis G H, K M, Rationale eſt. Et quoniã *20. decimi.*
eſt, vt D B, ad B C, ita A B, ad B E; (quod D B, B C ipſis
AB, BE, ſint æquales, utraq; utrique.) & ut DB, ad BC,
ita AD, ad AC; & ut AB, ad BE, ita AC, ad CE ; erit quoq; *1. ſexti*
ut AD, ad AC, ita AC, ad CE; atq; adeo AD, AC, CE, proportionalia
ſunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, ꝓportionalia
erunt : Habent autem rectæ GH, HK, KM, eaſdem
proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ *1. ſexti*
GH, HK, KM, proportionales ſunt, proptereaq; rectãgulum
ſub GH, KM, quadrato ex HK, æquale eſt. Eſt autem *17. ſexti*
rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Rationale. Igitur
& quadratũ ex HK, Rationale eſt; ideoq; & recta HK, Rationalis
erit; & ob hoc ipſi FG, Rationali expoſitæ, hoc eſt, ipſi
HI, cõmẽſurabilis uel lõgitudine, uel ſolũ potẽtia. Et ſi quidẽ *5. defin.*
HK, ipſi HI, lõgitudine ſit cõmẽſurabilis; rectãgulũ HL,
ſub Rationalibus HI, HK, lõgitudine cõmẽſurabilibus cõtẽtũ, *20. decimi.*
hoc eſt, AC, illi æquale, erit Rõnale. Si uero H K, ipſi H I,
potẽtia ſolũ cõmẽſurabilis ſit; erit rectãgulũ HL, ſub Rationalibus
HI, HK, potẽtia tãtũ cõmẽſurabilibus cõtentũ, hoc *22. decimi.*
eſt, AC, illi æquale Mediũ. Eſt ergo AC, rectãgulũ ſub Medijs
AB, BC, potẽtia tãtũ cõmẽſurabilibus cõtentũ, uel Rationale,
uel Medium. Quocirca, quod ſub Medijs potentia
tantum commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

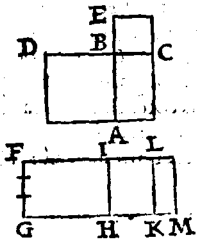
FACILIVS quã ex 45. prop. ſ. lib. 1. applicabimꝰ ad HI, rectãgulũ
ipſi AC, æquale, ſi tribus rectis HI, AB, BC, quarta *12. ſexti.*
proportionalis ſumatur pro latere HK. Nã rectangulũ ſub extremis
HI, HK, æquale erit rectãgulo ſub medijs AB, BC. *16. ſexti.*

HAC eadẽ arte vtemur in ſequẽtibꝰ, quãdo ad aliquã rectã applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Medijs potentia tantum commenſurabilibus eſſe uel Rationale, uel Medium; docebit Euclides propoſ. 28 quanam ratione inuenienda ſint duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propoſ. vero 29. duas Medias potentia ſolum commenſurabiles inquiret, quæ ſpatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, rectangulum contentum ſub
20. decimi. duabus Rationalibus longitudine cõmenſurabilibus eſſe Rationale; Sub duabus vero Rationalibus potentia tantũ cõmenſurabilibus
22. decimi bilibus contentum rectangulum eſſe Irrationale, appellemus Medium, & rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat, rectangulum comprehenſum ſub duabus
25. decimi. Medijs longitudine commenſurabilibus eſſe Medium; Rectangulum autem ſub duabus Medijs potentia ſolum commenſura-
26. decimi. bilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, uel Medium.

QVOD ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod ſub duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituere; nempe æquale eſſe rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.



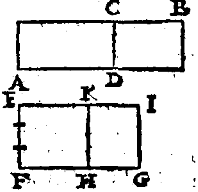
SIT enim rectangulum A C, comprehenſum ſub duabus Medijs AB, BC, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico A C, neque Rationale eſſe, neque Medium, &c. Conſtructis eiſdem, ut in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas G H, K M, Rationales eſſe, & ipſi F G, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ A B, B C, ponuntur incommenſurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadrata A D, C E, atque adeo ipſis æqualia rectangula F H, L M,
1. ſexti. incommenſurabilia: Vt autem F H, ad L M, ita eſt recta G H, ad rectam K M. Igitur rectæ G H, K M, longitudine
10. decimi. inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare G H, K M, oſtenſæ Rationales, ſunt potentia tantum inter ſe commenſurabiles;
22. decimi Ac propterea rectangulum ſub ipſis G H, K M, Irrationale eſt,

eſt, quod Medium appellatur, & recta ipſum potens, Irrationalis 22. decimi. *quæ dicitur Media. Poteſt autem rectangulum ſub ipſis G H, K M, recta H K: (Nam, ut prius, oſtendemus tres G H,* 17. ſexti. *H K, K M, eſſe proportionales) Igitur H K, Irrationalis eſt, & Media. Quare I K, Rationale non eſt: ſi enim Rationale eſſet, faceret ipſum ad Rationalem H I, applicatum latitudinem H K, Rationalem, & ipſi H I, longitudine commenſurabilem.* 21. decimi. *Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt H K, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque I K, Medium eſt; Si enim eſſet Medium, faceret ipſum applicatum ad Rationalem H I, latitudinem* 23. decimi. *H K, Rationalem, & ipſi H I, longitudine incommenſurabilem. quod eſt abſurdum. oſtenſa eſt enim H K, Irrationalis, & Media. Itaque cum I K, neque Rationale ſit, neque Medium; neceſſario neque A C, illi æquale, Rationale erit, neque Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi I K, quod ſub Rationali, & Media, continetur, cum H I, Rationalis ſit, & H K, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectam quæ poteſt ſpatium ſub duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus (quales ponuntur A B, BC, comprehenſum, poſſe quoque rectangulum ſub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 24. PROPOS. 27. 26. 22.

MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

SVPERET Medium A B, Medium A C, rectangulo D B. Dico D B, non eſſe Rationale. Sit enim, ſi fieri poteſt, D B, Rationale. Expoſita ergo Rationali linea E F; ad ipſam applicetur rectangulū E G, 45. primi Medio A B, æquale; & Medio A C, rectangulum E H, æquale, ut ſit reliquum H I, Rationali D B, æquale. Erunt igitur E G, E H, æqualia Medijs A B, A C, Media; & H I, æquale Rationali D B, Rationale.



illarum rectarum Rationalium potentia ſolum commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint continue proportionales, quales ſunt B C, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & C D; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata, proportionalia, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptũ proportionale eſt inter quadrata rectarum B C, C D, ideoq; Medium appellari poteſt.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omnè rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quale eſt Medium B D. Hoc enim falſum eſt, cum & ſpatium Medium contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26. huius lib. conſtabit. Itaque non reciprocantur rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alias recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum cõmenſurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

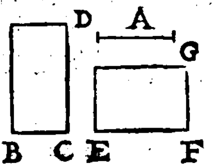
THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

22.
20.

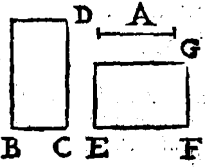
QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis B C, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; applicetur q; ad B C, rectangulũ B D, 45. *primi* æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale eſt, faciatq; latitudinem C D. Dico C D, Rationalem eſſe, & ipſi B C, longitudine incommenſurabilem. Quoniam A, Media eſt, ipſa poterit rectangulum ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus inter ſe contentum; alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectãgulũ E G, ſub Rationalibus E F, F G, potẽtia tantum commenſurabilibus contentum. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt etiam ipſum B D; æqualia erunt B D, & E G, lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad 14. *ſexti.* ad C D; Ac propterea quoque vt quadratum ex BC, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex 22. *ſexti.* C D: Sed quadratum ex B C, commenſurabile eſt quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F ponantur Rationales; atq; adeo inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur & quadratum ex F G, commẽſurabile erit quadrato ex C D; propterea q; & rectę F G, 10. *decimi.* C D, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cũ F G, Rationalis expoſitæ Rationali ſit commenſurabilis, ſi ipſa nõ eſt expoſita Rationalis; erit quoq; C D, expoſitę Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incõmenſurabilis ipſi B C. Quo-



niam

niam E F, F G. Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles; & eſt vt E F, ad F G, ita quadratum ex E F ad rectangulum E G, ſub E F, F B, contentum, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit
10.*decimi.* quadratum ex E F, incommenſurabile rectangulo E G, atq; adeo rectangulo B D, quod huic æquale eſt. Atqui quadratum ex E F, commenſurabile eſt quadrato ex C D. (quod E F, C D, Rationales ſint, atq; idcirco ſaltem potentia commenſurabiles.) Igitur cum quadratum ex C D; commenſurabile ſit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incom-
13.*decimi.* menſurabile; incommenſurabilia erunt quadratũ ex C D, & rectangulum B D. Eſt autem ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt re-
10.*decimi.* cta C D, ad rectam B C. Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine C D, & B C. Rationalis ergo eſt C D, & Rationali B C, longitudine incõmenſurabilis. Quamobrẽ, quod a Media fit, ad Rationalẽ applicatũ, &c. Quod demonſtrandũ erat.



SCHOLION.

FACILIVS quam ex propoſ. 45. lib. 1. applicabimus ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale, ſi ipſis B C, & A,
11. *ſexti.* *ſumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim B C, A, & C D, proportionales ſint; erit rectangulũ B D, ſub extremis*
17. *ſexti.* *B C, C D, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.*

HAC arte vtendum erit & in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuſpiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifeſtum eſt, omne Mediũ, hoc eſt, ſpatium, quod linea Media poteſt, æquale eſſe cuidã alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus. Nam ſi illi Medio ad Rationalẽ lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema; alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommenſurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Me

dio

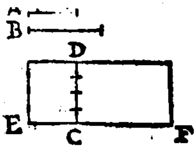
dio æquale, Medium erit ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus contentum. Atque hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

23.
21.

MEDIAE cõmenſurabilis, Media eſt.

SIT Mediæ A, recta B, commenſurabilis ſiue longitudi
ne & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & B, Mediam
eſſe. Expoſita enim ſit Rationalis C D, ad quam applicetur
rectangulum D E, æquale quadrato 45. *primi.*
ex A, Media. Quoniam igitur
D E, Medium ad Rationalem C D,
applicatum, facit C E, latitudinẽ;
erit C E, Rationalis ipſi C D, longitudine
incommenſurabilis. Rurſus 23. *decimi.*
ad C D, Rationalem applicetur
rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ 45. *primi.*
A, B, ponuntur commenſurabiles, erunt quoque eorum
quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia, DE, DF,
commenſurabilia. Eſt autem vt D E, ad D F, ita recta E C, 1. *ſexti.*
ad rectam C F. Igitur E C, C F, longitudine ſunt commen 10. *decimi.*
ſurabiles: Sed E C, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine
ipſi C D, incommenſurabilis. Igitur & C F, longitudine
eidem C D, incommenſurabilis eſt. Cum ergo & Rationa 14. *decimi.*
lis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ C D, ſit commen
ſurabilis; (Nam cum E C, C F, ſint longitudine oſtenſæ
commenſurabiles, & E C, ipſi C D, cõmenſurabilis ſaltẽ
potentia, quod Rationalis ſit, erit & C F, eidem C D, commenſurabilis
potentia, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 12.
huius lib. ſcripſimus.) erunt C D, C F, Rationales potentia
tantum commenſurabiles; Ac proinde recta B,
potens rectangulum D F, ſub Rationalibus potentia
tantum cõmenſurabilibus C D, C F, 22. *decimi.*
Media eſt. Mediæ igitur commenſurabilis,
Media eſt. Quod oſtendendum
erat.

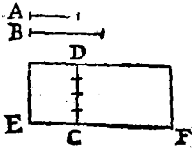


COROL-

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabi bile, Medium eſſe. Poſtquam demonſtratum eſt D F, commenſe rabile eſſe Medio D E, oſtenſum ex eo mox fuit D F, eſſe quoq; Medium. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

Sit ſpatium, DF, ſpatio Medio D E, commenſurabile. Dico & D F, Medium eſſe. Poſſit enim A, Me dia ipſum D E, Medium. (Nam cũ DE, Medium ſit, poterit ipſum recta, quæ Me dia dicitur, vt in ſcholio propoſ. 22. hu ius lib. tradidimus.) & B, ipſum D F. Quoniam D E, D F, commenſurabili ſunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipſis æqualia, commenſurabilia. Quare A, B, rectæ potentia ſaltem ſunt commenſurabiles; Ac idcirco ex ſtente A, Media, erit & B, illi commenſurabilis Media, vt in hoc theoremate oſtenſum eſt. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim ſpatium, quod poteſt Media, Medium appellatur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus.



LEMMA. I.

Qvemadmodvm autem in lemmate 1. propoſ. 19. huius lib. de Rationalibus dictum eſt, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commenſurabilem, dici Mediam, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſe & potentia; Vniuerſe enim quæ longitudine comme ſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt commenſurabiles Si uero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit cō menſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſi Media, & ipſi commenſurabilis longitudine & po tentia. Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commen rabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Media ipſi potentia ſolum commenſurabilis.

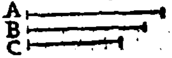
LEM

LEMMA. II.

Dvas rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.

Sit *Media aliqua linea* A, *cui ſi inueniantur duæ rectæ commenſurabiles* B, C; *illa quidem longitudine, hæc uero potentia tantum; erit utraque* B, C, *Mediæ* A, *commenſurabilis, Media. Cum ergo* A, B, *ſint longitudine commenſurabiles;* & A, C, *potentia tantum; erunt inuentæ* A, B, *Media longitudine commenſurabiles;* & A, C, *Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.*

24. decimi



SCHOLION.

Qvamvis omnis linea recta Mediæ commenſurabilis, Media ſit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ eſt commenſurabilis, cum duæ Mediæ dari poſſint prorſus incommenſurabiles; longitudine videlicet, & potentia, vt ex propoſ. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inuenienda ſint duæ Mediæ longitudine & potentia incommenſurabiles.

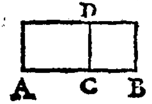
24.
23.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

Qvod ſub Medijs longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

Continetvr rectangulum AD, ſub Medijs AC, CD, longitudine commenſurabilibus. Dico AD, Medium

dium eſſe. Deſcribatur ex CD, Media quadratũ BD, quod
1. ſexti erit Mediũ. Et quoniam eſt vt AC, ad CB, ita AD, ad DB:

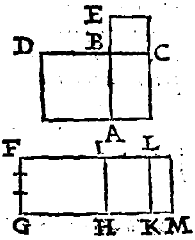


Sunt autem AC, CB, hoc eſt, AC, CD, longitudine cõmẽſurabiles; erunt **A D**,
10. decimi. DB, cõmẽſurabilia. Quare ſpatiũ AD, Medio DB, cõmenſurabile, Mediũ eſt, ex coroll. præcedentis propoſ. Quod ergo ſub Medijs longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

25. 23. THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD ſub Medijs potentia tantum cõmenſurabilibus rectis lineis cõtinetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

Sɪᴛ rectangulum A C, comprehenſum ſub Medijs A B, B C, petentia tantum commenſurabilibus. Dico A C, eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribâtur ex A B, B C, quadrata A D, C E, quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib docuimus; cum rectæ A B, B C, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis F G, ad quam applicetur



45. primi. rectangulum F H, quadrato A D, ex A B, deſcripto æqualeſ; & ad H I, rectangulum I K, rectangulo A C; æquale; & denique ad K L, rectangulum L M, æquale quadrato C E, ex B C, deſcripto; eritque totum F M, vnum rectangulum, quemadmodum propoſ. 45. lib 1. eſt oſtẽſum. Quia vero A D, C E, Media ſunt, erunt & F H, L M, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales F G, K L,
34. primi. (eſt enim & K L, Rationali F G, æqualis, ob parallelogrammum F K, Rationalis.) faciantque latitudines G H,
23. decimi. K M, erunt rectæ G H, K M, Rationales, ipſi F G, ſeu K L, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ A B, B C, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earũ qua-

dra

drata A D, C E, atque adeo ipſis ęqualia rectangula F H,
L M, commenſurabilia: Vt autem F H, ad L M, ita eſt recta 1. ſexti
G H, ad K M. Igitur G H, K M, longitudine inter ſe 10. decimi.
commenſurabiles ſunt. Quare G H, K M Rationales oſtenſæ,
ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles, Rationali
uero F G, ſolum commenſurabiles potentia, cum ei oſtenſæ
ſint longitudine incommenſurabiles; Ac propterea rectangulum
ſub ipſis G H, K M, Rationale eſt. Et quoniã 20. decimi.
eſt, vt D B, ad B C, ita A B, ad B E; (quod D B, B C ipſis
AB, BE, ſint æquales, utraq; utrique.) & ut DB, ad BC,
ita AD, ad AC; & ut AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoq; 1. ſexti
ut AD, ad AC, ita AC, ad CE; atq; adeo AD, AC, CE, proportionalia
ſunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, ꝓportionalia
erunt: Habent autem rectæ GH, HK, KM, eaſdem
proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ 1. ſexti
GH, HK, KM, proportionales ſunt, proptereaq; rectãgulum
ſub GH, KM, quadrato ex HK, æquale eſt. Eſt autem 17. ſexti
rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Rationale. Igitur
& quadratũ ex HK, Rationale eſt; ideoq; & recta HK, Rationalis
erit; & ob hoc ipſi FG, Rationali expoſitæ, hoc eſt, ipſi
HI, cõmẽſurabilis uel lõgitudine, uel ſolũ potẽtia. Et ſi quidẽ 5. defin.
HK, ipſi HI, lõgitudine ſit cõmẽſurabilis; rectãgulũ HL,
ſub Rationalibus HI, HK, lõgitudine cõmẽſurabilibus cõtẽtũ, 20. decimi.
hoc eſt, AC, illi æquale, erit Rõnale. Si uero H K, ipſi H I,
potẽtia ſolũ cõmẽſurabilis ſit; erit rectãgulũ HL, ſub Rationalibus
HI, HK, potẽtia tãtũ cõmẽſurabilibus cõtentũ, hoc 22. decimi.
eſt, AC, illi æquale, Mediũ. Eſt ergo AC, rectãgulũ ſub Medijs
AB, BC, potẽtia tãtũ cõmẽſurabilibus cõtentũ, uel Rationale,
uel Medium. Quocirca, quod ſub Medijs potentia
tantum commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

Facilivs quã ex 45. propoſ. lib. 1. applicabim⁹ ad HI, rectãgulũ ipſi AC, æquale, ſi tribus rectis HI, AB, BC, quarta 12. *ſexti.*
proportionalis ſumatur pro latere HK. Nã rectangulũ ſub extremis H I, H K, æquale erit rectãgulo ſub medijs AB, BC. 16. *ſexti.*

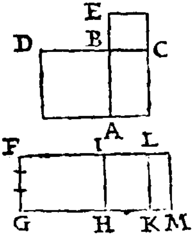
Hac eadẽ arte vtemur in ſequẽtib⁹, quãdo ad aliquã rectã applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVO

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Medijs potentia tantum commenſurabilibus eſſe uel Rationale, uel Medium; docebit Euclides propoſ. 28 quanam ratione inueniendæ ſint duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propoſ. vero 29. duas Medias potentia ſolum commenſurabiles inquiret, quæ ſpatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, rectangulum contentum ſub
20. decimi. duabus Rationalibus longitudine cõmenſurabilibus eſſe Rationale;
Sub duabus vero Rationalibus potentia tantũ cõmenſurabilibus
22. decimi contentum rectangulum eſſe Irrationale, appellarique
Medium, & rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex
demonſtratis conſtat, rectangulum comprehenſum ſub duabus
25. decimi. Medijs longitudine commenſurabilibus eſſe Medium; Rectangulum
autem ſub duabus Medijs potentia ſolum commenſurabilibus
26. decimi. comprehenſum eſſe vel Rationale, uel Medium.

QVOD ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod ſub duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituere; nempe æquale eſſe rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

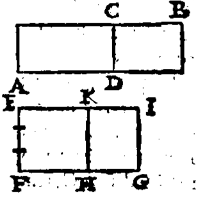


SIT enim rectangulum A C, comprehenſum ſub duabus Medijs AB, BC, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico A C, neque Rationale eſſe, neque Medium, &c. Conſtructis eiſdem, ut in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas G H, K M, Rationales eſſe, & ipſi F G, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ A B, B C, ponuntur incommenſurabiles
longitudine & potentia; erunt & earum quadrata A D,
C E, atque adeo ipſis æqualia rectangula F H, L M,
1. ſexti. incommenſurabilia: Vt autem F H, ad L M, ita eſt recta
G H, ad rectam K M. Igitur rectæ G H, K M, longitudine
10. decimi. inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare G H, K M, oſtenſæ
Rationales, ſunt potentia tantum inter ſe commenſurabiles;
22. decimi Ac propterea rectangulum ſub ipſis G H, K M, Irrationale
eſt,

eſt, quod Medium appellatur, & recta ipſum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media. 22. decimi. Poteſt autem rectangulum ſub ipſis G H, K M, recta H K: (Nam, ut prius, oſtendemus tres G H, 17. ſexti. H K, K M, eſſe proportionales) Igitur H K, Irrationalis eſt, & Media. Quare I K, Rationale non eſt: ſi enim Rationale eſſet, faceret ipſum ad Rationalem H I, applicatum latitudinem H K, Rationalem, & ipſi H I, longitudine commenſurabilem: 21. decimi. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt H K, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque I K, Medium eſt; Si enim eſſet Medium, faceret ipſum applicatum ad Rationalem H I, latitudinem H K, Rationalem, & ipſi H I, longitudine incommenſurabilem. 23. decimi. quod eſt abſurdum. oſtenſa eſt enim H K, Irrationalis, & Media. Itaque cum I K, neque Rationale ſit, neque Medium; neceſſario neque A C, illi æquale, Rationale erit, neque Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi I K, quod ſub Rationali, & Media, continetur, cum H I, Rationalis ſit, & H K, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectam quæ poteſt ſpatium ſub duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus (quales ponuntur A B, BC, comprehenſum, poſſe quoque rectangulum ſub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum. Quod eſt propoſitum.

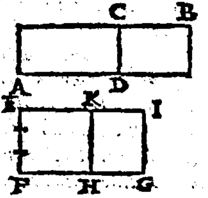
THEOR. 24. PROPOS. 27. 26. 22.

MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.



SVPERET Medium A B, Medium A C, rectangulo D B. Dico D B, non eſſe Rationale. Sit enim, ſi fieri poteſt, D B, Rationale. Expoſita ergo Rationali linea E F; ad ipſam applicetur rectangulū E G, 45. primi Medio A B, æquale; & Medio A C, rectangulum E H, æquale, ut ſit reliquum H I, Rationali D B; æquale. Erunt igitur E G, E H, æqualia Medijs A B, A C, Media; & H I, æquale Rationali D B, Rationale.

nale. Quoniam ergo Media E G, E H, ad Rationalem E F, *23. decimi.* ſunt applicata; erunt rectæ F G, F H, Rationales, & ipſi E F, incommenſurabiles longitudine. Rurſus, quia



Rationale H I, applicatum eſt ad Rationalem H K; (eſt enim re- *34. primi* cta H K, Rationali E F, æqualis) erit *21. decimi.* recta H G, Rationalis, & ipſi E F, longitudine commenſurabilis. Quare cum H G, E F, longitudine ſint cōmenſurabiles; & E F, ipſi F H, longitudine incommenſurabilis, ut eſt *14. decimi.* oſtenſum; erit & H G, eidem F H, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem ut F H, ad H G, ita quadratum ex F H, ad rectangulum ſub F H, H G, ex tertio lemmate propos. 19. *10. decimi* huius lib. Igitur quadratum ex F H, incommenſurabile eſt rectangulo ſub F H, H G. Sed quadrato ex F H, commenſurabile eſt quadratum ex H G; (quod ſint ambo ex lineis Rationalibus E H, H G, deſcripta) atque adeo & duo qua- *16. decimi.* drata ex F H, H G, ſimul, quadrato ex F H, commenſurabilia ſunt: Et rectangulo ſub F H, H G, commenſurabile eſt id, quod bis continetur ſub F H, H G, (quia hoc illius eſt duplum.) Igitur per ea, quæ in *ſcholio propos.* 14. huius lib. oſtendimus, & duo quadrata ex F H, H G, ſimul incommenſurabilia ſunt rectangulo ſub F H, H G, bis. Quare & compoſitum ex quadratis rectarum F H, H G, & ex rectan *17. decimi.* gulo bis ſub F H, H G, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum F H, H G. At quadratis ex F H, H G, *4. ſecundi* una cum rectangulo bis ſub F H, H G, æquale eſt quadratū ex F G. Igitur & quadratū F G, incōmenſurabile eſt cōpoſito ex quadratis rectarum F H, H G: Eſt autem compoſitū hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod oſtēſum ſit commenſurabile quadrato Rationali ex F H. Igitur cum huic compoſito, quod Rationale eſt, incommenſurabi *10. defin.* le ſit quadratum ex F G, erit quadratum ex F G, Irrationale; *11. defin.* ac propterea & recta F G, Irrationalis exiſtet. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt F G, Rationalis longitudine ipſi E F, incōmenſurabilis. Non ergo D B, quo Mediū A B, ſuperat Mediū A C, Rationale eſt. Quam ob rem Mediū non ſuperat Medium Rationali. Quod erat oſtendendum.

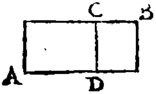
SCHO-

SCHOLION.

Ex dictis & hoc demonſtrabimus.

RATIONALE ſuperat Rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, ſuperet Rationale AC, ſpatio DB. Dico DB, quoque eſſe Rationale. Quoniã AB, AC, Rationalia ſunt; erũt AB, AC, commenſurabilia quadrato Rationalis expoſitæ; 9. *defin.* *atq; adeo & inter ſe cõmenſurabilia.* 12. *decimi.* *Quare cum totum AB, cõpoſitum ex AC, DB, commenſurabile ſit ipſi AC; erit quoq; idem AB, reliquo DB, commenſurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Eſt autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale eſt. Quod eſt propoſitum.*



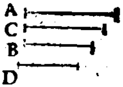
PROBL. 4. PROPOS. 28.

27.

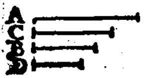
Q.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles, inter quas media proportionalis ſumatur C; 13. *ſexti.* fiatque ut A, ad B, ita C, ad D. 12. *ſexti.* Dico C, D, eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commenſurabiles; erit rectangulum ſub ipſis contentũ, 22. *decimi.* Irrationale, quod Mediũ uocatur; atq; adeo cũ ipſum poſſit 17. *ſexti.* recta C, erit C, Media. Et quoniam eſt ut A, ad B, ita C, ad D; ſuntq; A, B, potentia tantum commenſurabiles; erunt quoq; C, D, ſolum cõmenſurabiles potentia, ut in ſcholio propos. 10. huius lib. oſtendimus. Eſt ergo & D, Mediæ C, commenſurabilis, Media. 24. *decimi.* Quare inuentæ ſunt Mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles. Dico iam ip-



ſas continere Rationale. Quoniam eſt ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita eſt C, ad B; erit quoque ut C, ad B, ita B, ad D; ideoque B, media proportionalis inter C, & D, poterit rectan-

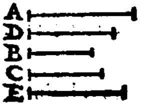


17. *ſexti.* gulum ſub ipſis C, D, comprehenſum. Eſt autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum ſub C, D, Rationale eſt. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

28. PROBL. 5. PROPOS. 29.

0. MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineãt.

EXPONANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commenſurabiles; & inter A, B, media propor-



13. *ſexti.* tionalis inueniatur D. Deinde fiat ut B, ad

12. *ſexti.* C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias eſſe, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent. Quoniam A, B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erit rectangulum ſub A, B, atque adeo

17. *ſexti.* & quadratum ex D, quod illi æquale eſt,

22. *decimi.* Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt ut B, ad C, ita D, ad E; ſunt autem B, C, Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; erunt quoque D, E, potentia ſolum commenſurabiles, ut in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cum ergo D, Me-

24. *decimi.* dia ſit, erit & E, illi potentia ſolum commenſurabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Medium. Quoniam eſt ut B, ad C, ita D, ad E; & permutando ut B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque ut D, ad

16. *ſexti.* A, ita C, ad E. Rectangulum igitur ſub D, E, æquale eſt ei, quod ſub A, C: Eſt autem quod ſub A, C, Rationalibus potentia

tentia ſolum commenſurabilibus, Irrationale, & Medium. 12. decimi. Igitur & rectangulum ſub D, E, Medium eſt. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

SCHOLION. I.

In iis quæ ſequuntur, indigebimus hoc problemate.

DVOS numeros planos ſimiles inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales A, B, C, D, ut quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem ſe mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, ſe multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani ſimiles, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex conſtructione eſt manifeſtum.

A, 6.	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

QVONIAM autem in lib. 9. oſtenſum eſt, ſi impar numerus, uel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem uero, ſi impar multiplicet imparem; perſpicuum eſt, quonam modo inueniri poſſint duo plani ſimiles, quorum uterque par ſit, vel impar; Vel unus quidem par, alter vero impar. Si enim latera ſumpta, ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidẽ planus, impar; horum uero par: Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat unum latus numerum parem, alterum uero imparem, &c. 28. & 29. noni.

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita ut compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.

INVENIANTVR *per ea, quæ in ſcholio proximo dicta ſunt, duo plani ſimiles A B, & C, quorum* *uterque uel par ſit, uel impar. Et quoniam, ſiue à pari* 24 & 26. noni. *par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; detracto* B D, *ex* AB, *qui æqualis ſit ipſi* C, *erit reliquus* AD, *par.* Q*uo diuiſo bifariam in* E; D*ico* 1. noni. *numerum factum ex* A B, *in* B D, *qui quidem quadratus eſt, compoſitum cum quadrato numeri* E D, *facere quadratum.* Q*uoniam numerus* A D, *bifariam eſt diuiſus in* E, *& ei additus* D B; *erit ex* 6. *theoremate eorum, quæ ad propos.* 14. *lib.* 9. *demonſtrauimus, numerus qui fit ex* A B, *in* B D, *una cum quadrato numeri* D E, *æqualis quadrato numeri* E B. *Quare duo quadrati, nempe qui fit ex* A B, *in* B D, *& quadratus numeri* D E, *compoſiti faciunt quadratum, eum uidelicet, qui ex* B E, *gignitur. quod eſt propoſitum.*

A ..... E ..... D .... B

C ....

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt, quando A B, & C, ſimiles ſunt, inuentos eſſe eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum exceſſus, nimirum numerus ex A B, in B D, factus, etiam numerus quadratus ſit.

Qvod *ſi numeri ſumantur* A B, & C, *non ſimiles, uterq; tamē* par, uel impar; inuenti erūt eodē modo duo quadrati numerorū BE, ED, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui fit ex AB, in BD, non eſt quadratus. Si. n. quadratus eſſet, numeri AB, BD, hoc eſt, AB, & C, 2. noni. plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdū. ponuntur enim non ſimiles.

SCHOLION. II.

Itaqve ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum exceſſus etiam ſit numerus quadratus; ſumemus ut prius, duos planos ſimiles, quorum vterque par, vel impar ſit, nempe A B, *&* C, *& reliqua perficiemus, ut in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex* B E, E D, E D, deſcripti ſunt illi, quos iquærimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratum ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiam quadratus eſt.

A ..... E ..... D .... B
C ....

S I vero inueniendi ſint duo quadrati, quorum exceſſus nõ ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non ſimiles, quorum uterque par ſit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nã ſimiliter oſtendemus, quadratũ ex B E, æquale eſſe quadrato ex D E, vna cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare exceſſus quadratorum ex B E, E D, eſt numerus factus ex A B, in B D, qui cum non ſit quadratus; (Si enim eſſet quadratus, eſſent A B, B D, plani ſimiles. quod non ponitur) conſtat propoſitum.

A ... E ... D .... B
C ....

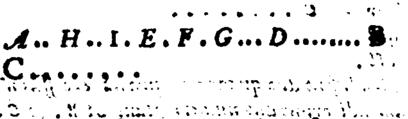
H O C poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratũ numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter vero non. Vt ſi quadratus 36. diuidatur in quadratũ 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratũ 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA. II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita ut compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

SINT duo numeri plani ſimiles A B, & C, pares, uel impares, ut in lemmate præcedẽti, fiatque eadem conſtructio, ita ut rurſus quadratus, qui fit ex multiplicatione ſimilium numerorũ AB, DB, inter ſe,

A .. H .. I . E . F . G ... D .... B
C ....



una cum quadrato ex D E, æqualis ſit quadrato ex B E. Auferatur deinde ex D E, unitas E F. Erit ergo quadratus ex D F, minor quadrato ex D E, quod & latus D F, latere D E, minus ſit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex A B, in B D, alter uero ex D F, in ſe fit, compoſitos non efficere numerum quadratum. Nam ſi compoſitus ex ipſis eſt quadratus, erit is uel maior quadrato ex B F, uel æqualis, uel minor: quod fieri non poſſe, in hunc modum demonſtrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex B F; ac propterea latus ipſius maius latere B F. Erit ergo latus ipſius uel æquale numero B E, uel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, ſola unitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne unitas ipſa ſecetur; Eſſet autem dictum latus inter ipſos medium, ſi maius poneretur quam B F, minus uero quam B E.) Si dicatur æquale, ita ut quadrato ex B E, æqualis ſit quadratus numerus compoſitus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cum eidem quadrato ex B E, ſit oſtenſus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo ſcilicet qui fit ex A B, in D B; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri D E, æquale, pars toti. Quod eſt abſur-

abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter uero ex D F, in ſe fit, æquale eſt numero B E. Sed neque maius. Sit enim ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero B I, qui maior ſit, quam B E, ita ut quadrato ex B I, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiori, maior eſt quadrato ex B E, latere minori; erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter uero ex B F, in ſe fit, (cum hic compoſitus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Eſt autem quadrato ex B E, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus D F, latere D E, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter fit ex A B, in B D, alter uero ex D F, in ſe, maius eſt latere B E. Sed neque æquale, neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus, maior eſt quadrato ex B F.

SIT iam, ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus unitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus eſt, (diuiſus enim eſt A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ unitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex iis, quæ ad propos. 7. lib. 7. oſtendimus; atque idcirco H D, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propos. 14. lib.

lib 9. demonſtrauimus, erit numerus qui ſit ex H B, in B D, *una cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui ſit ex* A B, *in* B D, *una cum quadrato* D F: *Igitur qui ſit ex H* B, *in* B *D, una cum quadrato ex D F, æqualis eſt ei, qui ſit ex A* B, *in B D, una cum quadrato ex D F; & detracto communi quadrato ex* D F, *relinquetur, qui ſit ex H B, in B* D, *ei qui ſit ex A* B, *in* B *D, æqualis.* Quare *cum H* B, A B, *multiplicantes eundem* B D, *producant æquales numeros;* 18. ſeptimi *habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit H B, ipſi* A B, *æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex* A B, *in* B *D, una cum quadrato ex* D *F, quadrato ex* B *F, æqualis.*

A..*H*..I.*E*.*F*.*G*..D.......B
C........

S I T *tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex* A B, *in* B *D, una cum quadrato ex D F, minor quadrato ex* B F, *ac propterea & latus eius latere* B *F, minus, quod ſit* B *G, ita ut qui ex* A B, *in* B *D, una cum quadrato ex* D F, *æqualis ſit quadrato ex* B *G. Sumatur autem ipſius E G, duplus* A *I. Quoniam igitur totus* A D, *totius E* D, *duplus eſt, & ablatus* A I, *ablati E G; erit rurſus & reliquus I* D, *reliqui* G D, *duplus; ac propterea I* D, *in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theor. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus qui ſit ex* I B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D *G, æqualis quadrato ex* B *G: ponitur autem eidem quadrato ex* BG, *æqualis*

æqualis, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D F. Igitur qui fit ex I B, in B D, una cum quadrato ex D G, æqualis eſt ei, qui ex A B, in B D, una cum quadrato ex D F. Ablatis igitur quadratis ex D G, & D F, quorum qui ex D G, minor eſt, remanebit qui ex I B, in B D, maior eo, qui ex A B, in B D, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo qui ex A B, in B D, una cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F. Sed neque maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex A B, in B D, una cum quadrato ex D F. Quod eſt propoſitum.

SCHOLION. III.

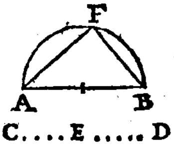
Ex hoc facile inueniemus duos numeros, ita ut ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorũ proportionem, quã quadratus ad quadratũ.

Idem obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

PROBL. 6. PROPOS. 30. 29. 17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita ut maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

Exponatvr linea Rationalis A B, & inueniantur ex ijs, quæ in ſcholio 1. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati C D, C E, quorum exceſſus D E, non ſit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat ut C D, numerus ad numerum D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, nempe ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in ſemicirculo A B F, circa diametrum A B, deſcripto: ac denique connectatur recta FB.



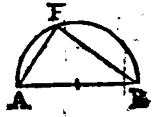
31. tertij. Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo; erit quadratũ ex A B, *47. primi* æquale duobus quadratis ex A F, & FB; hoc eſt, recta AB, plus poterit quam A F, quadrato rectæ F B. Et quia eſt quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, ut numerus CD, *6. decimi.* ad numerum D E; erunt quadrata ex A B, A F, commenſurabilia; atque adeo cum quadratum ex A B, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali A B, deſcriptum; erit & quadratum ex A F, Rationale, proptereaque & recta A F, ipſum deſcribens, Rationalis. Rationales ergo ſunt A B, A F; atque adeo commenſurabiles ſaltem potentia. Quia vero quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque qudaratus numerus C D, ad non quadratum D E, proportionem habeat quam quadratus ad quadratum; *24. octaui* alias & D E, quadratus eſſet, ut in Arithmeticis eſt demonſtratum. quod non ponitur) erunt rectæ A B, A F, *9. decimi.* longitudine incommenſurabiles: Sunt autem commenſurabiles potentia, ut oſtenſum eſt. Igitur A B, A F, Rationales *ſunt potentia tantum commenſurabiles*.

Iam uero, quoniam eſt ut C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, erit per conuerſionem rationis, ut quadratus numerus C D, ad quadratum numerũ CE, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B. (ſicut enim C D, ſuperat D E, quadrato C E, ita etiam quadratũ ex A B, ſuperat quadratum ex A F, quadrato ex F B.) Quare *9. decimi.* rectæ A B, F B, longitudine commenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales A B, A F, potentia tantum commenſurabiles, ita ut maior A B, plus poſſit, quam minor A F, A F, quadrato lineæ FB, ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat.

PROBL. 7. PROPOS. 31. 30. 18.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita ut maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Exponatur Rationalis linea A B, inueniantúrque per lemma 2. propos 29. huius lib. duo numeri quadrati CE, E D, ita ut ex illis compoſitus C D, non ſit quadratus, uel certe numerus aliquis quadratus C D, ſecetur in duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus C D, ad neutrũ ipſorum C E, E D, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, alias ſecundum priorem modum, eſſet totus C D, etiam quadratus: iuxta poſteriorem uero, quilibet ipſorum C E, E D, quadratus quoque, ut in Arithmeticis oſtenſum eſt. 24. octaui quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. ut C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, ut ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in ſemicirculo A F B, circa A B, deſcripto. Denique connectatur recta F B. Poterit igitur, ut in præcedenti, A B, plus quam A F, quadrato rectæ F B; Eruntque A B, A F, Rationales potentia ſolum commenſurabiles: Eadem enim hic eſt demonſtratio, quæ in præcedenti propos. Quoniam uero rurſus, ut prius, eſt per conuerſionem rationis, ut C D, ad C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B: Non habet autem C D, ad C E, proportionem quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex A B, ad qua-

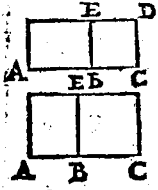


C, 144. E, 16. D C, 160. D
C...... E... D

quadratum ex FB, proportionem, quã quadratus numerus ad numerum quadratum. Quare rectæ A B, FB, longitudine incommenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commenſurabiles, ita ut maior AB, plus poſſit quàm minor A F, quadrato lineæ F B, ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod erat faciendum. 9.decimi.

LEMMA.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.



SINT *duæ rectæ inæquales* A B, B C, *in rectum conſtitutæ, quarum* A B, *maior ſit. Dico eſſe, ut* A B, *ad* B C, *ita rectangulũ ſub* A B, BC, *ad quadratum ex* B C. *Deſcribatur ex* B C, *quadratum* B D, *compleaturque rectangulum* A D: *eritq; rectangulum* A E, *ſub* A B, BC, *contẽtum; quod* B E, *ipſi* BC, *ſit æqualis: perſpicuum autẽm eſt, eſſe ut* A B, *ad* B C, *ita* A E, *ad* B D. 1. ſexti.

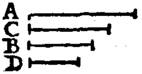
EODEM *modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum maioris, ut in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua* AB, *minor eſt, quam* BC.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

31.
24. 25.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

REPERTAE ſint duæ Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles, ita ut A, maior plus poſſit quam B, 30.decimi. minor, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat ut A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, ſunt Rationales potentia ſolum commenſurabiles; erit rectangulum ſub A, B, Irrationale, & 22.decimi. recta C, ipſum potens, linea Media. Et quia eſt ut A, ad B, ita C, ad D; ſunt autem A, & B, potentia tantum commenſurabiles; erunt quoque C, & D, potentia ſolum commenſurabiles, ut in ſcholio propos. 10. huius libri oſtendimus. Quare D, Mediæ C, commenſurabilis, Media quoque eſt. 24.decimi. Inuentæ ergo ſunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim ſit ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; ſit autem ut A, ad C, ita C, ad B; erit quoque ut C, ad B, ita B, ad D; Ac propterea rectangulum ſub C, & D, 17. ſexti. æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale ſit; erit & rectangulum ſub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum comenſurabiles, Rationale. Quoniam uero eſt ut A, ad B, ita C, ad D: poteſt autē A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine ſibi cōmenſurabilis, ex conſtructione; poterit quoque C, plus quam D, quadrato 15.decimi. lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent, ita ut maior C, plus poſſit quam minor D, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat.



QVOD ſi repertæ ſint A, B, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita ut A, plus poſſit quam B, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; reliqua autem fiant, ut prius, oſtendemus eodem modo, inuentas eſſe duas Medias C, D, potentia tantum commen-

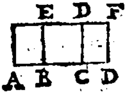
commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior C, plus poſſit quam minor D, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis.

SCHOLION.

Alii hoc problema demonſtrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem ſine ipſo oſtendimus, ut facile indicabunt, qui cum eorum demonſtratione hanc noſtram contulerint. Immo rectas C, D, Medias eſſe potentia ſolum commenſurabiles, que Rationale contineant, non aliter hic oſtendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

Si ſint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur.



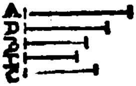
Sint *tres rectæ AB, BC, CD, in rectum conſtitutæ. Dico eſſe ut* A *B, ad C D, ita rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub BC,* CD. *Deſcribatur ex BC, quadratũ BCDE, perficiaturque rectangulum AF; Eritque* A *E, contentum ſub AB, BC; & CF, ſub B*C, CD*; quod* B *E, C D, ipſi B*C*, æquales* 1. *ſexti.* *ſint. Perſpicuum autem eſt eſſe A*B*, ad* CD*, ut AE, ad* C*F. Quod eſt propoſitum.*

32. 26.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium cõ-tineant, ita ut maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantum
commenſurabiles, ita ut A, plus poſſit quam C, quadrato
lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. (Hoc autem
fiet in hunc modum. Repertis duabus Rationalibus: A, C,
potentia tantum commenſurabilibus, ita ut A, plus poſſit 30. *decimi.*
quam C, quadrato lineæ ſibi commēſurabilis longitudine;
inueniatur alia B, utrique A, & C, potentia
ſolum commenſurabilis, per ea, quæ
in ſcholio propoſ. 21. hujus lib. demonſtrauimus.
Et ipſarum A, B, ſumatur media 13. *ſexti.*
proportionalis D; fiatq; vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniã 12. *ſexti.*
igitur ex lemmate antecedenti, eſt ut A, ad C, ita rectangulum
ſub A, B, ad rectangulum ſub B, C: Eſt autem rectangulo
ſub A, B, æquale quadratum ex D; & rectangulo ſub 17. *ſexti.*
B, C, æquale rectangulum ſub D, E, quod proportionales 16. *ſexti.*
ſint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex
D, ad rectangulum ſub D, E: Sed ut quadratum ex D, ad
rectangulum ſub D, E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. hujus
lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit ut A, ad C, ita D,
ad E: Sunt autem A, C, potentia ſolum commenſurabiles.
Ergo & D, E, potentia ſolum commenſurabiles ſunt, ut in
ſcholio propoſ. 10. hujus lib. oſtendimus. Quia uero D,
potens ſpatium ſub A, B, Rationalibus potentia tantum
commenſurabilibus, Irrationalis eſt, & Media; erit quoq; 22. *decimi.*
E, ipſi oſtenſa commenſurabilis, Media. Inuentæ ergo ſunt 24. *decimi.*
duæ Mediæ D, E, potentia ſolum commenſurabiles. Et quia
oſtenſum eſt rectangulo ſub B, C, quod Medium eſt, (quod 22. *decimi.*
B, C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles,)
æquale eſſe rectangulũ ſub D, E; erit rectãgulum ſub D, E,
Medium. Deniq; quia oſtendimus eſſe ut A, ad C, ita D, ad
E; poteſt autem A, plus quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine
commenſurabilis, ex conſtructione; poterit etiam
D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. 15. *decimi.*
Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia ſolum



lum commenſurabiles, quę Medium continent, ita ut maior D, plus poſſit quam minor E, quadrato lineę rectę longitudine ſibi commenſurabilis. Quod erat faciendum.

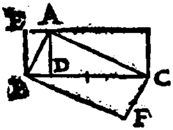
QVOD ſi repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita ut A, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, reliqua autem conſtruantur, ut prius, demonſtrabimus ſimiliter, inuentas eſſe duas Medias D, E, potentia tantum commenſurabiles, quę Medium contineant, ita ut maior D, plus poſſit quam minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Id quod facile apparere poteſt ex adducta demonſtratione.

LEMMA. I.

SIT triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, a quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum ſub C B, B D, æquale eſſe quadrato ex A B: contentum autem ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C: & contentum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum denique ſub B C, A D, æquale contento ſub A B, A C.

QVONIAM ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis eſt inter C B, B D; *erit rectangulum ſub* C B, B D, *quadrato ex* A B, *æquale.*

8. *ſexti.*



EADEM ratione erit rectangulum ſub BC, CD, *æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C, media proportionalis eſt inter* B C, C D.

RVRSVS quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, *media eſt proportionalis, erit eodem modo re-*

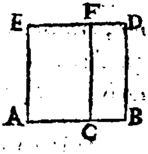
do rectãgulũ ſub BD,DC, *æquale quadrato ex* A D. 8. *ſexti.*

POSTREMO, *quia triangula* A B C, A B D. *ſimilia ſunt; erit ut* B C, *ad* A C, *ita* A B, *ad* A D, *Quare rectangulum ſub* B C, A D, *æquale eſt rectangulo ſub* A B, A C. 16 *ſexti.* *Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulũ* C E, *contentum ſub* BC, A D: *Item rectangulum* A F, *ſub* A B, A C, *contentum. Quoniam igitur rectangulum* C E, *duplum eſt trianguli* A B C, 41. *primi* *necnon & rectangulum* A F, *eiuſdem triãguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula* C E, A F. *quod eſt propoſitum.*

LEMMA. II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

SECETVR *recta* A B, *non biſariam in* C, *ſitq; maior pars* A C. D*ico eſſe ut* A C, *ad* C B, *ita rectãgulum ſub* A B, A C, *ad rectangulum ſub* A B, C B. D*eſcribatur enim ipſius* A B, *quadratum* A B D E, *ducaturq;* C F, *ipſi* A E, *parallela; eritq;* A F, *contentum ſub* AB, AC; *&* C D, *contentum ſub* A B, C B; *quod* A E, C F, *ipſi* A B, *æquales ſint. Quoniam igitur eſt ut* AC, *ad* CB, *ita* AF, *ad* CD; *cõſtat propoſitũ.* 1. *ſexti.*



EADEM *ratione erit, ut minor pars* B C, *ad maiorem* C A, *ita* B F, *contentum ſub* A B, B C, *tota, & minore parte, ad* C E, *contentum ſub* A B, C A, *tota, & maiore parte.*

LEMMA III.

Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur biſariam; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectanguli, quod ſub maiori linea & dimidia parte minoris continetur.

Sint *duæ rectæ inæquales* A B, B C, *angulum rectum conſtituentes* A B C, *ſeceturq; minor* B C, *biſariam in D. Dico rectangulum ſub* A B, *B C, duplum eſſe rectangulum ſub* A B, B D. *Compleatur rectangulum A C, ſub* A B, *B C; ducaturq; D E, ipſi A B, parallela; eritq; B E, contentum ſub* A B, *&* B D, *dimidia minoris. Quoniam igitur A C, ipſius B E, duplum eſt, quod & baſis B C, dupla ſit baſis* B D; *conſtat propoſitum.* 1. ſexti.

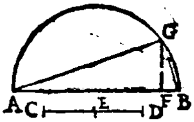
Eodem *modo, ſi* B C, *ſecta biſariam, ſit maior, erit quod ſub* A B, B C, *continetur, duplum eius, quod continetur ſub* A B, *minore & B D, dimidia maioris, ut ex ſecunda figura apparet.*

33.
27.

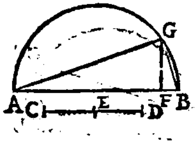
PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant cōpoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Medium.

REPERIANTUR duæ Rationales A B, C D, po-
tentia ſolùm commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſ- 31. *decimi.*
ſit, quam minor C D, quadrato lineę longitudine ſibi incō-
menſurabilis; ſeceturq; C D bifariam in E. Deinde per lem
ma 2. propoſ. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex
C E, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectan
gulum deficiens figura quadrata,
& ſit illud, quod ſub A F, F B, con-
tinetur. Poſtremo deſcripto ſemi-
circulo A G B, circa A B, erigatur
F G, ad A B, perpendicularis, con-
nectanturq; rectæ A G, G B. Quo-
niam igitur A B, plus poteſt, quã
C D, quadrato lineæ ſibi longitudi-
ne incommenſurabilis, applicitumq; eſt ad A B, rectangu-
lum ſub A F, F B, æquale quartæ parti quadrati ex C D, de-
ficiens figura quadrata; erit A F, ipſi F B, longitudine incom 19. *decimi.*
menſurabilis. Eſt autem vt A F, ad F B, ita per lemma 2.
propoſitionis antecedentis, rectangulum ſub A B, A F, ad
rectangulum ſub A B, F B; Rectangulum vero ſub A B,
A F, quadrato ex A G, & rectangulum ſub A B, F B, qua-
drato ex G B, eſt æquale, per lemma 1. eiuſdem anteceden-
tis propoſitionis; quod angulus A G B, rectus ſit in ſemi- 31. *tertij.*
circulo A G B. Igitur quoque erit vt A F, ad F B, ita quadra
tum ex A G, ad quadratum ex G B; ac propterea cum A F,
F B, longitudine ſint incommenſurabiles, erunt quadrata
ex A G, G B, incommenſurabilia. Igitur rectæ A G, G B, 10. *decimi.*
potentia incommenſurabiles ſunt. Et quia quadratum ex 4. *defin.*
Rationali A B, Rationale eſt, æqualeq; quadratis ex A G, 47. *primi.*
G B; erit etiam compoſitum ex quadratis rectarum A G,
G B, Rationale. Ruſus, quia ex 1. lemmate propoſitio-
nis præcedentis, rectangulum ſub A F, F B, quod quadra-
to ex C E, æquale eſt factum, æquale eſt quadrato ex F G;
(ꝓpterea ꝙ angulus A G B, rectus eſt, & F G ad A B, ꝑpendi
cularis) erunt quadrata ex F G, C E, æqualia; ac proinde & re
ctæ F G, C E, æquales. Quare C D, dupla exiſtens ipſius C E,
dupla etiam erit ipſius F G. Igitur per lemma 3. anteceden-
tis propoſitionis, rectangulum ſub A B, C D, duplum erit
rectanguli ſub A B, F G. (cum F G, dimidia ſit minoris C D,)



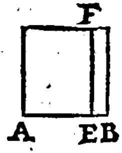
Sed rectangulum ſub A B, CD, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt. 22. decimi. Igitur & rectangulum ſub A B, F G, illi commenſurabile, cum ſit eius dimidium; Medium eſt, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Atqui rectangulo ſub A B, F G, per 1. lemma propoſitionis præcedentis, æquale eſt rectãgulum ſub A G, G B. Contentum igitur ſub A G, GB, Medium quoque eſt; Oſtenſum autem eſt compoſitum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ A G, G B, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis contentum; Medium. Quod faciendum erat.



SCHOLION.

DEMONSTRATVR hoc loco in ſcholio quodam antiquo, fieri poſſe, vt duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATVR Rationalis linea A B, & duo numeri C, D, quorum C, maior ſit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A E; & tãdem deſcripto quadrato ex A B, educatur E F, ad A B, perpendicularis. Quoniam igitur eſt vt C, ad D, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A E; Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum; erunt latera A B, A E, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommenſurabilia; Ac propterea cum A B, tota longitudine ſit incommenſurabilis parti A E, erit eadem A B, & reliqua E B, longitudine incommenſurabilis, ex coroll. propoſ. 17. huius lib. Vt autem A B, ad A E, ita eſt quadratum ex A B, ad A F. Igitur cum A B, A E, incommenſurabiles ſint longitudine, erunt quadratum ex A B, & rectangulum A F, incommenſurabilia. Quare quadrato ex A B, exiſtente Rationali,



9. decimi. *C, 6. D, 4.*

1. ſexti.

10. decimi.

li, quod & A B, Rationalis ponatur; erit A F, dicto quadrato incommenſurabile, Irrationale. Eodemq; argumento oſtendemus B F, Irrationale eſſe. Quia vero A F, B F, componunt quadratum Rationale ex A E; perſpicuum eſt, ex duobus Irrationalibus confici poſſe Rationale. Quod eſt propoſitum.

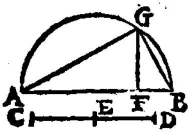
At vero ſi A F, F B, Rationalia ſint, oſtendemus & totum A F B, ex ipſis compoſitum Rationale eſſe. Cum enim vtrumq; A F, F B, Rationale ſit; erunt ipſa inter ſe commenſurabilia. Igitur & totum A F B, ex ipſis compoſitum vtriq; eorum commenſurabile erit. 16. *decimi.* *Quare A F B, totum commenſurabile vtrique Rationali A F, F B, Rationale quoque eſt. Quod eſt propoſitum.* 9. *defin.*

PROBL. 11. PROPOS. 35.

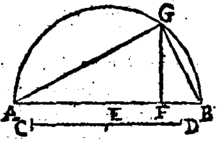
34.
28.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum Rationale.

REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, 32. *decimi.* ita vt maior A B, plus poſſit quam minor C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propoſ. Oſtendemus igitur ſimiliter, vt in propoſ. antecedenti, rectas A G, G B, potentia eſſe incommenſurabiles. Et quia quadratum ex Media A B, æquale exiſtens quadratis rectarum 47. *primi.* A G, G B, Medium eſt; erit quoque compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rurſus vt in antecedenti propoſitione, oſtendemus rectangulum ſub A B, C D, duplum eſſe rectanguli ſub A B, F G; atq; adeo



illud eſſe huic commenſurabile. Quare cum rectangulum ſub A B, C D, Rationale ſit, ex conſtructione; erit & rectangulum ſub A B, F G, illi commenſurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. rectangulo ſub A B, F G, æquale eſt rectangulum ſub A G, G B. Igitur & rectangulum ſub A G, G B, Rationale eſt. Oſtenſum autem eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum A G, G B, eſſe Medium. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ A G, G. B, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.

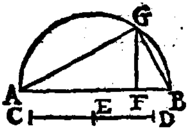


35.
29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Mediũ, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis.

REPERIANTVR duę Mediæ A B, C D, potentia 33. decimi. tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus poſſit quam minor C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; fiantq; reliqua, vt ĩ propoſ. 34. Oſtẽdemus igitur ſimiliter, rectas A G, G B, potentia incommenſurabiles eſſe. Et quia quadratum ex Media A B, Medium eſt, & quadratis recta- 47. primi. rum A G, G B, ęquale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rurſus, vt in 34. demonſtrabimus,



bimus, rectangulum ſub A B, C D, duplum eſſe rectanguli ſub A B, F G; atq; adeo illud eſſe huic commenſurabile. Quare cum ex conſtructione, rectangulum ſub A B, C D, Medium ſit; erit quoque rectangulum ſub A B, F G, hoc eſt, ſub A G, G B, ꝙ illi per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æquale eſt, Mediũ, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quoniã vero A B, longitudine incõmenſurabilis ponitur ipſi C D; Eſt autem eidẽ C D, ipſa CE, longitudine commenſurabilis, quod illa huius ſit dupla; erunt A B, C E, longitudine *13. decimi.* incommenſurabiles: Sed vt AB, ad CE, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19 huius lib. quadratum ex A B ad rectangulum ſub A B, C E, hoc eſt, ad rectangulum ſub A B, F G, hoc eſt, ſub A G, G B. (ſunt enim rectangula ſub A B, F G, & ſub A G, G B, per 1. lemma propoſ. 33. huius lib æqualia.) Igitur quadratum ex A B, hoc eſt, compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, incommenſurabile eſt rectangulo *10. decimi* ſub A G, G B. Inuentæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ A G, G B potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Ex hoc vero problemate facile illud abſoluemus, quod ad propoſ. 24. huius lib. nos demonſtraturos recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.

QVONIAM oſtenſum eſt tam compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, quàm rectangulum ſub ipſis, eſſe Medium, & hoc illi compoſito incommenſurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compoſitum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ, incommenſurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia eſſent commenſurabiles, eſſent & earum quadrata, hoc eſt, compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, & rectangulum ſub A G, G B, commenſurabilia.

quòd

quod non ponitur. Quocirca ſi ſumatur A B, potens compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, & alia recta potens rectangulum ſub A G, G B, ideſt, media proportionalis inter A G, G B; inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

PRINCIPIVM SENARIORVM per compoſitionem.

36.
30.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantum cõmenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales A B, B C, potentia ſolum commenſurabiles, inuentæ per 1. lemma propoſ. 21. huius lib. Dico totam A C, Irrationalem eſſe.

Quoniam A B, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi B C; & vt A B, ad B C, ita eſt rectangulum ſub A B, B C, ad quadratum ex B C, per lemma propoſ. 31. huius lib. erit rectangulum ſub A B, B C, quadrato ex B C, incommenſurabile. *10. decimi.* Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt eius duplum, nempe quod bis ſub A B, B C, continetur; & quadrato ex B C, commenſurabilia ſunt quadrata rectarum A B, B C; (omnia enim ſunt Rationalia) atque adeo & compoſitum ex quadratis *16. decimi* rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commenſurabile eſt. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14 huius lib. oſtendimus, & quod bis ſub A B, B C, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum A B, B C. Quamobrem & compoſitum ex eo, quod bis ſub A B, B C, & ex compoſito quadratorum rectarum A B, B C, hoc eſt, quadratum ex tota A C, (Eſt enim hoc quadratum æquale qua-

le quadratis rectarum A B, B C. vna cum rectangulo ſub 4. *ſecundi.*
A B, B C, bis) compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, 17. *decimi.*
incommenſurabile erit: Eſt autem compoſitum ex quadra
tis rectarum A B, B C, Rationale, quod commenſurabile
ſit oſtenſum quadrato Rationali ex B C, Rationali. Igitur
quadratum ex A C, quadrato Rationali ex B C, incom-
menſurabile, Irrationale eſt; atq; adeo & recta ipſa A C, 10. *defin.*
Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu vt
alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus,
nempe ex duabus Rationalibus lineis A B, B C, potentia ſo
lum commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Ratio-
nales potētia tātū cōmenſurabiles, &c. Quod oſtēdēdū erat.

SCHOLION.

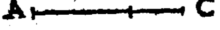
ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolum com-
menſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam re-
cta quæ inter eas eſt medio loco proportionalis, Irrationalis eſt, 22. *decimi.*
quæ Media vocatur. At vero compoſita ex ipſis, Irrationa-
lis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. 37. *decimi.*

THEOR. 26. PROPOS. 38.

37.
31.

SI duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTVR duæ Mediæ ſuperius inuētæ A B, 28. *decimi.*
B C, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale cō
tineant. Dico totam A C, Irra-
tionalem eſſe. Quia A B, eſt
ad B C, vt rectangulū ſub A B,
B C, ad quadratū ex B C, vt in lemmate propoſ 3 .huiꝰ lib.
eſt oſtenſum; ſunt autē A B, B C, longitudine incōmenſura-
biles; erunt rectangulum ſub A B, B C, & quadratum ex 10. *decimi.*
B C, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub A B, B C,
com-

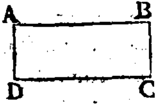


commenſurabile eſt, quod ſub A B, B C, bis; & quadrato ex B C, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C: (Nam cum A B, B C, potentia ſint commenſurabiles, erunt ipſarum quadrata commenſurabilia, atque adeo & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex *16. decimi.* B C, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub A B, B C, bis, & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, una cum rectangulo bis ſub AB, BC, *4. ſecundi.* hoc eſt, quadratum ex A C, quod huic compoſito æquale *17. decimi* eſt, incommenſurabile quoque eſt rectangulo ſub A B, B C, bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub A B, B C, cõmenſurabile rectangulum ſemel ſub A B, B C, cum hoc ſit illius dimidiũ. Igitur quadratum ex A C, incommenſurabile *15. decimi.* eſt rectangulo ſub A B, B C: Ponitur autem rectangulum *10. defin.* ſub A B, B C, Rationale. Irrationale ergo eſt qua*11. defin.*dratum ex A C; & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, uel ut alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum cõmenſurabiles cõponantur, &c. Quod erat oſtendendũ.

L E M M A.

QVOD ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale eſt.

CONTINEATVR *rectangulum* A B C D, *ſub Rationali* A B, *& Irrationali* B C. *Dico ipſum Irrationale eſſe. Si enim dicatur eſſe Rationale, faciet ipſum ad Rationa*-*21. decimi.* *lem* A B, *applicatum latitudinem* B C, *Rationalem. Quod eſt abſurdum. ponitur enim* B C, *Irrationalis. Non ergo* A C,

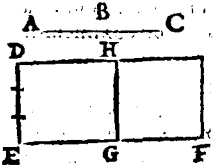


A C, Rationale eſt. Igitur Irrationale. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 27. PROPOS. 39. 38. 32.

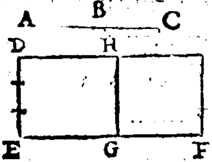
SI duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs ſecunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ ſuperius inuentæ
A B, B C, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium *29. decimi.*
contineant. Dico totam A C, Irationalem eſſe. Exponatur
enim Rationalis D E, ad quam applicetur rectangulum
D F, æquale quadrato A C; & compoſito ex quadratis *45. primi.*
rectarum A B, B C, æquale alterum ad eandem D E,
applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc eſt,
rectangulum D F, æquale eſt duobus quadratis ex A B, B C, *4. ſecundi.*
una cum rectangulo bis ſub A B, B C; erit reliquum H F,
æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub A B, B C, continetur.



Quoniam uero, ex hypotheſi, rectangulum ſub A B, B C, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub A B, B C, ei commenſurabile, hoc eſt, H F, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia quadrata Mediarũ A B,
B C, potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſunt;
erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum D G, *16. decimi.*
utriuis ipſorum commenſurabile: Sed utrumque quadratorum
ex Medijs A B, B C, Medium eſt. Igitur & D G, ex
coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur
Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; (eſt
enim C H, Rationali D E, æqualis.) erunt eorum latitudines *34. primi*
E G, G F, Rationales ipſi D E, longitudine incommenſurabiles. *23. decimi.*
Rurſus quia A B, B C, longitudine incommenſu-

menſurabiles ſunt; & eſt vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum ſub A B, B C, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit quadratum ex A B, incommenſurabile rectangulo ſub A B, B C, vt in ſcholio propoſ. 16. huius lib. oſtẽſum eſt: Atqui quadrato ex A B, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C; & rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt, quod continetur bis ſub A B, B C, cum hoc illius ſit duplum. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. diximus, erit & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc eſt, rectangulum D G, incommẽſurabile rectangulo bis ſub A B,



1. *ſexti.* B C, hoc eſt, rectangulo H F. Cum ergo ſit vt D G, ad H F,
10. *decimi.* ita E G, ad G F; erit E G, ipſi G F, longitudine incommenſurabilis: oſtenſum autem iam fuit E G, G F, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt E G, G F, potentia tantũ cõmẽ-
37. *decimi.* ſurabiles; ac ꝓpterea, & tota E F, cõpoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lẽma antecedens, D F, cõtentũ ſub Rõnali D E, & Irrationali E F, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratũ ex A C, ipſi D F, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta A C, Irrationalis eſt. Vocetur aũt ex binis Medijs ſecunda, ſeu vt alijs placet, Bimediale ſecundũ. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandũ.

SCHOLION.

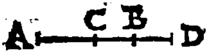
VOCAVIT Euclides in precedẽti propoſitione lineã Irrationalẽ A C, quæ cõponitur ex duabus Medijs potẽtia tantũ cõmẽſurabilibus, quæ Rationale cõtineãt, ex binis Medijs primã: Hic vero lineã Irrationalẽ A C, quæ cõponitur ex duabus Medijs potẽtia tãtũ cõmẽſurabilibus, quæ Mediũ cõtineãt, ex binis Medijs ſecũdã, quoniã Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam ſecetur, erit cõpoſitum ex quadratis partium maius, quàm rectangulũ

ctangulũ ſub partibus bis cõprehẽſum, quadrato eius lineę, qua maior pars minorem ſuperat.

SECETVR *recta A D, in B, non bifariam, ſitq; maior pars A B; in qua ſumatur B C, minori parti B D, æqualis, ut ſit A C, exceſſus, quo A*B, *ſuperat* B D, *hoc eſt*, B C, *ipſi* B D, *æqualem.* Dico *quadrata rectarũ A*B, BD, *ſimul maiora eſſe rectãgulo bis ſub AB,* BD, *quadrato rectæ* A C. *Quoniã quadrata ex* AB, BC, *æqualia ſunt rectangulo bis ſub A*B, BC, *una cum quadrato ex AC; eſtq; BC, ipſi* BD, *æqualis: erunt quoq; quadrata ex* AB, BD, *æqualia rectãgulo bis ſub* AB, BD, *una cũ quadrato ex* AC. *Quare quadrata ex* AB, BD, *maiora ſunt, quã rectangulum bis ſub* A B, B D *quadrato rectæ A C. quod eſt propoſitum.* 7. *ſecundi.*



COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, quadrata partiũ inæqualiũ ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

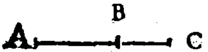
39.
33.

SI duæ rectæ lineæ potẽtia incõmẽſurabiles cõponãtur, quæ faciãt cõpoſitũ quidẽ ex ipſarũ quadratis Rõnale; quod autẽ ſub ipſis cõtinetur, Mediũ: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ ſuperius inuẽtæ AB, BC, potẽtia incõmẽſurabiles, faciẽtes quidẽ cõpoſitũ ex ipſarũ quadratis Rõnale; rectãgulũ vero ſub ipſis cõtẽtũ, Mediũ. Dico totã AC, eſſe Irrationalẽ. Q m̃ rectãgulũ ſub AB, BC, Mediũ ponitur, erit & rectãgulũ bis ſub AB, BC, illi cõmẽſurabile, Mediũ, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. atq; adeo Irrationale. 34. *decimi.*

Ponitur

10. *defin.* Ponitur aũt cõpoſitũ ex quadratis rectarũ AB,BC,Rõnale.
Incõmẽſurabile ergo eſt rectãgulũ bis ſub AB,BC,cõpoſito
ex quadratis rectarũ AB,BC. Igitur & rectangulum bis ſub
17. *decimi.* AB, BC, una cum quadratis ex AB,BC, hoc eſt, quadra-
tum ex AC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadra-
10. *defin.* tis rectarum AB,BC. Cum ergo hoc compoſitum ponatur
11. *defin.* Rationale; erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile,
Irrationale; Ac propterea recta AC, Irrationalis eſt. Voce-
4. *ſecundi* tur autem Maior, quia cum poſſit duo quadrata ex AB, BC, & rectangulũ bis ſub AB,BC; compoſitum ex quadratis rectarũ AB, BC, per lemma antecedẽs, maius eſt rectangulo bis ſub AB,BC. Quare cum compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, Rationale ſit, rectangulum uero bis ſub AB,BC, Medium; recte uocabitur AC, Maior, ſiquidem a Rationali, quod maius eſt, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

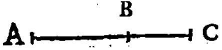


40.
34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ ſuperius inuentæ
35. *decimi.* AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium; rectangulum uero ſub ipſis contentum, Rationale. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam compoſitum ex quadratis rectarũ AB, BC, Medium eſt; quod uero cõtinetur bis ſub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod ſub AB, BC, ſemel continetur, Rationale



ponatur;

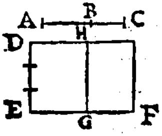
ponatur; erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC,
incommenſurabile rectangulo bis ſub A B, B C. Igitur & cō 10. *defin.*
poſitum ex quadratis rectarum A B,BC, una cum rectangu
lo bis ſub A B.B C, hoc eſt, quadratum ex A C, incommen 17. *decimi.*
ſurabile eſt rectangulo bis ſub A B, B C. Cum ergo rectan-
gulum bis ſub A B,B C,ut diximus, ſit Rationale ; erit qua-
dratum ex A C,illi incommenſurabile, Irrationale; Ac pro- 10. *defin.*
inde & recta A C,Irrationalis erit. Vocetur autem Ratio- 11. *defin.*
nale ac Medium potens, quia poteſt Medium, nempe compo
ſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectan-
gulum ſcilicet bis contentum ſub A B,BC. Conuenit autem
Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ po-
tentia incommenſurabiles, &c. Quod demonſtrandū erat.

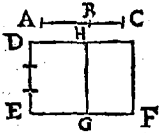
THEOR. 30. PROPOS. 42.

41.
35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR duæ rectæ ſuperius inuentę AB, 36. *decimi.*
BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex
ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem
Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ip-
ſarum. Dico totam A C, Irra
tionalē eſſe. Exponatur enim
Rationalis D E, ad quam ap-
plicetur rectangulum D F, æ- 45 *primi.*
quale quadrato ex A C; Et
compoſito ex quadratis recta-
rum AB, B C, alterum æqua-
le applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc eſt, re-



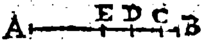


4. *ſecundi.* ctangulum D F, æquale eſt compoſito ex quadratis rectarum A B, BC, una cum rectangulo bis ſub AB, BC, erit reliquum H F, æquale rectangulo bis ſub A B, B C. Quoniam uero tam compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulum D G, quam rectangulum ſub A B, B C, atque adeo ex coroll. propos. 24. huius libri, quod bis ſub AB, BC, nempe ipſum H F, (cum illi ſit commenſurabile) Medium ponitur; facient D G, H F, ad Rationalem D E, appli- 23. *decimi.* cata latitudines E G, G F, Rationales ipſi D E, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, id eſt, rectangulum D G, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub A B, B C: Eidem autem rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub A B, B C, hoc eſt, ip- 13. *decimi.* ſum H F; erunt & D G, H F, incommenſurabilia. Quare 1. *ſexti.* cum ſit ut D G, ad H F, ita E G, ad G F; erunt E G, G F, 10. *decimi.* longitudine incommenſurabiles: Atqui E G, G F, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur E G, G F, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea tota E F, ex ipſis 37. *decimi.* compoſita Irrationalis eſt. Quare D F, contentum ſub Rationali D E, & Irrationali E F, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex A C, illi 11. *deſin* æquale, Irrationale eſt, ideoque & recta ipſa A C, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, & rectangulum bis ſub A B, B C. Si duæ ergo rectæ lineæ, potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

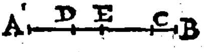
Si recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualium ſimul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rurſus inæqualiter in D; ſintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quam poſteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, ſimul maiora eſſe quadratis ex AD, DB, ſimul. Diuiſa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, uel inter E, C, uel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum ſub AC, CB, una cum quadrato ex EC, æquale eſt quadrato ex EB: 5. ſecundi Item rectangulum ſub AD, DB, una cum quadrato ex ED, æquale eſt eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, una cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, una cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratũ ex EC, maius ſit quadrato ex ED; erit reliquũ rectangulũ ſub AC, CB, minus reliquo rectangulo ſub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis ſub AC, CB, minus erit rectangulo bis ſub AD, DB. Quoniã uero quadratũ ex AB, æquale eſt tam rectangulo bis ſub AC, CB, una cũ quadratis ex AC, CB, 4. ſecundi quã rectãgulo bis ſub AD, DB, una cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis ſub AC, CB, una cum quadratis ex AC, CB, æquale rectãgulo bis ſub AD, DB, una cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis ſub AC, CB, oſtenſum ſit minus rectangulo bis ſub AD, DB; erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.



SED cadat iã D, inter A, E. Quoniã igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quã partes AD, DB: erit AD; (quæ minor eſt poſteriorũ) maior quã

C B; (quæ priorũ minor eſt) ac proinde cũ AE, E B, æquales ſint, erit reliqua E C, maior quã reliqua DE.



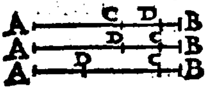
Itaque quia rectangulum ſub A C, C B, unà cum quadrato ex E C, æquale eſt quadrato ex E B: Item rectangulum ſub A D, D B, unà cum quadrato ex D E, æquale eſt quadrato ex A E, hoc eſt, eidem quadrato ex E B; erit rectangulum ſub A C, C B, una cum quadrato ex E C, æquale rectangulo ſub A D, D B, una cum quadrato ex D E. Igitur ut prius, demonſtrabimus quadrata ex A C, C B, maiora eſſe quadratis ex A D, D B. Quod eſt propoſitum. 5. *ſecundi*

42.
36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVAE ex binis nominibus, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita ut A C, C B, ſint Rationales potentia tantũ commenſurabiles; ut uult propoſitio 37. huius libri. Dico A B, ad aliud punctũ diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiã Rationales lineæ potentia tantum commenſurabiles. Si enim fieri poteſt, diuidatur iterum in ſua nomina ad D. Conſtat ergo A B, in C, non diuidi bifariam. Nam ſi bifariam diuideretur, eſſent A C, C B, longitudine commenſurabiles. quod eſt abſurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam ſecabitur A B, cum & A D, D B, Rationales ſint potentia tantũ commenſurabiles. Secatur ergo A B, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes A C, C B, uel minus inæquales ſunt, quam partes A D, D B, uel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex A C, C B,

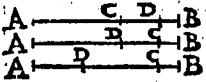


C B, uel minora ſunt quadratis ex A D, D B, uel maiora. (Neque enim partes A D, D B, ubicunque punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, utraque utrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione ſecaretur A B, ſecunda diuiſione in eadem nomina, in quæ ſecta eſt diuiſione prima. quod non ponitur.) Quia uero ſi ab æqualibus inæqualia demantur, reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis eſt, ut in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, una cum rectangulo bis ſub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, una cum rectangulo bis ſub A D, D B, quod tam illa, quam hæc, æqualia ſint quadrato ex A B; fit, ut qui exceſſus fuerit 4. ſecundi ablati compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compoſiti ex quadratis rectarum A D, D E, idem ſit reliqui rectanguli bis ſub A C, C B, & reliqui rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales ſint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compoſitum ex earum quadratis Rationale, ex ijs, quæ in ſcholio propos. 34. huius. libri oſtendimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, ut in ſcholio propoſ. 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt. Quoniam uero rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt, 22. decimi. erit & quod bis ſub A C, C B, illi commenſurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub A D, D B, Medium erit. Quare cum Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus 27. decimi. rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

43. THEOR. 32. PROPOS. 44.
37.

QVAE ex binis Medijs prima, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita ut A C, C B, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ut uult propoſitio 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continentesque



Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina A D, D B. Igitur ubicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, ut in præcedenti propoſitione, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B: Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub A C, C B, ei, quod continetur ſemel ſub A C, C B, commenſurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis ſub A D, D B. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, ut in ſcholio propos. 27. huius libri oſtendimus; perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C D, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. Quia uero rectæ A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; erunt earum quadrata Media quoque, & commenſurabilia. Quare & *16. decimi.* compoſitum ex ipſis utrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cum utrunque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis re- *27. decimi.* ctarum A D, D B. Cum ergo Medium non ſuperet Mediū Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarū

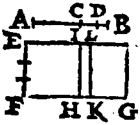
A C,

A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtendimus autẽ & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quã ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 33. PROPOS. 45. 44. 38.

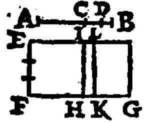
QVAE ex binis Medijs ſecunda, ad unũ duntaxat punctũ diuiditur in nomina.

Sit ex binis Medijs ſecunda A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita ut A C, C B, Mediæ ſint potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ut uult propos. 39. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantũ commenſurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur ubi cunque punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, ut in propoſitione 43. quadrata ex A C, C B, uel maiora eſſe quadratis ex A D, D B, uel minora. Exponatur Rationalis E F, ad quam applicetur rectangulũ E G, æquale quadrato ex A B. Item E H, æquale quadratis ex A C, C B. Erit igitur reliquum I G, æquale ei, quod continetur bis ſub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B, æquale eſt quadratis ex A C, C B, & rectangulo bis ſub A C, C B. Eodem modo ſi ad E F, applicetur E K, quadratis ex A D, D B, æquale; erit reliquum L G, æquale rectangulo bis ſub A D, D B, comprehenſo. Et quia quadrata ex A C, C B, inæqualia ſunt quadratis ex A D, D B; erunt quoque rectangula E H, E K, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectę F H, F K, inęquales erũt. Rurſus quia quadrata ex A C, C B, maiora ſunt, per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis ſub A C, C B; erit & E H, maius quã I G; ac propterea E H, maius quã dimidium ipſius E G, ideoq; & recta F H, maior quã dimidiũ ipſius F G. Eadẽ ratione oſten-



45. primi

4. ſecundi.



demus F K, maiorem eſſe dimidio ipſius F G. Inæquales
ergo ſunt partes F H, H G, partibus F K, K G, ſingulæ ſin-
gulis. Quoniam uero A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia
commenſurabiles; erunt & earum quadra
ta Media, & commenſurabilia. Igitur &
16. decimi. compoſitum ex ipſis utrique ipſorum com
menſurabile erit. Cum ergo utrunque
ipſorum ſit Medium, erit quoque compo-
ſitum ex ipſis, hoc eſt, E H, per coroll.
propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Me-
dium erit F K. Quare E H, E K, ad Rationalem E F, appli-
23. decimi. cata faciunt latitudines F H, F K, Rationales ipſi E F, longi-
tudine incommenſurabiles. Eodem modo cum rectangu-
lum ſub A C, C B, ponatur Medium, erit & quod bis ſub
A C, C B, hoc eſt, I G, illi commenſurabile, Medium, ex co
23. decimi. roll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Ratio-
nalem H I, erit H G, Rationalis ipſi H I, longitudine incom-
menſurabilis. Non aliter oſtendemus L G, Medium eſſe, &
K G, Rationalem ipſi K L, longitudine incommenſurabilē.
Rurſus quia A C, C B, longitudine ſunt incommenſurabi-
les; & eſt ut A C, ad C B, ita per lemma 3. propos. 9. huius
libri, quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B; erit
10. decimi. quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, incommenſu
rabile. Sed quadrato ex A C, commenſurabile eſt compoſi
tum ex quadratis rectarum A C, C B: (cum enim A C,
C B, potentia ſint commenſurabiles, atque adeo ipſarũ qua-
drata commenſurabilia; erit & compoſitum ex ipſis utrili-
16. decimi. bet ipſorum, nimirum quadrato ex A C, commenſurabi-
le.) Rectangulo uero ſub A C, C B, commenſurabile eſt,
quod bis ſub A C, C B. Igitur & compoſitum ex quadratis
rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum E H, incommen-
ſurabile eſt, per ſcholion propos. 14. huius libri, rectangulo
bis ſub A C, C B hoc eſt, ipſi I G. Quocirca cum ſit ut
1. ſexti. E H, ad I G, ita F H, ad H G; erunt F H, H G, longitudi-
10. decimi. ne incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales.
Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolum commenſu
37. decimi rabiles. Igitur F G, tota Irrationalis eſt, quæ ex binis nomi
nibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Eo-
dem modo oſtendemus & F G, ex binis nominibus, diui-
ſam

ſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poteſt, ut demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Medijs ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendū. 43. decimi.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

45.
39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita ut A C, C B, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulum uero ſub ipſis Mediū, ut uult propoſitio 40. huius libri. Dico A B, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incommēſurabiles quoque ſint potentia, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulum ſub ipſis Medium. Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, extiterit, demonſtrabimus ſimiliter, ut in propoſitione 43 exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, eum eſſe, qui rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale: (quia cum utrunque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoque eorum exceſſus ſpatium Rationale, ut in ſcholio propoſ. 17. huius libri oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quoniam uero rectangulum ſub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub A C, C B, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulū bis ſub A D, D B. Igitur cum Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, ſpatium 27. decimi.

ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

46.
40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

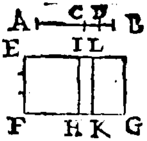
Sit linea Rationale ac Medium potens A B, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita ut A C, C B, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum uero ſub ipſis Rationale, ut uult propos 41. huius libri. Dico A B, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propos. 43 huius libri, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B. Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, CB, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt; quod oſtendemus, ut in propos. 44. Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quia uero compoſita ex his quadratis ponuntur eſſe Media: 27. decimi. Medium autem non ſuperat Medium Rationali; non erit eorum exceſſus ſpatium Rationale. Sed & Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum

ctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

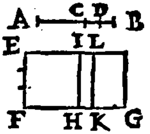
THEOR. 36. PROPOS. 48.

47.
41.

BINA Media potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.



SIT linea potens bina Media A B, diuiſa in ſua nomina ad C, ita ut A C, C B, potentia incommenſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis, ut uult propos. 42. huius libri. Dico A B, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina, quæ uidelicet ſint etiam lineæ potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis. Nam ſi poteſt fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctum D, exiſtat. Conſtructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. oſtendemusque ut ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæquales eſſe ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media E H, I G, applicata ad Rationalem E F, (eſt enim I H, ipſi E F, æqualis) faciunt latitudines F H, H G, Rationales, longitudine ipſi 23. decimi. E F, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas F K, K G, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi E F. Quia uero compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum E H, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub A C, C B, nempe rectangulo I G; eſtq; ut E H, ad



1. *ſexti.* ad I G, ita F H, ad H G; erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles, ut in ſcholio propos. 10. huius libri oſtendimus: Sed & oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolum commenſurabiles. Igitur tota 37. *decimi.* *F G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur*, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomi- 43. *decimi.* na ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, iam ante demonſtratum eſt. Igitur A B, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quã ad C, in ſua nomina. Quocirca ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

DEFINITIONES

SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomẽ plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI uero minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

Rvrsvs ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali cōmenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI uero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLION.

Nvmervs dictarum ſex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, ſunt lineæ potentia tantum commenſurabiles, non poterit utrunque nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (alias enim nomi-

na

nalis, eſſent lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri diximus. quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles. quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vna cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; propterea quod commenſurabile, antecedit incommenſurabile.

RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commenſurabile eſt longitudine expoſitæ lineæ Rationali; & ſecundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expoſitæ longitudine eſt commenſurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipſorum nominum expoſitæ Rationali longitudine eſt commenſurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans; ſecundam, quintam; & tertiam, ſextam.

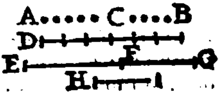
PROBL.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

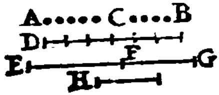
48.
42.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, CB, ex ijs, quæ in ſcholio 2. propos. 29. huius libri ſcripſimus, quorum exceſſus A C, non ſit quadratus, ita ut AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A B, A C, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur E F. Erit ergo & E F, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A B, ad A C, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. Dico E G, eſſe ex binis nominibus primam. Quoniam quadrata ex E F, FG, cum proportionem habeant, quam numeri AB, A C, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ E F, F G, commenſurabiles; ſaltem potentia; Oſtenſa autem eſt E F, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis eſt. Quia uero A B, ad A C, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex E F, F G, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ E F, FG. Sunt igitur E F, FG, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; idcirco tota E G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam eſſe. Cum enim ſit ut numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; ſit autem A B, maior, quam A C; erit quoque quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit maius, ex lemmate propos. 14 huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eſt ut A B, numerus ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; erit quoque, per conuerſionem rationis, ut A B, ad C B, uidelicet ad exceſſum quo antecedens A B, ſuperat conſequentem A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens quadratum



6. decimi.
9. decimi.
37. decimi.

dratum ex E F, ſuperat conſequens quadratum ex F G Habet autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionẽ habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; ac proinde rectæ E F, H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniã igitur maius nomen E F, plus poteſt, quam minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque idem maius nomen E F, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat. 9.decimi.

49.
43.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B. C B ut in præcedenti propoſitione, expoſitaque Rationali quadam D; ſumatur ei longitudine commenſurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A C, ad numerum A B, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, eſſe ex binis nominibus ſecundam. Quoniam quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ 6.decimi F G, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa eſt autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis eſt. Quia uero A C, A B, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, 9.decimi. Rationales potentia tantum commenſurabiles; Atque idcirco tota E G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. 37.decimi. Dico & ſecundam eſſe. Cum enim ſit ut numerus A C, ad numerum A B; ita quadratũ ex F G, ad quadratũ ex E F:

Et

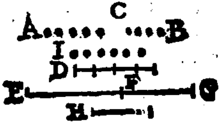
Et conuertendo vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; ſit autem A B, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit, per lemma propoſ. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in præcedenti propoſ. H, ipſi E F, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, quam minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtq; minus nomen F G, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſecũda. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſecundam. Quod erat faciendum.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

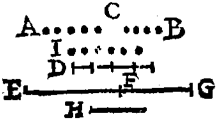
50.
44.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut in propoſ. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, ſi ſumatur I, non quadratus numerus proxime maior quam A C. Ita enim, cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quã A C, differet uel ſola unitate ab A C, uel binario. (Vnitate quidem, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando unitas addita ad A C, quadratum facit. Vt ſi A C, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia unitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi A C, ſit 5. erit nõ quadratus proxime maior 6. differens a 5. Vnitate, quia unitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare ut in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I, & A C, medius proportionalis. Igitur nõ



erunt ſimiles plani ; ac propterea neq; proportionem habebūt,
quā numeri quadrati. Expoſita iā Rationali quapiā D,
fiat per coroll propoſ.6. huius lib. vt I,ad AB,ita quadratū



ex D,ad quadratum ex EF. Erūt
ergo quadrata ex D,& EF, proportionē
habentia,quam numerus
6. decimi. I,ad numerum AB, cōmenſurabilia;
atq; adeo & lineę D,
EF,cōmenſurabiles,ſaltem potentia. Exiſtente igitur D,Rationali,
erit & EF, Rationalis. Quia uero I,ad AB,hoc eſt,
quadratum ex D,ad quadratum ex EF, *proportionem non*
habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratū ;
9. decimi. erunt D,& EF,rectæ inter ſe longitudine incōmēſurabiles .
Rurſus per dictū coroll. fiat ut AB, ad AC, ita quadratū ex
EF,ad quadratū ex FG. Erūt ergo quadrata ex EF,FG,proportionē
6. decimi habētia,quā numerus ad numerū,cōmēſurabilia ;
Ideoq; & *lineæ* EF,FG,cōmēſurabiles ſaltem potētia. Igitur
cū EF,oſtenſa ſit Rationalis;erit & FG,Rationalis. Et quia
AB,ad AC,hoc eſt,quadratū ex EF,ad quadratū ex FG,ꝓportionē
nō habet , quā numerus quadratus ad numerum
9. decimi. quadratū; erūt EF,FG,longitudine incōmenſurabiles. Sūt
ergo EF,FG,Rationales potētia tantum commenſurabiles;
37. decimi. Atq; idcirco tota EG,Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata.
Dico & tertiā eſſe. Quoniā eſt vt I, ad AB, ita quadratū
ex D,ad quadratū ex EF; Et ut AB, ad AC, ita quadratū
ex EF,ad quadratū ex FG ; erit ex æqualitate ut I, ad
AC,ita quadratū ex D,ad quadratū ex FG . Nō habet autē
I,ad AC,proportionē,quā numerus quadratus ad numerū
quadratū. Igitur nec quadrata ex D,& FG, proportionē habebunt
, quam quadratus numerus ad numerum quadratum
; ac propterea rectæ D , & FG, longitudine incōmēſurabiles
9. decimi. ſunt. Quoniā aūt eſt ut AB, ad AC, ita quadratū ex
EF,ad quadratū ex FG: Eſt aūt AB,maior,quā AC;erit &
quadratū ex EF,maius quā quadratū ex FG. Sit ergo maiꝰ,
per lēma propoſ. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Oſtēdemꝰ
iā ſimiliter, vt in 49. propoſ. H, ipſi EF, longitudine cōmēſurabilē
eſſe. Quoniā igitur maius nomē EF,plus pōt,quā minus
FG, quadrato rectæ H,ſibi lōgitudine cōmēſurabilis ; &
neutra ipſarū EF,FG,lōgitudine cōmēſurabilis eſt expoſitæ

Rati

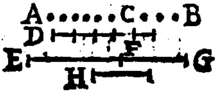
Rationali D, vt demonſtratum eſt; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

PROBL. 16. PROPOS. 52.

51.
45.

INVENIRE ex binis nominibus quartā.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita ut cōpoſitus ex ipſis AB, ad neutrū ipſorū proportionē habeat, quā quadratus ad quadratū, ex ijs, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. hui⁹ lib tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine cōmēſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cū Rationali D, cōmēſurabilis ſit. Quod ſi reliqua cōſtruantur, ut in propoſ. 49. oſtēdemus ſimiliter, ut ibi, totā EG, ex binis nominibus eſſe. Dico & quartā eſſe. Erit enim rurſus, vt in 49. propoſ. quadratū ex EF, maius quam quadratū ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniā igitur eodē modo, vt in 49 propoſ. per cōuerſionē rōnis, eſt ut AB, ad CB, ita quadratū ex EF, ad quadratum ex H: Nō eſt aūt AB, ad CB, ut quadratus ad quadratū; neq; quadratū ex EF, ad quadratū ex H, erit ut numerus quadratus ad numerū quadratū. Lōgitudine ergo incōmēſurabiles sūt rectę EF, & H. Itaq; cū maius nomē EF, plus poſſit, quā minus FG, quadrato rectæ H, ſibi lōgitudine incōmēſurabilis, & maius rurſus nomē EF, lōgitudine cōmēſurabile expoſitę Rōnali D; erit EG, ꝑ defin. ex binis nominibus quarta. Inuęnimus ergo ex binis nominibus quartā. Qđ faciendū erat. 9. *decimi.*

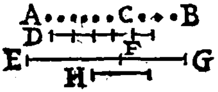


PROBL. 17. PROPOS. 53.

52.
46.

INVENIRE ex binis nominib⁹ quintā.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ut in præcedenti propoſ. fiat conſtructio, ut in propoſ. 50. nēpe ſumatur F G, longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali D, &c. Oſtendemus ergo ut in propoſ. 50. EG, eſſe ex binis nominibus. Dico, & quintam eſſe. Demonſtrabimus enim eodem modo, ut in 50. propoſ. quadratum ex E F, maius eſſe, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam uero, ut in propoſ. 49 oſtenſum eſt, per conuerſionem rationis, eſt ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Oſtendemus, ut in propoſitione antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommenſurabiles eſſe. Quare cum maius nomen E F, plus poſſit, quã minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & minus nomen F G, longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

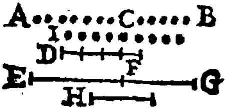


53.
47.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus ſextam.

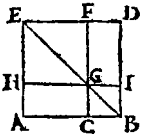
REPERTIS duobus numeris A C, C B, planis non ſimilibus, quorum neuter ſit quadratus, & compoſitus ex ipſis AB, non ſit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ipſorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, ſi numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter ſe primos. 30. *ſeptimi* Nam hac ratione & totus ad utrunque ipſorum primus erit; atq; idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finẽ lib. 8. demonſtrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis eſt quiuis numerus quadratus: Hic enim ad A B, & A C, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & ut I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius lib. & reliqua fiant, ut in propoſ. 51.



poſ. 51. oſtendemusq; ut ibi, rectas D, & E F, eſſe longitudine incommenſurabiles, atq; totam E G, ex binis eſſe nominibus. Dico & ſextam eſſe. Demonſtrabimus enim ſimiliter, ut in 51. propoſ. D, & F G, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeq; quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque ut in propoſ. 49. per conuerſionem rationes, eſſe ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum igitur A B, ad C B, atque adeo quadratũ ex E F, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; erunt rectæ E F, & H, longitudine incommenſurabiles. *9. decimi.* Itaque cum maius nomen E F, plus poſſit, quam minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutrum ipſorum nominum E F, F G, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſextã. Quod faciendum erat.

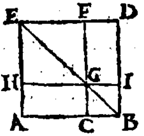
LEMMA.

Si recta linea ſecta ſit vtcunque; erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum ſub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.



SECTA *ſit recta* A B, *utcunq; in* C. *Deſcribatur ex* A B, *quadratum* A B D E, *in quo diameter ducatur* B E: *Ducta autem ex* C, *recta* C F, *ipſi B D, parallela, quæ diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi* A B, *parallela H* I. *Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2. FH, C I, quadrata partium A C,* C B; *utrunq; autem rectangu-*

lorum D G, G A, comprehenſum ſub eiſdem partibus: At uero rectangula C D, A I, ſub tota A B, & parte C B, contenta. Dico D G, medium proportionale eſſe inter quadrata F H, C I: At C D, medium eſſe proportionale inter quadrata A D, C I. Quoniam ut H G, ad G I, ita



1. ſexti. eſt tam F H, ad D G, quam A G, ad C I; erit ut
43. primi F H, ad D G, ita A G, ad C I: Eſt autem A G, ipſi D G, æquale. Igitur erit quoq; ut F H, ad D G, ita D G, ad CI; Atq; adeo D G, medium proportionale eſt inter quadrata F H, C I.

1. ſexti. RVRSVS quia eſt ut A B, ad C B, ita tã A D, ad C D, quam AI, ad C I; erit ut A D, ad C D, ita AI, ad CI: Eſt autem A I, ipſi CD, æquale. Igitur erit ut A D, ad C D, ita quoq; C D, ad C I. Quare C D, medium proportionale eſt inter quadrata A D, C I. Eodem modo erit A F, medium proportionale inter quadrata A D, F H.

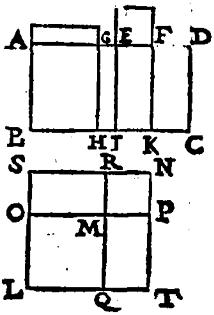
54.
48.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

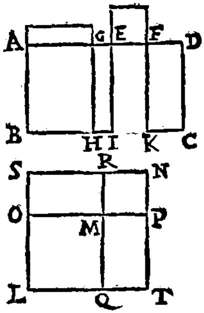
CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus prima A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit ipſius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato

drato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & deniq;
A E, expoſitæ Rationali A B, longitudine commenſurabilis
erit. Secetur E D, biſariam in F. Quia igitur A E, plus
poteſt quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ex E D, hoc eſt, quadrato ex E F, æquale parallelogrammum ſub A G, G B,
contentum, per 2. lemma propoſ
17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. 18. decimi.
Quare A G, G E, partes inter
ſe longitudine cōmēſurabiles ſunt.
Ducantur iam per puncta G, E, F,
ipſis A B, D C, parallelæ G H, E I,
F K. Et parallelogrammo A H,
æquale quadratum fiat L M: At 14. ſecundi
parallelogrammo G I, æquale fiat
quadratum M N; coniunganturq;
quadrata L M, M N, ita ad angulū
M, ut latera M O, M P, unam rectam lineam conſtituant
O P. Facient ergo & latera M Q, M R, unam rectam
Q R, vt demonſtratum eſt a nobis ex Proclo ad propoſ.
15. lib. 1. propterea quod anguli O M Q, P M R, ad uerticem M, ſunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo L N, cum rectæ O M, M P, rectis Q M, M R,
æquales ſint, ideoq; & tota O P, toti Q R; ſit autem O P,
ipſis S N, L T; & Q R, ipſis L S, T N, æqualis; æquilaterum 34. primi.
erit rectangulum L N; ideoq; quadratum.



QVONIAM uero rectangulum ſub A G, G E, æquale eſt, per conſtructionem, quadrato ex E F; erit ut
A G, ad E F, ita E F, ad G E; Ac propterea & ut A H, 17. ſexti.
ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium propor- 1. ſexti.
tionale eſt inter A H, G I, hoc eſt, inter quadrata L M,
M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N,
medium proportionale eſt T M, ex antecedenti lemmate.
AEquale igitur eſt T M, ipſi E K. Cum ergo ipſi T M,
æquale ſit M S; & ipſi E K, æquale ſit F C; erit & M S, ip- 43. & 36.
ſi F C, æquale. Quocirca totū quadratū L N, toti rectāgulo primi.
A C, æquale eſt; atq; adeo recta O P, poteſt ſpatiū A C, con-

tentum ſub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima, Dico O P, eſſe Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.



QVONIAM A G, G E, oſtenſæ ſunt longitudine commenſurabiles; erit & tota A E, *16. decimi.* utrique ipſarum longitudine commenſurabilis: Eſt autem A E, cum ſit maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commenſurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex ſcholio propoſ 12. huius lib. longitudine commenſurabiles ſunt; Atq; adeo cum A B, ſit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. Quare rectangula A H, G I, ſub Rationali- *20. decimi.* bus cõtẽta Rationalia ſunt; Ideoq; & quadrata L M, M N, ipſis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

ET quoniam A E, ipſi E D, longitudine incommenſurabilis eſt; Eſt autem ipſi A E, longitudine oſtenſa commẽſurabilis A G; & ipſi E D, commenſurabilis eſt longitudine E F, eius dimidia; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & A G, E F, inter ſe longitudine incommenſurabiles. Qua- *1. ſexti* re & A H, E K, eandem proportionem habentia, quam *10. decimi.* A G, E F, incommenſurabilia ſunt; ac proinde & L M, M T, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. Igitur & rectæ *10. decimi.* O M, M P, longitudine ſunt incommenſurabiles, cum ean- *1. ſexti* dem habeant proportionem, quam L M, M T: Sunt autẽ & O M, M P, Rationales oſtenſæ. Igitur O M, M P, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quapro- *37. decimi.* pter tota O P, potens ſpatium A C, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

55.
49.

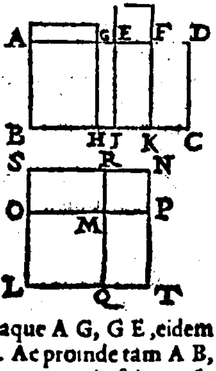
THEOR. 38. PROPOS. 56.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex

& ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

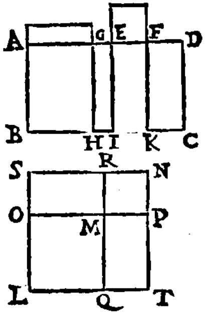
CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſecunda A D. Dico rectam lineã, quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit ipſius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantũ cõmenſurabiles; & A E, plus poterit quam E D, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et deniq; E D, Rationali expoſitæ A B, longitudine commenſurabilis. Secetur E D, bifariam in F; & reliqua conſtruantur, vt in antecedenti propoſitione. Quo facto, demonſtrabimus ſimiliter, vt ibi, rectam O P, poſſe ſpatium A C, contentum ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſecunda A D. Dico iam O P, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM A E, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi E D; & E D, minus nomen exiſtens ipſius A D, ex binis nominibus ſecundæ, longitudine commenſurabilis eſt Rationali A B; erunt A E, A B, longitudine incommenſurabiles. *13. decimi.* Et quia A G, G E, oſtenſæ ſunt in antecedẽti propoſitione longitudine cõmenſurabiles; erit quoq; tota A E, vtriq; ipſarum commenſurabiles. *16. decimi.* Quare cum A E, maius nomẽ exiſtens ipſius A D, ex binis nominibus ſecundæ, linea ſit Rationalis; erunt & A G, G E, Rationales: quod cum vtraq; A G, G E, ipſi A E, ſit longitudine commenſurabilis; at vero A E, Rationali A B, longitudine incommenſurabilis; erit vtraque A G, G E, eidem A B, incommenſurabilis longitudine. *14. decimi.* Ac proinde tam A B, A G, quam A B, G E, Rationales ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles. *22. decimi.* Igitur rectangula A H, G I, Media ſunt, proptereaq;



ptereaq; & quadrata L M, M N, ipſis æqualia, Media ſunt. Ergo & rectæ O M, M P, ſunt Mediæ.

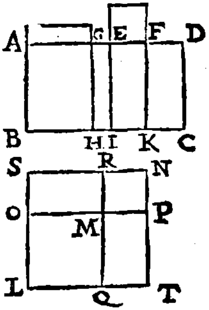
QVIA uero A G, G E, longitudine ſunt commenſu- 10. *decimi.* rabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia, commenſurabilia; atq; idcirco & quadrata L M, M N, ipſis æqualia, commenſurabilia ſunt. Igitur & rectæ O M, M P, commenſurabiles ſunt, ſaltem potentia. Et quoniam A E, E D, longitudine incommenſurabiles ſunt; Ipſi uero A E, oſtenſa eſt longitudine commenſurabilis A G; & ipſi E D, longitudine commenſurabilis eſt E F, eius dimidia; erũt per ſcholiũ propoſ. 14. huius lib. A G, E F, longitudine incommẽſurabiles; Ac proinde A H, E K, eandem habentia proportionem cũ 10. *decimi.* ipſis, incõmenſurabilia ſunt. Igitur & L M, M T, ipſis A H, & E K, æqualia, incommenſurabilia ſunt. Ideoq; & rectæ O M, M P, longitudine 10. *decimi* ſunt incommenſurabiles, cum ean- 1. *ſexti.* dem habeant proportionem, quam L M, M T. Cum ergo oſtenſum ſit O M, M P, Medias eſſe, & commẽſurabiles; erunt O M, M P, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quoniã deniq; E D, minus nomẽ ipſius A D, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi A B, hoc eſt, ipſi E I: Eſt autem E F, ipſi E D, quoque longitudine commenſurabilis; 12. *decimi.* Erunt etiam E I, E F, longitudine commenſurabiles; Ac propterea cum E I, Rationalis ſit, erit & E F, Rationalis. Quare 10. *decimi.* E K, rectangulum, Rationale eſt: Eſt autem M T, ſub O M, M P, contentum ipſi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale eſt. Quapropter O M, M P, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, Rationaleq: continentes; atq; adeo 38. *decimi.* O P, Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda, &c. Quod oſtendendum erat.



THEO-

THEOR. 39. PROPOS. 57. 56. 50.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur.



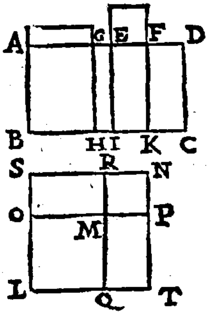
CONTINEATVR ſpatium AC,ſub Rationali AB,
& ex binis nominibus tertia A D. Dico rectā, quæ pōt ſpatiū
AC,Irrationalē eſſe,quæ dicitur ex binis Medijs ſecunda.
Sit ipſius A D,maius nomen AE. Erunt ergo A E, E D, ex
defin. Rationales potentia tantū cōmenſurabiles;
& AE, plus poterit,
quā ED,quadrato rectæ ſibi longitudine
cōmenſurabilis; Et denique
neutra ipſarum AE,ED,Rationali
expoſitæ AB,longitudine cōmenſurabilis
eſt. Secta E D, bifariam in
F. reliqua oīa fiāt,vt in propoſ. 55.
Similiter ergo,ut ibi,oſtendemus rectam
O P,poſſe ſpatium AC: Et ut
in antecedenti propoſ. 56. rectas
O M,M P,eſſe Medias potentia tātū
cōmenſurabiles;propterea quod
AE,Rationali AB,ponatur longitudine incōmenſurabilis,
quēadmodū & ibi eadē AE, ipſi AB, longitudine erat incōmenſurabilis.
Quoniā uero ED, EF,ſunt cōmēſurabiles lōgitudine;
eſtq; ED,ipſi AB,Rōnali, hoc eſt,ipſi EI,lōgitudine
incōmēſurabilis;erit quoq; E F,eidē E I,lōgitudine incōmēſurabilis: 14. decimi.
Sūt aūt EF,EI,Rōnales, qđ EF, dimidia ſit ipſius
E D,Rōnalis;& E I,expoſitæ Rōnali AB,æqualis. Igitur
EF,EI,Rōnales ſunt potētia tātū cōmēſurabiles;Ac propterea
EK,Mediū eſt; ideoq; & M T,æquale ipſi E K, Mediū 22. decimi.
eſt,qđ ſub Medijs OM,MP,cōtinetur. Itaq; cū OP, MP,
Mediæ ſint potētia ſolū cōmenſurabiles, cōtineantq; ſpatiū
Mediū;erit OP,Irrationalis,quæ ex binis Medijs ſecūda appellatur. 39. decimi
Si igitur ſpatiū contineatur ſub Rōnali, & ex binis
nominibus tertia,&c. Quod erat demonſtrandum.

THEO-

57.
51.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.



CONTINEATVR ſpatiũ A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit A E, ipſius A D, maius nomen. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & deniq; A E, ipſi A B, commẽſurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. Erunt ergo A G, 19. *decimi.* G E, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iã eodem modo, ut ibi, O P, poſſe ſpatium A C. Dico O P, Irrationalem eſſe, quæ uocatur Maior. Quoniã A G, G E, longitudine incommenſurabiles ſunt; erunt & rectangula A H, G I, eandem cum illis ha- 10. *decimi.* bentia proportionem, incommenſurabilia; atq; adeo & quadrata L M, M N, ipſis A H, G I, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine cõmenſurabilis Rationali A B; erit & A E, Rationalis; & re- 20. *decimi.* ctangulum A I, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autẽ A I, æquale compoſito ex quadratis L M, M N: Compoſitum ergo ex quadratis L M, M N, Rationale eſt.

ET quoniam E D, minus nomen ipſius A D, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine incommenſurabilis Ra-

lis Rationali A B, erit & E F, ipſius dimidia eidem A B, longitudine incommenſurabilis; Et eſt E F, Rationalis, cum ſit Rationali E D, commenſurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare E K, Medium eſt, ſub ipſis contentum; ideoq; & M T, 22. decimi
illi æquale, contentumq; ſub O M, M P, Medium eſt. Quocirca cum O M, M P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; compoſitum quidem ex ipſarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis M T, Medium; Irrationalis erit tota O P, quæ Maior nominatur. 40. decimi.
Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

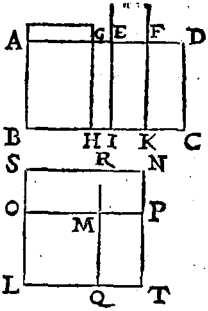
58.
52.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit ipſius A D, maius nomen A E. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poteſt, quam E D, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & denique E D, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali A B. Secta E D, biſariam, fiant reliqua eadem, quæ in propoſ. 55. Erunt igitur rurſus A G, G E, longitudine 19. decimi
incommenſurabiles. Simili autem modo, vt in propoſ. 55. conſtabit rectam O P, poſſe ſpatium A C. Dico O P, Irrationalem eſſe, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommenſurabiles. Et quia A E, maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis & longitudine incommenſurabilis Rationali A B;

erunt;

erunt AE, AB, Rationales potẽtia tantũ commenſurabiles. 22. decimi. Quare rectangulũ AI, ſub ipſis contentũ, Mediũ eſt. Eſt autẽ AI, æquale cõpoſito ex quadratis LM, MN. Igitur & cõpoſitũ hoc, Mediũ erit. Rurſus quia ED, Rõnalis ponitur lõgitudine cõmenſurabilis Rõnali AB, cũ ſit minus nomẽ ipſius AD, *ex binis nominibus quintæ*; erit & EF, ipſius dimidia, eidẽ AB, cõmenſurabilis lõgitudine, & Rõnalis. Quare EK, ſub Rõnalibus EI, EF, lõgitudine 20. decimi. cõmenſurabilibus, Rationale eſt; atq; idcirco & MT, ſub OM, MP, contentũ Rõnale erit, cũ ipſi EK, ſit æquale. Quãobrẽ cũ rectæ OM, MP, potẽtia incõmẽſurabiles ſint, faciantq; cõpoſitũ quidẽ ex ipſarũ quadratis LM, MN, Mediũ; Rectangulũ vero MT, ſub ipſis cõtentũ, Rõnale; 41. decimi. Irrationalis erit tota OP, quę dicitur potẽs Rationale & Mediũ. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & *ex binis nominibus* quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

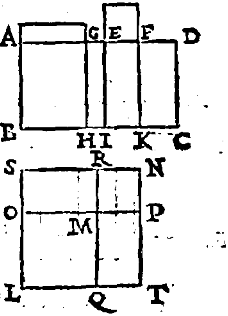


59.
53.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectã, quæ ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quę dicitur potens bina Media. Sit ipſius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & deniq; neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit cõmẽſurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quę in ſuin ſuperioribus; eruntq; AG, GE, longitudine incommenſurabiles. *19. decimi* Iam uero oſtendemus ſimiliter, ut in propoſ. 55. rectā OP, poſſe ſpatiū AC. Item, ut in propoſ. 58. rectas OM, MP, potentia eſſe incōmenſurabiles. Rurſus, ut in antecedēti propoſ. erit cōpoſitum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autē in ꝓpoſ. 58. erit quoq; MT, ſub OM, MP, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incōmenſurabilis eſt longitudine ipſi ED; hæc uero eidē cōmenſurabilis; erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles. *13. decimi.* Igitur & AI, EK, incōmenſurabilia ſunt, *10. decimi.* cum eandem rationem habeant, *1. ſexti.* quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis LM, MN, quod ipſi AI, æquale eſt, & rectangulum MT, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cum rectæ OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis; erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. *42. decimi* Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.



THEOR. 43. PROPOS. 61.

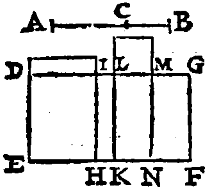
60.
54.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominib⁹ AB, cuius maius nomē AC; & ad Rōnalē expoſitā DE, applicetur rectangulū DF, æquale quadrato ex AB, *45 primi.* latitudinē faciēs DG. Dico DG, ex binis

nomi-

nominibus eſſe primam. Applicetur ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis ſub A C, C B, continetur, cum quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis ſub *4. ſecundi.* A C, C B, æqualia ſint quadrato ex A B, quemadmodum & eidem quadrato ex A B, æquale eſt, per conſtructionem, rectangulum D F. Secetur L G, bifariam in M, puncto, per quod ipſis L K, G F, parallela agatur M N: eritq; utrunque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod ſub A C, C B, cõtinetur. Et quoniam A C, C B, Ra*37. decimi.*tionales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quod tota A B, ſit ex binis nominibus; erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commenſurabilia; quorum vtrique cum etiam cõ*16. decimi.*menſurabile ſit compoſitum ex ipſis; erit quoque compoſitum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Eſt autem huic compoſito æquale, per conſtructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit; quod cum applicatum ſit ad *21. decimi.* Rationalem D E, faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipſi D E, longitudine commenſurabilem.



RVRSVS quia A C, C B, Rationales ſunt ſolum po*22. decimi*tentia commenſurabiles, erit rectangulum ſub ipſis, Medium, atq; adeo, & quod bis ſub ipſis, cum ſit ei commenſurabile, hoc eſt, ipſum L F, Medium erit, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Ratio*23. decimi.*nalem, facit L G, latitudinem Rationalem, & ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilem. Eſt autem D L, oſtenſa eidem D E, commenſurabilis longitudi*13 decimi*ne. Igitur D L, L G, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commẽ*37. decimi.*ſurabiles, Ac propterea D G, ex binis nominibus eſt. Dico & primam eſſe.

QVONIAM ex lemmate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub A C, C B, medium proportionale eſt inter quadrata ex A C, C B; erit quoque L N, medium proportionale inter D H, I K; atque adeo cum rectæ D I, L M, I L, eandem

eandem rationem habeant, quam D H, L N, I K; erit *1. ſexti.*
quoque recta L M, *media proportionalis inter* D I, I L. Quare
rectangulum ſub D I, I L, æquale eſt quadrato ex L M. *17. ſexti.*
Et quia quadrata ex rectis A C, C B, commenſurabilia ſunt,
quod A C, C B, ponuntur potentia commenſurabiles; erunt
& D H, I K, ipſis æqualia, commenſurabilia. Igitur & rectæ
D I, I L, eandem cum illis habentes rationem longitudine *10. decimi.*
commenſurabiles ſunt. Quoniam autem D K, maius eſt,
quam L F, quod & quadrata ex A C, C B, maiora ſint, per
lemma propos. 39 huius libri, quam rectangulum bis ſub
A C, C B; erit & recta D L, maior quam L G, cum D L,
LG, eandem rationem habeant, quam D K, L F; Itaque quoniam *1. ſexti.*
D L, maior eſt, quam L G; & ad D L, applicatur rectangulum
ſub D I, I L, deficiens figura quadrata, æquale
quadrato ex L M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore
L G, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub D I,
I L, æquale quadrato ex L M.) diuiditurque D L, ad I, in
partes D I, I L, longitudine commenſurabiles, ut eſt demonſtratum;
poterit D L, maior plus quam L G, minor, quadrato *18. decimi.*
rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum
D G, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & D L, maius nomen
plus poſſe, quam L G, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine
commenſurabilis, atque idem maius nomen D L,
longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit
ex defin. D G, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo
eius, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtendendum
erat.

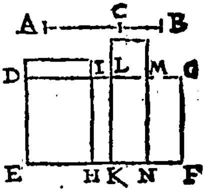
THEOR. 44. PROPOS. 62.

61.

55.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

SIT ex binis Medijs prima A B, cuius maius nomen A C; & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, 45.*primi* æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico DG, ex binis nominibus eſſe ſecundam. Conſtruantur eadem, quæ in propoſ. præcedenti, ita ut rurſus D H, I K, æqualia ſint quadratis ex A C, C B, & utrunque ipſorū L N, M F, ei quod ſub A C, CB, continetur. Quoniam igitur A C, CB, ex binis Medijs primam AB, componentes, Mediæ ſunt 38.*decimi.* potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex A C, CB; atque adeo rectangula ipſis æqualia D H, I K, commenſurabilia, atque Media. Cum ergo propterea 16.*decimi.* & totum D K, utrique ipſorum D H, I K, ſit commenſurabile; erit quoque ex coroll. propos 24. huius lib. D K, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalē D E; erit eius latitudo D L, Rationa- 23.*decimi.* lis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rectangulum ſub AC, CB, Rationale eſt; erit & eius duplum, nempe L F, Rationale; quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K; erit eius latitudo L G, Rationalis ipſi 21.*decimi.* L K, hoc eſt, ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, LG, ipſa L G, ſit ipſi D E, commenſurabilis longitudine, at D L, longitudine incom- 13.*decimi.* menſurabilis; erunt D L, LG, longitudine incommenſurabiles. Quod cum DL, LG, oſtenſæ ſint Rationales; erunt ipſæ Rationales potentia ſolum commenſurabiles; ac pro- 37.*decimi.* pterea tota D G, ex binis nominibus eſt. Iam uero ut in antecedenti propoſ. demonſtrabimus D L, maius nomen eſſe, & poſſe plus, quam minus LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quocirca cum ipſius D G, maius nomen D L, plus poſſit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen L G, oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus ſecunda. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis Medijs prima, &c. Quod erat oſtendendum.



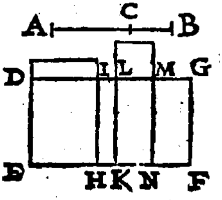
THEOR.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

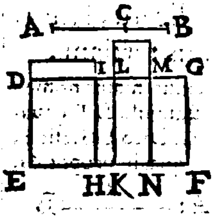
62.
56.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, ad Rationalē applicatū, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

Sit ex binis Medijs ſecunda A B, cuius maius nomen
A C; & ad Rationalē DE, applicetur rectangulū D F, ęqua- 45.*primi*
le quadrato ex AB, latitudinē faciens D G. Dico DG, eſſe ex
binis nominibus tertiā. Conſtructis ijſdē, quæ in propos. 61.
quoniā A C, CB, ex binis Medijs ſe
cundā A B, cōponētes, Mediæ ſunt
potentia ſolū cōmenſurabiles, quę 39.*decimi.*
Mediū cōtinent; Erūt quadrata ex
A C, CB, atq; adeo rectangula ip-
ſis æqualia D H, I K, cōmenſurabi
lia, & Media. Cum ergo propterea
& totum D K, utriq; ipſorū D H,
I K, ſit cōmenſurabile; erit & ex 16.*decimi.*
coroll. propos. 24. huius libri D K, Mediū; quod cum appli
catū ſit ad Rationalē D E; erit eius latitudo D L, Rationa
lis ipſi DE, longitudine incōmenſurabilis. Rurſus quia re- 23.*decimi.*
ctangulū ſub AC, CB, Mediū eſt; erit & eius duplū LF, Me-
diū; quod cū applicatū ſit ad Rationalē L K; erit latitudo
L G, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incō- 23.*decimi.*
mēſurabilis. Et quia A C, ipſi CB, lōgitudine eſt incōmenſu
rabilis; eſtq; ut AC, ad CB, ita per lēma 3. propoſ. 19. huius
libri, quadratū ex A C, ad rectangulū ſub A C, C B; erit quo-
que quadratū ex AC, rectangulo ſub AC, CB, incōmenſu- 10.*decimi.*
rabile. Eſt autē quadrato ex AC, cōmenſurabile cōpoſitum 16.*decimi.*
ex quadratis rectarum AC, CB, quod quadrata ex AC, CB,
commenſurabilia ſint, quippe cum rectæ ipſæ potentia po-
nantur cōmenſurabiles; & rectangulo ſub AC, CB, cōmen-
ſurabile eſt eius duplum, nimirū rectangulum bis ſub A C,
CB. Igitur cōpoſitum ex quadratis rectarum AC, C B, hoc
eſt, rectāgulū DK, incōmēſurabile eſt rectāgulo bis ſub A C,
CB, hoc eſt, rectāgulo LF, per ea, quæ in ſcholio propos. 14.
huius libri conſcripſimus. Quare rectæ DL, LG, eandem

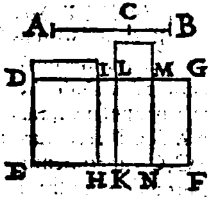


10. decimi. rationem cum DK, LF, habentes, longitudine ſunt incommenſurabiles: ſunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles; ac
37. decimi. propterea tota DG, ex binis nominibus eſt. Iam uero ut in propos. 61. oſtendemus DL, eſſe maius nomen, poſſeque plus, quã minus LG, quadrato rectæ ſibi lõgitudine commenſurabilis. Quãobrem cum DL, maius nomen plus poſſit, quã LG, minus, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & neutra ipſarum DL, LG, Rationali expoſitæ DE, ſit oſtenſa longitudine commenſurabilis, erit ex defin. G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, &c. Quod erat demonſtrandum.



63. THEOR. 46. PROPOS. 64.

57. QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



SIT Maior AB, cuius maius no men AC; & ad Rationalẽ DE, appli-
45. primi cetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe quartã. Conſtruantur eadẽ prorſus, quæ in propos. 61. Et quia AC, CB,
40. decimi. Maiorem AB, componentes potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum uero ſub ipſis, Medium; erit quoque DK, compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, æquale exiſtens, Rationale; At uero LF, duplum eius, quod ſub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale DK, ad Rationalem DE, eſt applicatum; erit DL, Rationali ipſi DE,
21. decimi. longitudine commenſurabilis. Item cum LF, Medium ſit appli-

applicatum ad Rationale L K; erit L G, Rationalis ipſi LK. 23. decimi hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Quare cum ductum rectarum D L, L G, illa quidem ipſi D E, cōmenſurabilis ſit longitudine; hæc uero eidem D E, longitudine incommenſurabilis; incommenſurabiles erunt longitu- 13. decimi. dine D E, L G. oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L G, Rationales potentia tantum commenſurabiles; ideoque D G, ex binis nominibus eſt. Iam uero ut in 37. decimi. propoſ. 61. demonſtrabimus rectangulū ſub D I, I L, æquale eſſe quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommenſurabilia ſunt, quod rectæ A C, CB, potentia incommēſurabiles ſunt; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommenſurabilia; atque adeo & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, *longitudine incommenſu-* 10. decimi. rabiles. Quoniam uero ut in propoſ. 61. oſtendimus, DL, maior eſt, quam L G; & ad D L, applicatum eſt rectangulū ſub D I, I L, quadrato ex L M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipſam D L, ad I, in partes longitudine incommenſurabiles; poterit D L, plus quam L G, quadrato rectæ ſibi lon- 19. decimi. gitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cum & ipſa D L, (maius nomen ipſius D G, quæ eſt ex binis nominibus,) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratū ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

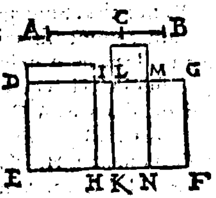
64.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

58.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius *nomen A C*; & ad Rationalem D E, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinē faciens D G. 45. *primi* Dico D G, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant eadem omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, cōponentes AB, potentem Rationale ac Medium, *41. decimi.* potentia incommenſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectangulum ſub ipſis contentum, Rationale; erit DK, æquale cōpoſito ex quadratis rectarum AC, CB, Mediū; & LN, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur, atque adeo ipſius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, facit latitudinem DL, Rationalē, *23. decimi.* & longitudine Rationali DE, incōmenſurabilē: At uero Rationale LF, ad Rationalē LK, applicatum, facit latitudinē LG, Rationalē *21. decimi.* longitudine ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, cōmenſurabilem. Quia igitur duarū rectarū DL, LG, hæc quidem longitudine cōmenſurabilis eſt Rationali DE, illa uero longitudine *13. decimi.* incommenſurabilis; erunt DL, LG, longitudine incommēſurabiles. Quare DL, LG, Rationales ſunt potentia ſolum *37. decimi.* commenſurabiles; Ac propterea DG, eſt ex binis nominibus. Iam uero, ut in propos. 61. oſtendemus rectangulum ſub DI, IL, æquale eſſe quadrato ex LM; & ut in antecedēti propos. DL, maius nomē eſſe, atq; poſſe plus, quam LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quapropter cū & minus nomen LG, oſtenſum ſit expoſitæ Rationali DE, longitudine cōmenſurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

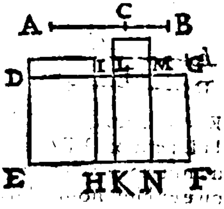


65.
59.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

Sit bina Media potens recta AB, cuius maius nomen *45 primi.* AC; & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale

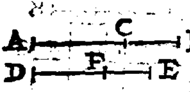


æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico
D G, eſſe ex binis nominibus ſextam. Conſtructis iiſdem
quæ in propos. 61. quoniam rectæ A C, C B, componentes
ipſam A B, potentem bina Media, potentia incommenſurabiles ſunt, *42. decimi.*
faciuntq; & cōpoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis cōtinetur, Medium, & incōmenſurabile cōpoſito ex quadratis ipſarum; erit tam D K, illi compoſito æquale, quam L F, rectangulo bis ſub A C, C B, æquale, Medium. Et quia Media D K, L F, applicata ſunt ad
Rationalem D E; erunt eorum latitudines D L, L G, Rationales *23. decimi.*
ipſi D E, longitudine incommenſurabiles. Quoniã uerò
cōpoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, incommenſurabile *42. decimi.*
eſt rectangulo ſub A C, C B; eidem uerò rectangulo
ſub A C, C B, cōmenſurabile eſt rectangulũ bis ſub A C, C B,
cùm hoc illius ſit duplum; Erit cōpoſitum ex dictis quadratis
hoc eſt D K, incōmenſurabile rectangulo bis ſub A C, C B, *13. decimi.*
hoc eſt, ipſi L F; Ac propterea rectæ D L, L G, eãdẽ rationẽ
habentes cum D L, L G, longitudine incōmenſurabiles ſunt. *10. decimi*
Rationales ergo ſunt D L, L G, potentia ſolum cōmenſurabiles;
Ac proinde D G, eſt ex binis nominibus. Iam uero, ut *37. decimi.*
in præcedenti propoſ. demonſtrabimus D L, eſſe maius nomen,
poſſeq; plus quam minus L G, quadrato rectæ ſibi longitudine
incōmenſurabilis. Cum ergo oſtenſum ſit, neutrã
ipſarum D L, L G, longitudine commenſurabilem eſſe expoſitæ
Rationali D E; erit, ex defin. D G, ex binis nominibus
ſexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media poteſt, &c.
Quod erat oſtendendum.

THEOR. 49. PROPOS. 67. 66. 60.

EI, quæ eſt ex binis nominibus, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque A B, diuiſa in ſua
nomina, quorum maius A C, & C B, minus, ſitque recta
D E, ipſi A B, longitudine commenſurabilis. Dico D E,
quoque eſſe ex binis nominibus, & ordine eandem ipſi A B.



Fiat ut tota A B, ad totam D E, ita
12. ſexti. ablata A C, ad ablatam D F; erit
ergo & reliqua C B, ad reliquam
19. quinti F E, ut tota A B, ad totam D E.
Et quoniam ipſi A B, longitudine commenſurabilis ponitur
10. decimi. D E; erit & D F, ipſi A C, & F E, ipſi C B, longitudine com
menſurabilis; ſunt autem A C, C B, cum ſint nomina eius,
37. decimi quæ ex binis nominibus, Rationales: Igitur & D F, F E, Ra
tionales ſunt. Rurſus quia eſt ut A C, ad D F, ita C B, ad
F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt
autem A C, C B, potentia ſolum commenſurabiles; erunt
10. decimi. & D F, F E, potentia ſolum commenſurabiles. Igitur D F,
F E, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; ac
37. decimi. propterea D E, ex binis nominibus. Dico & ipſi A B, ordi
ne eandem eſſe. Aut enim A C, plus poteſt quam C B,
quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut
incommenſurabilis. Si quidem A C, plus poteſt quam C B,
quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; poterit
15. decimi. & D F, plus quam F E, quadrato rectæ ſibi longitudine cõ
menſurabilis. Quod ſi A C, commenſurabilis ſit longitudi
ne Rationali expoſitæ, ita ut A B, ſit ex binis nominibus pri
12. decimi. ma; erit & D F, eidem Rationali longitudine commenſura
bilis, cum utraque, & Rationalis & D F, eidem A C, ſit cõ
menſurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. eſt ex
binis nominibus prima, hoc eſt, ordine eadem. Si uero
C B, expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis;
ut A B, ſit ex binis nominibus ſecunda; erit eodem modo &
F E, Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis. Qua
re & D E, ex defin. eſt ex binis nominibus ſecunda. Si de-
nique neutra ipſarum A C, C B, longitudine ſit commenſu-
rabilis expoſitæ Rationali, ita ut A B, ſit ex binis nominib⁹ ter
14. decimi. tia; erit & neutra ipſarum D F, F E, longitudine commen-
ſurabilis expoſitæ Rationali. Quare & D E, ex defin. eſt
ex binis nominibus tertia.

At ſi A C, plus poſſit, quam C B, quadrato rectæ ſibi

longi-

longitudine incommenſurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ut prius, oſtendemus D E, ex binis nominibus quartam eſſe, uel quintam, uel ſextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, uel quinta, uel ſexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum. 15. decimi.

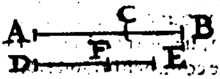
SCHOLION.

Quod ſi recta D F, potentia tantum commenſurabilis ſit ipſi A B, quæ eſt ex binis nominibus, oſtendemus quidem eodẽ modo, (ſi in demonſtratione pro Commenſurabilis longitudine, reponamus ubique, commenſurabilis potentia tantum:) & D E, eſſe ex binis nominibus: At non eſſe ordine eandem ipſi A B, cui commenſurabilis eſt, nullo modo concludemus. Non enim ſequitur, ſi A C, maius nomen longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali; & D F, maius nomen eidem eſſe commenſurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expoſita Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commenſurabilis eſt, ſed Rationalis quidem, commenſurabilis longitudine; At vero D F, potentia tantum, ex hypotheſi. Immo vero, ſi A B, ſit ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione poteſt, vt D E, illi potentia tantum commenſurabilis ſit ex binis nominibus ordine eadem.

Sit enim A B, ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, diuiſa in ſua nomina ad C; ſitque ei commenſurabilis potentia tantum D E, quam quidem, vt in theoremate, demonſtrabimus eſſe ex binis nominibus, diuiſamque eſſe in ſua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales eſſe, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri poſſe, vt D E, ex binis nominibus ſit eadem ordine ipſi A B. Nam ſi poteſt fieri, ſit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo utrunque maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali expoſitæ commenſurabile longitudine. Quare & inter ſe longitudine commenſurabilia erunt. Et quoniam eſt vt A C, ad D F, ita A B, ad D E; erunt propterea & A B, D E, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim D E, ipſi A B, 12. decimi. 10. decimi.

potentia

potentia ſolum commenſurabilis. Non ergò vtraque A B, D E, ex binis nominibus prima eſt. Eodem modò neque vtraque ex binis nominibus quarta erit. Sed neque ſecunda, vel quinta. Eſſet enim vtrunque nomen minus C B, F E, ex defin. longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ, atque adeo & inter ſe. Igitur & tota A B, D E, longitudine, forent commenſurabiles. quod non ponitur.



SEMPER tamen verum eſt, ſi A B, eſt ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam D E, ipſi A B, potentia ſolum commenſurabilem, eſſe quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit A C, plus quam C B, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo ſit vt A C, ad C B, ita D F, ad F E; poterit quoque D F, plus quam F E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. 15. decimi. *Quare ex defin. erit D E, ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi A B, eſt ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel ſexta, itaut A C, plus poſſit, quam C B, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit quoque D F, plus quam F E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis,* 15. decimi. *cum ſit vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur ex defin. erit D E, ex binis nominibus etiã quarta, vel quinta, vel ſexta, licet nõ eadẽ ordine ipſi A B.*

IN ſequentibus autem quinque propoſitionibus neceſſario erit D E, eadem ordine ipſi A B, quanquam potentia tantum illi commenſurabilis ſit.

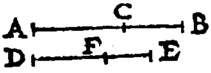
67.
61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ eſt ex binis Medijs, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Medijs eſt, atque ordine eadem.

SIT ex binis Medijs A B, quæcunque diuiſa in ſua nomina, quorum A C, maius, & C B, minus, ſitque ei recta D E, longitudine commenſurabilis. Dico D E, quoque ex binis Medijs eſſe, & ipſi A B, ordine eandem. Fiat ut tota A B, ad

ad totā D E, ita ablata A C, ad ablatam D F. Erit ergo & reliqua 12. ſexti.
C B, ad reliquā F E, ut tota A B, ad totam D E. Et quoniam 19. quinti.
ipſi A B, ponitur longitudine commenſurabilis D E;
erit & D F, ipſi A C, & F E, ipſi C B,
longitudine commenſurabilis. 10. decimi.
Sunt autem A C, C B, Mediæ. Igitur
& D F, F E, illis commenſurabiles, 24 decimi.
Mediæ ſunt. Rurſus quia eſt ut A C, ad D F; ita C B,
ad F E; & permutando ut A C, ad C B; ita D F, ad F E: Sūt
autem A C, C B, potentia ſolum commenſurabiles; erunt 38. decimi.
& D F, F E, ſolum commenſurabiles potentia. Cum ergo 10. decimi.
& oſtenſæ ſint Mediæ; erunt D F, F E, Mediæ potentia tantum
commenſurabiles; Atque idcirco D E, erit ex binis Medijs. 38. vel 39.
Dico & ipſi A B, eandem eſſe ordine. Quoniam eſt decimi.
ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; Eſt autem ut A C, ad C B,
ita quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, & ut
D F, ad F E ita quadratū ex D F, ad rectangulum ſub D F,
F E, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque, ut
quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, ita quadratum
ex D F, ad rectangulum ſub D F, F E; & permutando
ut quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulū
ſub A C, C B, ad rectangulum ſub D F, F E. Commenſurabile
eſt autem quadratum ex A C, quadrato ex D F; quod
rectæ A C, D F, commenſurabiles oſtenſæ ſint longitudine.
Igitur & rectangulum ſub A C, C B, rectangulo ſub D F, 10. decimi.
F E, commenſurabile eſt. Quare ſi rectangulum ſub A C,
C B, fuerit Rationale, ita ut A B, ſit ex binis Medijs prima;
erit & rectangulum ſub D F, F E, Rationale, cum illi
ſit commenſurabile; atque adeo & D E, ex binis Medijs prima 38. decimi.
erit. Si uero rectangulum ſub A C, C B, fuerit Medium,
ita ut A B, ſit ex binis Medijs ſecunda; erit & rectangulum
ſub D F, F E, ei commenſurabile, Medium, ex coroll.
propos. 24. huius lib. Ac propterea & D E, erit ex binis Medijs 39. decimi.
ſecunda. Quare ei, quæ ex binis Medijs, longitudine commenſurabilis, &c. Quod demonſtrandum erat.



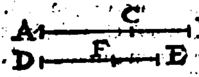
SCHOLION.

EODEM prorſus modo demonſtrabimus, rectam lineam D E, *D E, ſi potentia tantum fuerit commenſurabilis ipſi A E, quæ eſt ex binis Medijs, ex binis Medijs eſſe; atque ordine eandem ipſi A B, cui commenſurabilis eſt; ſi modo loco: commenſurabilis longitudine: in demonſtratione dicamus ubique: commenſurabilis potentia tantum, &c. ut manifeſtum eſt.*

68.
62.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commenſurabilis, & ipſa Maior eſt.



SIT linea Maior A B, diuiſa in ſua nomina ad C, eique
commenſurabilis ſit D E, ſiue longitudine & potentia, ſiue
potentia tantum. Dico & D E,
Maiorem eſſe. Fiant enim eadẽ,
quæ ſuperius; ita ut partes A C,
C B, ad partes D F, F E, eandem
habeant rationem, quam tota A B ad totam D E. Quo-
niam igitur A B, D E, commenſurabiles ſunt uel longitudi-
ne & potentia, uel potentia tantum; erunt quoque tam
10. *decimi.* A C, D F, quam C B, F E, eodem modo commenſurabiles.
Rurſus quia eſt ut A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permu-
tando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; erit ut quadratum ex
22. *ſexti.* A C, ad quadratum ex C B, ita quadratum ex D F, ad qua-
dratum ex F E; & componendo ut compoſitum ex qua-
dratis rectarum A C, C B, ad quadratum ex C B, ita compo
ſitum ex quadratis rectarum D F, F E, ad quadratum ex
F E; Et conuertendo, ut quadratum ex C B, ad compoſitũ
ex quadratis rectarum A C, C B, ita quadratum ex F E, ad
compoſitum ex quadratis rectarum D F, F E; Et permu-
tando ut quadratum ex C B, ad quadratum ex F E, ita cõ-
poſitum ex quadratis rectarum A C, C B, ad compoſitum
ex quadratis rectarum D F, F E. Commenſurabile eſt autẽ
quadratum ex C B, quadrato ex F E, quod rectæ C B, F E,
oſtenſæ ſint commenſurabiles uel longitudine & potentia,
uel potentia tantum. Igitur & compoſitum ex quadratis
10. *decimi.* rectarũ A C, C B, cõmenſurabile eſt compoſito ex quadratis
rectarum D F, F E. Eſt autem compoſitum illud Ratio-
40. *decimi.* nale, cum rectæ A C, C B, componant Maiorem A B. Igi-
tur

tur & hoc Rationale eſt, ex 9. defin.

RVRSVS quia eſt ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; Vt autem A C, ad C B, ita eſt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, & ut D F, ad F E, ita quadratum ex D F, ad rectangulum ſub D F, F E, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque ut quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B; ita quadratum ex D F, ad rectangulum ſub D F, F E: et permutando ut quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum ſub A C, C B, ad rectangulum ſub D F, F E. Eſt autem quadratum ex A C, quadrato ex D F, commenſurabile, quod rectæ A C, D F, oſtenſæ ſint commenſurabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum. Igitur & rectangulum ſub A C, C B, rectangulo ſub D F, FE, commenſurabile eſt. Eſt autem re- 10. decimi. ctangulum ſub A C, C B, Medium. Igitur & rectangulum 40. decimi. ſub D F, FE, illi commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propos 24. huius libri. Quoniam uero eſt ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; ſuntque A C, C B, potentia incommenſura- 40. decimi. biles, cum componant Maiorem A B; Erunt quoque D F, F E, potentia incommenſurabiles. Itaque cum D F, F E, 10. decimi. ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium, ut oſtenſum eſt; erit tota D E, 40. decimi. Maior. Maiori ergo commenſurabilis, & ipſa Maior eſt. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 52. PROPOS. 70. 69.

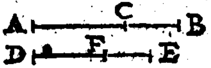
63.

RATIONALE ac Medium potenti commēſurabilis, & ipſa Rationale ac Medium potens eſt.

SIT recta A B, potens Rationale ac Medium, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis D E, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, eſſe potentem Rationale ac Medium. Conſtructis iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus, ut in præcedenti propos. compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, commenſurabile eſſe compo-

ſito

ſito ex quadratis rectarum D F, F E, . Eſt autem illud compoſitum
41. decimi. Medium, cum rectæ A C, G B, componant ipſam
A B, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos.



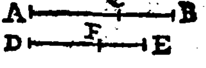
24. huius lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, Mediũ
eſt. Eodem modo, ut in eadem
propos. antecedenti, erit rectangulum
41. decimi. ſub A C, C B, quod Rationale eſt, commenſurabile
rectangulo ſub D F, F E; atque adeo & rectangulum ſub
D F, F E, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique ut in eadem ſuperiori
propos. erunt D F, F E, potentia incommenſurabiles.
Quare cum D F, F E, ſint potentia incommenſurabiles,
faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis,
Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, ut
41. decimi. demonſtratum eſt; erit tota D E, Rationale ac Medium potens.
Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis,
&c. Quod erat demonſtrandum.

70.
64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

Sit bina Media potens A B, diuiſa in ſua nomina ad
C, eique commenſurabilis D E, ſiue longitudine & potentia,
ſiue potentia tantum. Dico & D E, eſſe bina Media potentẽ.
Conſtructis iiſdem, quæ ſupra, ōſtendemus, ut in propoſ.



69. compoſitũ ex quadratis rectarũ A C, C B, cõpoſito ex quadratis
rectarũ D F, F E, commenſurabile
eſſe: Nec non & rectangulum ſub
A C, C B, eſſe cõmenſurabile rectangulo ſub D F, F E. Cũ
41. decimi. ergo tã compoſitũ ex quadratis rectarũ A C, C B, quam rectangulũ
ſub A C, C B, Medium ſit; erit etiam ex coroll. propoſ.
24. huius libri, tã cõpoſitum ex quadratis rectarũ D F,
F E, quam rectangulũ ſub D F, F E, Mediũ. Sed & D F, F E,
potentia incõmenſurabiles ſunt, ut prius. Poſtremo quia cõpoſitum
ex quadratis rectarũ A C, C B, & rectangulum ſub
A C,

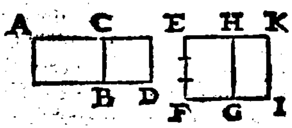
A C, C B, incommenſurabilia ſunt, ex hypotheſi, propterea quod A B, bina Media poteſt: Eſt autem compoſito ex quadratis rectarum A C, C B, commenſurabile oſtenſum cõpoſitum ex quadratis rectarum D F, F E; & rectangulo ſub A C, C B, probauimus commenſurabile rectangulum ſub D F, F E; Erunt quoque ex ſcholio propos. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarũ D F, F E, & rectangulum ſub D F, F E, incommenſurabilia. Quare cum rectæ D F, F E, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum ex ipſarum quadratis Mediũ; & quod ſub ipſis continetur, Mediũ; incõmenſurabileq; cõpoſito ex quadratis ipſarũ; erit D E, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti cõmenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt. Quod erat oſtendẽdũ. 42.decimi. 42.decimi.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

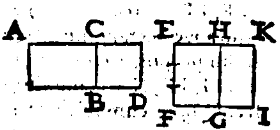
71.
65.

SI Rationale & Medium componũtur, quatuor Irrationales fiunt, uel ea, quæ ex binis nominibus, uel quæ ex binis Medijs prima, uel Maior, uel Rationale ac Mediũ potens.

SIT Rationale ſpatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum ſpatium A D, poteſt, eſſe uel ex binis nominibus, uel ex binis Medijs primam, uel Maiorem, uel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, uel maius quam C D, uel minus: Aequale ſiquidem non erit; alias cum A B, ſit Rationale, eſſet & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo maius, & expoſita Rationali E F, applicetur ad eã rectangulũ E G, æquale ipſi A B; & ad H G, aliud H I, æquale ipſi C D, ut totum E I, toti A D, ſit æquale. Et quoniam A B, Rationale eſt, & C D, Medium; erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium: quæ cum applicentur ad Ratio- 45.primi



21 *decimi.* Rationalem E F; erit E H, Rationalis, & ipſi E F longitu-
23.*decimi.* dine commenſurabilis; At uero H K, Rationali A, & eidem E F, longitudine incōmenſurabilis. Rurſus quia E G, H I, incommenſurabilia ſunt, ut conſtat ex definitionibus; quod E G, Rationale ſit, at H I, Irrationale, nempe Mediū; erunt E H,

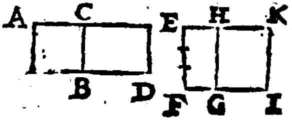


10.*decimi.* H K, eandem cum illis habentes rationem incommenſurabiles longitudine. Rationales ergo ſunt E H, H K, potentia
+ K
37.*decimi.* ſolum commenſurabiles; Ac propterea E K, ex binis nominibus eſt. Et quoniam maius ponitur A B, quam C D, hoc eſt, E G, quam H I; erit quoque E H, maior quam
1. *ſexti.* H K, cum E H, H K, eandem rationem habeant, quā E G, H I. Iam uero maius nomen E H, plus poterit quam minus H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, uel incommenſurabilis. Si plus poſſit E H, quam H K, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine; erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cum E H, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeo & ſpatiū A D, compoſitum ex Rationali A B, & Medio C D, Irra-
55.*decimi.* tionalis eſt; quæ ex binis nominibus appellatur.

Si uero E H, plus poſſit quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit E K, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum E H, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpatium E I, contentū ſub Rationali E F, & ex binis nominibus quarta E K, atque adeo & ſpatium A D, Irra-
58.*decimi.* tionalis eſt, quæ uocatur Maior.

Sit ſecundo A B, minus quam C D; & eadem conſtruantur, quæ prius. Erit ergo, ut prius, E K, ex binis nominibus, & E H, ipſi E F, longitudine commenſurabilis. Et quia A B, minus eſt, quam C D, hoc eſt, E G, quam H I; erit quoque recta E H, minor quam H K. Poterit igitur rurſus H K, maius nomen ipſius E K, quæ eſt ex binis nominibus, plus quam E H, minus nomen, quadrato rectæ longitudine

tudine ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit H K, quam E H, quadrato rectæ longitudine ſibi cõmenſurabilis; erit E K, ex binis nominibus ſecunda, cum E H, minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali E F, vt oſtenſum eſt. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus ſecunda E K, atq; adeo & ſpatium A D, ex Rationali A B, & Medio C D, compoſitum, Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Medijs prima. 56. decimi.



Si vero H K, plus poſſit quam E H, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit E K, ex binis nominibus quinta, cum E H, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali E F. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus quinta E K, atq; adeo & ſpatium A D, Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. 5[illegible] decimi. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

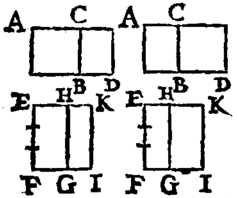
THEOR. 55. PROPOS. 73.

72.
66.

SI duo Media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs ſecunda, vel bina Media potens.

Componantur duo Media incommenſurabilia A B, C D. Dico rectam, quæ poteſt totum ſpatium A D, eſſe vel ex binis Medijs ſecundam, vel bina Media potentem. Erit enim rurſus A B, vel maius, quam C D, vel minus: Æquale ſiquidem non erit; alias eſſent A B, C D, commenſurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius & omnia fiant, quæ in præcedenti propoſitione. Et quia ſpatia A B, C D, ponuntur Media, & incommenſurabilia; erunt

L &



& ſpatia E G, H I, Media & incõmenſurabilia; cum illis ſint æqualia. Igitur rectæ E H, H K, eandem cum illis habentes 10. *decimi.* rationem, longitudine incommenſurabiles ſunt; & vtraq; (cum E G, H I, Media ſint, applicenturq; ad Rationalem 23. *decimi.* E F.) Rationalis eſt, ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Rationales ergo ſunt E H, H K, potentia ſolum commenſurabiles; 37. *decimi.* ac propterea E K, ex binis nominibus eſt. Quoniam vero A B, maius ponitur quam C D; erit vt in antecedenti propoſ. E H, maius nomen ipſius E K. Poterit ergo plus quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommẽſurabilis. Si plus poſſit E H, quam H K, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, cum vtrunq; nomẽ E H, H K, oſtenſum ſit longitudine incommenſurabile Rationali E F; erit E K, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus tertia E K, atque adeo & ſpatium 57. *decimi.* A D, Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur.

Si uero E H, plus poſſit quam H K, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis, cum utrunq; nomen E H, H K, longitudine ſit incommenſurabile Rationali E F; erit E K, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpatium E I, ſiue ſpatium A D, Irrationa- 60. *decimi.* lis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

Quod ſi A B, minus ſit, quam C D; *non aliter* propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media inter ſe incõmenſurabilia componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

Ex his omnibus *facile colligitur*, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eaſdem eſſe.

Nam quadratum Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, 23. *decimi.* latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.

At quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam. 61. *decimi.*

Et quadratum eius, quę eſt ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam. 62. *decimi.*

Qvadratvm deinde eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. 63. *primi.*

At vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam. 64. *decimi.*

Qvadratvm autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam. 65. *decimi.*

Poſtremo quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. 66. *decimi.*

Itaqve cum hę latitudines differant & a latitudine Medię, & inter ſe; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illę vero Irrationales; Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differentes eſſe.

SCHOLION.

Hactenvs egit Euclides de ſeptem ſenarijs.

In primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, quæ poteſt bina Media.

In ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe.

In tertio deinde contento propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, uidelicet primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextæ.

In quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quanam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, uel ex bi-

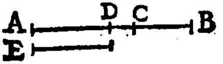
nis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN quinto autem, quem reperies in propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quaſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN ſexto vero; qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.

IN ſeptimo deniq; contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.



SIT enim quæcunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; & diuidatur A B, bifariam in D; & eius dimidiæ A D, vel D B, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter A C, C B: & E, eſſe quoque ex binis nominibus. Quoniam A C, ſuperat dimidiam A D, rectam D C; & dimidia D B, ſuperat ipſam C B, eadem recta D C; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius A B, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter A C, C B, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commenſurabilis eſt longitudine toti A B, cum hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi A B, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.

IDEM oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus ſeptem ſenarijs de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

PRIN-

PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. 73. 68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR a Rationali A B, Rationalis A C, potentia ſolum commenſurabilis ipſi A B. Dico reliquam B C, Irrationalem eſſe. Quoniam per lemma 3. propoſ. 9. huius lib. eſt ut A B, ad A C, ita quadratum ex A B, ad rectangulũ ſub A B, A C: Et ſunt A B, A C, longitudine incommenſurabiles; erunt incommenſurabilia quadratum ex A B, & rectangulum ſub A B, A C. 10. *decimi.* Sed quadrato ex A B, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C; (Cum enim A B, A C, potentia ponantur commenſurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, commenſurabilia. Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex A C,) rectangulo vero ſub A B, A C, commenſurabile eſt rectangulum 16. *decimi.* ſub A B, A C, bis. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulum ſub A B, A C, bis contentum, incommenſurabilia ſunt; vt in ſcholio propoſ. 14. huius libri demonſtrauimus. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale rectangulo bis ſub A B, A C, una cum quadrato ex B C. 7. *ſecundi.* Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex B C, incommenſurabile eſt. Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, ſit Rationale; (propterea quod commenſurabile eſt quadrato Rationali ex A C, linea Rationali deſcripto;) erit quadratum ex B C, Irrationale; atq; adeo & recta ipſa B C, Ir-

rationalis, Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Reſiduum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt. &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

POTVISSET *Euclides proponere quoque hanc propoſitionem hoc modo.*

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

37. decimi. NAM *cum A B, A C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles; erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Aufertur igitur A C, minus nomen ex maiori nomine A B, ut relinquatur Apotome B C.*

74.
69.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR a Media A B, Media A C, potentia ſolum commenſurabilis ipſi A B, ſitq; rectangulum ſub A B, A C, Rationale. Dico reliquam B C, eſſe Irrationalem. Quoniam A B, A C, potentia ſunt commenſurabiles; erunt quadrata ex A B, A C, commenſurabilia; atque adeo & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit 16. decimi.

erit quadrato ex A C. Eſt autem quadratum ex A C,
Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. pro
poſ. 24. huius lib. & compoſitum ex quadratis recta-
rum A B, A C, Irrationale erit, ac Medium. Et quia
rectangulum ſub A B, A C, ponitur Rationale; erit
& rectangulum bis ſub A B,
A C, Rationale. Igitur incom-
menſurabile eſt compoſitum ex
quadratis rectarum A B, A C,
rectangulo bis ſub A B, A C. Cum ergo compoſitum
ex quadratis rectarum A B, A C, æquale ſit rectangu- 7. *ſecundi.*
lo bis ſub A B, A C, una cum quadrato ex B C; erit
quoque rectangulum bis ſub A B, A C, una cum qua-
drato ex B C, incommenſurabile rectangulo bis ſub A B,
A C. Quare & rectangulum bis ſub A B, A C, &
quadratum ex B C, incommenſurabilia ſunt. Exiſten- 17. *decimi.*
te ergo rectangulo bis ſub A B, A C, Rationali; erit
quadratum ex B C, Irrationale; ideoq; & recta B C,
Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome pri-
ma. quia uidelicet relinquitur poſt detractionem mino-
ris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori no-
mine, ut in ſcholio ſequenti patebit. Si igitur a Me-
dia Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exi
ſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Ir-
rationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.
Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

POTVISSET *hæc propoſitio proponi hoc modo.*

SI, a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim A B, A C, ſint Mediæ potentia ſolum com-

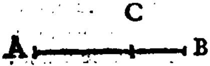
menſurabiles, contineantq; Rationale; erit compoſita ex ipſis 38. decimi. *Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori A B, ut relinquatur B C, Mediæ Apotome prima.*

75.
70.

THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

DETRAHATVR a Media A B, Media A C, potentia ſolum commenſurabilis ipſi A B, ſitq; rectangulum ſub A B, A C, Medium. Dico reliquam B C, eſſe Irrationalem. Quoniam quadrata ex A B, A C, potentia commenſurabilibus commenſurabilia ſunt; erit & compoſitum ex ipſis 16. decimi. utrique ipſorum commenſurabile: Eſt autem utrunque ipſorum Medium, quod & rectæ A B, A C, Mediæ ponantur. Igitur & compoſitum ex ipſis, utrique commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia rectangulum ſub A B, A C, Medium ponitur; erit & eius duplum, rectangulum uidelicet bis ſub A B, A C, ex coroll. propoſ. 24. huius lib Medium. Cum ergo compoſitum 7. ſecundi. ex quadratis rectarum A B, A C, æquale ſit rectangulo bis ſub A B, A C, una cum quadrato ex B C; ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium eſt, rectangulum bis ſub A B, A C, quod etiam Medium eſt, quadrato ex B C. Medium autem non ſuperat 27. decimi. Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale eſt. ergo Irrationale, & ipſa recta B C, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis eius, quę ex binis



nis Medijs ſecunda, a maiori nomine, ut ex ſcholio ſequenti apparebit, Si igitur a Media Media auferatur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

Hoc etiam theorema ita potuiſſet proponi.

Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

Quoniam AB, AC, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles; continentq; Medium; erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Medijs ſecunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, ut relinquatur BC, Mediæ Apotome ſecunda. 39. decimi.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

76.
71.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autẽ ſub ipſis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

Detrahatur a recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; Sit autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum vero ſub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem eſſe. Quoniam compoſitum ex quadratis rectarũ AB, AC, Rationale eſt; rectangulum uero ſub AB, AC, atq; adeo,

adeo, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & ei cōmenſurabile, hoc
eſt, rectangulū bis ſub AB, AC, Mediū, hoc eſt, Irrationale;
erit cōpoſitū ex quadratis rectarū AB, A C, incōmenſurabi-
10. defin. le rectangulo bis ſub AB, AC. Eſt autē cōpoſitū ex quadra-
7. ſecundi. tis rectarū AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, una
cum quadrato ex B C. Igitur & compoſitum ex quadratis
rectarum A B, A C, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex B C, incommenſurabile erit. Ponitur autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, Ratio-
10. defin. nale. Igitur quadratum ex B C,

illi incommenſurabile, Irrationale eſt, & linea B C, Irrationalis. vocetur autem Minor, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineæ Maioris, a maiori nomine, ut in ſcholio ſequenti dicemus. Si igitur a recta auferatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

Sic etiam theorema hoc poterat proponi.

Si a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

Nam cum A B, A C, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: erit compo-
40. decimi. *ſita ex ipſis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiuſq; maius nomen A B, minus autem A C. Aufertur igitur A C, minus nomen ex maiori A B, ut relinquatur Minor B C.*

77.
72.

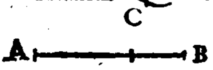
THEOR. 60. PROPOS. 78.

SI a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum

tota

tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipſi A B, incommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam B C, eſſe Irrationalem. Quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangulum ſub A B, A C, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis ſub A B, A C, Rationale; erit compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, incommenſurabile rectangulo bis ſub A B, A C. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale rectangulo bis ſub A B, A C, vna cum quadrato ex B C. Igitur & rectangulum bis ſub A B, A C, vna cum quadrato ex B C, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A B, A C. Sunt ergo & rectangulum bis ſub A B, A C, & quadratum ex B C, incommenſurabilia. Cum ergo rectangulum bis ſub A B, A C, Rationale ſit; erit quadratum ex B C, Irrationale, & recta B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis ſub A B, A C, quod Rationale eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium exiſtit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua, &c. Quod oſtendendum erat.



10. *defin.*

7. *ſecundi*

17. *decimi.*

10. *defin.*

SCHOLION.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.

Si a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

Cvm enim A B, A C, ſint potentia incommenſurabiles, que faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationa-
41. decimi. *le; erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen eſt A B, minus autem A C. Aufertur igitur minus nomen A C, a maiori A B, ut B C, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.*

78.
73.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

Detrahatvr ex recta A B, recta A C, potentia ipſi A B, incommenſurabilis; Sitq; tam compoſitum ex ipſarum quadratis, quam rectangulum ſub ipſis, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Dico reliquam B C, eſſe Irrationalem. Quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale eſt
7. ſecundi rectangulo bis ſub A B, A C, una cum quadrato ex B C, ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C,

quod

quod Medium ponitur, rectãgulum bis ſub AB, AC, quod ex coroll. propoſ. 24 huius lib. Medium etiam eſt, (cum Medio, quod ſub A B, A C, continetur, ſit commenſurabile) quadrato ex B C. Medium autem non ſuperat Mediũ 27. decimi. Rationali Non ergo quadratum ex B C, Rationale eſt. ergo Irrationale, & recta ipſa B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis ſub A B, A C, quod Medium eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium etiã eſt. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

IN hunc modum proponi quoq; potuiſſet hoc theorema.

SI a maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Mediũ totum efficiens.

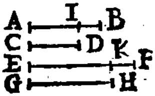
QVONIAM cum A B, A C, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum; erit compoſita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. 42. decimi. *Auferatur igitur minus nomen A C, ex maiori A B, vt relinquatur B C, cum Medio Medium totum efficiens.*

LEMMA.

SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & viciſſim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui

qui inter ſecũdam magnitudinem & quartam.

SINT *quatuor magnitudines* A B, C D, *E F, G H, ſitq;* I B, *exceßus inter* A B, *C* D, *æqualis exceſſui* K F, *inter E F, G H*. Dico *eundem eße exceſſum inter A* B, *E F, qui inter* CD, *G H*. Quoniam I B, *exceſſus eſt inter A* B, *&* C D; *erit* A *I, ipſi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit E K, ipſi G H. Idem igitur exceſſus erit inter* A *I, &* E *K, qui inter* C D, *& G H; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis. Eſt autem totorum* A B, *E F, ex pronunciato 15. lib. 1. idem exceßus, qui inter* A *I, E K; quod I* B, K *F, æquales ponuntur. Igitur idem quoque exceßus erit inter* A *B, & E F, qui inter C* D, *& G H. quod eſt propoſitum.*



COROLLARIVM.

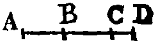
Ex his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimûs eundem eſſe inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

79.
74.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

APOTOMAE vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome A B; congruens autem ei Rationalis B C,



B C, potentia ſolum toti A C, commenſurabilis. Dico ipſi A B, aliam Rationalem non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si enim fieri poteſt, congruat alia Rationalis B D, ita vt B D, ipſi A D, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia B C, Rationalis eſt; erit & A C, illi ſolũ potẽtia cõmẽſurabilis, Rõnalis. Rõnales ergo ſunt AC, BC, potẽtia tantum commenſurabiles. Eodem modo erunt & A D, B D, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum bis ſub A C, B C, qui inter compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, & rectangulum bis ſub A D, B D; (ſuperat enim compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis ſub A C, B C, quadrato ex A B; quod compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale ſit rectangulo bis ſub A C, B C, vna cum quadrato ex A B. Et eodem modo compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, ſuperat rectangulum bis ſub A D, B D, quadrato eodem ex A B; cum & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, æquale ſit rectangulo bis ſub A D, B D, vna cum quadrato ex A B.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, D B. Eſt autem exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. quod vtrunque Rationale ſit. (Nam cum A C, B C, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & commenſurabilia. Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique illorum commenſurabile eſt, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, ſpatium Rationale eſt. Et quia rectangulum ſub A C, B C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario propoſitionis 24. huius lib. & eius duplum,

7. ſecundi.

7. ſecundi.

16. decimi.

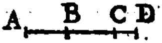
22. decimi.

nempe

nempe rectangulum bis ſub A C, B C. Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis ſub A D, B D. 27. *decimi.* Medium autem non ſuperat Medium Rationali Igitur exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, Rationale ſpatium non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A B, alia Rationalis non congruit, præter B C, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Apotomæ igitur una tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

80. 75. THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.



SIT Mediæ Apotome prima A B; & ipſi congruat BC, Media toti A C, potentia ſolum commenſurabilis, & rectangulum ſub A C, B C, ſit Rationale. Dico ipſi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Si enim fieri poteſt, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tantum commenſurabilis, ſitq; rectangulũ ſub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media eſt potentia ſolum ipſi A C, commenſurabilis; erit 24. *decimi* & A C, Media, cum illi ſit commenſurabilis.. Mediæ ergo ſunt A C, B C, potentia tantum commenſurabiles. Similiter & A D, B D, Mediæ erunt potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, vt in propoſ. præcedenti oſtenſum eſt. Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. ſpatium Rationale; quod vtrunq; ſit Rationale (cum enim rectangulum ſub

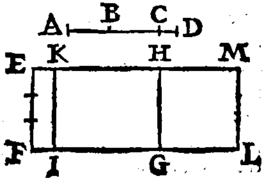
ſub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis ſub A C, B C, illi commenſurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis ſub A D, B D.) Igitur & exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, ſpatium Rationale eſt. Et quoniam rectæ A C, B C, Mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erunt & ipſarum quadrata Media, & commenſurabilia. Igitur & compoſitũ ex ipſis utrique ipſorum commenſurabile eſt, atque adeo & *16. decimi.* Medium, ex coroll. propos. 24 huius lib. Non aliter quoque Medium erit compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D. Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur ex- *27. decimi.* ceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, ſpatium Rationale non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti ſit potentia ſolum commenſurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandũ.

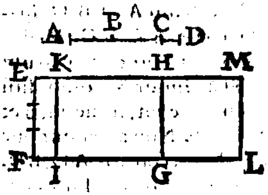
THEOR. 64. PROPOS. 82.

81.
76.

MEDIAE Apotomæ ſecundæ una tãtum congruit recta linea Media potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome ſecunda A B, cui congruat Media B C toti A C, potentia tantum commenſurabilis, & rectangulum ſub A C, B C, ſit Medium. Dico ipſi A B, aliam Mediam nõ congruere, quæ toti ſit potentia tantum cõmenſurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia B D, Media toti A D,





potentia tantum commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub A D, B D, Medium. Exponatur Rationalis E F. ad quam *45. primi* applicetur rectangulum E G, æquale compoſito ex quadratis rectarum A C, B C; & ad eandem E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex A B. Et denique aliud E L, æquale compoſito ex quadratis rectarũ A D, B D. Quoniam igitur compoſitũ ex quadratis rectarum A C, *7. ſecundi.* B C, æquale eſt rectangulo bis ſub A C, B C, una cum quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis continetur ſub A C, B C. Eodemque modo erit K L, æquale ei, quod bis cõtinetur ſub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; (cum enim B C, Media pona *24. decimi.* tur, erit & A C, ipſi potentia commenſurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. Ergo & *16. decimi.* compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt utrique eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Igitur & E G, quod illi compoſito æquale eſt, Medium eſt; quod cum applicetur ad Rationalem E F, erit E H, Ratio- *23. decimi.* nalis ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, B C, Medium eſt; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium: quod cum applicetur ad Rationalem K I, erit K H, *23. decimi.* Rationalis ipſi K I, hoc eſt, ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommenſurabiles ſunt, eſtque ut A C, ad B C, ita quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, B C, ut oſtendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius lib. erit quadratum ex A C, *10. decimi.* incommenſurabile rectangulo ſub A C, B C: Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc eſt, rectangulum E G, (cum enim rectæ A C, B C, ponantur potentia commenſurabiles, erunt & earum quadrata commenſurabilia, Igitur & com- *16. decimi.* poſitum ex ipſis commenſurabile eſt utrique ipſorum, nempe quadrato ex A C.) & rectangulo ſub A C, B C, cõmenſurabile eſt eius duplum, videlicet K G. Igitur & E G, ipſi K G, incom-

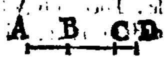
incommenſurabile eſt; ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. hu-
ius lib. docuimus. Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes
rationẽ cũ EG, KG, longitudine incõmenſurabiles ſunt; Sed 10. *decimi.*
& Rationales ſunt oſtenſæ. Rationales ergo ſunt potentia
tantum commenſurabiles. Quapropter cum ex Rationa-
li EH, auferatur Rationalis KH, potentia ſolum commen
ſurabilis ipſi EH, erit EK, Apotome, & illi congruens KH. 74. *decimi.*
Similiter demonſtrabimus EK, Apotomen eſſe, & illi con-
gruentem KM. Non igitur Apotomæ una tantum con-
gruit recta linea Rationalis, potentia ſolum commenſura-
bilis exiſtens toti: quod eſt abſurdum. Vnam enim tantũ
congruere, demonſtratum eſt, Igitur Mediæ Apotomæ 80. *decimi.*
ſecundæ una tantum congruit, &c. Quod erat demon-
ſtrandum.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

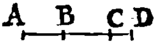
82.
77.

MINORI una tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidẽ ex ipſarum quadratis Rationale; quod autẽ ſub ipſis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale, & rectangulum ſub AC, BC, Medium. Dico ipſi AB, aliam non congruere, quæ eadem præſtet. Sit enim, ſi fieri poteſt, alia congruens BD, toti AD, potentia incõmenſurabilis, faciensq; cõpoſitũ quidẽ ex quadratis rectarũ AD, BD, Rationale, & rectãgulũ ſub AD, BD, Mediũ. Quoniã igitur, ut in propoſ. 80. demonſtratũ eſt; idẽ exceſſus eſt inter compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulũ bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autem exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius libri;



quod utrunque Rationale ponatur. Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub A C,BC,& rectangulum bis ſub A D, B D,ſpatium eſt Rationale. ſed & non Rationale eſt (Cũ enim rectangulum ſub A C, B C,ponatur Medium,erit quoque ex coroll.propoſ. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC,BC, Medium Similiterque Mediũ erit rectangulum bis ſub A D, B D. Quare unum non ſuperabit alterum Rationali.) *27. decimi.* Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incõmenſurabilis,&c. Minori ergo una tantum cogruit,&c. Quod erat demonſtrandum.

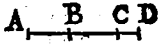


83.
78.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantum cõgruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C,toti A C,potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC,BC,Medium,rectangulum uero ſub A C,BC,Rationale. Dico ipſi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta B D,toti A D,potentia incommenſurabilis,faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD,B D,Medium, rectangulum uero ſub AD,B D,Rationale. Quoniam igitur, ut in propos. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, BC, & compoſitũ ex quadratis rectarum A D,B D, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub A D, B D. Eſt autem exceſſus



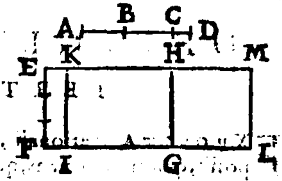
excesſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, ut in propoſ. 81 demonſtrauimus. Igitur & excesſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: eo quod Rationale eſt, cũ utrunque ſit Medium. Medium enim Medium non ſuperat Rationali: Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi A B, alia recta, quam B C, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandũ. 27. decimi.

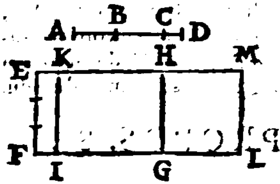
THEOR. 67. PROPOS. 85.

84.
79.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarũ quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileq; cõpoſito ex ipſarum quadratis.

SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipſi uero congruens B C, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub A C, B C, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipſi A B, aliam non congruere, quæ eadẽ hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi recta alia BD, toti A D, potentia incõmenſurabilis, ita ut & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, Medium ſit, & rectangulum ſub A D, B D, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum A D, B D. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propos. 82. quoniam compoſitũ ex quadratis rectarum AC, BC, Medium eſt; erit etiam EG,





illi æquale, Medium. Recta igitur E H, Rationalis eſt, ipſi,
23. decimi. E F, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, BC, Medium eſt; erit & eius duplum K G,
Medium. Igitur & recta
23. decimi. K H, Rationalis eſt, longitudine ipſi E F, incommenſurabilis. Et quoniam K G, commenſurabile eſt rectangulo ſub A C, B C, cum illud huius ſit duplum; at rectangulum ſub A C, B C, incommenſurabile ponitur compoſito ex quadratis rectarum A C, B C; erit quoque K G, eidem compoſito;
14. decimi. hoc eſt, ipſi E G, incommenſurabile; Ac propterea rectæ
E H, K H, eandem habentes cum E G, K G, rationem,
10. decimi. longitudine incommenſurabiles ſunt. Sed & oſtenſæ ſunt
Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare cum ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia ſolum commenſurabilis ipſi E H;
74. decimi. erit E K, Apotome, & ei congruens K H. Non aliter oſtendemus E K, eſſe Apotomen, & ei congruentem eſſe K M.
Non igitur Apotomæ una tantum recta congruit, &c.
80. decimi. Quod eſt abſurdum. Vnam enim tantum congruere demonſtratum eſt. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

DEFINITIONES
TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longi-

longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI uero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI uero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commẽſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

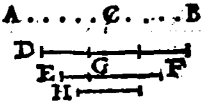
SCHOLION.

NON aliter colligitur numerus harum ſex Apotomarum, ac ſuperius numerus ſex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex deſinitionibus eſt perſpicuum.

85. 80.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in ſcholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum exceſſus A C, non ſit quadratus; ita ut AB, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A B, A C, non: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit E F. Eritq; E F, cũ commenſurabilis ſit Rationali *D*, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A B, ad numerũ A C, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratũ ex G F. Dico E G, eſſe primam Apotomen. Quoniam quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam

6. decimi. numeri A B, A C, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ E F, G F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo E F, oſtenſa ſit Rationalis, erit & G F, Rationalis. Quia uero A B, A C, proportionem non habent, quam quadrati

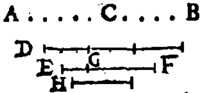
numeri;

numeri; neque quadrata ex E F, G F, proportionem habebunt,
quam quadrati numeri. Incommenſurabiles ergo
ſunt longitudine rectæ E F, G F. Rationales ergo ſunt E F, 9. decimi.
G F, potentia tantum commenſurabiles; atque idcirco reliqua
E G, Apotome eſt. Dico & primam eſſe. Poſſit enim 74. decimi.
recta E F, plus quam recta G F, quadrato rectæ H. Et quia
eſt ut numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex
E F, ad quadratum ex G F; erit per conuerſionem rationis,
ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex
H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri
quadrati. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem
habent, quam numeri quadrati; Ac propterea rectæ E F, & 9. decimi.
H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur
tota E F, plus poteſt, quam congruens G F, quadrato rectæ
H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque tota eadem
E F, expoſitæ Rationali D, commenſurabilis longitudine;
erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam
Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 20. PROPOS. 87. 86. 81.

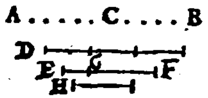
INVENIRE ſecundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut
in propos. præcedenti; expoſitaque Rationali D, ſumatur
ei longitudine commenſurabilis G F; eritque G F, Rationali
D, cõmenſurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus
A C, ad numerum A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex
E F, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico E G, eſſe ſecundam Apotomen.



Quoniam quadrata ex G F, E F, proportionem habentia,
quam numeri A C, A B, commenſurabilia ſunt; 6. decimi.
Erunt & rectæ G F, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia.
Cum ergo G F, ſit oſtenſa Rationalis; erit quoque E F,
Rationalis. Quia uero numeri A C, A B, atque adeo & quadrata
ex G F, E F, proportionem non habent, quam numeri
quadrati; erunt G F, E F, longitudine incommenſurabiles. 9. decimi.

les. Rationales ergo ſunt G F, E F, potentia ſolum commenſurabiles; Ideoque E G, reliqua, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Poſſit enim recta E F, plus quam G F, quadrato ex H. Quoniam ergo eſt ut A C, ad A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F; & conuertendo, ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F: Oſtendemus iam, ut in antecedenti propos. rectam H, ipſi E F, longitudine eſſe commenſurabilem. Quam ob rem cum tota E F, plus poſſit, quam congruẽs G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis, ſitque congruens G F, expoſitæ Rationali D, longitudine commenſurabilis; erit E G, ex defin. ſecunda Apotome. Inuenimus ergo ſecundam Apotomen. Quod erat faciendum. 74. decimi.

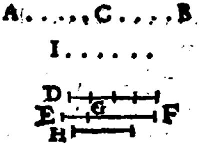


87.
82.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut in propoſ. 86. ſumatur alius numerus I, ut in propos. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expoſita deinde Rationali D, fiat ut I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Eruntque quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numeri I, & A B, cõmenſurabilia; atque adeo & rectæ D, & E F, cõmenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente ergo D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Et quia numeri I, & A B, ac propterea qua- 6. decimi. --



quadrata ex D, & E F, proportionem non habent, quam
numeri quadrati; erunt rectæ D, & E F, longitudine incommenſurabiles. 9. decimi.
Rurſus fiat ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F, ex eodem corollario
propos. 6. huius libri. Dico E G, eſſe tertiam Apotomen. Quoniam quadrata ex E F, G F, proportionem
habentia, quam numeri A B, A C, commenſurabilia 6. decimi.
ſunt; erunt & rectæ E F, G F, commenſurabiles, ſaltem potentia.
Cum ergo E F, oſtenſa ſit Rationalis, erit & G F, Rationalis; cum illi hæc ſit commenſurabilis, ut demonſtrauimus.
Et quia A B, A C, atque adeo & quadrata ex E F,
G F, proportionem non habent, quam numeri quadrati;
Erunt rectæ E F, G F, longitudine incommenſurabiles. Rationales 9. decimi.
ergo ſunt E F, G F, potentia ſolum commenſurabiles;
Ac propterea cum ex E F, auferatur G F, potentia illi ſolum
cõmenſurabilis; reliqua E G, Apotome erit. Dico & tertiam 74. decimi.
eſſe. Quoniam eſt ut I, ad A B, ita quadratum ex D,
ad quadratum ex E F; & ut A B, ad A C, ita quadratum ex
E F, ad quadratum ex G F; erit ex æquo ut I, ad A C, ita quadratum
ex D, ad quadratum ex G F. Non habent autem [illegible]
numeri I, & A C, proportionem quam numeri quadrati;
Neque igitur quadrata ex D, & G F, proportionem habebunt,
quam numeri quadrati. Sunt ergo rectæ D, & G F,
longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & 9. decimi.
D, E F, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra
ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ
Rationali D. Poſſit iam E F, plus quam G F, quadrato
rectæ H: Oſtendemusque, ut in propoſ. 86. rectam
H, eſſe ipſi E F, longitudine commenſurabilem. Quapropter
cum tota E F, plus poſſit quam congruens G F,
quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis; & neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. E G, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen Quod faciendum erat.

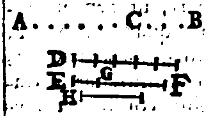
PROBL.

88.
83.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita ut A B, ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in ſcholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commenſurabilis ſit E F; eritq; propterea & E F, Rationalis. Quod ſi reliqua fiant, quæ in propoſ. 86. oſtendemus, ut ibi, E G, eſſe Apotomen. Dico & quartam eſſe. Poſſit n. E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia eſt ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conuerſionem rationis, ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum ergo A B, & C B, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; erunt rectæ E F, & H, longitudine incommenſurabiles. Quoniam igitur tota E F, plus poteſt, quam congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, eſtque eadem tota E F, commenſurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.



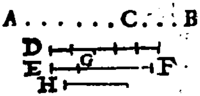
9. decimi.

89.
84.

THEOR. 23. PROPOS. 90.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ut in propoſ. præcedenti, fiat conſtructio, ut in propos. 87. hoc eſt, ſumatur G F, longitudine commenſurabilis Rationali D, &c. Oſtendemus ergo ut in propoſ. 87. E G, eſſe Apotomen. Dico & ſecundam eſſe. Poſſit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia ſimiliter, ut in propoſ 86. oſtendemus



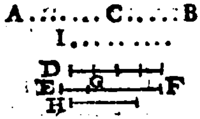
demus, per conuerſionem rationis, eſſe ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H; erunt rurſus, ut in propos. antecedenti, rectæ E F, & H, longitudine incommenſurabiles. Quia ergo tota E F, plus poteſt, quam congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis; eſtque congruens G F, Rationali D, commenſurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

90.
85.

INVENIRE ſextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, CB, & I, ut in propoſ. 54. ita ut A B, ad neutrum ipſorum A C, C B; & I, ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, ut in propos. 88. Oſtendemus ergo ſimiliter, ut ibi, D, & E F, longitudine incommenſurabiles eſſe; & E G, Apotomen eſſe. Dico & ſextam eſſe. Nam ut in propoſ. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommenſurabiles; Atque adeo neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſſit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H, quam oſtendemus, ut in propos. 89. longitudine incommenſurabilem eſſe ipſi E F. Igitur cum tota E F, plus poſſit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutra ipſarum E F, G F, longitudine ſit commenſurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, ſexta Apotome. Inuenimus ergo ſextam Apotomen. Quod erat faciendum.



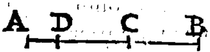
SCHOLION.

SED & expeditius ſex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, ut Theon docet hoc loco.

SIT

Sit inuenienda exempli gratia, prima Apotome. Reperiatur prius ex binis nominibus prima A B, cuius maius nomen A C, & minus C B. Abſciſſa igitur ex A C, recta C D, quæ æqualis ſit ipſi C B. Dico A D, eſſe primam Apotomen. Quoniam A C, C B, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; erunt etiam A C, D C, Rationales potentia tantum commenſurabiles. Eſt ergo A D, Apotome. Et quia A C, plus poteſt, quam C B, hoc eſt, quam D C, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine cõmenſurabilis: & eſt A C, Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, A D, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex ſecunda ſecundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex ſexta ſextam, ſi minora nomina ex maioribus auferamus.

49. decimi.

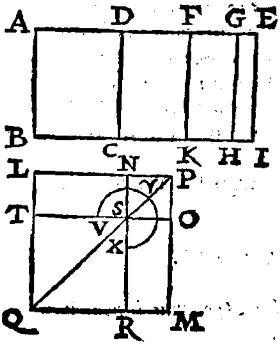


74. decimi.

91.
86.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea ſpatium potens Apotome eſt.



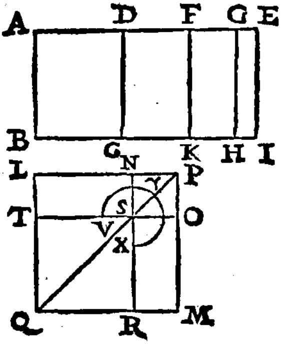
CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma prima A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Apotomen eſſe. Sit ipſi A D, congruens D E. Erũt igitur A E, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia ſolum commẽſurabiles; & tota A E, longitudine cõmenſurabilis Rationali A B; & denique eadem A E, tota plus poterit, quam

quam congruens DE, quadrato rectæ ſibi longitudine com
menſurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & quadrato ex FE,
hoc eſt, quartæ parti quadrati ex D E, applicetur ad A E, re-
ctangulum æquale ſub A G, G E, deficiens figura quadra-
ta, per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. Et quia A E, plus
poteſt, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine com-
menſurabilis; erunt rectæ A G, G E, longitudine commen 18. decimi.
ſurabiles; Ac propterea & utraque toti A E, longitudine 16. decimi.
commenſurabilis erit. Eſt autem A E, Rationali A B,
longitudine commenſurabilis: Igitur & utraque AG, GE,
ipſi A B, longitudine eſt commenſurabilis; atque ex defini- 12. decimi.
tione 6. Rationalis. Quare ductis G H, E I, ipſi A B, paralle
lis, quæ ipſi B C, productæ occurrant in H, I; erit utrunque
rectangulum A H, G I, contentum ſub duabus Rationalibus
longitudine commenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia 20 decimi.
utraque D F, FE, longitudine commenſurabilis eſt ipſi DE;
& D E, longitudine incommenſurabilis eſt Rationali A B;
(Nam ſi commenſurabilis eſſet longitudine, cum & A E, ſit
eidẽ AB, longitudine cõmenſurabilis; eſſent AE, DE, longi 12. decimi.
tudine quoque commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. po
nuntur n. ſolũ potentia cõmenſurabiles:) erit etiã utraque
ipſarũ DF, FE, ipſi AB, lõgitudine incõmenſurabilis. Et quo 14. decimi.
niã utraq; D F, FE, Rationali DE, cõmenſurabilis, Rationa
lis eſt; Erunt propterea tam AB, DF quã AB, FE, Rationa
les potentia tantũ cõmẽſurabiles. Quare ducta FK, ipſi AB,
parallela, erit utrunq; rectangulũ DK, F I, contentũ ſub Ra
tionalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium. 22. decimi.

IAM uero ipſi AH, fiat quadratũ æquale LM, & ipſi GI, 14. ſecundi.
æquale fiat quadratũ NO, cõmunem habens cum L M, an
gulum LPM. Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem 26. ſexti.
diametrũ, quæ ſit P Q. Perficiatur autem figura, ut uides.
Quoniã igitur rectangulũ ſub AG, G E, per conſtructionẽ,
æquale eſt quadrato ex F E; erunt tres rectæ AG, FE, GE, 17. ſexti.
proportionales; Ac propterea cũ AH, F I, GI, eandẽ cũ ipſis 1. ſexti.
habeant rationẽ; erit F I, mediũ proportionale inter A H
G I, hoc eſt, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Eſt autem
inter eadem L M, N O, per lemma propoſ. 54. huius lib. me-
dium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO,
æqualia ſunt: Sed ipſi F I, æquale eſt D K; & ipſi LO, 36. primi
æquale

æquale eſt M N. Eſt ergo totum D I, toti gnomini V Y X, cum quadrato N O, æquale. Eſt autem & totum A I, per conſtructionem, æquale quadratis L M, NO. Igitur & reliquum A C, reliquo quadrato TR, eſt æquale; Ac propterea recta T S, poteſt ſpatium A C. Dico T S, Apotomen eſſe.

QVONIAM ſpatia A H, G I, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt L M, N O, erunt quoque quadrata L M, N O, Rationalia; atq; adeo & rectæ T O, S O, Rationales. Rurſus quia F I, Medium eſt oſtenſum; erit & L O, illi æquale, Medium. Incommenſurabilia ergo ſunt L O, & N O, cum unum ſit Irrationale, alterum uero Rationale. Igitur rectæ T O, S O, eandem rationem habentes cum L O, N O, longitudine incommenſurabiles ſunt; Ac idcirco reliqua T S, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandū erat.



1. *ſexti.*
10. *decimi.*
74. *decimi*

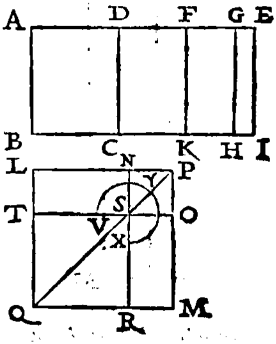
92.
87.

THEOR. 69. PROPOS. 93.

S I ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.

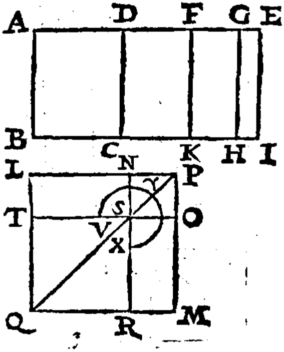
CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda A D. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi A D, congruens recta D E. Erunt ergo A E, D E, ex definitione Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali

tionali A B; Et denique A E, plus poterit, quam D E, qua-
drato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE,
bifariam in F, & reliqua omnia conſtruantur, vt in propo-
ſitione præcedenti. Eruntq; rurſus, vt in antecedenti pro-
poſitione, A G, G E, longitudine commenſurabiles; Ac *18. decimi.*
propterea & vtraq; toti A E, *16. decimi.*
longitudine commenſurabi-
lis. Eſt autem A E, Ratio-
nali A B, longitudine incom
menſurabilis: (Si enim com
menſurabilis eſſet ipſi A B,
longitudine, cum D E, ei-
dem A B, ponatur longitu-
dine commẽſurabilis; eſſent
A E, D E, inter ſe quoque
commenſurabiles longitudi- *12. decimi.*
ne. Quod eſt abſurdum. po
nuntur enim potentia tantũ
commenſurabiles.) Igitur &
utraque ipſarum A G, G E, longitudine incommenſurabi- *14. decimi.*
lis eſt eidem A B. Eſt autem utraque A G, G E, Rationali
A E, commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt
tam A B, A G, quàm A B, G E, potentia ſolum commen-
ſurabiles; Atq; idcirco rectangulum utrunq; A H, G I, cō-
tentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabi- *22. decimi.*
libus, Medium eſt. Rurſus quia utraq; D F, F E, ipſi D E,
longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur D E, Ratio-
nali A B, longitudine commenſurabilis; erit quoque, ut in
ſcholio propoſ. 12. huius lib. oſtendimus, eidem A B, Ra-
tionali longitudine commenſurabilis utraq; D F, F E; atq;
adeo & Rationalis. Vtrunq; ergo rectangulum D K, F I,
contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabili- *10. decimi.*
bus, Rationale eſt. Iam uero ut in præcedenti propoſ. de-
monſtrabimus rectam T S, poſſe ſpatium A C. Dico T S,
Mediæ Apotomen eſſe primam.



QVONIAM A G, G E, longitudine ſunt commen-
ſurabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia ra-
tionem, commenſurabilia; atque adeo & L M, N O, qua- *10. decimi.*
drata illis æqualia, commenſurabilia erunt. Igitur & late-

raeorum, nempe rectæ T O, S O, ſaltem potentia erun commenſurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata L M, N O, Medijs A H, G I, æqualia, (oſtenſa enim ſunt



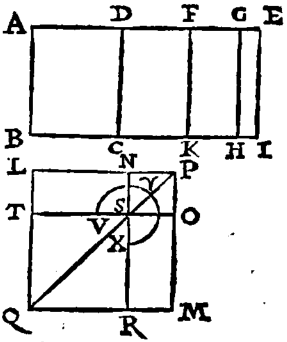
A H, G I, Media eſſe.) Mediæ ſint. Et quoniam F I, atque adeo ſibi æquale L O, Rationale eſt, proptereaque Medio N O, incommenſurabile ; erunt rectæ T O, S O, eandem cum illis ratio- 10. decimi. nem habentes, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo & Mediæ ſint oſtenſæ, & commenſurabiles ; erunt T O, S O, Mediæ potentia tantum commenſurabiles. Cum ergo contineant L O, quod Rationale eſt oſten- 75. decimi. ſum ; erit T S, Mediæ Apotome prima. Si ergo ſpatium cõtineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda, &c. Quod demonſtrandum erat.

93.
88.

THEOR. 70. PROPOS. 94.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia ; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ ſpatium A C, poteſt, eſſe Medię Apotomen ſecundam. Sit ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, A E, D E, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarum A E, D E, longitudine commenſurabilis Rationali A B; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur D E, biſariam in F, & cætera fiant, ut in propoſ. 92. eruntq; rurſus, ut ibi, A G, G E, longitudine inter ſe commenſu-menſurabiles ; Ac propterea & utraq; toti A E , longitudine commenſurabilis erit. 16. decimi. Eſt autem A E, poſita incommenſurabilis longitudine Rationali A B. Igitur & utraque A G, G E, eidem A B, longitudine erit incommenſurabilis. Cum 14. decimi. ergo utraque A G, G E, Rationali A E, commenſurabilis , Rationalis ſit ; erunt tā A B, A G, quam A B, G E, Rationales potentia ſolum commenſurabiles ; Ac propterea utrunque rectangulum A H, G I, Medium erit. 22. decimi. Rurſus quia D E, longitudine ponitur incommenſurabilis Rationali A B ; erit quoque utraque D F, F E, ipſi D E, longitudine commenſurabilis exiſtens , eidē A B, longitudine incommenſurabilis. Cum ergo utraque 14. decimi. D F, F E, Rationali D E, commenſurabilis , ſit Rationalis ; erunt tam A B, D F, quam A B, F E, Rationales potentia tantum commenſurabiles ; atq; propterea utrunq; rectā gulum D K, F I, Medium erit . 22. decimi. Similiter iam demonſtrabimus , ut in propoſ. 92. rectam T S, poſſe ſpatium A C. Dico T S, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam .



QVONIAM A H, G I, Media ſunt oſtenſa; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia , Media; Ac propterea & rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem habentia rationem , quam A G, G E, quas oſtendimus commenſurabiles eſſe, commenſurabilia ſunt ; Erunt & quadrata 10. decimi. L M, N O, commenſurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, cōmenſurabiles , ſaltem potentia . At uero quia A E, D E, potentia ſolum ſunt commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles , eſtq; ipſi A E, longitudine oſtenſa commēſurabilis G E; ipſi uero D E, cōmenſurabilis eſt longitudine F E; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & G E, F E, lōgitudine incōmenſurabiles; ac propterea G I, F I, eandem rationē habentia, quam G E, F E, hoc eſt, illis æqualia N O, L Q, incōmenſurabilia : 10. decimi. Quare T O, S O, eandē rationem habentes

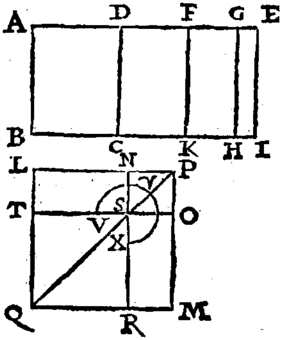
quam L O, N O, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Mediæ, & commenſurabiles. Mediæ ergo ſunt T O, S O, potentia ſolum commenſurabiles. Et quoniam continent L O Medium; (cum enim L O, æquale ſit ipſi F I, ut conſtat ex propoſ. 92. quod Medium eſſe
76. decimi. oſtendimus; erit & L O, Medium.) erit T S, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

94.
89.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta; Recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Minorem eſſe. Sit ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & A E, longitudine cõmenſurabilis Rationali A B, & eadem A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. Erunt ergo A G, G E, incõmenſurabiles longitudine,
19. decimi. quandoquidem A E, plus poteſt, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad A E, applicatum eſt rectangulum ſub A G, G E, æquale quartæ parti quadrati ex D E, deficienſq; figura quadrata. Et quia A E, Rationalis eſt, & Rationali A B, longitudine commenſurabilis; erit rectangulũ
20. decimi. A I, Rationale. Rurſus quia D E, Rationalis eſt, & Rationali;



nali A B, longitudine incommenſurabilis; erit D I, atque
adeo & eius dimidium F I, Medium. Amplius cum A G, 22. decimi.
G E, ſint longitudine incommenſurabiles; incommenſura-
bilia erunt A H, G I, eandem cum illis proportionem ha- 10. decimi.
bentia Iam uero ſimiliter demõſtrabimus, ut in propoſ. 92.
rectam T S, poſſe ſpatium A C. Dico T S, eſſe Minorem.

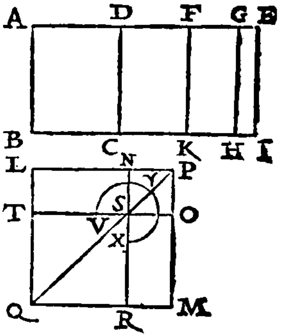
Qvoniam ex conſtructione, rectangulo A I, æ-
quale eſt compoſitũ ex quadratis L M, N O, rectarũ T O,
S O: Eſt autem illud oſtenſum Rationale; erit & compoſi
tum ex quadratis rectarum T O, S O, Rationale. Item
quia F I, Medium eſt oſtenſum; erit & L O, contentum
ſub T O, S O, illi æquale, Medium. Denique quoniam
A H, G I, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt &
quadrata L M, N O, illis æqualia, incommenſurabilia; Atq;
adeo rectæ T O, S O, potentia incommenſurabiles. Qua
propter cum T O, S O, potentia ſint incommenſurabiles,
ſitque compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: re-
ctangulum uero ſub ipſis, Medium; erit reliqua T S, Mi- 77. decimi.
nor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apo-
toma quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

95.
90.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

Contineatvr ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma quinta A D. Dico rectam lineam quæ ſpatium A C, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, A E, D E, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & D E, Rationali A B, commenſurabilis longitudine; Et deniq; A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, ut prius. Erunt ergo rurſus, ut in antecedenti propoſ. A G, G E, longitudine incommenſurabiles. Et quia A E, Rationalis longitudine incommenſurabilis eſt Rationali A B, ut in propoſ. 93. diximus; erit rectangulum A I, Medium. Item 22. decimi. quia D E, Rationalis eſt, & Rationali A B, longitudine commenſurabilis; erit D I, atq; idcirco & eius dimidiū F I, Rationale. Rurſus erunt, 20. decimi. ut in præcedenti propoſ. A H, G I, incommenſurabilia; poteritq; ut oſtēſum eſt in propoſ. 92. recta T S, ſpatium A C. Dico T S, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.



QVONIAM oſtenſum eſt A I, Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia demonſtrauimus F I, Rationale eſſe; erit & L O, rectangulum ſub T O, S O, contentum, cum illi ſit æquale, Rationale. Sunt autem & T O, S O, potentia incommenſurabiles, ut in propoſ. antecedenti eſt demonſtratum. Igitur cum T O, S O, potentia incommenſurabiles ſint, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum uero ſub ipſis, Rationale; erit reli-
78. decimi. qua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit.
Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

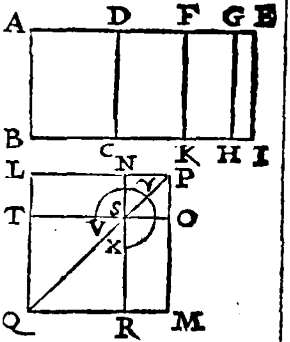
96.
91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.

Con

Contineatur ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſexta AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextę, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, biſariam in F, & reliqua conſtruantur, ut ſupra. Erunt ergo rurſus ut in propoſ. 95. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam



AE, quam DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; erit tam AI, quam DI, atq; adeo & huius dimidium FI, Medium. 22. *decimi.* Eruntq; ut in propoſ. 95. AH, GI, incommenſurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles; Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; 10. *decimi.* Atque adeo cum DI, FI, commenſurabilia ſint, erit FI, ipſi AI, incommenſurabile. 14. *decimi.* Iam uero demonſtrabimus, ut in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

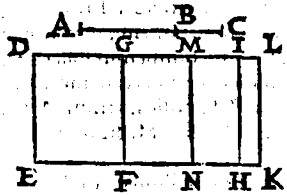
Quoniam AI, Medium oſtendimus; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium oſtenſum eſt; erit & LO, illi æquale, contentumq; ſub TO, S'O, Medium. Rurſus quoniam FI, ipſi AI, eſt incommenſurabile, ut oſtendimus; erit quoque LO, ſub TO, SO, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum TO, SO; propterea quod LO, ipſi FI, & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, ſit æquale. Denique TO, SO, potentia incom-

menſurabiles ſunt, ut in propoſ. 95. eſt demonſtratum.
Quamobrem cum T O, S O, ſint potentia incommenſura
biles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; nec-
non & rectangulum ſub ipſis Medium, & adhuc compoſi-
to ex quadratis ipſarum incommenſurabile; erit reliqua
79. *decimi.* T S, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur
ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta, &c.
Quod erat oſtendendum.

97. 92. THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinẽ facit Apotomen primam.

SIT Apotome prima A B, & ipſi congruens B C, ita
ut A C, B C, *ſint Rationales potentia ſolum commenſura*
biles: & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F,
45. *primi.* æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico
D G, eſſe Apotomen primam. Ad eandem D E, applice-
tur rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad I H,
aliud I K, æquale quadrato ex B C, ita ut totum D K,
æquale ſit compoſito ex quadratis rectarum A C, B C.
Et quoniam cõpoſitum ex quadratis rectarum A C,
B C, æquale eſt rectangulo
7. *ſecundi.* bis ſub A C, B C, una cum
quadrato ex A B; ſi auferãtur quadratum ex A B, & rectan-
gulum D F; relinquetur G K, rectangulo bis ſub A C,
B C, æquale; atque adeo diuiſa G L, bifariam in M, du-
ctaq; M N, ipſi D E, parallela, erit M K, æquale rectan-
gulo ſub A C, B C. Et quoniam A C, B C, Rationales
ſunt; erunt quoque quadrata ex A C, B C, Rationalia;
ideoq; commenſurabilia. Cum ergo & compoſitũ ex qua-
16. *decimi.* dratis rectarum A C, B C, utrique ipſorum ſit commenſu
rabile; erit & illud compoſitum, hoc eſt, illi æquale D K,
Ratio-



Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, erit
D L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. 21. *decimi.*
Rurſus quia A C, B C, Rationales ſunt potentia tantum
commenſurabiles; erit rectangulum ſub ipſis, atq; adeo &
eius duplum G K, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem
G F, erit G L, Rationalis ipſi G F, hoc eſt, ipſi D E, 23. *decimi.*
longitudine incommenſurabilis. Et quoniam D K, Rationale,
& G K, Medium, hoc eſt, Irrationale, incommenſurabilia
ſunt; erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem,
quam D K, longitudine incommenſurabiles. 10. *decimi.*
Quare cum & Rationales ſint demonſtratæ; erunt D L,
G L, Rationales potentia tantum commenſurabiles; Ac
propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam 74. *decimi.*
eſſe.

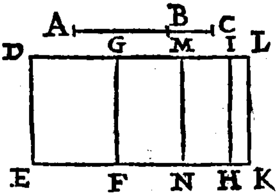
QVONIAM per lemma propoſ. 54. huius lib. rectangulum
ſub A C, B C, hoc eſt, M K, medium eſt proportionale
inter quadrata rectarum A C, B C, hoc eſt, inter D H,
I K; erunt D H, M K, I K, continue proportionalia; atq;
adeo & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem,
continue proportionales ſunt. Quare rectangulum
ſub D I, I L, æquale eſt quadrato ex M L, hoc eſt, 17. *ſexti.*
quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex
A C, B C, hoc eſt, illis æqualia, D H, I K, commenſurabilia
ſunt; erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes
proportionem, longitudine commenſurabiles. Itaque cum 10. *decimi.*
duæ rectæ D L, G L, inæquales ſint, & ad maiorem D L,
applicatum rectangulum ſub D I, I L, æquale quartæ parti
quadrati ex G L, minore, deficiensq; figura quadrata; atq;
ſit oſtenſa D I, ipſi I L, longitudine commenſurabilis; poterit
D L, plus quam G L, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis 18. *decimi.*
longitudine. Quare cum ſit oſtenſum D G, eſſe Apotomen,
& totam D L, plus poſſe, quam G L, congruentem,
quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atq;
eandem totam commenſurabilem eſſe longitudine Rationali
D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum
ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem
facit Apotomen primam. Quod oſtendendum
erat.

98.
93.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam.

SIT Mediæ Apotome prima A B, & ipſi congruens
B C, ita vt A C, B C, ſint Mediæ potentia ſolum commen-
ſurabiles, contineantq; Rationale: Et ad Rationalem D E,
45. primi. quadrato ex A B, æquale applicetur rectangulum D F, lati-
tudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen ſecundam eſ-
ſe. Conſtruantur eadem, quæ in antecedenti propoſ. ita
ut rurſus D H, I K, æqualia ſint quadratis ex A C, B C; & G K, æquale ei, quod ſub A C, B C, bis continetur; ac proinde M K, ei, quod ſub A C, B C, continetur ſemel. Quoniam igitur A C, B C, Mediæ ſunt potentia commenſurabiles; erunt & earũ quadrata, hoc eſt, illis æqualia, D H, I K, Media, & com-



16. decimi. menſurabilia; ac proinde & totum D K, utrique illorum
commenſurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propoſ.
24. huius lib. Cum ergo D K, applicetur ad Rationalẽ D E,
23. decimi. erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſura-
bilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, B C, Rationale
ponitur, erit quoque eius duplum G K, Rationale. Quod
cum applicetur ad Rationalem D E, erit G L, Rationalis
21. decimi. longitudine commenſurabilis ipſi D E. Quia uero D K, Me-
dium, id eſt, Irrationale, & G K, Rationale, incommen-
ſurabilia ſunt; erunt rectæ D L, G L, eandem habentes
10. decimi. cum illis rationem, longitudine incommenſurabiles. Cum
ergo Rationales ſint oſtenſæ, erunt D L, G L, Rationales
potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea reliqua
74. decimi. D G, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Nam ſimiliter,
ut in præcedenti propoſ. demonſtrabimus totam D L, plus
poſſe, quam congruentem G L, quadrato rectæ ſibi longi-
tudine

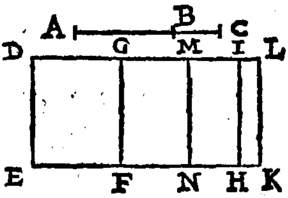
tudine commenſurabilis. Quare cum congruens G L, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome ſecunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam. Quod oſtendendum erat.

99.

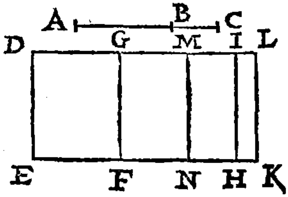
THEOR. 76. PROPOS. 100. 94.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome ſecunda A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, ſint Mediæ potentia tantum commenſurabiles, contineantq; Medium: Et ad Rationalem D E, applicetur D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. 45.primi. Dico D G, eſſe tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quę ſupra. Oſtendemus iam, ut in propoſ. pręcedenti, D K, Medium eſſe, atque adeo rectam DL, Rationalem ipſi DE, 23.decimi. longitudine incommenſurabilem. Et quia rectangulum ſub A C, B C, Medium eſt, atque ob id, & eius duplum G K; erit quoque G L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. 23.decimi. Quia uero A C, B C, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtq; ut A C, ad B C, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, BC; erit quadratum ex A C, incommenſurabile rectangulo ſub A C, B C. 10.decimi. Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C; 16.decimi. quod quadrata ex A C, BC, ex rectis A C, BC, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub A C, B C, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub



ſub A C, B C. Igitur ex ſcholio, propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc eſt, D K, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A C, B C, hoc eſt, ipſi G K; Atq; adeo rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, 10. decim. longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt D L, G L, potentia ſolum commenſurabiles; Ac proinde reliqua D G, 74. decimi. Apotome eſt. Dico eſſe & tertiam. Similiter enim, vt in propoſ. 98. demonſtrabimus D L, totam plus poſſe, quam G L, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum D L, G L, Rationali D E, longitudine ſit commenſurabilis, vt demonſtratum eſt; erit ex defin. D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat oſtendendum.



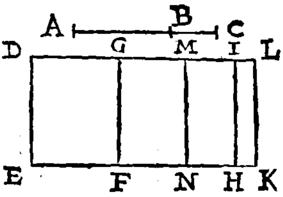
100.
95.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

Sit Minor A B, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommenſurabiles ſint, facienteſq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; rectangulum vero ſub A C, B C, Medium: Et ad Rationalem 45. decimi. D E, applicetur ſpatium D F, quadrato ex A B, æquale, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen eſſe quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc eſt, illi 21. decimi. æquale D K, Rationale eſt; erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Item quia rectangulum ſub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium eſt; 23. decimi. erit G L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis,

bilis. Rurſus quoniam D K, Rationale, & G K, Irrationale, nempe Medium, incommenſurabilia ſunt; erunt D L, G L, eandem cum ipſis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. 10. decimi. oſtenſæ ſunt autem Rationales. Rationales ergo ſunt D L, G L, potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome eſt. 74. decimi. Dico & quartam eſſe. Quoniam A C, B C, potentia ſunt incommenſurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc eſt, ipſis æqualia, D H, I K, incommenſurabilia; Ac propterea rectæ D I, I L, longitudine incommenſurabiles. 10. decimi Cum ergo rectangulum ſub D I, I L, æquale ſit quadrato ex M L, id eſt, quartæ parti quadrati ex G L, ut in propoſ. 98. eſt demonſtratum; poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; 19. decimi. quandoquidem ad D L, maiorem applicatum eſt rectangulum ſub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiens figura quadrata, diuidenſq; maiorem D L, in partes D I, I L, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum tota D I, plus poſſit, quam congruens G L, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſitq; eadem tota D L, Rationali D E, longitudine oſtenſa commenſurabilis; Erit ex defin. D G, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.



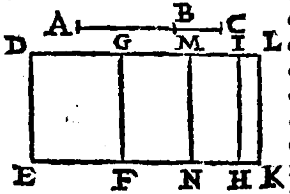
101.

THEOR. 78. PROPOS. 102.

96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

Sit recta cum Rationali Medium totum efficiẽs A B, & ipſi



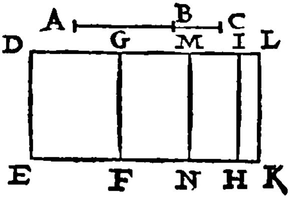
& ipſi congruens BC, ita ut A C, B C, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium; rectangulum uero ſub iiſdem A C, B C, Rationale: Et ad Rationalem D E, applicetur
45. *primi.* D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen quintã eſſe. Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, atq; adeo & illi æquale D K, Medium eſt; erit D L, Rationalis ip-
23. *decimi.* ſi D E, longitudine incommenſurabilis. Item quia rectangulum ſub A C, B C, atq; adeo & eius duplum G K,
21. *decimi.* Rationale eſt; erit G L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Et quia D K, Medium ſeu Irrationale, & G K, Rationale, incommenſurabilia ſunt; erunt D L,
10. *decimi.* G L, eandem cum ipſis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sunt autem & Rationales oſtenſæ. Rationales ergo ſunt D L, G L, potentia ſolum commenſura-
74. *decimi.* biles; Atque idcirco reliqua D G, Apotome eſt. Dico & quintam eſſe. Eodem enim modo, ut in antecedenti propoſ. demonſtrabimus D L, totam plus poſſe quam G L, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare cum congruens G L, demonſtrata ſit longitudine commenſurabilis Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonſtrandum erat.

102.
97.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

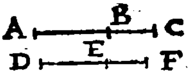
Sit recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipſi congruens B C, ita ut A C, B C, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum ſub iiſdem A C, B C, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarũ: Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato ex A B, ſpatiũ 45.*primi.* æquale D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe ſextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra. Quoniam tam compoſitum ex quadratis rectarũ A C, B C, hoc eſt, illi æquale D K, quã rectangulum ſub A C, B C, atq; adeo & eius duplũ G K, Medium eſt; Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipſi D E, 23.*decimi.* longitudine incommenſurabilis. Et quia rectangulum ſub A C, B C, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum A C, B C; Et ſunt rectangulum ſub A C, B C, & eius duplum G K, commenſurabilia; Erit & G K, eidem cõpoſito, hoc eſt, ipſi D K, incommenſurabile; proptereaq; re- 14.*decimi.* ctæ D L, G L eandẽ habentes rationẽ, quã D K, G K, longitu 10.*decimi.* dine incõmẽſurabiles. Oſtenſę ſunt aũt & Rationales. Rationales ergo ſunt D L, G L, potẽtia ſolũ cõmenſurabiles; Atq; idcirco reliqua D G, Apotome eſt. Dico eſſe & ſextã. Oſtẽde 74.*decimi.* mus .n. ſimiliter ut in propoſ. 101. totam D L, plus poſſe, quã congruentẽ G L, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Cũ igitur neutra ipſarum D L, G L, cõmenſurabilis ſit longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome ſexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat oſtendendum.



THEOR. 80. PROPOS. 104. 103. 98.

RECTA linea Apotomæ longitudine commenſurabilis; & ipſa Apotome eſt, atque ordine eadem.

Sit Apotome A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Sit autem ipſi A B, longitudine commenſurabilis D E. Dico & D E, Apotomen eſſe, atque ordine eandem ipſi A B. Fiat



12. ſexti. vt A B, ad D E, ita B C, ad E F. Erit ergo tota A C, ad 12. quinti. totam D F, ut A B, ad D E, uel ut B C, ad E F. Quoniam igitur A B, D E, longitudine ponuntur commenſurabiles; 10. decimi. Erunt quoq; A C, D F, necnon & B C, E F, commenſurabiles longitudine. Et quia A C, B C, ſunt Rationales, erunt etiam illis commenſurabiles D F, E F, Rationales. Rurſus quia eſt ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F: & ſunt A C, B C, potentiá ſolum commenſurabiles; erunt quoq; ex iis, quæ ad propoſ. 10. huius lib. demonſtrauimus, D F, E F, potentia tantum commenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint 74. decimi. oſtenſæ, reliqua D E, Apotome eſt. Dico & ipſi A B, ordine eandem eſſe. Poſſit enim primum A C, plus quam B C, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. 15. decimi. Quo poſito, poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Si igitur A C, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſitæ, vt A B, ſit 12. decimi. Apotome prima; erit quoque D F, longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, cum tam Rationalis expoſita, quam D F, eidem A C, ſit longitudine commenſurabilis. Igitur ex defin. erit quoq; D E, Apotome prima, nempe ordine eadem ipſi A B. Si uero B C, ſit longitudine commenſurabilis Rationali; erit eodem modo E F, Rationali longitudine commenſurabilis; Atq; adeo utraque A B, D E, ex defin. erit Apotome ſecunda. Si denique neutra ipſarum A C, B C, commenſurabilis ſit longitudine expoſitæ Ratio- 14. decimi. nali; erit quoque neutra ipſarum D F, E F, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Quare vtraque A B, D E, ex defin. erit Apotome tertia.

Poſſit iam A C, plus quam B C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quo poſito, poterit & 15. decimi. D F, plus quam E F, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Quare ut prius, oſtendemus D E, eſſe Apotomen

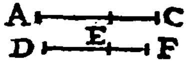
tomen quartam,quintam,uel ſextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commenſurabilis, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus ſcripſimus. Nimirum, ſi recta D F, commenſurabilis ſit ipſi A B, potentia tantum, eodē modo demonſtrari poſſe, (ſi loco vocis: longitudine commenſurabilis: vtamur voce: potentia tantum commenſurabilis:) & D E, Apotomen eſſe: At non poſſe inferri, illam eſſe ordine eādem ipſi A B. Non enim ſequitur, ſi tota A C, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſitæ, & D F, eidem eſſe cōmenſurabilem longitudine; propterea quod non vtraque, nempe Rationalis expoſita, & D F; eidem A C, longitudine commenſurabilis eſt; ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine; At vero D F, potentia tantum, ex hypotheſi. Immo vero, ſi A B, ſit Apotome prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo poteſt, vt D E, illi potentia tantum commenſurabilis ſit Apotome eadem ordine.

SIT enim A B, prima Apotome, ſecunda, quarta, vel quinta, eique congruens B C; & ſit D E, ipſi A B, potentia tantum commenſurabilis, quam quidem, ut in theoremate, oſtendemus Apotomen eſſe, eique congruentem E F; & partes A B, BC, ad partes DF, EF, eandem proportionem habere cum totis A C, D F. Dico nulla ratione D E, Apotomen eſſe ordine eandem ipſi AB. Nam ſi fieri poteſt, ſit utraque Apotome prima. Quo poſito, erit tam A C, tota, q̃ tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expoſitæ commenſurabilis longitudine, atque adeo & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt A C, et DF. 12.decimi. *Quare cum ſit vt A C, ad D F, ita A B, ad DE; erunt quoque AB, D E, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdũ.* 10.decimi. *ponitur enim D E, ipſi A B, potentia ſolum commenſurabilis, Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima eſt. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque ſecunda, vel quinta. Eſſet enim utraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine cōmenſurabilis Rationali expoſitæ, atque adeo & ipſæ inter ſe. Quocirca & A B, D E, inter ſe longitudine forent commenſurabiles. Quod non ponitur.*

Semper tamen verum eſt, ſi A B, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam D E, quæ ipſi A B, potentia ſolũ eſt commenſurabilis, eſſe quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit A C, plus quam B C, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis.



Cum ergo ſit ut A C, ad BC, ita DF, ad E F; poterit quoque DF, plus quã EF, 15 decimi. *quadrato recta lõgitudine ſibi cõmenſurabilis. Quare ex defin. erit D E, Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi A B, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita ut A C, plus poſſit, quã BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis; Erit quoque D E, Apotome quarta, uel quinta, vel ſexta, quamuis ordine non eadem ipſi A B: quia rurſus, cum ſit ut A C, ad B C, ita D F, ad E F, poterit quoque D F, plus quam* 15. decimi. *E F, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit A B, Apotome quarta, uel quinta, uel ſexta.*

In ſequentibus autem quinque propoſitionibus neceſſario erit D E, eadem ordine ipſi A B, licet potentia ſolum illi fuerit commenſurabilis.

104.
99.

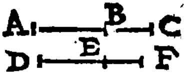
THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine eadem.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruẽs B C, ita ut A C, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles: Sit autem ipſi AB, commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, Apotomen eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. Fiat ut A B, ad *12. ſexti.* DE, ita BC, ad EF. Erit ergo tota AC, ad totam DF, ut AB, *12. quinti* ad DE, & ut BC, ad EF. Quoniam igitur A B, DE, cõmenſurabiles ponuntur uel longitudine & potentia, uel potentia *10. decimi.* tantum; erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commenſurabiles. Et quia A C, B C, Mediæ ſunt, erunt

quoque

quoque DF, EF, illis commenſurabiles, Mediæ. Rurſus quia eſt ut AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando ut AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia ſolum commenſurabiles, erūt etiam, ex ſcholio propos. 10. huius lib. DF, EF, ſolum potentia commenſurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ ſint oſtenſæ; erit reliqua DE, Medię Apotome. Dico & eandē eſſe ordine ipſi AB. Quoniā eſt ut AC, ad BC, ita DF, ad EF; & ut AC, ad BC, ita eſt quadratū ex AC, ad rectangulū ſub AC, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19 huius lib. & ut DF, ad EF, ita quadratū ex DF, ad rectangulū ſub DF, EF; Erit quoque ut quadratū ex AC, ad rectangulū ſub AC, BC, ita quadratū ex DF, ad rectangulū ſub DF, EF; Et permutando ut quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, BC, ad rectangulum ſub DF, EF. Igitur cum quadratū ex AC, commenſurabile ſit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, oſtenſę ſint commenſurabiles; erit & rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, cōmenſurabile. Quare ſi rectangulū ſub AC, BC, ſit Rationale, ita ut AB, ſit Medię Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub DF, EF, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si uero rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita ut AB, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoque rectangulū ſub DF, EF, ei commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Ac propterea & DE, Mediæ Apotome ſecunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.



24. decimi.

75. vel 76. decimi.

10. decimi.

75. decimi.

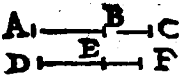
76. decimi.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

105. 116.
100.

RECTA linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.

SIT Minor AB, ipſiq; congruens BC, ita ut AC, BC, potentia ſint incōmenſurabiles, facientesq; cōpoſitum quidē ex quadratis rectarū AC, BC, Rationale; rectangulū uero ſub iiſdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipſi AB, commenſu-menſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, Minorem eſſe. Fiant eadem, quæ ſupra, ita ut rurſus A B,BC, ad D E,E F, eandem habeant rationem quam A C, ad DF. Erunt ergo rurſus, ut in antecedenti propos. D F, E F, ipſis A C,B C, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Et quoniam eſt ut A C,ad D F, ita BC, ad E F; & permutando ut A C,ad B C, ita D F, ad EF; erit ut quadratum ex A C, ad



22. *ſexti.* quadratum ex BC, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F; Et componendo ut compoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC, ad quadratum ex B C, ita compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, ad quadratum ex E F; Et permutando ut compoſitum ex quadratis rectarum A C,BC, ad compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex E F. Eſt autem quadratum ex B C, commenſurabile quadrato ex E F; quod rectas B C, E F, oſtendimus commenſurabiles eſſe. Igitur & compoſitũ

10. *decimi.* ex quadratis rectarum AC,B C, compoſito ex quadratis rectarum D F, E F, commenſurabile eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A C, BC, ex hypotheſi, Rationale. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, ex 9. defin. Rationale eſt. Rurſus quoniam ut in antecedenti propos. demonſtrabimus rectangulum ſub A C, B C, rectangulo ſub D F, E F, eſſe commenſurabile; Ponitur autem rectangulum ſub A C, BC, Medium; Erit, quoque rectangulum ſub D F, E F, ex coroll. propos 24. huius lib. Medium. Et quia eſt ut A C, ad B C, ita D F, ad EF; ſuntque A C,BC, potentia incommenſurabiles; erunt etiã

10. *decimi.* D F,EF, potentia incommenſurabiles. Quam ob rem cum D F,E F, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum D F, E F, Rationale, rectangulum uero ſub iiſdem

77. *decimi.* DF,E F, Medium; erit D E, Minor. Recta ergo linea Minori commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

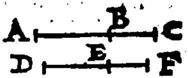
THEOR.

THEOR. 83. PROPOS. 107.

106. 117.
101.

RECTA linea commenſurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipſa cum Rationali Medium totum efficiens eſt.

SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipſi congruens BC, ita ut AC, BC, ſint potentia incommēſurabiles, facienteſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum ſub AC, BC, Rationale; Sit autem DE, ipſi AB, commenſurabilis quocunque modo. Dico & DE, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus ut in antecedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus ut in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, ut in præcedenti propoſ. eſt probatum, rectæ DF, EF, potentia incommenſurabiles. Igitur cum DF, EF, incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum uero ſub ipſis, Rationale; erit DE, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca recta linea commenſurabilis ei, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat.



78. decimi.

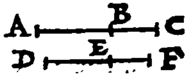
THEOR. 84. PROPOS. 108.

107.
102.

RECTA linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; &

ipſa cum Medio Medium totū efficiens eſt.

SIT recta A B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipſi congruens BC, ita ut A C, B C, ſint potentia incommenſurabiles, efficientesque compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium quoque, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autem D E, ipſi A B, quomodolibet commenſurabilis. Dico & D E, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, probabimus ſimiliter, ut in propoſ. 106 compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum D E, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24 huius lib. Medium. Rurſus ut in propoſ. 105. oſtendemus rectangulum ſub A C, B C, commenſurabile eſſe rectangulo ſub D F, E F. Cum ergo illud ſit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item ut in propoſ. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommenſurabiles: Poſtremo quia compoſito ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, ut dictum eſt; & rectangulo ſub A C, B C, commenſurabile eſt rectangulum ſub D F, E F: Sunt autem compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum ſub A C, B C, per hypotheſin, incommenſurabilia; Erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, & rectangulum ſub D F, E F, incommenſurabilia. Quocirca cum D F, E F, potentia ſint inmenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum ſub ipſis, Medium; incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis; erit D E, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat oſtendendum.

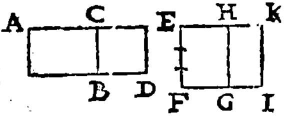


79. decimi.

THEOR. 85. PROPOS. 109. 108. 103.

MEDIO a Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum ſpatium poteſt, una ex duabus Irrationalibus fit, uel Apotome, uel Minor.

DETRAHATUR a Rationali A D, Medium C D.
Dico rectam, quæ poteſt ſpatium reliquum A B, eſſe uel
Apotomen, uel Minorem. Exponatur Rationalis E F, ad
quā applicetur rectangulum E G, æquale ipſi A B, & ad G H, 45 primi.
aliud H I, æquale ipſi C D, ita ut totum E I, toti A D, ſit
æquale. Quoniam igitur
E I, æquale Rationali A D,
Rationale eſt; erit E K, Ra-
tionalis, Rationali E F, longi- 21. decimi.
tudine commenſurabilis.



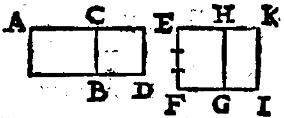
Ruſſus quia H I, Medio CD, æquale Medium eſt; erit HK,
Rationalis, ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Itaque 23 decimi.
cum E K, quidem ſit longitudine cōmenſurabilis ipſi E F; at
H K, eidem E F, longitudine incōmenſurabilis; erunt E K,
H K, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. 13. decimi.
Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles:
proptereaque reliqua E H, Apotome eſt, & ei congruens 74. decimi.
H K. Aut igitur E K, plus poteſt quam H K, quadrato
rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſu-
rabilis. Si plus pōt E K, q̃ H K, quadrato rectæ lineæ cōmen-
ſurabilis ſibi longitudine, cum tota E K, oſtenſa quoque ſit
longitudine cōmenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H,
Apotome prima. Quare recta potēs ſpatiū E G, cōtentū ſub
Rationali E F, & Apotoma prima E H, hoc eſt, ſpatiū A B,
ſibi æquale, Apotome eſt. Si uero E K, plus poteſt, quā HK, 92. decimi.
quadrato rectę ſibi lōgitudine incōmēſurabilis, cū tota E K,
ſit oſtenſa cōmenſurabilis longitudine Rationali E F; erit ex
defin. E H, Apotome quarta. Quapropter recta potēs ſpa-
tiū E G, cōtentū ſub Rationali E F, & Apotoma quarta E H,
hoc eſt, ſpatiū A B, illi æquale, Minor eſt. Medio ergo a Ra- 95. quinti.
tionali detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

109.
104.

THEOR. 86. PROPOS. 110.

RATIONALI a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apotome prima, uel cum Rationale Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio A D, Rationale C D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe uel Mediæ
Apotomen primam, uel eam, quæ cum Rationali Medium
totum efficit. Eadem conſtruantur, quæ ſupra. Et quia
E I, Medio A D, æquale,
Medium eſt; erit E K, Rationalis
23. decimi. ipſi E F, longitudine
incommenſurabilis. Itē
quia H I, æquale Rationa-
21. decimi. li C D, Rationale eſt; erit H K, Rationalis ipſi E F, longitudine
commenſurabilis. Itaque cum H K, quidem ipſi
E F, ſit commenſurabilis longitudine; at E K, eidem E F,
longitudine incommenſurabilis; Erunt H K, E K, longitudine
13. decimi. incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo
ſunt potentia ſolum commenſurabiles; Ac proinde reliqua
74. decimi. E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K,
plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine cō
menſurabilis, aut incommenſurabilis. Si E K, plus poteſt,
quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,
cum congruens H K, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis
Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome ſecunda.
Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali
E F, & Apotoma ſecunda E H, hoc eſt, ſpatiū A B,
93. decimi. illi æquale, Mediæ eſt Apotome prima. Si uero E K, plus
poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis,
cum congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis
longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta,
ex defin. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub
Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc eſt, ſpatium
96. decimi. illi æquale A B, eſt ea, quæ cum Rationali Medium totum
efficit.

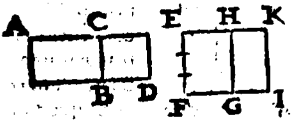


efficit. Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c. 110.
Quod oſtendendum erat. 105.

THEOR. 87. PROPOS. 111.

MEDIO a Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti; Reliquæ duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apotome ſecunda, uel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio A D, Medium C D, quod
incommenſurabile ſit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum
ſpatium AB, poteſt, eſſe uel Mediæ Apotomen ſecundam,
uel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis
enim iiſdem, quæ
ſupra; quoniam E I, H I,
Medijs A D, C D, æqualia,
Media ſunt; erunt E K,
H K, Rationales ipſi E F,
longitudine incommenſurabiles. Et quia A D, C D, hoc eſt, 23. decimi.
E I, H I, ponuntur incommenſurabilia; erunt E K, H K,
eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. 10. decimi.
Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt
potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea reliqua
E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, 74. decimi.
plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine
commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt
E K, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,
cum neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F,
longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. E H,
Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium E G, contentum
ſub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc eſt,
ſpatium A B, illi æquale, Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si 94. decimi.
uero E K, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine
incõmenſurabilis, cum neutra ipſarum E K, H K,



Rationa

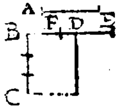
Rationali E F, ſit longitudine commenſurabilis, ut demonſtrauimus; erit ex defin. E H, Apotome ſexta. Quam ob rem recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſexta E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, eſt ea, quæ cum Medio Medium totũ efficit 97. decimi. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

111. 106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit Apotome A, quæcunque. Dico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt, A, aliqua ex binis nominibus. Expoſita Rationali B C, applicetur ad B C, rectangulum C D, æquale quadrato ex A. 45. primi



Quoniam igitur A, Apotome eſt; erit latitudo B D, Apotome prima. 98. decimi. Sit ergo ei congruens D E. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ, B E, D E, Rationales potentia tantum commenſurabiles, poteritque B E, plus quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & ipſa B E, Rationali B C, commenſurabilis erit longitudine. Rurſus quia A, ponitur eſſe quoque ex binis nominibus; erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus prima. 61. decimi. Sit ergo maius ipſius nomen B F. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima eſt, B F, F D, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, poteritque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine; & ipſa B F, Rationali BC, longitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, longitudine ſit commenſurabilis eidem B C; erunt quoque B E, B F, inter ſe commenſurabiles longitudine. 12. decimi. Igitur tota B E, exiſtente longitudine commenſurabili parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commenſurabilis, ex coroll. propoſ. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, Rationalis ſit, & F E, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum B E, F E, longitudine commenſurabilium,

bilium, ipſa B E, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi D E; (quod B E, D E, Rationales ſint potentia ſolum cõmenſurabiles) erit quoque altera F E, eidem D E, incommenſurabilis longitudine. 14. decimi. Sed & utraque F E, D E, Rationalis eſt oſtenſa. Rationales ergo ſunt F E, D E, potentiã ſolum commenſurabiles. Quare reliqua F D, Apotome 74. decimi. eſt; Atque adeo Irrationalis. Oſtenſa eſt autem & Rationalis. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, Apotome exiſtens eadem eſt, quæ ex binis nominibus. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipſam conſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eſſe eaſdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine 23. decimi. incommenſurabilem.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen primam. 98. decimi.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primę ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen ſecundam. 99. decimi.

QVADRATVM uero Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam. 100. decimi.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quartam. 101. decimi.

AT uero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen 102. decimi. quintam.

QVADRATVM deniq; eius, quę cũ Medio Mediũ totũ efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen ſextam. 103. decimi.

ITAQVE cum hę latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter ſe; a latitudine quidẽ Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ uero Irrationales; inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem Apotomæ: Manifeſtum eſt, Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam conſequentes, & a Media, & inter ſe ſe differre.

QVONIAM uero in hoc theoremate demonſtrauimus Apotomen eandem nõ eſſe, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam conſequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primã, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, & ſextã: At uero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationaliũ, quæ ipſam ſequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, ſecundã, tertiã, quartã, quintam, ac ſextã; liquido conſtat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium,

quæ

quæ poſt ipſam, eaſdem non eſſe latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum poſt ipſam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipſam ſequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ poſt ipſam: Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam expoſita, tredecim numero eſſe lineas Irrationales inter ſe ſe differentes, de quibus hactenus diſputauimus; *Hæ ſcilicet.*

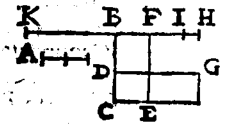
1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.
4. Ex binis Medijs ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR.

THEOR. 89. PROPOS. 113. 112.

0.

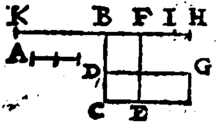
QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.



SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius
maius nomen B D; & ad B C, applicetur rectangulũ B E,
æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, 45. primi
eſſe Apotomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi
congruens, commenſurabilia ſunt
nominibus B D, D C, ipſius B C,
ex binis nominibus; & in eadem
proportione; & adhuc Apotomẽ
B F, eſſe ordine eandem ipſi B C,
ex binis nominibus. Applicetur
enim rurſus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; at- 45. primi
que adeo rectangulo B E, latitudinem faciens D G; ſitque
ipſi D G, æqualis B H Et quoniam æqualia ſunt B E, C G;
erit ut B C, ad D C, ita D G, hoc eſt, ſibi æqualis B H, ad B F. 14. uel 16.
Et diuidendo ut B D, ad D C, ita H F, ad F B: Eſt autem ſexti.
B D, maior, quam D C. Igitur & H F, maior eſt, quam F B.
Ponatur F I, ipſi F B, æqualis; & fiat ut H I, ad I F, ita F B, 12. ſexti.
ad B K. Erit ergo componendo ut H F, ad I F, hoc eſt, ad
ſibi æqualem B F, ita F K, ad B K. oſtenſum eſt autem eſſe
ut H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque ut B D,
ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cum ſint nomina
ipſius B C, ex binis nominibus) Rationales ſunt potentia
tantum commenſurabiles. Igitur & F K, B K, potentia 10. decimi.
ſolum commenſurabiles ſunt.

RVRSVS

Rvrſvs quia eſt ut H F, ad B F, ita F K, ad B K; erũt
quoque H F, F K, antecedentes ſimul, nempe tota H K, ad
12. quinti. H F, & B K, conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam F K, ut
F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis eſt inter
H K, B K. Quare ut H K, prima
ad B K, tertiam, ita erit, per
coroll. propoſ. 20. lib. 6. quadratũ
ex H K, prima ad quadratum ex
F K, ſecunda. Quia uero C G, cũ
Rationale ſit, (eſt enim quadrato
Rationalis A, æquale) ad Rationalẽ
21. decimi. D C, applicatum facit D G, latitudinem Rationalẽ,
ipſi D C, longitudine cõmenſurabilem; Erit quoque H B, ipſi
D G, æqualis, Rationalis & longitudine cõmenſurabilis ipſi
D C. Et quoniã oſtenſum eſt, eſſe ut B D, ad D C, ita F K, ad
B K: Vt autẽ F K, ad B K, ita H K, ad F K; erit quoque ut
B D, ad D C, ita H K, ad F K. Igitur ut quadratũ ex B D, ad
22. ſexti. quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum
ex F K. At quadratum ex B D, cõmenſurabile eſt quadrato
ex D C, (quod rectæ B D, D C, ſint Rationales potentia cõmenſurabiles,
cum ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus.)
10. decimi. Commenſurabile igitur erit quoque quadratum
ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit ut quadratum ex
H K, ad quadratũ ex F K, ita recta H K, ad B K. Igitur longitudine
10. decimi. cõmenſurabilis eſt H K, ipſi B K; atque adeo & reliquæ
B H, ex coroll. propos. 16. huius lib. Oſtenſa eſt autem
B H, Rationalis; Igitur & H K, illi commenſurabilis, Rationalis
eſt; ac propterea & B K, ipſi H K, commenſurabilis,
Rationalis exiſtit. Cum ergo oſtenſa ſit F K, ipſi B K, potentia
ſolum commenſurabilis; erit quoque F K, Rationalis.
Quare cum F K, B K, Rationales ſint, & potentia tantum
74. decimi. oſtenſæ commenſurabiles; erit reliqua B F, Apotome, & ei
congruens B K. Quod eſt primum.



Qvoniam uero oſtenſum eſt eſſe rectam H K, totam
parti B K, longitudine commenſurabilem; erunt propterea
16. decimi. & B K, B H, longitudine inter ſe commenſurabiles.
Cum ergo B H, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis ipſi
D C; erit quoque B K, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. eidem
D C, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia demonſtratum

ſtratum eſt eſſe ut B D, ad DC, ita F K, ad B K; & permutando ut B D, ad F K, ita D C, ad B K: Sunt autem modo D C, B K, oſtenſæ longitudine commenſurabiles; Erunt quoque B D, F K, commenſurabiles longitudine. Itaque *10. decimi.* cum F K, ipſi B D, & B K, ipſi D C, longitudine ſit commenſurabilis; erunt ipſius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipſius BC, ex binis nominibus, longitudine commenſurabilia. Quod eſt ſecundum.

ITEM quia demonſtrauimus eſſe ut B D, ad D C, ita F K, ad B K; erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, in eadem ratione cum B D, D C, nominibus ipſius BC, quæ eſt ex binis nominibus. Quod eſt tertium.

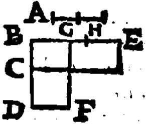
POSTREMO uel B D, plus poteſt, quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, uel incommenſurabilis. Si plus poteſt B D, quam D C, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum ſit ut B D, ad D C, ita F K, ad B K; poterit quoque F K, plus quam B K, quadrato *15. decimi.* rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: Et ſi B D, plus poteſt quam D C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit & F K plus quam B K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et ſi quidem B D, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commenſurabilis; erit & F K, quæ longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis ipſi B D, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Si uero D C, ſit Rationali commenſurabilis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si denique neutra ipſarum B D, D C, ſit Rationali longitudine commenſurabilis; erit quoque neutra ipſarum F K, B K, commenſurabilis *14. decimi.* longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome B F, ipſi B C, ex binis nominibus, ut conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertijs. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandū erat.

113.
0.

THEOR. 90. PROPOS. 114.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cōmenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus ſit, eundem habet ordinem, quem ipſa Apotome.

SIT Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD; 45. *primi.* & ad B C, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B E. Dico B E, eſſe ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus B D, C D, Apotomæ BC, & in eadem proportione; & adhuc ipſam B E, ex binis nominibus, eſſe ipſi BC, Apotomæ ordine eandem. 45. *primi.* Applicetur enim rurſus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale eidem quadrato ex A, hoc eſt, ipſi C E, latitudinem faciens B G. Et quoniam B F, C E, æqualia ſunt; erit ut 14. *vel* 16. *ſexti.* B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuerſionem rationis, ut B E, ad G E, ita B D, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, ſecundum proportionem B E, ad G E, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. lib. 6. conſcripſimus; ut ſit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G B. Quia igitur eſt ut B E, tota ad G E, totam, ita E H, ex BE, ablata ad H G, ex G E, ablatam; erit quoque B H, reliqua ipſius B E ad H E, reliquam ipſius G E, ut tota B E, ad totam G E: Erat autem ut B E, ad G E, ita E H, ad H G. Erit igitur quoque ut BH, ad HE, ita E H, ad G H; atque adeo H E, media proportionalis eſt inter B H, G H. Quare erit ut B H, prima ad G H, tertiã, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex H E, ſecunda, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. Quia uero fuit ut B D, ad C D, ita B E, ad G E, hoc eſt, B H, ad HE: & ſunt BD, CD, cum ſint nomina Apotomæ B C, Rationales potentia tantū



com-

commenſurabiles; Erunt quoque B H, H E, potentia ſolum 10. decimi.
commenſurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E,
commenſurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandem habentes
rationem cum quadratis ex B H, H E, ut demonſtrauimus,
longitudine ſunt commenſurabiles; Ac propterea tota 10. decimi
B H, longitudine commenſurabilis exiſtens parti G H,
cõmenſurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G,
ex coroll. propoſ. 16. huius lib. At uero cum B D, Rationalis
ſit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangulum
B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale;
erit latitudo B G, Rationalis commenſurabilis longitudine 21. decimi.
ipſi B D. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. & B H,
eidem B D, Rationali commenſurabilis eſt longitudine, atq;
adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem B H, B G, longitudine
commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero B H, H E,
oſtenſæ ſunt commenſurabiles potentia tantum, & B H,
Rationalis; erit quoque H E, illi commenſurabilis, Rationalis.
Rationales ergo ſunt B H, H E, potentia ſolum cõmenſurabiles;
Ac propterea B E, ex binis nominibus eſt. 37. decimi.
Quod eſt primum.

QVONIAM vero oſtendimus eſſe B H, ad H E, ut B D,
ad C D; atque adeo permutando B H, ad B D, ut H E, ad
C D; Oſtenſa eſt autem B H, ipſi B D, longitudine commenſurabilis;
erit quoque H E, ipſi C D, commenſurabilis 10. decimi.
longitudine. Quare B H, H E, nomina ipſius B E, ex
binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus
B D, C D, Apotomæ B C. Quod eſt ſecundum.

IMMO & in eadem proportione, cum demonſtratum
ſit eſſe B H, ad H E, ut B D, ad C D. Quod eſt tertium.

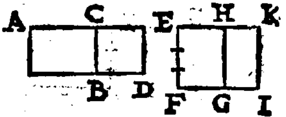
POSTREMO uel B D, plus poteſt quam C D, quadrato
rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, uel incommenſurabilis.
Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine
commenſurabilis; poterit quoq; B H, plus quam H E,
quadrato rectę ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi B D, 15. decimi
plus poteſt, quam C D, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis;
poterit etiam B H, plus quam H E, quadrato
rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidẽ
B D, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis;
erit quoque B H, commenſurabilis exiſtens longitudine ip-

109.
104.

THEOR. 86. PROPOS. 110.

RATIONALI a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apotome prima, uel cum Rationale Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio A D, Rationale C D. Dico
rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe uel Medię
Apotomen primam, uel eam, quæ cum Rationali Medium
totum efficit. Eadem conſtruantur, quæ ſupra. Et quia
E I, Medio A D, æquale,
Medium eſt; erit E K, Ra-
23. decimi. tionalis ipſi E F, longitudine
incommenſurabilis. Itē
quia H I, æquale Rationa-
21. decimi. li C D, Rationale eſt; erit H K, Rationalis ipſi E F, longitudine
commenſurabilis. Itaque cum H K, quidem ipſi
E F, ſit commenſurabilis longitudine; at E K, eidem E F,
longitudine incommenſurabilis; Erunt H K, E K, longitudine
13. decimi. incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo
ſunt potentia ſolum commenſurabiles; Ac proinde reliqua
74. decimi. E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K,
plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine cōmenſurabilis,
aut incommenſurabilis. Si E K, plus poteſt,
quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,
cum congruens H K, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis
Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome ſecunda.
Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali
E F, & Apotoma ſecunda E H, hoc eſt, ſpatiū A B,
93. decimi. illi æquale, Mediæ eſt Apotome prima. Si uero E K, plus
poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis,
cum congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis
longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta,
ex defin. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub
Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc eſt, ſpatium
96. decimi. illi æquale A B, eſt ea, quæ cum Rationali Medium totum
efficit.

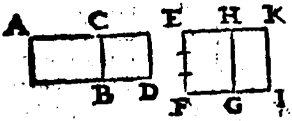


efficit. Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c. 110.
Quod oſtendendum erat. 105.

THEOR. 87. PROPOS. 111.

MEDIO a Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti; Reliquæ duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apotome ſecunda, uel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio A D, Medium C D, quod
incommenſurabile ſit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum
ſpatium A B, poteſt, eſſe uel Mediæ Apotomen ſecundam,
uel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit, Conſtructis
enim iiſdem, quæ
ſupra; quoniam E I, H I,
Medijs A D, C D, æqualia,
Media ſunt; erunt E K,
H K, Rationales ipſi E F,
longitudine incommenſurabiles. Et quia A D, C D, hoc eſt, 23. decimi.
E I, H I, ponuntur incommenſurabilia; erunt E K, H K,
eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. 10. decimi.
Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt
potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea reliqua
E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, 74. decimi.
plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine
commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt
E K, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,
cum neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F,
longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. E H,
Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium E G, contentum
ſub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc eſt,
ſpatium A B, illi æquale, Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si 94. decimi.
uero E K, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine
incõmenſurabilis, cum neutra ipſarum E K, H K,
Rationa



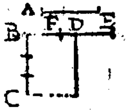
Rationali E F, ſit longitudine commenſurabilis, ut demonſtrauimus; erit ex defin. E H, Apotome ſexta. Quam ob rem recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſexta E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, 97. decimi. eſt ea, quæ cum Medio Medium totũ efficit Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

111.
106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit Apotome A, quæcunque. Dico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt, A, aliqua ex binis nominibus. Expoſita Rationali B C, applicetur ad B C, rectangulum C D, æquale quadrato ex A. 45. primi



98. decimi. Quoniam igitur A, Apotome eſt; erit latitudo B D, Apotome prima. Sit ergo ei congruens D E. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ, B E, D E, Rationales potentia tantum commenſurabiles, poteritque B E, plus quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & ipſa B E, Rationali B C, commenſurabilis erit longitudine. Rurſus quia A, ponitur eſſe quoque ex 61. decimi. binis nominibus; erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipſius nomen B F. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima eſt, B F, F D, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, poteritque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine; & ipſa B F, Rationali BC, longitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, longitudine ſit commenſurabilis eidem B C; erunt quoque 12. decimi. B E, B F, inter ſe commenſurabiles longitudine. Igitur tota B E, exiſtente longitudine commenſurabili parti B F, erit & eadem BE, reliquæ parti F E, longitudine commenſurabilis, ex coroll. propoſ. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, Rationalis ſit, & F E, Rationalis erit. Quoniam uero duarum linearum B E, F E, longitudine commenſurabilium,

bilium, ipſa B E, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi
D E; (quod B E, D E, Rationales ſint potentia ſolum cōmenſurabiles)
erit quoque altera F E, eidem D E, incommenſurabilis 14. decimi
longitudine. Sed & utraque F E, D E, Rationalis
eſt oſtenſa. Rationales ergo ſunt F E, D E, potentiā
ſolum commenſurabiles. Quare reliqua F D, Apotome 74. decimi
eſt; Atque adeo Irrationalis. Oſtenſa eſt autem & Rationalis. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, Apotome exiſtens eadem eſt, quæ ex binis nominibus. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipſam conſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eſſe eaſdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum,
latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine 23. decimi
incommenſurabilem.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem
efficit Apotomen primam. 98. decimi

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum,
latitudinem efficit Apotomen ſecundam. 99. decimi

QVADRATVM uero Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem
applicatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam. 100. decimi

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum,
latitudinem efficit Apotomen quartam. 101. decimi

AT uero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum
efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen 102. decimi
quintam.

QVADRATVM deniq; eius, quę cũ Medio Mediũ totũ efficit,
ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen ſextam. 103. decimi

ITAQVE cum hę latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter ſe; a latitudine quidē Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ uero Irrationales; inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem Apotomæ: Manifeſtum eſt, Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam conſequentes, & a Media, & inter ſe ſe differre.

QVONIAM uero in hoc theoremate demonſtrauimus Apotomen eandem nō eſſe, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam conſequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primā, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, & ſextā: At uero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationaliũ, quæ ipſam ſequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, ſecundā, tertiā, quartā, quintam, ac ſextā; liquido conſtat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ

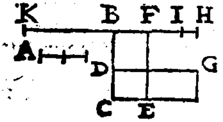
quæ poſt ipſam, eaſdem non eſſe latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum poſt ipſam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipſam ſequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ poſt ipſam: Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam expoſita, tredecim numero eſſe lineas Irrationales inter ſe ſe differentes, de quibus hactenus diſputauimus; Hæ ſcilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.
4. Ex binis Medijs ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

112.
⊙.

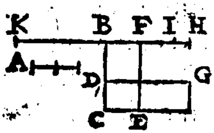
QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.



Sit Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius
maius nomen B D; & ad B C, applicetur rectangulũ B E,
æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, 45. primi
eſſe Apotomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi
congruens, commenſurabilia ſunt
nominibus B D, D C, ipſius BC,
ex binis nominibus; & in eadem
proportione; & adhuc Apotomẽ
B F, eſſe ordine eandem ipſi B C,
ex binis nominibus. Applicetur
enim rurſus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; at- 45. primi
que adeo rectangulo B E, latitudinem faciens D G; ſitque
ipſi D G, æqualis B H Et quoniam æqualia ſunt B E, C G;
erit ut BC, ad DC, ita D G, hoc eſt, ſibi æqualis B H, ad BF. 14. vel 16. ſexti.
Et diuidendo ut B D, ad D C, ita H F, ad F B: Eſt autem
B D, maior, quam D C. Igitur & H F, maior eſt, quam FB.
Ponatur F I, ipſi F B, æqualis; & fiat ut H I, ad I F, ita FB, 12. ſexti.
ad B K. Erit ergo componendo ut H F, ad I F, hoc eſt, ad
ſibi æqualem B F, ita F K, ad B K. oſtenſum eſt autem eſſe
ut H F, ad B F, ita B D, ad DC. Igitur erit quoque ut B D,
ad D C, ita F K, ad B K. At BD, D C, (cum ſint nomina
ipſius B C, ex binis nominibus) Rationales ſunt potentia
tantum commenſurabiles. Igitur & F K, B K, potentia 10. decimi.
ſolum commenſurabiles ſunt.

RVRSVS

RVRSVS quia eſt ut H F,ad BF,ita F K, ad B K;erũt
quoque H F, F K, antecedentes ſimul, nempe tota H K,ad
12. quinti B F,& B K,conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam F K, ut
F K,ad B K. Ac propterea F K,media proportionalis eſt inter



H K,B K. Quare ut H K,prima
ad BK, tertiam, ita erit, per
coroll.propoſ.20.lib.6. quadratũ
ex H K,prima ad quadratum ex
FK, ſecunda. Quia uero CG,cũ
Rationale ſit, (eſt enim quadrato
Rationalis A, æquale) ad Rationalẽ
21. decimi. D C, applicatum facit D G, latitudinem Rationalẽ,
ipſi D C,longitudine cõmenſurabilem; Erit quoque HB,ipſi
D G, æqualis,Rationalis & longitudine cõmenſurabilis ipſi
D C. Et quoniã oſtenſum eſt,eſſe ut BD,ad DC,ita FK,ad
B K: Vt autẽ F K, ad B K, ita H K,ad F K; erit quoque ut
B D,ad D C, ita HK,ad F K. Igitur ut quadratũ ex BD,ad
22. ſexti. quadratum ex D C,ita quadratum ex H K, ad quadratum
ex F K. At quadratum ex BD, cõmenſurabile eſt quadrato
ex D C, (quod rectæ B D,DC,ſint Rationales potentia cõmenſurabiles,
cum ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus.)
10. decimi. Commenſurabile igitur erit quoque quadratum
ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit ut quadratum ex
H K,ad quadratũ ex F K,ita recta H K,ad B K. Igitur longitudine
10. decimi. cõmenſurabilis eſt H K,ipſi BK; atque adeo & reliquæ
B H,ex coroll.propos.16.huius lib. Oſtenſa eſt autem
B H,Rationalis; Igitur & H K,illi commenſurabilis, Rationalis
eſt; ac propterea & B K, ipſi H K, commenſurabilis,
Rationalis exiſtit. Cum ergo oſtenſa ſit F K,ipſi BK,potentia
ſolum commenſurabilis; erit quoque FK, Rationalis.
Quare cum F K, B K, Rationales ſint, & potentia tantum
74. decimi. oſtenſæ commenſurabiles; erit reliqua B F, Apotome, & ei
congruens B K. Quod eſt primum.

QVONIAM uero oſtenſum eſt eſſe rectam H K, totam
parti B K,longitudine commenſurabilem; erunt propterea
16. decimi. & BK, B H, longitudine inter ſe commenſurabiles.
Cum ergo B H,oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis ipſi
DC; erit quoque B K,ex ſcholio propoſ.12.huius lib.eidem
D C, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia demonſtratum

ſtratum eſt eſſe ut B D, ad D C, ita F K, ad B K; & permutando ut B D, ad F K, ita D C, ad B K: Sunt autem modo D C, B K, oſtenſæ longitudine commenſurabiles; Erunt quoque B D, F K, commenſurabiles longitudine. 10. decimi. Itaque cum F K, ipſi B D, & B K, ipſi D C, longitudine ſit commenſurabilis; erunt ipſius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipſius B C, ex binis nominibus, longitudine commenſurabilia. Quod eſt ſecundum.

ITEM quia demonſtrauimus eſſe ut B D, ad D C, ita F K, ad B K; erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, in eadem ratione cum B D, D C, nominibus ipſius B C, quæ eſt ex binis nominibus. Quod eſt tertium.

POSTREMO uel B D, plus poteſt, quam D C, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, uel incommenſurabilis. Si plus poteſt B D, quam D C, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum ſit ut B D, ad D C, ita F K, ad B K; poterit quoque F K, plus quam B K, quadrato 15. decimi. rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: Et ſi B D, plus poteſt quam D C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit & F K plus quam B K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et ſi quidem B D, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commenſurabilis; erit & F K, quæ longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis ipſi B D, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Si uero D C, ſit Rationali commenſurabilis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si denique neutra ipſarum B D, D C, ſit Rationali longitudine commenſurabilis; erit quoque neutra ipſarum F K, B K, com- 14. decimi. menſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome B F, ipſi B C, ex binis nominibus, ut conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertijs. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandũ erat.

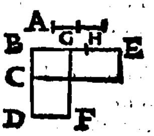
THEOR.

113.

THEOR. 90. PROPOS. 114.

o. QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipſa Apotome.

SIT Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD;
45. primi. & ad B C, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex
A, latitudinem faciens B E. Dico B E, eſſe ex binis nomini
bus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus B D,



C D, Apotomæ BC, & in eadem propor
tione; & adhuc ipſam B E, ex binis nomi-
nibus, eſſe ipſi BC, Apotomæ ordine can
45. primi. dem. Applicetur enim rurſus ad B D, to
tam, rectangulum B F, æquale eidem qua
drato ex A; hoc eſt, ipſi C E, latitudinem
faciens B G. Et quoniam B F, C E, æqualia ſunt; erit ut
14. vel 16. ſexti. B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuerſionem ratio-
nis, ut B E, ad G E, ita B D, ad C D. Secetur quoque EG,
ad H, ſecundum proportionem B E, ad G E, ex iis, quæ in
ſcholio propoſ 10. lib. 6. conſcripſimus; ut ſit E H, ad H G,
quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur eſt ut B E, tota
ad G E, totam, ita E H, ex BE, ablata ad H G, ex G E, abla
tam; erit quoque B H, reliqua ipſius B E ad H E, reliquam
ipſius G E, ut tota B E, ad totam G E: Erat autem ut B E,
ad G E, ita E H, ad H G. Erit igitur quoque ut BH, ad HE,
ita E H, ad G H; atque adeo H E, media proportionalis eſt
inter B H, G H. Quare erit ut B H, prima ad G H, tertiã,
ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex H E, ſecun-
da, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. Quia uero fuit ut B D, ad
C D, ita B E, ad G E, hoc eſt, B H, ad HE: & ſunt BD, CD,
cum ſint nomina Apotomæ B C, Rationales potentia tantũ
com-

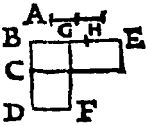
commenſurabiles; Erunt quoque B H, H E, potentia ſolum *10. decimi.*
commenſurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E,
commenſurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandem habentes
rationem cum quadratis ex B H, H E, ut demonſtrauimus,
longitudine ſunt commenſurabiles; Ac propterea tota *10. decimi*
B H, longitudine commenſurabilis exiſtens parti G H,
cõmenſurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G,
ex coroll. propoſ. 16. huius lib. At uero cum B D, Rationalis
ſit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangulum
B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale;
erit latitudo B G, Rationalis commenſurabilis longitudine *21. decimi.*
ipſi B D. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. & B H,
eidem B D, Rationali commenſurabilis eſt longitudine, atq;
adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem B H, B G, longitudine
commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero B H, H E,
oſtenſæ ſunt commenſurabiles potentia tantum, & B H,
Rationalis, erit quoque H E, illi commenſurabilis, Rationalis.
Rationales ergo ſunt B H, H E, potentia ſolum cõmenſurabiles;
Ac propterea B E, ex binis nominibus eſt. *37. decimi.*
Quod eſt primum.

QVONIAM vero oſtendimus eſſe B H, ad H E, ut B D,
ad C D; atque adeo permutando B H, ad B D, ut H E, ad
C D; Oſtenſa eſt autem B H, ipſi B D, longitudine commenſurabilis;
erit quoque H E, ipſi C D, commenſurabilis *10. decimi.*
longitudine. Quare B H, H E, nomina ipſius B E, ex
binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus
B D, C D, Apotomæ B C. Quod eſt ſecundum.

IMMO & in eadem proportione, cum demonſtratum
ſit eſſe B H, ad H E, ut B D, ad C D. Quod eſt tertium.

POSTREMO uel B D, plus poteſt quam C D, quadrato
rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, uel incommenſurabilis.
Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine
commenſurabilis; poterit quoq; B H, plus quam H E,
quadrato rectę ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi B D, *15. decimi*
plus poteſt, quam C D, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis;
poterit etiam B H, plus quam H E, quadrato
rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidẽ
B D, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis;
erit quoque B H, commenſurabilis exiſtens longitudine ip-

ſi B D, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si uero C D, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione H E, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si uero neutra ipſarum B D, C D, commenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ; erit quoque neutra ipſarum



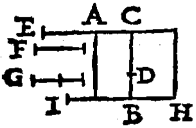
14. decimi. B H, H E, eidem Rationali longitudine cōmenſurabilis. Igitur ex ſecundis, atq; tertijs definitionibus, ipſa B E, ex binis nominibus, ordine eadē eſt ipſi Apotomæ B C. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

114. o.

THEOR. 91. PROPOS. 115.

SI ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cōmenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.

CONTINEATVR ſpatium AB, ſub Apotoma AC, & ſub C B, ex binis nominibus, cuius nomina C D, D B, commenſurabilia ſint nominibus C E, A E, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe C D, ad D B, ut C E, ad A E. Poſſit autem recta F, ſpatium A B. Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum



45. primi. C H, æquale quadrato ex G. Erit ergo latitudo B H, Apotome, *113. decimi* cuius nomina H I, B I, longitudine commenſurabilia ſunt nominibus C D, D B; & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, ut C D, ad D B; atque adeo ut C E, ad A E; & per-

& permutando, ut tota H I, ad totam C E, ita ablata B I,
ad ablatam A E. Erit ergo & reliqua B H, ad reliquam A C, 19. *quinti.*
ut tota H I, ad totam C E: Commenſurabilis autem eſt longitudine
H I, ipſi C E, quod utraque H I, C E, commenſurabilis 12. *decimi.*
fuit longitudine ipſi C D. Igitur & B H, ipſi A C,
longitudine eſt commenſurabilis; Atque idcirco H C, ipſi 10. *decimi.*
B A, commenſurabile erit, cum ſit ut H B, ad A C, ita 1. *ſexti.*
H C, ad B A: Sed H C, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale eſt. Igitur & B A, illi commenſurabile, Rationale erit, proptereaq; & recta F, ipſum B A, potens, Rationalis erit. Quapropter ſi ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, fieri poſſe, ut ſpatium Rationale contineatur ſub duabus rectis Irrationalibus. Nam ſpatium A B, contentum ſub A C, C B, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales ſunt, oſtenſum eſt Rationale eſſe.

SCHOLION.

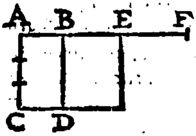
IN proximis autem tribus propoſitionibus intelligendæ ſunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commenſurabilia eſſe longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine oſtenſa ſunt eſſe commenſurabilia; In poſteriori uero, nempe in hac 115. nihil colligetur, ſi nomina C D, D B. nominibus C E, A E, potentia tantum commenſurabilia ponantur. Id quod facile ex demonſtrationibus harum trium propoſitionum apparet.

115.

THEOR. 92. PROPOS. 116. 107.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiũt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem.

SIT Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem ſit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propoſ. 112. huius lib. Expoſita enim Rationali A C, contineatur ſub A B, Media, & Rationali A C, ſpatium A D. Eſt ergo A D, ſpatium ſub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum, Irrationale, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Poſſit ipſum recta B E, quæ ex defin. xj. Irrationalis erit. Dico B E, non eſſe eandem alicui tredicim illarum, quas in coroll. propoſ. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem A C, applicatum, latitudinem faciat Rationalem ipſi A C, longitudine incommenſurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines uel ex binis nominibus, uel Apotomas, ut conſtat ex propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At uero quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perſpicuum eſt, Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem a latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



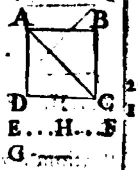
23. *decimi.*

QVOD ſi compleatur rectangulum D E; erit & hoc cõtentum ſub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propoſ. 38. Poſſit ergo ipſum recta E F, quæ ex defin. xj. Irrationalis erit. Dico rurſus E F, non eſſe eãdem alicui illarum tredecim, uel etiam ipſi B E. Hoc autem manifeſtum eſt, cum quadratum ipſius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipſius B E, latitudines faciant, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes a B E, ut demonſtratum eſt. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter ſe, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 93. PROPOS. 117. 118. 7.

PROPOSITVM ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

Sit quadratum A B C D, in quo diameter A C. Dico diametrum A C, longitudine incommenſurabilem eſſe lateri A B. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longitudine; ac propterea A C, A B, proportionẽ habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat A C, ad A B, proportionem, quam numerus B F, ad numerum G; ſintque numeri B F, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo eſt ut A C, ad A B, ita numerus E F, ad numerum G; Erit quoq; ut quadratum ex A C, ad quadratum ex A B, ita quadratus numerus ex E F, ad quadratum numerum ex G, (Cum enim quadrata habeant ſuorũ laterum proportionem duplicatã; latera autẽ æquales habeant ꝓportiones, erunt proportiones quadratorũ æquales etiã, cũ ſint æqualium duplicatę.) Sed quadratũ ex A C, duplũ eſt quadrati ex A B, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus. Igitur & quadratus numerus ex B F, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex B F, cum dimidium habeat, atq; adeo biſariam poſſit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipſe B F, illum producens, par erit. (Si namq; impar eſſet, cum ſe ipſum multiplicãs producat ſuum quadratum, eſſet & quadratus ipſe impar; eo quòd impar imparem multiplicans imparem procreet. Quod eſt abſurdum. oſtenſus eſt enim par.) Quia uero E F, & G, in ſua proportione minimi, inter ſe primi ſunt; & B F, oſtenſus eſt par, erit G, impar. (Si enim par etiam eſſet, metiretur utrunque E F, & G, binarius; atq; adeo nõ eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Diuidatur iam par numerus B F, biſariam in H. Quia igitur numerus E F, duplus eſt numeri E H; & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex E F, quadruplus



7. *decimi.*

20. *ſexti.* & 11. *octaui.*

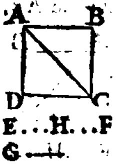
29. *noni.*

24. *ſeptimi.*

11. *octaui.*

quadrati ex E H. (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, ut in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex E F, duplus ſit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex E H; qualium partium 4. eſt quadratus ex E F, talium 2. erit quadratus ex G, & talium 1. quadratus ex E H. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, ut ſupra de numero E F, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus. quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter A C, lateri A B. Igitur incommenſurabilis longitudine.

ALITER. Sit ſi poteſt fieri, diameter A C, commenſurabilis longitudine lateri A B; habeantq; A C, A B, proportionem, quam numeri E F, & G, qui minimi ſint in ſua proportione; atque adeo inter ſe primi. Non erit igitur G, unitas. (Cum enim quadratum ex A C, duplum ſit quadrati ex A B; ſit autem ut quadratum ex A C, ad quadratū ex A B, ita quadrat' numerus ex E F, ad quadratū numerū ex G, ut in priori demonſtratione diximus; erit quoq; quadratus ex E F, duplus quadrati ex G. Si ergo G, eſt vnitas, atq; adeo & quadrat' ex ea, unitas; erit quadratus ex E F, binarius. Quod eſt abſurdū.) ergo numerus. Et quia, ut iam eſt demonſtratum, quadratus ex E F duplus eſt quadrati ex G; metietur quadratus ex G, quadratū ex E F; ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, ſe ipſum metiatur; erunt numeri E F, & G, inter ſe compoſiti, habentes menſuram communem, numerum G: Sed & inter ſe primi ſunt. Quod eſt abſurdū. Non ergo commenſurabilis eſt diameter A C, longitudine lateri A B. Quare oſtendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine. Quod erat demonſtrandum.



14. octaui.

SCHOLION.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonſtrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. demonſtra-

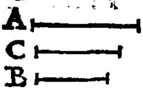
monſtrata a nobis ſunt, quadratum diametri duplum eſt quadrati ex latere deſcripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. uel 4. ad 2. uel 8. ad 4. &c. Et quia ſumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab unitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. ſolum tertius ab unitate quadratus eſt, & cæteri omnes unum intermittentes; quod primus ab unitate, nempe 2. quadratus non ſit; erunt ſolum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui uero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus ſit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (alias & 2. quadratus eſſet.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Incommenſurabilis ergo eſt diameter longitudine ipſi lateri. Quod eſt propoſitum. 10 noni. 24. octaui. 9. decimi

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

HOC *etiã theorema aliter demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. & in ſcholio propoſ. 9. huius libri.*

CAETERVM *in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex ſequentibus Stereometriæ libris pendet, ut merito omitti poſſet. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commenſurabilitatẽ omnium magnitudinum, & incommenſurabilitatem pertinẽs, uiſum eſt, eam paucis explicare, aſſignando more noſtro ſolito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonſtrationem eorũ, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt. Eſt igitur appendix hæc.*

INVENTIS *lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter ſe incommenſurabiles, inter quas media proportionalis ſit C. Quoniam igitur ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. ut A, ad B, ita eſt figura rectilinea quæuis ſuper A, conſtituta ad figuram rectilineam ſibi ſimilẽ, ſimiliterq; poſitã ſuper C; & ſunt A, & B, longitudine incommenſurabiles; erunt rectilineæ illæ figuræ ſuper A, & C, incommenſurabiles.* 10. decimi.



RVRSVS *quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, deſcripta:* 2 duodecimi.

Quadrata autem hæc, cum ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterq;
poſitæ, proportionem habent, quam rectæ A, & B, ex
coroll. propoſ. 20. lib. 6. Habebunt quoque circuli diametrorum
11. *quinti.* *A, C, eandem proportionem, quam rectæ A, B: Sed rectæ*
A, B, incommenſurabiles ſunt longitudine. Igitur & circuli
10. *decimi.* *diametrorum A, C, incommenſurabiles ſunt.*

IAM *uero ſi conſtituantur ſolida, nempe pyramides, vel*
priſmata eiuſdem altitudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ
ſimiles, ſimiliterq; deſcriptæ ſuper A, C; habebunt pyramides,
5. 6. *uel* 7. *atq; priſmata eandem proportionem, quam baſes,*
duodecimi. *hoc eſt, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ illæ*
figuræ incommenſurabiles ſint, ut modo eſt demonſtratum;
10. *decimi.* *Incommenſurabilia etiam erunt ipſa ſolida, nimirum pyramides,*
& priſmata.

QVOD *ſi coni, uel cylindri æque alti fabricentur, quorum*
baſes circuli ſint diametrorum A, C; habebunt huiuſmodi
11. *duodecimi.* *coni, & cylindri eandem proportionem cum baſibus, hoc*
eſt, cum illis circulis. Cum ergo circuli oſtenſi ſint incommenſurabiles;
10. *decimi.* *Erunt quoque incommenſurabiles dicti coni, & cylindri.*
Inuentæ ſunt igitur non ſolum lineæ, & ſuperficies incommenſurabiles,
uerum etiam & corpora, ſiue ſolida incommenſurabilia.
Quod eſt propoſitum.

EADEM *autem ratione, ſi rectæ A, & B, longitudine*
cõmenſurabiles ſint, oſtẽdemus earũ figuras rectilineas ſimiles,
10. *decimi.* *ſimiliterq; deſcriptas, necnon & ipſarum circulos, commenſurabiles*
5. 6. 7. & *eſſe; atq; adeo & earundem pyramides, & priſmata;*
11. *duodecimi.* *ac deniq; conos, & cylindros; ſi modo eandem habeant altitudinem,*
vt perſpicuum eſt.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS
ELEMENTVM XI.
Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM eſt, quod longitudinẽ, latitudinem, & craſſitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus ſex libris abunde de ea Geometriæ parte diſſeruit, quæ circa plana verſatur, ſibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, uſurpauit; In ſubſequentibus vero tribus diligenter ea de paſſionibus numerorum docuit, quæ neceſſaria videbantur ad intelligendam doctrinã linearum commenſurabilium, ac incommenſurabilium, quas idcirco luculentiſſime in libro decimo deinde expoſuit, vt conſtructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in poſtremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. ſubtiliſſime diſſeritur, perfectius poſſet cognoſci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, ſiue ſolida conſiderat, proprioque vocabulo Stereometria eſt appellata.

EXPLICAT *autem prius, more ſuo, voces ad eam rem perneceſſarias, quarum prima eſt: Solidum, ſiue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur, eam quantitatem, quæ*

quæ præter longitudinem latitudinemq; ſortita eſt craſſitudinem, ſeu profunditatem; ita vt tres dimenſiones poſſideat, vnam quidem ſecundum longitudinem, aliam uero ſecundum latitudinem, & tertiam ſecundum profunditatem, ſeu craſſitudinem, altitudinemue, appellari ſolidum, ſiue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ uerò longitudini latitudinem adijcit, ſuperficies uocatur, ut in primo lib. diximus.

PORRO *quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, præcipiunt, ut imaginemur punctum aliquod e loco in locum moueri; hoc enim deſcribit ueſtigium quoddam longum tantum, hoc eſt, lineam, propterea quod punctum omnis ſit magnitudinis expers; ut autem percipiamus ſuperficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri; hæc enim deſcribet ueſtigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum uero propter motum illum, qui in tranſuerſum eſt factus; Carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expers: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina dimenſione præditum, conſulunt, ut concipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter eleuari, ſiue in tranſuerſum moueri; hac enim ratione deſcribetur ueſtigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, quæ longa & lata exiſtit; profundum uero ſeu craſſum, propter eleuationem illam, ſeu motum ſuperficiei. Hæc ergo quantitas, ſolidum ſiue corpus uocatur. Neque uero alia quantitas quarta diſtincta a linea, ſuperficie, & corpore reperiri poteſt, propterea quod triplex tantum dimenſio poſſit aſſignari, ut perſpicue in commentarijs, quos in ſpheram Ioannis de ſacro boſco conſcripſimus, a nobis fuit demonſtratum ex Ptolemæo in libello de Analemmate.*

II.

SOLIDI autem extremum, eſt ſuperficies.

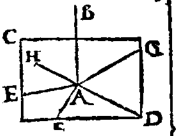
QVEMADMODVM *linea finita in extremitatibus puncta,*

puncta; ſuperficies uero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit; ita nunc ait Solidi finiti extremum eſſe ſuperficiem. Cum enim ſolidum, ſiue corpus efficiatur ex illo motu imaginario ſuperficiei; perſpicuum eſt extremas partes illius eſſe ſuperficies.

III.

LINEA recta eſt ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.

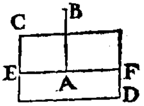
Vt linea recta A B, plano C D, inſiſtens, ita ut B, punctum ſit in ſublimi extra planum C D, at punctum A, in ipſo plano, tum demum dicetur recta ſeu perpendicularis ad planum C D, cum rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, A D, A G, & cum omnibus alijs, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, ut A B, æqualiter inſiſtat plano C D, & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta D A, ad H, cum angulus B A D, ponatur rectus, erit quoq; ei deinceps B A H, rectus, ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione protracta qualibet linea in plano C D, faciet A B, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipſi plano inſiſtet. Quod ſi fieri poſſet, ut A B, cum una linea ex A, in plano C D, educta non efficeret angulum rectum, etiamſi cum alijs omnibus rectum angulum conſtitueret, non diceretur A B, recta ad planum C D. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoq; erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos conſtituere angulos. Et e contrario, vt recte concludatur, lineam quampiam eſſe ad planū datū rectā, demonſtrandū erit prius, eā cū omnibus in eodē plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos angulos conficere.

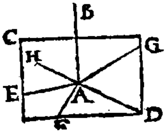


Vt autem recta quæpiam plano cuicunq; inſiſtens rectos conſtituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis,

ipſamq;

ipſamq; tangentibus, ſatis eſt, ut cum duabus non efficientibus lineam unam, ſed ſe mutuo ſecantibus, ſi producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, ut perſpicuum fiet ex propoſ. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam unam: quia ſi duæ lineæ componant unam rectam lineam, non neceſſario efficitur, lineam, quæ cum ipſis rectos angulos conſtituit, cum omnibus alijs rectos conficere angulos. Recta enim A B, inſiſtat plano C D, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis A E, A F, quæ rectam unam lineam componant. Dico A B, non propterea cum omnibus alijs rectos angulos conſtituere; ac idcirco non eſſe rectam ad planum C D. Hoc autem perſpicuum eſt, cum A B, circa E F, ueluti axem, circũuerti queat, ita ut punctum B, modo ſit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipſa cum E F, ſemper eoſdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod ſi eadem A B, cum duabus angulum componẽtibus, quales ſunt A G, A D, in priori figura, rectos conſtituat angulos, tunc demum cum omnibus alijs rectos angulos efficiet, ut diximus. Id quod dilucide demonſtrabitur propoſ. 4. huius lib.



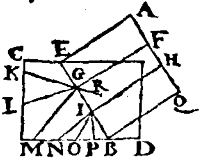


IIII.

PLANVM ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

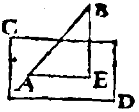
INSISTAT planum A B, plano C D, ita ut linea A Q, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum C D; at E B, in plano: Sit autem horum planorum communis ſectio E B, quæ, ut demonſtrabitur propoſ. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem

autem ſumptis quotcunq; punctis G, I; ex ipſis in plano A B, ducãtur G F, I H, perpendiculares ad communem ſectionem E B. Si igitur lineæ F G, H I, ad planum alterum C D, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis G K, G L, G M; I N, I O, I P, & cum alijs omnibus in plano C D, a punctis G, & I, ductis; dicetur planum A B, ad planum C D, rectum; quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, ſed æquabiliter illi inſiſtet. Si enim K G, producatur ad R, cum angulus F G K, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps F G R, rectus; ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano C D, fient vtrobique a lineis F G, H I, anguli æquales. Quare planum A B, æquabiliter plano C D, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe conceditur ad planum aliud, concedendũ quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem ſectionem ductas, rectas eſſe ad reliquum planum.



V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atq; a puncto, quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus ipſa inſiſtente linea, & adiuncta comprehenſus.



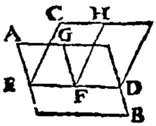
INSISTAT recta A B, plano C D, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita ut punctum B, ſit extra planum in ſublimi, punctum uero A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ A B, intelligatur ad idem planũ deducta perpendicularis B E, faciens in plano punctũ E; atq; ab E, ad A, adiungatur recta E A; eritq; neceſſario angulus B A E, acutus, cum in triangulo A B E, duo anguli B A E, B E A, duobus ſint rectis minores, & angulus B E A, rectus. Angulus igitur acutus B A E, comprehenſus linea inſiſtente A B, & adiuncta A E, dicitur inclinatio rectæ A B, ad dictum planum C D; Ita ut tanta dicatur eſſe inclinatio lineæ A B, ad planũ C D, quãtus eſt dictus angulus acutus B A E.

17. primi.

VI.

PLANI ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.

PLANO A B, inſiſtat planum C D, ita ut pars ad C, ſit in ſublimi extra planum A B, & pars ad D, in ipſo plano A B, ſitq; C D, inclinatum ad A B; & communis eorum ſectio ſit D E. Si igitur ad D E, communem ſectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; F G, quidem in plano A B, at F H, in plano C D; dicetur angulus acutus G F H, dictis rectis comprehenſus, inclinatio plani C D, ad planum A B: Ita ut tanta eſſe dicatur inclinatio plani ad planum, quantus eſt dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometræ angulum G F H, dicunt angulum inclinationis plani C D, ad planum A B, ſiue is acutus ſit ſiue rectus, obtuſusue; quanquam proprie ſolum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alteram oſtendat, vt Euclides do-

des docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationẽ vnius plani ſupra aliud, q̄ inclinationẽ vnius ad alterũ; obtuſus vero receſſum quodã modo vnius ab altero. Verũtamen quia quilibet horũ angulorũ cõmõſtrat ſitũ, ſeu eleuationẽ vniꝰ plani ſupra alterũ, generaliter dici cõſueuit a pleriſq; angulus inclinationis omnis ille, qui cõprehẽditur duabus rectis lineis, quæ in vtroq; plano ad aliqđ vnũ punctũ cõis illorũ ſectionis ducuntur perpendiculares; cuiuſmodi eſt angulus G F H, ſiue is rectus ſit, ſiue acutus, ſiue obtuſus.

VII.

PLANVM ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur, atq; alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

NON *obſcura eſt hæc definitio, precedẽti bene intellecta. Vnde planũ ad planũ magis inclinatũ eſſe diceĩ, cuiꝰ angulꝰ inclinationis minor extiterit, atq; adeo a recto magis receſſerit.*

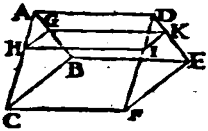
VIII.

PARALLELA plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

INTELLIGE, *in quamcunq; partẽ, etiã infinite, producãtur; hoc eſt, ſiue ad dexterã, ſiue ad ſiniſtrã, & ſiue ſurſum, ſiue deorſum, &c. Sunt.n. quadã plana, quæ nec ad dexterã, nec ad ſiniſtrã producta conueniũt; nec tamẽ ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirũ vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandẽ coeunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſſum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad ſiniſtram: Sed tamen quia ſurſum protenſa coeunt, nimirum in ipſo faſtigio; idcirco non dicentur parallela.*

SIT-

Sit enim ſectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis A B E D, A C F D, cuius baſis B C F E; auferaturq; faſtigium A G H D K I. Quo facto, perſpicuum eſt, reliqua plana G B E K, H C F I, non conuenire inter ſe, ſi ad partes G B, H C, vel ad partes K E, I F, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes G H, K I, conueniant in faſtigio A D. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt, ut in nullam partem producta inter ſe conueniant. Sicut autem lineæ in eodem plano exiſtentes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nempe ad ſiniſtram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt eſſe protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum, atq; deorſum. Itaque duo plana quæcunq;, vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero rectæ, vel ſunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conueniunt, ſi nimirum in eodem exiſtunt plano, vel tandem nec ſunt parallelæ, nec unquam conueniunt, ſi uidelicet in diuerſis ſint planis, & in tranſuerſum poſitæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem ſint plano: Hic autem ſimpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.



IX.

SIMILES ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur, multitudine æqualibus.

Potuiſſet Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, uti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe iudicauit, ut breuitati conſulens eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quod ex ſimilitudine planorum ſtatim conſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, ut ex defin. 11. patebit, cum illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine

æquales;

æquales; & proportionalitas laterum cir cum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

X.

AEQVALES, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continẽtur.

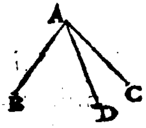
QVOD *ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circunſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figuræ ſolidæ non ſolum ſimiles, verum etiam æquales. Nam ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuo huiuſmodi ſolida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorum æqualitas, ut in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, ut in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuo congruent; ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.*

XI.

SOLIDVS angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſe mutuo cõtingant, nec in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVAE *lineæ in eodem exiſtentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum ut lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum*

larum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſiue corporeus. Idem contingeret; ſi quarta linea, uel quinta, uel deniq; plures adiungerẽtur, licet anguli quãtitas uariaretur.



Dixit autem Euclides, lineas angulũ ſolidũ conſtituentes non debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniã videlicet, ſi tres lineæ AB, AC, AD, in eadẽ conſiſterent ſuperficie, nõ efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus dũtaxat ex duobus planis BAD, DAC, compoſitus. Quod ſi AD, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum, in quo ſunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC; immo circa punctum A, tres plani conſiſtent anguli BAD, DAC, CAB, qui ut mox dicetur, ſolidum conſtituunt angulum. Idem dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus eſt, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis, continetur.

HAEC *definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti recte intellecta. Cũ enim ſaltem tres lineæ in eodẽ non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, tum minimum tres planos angulos requiri, ut angulus ſolidus efficiatur, ut ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano eſt, in quo rectæ AB, AD; & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus deniq; CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB; atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad unum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus, ſed totus quidam angulus planus, ut ſupra diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque vero ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiam ſi in diuerſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus*

conſi-

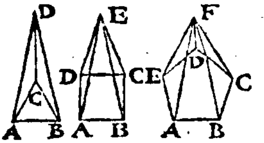
conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, uel laqueari, ad unum punctum conueniẽtes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanereque tantum duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

Ex his vero perſpicuum cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuo congruent, ſi ſe ſe penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis ſolum rectilineum aſſumpſit, ita hic ex omnibus ſolidis eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ, quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui unica ſuperficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus ſuperficiebus, una quidem plana, altera uero curua; qualis eſt, qui fit, ſi conus per verticem ſecetur.

XII.

PYRAMIS eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum conſtituta.

VIDELICET figuræ ſolidæ a planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, conſtitutæ appellanlantur pyramides. Perſpicuum autem eſt, omnia plana, quibus pyramis continetur, eſſe triangula, cum omnia ad unum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi eſt oppoſitum: Hoc enim poteſt eſſe vel triangulũ, uel quadrangulum, uel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominationẽ ſumit; vt uidelicet dicatur pyramis triãgula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot.n. triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, ſeu latera

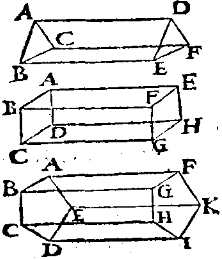


planum dictum continet. Vnde & baſis pyramidis nuncupari ſolet planum huiuſmodi. Vt pyramidis triangularis, præter baſin, triangula ſunt ABD, ACD, BCD: Quadrangulæ uero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagonæ denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

XIII.

PRISMA eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum aduerſa duo ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallela; alia uero parallelogramma.

FIGVRAE ſcilicet ſolidæ, quarum plana aduerſa & æqualia, & ſimilia & parallella ſunt triangula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur priſmata. Itaq; priſma nil aliud erit, quam columna quedā laterata æqualis craſſitudinis, cuius baſes oppoſitæ ſunt æquales, ſimiles, & parallelæ, ſiue hæ ſint triangula, ſiue quadrãgula, ſiue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit priſma quodlibet, quot latera, ſiue anguli in vnoquoque oppoſitorum planorum reperiuntur, vt figuræ indicant.



Ex his manifeſtum eſt, quantum hallucinentur ij, inter quos eſt & Campanus, qui priſma intelligunt eſſe eam figuram ſolidam duntaxat, cuius duo plana aduerſa parallela, æqualia, ſimiliaque, triangula ſunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram ſolidam Campanus vocat Corpus ſerratile. Cum enim hæc figura ſit ſolum vna ſpecies priſmatis, de-

finitio autem tradità infinita alia genera priſmatis complectatur, vt conſtat; præſertim quod plurimæ demonſtrationes in hoc libro & 12. ſequenti, ex æquo omnibus priſmatibus conueniãt; perſpicuum eſt eos hallucinari, qui vnum tantum priſmatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpſerunt autem forte hi auctores occaſionem errandi, quod Euclides & in propoſ. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propoſ. lib. 12 ſolum de eo priſmate loquatur, quod duo aduerſa plana habet triangula. Non autẽ animaduerterunt, ſeptimam propoſitionem lib. 12. illis aduerſari, in qua Euclides loquens de priſmate, mentionem facit duorum triangulorum oppoſitorum, eo quod tali priſmati ſolũ demonſtratio illa conueniat. Quod ſi ſola ea figura, vt ipſi volunt, priſma appellaretur ab Euclide, fruſtra dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullum aliud priſma daretur. Immo in corollario dictæ propoſitionis ſeptimæ infert Theon, Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eandem cũ illa baſin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & ſimilia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecundùm Theonem, atque adeo ſecundum Euclidem, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib. 12. apertiſſime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA eſt, quando, ſemicirculi manente diametro, circunductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, unde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

SICVT linea recta circà alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum; ita & ſemicirculus circa al-

terum eius extremum, nempe circa diametrum, circunductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum videlicet illud quieſcens, a quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes ſunt æquales; propterea quod omnes æquales exiſtant illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt, centrum ſemicirculi circunducti, a quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quod omnes ſint ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinem definitionis circuli, ſphæra definiri poterit etiam hoc modo.

SPHAERA eſt figura ſolida, una ſuperficie comprehenſa, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

CICERO in lib. de vniuerſitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expreſſit his verbis. Ergo globoſus eſt fabricatus, quod σφαιρώειδες Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radijs attingitur.

XV.

AXIS autem ſphæræ, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

XVII.

DIAMETER autem ſphæræ, eſt re-

cta

ĉta quædam linea per centrũ ducta, & vtrinque a ſphæræ ſuperficie terminata.

HAE tres definitiones non egent expoſitione; dummodo hoc ſolum notetur, omnem diametrum ſphæræ poſſe eſſe axem, ſi nimirum circum eam ſphæra reuoluatur. Vnde quia in deſcriptione ſphæræ circa diametrum ſemicirculi factus eſt motus ipſius ſphæræ; propterea eam ſolam Euclides axem ſphæræ nominauit.

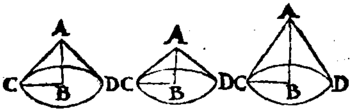
XVIII.

CONVS eſt, quando rectanguli trianguli, manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circunductum triangulum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, unde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

ATQVE ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si uero minor, Amblygonius: Si uero maior, Oxygonius.

VT ſi triangulum rectangulum ABC, circa latus quieſcens AB, quod eſt circum rectum angulum, circunducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, deſcribetur ſolida quædã figura, quæ cõtinetur duabus ſuperficiebus, circulari una, ac plana, quã BC, latus alterum circa angulum rectum, ſuo motu deſcribit; & curua alia, eaq; conuexa, quam latus AC, recto angulo oppoſitum delineat. Hæc igitur figura ſolida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

QVOD ſi latus quieſcens AB, æquale fuerit circumducto B C, ut in prima figura, dicetur conus deſcriptus orthogonius, ſeu rectangulus, quia videlicet angulus prope uerticem A, rectus eſt. Cum enim latera AB, BC, ponantur æqualia; erũt et anguli B A C, 5. primi *B C A, æquales; qui cũ æquiualeant vni recto, eo quod A B C, ſit rectus; erit B A C, ſemirectus. Eodemque modo angulus B A D, ex parte oppoſita ſemirectus erit. Quare totus angulus C A D, rectus erit. Si vero quieſcens latus A B, minus fuerit circunducto B C, ut in ſecunda figura, vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet angulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cum enim B C, latus latere A B, ſit maius; erit angulus B A C, maior angulo B C A.* 18. primi *Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus A B C, ponatur rectus, erit B A C, ſemirecto maior. Similiter B A D, maior erit ſemirecto; atque adeo totus C A D, recto maior erit. Si denique quieſcens latus A B, maius fuerit circunducto BC, ut in tertia figura, appellabitur conus deſcriptus oxygonius, ſeu acutangulus; quia nimirum angulus ad uerticem A, acutus eſt. Cum .n. latus AB, maius ſit latere BC, erit & angulus BCA, angulo BAC, maior.* 18. primi *Quapropter cum hi duo vni recto æquiualeant, eo quod angulus A B C, rectus ponatur, erit B C A, ſemirecto maior, ideoque reliquus B A C, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus B A D, minor eſſe ſemirecto. Igitur totus C A D, recto erit minor.*



XIX.

AXIS autem coni, eſt quieſcens illa linea, circum quam triangulum uertitur.

VT in quolibet cono ſuperius deſcripto axis eſt recta quieſcens A B.

XX.

BASIS uero coni eſt circulus, qui a circunducta linea recta deſcribitur.

NIMIRVM circulus, qui deſcribitur ab altero latere circa rectum angulum, quale eſt B C, *in ſuperioribus conis. Itaque baſis circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circunductum.*

QVONIAM vero Euclides ſolum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus eſt ad baſin; Non autem inclinatum, cuius axis ad baſin rectus non eſt; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni deſcriptionem, qua & rectum, & inclinatum comprehendas; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonſtrari poſſunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono oſtendit, ut ibi docebimus. Ita igitur ſcribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circunferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctū, coniuncta recta linea in utramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circunferentiam, quouſque ad eum locum redeat, a quo cæpit moueri: Superficiem a recta linea deſcriptam, conſtantemque ex duabus ſuperficiebus ad uerticem inter ſeſe aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit, in infinitum producta, uoco conicam ſuperficiem.

VERTICEM ipſius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem uoco figuram contentam circulo, & conica ſuperficie, quæ inter uerticē,

& cir-

& circuli circunferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ uertex eſt.

AXEM, rectam lineam, quæ a uertice ad circuli centrum perducitur.

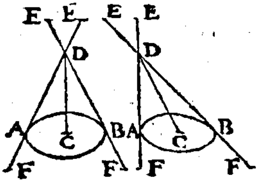
BASIM, circulum ipſum.

CONORVM, Rectos quidem uoco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

SCALENOS uero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

HAEC autem omnia ita explicat Eutocius ĩ commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.

SIT circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D; iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B, feratur ecuſque in circuli A B, circunferentia, quouſque punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, a quo cæpit moueri: deſcribet ſuperficiem quandam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctum ſe ſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axẽ, rectam D C. Conum vero appellat figuram contentam circulo A B, & ea ſuperficie, quam D B, ſola deſcribit. Coni verticem, punctum D. Axem D C. Baſim A B, circulum. Quod ſi D C, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.



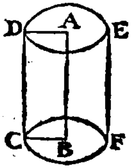
XXI.

CYLINDRVS eſt, quando rectan

guli

guli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circunductum parallelogrammum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, unde cæperat moueri, circumaſſumpta figura.

VELVTI ſi rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quieſcens A B, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura deſcripta cylindrus, quæ quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera A D, B C, deſcribunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus C D, deſcribit, inſtar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum eſt, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta A B, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES uero cylindri ſunt circuli a duobus aduerſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

QVALES ſunt circuli a lateribus A D, B C, oppoſitis deſcripti.

EVCLIDES *uero ſolum cylindrum rectũ hoc loco definit, cuius uidelicet axis rectus eſt ad utramque baſim; atque de hoc ſolum in lib. 12. eſt diſputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris ſimus propoſituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, qua Euclides de cylindro recto demonſtrauit, uiſum eſt prius ex Sereno Antinſenſi definire cylindrum vniuerſe, ut complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur ſcribit Serenus ad initium primi libri de ſectione cylindri.*

SI duorum circulorum æqualium, & æquidiſtantium diametri, ſemper inter ſeſe æquidiſtantes & ipſæ in circulorum planis circa manens centrum circunferantur, & ſimul circunferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eũ locum reſtituatur, a quo moueri cœpit: Superficies, quæ a circumlata recta linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies uocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta.

CYLINDRVS eſt figura, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur.

CYLINDRI baſes ſunt circuli ipſi.

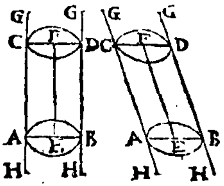
AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri, baſes utraſque contingit; quam & circumlatam, cylyndri ſuperficiem deſcribere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus.

SCALENI autem, qui non ad recto s angulos exiſtentem ipſis baſibus axem hab ent.

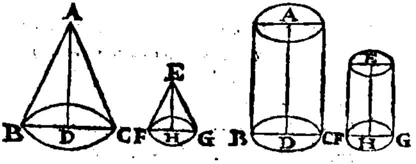
SINT duo circuli æquales, & æquidiſtantes A B, C D, quorum centra E, F, & diametri æquidiſtantes quoque A B, C D: Iunctaque recta A C, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri A B, C D, circa centra E, F, in planis circulorũ ſemper æquidiſtantes, una cum recta A C, circunducantur, donec ad eum locum reſtituantur, unde moueri cæperunt; deſcribetur a linea A C, ſuperficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta A C, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Cylindrum vero appellat figuram A B D C, circulis A B, C D, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta, quàm uidelicet ſola A C, deſcribit, comprehenſam. Baſes cylindri dicit eſſe circulos A B, C D. Axem, rectam E F, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam A C. Quod ſi axis E F, perpendicularis fuerit ad baſes, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenũ.



XXIIII.

SIMILES coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

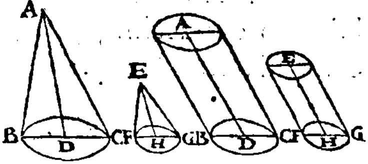
RECTE Euclides ſimilitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, et baſium diametris ſumit. Diametri enĩ baſium indicant conos & cylin-



cylindros ſecūdū duas dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinē ſcilicet
ac latitudinē; Axes uero eoſdē ſecundū profunditatem, ſeu
altitudinem ſimiles eſſe demonſtrant. Sint enim duo coni
ABC, EFG; Itē
duo cylindri; in
conis autem axes
AD, EH, &
baſium diametri
BC, FG; ſimiliter
& in cylindris:
Itaque ſi fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter
baſis ad FG, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam
cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundum
longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundum
profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones
proportionales ſunt; Vel etiam, quia triangula
ADB, EHF, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni,
nec non rectangula AB, EF, quorum conuerſiones cylindros
effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cum enim
ſit ut AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem ut BC, ad
15.quinti FG, ita dimidia BD, ad dimidiam FH; erit quoque ut AD,
ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita
EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis
latera circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia
ſunt; ac propterea & triangula ſimilia inter ſe erunt, & rectangula:
Triangula quidem, propterea quod triangula unū
angulum uni angulo habentia æqualem, & circum æquales an-
6.ſexti. gulos latera proportionalia, æquiangula ſint, ideoque latera
4.ſexti. omnia circa angulos æquales habeant proportionalia, atque
adeo inter ſe ſimilia exiſtant: Rectangula vero, eo quod re-
34.primi. liqua duo latera duobus lateribus AD, DB, ſint æqualia,
oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem
habeant.

QVOD ſi coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides uerba fecit) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, & diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in definitione quinta dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri

cylindri A B C, E F G.: In conis autem axes ſint A D, E H, & baſium diametri B C, F G; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt A D, ad EH, ita BC, ad F G, extiterintque anguli inclinationũ A DB, EHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter ſe; dicẽtur & coni ĩter ſe, & cylindri quoq; inter ſe ſe ſimiles; quoniã nimirũ hac ratione & tres eorũ dimenſiones ſunt proportionales, vt ſupra diximus, & rurſus tam triangula A D B, EHF, quam rectangula A B, E F, quorum conuerſiones conos, & cylindros effecerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis, cylindriſque demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cum anguli A D B, E H F, ponantur æquales, licet non ſint recti.



XXV.

CVBVS eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida ſub octo triãgulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

XXVIII.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida ſub uiginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HAEC ſunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, eo quod omnia plana, quibus continentur, æqualia ſint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus conſtat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ ſimplicia a philoſophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atq; Terram, quinque dictis corporibus aſſimilet, ut in ſphæra Ioannis a ſacro boſco latius explicauimus. Horum omnium conſtructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propoſ. 15 Tetraëdri vero propoſ. 13. Octaedri deinde propoſ. 14. Dodecaedri *autem propoſ. 17. Icoſaedri denique propoſ. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum eſt, ea ita depingere, ut ueram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet ſecundum eorum ſoliditatem poſſit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque prædicta dari poteſt, ut demonſtrabimus ad finem lib. 13.*

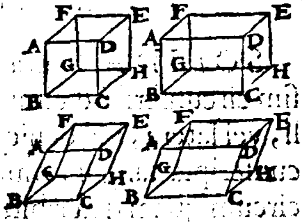
QVONIAM vero in hoc lib. 11. frequens ſit mentio Parallelepipedi, & in lib. 15. agitur de mutua inſcriptione, circumſcriptioneque corporum regularium; neceſſarium eſſe duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam ſit Parallelepipedum, quidque ſit figuram ſolidam in figura ſolida inſcribi, vel circa eandem deſcribi.

XXX.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerſo, parallelæ ſunt, contenta.

VELVTI ſolida comprehenſa ſex quadrilateris figuris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppoſitæ AC, FH; Item DF, CG; Item AG, DH, ſunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quaſi parallelis planis comprehenſa. quæ quidem plana parallela oppoſita, ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallelogramma, ut demonſtrabitur propoſ. 24. huius lib.



SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim ſex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc eſt, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, reſpondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem ſex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, ſed altera parte longiora, quamuis duo ſint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod ſi ſex parallelogramma extiterint æquilatera quidem, ſed non omnia rectangula, quamuis duo ſint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus: Si deniq; ſex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo ſint rectangula & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerſo, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterũ quodcunq; parallelepipedum vocari etiam poterit Priſma, vt ex definitione priſmatis conſtat.

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidæ figuræ viciſſim circunſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circunſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.

NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: Sed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figuræ exterioris.

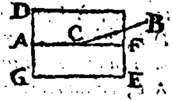
VERVM duæ hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circunſcriptionibuſq; mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

1. RECTAE lineæ pars quædam non eſt

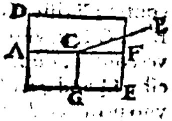
in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

Sit enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ A B, pars quidem A C, in ſubiecto plano D E, pars vero C B, in ſublimi, ita ut omnia puncta partis A C, in plano D E, iaceant; puncta uero omnia partis C B, ſupra planum D E, exiſtant, uel infra. Erit igitur in plano D E, ipſi A C, rectæ lineę continua quædam recta linea in directum poſita, nempe C F. Quamobrem duæ rectæ A B, A F, commune habent ſegmentum A C. quod eſt abſurdum, ut in pronunciato 13. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam uero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

Haec eſt communis demonſtratio interpretum. Sed forte dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe vt oſtendatur, recta A *C, eſſe aliquam rectam in plano,* D E, *in directum, & continuum poſitam. Qui enim concedit, recta* A B, *partem quidem* A *C, eſſe in plano* D E, *partem vero C* B, *in ſublimi, vtique negabit, recta* A *C, in plano* D E, *dari poſſe aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam C*B, *in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi* A *C. Verũtamen ei, qui ſic dubitat, reſpondendum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, quæ ex æquali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, quæ recte, & æqualiter ſemper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem ſi* A C, *in plano* D E, *producatur vſque ad F; erit C* F, *recta rectæ* A *C, in continuum & directum poſita. Verum demonſtremus iam id ipſum Geometrice, in plano videlicet* D *E, ipſi* A *C, dari poſſe aliam rectam, quæ cum ipſa vnam rectam lineam conſtituat, quamuis quis dicat,* A B, *eſſe quoque rectam, eiuſque partem* A *C, in plano* D *E, partem vero C* B, *in ſublimi eſſe poſitã. Ducatur n. in plano* D *E, ipſi* A*C, perpendicularis C G;* 11. primi.



& in eodem plano ipſi C G, perpendicularis C F. Dico C F, eſſe ipſi A C, poſitam in continuum & rectum. Cum enim A C, & F C, in eodem plano D E, cum recta C G, duos rectos angulos 14. *primi.* *conſtituant A C G, F C G, ex conſtructione; erunt A C, & F C, in directum & continuum poſitæ. Quamobrem etiamſi quis contendat, A B, eſſe rectam, cuius quidem pars A C, in plano D E, ſubiecto, pars autem C B, in ſublimi ſit conſtituta, tamen in eodem plano D E, erit alia recta, nempe C F, quæ cum A C, vnam rectam conſtituat lineam; atque adeo duæ rectæ A B, A F, ſegmentum commune habebunt A C. Quod eſt abſurdum.*

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

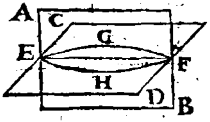
SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atq; triangulum omne in vno eſt plano.

RECTÆ lineæ A B, C D, ſe mutuo ſecent in E, & in E B, E D, ſumptis punctis F, & G, vtcunque, ducatur recta F G, vt fiat triangulum E F G. Dico triangulum E F G, in vno eſſe plano; Item rectas A B, C D, in vno quoque plano exiſtere. Si enim trianguli E F G, pars quædam, nimirum E H I G, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua F H I, in ſublimi, vel contra; Exiſtent quoque rectarum E F, G F, partes quidem E H, G I, in vno plano, partes vero H F, I F, in ſublimi, vel contra. quod fieri non poſſe, iam ſupra demonſtratum *1. undeci.* eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem E F I K, in vno plano credatur eſſe, pars autem G I K, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum E G, F G, partes quidem E K, F I, in vno plano, partes vero K G, I G, in ſublimi, vel contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidē F H K G, in vno concedatur eſſe plano, pars vero E H K, in ſublimi, vel contra; erunt quoque rectarum F E, G E, partes quidem F H, G K, in vno plano, partes autem H E, K E, K F, in ſublimi, vel contra. Quæ omnia abſurda ſunt, vt eſt demonſtratum. 1. undec. Quare triangulum E F G, in uno plano exiſtit; eademq; eſt ratio in omni alio triangulo.

QVIA vero, in quo plano eſt triangulum E F G, in eodem exiſtunt eius latera E F, E G: In quo autem ſunt rectæ E F, E G, in eodem ſunt rectæ totæ C D, A B, 1. undec. ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in ſublimi dicantur eſſe; Erunt propterea rectæ A B, C D, in uno plano, in quo nimirum triangulum E F G, conſiſtere demonſtrauimus. Quocirca ſi duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta.



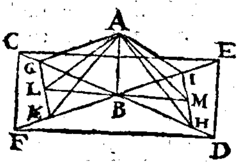
SECENT ſe mutuo plana A B, C D, ſitq; communis eorum ſectio E F. Dico E F, eſſe lineam rectam. Si enim non credatur eſſe recta, ducatur in plano A B, recta E G F, & in plano C D, recta E H F. Rectæ igitur E G F, E H F, cum eoſdem habeāt terminos E, & F, ſuperficiem includent. Quod fieri non poteſt, vt in 12. pronunciato 1. lib. oſtendimus. Communis ergo ſectio E F, recta erit linea; Ac proinde ſi duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta. Quod erat oſtendendum.

ALITER. Secent ſe rurſus plana A B, C D, ſintque termini ſectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta E F. Si igitur recta E F, in vtroque plano exiſtit, conſtat propoſitum: Ipſa enim erit communis ſectio. Si uero E F, recta in neutro eorum dicatur eſſe, tunc ſi in alterutro eorum recta ducatur E G F, concludent rurſus duæ rectæ E F, E G F, ſuperficiem, cum eoſdem habeant terminos E, & F. Si deniq; recta E F, in altero tantum plano eſſe credatur, tunc ſi in altero ducatur recta E G F; includent iterum duæ rectæ E F, E G F, ſuperficiem. Quod eſt abſurdum. Eſt ergo recta E F, in utroque plano A B, C D; atque adeo communis eorum ſectio eſt.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea A B, inſiſtat duabus rectis C D, E F, ad rectos angulos in communi earum ſectione B. Dico rectam A B, ad angulos quoque rectos eſſe plano, quod per ipſas ducitur, ſeu in quo exiſtunt. Cum enim ſe mutuo ſe-
2. undec. cent in B; erunt ipſæ in uno plano, quod ſit C E D F. Sumantur inter ſe æquales rectæ B G, B H; Item rectæ B I, B K; ducanturq; rectæ G K, I H; & in eodem plano per B, ducatur recta L M, ſecãs rectas G K, I H, in punctis L, & M,. Demittantur quoque ex A, puncto in ſublimi ad idem planum rectæ A G, A L, A K, A H, A M, A I.



Quoniam igitur latera B G, B K, trianguli B G K, lateribus B H, B I, trianguli B H I, ex conſtructione ſunt æqualia; & anguli quoque ipſis contenti G B K, H B I, cum
15. primi. ſint ad uerticem B, oppoſiti, æquales: Erunt baſes G K, H I,
4. primi. inter ſe, & anguli B K G, B I H, inter ſe quoque æquales.

RVRSVS cum anguli K B L, I B M, ad uerticem B,
15. primi. oppoſiti ſint æquales, erunt duo anguli K B L, B K L, trianguli B K L, duobus angulis I B M, B I M, trianguli B I M, æquales; Sunt autem & latera B K, B I, quibus adiacent, æqualia, ex conſtructione. Igitur & reliqua latera K L,
26. primi. L B, reliquis lateribus I M, M B, æqualia erunt.

PRAETEREA cum latera A B, B G, trianguli A B G, æqualia

æqualia ſint lateribus A B, B H, trianguli A B H, ex conſtructione; & anguli ipſis contenti A B G, A B H, æquales, nempe recti, ex hypotheſi; erunt & baſes A G, A H, æquales. *4. primi.* Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ A I, A K.

AMPLIVS quia latera A I, I H, trianguli A I H, lateribus A K, K G, trianguli A K G, æqualia ſunt; & baſis A H, baſi A G, ex hactenus demonſtratis; erunt etiam anguli A I H, A K G, dictis lateribus comprehenſi, *8. primi.* æquales.

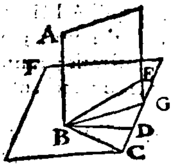
ITAQVE cum latera A K, K L, trianguli A K L, æqualia ſint lateribus A I, I M, trianguli A I M; & anguli ipſis contenti A K L, A I M, æquales etiam, ut hactenus demonſtrauimus; erunt quoque baſes A L, A M, *4. primi.* æquales.

QVONIAM denique latera A B, B L, trianguli A B L, æqualia ſunt lateribus A B, B M, trianguli A B M; & baſis A L, baſi A M, ex demonſtratis; erunt quoque anguli A B L, A B M, dictis lateribus comprehenſi, æquales; *8. primi.* qui cum ſint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. Quare recta A B, rectos angulos efficit cum recta L M, quæ in plano ſubiecto ipſam tangit in B: Eademq; ratione oſtendetur, rectam A B, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipſam tangent in B, angulos rectos conſtituere: Ac proinde recta A B, plano C E D F, quod per rectas C D, E F, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illæ tres rectæ in vno ſunt plano.

INSISTAT recta linea A B, tribus rectis lineis B C, B D, B E, *ſe tangentibus in B, ad rectos angulos in communi* earum ſectione, ſeu tactu B. Dico tres rectas B C, B D,
2. undec. B E, in uno plano eſſe. Cum enim quælibet duæ in vno ſint plano, propterea quod productæ ad partes E, ſe mutuo ſecent in B; ſint B C, B D, in plano F C; Et ſi, fieri poteſt, recta B E, non ponatur in eodem plano,
2. undec. ſed in ſublimi. Quoniam vero duæ rectæ A B, B E, in vno ſunt plano, cum ſe mutuo ſecent in B; Sint ambæ in plano A E. Et quia plana F C, A E ſibi mutuo occurrunt in B; neceſſario producta ſe mutuo ſecabunt.
3. undec. Sit ergo eorum communis ſectio recta B G. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis B C, B D; erit pro-
4. undec. pterea & plano F C, per ipſas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ B G, quæ ipſam in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli A B E, A B G, *exiſtentes in plano A G*, per rectas A B, B E, ducto æquales inter ſe erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in uno plano F C, exiſtentibus, non erit B E, in ſublimi, ſed in eodem cum ipſis plano. Quocirca ſi recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, &c. Quod erat oſtendendum.



6.

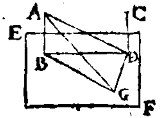
THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, C D, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas eſſe parallelas. Ducta enim recta B D, in plano E F, erunt anguli A B D, C D B, *recti, ex defin. 3. huius lib.* Iam in eodẽ plano E F, ducatur D G, ad B D, perpendicularis, ponanturq́; æquales A B, D G. Connectantur deinde rectæ B G, G A, A D. Quoniam igitur latera A B, B D, trianguli A B D, æqua-

lia

lia ſunt lateribus G D, D B, trianguli G D B; ex conſtructione; & anguli quoque ipſis contenti A B D, G D B, æquales, nempe recti; Erunt baſes æquales A D, G B. 4. *primi.* Rurſus quia latera A B, B G, trianguli A B G, æqualia ſunt lateribus G D, D A, trianguli G D A; Eſt autem & baſis communis A G: Erunt anguli A B G, G D A, æquales: 8. *primi.* Eſt autem A B G, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & G D A, rectus erit. Quoniam uero, ex eadem defin. angulus quoque G D C, rectus eſt; erit recta G D, tribus rectis D B, D A, D C, ad angulos rectos. Quare rectæ D B, D A, D C, in uno erunt plano: 5. *undec.* Eſt autem A B, in eodem plano, in quo D B, D A. 2. *undec.* Recta igitur C D, in eodem erit cum A B, plano. Quocirca cum anguli interni A B D, C D B, ſint recti, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. 28. *primi.* Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

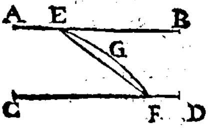


THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

IN parallelis A B, C D, ſumantur utcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur E F. Dico rectam E F in eodem eſſe plano, in quo, per definitionem parallelarum, ſunt parallelæ A B, C D. Si enim recta E F, non concedatur eſſe in eodem plano parallelarum, ſed extra: ſecet iam aliud planum ſuperficiem parallelarum per puncta E, & F, ſitq; communis ſectio horum planorum E G F, quæ recta linea erit. 3. *undec.* Duę igitur rectæ E F, E G F, cum habeant eoſdem terminos E, & F, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Non ergo extra planum

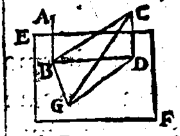


planum parallelarum AB, C D; erit recta E F. Quare ſi duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodē eſt cum parallelis plano. Quod erat demonſtrādū.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ A B, C D; ſitque C D, plano E F, ad angulos rectos. Dico & A B, eidem plano E F, eſſe ad rectos angulos. Ducta enim recta B D, in plano E F; erit per defin. 3. huius lib. angulus C D B, rectus: 29. primi. Sunt autem duo C D B, A B D, duobus rectis æquales: Igitur & A B D, rectus erit. Iam in plano E F, ducatur B G, perpendicularis ad B D; ponanturque æquales B G, C D. Coniungentur deinde rectæ D G, G C, C B.

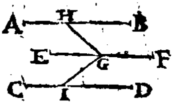


Quoniam igitur latera C D, D B, trianguli C D B, æqualia ſunt lateribus G B, B D, trianguli G B D, pri. ex conſtructione; & anguli quoque ipſis contenti C D B, 4. ~~ſeptimi~~ G B D, æquales, nimirum recti; Erunt baſes C B, G D, æquales: Rurſus quia latera C D, D G, trianguli C D G, æqualia ſunt lateribus G B, B C, trianguli G B C; & baſis 8. primi. eſt communis C G; Erunt anguli C D G, G B C, dictis lateribus comprehenſi æquales. Eſt autem C D G, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & G B C, rectus erit. Quare recta G B, duabus rectis B D, B C, ſe mutuo tangentibus in B, ad rectos angulos exiſtit; ac proinde ad rectos angulos 4. undec. erit plano per B D, B C, ducto: Eſt autem in hoc eodem plano recta A B; propterea quod rectæ B D, B C, in eodem 7. undec. ſint plano, in quo parallelæ A B, C D; cum puncta B, C, D, exiſtant in parallelis A B, C D. Igitur & G B, recta rectæ B A, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum

re cum A B, recta ſit ad rectas B G, B D; erit quoque A B,
recta ad planum per B G, B D, ductum, hoc eſt, ad planũ *4. vndec.*
E F. Si duæ igitur ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

QVAE eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.



SINT rectæ lineæ A B, C D, ipſi E F, parallelæ; non ſint autem in eodem cum E F, plano. Dico A B, C D, parallelas quoque eſſe. Nam a quolibet puncto G, rectæ E F, ad ipſam E F, ducantur duæ perpendiculares; G H, quidem in plano parallelarum A B, E F; at G I, in plano parallelarum C D,
E F. Quoniam igitur E G, recta eſt ad duas rectas G H,
G I, ſe tangentibus mutuo in G; erit recta quoque ad planum *4. undec.*
per ipſas G H, G I, ductum. Quamobrem cum ſint
parallelæ A B, E F; & E F, ſit recta ad planum per G H, G I,
ductum; erit quoque A B, ad idem planum recta. Similiter *8. undec.*
cum ſint parallelæ C D, E F; Sit autem E F, recta ad planum
per G H, G I, ductum; erit etiam C D, recta ad idem *8. undec.*
planum; Atque proinde rectæ A B, C D, cum rectæ ſint ad
idem planum per G H, G I, ductum, parallelæ erunt. Quæ *6. undec.*
igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

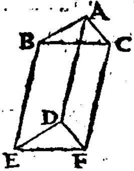
DATA *opera Euclides voluit, duas rectas* A B, C D, *non eſſe in eodẽ plano cũ recta* E F, *cui ſunt parallelæ. Nã ſi forẽt in eodẽ plano cũ ipſa* E F; *eſſent* A B, C D, *inter ſe parallelæ,*

ex 30.

ex 36. propoſ. 1. lib. Superuacaneum ergo eſſet, hic idem demonſtrare.

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.



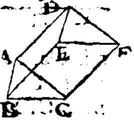
SINT rectæ A B, A C, ſe tangentes in A, parallelæ rectis D E, D F, ſe tangentibus in D; non ſint autem A B,
A C, in eodem plano, in quo D E, D F. Dico angulos B A C, E D F, ab ipſis comprehenſos eſſe æquales. Ponantur enim A B,
D E, inter ſe æquales, & A C, D F; inter ſe;
ducanturq; rectæ B C, E F, B E, A D, C F.
Quoniam igitur A B, D E, parallelæ ſunt
& æquales; erunt quoque B E, A D, paral-
33. primi. læ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales
CF, A D. Quare cũ BE, CF, parallelæ & æquales ſint eidem
9. undec. A D; erunt etiã BE, CF, inter ſe parallelæ, & æquales: Ac ꝓ
33. primi. pterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo
latera AB, AC, triãguli ABC, æqualia ſunt laterib⁹ DE, DF,
triãguli DEF, ex cõſtructione; & baſis BC, baſi EF, æqualis,
8. primis vt modo demonſtrauimus; Erunt & anguli BAC, EDF,
dictis lateribus comprehenſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

CONCLVSIO *huius theorematis vera etiam eſt, quãdo priores duæ lineæ in eodem ſunt plano cum duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ* A *B*, A *C*, *D E*, *D F*, *in eodem plano; ſitq; A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F, parallela.* Dico *angulos B* A *C*, *E* D *F*, *eſſe æquales. Nam ponantur æquales* A *B*, D *E*, *&* A *C*, *D F; ducanturq; rectæ B C*, *E F*, *quæ aut in* *in vna recta linea erunt conſtitutæ, aut non. Sint prius in una recta* B F. *Quoniam igitur parallelæ ſunt* A B, D E; *æquales erunt anguli* A B C, D E F; *internus & externus. Similiter* 29. primi. *æquales erunt anguli* A C B, D F E; *Sunt enim & A C, D F, parallelæ. Quare duo anguli* A B C, A C B, *trianguli* A B C, *æquales ſunt duobus angulis* D E F, D F E, *trianguli* D E F.

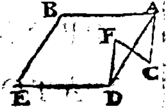
Igitur anguli quoque reliqui B A C, E D F, *æquales erunt.* 32. primi. *Quod eſt propoſitum.*

NON *ſint iam* B C, E F, *in una recta linea conſtitutæ. Ductis rectis* A D, B E, C F, *cum* A B, D E, *ſint parallelæ & æquales; erunt & A D, B E, parallelæ & æquales.* 33. primi. *Eadem ratione* A D, C F, *parallelæ erunt & æquales, eo quod* A C, D F, *parallelæ ponantur & æquales. Quare &* B E, C F, *eidem* A D, *parallelæ exiſtentes & æquales, inter ſe parallelæ erunt & æquales:* 30. primi. *Ac proinde parallelæ & æquales quoque erũt* B C, E F. 33. primi. *Itaq; cum duo latera* A B, A C, *trianguli* A B C, *æqualia ſint lateribus* D E, D F, *trianguli* D E F; *& baſis* B C, *baſi* E F; *erunt anguli* B A C, E D F, *contenti dictis lateribus, æquales.* 8. primi. *Quod eſt propoſitum.*



CAETERVM *ut concluſio huius theorematis recte ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas, (ſiue omnes ſint in eodem plano, ſiue non;) ut tres rectæ* A D, B E, C F, *nulla ratione ſe mutuo ſecent; ut ex prima, & ultima figura apparet. Nam alias concluſio vera non erit.*

SVNT *enim rectæ* A B, A C, *rectis* D E, D F, *parallelæ in hac figura; & tamen anguli* B A C, E D F, *quos comprehendunt, non ſunt æquales, cum ille ſit acutus, hic vero obtuſus. Hoc autem ideo euenit, quod* A D, C F, *ſe mutuo ſecant. Vnde quamuis* A C, D F, *ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea* A D, C F, *quæ eas cõiungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad eaſdem partes, vt uult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſeruatur.*

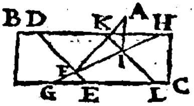


PRO-

11. PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sɪᴛ a puncto A, in ſublimi ad ſubiectum planum B C,
ducenda perpendicularis. *Ducatur in plano* B C, recta ut-
12. *primi.* cunque D E, ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F:



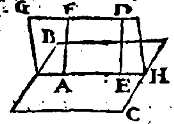
Quæ ſi fuerit perpendicularis ad pla
num B C, factum erit, quod pro-
ponitur: Si uero non fuerit A F, ad
planum B C, perpendicularis, duca-
11. *primi.* tur in plano B C, per F, ad D E, per
12. *primi.* pendicularis G H; ad quam ex A, perpendicularis demitta-
tur A I. Dico A I, eſſe perpendicularem ad planum ſubie-
31. *primi.* ctum B C. Ducta enim in plano B C, per I, ipſi D E, paral-
lela K L; cum D F, ad rectos angulos ſit duabus F A, F H,
4. *undec.* ex conſtructione, ac proinde recta ad planum per F A, F H,
8. *undec.* ductum; erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H,
2. *undec.* ductum recta. Quoniam uero A I, in eodem eſt cum re-
ctis F A, F H, plano, tangitq; rectam K I, in I; erit per de-
finitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atq; adeo
A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. Igitur A I, ad
4. *undec.* planum per K I, I F, ductum, hoc eſt, ad planum B C, re
cta erit. A dato ergo puncto in ſublimi, ad ſubiectum pla-
num perpendicularem rectam lineam duximus. Quod fa-
ciendum erat.

12. PROBL. 2. PROPOS. 12.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

Sɪᴛ a dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendi
cularis ad datum planum B C. Ex quouis puncto D, in ſu-
11. *undec.* blimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E: quæ
ſi ceci-

ſi ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si uero ceciderit in aliud punctum E; extenſa recta per E, & A, ducatur per A, ipſi D E, parallela A F, in plano G H, per D E, E A, ducto. Dico A F, rectam eſſe ad planum datum B C. Cũ enim D E, A F, parallelę ſint; & D E, recta ad planũ B C, ex conſtructione; erit quoq; A F, ad idem planũ B C, recta. Itaq; dato plano, a puncto, quod in illo datum eſt, &c. Quod faciẽdum erat. 31. primi. 8. undec.



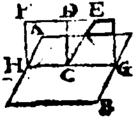
THEOR. 11. PROPOS. 13.

13.

† I

DATO plano, a puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes.

SIT datum planum A B. Dico à dato eius puncto C, ad eaſdem partes non poſſe educi duas perpendiculares ad planum A B. Ducantur enim, ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares C D, C E, ad planum A B; & per C D, C E, quæ in uno eodẽq; plano ſunt, ducatur planum F G, ſecans planum A B, per rectam lineam G H. Cum igitur E C, D C, rectæ ſint ad planum A B; erunt per defin 3. huius lib. anguli E C G, D C G, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datũ eſt, duæ rectæ lineæ, &c. Quod erat demonſtrandum. 2. undec.



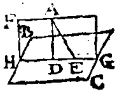
ALITER. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planũ A B, duæ perpendiculares C D, C E. Cum igitur duæ D C, E C, rectæ ſint ad idem planũ A B; erunt ipſæ inter ſe parallelæ, cũ tamẽ conueniant in puncto C. Quod eſt abſurdũ. 6. undec.

SCHOLION.

EODEM modo, a puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in ſublimi ad ſubiectum planum

B C,

B C, ſi fieri poteſt, duæ perpendiculares A D, A E. Ducatur 2. undec. *per A D, A E, quæ in vno plano ſunt, planum F G, ſecans*



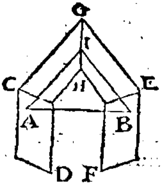
*planum B C, per rectam GH. Cum igitur A D, A E, rectæ ſint ad planum B C; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti, interni in triangulo A D E. Quod eſt ab*17. primi *ſurdum; cum ſint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis aſſumpti.*

Aliter. *Si A D, A E, rectæ ſunt ad planum B C;* 6. undec. *ipſæ erunt inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod eſt abſurdum.*

14. THEOR. 12. PROPOS. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela.

Sit recta A B, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela eſſe plana C D, E F. Si enim non credantur eſſe parallela, producta inter ſe conuenient. Conueniant ad partes C, 3. undec. E; & faciant communem ſectionem rectam lineam G H: In qua ſumpto puncto utcunq; I, ducantur rectæ I A, I B, in planis G C D, G E F. Quia igitur A B, recta ponitur ad plana G C D, G E F; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli I A B, I B A, recti, in triangulo A B I. 17. primi. Sed & minores duobus rectis ſunt. Quod eſt abſurdum. Igitur plana C D, E F, producta nunquam inter ſe conueniunt. Parallela ergo ſunt. Ad quæ igitur plana, eadẽ recta linea recta eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.



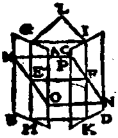
SCHOLION.

Facile *etiã demõſtrari poterit cõuerſum huius, videlicet.*

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

Sint

Sint duo plana parallela A B, C D, ad quorum alterum A B, recta ſit linea recta E F. Dico E F, rectam quoque eſſe ad planum reliquum C D. Secet enim planum aliquod, nempe G K, plana A B, C D, per lineam rectã E F, incedens, faciatq; communes ſectiones cum dictis planis rectas G H, I K: eruntque anguli G E F, H E F, recti, per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli I F E, K F E. (Si enim alter eorum, nempe I F E, dicatur acutus; erunt duo anguli G E F, I F E, duobus rectis minores. Quare rectæ E G, F I, ad partes G, I, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & plana A B, C D, in quibus exiſtunt, ad eaſdem partes conuenient ad punctum L; cum tota recta H G L, ſit in uno plano, nempe in A B, producto; Item 1. undec. *tota recta K I L, in vno quoque plano, nimirum in C D, protracto. Quod eſt abſurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo ſunt anguli I F E, K F E.) Eodem modo ſi aliud planum videlicet M N, eadem plana ſecet per E F, faciens alias rectas, communes ſectiones cum ipſis, M O, P N; erunt anguli P F E, N F E, recti. Itaque cum E F, ſit recta ad duas rectas I K, P N, recta quoque erit E F, ad planum C D, per ipſas ductum.* 4. undec. *Quod eſt propoſitum.*

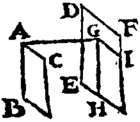


THEOR. 13. PROPOS. 15. 15.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano: Parallela ſunt, quæ per illas ducuntur, plana.

Sint duæ rectæ lineæ A B, A C, ſe tangentes in A, duabus rectis lineis D E, D F, ſe tangentibus in D, exiſtentibusque in alio cum illis plano parallelæ. Dico & plana B C, E F, per ipſas ducta, eſſe parallela. Ex A, enim deducatur ad planum E F, perpendicularis A G, occurrens plano E F, in 11. undec. puncto G. Deinde in plano E F, per G, ducantur G H, G I, 31. primi.

ipſis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ A B, GH,
9. undec. parallelæ ſunt ipſi D E; erunt & AB, GH, inter ſe parallelæ;
29. primi. Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Eſt
autem A G H, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit
& angulus B A G. Simili argumento
concludes, angulum C A G, rectum eſſe.
Itaque cum recta G A, ſit recta duabus
4. undec. AB, AC; recta quoque erit G A, ad planū
BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta
ad planum E F, ex conſtructione. Igitur
14. undec. parallela ſunt plana B C, D E. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe
mutuo tangentes, &c. Quod erat demonſtrandum.

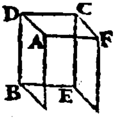


SCHOLION.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.

DATVM planum ſit A B, punctumque extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano A B, parallelum. In plano A B, ducantur vtcunque duæ rectæ D B, D A, ſe tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur D C. Deinde in plano B C, per rectas D B, D C, ducto, agatur CE,
31. primi *ipſi D B, parallela; Et in plano A C, per rectas*
D A, D C, ducto fiat quoque C F, ipſi D A, parallela. Dico planum E F, per rectas C E, C F, ductum, parallelum eſſe plano dato A B. Cum enim duæ rectæ D B, D A, ſe tangentes in D, duabus rectis C F, C F, ſe tangentibus in C, exiſtentibuſque in alio cum illis
15. undec. *plano parallelæ ſint; parallelæ erunt plana A B, E F, per ipſas*
ducta. Quod eſt propoſitum.



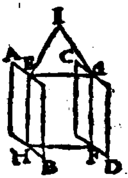
16. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam ſecentur

ſecentur : communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

SECENTVR plana A B, C D, plano E F, per rectas E H, G F. Dico communes ſectiones eorum E H, GF, eſſe lineas parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, productæ inter ſe conuenient. Cõueniant igitur in puncto I. Quia ergo tota recta H E I, in uno eſt plano, nimirum in A B, producto; Item tota recta F G I, in uno quoque eſt plano, uidelicet in C D, producto; conuenient etiã plana A B, C D, producta ad I. Quod eſt abſurdum, cũ ponantur parallela. Sunt igitur rectæ E H, G F, parallelæ. Quare ſi duo plana parallela plano quopiam ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandũ.

1. undec.



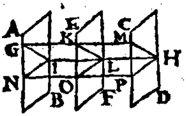
SCHOLION.

HOC theorema nulla ratione poteſt conuerti. Quamuis enim communes ſectiones planorum parallelorum facta ab alio plano ſecante ſint parallelæ, vt hic demonſtratum eſt; Non tamen omnia illa plana, quorum cõmunes ſectiones factæ ab alio plano ſecante ſunt parallelæ, parallela ſunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana poſſint duci, quorum duo tantum ſunt parallela, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

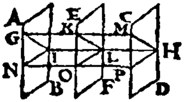
PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud ſimile theoremati 30. lib. 1. nimirum.

QVAE eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela.

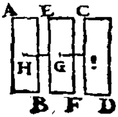
SINT duo plana A B, C D, plano E F, parallela. Dico & A B, CD, parallela eſſe. Secẽtur enim oĩa tria plana plano G H, ſintq; cõmunes eorũ ſectiones rectæ GI, KL, MH. Secẽtur rurſus alio plano N H, ſintq; communes eorum ſectiones rectæ N I, O L, P H, hac tamen lege, vt duo plana ſecantia G H, N H,



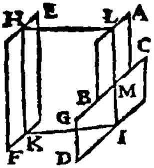
ſe quoque mutuo ſecent, quarum ſectio communis ſit linea recta H I. Quia igitur parallela plana A L, E F, ſecantur plano G H, erunt cõmunes ſectiones G I, 16. undec. K L, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt M H, K L; atque adeo parallelæ 30. primi erunt inter ſe G I, M H. Nõ aliter oſtendemus, parallelas eſſe N I, P H. Itaque cum I G, I N, ſe mutuo tangentes in I, parallelæ ſint rectis H M, H P, ſe tangentibus in H, exiſtentibusq; 15. undec. in alio plano; erunt plana A B, C D, per ipſas ducta, parallela. Quod eſt propoſitum.



ALITER. Sumatur in tertio plano E F, punctũ quodlibet G, a quo in vtramque partem educatur ad planum E F, linea recta perpendicularis, occurrens plano A B, in puncto H, & plano C D, in puncto I. Quoniam igitur linea H G, recta eſt ad planum E F, recta quoque erit ad planum A B, ſibi parallelum, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. demonſtrauimus. Eadem ratione G I, recta erit ad planum C D. Quamobrem cum recta H I, ſit recta ad plana 14. undec. A B, CD; parallela inter ſe erunt plana A B, C D. Quod eſt propoſitum.



QVOD ſi duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter ſe, ſed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ ſunt parallelæ, ſi conueniant, vnam rectam conſtituunt lineam, veluti ad propoſ. 30. lib. 1. demonſtrauimus. Sint enim plana A B, C D, plano EF, parallela, conueniantque producta ſecundum rectam C G. Dico plana A B, CD, vnum planum conſtituere. Secet enim planum quodpiam H I, omnia tria plana per lineas rectas H K, L M, M I. Quoniam igitur parallela ſunt plana A B, E F; erunt & communes ſectiones 16. undec. L M, H K, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt I M, H K. Quamobrem cum rectæ L M, I M, parallelæ ſint ipſi H K, exiſtantque in eodem plano ſecante H I, & conueniant in M; ipſæ erunt in rectum & continuum poſitæ, per ea, quæ ad 30. propos. 1. lib. oſtendimus. Ac proinde plana A B, C D, vnum

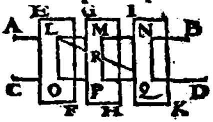


vnum planum efficient; propterea quod recta L I, in uno iaceat plano. Quod eſt propoſitum. 1. undec.

ITAQVE duo plana, quæ parallela ſint alteri plano, vel inter ſe parallela erunt, uel certe, ſi producta conueniant, vnum planum conficient.

THEOR. 15. PROPOS. 17. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur; In eaſdem rationes ſecabuntur.



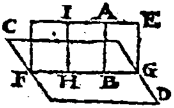
RECTAE lineæ A B, C D, (ſiue eæ parallelæ ſint, ſiue non, exiſtentes tamen in eodem plano; ſiue in tranſuerſum poſitæ, in diuerſis exiſtentes planis) ſecentur planis parallelis E F, G H, I K, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas ſecari proportionaliter, hoc eſt, ſegmẽta earum inter dicta plana intercepta eſſe proportionalia, ut quidem L M, ad M N, ita eſſe O P, ad P Q. Ducantur enim rectæ L O, N Q, in planis E F, I K, & coniungatur recta L Q, occurrens plano G H, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur R M, R P, in eodem plano G H. Eritque triangulum L N Q, in uno plano: ſimiliter triãgulum L O Q, in uno plano. 2. undec. Quoniam uero plana parallela G H, I K, ſecantur plano trianguli L N Q, erunt communes ſectiones eorum M R, N Q, parallelæ. 16. undec. Pari ratione parallelæ erunt R P, L O. Quam ob rem erit ut L R, ad R Q, ita L M, ad M N; Item ut L R, ad R Q, ita O P, ad P Q; 2. ſexti. Ac proinde ut L M, ad M N, ita O P, ad P Q. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos: Et omnia, quæ per ipſam, pla-

na eidem plano ad rectos angulos erunt.

Sɪᴛ recta A B, ad planum C D, recta. Dico omnia plana per rectam A B, ducta, eſſe recta ad idem planum C D. Ductum enim ſit per A B, planum E F, ſecans planum C D, per rectam lineam F G. Sumpto deinde puncto H, utcunque in recta F G, 31. primi ducatur in plano E F, ipſi AB, parallela H I. Quoniam igitur anguli 29. primi A B H, IHB, duobus rectis ſunt æquales: Eſt autem ABH, rectus, per 3. defin huius lib. erit & angulus I H B, rectus. Rurſus quia AB, ponitur recta ad 8. undec. planum C D; erit quoque I H, ad idem planum C D, recta. Eadem ratione erunt omnes lineæ, quæ in plano E F, ipſi A B, ducentur parallelæ, ad planum C D, rectæ: Quæ cum ducantur in plano EF, ad communem ſectionem F G, perpendiculares; rectum erit planum E F, ad planum CD, per defin. 4. huius lib. Similique argumento oſtendentur omnia alia plana per rectam A B, ducta, ad planum C D, eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

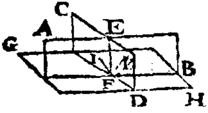


19.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana ſe mutuo ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit.

Sɪɴᴛ duo plana A B, CD, ſe mutuo ſecantia per lineã rectam E F, ad planum G H, recta. Dico communem illorum ſectionem E F, rectam quoque eſſe ad idem planum G H. Aut enim EF, ad B F, D F, communes ſectiones planorum A B, C D, cum plano G H, recta eſt, aut non. 4. undec. Si recta eſt E F, ad BF, D F, recta quoque erit ad planum G H,

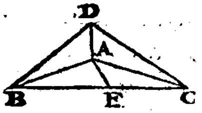


G H, quod per ipſas ducitur. Si uero E F, concedatur recta ad alteram rectarum B F, D F, tantum; Sit ea recta ad B F. Quoniam igitur planum C D, ad planum G H, ponitur rectum; erit E F, quæ in plano C D, ad B F, communem eius ſectionem cum plano G H, ducitur perpendicularis, ad planum G H, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, ſi E F, concedatur recta ad D F. Si denique E F, ad neutram B F, D F, eſſe credatur recta; ducatur ex F, in plano A B, ad B F, communem eius ſectionem cum plano G H, perpendicularis F I; Item in plano C D, 11. *primi* ad D F, communem eius ſectionem cum plano G H, perpendicularis F K. Quoniam igitur planum A B, rectum ponitur ad planum G H, erit quoque perpendicularis I F, quæ in plano A B, ad B F, communem eius ſectionem cum plano G H, ducitur, recta ad planum G H, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit K F, ad idem planum G H, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum G H, duæ perpendiculares ſunt excitatæ. Quod fieri non poſſe ſupra demonſtratum eſt. Quare E F, recta erit ad planum 13. *undec.* G H. Si duo igitur plana ſe mutuo ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

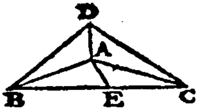
THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores.

CONTINEATVR angulus ſolidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quolibet duos reliquo eſſe maiores. Si enim omnes tres ſint æquales, perſpicuum eſt, quoſuis duos maiores eſſe reliquo: Si uero duo tantum ſint æquales, & tertius utrouis minor, conſtat quoque quoslibet duos reliquo maiores eſſe. Quod ſi unus, uidelicet BAC, ſit maximus, reliqui autem ſiue æquales, ſiue inæquales, manifeſtum etiam eſt, quemlibet horum



cum maximo illo B A C, reliquo eſſe maiorem. Dico iam hoc angulo maximo B A C, maiores quoque eſſe angulos duos B A D, D A C. In plano enim per A B, A C, ducto 23.*primi.* fiat angulus B A E, angulo B A D, æqualis; & recta A E, æqualis rectæ A D. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta B C, ſecans rectas A B, A C, in B, & C; coniunganturque rectæ B D, D C. Quoniam igitur latera A D, A B, trianguli B A D, æqualia ſunt lateribus A E, A B, trianguli B A E; & anguli quoque ipſis contenti, per 4.*primi.* conſtructionem, æquales; erunt baſes B D, B E, æquales. 20.*primi.* Quia uero latera D B, D C, maiora ſunt latere BC; ſi demantur æquales rectæ B D, B E, relinquetur recta C D, maior quam C E. Cum igitur latera A D, A C, trianguli D A C, æqualia ſint lateribus A E, A C, trianguli E A C; & 25.*primi.* baſis C D, maior baſi C E; erit angulus C A D, angulo C A E, maior. Additis ergo æqualibus angulis B A D, B A E, erunt duo anguli C A D, B A D, maiores duobus angulis C A E, B A E, hoc eſt, toto angulo B A C, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde quilibet duo multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca ſi ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat oſtendendū.



21.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis, continetur.

SIT angulus ſolidus A, contentus tribus planis angulis B A C, C A D, D A B. Dico hos tres angulos minores eſſe quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt conſtituti tres anguli ſolidi B, C, D, quorum quilibet ſub tribus angulis planis continetur, nempe B, ſub C B A, A B D, D B C. At C, ſub B C A, A C D, D C B: D, uero ſub C D A, A D B, B D C.

B D C. Quoniam uero duo anguli C B A, A B D, maiores ſunt angulo C B D; ſimiliterque duo anguli B C A, A C D, maiores angulo B C D; & duo anguli C D A, A D B, maiores angulo C D B: erunt ſex anguli C B A, A B D, B C A, A C D, C D A, A D B, tribus angulis C B D, B C D, C D B, maiores: Hi autem tres æquales ſunt duobus rectis. Illi ergo ſex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur ſex illi una cum tribus ad A, æquales ſint ſex rectis, propter triangula tria B A C, C A D, D A B, (ſunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) Si auferantur ſex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, ſolidum angulum conſtituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo ſolidus angulus &c. Quod erat demonſtrandum.

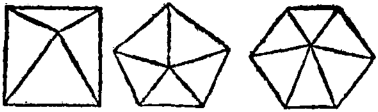
20. *vndec.*

32. *primi.*

32. *primi.*

SCHOLION.

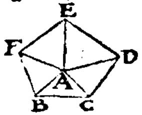
QVONIAM *hæc demonſtratio ab interpretibus accommodatur ſoli illi angulo ſolido, quem tres plani anguli conſtituunt; idcirco nos eã ad oẽs angulos ſolidos extẽdemus hoc modo.*



SIT *angulus ſolidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos eſſe quatuor rectis quoque minores. Nam ſi omnibus angulis planis recta ſubtendantur ordine in eodem plano exiſtentes; conſtituetur pyramis, cuius vertex datus angulus ſolidus, tot laterum, angulorumue, ſub quot angulis planis ſolidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorũ (cum anguli cuiuslibet trianguli duobus ſint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet baſis: Sed omnes anguli baſis æquales ſunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propoſ. 1. lib. demonſtrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum ſuperabunt omnes angulos baſis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (propterea quod prope baſin conſtituantur anguli ſolidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, & horum*

32. *primi*

20. vndec. *horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in baſi, ſint maiores) ſuperabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorundem prope baſin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum ſuperent illos eorundem, qui prope baſin, angulis ſolidum angulum conſtituentibus; erunt anguli, qui angulum ſolidum componunt, quatuor rectis minores. Quod eſt propoſitum.*



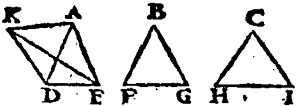
VERVM vt res melius percipiatur, ſit gratia exempli angulus ſolidus A, contentus quinque angulis planis B A C, C A D, D A F, F A F, F A B, quibus ſubtendantur ordine rectæ B C, C D, D E, E F, F B, ita ut conſtituatur pyramis pentagona, habens videlicet baſin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum ſolidum A. Quia vero omnes anguli quinque triangulorum B A C, C A D, D A E, 32. primi *E A F, F A B, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis B C D E F, æquales ſunt ſex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cum enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis A B C, A B F, C B F, contineatur; erunt duo C B A, A BF, qui ſunt in triangulis, maiores angulo C B F, qui eſt in baſi:* 20. vndec. *Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinque angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, ut dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in alijs omnibus angulis ſolidis.*

22. THEOR. 20. PROPOS. 22.

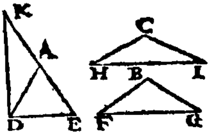
SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet aſſumpti reliquo ſint maiores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales: fieri poteſt, ut ex lineis æquales illas

rectas

rectas cõnectentibus triangulũ cõſtituatur.



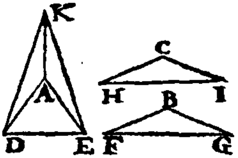
SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus A D, A E, B F, B G, C H, C I, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis D E, F G, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulũ poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarũ D E, F G, H I, quaslibet duas reliqua eſſe maiores. Nam hoc poſito, ex ipſis triangulum 22.primi. facile conficietur. Quod enim duæ D E. F G, maiores ſint, quam HI, ita oſtẽdetur. Fiat angulus DAK, angulo B, 23.primi. æqualis, cadatq; primo A K, ad partes A D, ita ut fiat totus quidã angulus E A K, ex duobus E A D, D A K, compoſitus; quod quidẽ cõtinget, quãdo duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur autẽ A K, ipſi A D, ęqualis, cõnectanturq; rectę K D, K E. Quoniã igitur latera A K, A D, triãguli A K D, ęqualia ſunt lateribus BF, BG, triãguli BFG; & anguli ipſis cõtenti DAK, & B, ęquales; erũt & baſes KD, 4.primi. F G, ęquales. Rurſus quia latera A K, A E, triãguli A K E, ęqualia ſunt lateribus C H, CI; & angulus E A K, maior angulo C; propterea quod duo anguli D A E, & B, maiores ponuntur angulo C; erit & baſis E K, maior baſe H I: Sunt au- 24.primi tẽ rectæ E D, DK, maiores recta E K. 20.primi. Igitur multo maiores erũt ED, DK, quã HI. Cũ ergo D K, oſtẽſa ſit ęqualis rectę FG; erũt quoq; D E, FG, maiores quã HI. Quod eſt ꝓpoſitũ.



CADAT ſecundo A K, in rectum & cõtinuum ipſi A E; quod quidẽ accidet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt ęquales. Ponaturq; AK, ipſi A D, æqualis rursũ, & connectatur recta K D. Erit igitur, ut prius, K D, ipſi FG, æqualis. 4.primi. Quoniam uero rectæ E D, D K, maiores ſunt recta K E; & K E, æ- 20.primi. qualis eſt rectis C H, C I, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoque E D, D K, maiores duabus C H, C I: Hæ autem maiores ſunt, quam H I. Igitur multo maiores erunt E D, 20. primi D K, quam H I. Cum ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi

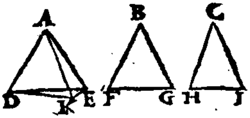
ipſi F G ; erunt quoque D E, F G, maiores quam H I.
Quod eſt propoſitum.

CADAT poſtremo A K, ad partes A E, ita ut nec angulus
totus componatur ex angulis E A D, D A K, nec



recta ſit E A K; quod demum
eueniet, quando duo anguli
D A E, & B, duobus rectis ſunt
maiores. Ponaturque rurſum
A K, ipſi A D, æqualis, & ducantur
rectæ K D, K E. Erit igitur,
4.primi. ut prius K D, ipſi F G, æ-
21.primi. qualis. Quoniam uero duæ D E, D K, maiores ſunt duabus
A E, A K; & A E, A K, æquales duabus C H, C I, ex
hypotheſi, & conſtructione; erunt quoque D E, D K, maiores
quam C H, C I: Hæ autem maiores ſunt, quam H I.
20.primi. Igitur multo erunt maiores D E, D K, quam H I. Cum
ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt quoque D E,
F G, maiores quam H I. quod eſt propoſitum. Eodem
modo concludemus D E, H I, maiores eſſe, quam F G,
ſi angulus D A K, angulo C, fiat æqualis; Item F G, H I,
maiores, quam D E, ſi angulo C, ad F G, conſtituatur an-
22.primi. gulus æqualis, &c. Quare ex tribus rectis D E, F G, H I,
triangulum cõſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani,
&c. Quod erat demonſtrandum.

ALITER. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales; erũt
4.primi. quoque baſes D E, F G, H I, æquales; Ac proinde quælibet
duæ reliqua maiores. Si uero duo tantum anguli ſunt



æquales, & tertius minor;
4. primi erunt quoque duæ illorum baſes
24.primi. æquales, & baſis tertij utraque
minor: Quare rurſus
quælibet duæ maiores erunt
reliqua. Quod ſi unus eorum, nempe A, ſit maximus,
ſiue reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſiue inæquales;
24.primi. erit quoque baſis D E, omnium maxima. Quare D E,
F G, maiores erunt quam H I: Item D E, H I, maiores,
quam F G. Dico iam & rectas F G, H I, maiores eſſe recta
23.primi. D E. Fiat enim angulus D A K, æqualis angulo B, ponaturque
A K, ipſi A D, æqualis. Cadet ergo punctum K,
infra

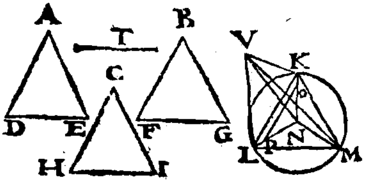
infra D E; propterea quod per puncta D, K, E, tranſeat circunferentia circuli ex A, ad interuallum A D, deſcripta, ob æqualitatem rectarum A D, A K, A E. Connectantur deinde rectæ D K, K E. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo D A E; & B, æqualis eſt angulo D A K, per conſtructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo K A E. Et quia latera A D, A K, trianguli A D K, æqualia ſunt lateribus B F, B G; trianguli B F G; & anguli ipſis contenti D A K, & B, æquales; erit baſis D K, baſi F G, æqualis. Rurſus quia latera C H, C I, 4.*primi.* trianguli C H I, æqualia ſunt lateribus A K, A E, trianguli A K E; & angulus C, oſtenſus maior angulo K A E; erit & baſis H I, maior baſe K E. Quare cum D K, oſtenſa ſit 24.*primi.* æqualis ipſi F G; erunt F G, H I, maiores quam D K, K E: Sed *D K, K E*, maiores ſunt, quam D E. Igitur multo 20.*primi.* maiores erunt F G, H I, quam D E. Quod eſt propoſitũ.

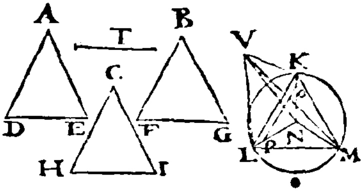
PROBL. 3. PROPOS. 23.

23.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac cõditione, ut quilibet duo ſint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis *A*, *B*, *C*, angulum ſolidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis ſint æquales. Ponantur ſex lineæ angulos dictos cõprehendentes, nẽpe A D, A E, B F, B G, C H, C I, æquales; ſubtendanturque baſes D E, F G, H I. Fieri ergo poteſt, ut ex D E, F G, H I, triangulum conſtituatur. 22. *undec.*

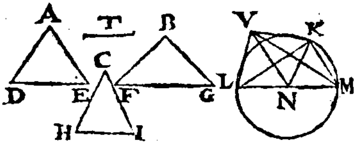


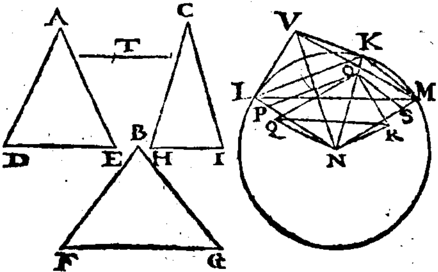


ſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triangulū KLM, ſitq;
latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG; & latus KM,
5. quarti. rectæ HI, æquale. Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrū
N, a quo ducantur rectę NK, NL,
NM. Eritq; quælibet rectarum angulos planos comprehendentiū, nempe
AD, AE, &c.
maior quālibet ductarum ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primo
centrū N, intra triangulū KLM; quod quidem fiet, quando
triangulū eſt oxygonium. Si igitur AD, AE, maiores non
credantur, quā NK, NL, erūt uel æquales, uel minores. Sint
ergo ęquales. Quoniā igitur latera AD, AE, triāguli ADE,
æqualia ſunt lateribus NK, NL, trianguli NKL; & baſis
8. primi. DE, baſi KL, æqualis: erit angulus A, angulo KNL, ęqualis.
Eodē argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus
C, angulo MNK, ęqualis. Cum igitur tres anguli circa
N, ęquales ſint quatuor rectis, ex coroll. propoſ. 15. lib. 1 erūt
quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt
abſurdum. ponuntur n. quatuor rectis minores. Non igitur
æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Dico quod neq; minores.
Si n. minores ſint AD, AE, quā NK, NL; abſcindantur
NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP.
Quoniā igitur eſt ut NK, ad NO, ita NL, ad NP, cū & antecedētia
inter ſe, & cōſequentia ſint inter ſe æqualia; erunt
latera NK, NL, trianguli NKL, ſecta proportionaliter; ac
2. ſexti. proinde OP, ipſi KL, parallela erit. Quare anguli NOP,
29. primi. NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum
NOP, triāgulo NKL, æquiangulum. Igitur erit ut NK, ad
4. ſexti. KL, ita NO, ad OP. Eſt autē NK, maior quā NO. Igitur
14 quinti & KL, hoc eſt, DE, quę æqualis eſt ipſi KL, maior erit, quā
OP. Quocirca cū latera AD, AE, triāguli ADE, ſint æqualia
lateribus NO, NP, triāguli NOP; & baſis DE, maior baſe
25. primi OP; erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadē ratione
angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior

ior eſſe oſtendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod eſt abſurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur minores ſunt AD, AE, quã NK, NL; ſed neq; æquales: Igitur maiores.

Cadat ſecundo centrum N, in latus LM; quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum. Si igitur AD, AE, dicantur eſſe æquales ipſis NK, NL; erũt quoque BF, BG, ęquales eiſdẽ NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Poſita autẽ fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur BF, BG, æquales quoq; ſunt rectæ FG. Sunt autẽ & maiores BF, BG, quã FG. *20. primi.* Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoq; BF, BG, minores quã NK, NL. Cũ ergo NK, ęqualis ſit ipſi NM; minores erunt BF, BG, quã recta LM: Poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoq; ſunt recta FG. Quod eſt abſurdum, cum ſint maiores. *20. primi.* Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores.





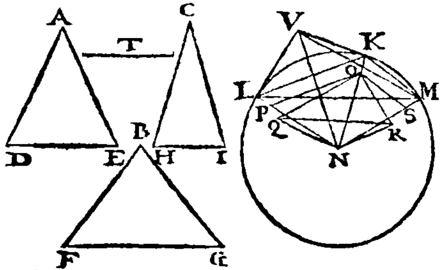
Cadat poſtremo centrũ N, extra triãgulum KLM, infra latus LM; quod demum accidet, quãdo angulus LKM, fuerit obtuſus. Si igitur dicãtur AD, AE, eſſe ęquales ipſis NK, NL; cũ & baſis DE, baſi KL, ponatur ęqualis; erit angulus A, angulo KNL, ęqualis. *8. primi.* Eadẽ ratione angulus C, angulo lo KNM,æqualis erit. Quare totus angulus LNM,angulis A,& C,æqualis erit: Sed hi duo maiores ſunt ex hypotheſi, angulo B. Igitur & angulus L N M, angulo B, erit maior. Rurſus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia ſunt lateribus B F, B G, trianguli B F G; & baſis L M, baſi F G, æqualis; erit angulus L N M, angulo B, æqualis: Sed & maiorē oſtendimus eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur ęquales ſunt AD, A E, ipſis N K, NL. Quod ſi A D, A E, credantur eſſe minores, quam N K, N L; Si abſcindantur N O, N P, ipſis A D, A E, æquales, & ducatur recta O P; demonſtrabitur, ut in primo caſu, angulus A, maior angulo O N P; & eadē ratione angulus C, maior angulo KNM. Fiat angulus O N Q, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis: ponanturque N Q, N R, æquales ipſis A D, A E, & connectantur O Q, O R; cadetq; OQ, infra O P, propterea quod per puncta O, P, Q, tranſeat circunferentia circuli ex N, ad interuallum N O, deſcripta, cum æquales ſint rectæ N O, N P, N Q. Quare cum angulus P O N, æqualis ſit angulo L K N, externus interno; erit angulus Q O N, minor angulo L K N. Eadem ratione oſtendetur angulus N O R, minor angulo NKM, ſi ducatur O S, parallela ipſi K M. Cadet enim ſimiliter O R, infra O S. Igitur totus angulus L K M, toto angulo Q O R, maior erit. Quoniam uero latera N O, NQ, trianguli N O Q, æqualia ſunt lateribus A D, A E, trianguli A D E; Eſt autem & angulus O N Q, angulo A, æqualis, per conſtructionem; erit O Q, ipſi D E, hoc eſt, ipſi K L, æqualis. Eodem modo erit O R, ipſi K M, æqualis. Connexa iam recta Q R, cum latera K L, K M, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus O Q, O R, triãguli OQR; & angulus

8.*primi.*

23.*primi*

29.*primi*

4.*primi*



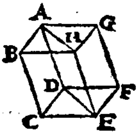
& angulus L K M, maior angulo Q O R, ut oſtendimus:
erit baſis L M, hoc eſt F G, maior baſe Q R. Quoniam igitur 24. *primi.*
latera B F, B G, trianguli B F G, æqualia ſunt lateribus
N Q, N R, trianguli N Q R; & baſis F G, maior baſe
Q R; erit angulus B, maior angulo Q N R. Rurſus quia 25. *primi.*
angulus O N Q, angulo A; & angulus O N R, angulo C,
factus eſt æqualis, erit angulus totus Q N R, duobus A,
& C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B.
Igitur & angulus Q N R, maior erit angulo B. Quod eſt
abſurdum, cum B, oſtenſus ſit maior angulo Q N R.
Non ergo minores ſunt A D, A E, quam N K, N L; ſed
neque æquales: Igitur maiores.

IAM uero, cum rectæ A D, A E, maiores ſint rectis
N K, N L, ubicunque centrum N, exiſtat; poſſit recta A D,
plus quam recta N K, quadrato lineæ T, per lemma propoſ.
14. lib. 10. ita ut quadratum rectę A D, æquale ſit quadratis
rectarum N K, & T. Ex centro N, excitetur ad planum
circuli K L M, perpendicularis N V, rectæ T, æqualis; 12. *undec.*
connectanturq; rectæ K V, L V, M V. Quoniam igitur
N V, recta eſt ad planum circuli K L M, recta quoque
eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas N K, N L, N M;
ac proinde quadratum rectæ V K, quadratis rectarum K N, 47. *primi.*
N V, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ A D, æquale
ſit ex conſtructione, eiſdem quadratis rectarum K N,
N V; æqualia erunt inter ſe quadrata rectarũ V K, & A D.
Ac propterea æquales erunt rectæ V K, A D. Rurſus quia
latera V N, N K, trianguli V N K, æqualia ſunt lateribus
V N, N L, trianguli V N L; & anguli ipſis contenti V N K,
V N L, recti; erit baſis V K, æqualis baſi V L; Atq; eadem 4. *primi.*
ratione rectæ V M. Quare tres rectæ V K, V L, V M, æquales
ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta V K, æqualis rectæ
A D. Tres ergo rectæ V K, V L, V M, æquales ſunt rectæ
A D, & ob id, rectis A E, B F, B G, C H, C I. Quamobrem,
cum latera V K, V L, trianguli V K L, æqualia ſint
lateribus A D, A E, trianguli A D E; & baſis K L, baſi
D E; erit angulus K V L, angulo A, æqualis. Non ſecus 8. *undec.*
demonſtrabimus, angulum L V M, angulo B; & angulum
K V M, angulo C, eſſe æqualem. Quare angulus ſolidus
V, continetur tribus angulis planis K V L, L V M, M V K,

qui æquales ſunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

24. THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt, ſimilia, & æqualia.



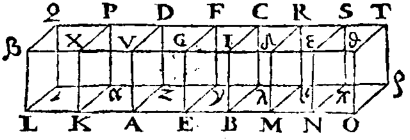
SIT parallelepipedum A B E F, (de hoc enim intelligẽda
eſt propoſitio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. ſex
figuris quadrilateris A C, C F, F H, H A, A F, B E, quarũ
aduerſæ quælibet ſint parallelæ. Dico quæuis oppoſita plana
eſſe parallelogramma, ſimilia, & æqualia. Cum enim
parallela plana B G, C F, ſecentur plano A C; erunt communes
16. undec. ſectiones A B, D C, parallelæ. Similiter cum plana
parallela A F, B E, ſecentur plano A C;
erunt communes ſectiones A D, B C, parallelæ;
Ac proindę parallelogrammum
eſt figura quadrilatera A B C D. Non aliter
oſtendemus, reliquas figuras quadrilateras
eſſe parallelogramma. Dico iam
oppoſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia. Cum enim
rectæ A B, B H, parallelæ ſint rectis D C, C E, & non
10. undec. in eodem plano, ſed in oppoſitis; erunt anguli ABH, DCE,
æquales; eodemq; argumento reliqui anguli parallelogrammi
BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF.
Quoniam vero A B, ipſi D C, in parallelogrammo A C;
34. primi. & B H, ipſi C E, in parallelogrammo B E, æqualis eſt; erit
vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea ut BH, ad HG,
ita CE, ad EF, &c. eadẽ de cauſa: Erunt latera parallelogrãmorũ
BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac ꝓinde
parallelogramma ipſa ſimilia. Ductis iã diametris AH,
34. primi. DE; cũ latera AB, BH, triãguli ABH, æqualia ſint lateribus
10. undec. DC, CE, triãguli DCE; & angulꝰ ABH, angulo DCE, æqualis,
4. primi. ut oſtẽſum eſt; erũt triãgula ABH, DCE, æqualia inter
34. primi. ſe. Quare cũ triãgula ABH, DCE, dimidia ſint parallelogrãmorũ
BG, CF; erũt parallelogrãma BG CF, inter ſe æqualia.
Similiter demõſtrabimꝰ, ſimilia & æqualia eſſe parallelogram-

lelogrãma oppoſita AC,GE;& AF,BE.Si ſolidũ ergo parallelis planis contineatur,aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt,ſimilia,& æqualia. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 25. 25.

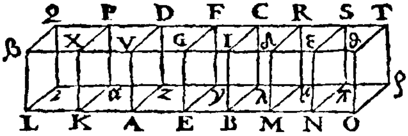
SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodũ baſis ad baſim,ita ſolidũ ad ſolidũ.

SECETVR parallelepipedũ ABCD, plano EF, parallelo oppoſitis planis AD, BC. Dico ut eſt baſis AG,ad baſin BG,ita eſſe ſolidũ AEFD,ad ſolidũ BEFC. Intelligatenim parallelepipedũ ABCD, productũ in utramq; partẽ quantumlibet,ſumãturq; in AB,protracta quotcunq; rectæ AK, KL,ipſi AE; & quotcunq; rectæ BM,MN,NO,ipſi EB, æqua ꝫ.Deinde per pũcta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ; MR,



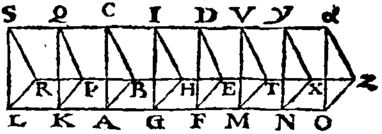
NS,OT,parallela planis AD,EF,BC,ꝑ ſcholion ꝓpoſ. 15. huius lib. Quoniã igitur ſolidũ AEFD, cõtinetur planis parallelis ex hypotheſi;ipſum erit parallelepipedũ, ex definitione,habebitq; plana oppoſita,parallelogrãma,ſimilia,& ęqualia. 24. undec. Eodẽ mõ erũt parallelepipeda AKPD,KLQP;EBCF, BMRC,MNSR,NOTS;ELQF,EOTF; habebũtq; plana oppoſita,parallelogrãma,ſimilia,& ęqualia. Quoniam uero parallelogrãma AG,KV,LX,cũ ſint ſuꝑ ęquales baſes AE, AK,KL,æqualia ſunt;& ſimilia quoq;,cũ anguli unius ſint 36. primi. æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æ- 29. primi. qualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque ratione æqualia, & ſimilia ſunt parallelogrãma AY,KZ,Lα.Cũ igiť ęqualia quoq; ſint,& ſimilia parallelogrãma AD,KP,LQ; Erũt tria plana AG,AY,AD, ſolidi AEFD, æqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AKPD; & tribus planis LX, Lα, LQ, ſolidi KLQP: Sunt autem tria in unoquo-

24. *undec.* que ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodem, nempe A G, ipſi Z F; & A Y, ipſi V F; & A D, ipſi E F, &c. Igitur per defin. 10. huius libri, æqualia ſunt ſolida A E F D, A K P D, K L Q P. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida E B C F, B M R C, M N S R, N O T S. Quare quam multiplex eſt baſis L G, baſis A G, tam multiplex erit ſolidum L E F Q, ſolidi A E F D; Et quam multiplex eſt baſis O G, baſis B G, tam multiplex erit ſolidum O E F T, ſolidi B E F C. Quoniam uero ſi baſis L G, (multiplex baſis A G, primę magnitudinis,) æqualis eſt baſi O G, (multiplici baſis B G, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt ſolidum L E F Q, (multiplex ſolidi A E F D, tertiæ magnitudinis) ſolido O E F T, (multiplici ſolidi B E F C, quartæ magnitudinis,) propterea quod baſibus L G, O G, æqualibus exiſtentibus, æqualia quoque ſint & ſimilia ſex parallelogramma ſolidi L E F Q, ſex parallelogrammis ſolidi O E F T: Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidum quoque ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut baſis A G, prima magnitudo, ad baſin B G, ſecundam magnitudinem, ita ſolidum A E F D, tertia magnitudo, ad ſolidum B E F C, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonſtrabitur eſſe ſolidum ad ſolidum, ut eſt baſis D Y, ad baſin C Y; & ut baſis A Y, ad baſin B Y; & ut baſis D G, ad baſin C G. Si ſolidum igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.



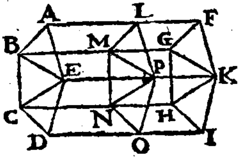
SCHOLION.

HAEC propoſitio accommodari etiam poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunque plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma A B C D E F, cuius plana aduerſa ſint triangula A B C, D E F; ſeceturq; plano G H I, ad-



verſis planis parallelo. Dico ut eſt baſis A I, ad baſin F I, ita eſſe ſolidum A B C I H G, ad ſolidum F E D I H G. Intelligatur priſma A B C D E F, in utramque partem quantumlibet productum, & ex A F, protracta utrinq; capiantur quotcũq; rectæ AK, K L, ipſi AG; & quotcunque rectæ F M, M N, N O, ipſi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana K P Q, L R S; M T V, N X Y, O Z α, parallela planis A B C, G H I, F E D, per ſcholion propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela A B C, G H I, ſecantur plano A I; erunt com-
munes ſectiones A C, G I, parallelæ: Sunt autem & A G, 16. undec.
C I, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum A D. Igitur parallelogrammum eſt A I. Rurſus quia plana parallela
A B C, G H I, ſecantur plano A H; erunt communes ſectio- 16. undec.
nes A B, G H, parallelæ: Sunt autem & A G, B H, parallelæ, ob parallelogrammum A E. Igitur parallelogrammum eſt A H. Eodem modo parallelogrammum oſtendetur C H. Quoniam uero latera A C, A B, trianguli A B C, æqualia ſunt la-
teribus G I, G H, trianguli G H I; cum A C, ipſi G I, & 34. primi.
A B, ipſi G H, ſit æquale; & anguli C A B, I G H, ſunt quo- 10. undec.
que æquales, eo quod rectæ C A, A B, parallelæ ſint rectis I G,
G H, & non in eodem plano: Erunt triangula A B C, G H I, 4. primi.
æqualia inter ſe, & æquiangula. Quare latera circum æqua-
les angulos proportionalia habebunt; Ac idcirco ſimilia erunt. 4. ſexti.
Igitur ſolidum A B C I H G, contentum duobus planis oppoſitis A B C, G H I, æqualibus & ſimilibus, atque parallelogrammis A I, I B, B G, priſma eſt. Eadem arte priſmata erunt A B C Q P K, K P Q S R L; F E D I H G, F E D V T M, M T V Y X N, N X Y α Z O, L R S I H G, O Z α I H G. Quoniam vero parallelogramma A I, K C, L Q, æqualia ſunt & ſimilia; necnon A H, K B, L P; & C H, Q B, S P; Erũt omnia plana priſmatis A B C I H G, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatum A B C Q P K, K P Q S R L. Quare, per defin. 10. huius lib. æqualia erunt priſmata A B C I H G, A B C Q P K, K P Q S R L. Eadem ratione æqualia erunt

priſmata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO. Quare quam multiplex eſt baſis L I, baſis A I, tam multiplex erit priſma L R S I H G, priſmatis A B C I H G; Et quam multiplex eſt baſis O I, baſis F I, tam multiplex erit priſma O Z a I H G, priſmatis F E D I H G. Quia uero ſi baſis L I, (multiplex baſis A I, primæ magnitudinis) æqualis eſt baſi O I, (multiplici baſis F I, ſecundæ magnitudinis;) æquale quoq; eſt priſma L R S I H G, (multiplex priſmatis A B C I H G, tertiæ magnitudinis,) priſmati O Z a I H G, (multiplici priſmatis F E D I H G, quartæ magnitudinis;) propterea quod baſibus L I, O I, exiſtentibus æqualibus, æqualia quoque ſint & ſimilia omnia plana priſmatis L R S I H G, omnibus planis priſmatis O Z a I H G: Si autem baſis L I, maior eſt baſe O I, priſma quoque priſmate maius eſt; & ſi minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin 6. lib. 5. ut baſis A I, prima magnitudo ad baſin F I, ſecundam magnitudinem, ita priſma A B C I H G, tertia magnitudo ad priſma F E D I H G, quartam magnitudinem. Eodem modo oſtendetur eſſe priſma ad priſma, ut eſt baſis A H, ad baſin F H: & ut baſis C H, ad baſin D H: Quod eſt propoſitum.



SIT ſecundo priſma A B C D E F G H I K, cuius oppoſita plana ſint polygona, nẽpe pentagona, ſeceturq; plano L M N O P. Dico rurſus, vt eſt baſis C M, ad baſin N G, ita eſſe ſolidum A B C D E L M N O P, ad ſolidum L M N O P F G H I K. Si enim plana oppoſita parallela reſoluantur in triangula, erit quoque priſma in totidem priſmata, quorum plana oppoſita ſunt triangula, reſolutum. Quare erit ut baſis B P, ad baſin M K, ita priſma A B E P M L, ad priſma L M P K G F, per ea, quæ demonſtrata ſunt. Eodem modo erit ut baſis C P, ad baſin N K, ita priſma B C E P M N, ad priſma M N P K G H; & priſma C D E P N O, ad priſma N O P K H I. Vt autem B P, ad M K, & C P, ad N K, 1. ſexti. ita eſt recta E P, ad rectam P K, hoc eſt, ut C N, ad N H; Et ut C N, ad N H, ita eſt C M, ad N G. Igitur priſmata A B E P M L, B C E P M N, C D E P N O, ad priſmata L M-

LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde
eandem inter ſe. Vt autem unum ad unum, ita ſe habent omnia 12. *quinti.*
ad omnia. Igitur erit ut priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH, hoc eſt, ut baſis CM, ad baſin NG; ita priſma ABCDEI.MNOP, ex tribus compoſitum ad priſma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod eſt propoſitum. Eadem prorſus erit demonſtratio in quocunque alio priſmate.

POTEST *tamen hoc idem in omni priſmate oſtendi demonſtratione, qua uſi ſumus in priſmate habente plana oppoſita, triangula ſimilia. Si enim eadem fiat conſtructio, producto priſmate in utranque partem, erunt omnia plana parallela ſecantia, inter ſe æqualia, & ſimilia; propterea quod latera*
eorum ſint parallela, nempe communes ſectiones parallelorum 16. *undec.*
planorum; ac proinde angulos æquales cōprehendant, &c. 10. *undec.*
Vnde, ut prius, oſtendentur priſmata ex una parte inter ſe æqualia, necnon & priſmata ex altera parte, &c.

COROLLARIVM.

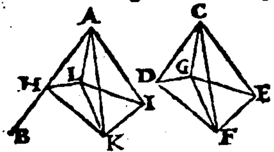
Ex his infertur, ſi priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante; Sectionem eſſe figuram æqualem, & ſimilem planis oppoſitis: Veluti demonſtratum eſt, in priori priſmate, triangulum GHI, æquale eſſe & ſimile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus eſt demonſtratio. Idem dices de parallelepipedo.

PROBL. 4. PROPOS. 26. 26.

AD datam rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, conſtituendus angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, cōtēto trib' angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodē plano exiſtētibus.
Ducat̃ ex F, ad planū ꝑ CD, CE, ductū perpēdicularis FG; 11. *undec.*

connectanturq; rectæ D F, D G, E F, E G, C G. Deinde
23. *primi.* abſcindatur A H, æqualis ipſi C D, fiatq; angulus H A I,
angulo D C E, æqualis; & recta A I, rectæ C E, æqualis.
Rurſus in plano per A H, A I, ductum conſtituatur angulus
H A L, angulo D C G, qui in plano per C D, C E, ducto
exiſtit; & recta A L, rectæ C G, æqualis. Ex L, vero
ad planum, in quo ſunt
12. *undec.* tres A H, A L, A I, erigatur
perpendicularis L K,
quæ ipſi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta K A. Dico angulum ſolidum A,
contentum tribus planis angulis H A I, H A K, K A I, ęqualem
eſſe dato angulo ſolido C. Connexis enim rectis H K,
H L, I K, I L; cum latera A H, A L, trianguli A H L, æqualia
ſint lateribus C D, C G, trianguli C D G; & anguli
H A L, D C G, æquales, per conſtructionem; Erunt baſes
4. *primi.* H L, D G, æquales. Rurſus quia ablatis angulis æqualibus
H A L, D C G, ab æqualibus H A I, D C E, reliqui
æquales ſunt L A I, G C E: Cum igitur & latera A L, A I,
trianguli A L I, æqualia ſint lateribus C G, C E, trianguli
4. *primi.* C G E, per conſtructionem; æquales quoque erunt baſes
L I, G E. Quia igitur latera L H, L K, æqualia ſunt lateribus
G D, G F; & anguli H L K, D G F, recti, ex defin. 3.
4. *primi.* huius lib. erunt & baſes H K, D F, ęquales. Quare cum &
latera A H, A K, trianguli A H K, ſint æqualia lateribus
8. *primi.* C D, C F, ex conſtructione; Erunt quoque anguli H A K,
D C F, æquales. Denique quia latera L I, L K, ſunt æqualia
lateribus G E, G F; & anguli I L K, E G F, recti, ex
4. *primi.* defin. 3. huius lib. Erunt baſes I K, E F, æquales: Cum igitur
& latera A I, A K, trianguli A I K, lateribus C E, C F,
trianguli C E F, ſint æqualia, ex conſtructione; Erunt quoque
8. *primi.* anguli I A K, E C F, æquales. Sunt ergo tres anguli
plani H A I, H A K, K A I, ſolidum angulum A, componentes,
ęquales tribus angulis planis D C E, D C F, F C E,
angulum ſolidum C, componentibus; Atque proinde ſolidus
angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaq;
rectam lineam, eiuſq; punctum, angulum ſolidum conſtituimus
ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendũ.

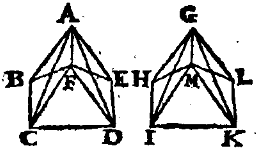


SCHO

SCHOLION.

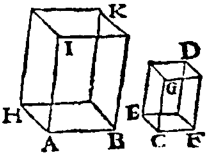
QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in uno eodemq; exiſtentes plano,(in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramiſq; quædã multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides trilateræ, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur; cõſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.

VT ſi angulo ſolido A, contento quinque angulis planis BAC,CAD,DAE,EAF,FAB, conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendendæ ſunt angulis planis rectæ BC,CD, DE, EF,FB, ut fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula reſoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, conſtituendus ſolidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et ſolido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo ſolido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus ſolidus G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.



PROBL. 5. PROPOS. 27. 27.

A DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.



Sit a data recta A B, deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterq; poſitum parallelepipedo C D. Fiat ad *26. undec.* rectam A B, eiuſq; punctum A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita ut tres anguli plani H A I, I A B, B A H, æquales ſint trib⁹ angulis planis E C G, G C F, F C E. Deinde ut eſt C F, *12. ſexti.* ad C G, ſic fiat A B, ad A I; & ut C G, ad C E, ita A I, ad A H; eritq; ex æquo, ut C F, ad C E, ita A B, ad A H. Poſt hæc, perficiatur parallelepipedũ A K, completis nimirum parallelogrammis B H, H I, I B, & per I, B, H, ductis planis I K, B K, H K, quæ parallela ſint parallelogrammis B H, H I, I B. Dico parallelepipedum A K, parallelepipedo C D, ſimile eſſe ſimiliterq; poſitum. Cum enim anguli B A H, F C E, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe ut B A, ad A H, ita F C, ad C E, ex conſtructione; erunt parallelogramma H B, E F, ſimilia, ſimiliterq; poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterq; poſita parallelogramma H I, E G; & I B, G F. Tria igitur plana B H, H I, I B, ſolidi A K, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita tribus planis F E, E G, G F, ſolidi C D. Sunt autem *24. undec.* tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi A K, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita ſex planis ſolidi C D; Ac proinde, ex defin. 9. huius lib. ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita, ſolida A K, C D. A data ergo recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

28.

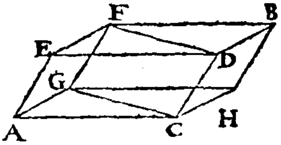
THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum: Bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

Sit parallelepipedum A B, in quo plana oppoſita ſint

A H,

A H, E B, quorum diagonij, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ C G, D F. Quoniam igitur utraque C D, G F, parallela *34. primi.* eſt, & æqualis ipſi A E, cum ſint parallelogramma C E, G E; erunt & inter ſe parallelæ, & æquales C D, G F. Ac *9. undec.* proinde, quæ ipſas coniungunt C G, D F, parallelæ erunt, *33. primi.* & æquales, ideoq; in uno plano. Dico planũ quod per C G, D F, ducitur, ſecare bifariam parallelepipedum A B. Cum enim plana A H, E B, ſint parallelogramma æqualia, & ſi- *24. undec.* milia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula A G C, G C H; E F D, F D B, æqualia inter ſe: Sunt autem & latera circa angulos æquales G A C, C H G; F E D, D B F, proportionalia; Igitur ſimilia quoque erunt dicta triangu- *6. ſexti.* la. Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale ſit & ſi- *24. undec.* mile parallelogrammo C B; & A D, ipſi G B; & C F, commune: Erunt duo triangula A G C, E F D, & parallelogramma A F, A D, C F, priſmatis A C G F E D, æqualia & ſimilia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrãmis C B, B G, C F, priſmatis H G C D B F; proptereaque priſmata ęqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum A B, ſectum erit parallelepipedum A B, bifariam. Itaque ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 24. PROPOS. 29.

29.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in ijſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

SVPER baſin A B, in eadem altitudine, hoc eſt, inter

eadem

eadem plana parallela, ſint conſtituta duo parallelepipeda A C D E, A F G E, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes in *iiſdem* collocentur *lineis*, *nempe* AI, A K, E L, E M, in recta I M; & H C, H F, B D, B G, in recta C G. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, eſſe inter ſe ęqualia. Cum enim ęqualia ſint parallelogramma A L, A M, ſuper eadem baſi A E, & in eiſdem parallelis conſtituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, ęqualia quoque triangula AIK, ELM. Quoniam uero omnia latera trianguli A I K, æqualia ſunt omnibus lateribus trianguli H C F; erit triangulum A I K, triangulo H C F, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propoſ. lib. 1. oſtendimus; Ac propterea latera circa æquales angulos habebũt proportionalia, ideoq; inter ſe erũt ſimilia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & ſimile. Rurſus quia parallelogrammum A C, æquale eſt, & ſimile parallelogrammo E D; & eadem ratione parallelogrammum A F, parallelogrammo E G; Sed & I F, ipſi L G, cum baſes I K, L M, ſint æquales, (Nam cum rectæ I L, K M, æquales ſint ipſi A E, erunt quoque inter ſe æquales; quare communi dempta K L, æquales erunt I K, L M.) Erunt omnia plana priſmatis AIKFCH, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatis E L M G D B. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta priſmata; Ac propterea addito communi ſolido A H F K L D B E, æqualia fient parallelepipeda A C D E, A F G E. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

35. primi.

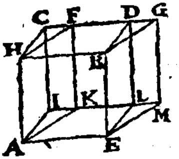
34. primi.

4. ſexti.

24. undec.

36. primi.

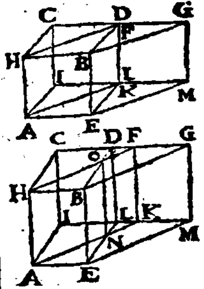
34. primi.



SCHOLION.

HAEC propoſitio perſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem fere medijs, dummodo loco triangulorum aſſumantur priſmata, ut ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel ultra L, eodem modo demonſtrabuntur, ut in his ſi-

his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu ſi ex parallelogrammis æqualibus A *L*, A *M*, *auferatur triangulum commune* A *L* E, *erunt reliqua triangula* A *I K*, E *L M*, *æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata* A *I K F* C *H*, E L *M* G D B. A*ddito ergo priſmate cõi* A *K E* B *H* D, *æqualia fiẽt parallelepipeda* A C D *E*, A F G E.



I N *tertio vero caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus* A *L*, A *M*, *dematur triangulum commune* A *N* E, *erunt reliqua trapezia* A *I L N*, *N K M E*, *æqualia; quibus ſi addatur triangulum commune K L N*, *tota triangula* A *I* K, E *L M*, *æqualia fient. Vnde, ut prius, æqualia erunt priſmata* A *I* K F C *H*, *ELMG*DB; *a quibus ſi auferatur priſma commune K L N O* D F; (*Nam communis ſectio planorum* A F, D *E*, *eſt recta N O.*) *remanebit ſolidum comprehenſum planis* AIL*N*, *N O H* A, A*ICH*, *H C D O*, *C D L I*, *D L N O*, *æquale ſolido contento planis E N* K *M*, *M KFG*, *G FO* B, *F K N O*, B *G M E*, *E B O N*. *Si igitur addatur vtrique priſma cõmune* A *E N O B H*; *fient parallelepipeda A* C D *E*, A F *G E*, *inter ſe æqualia.*

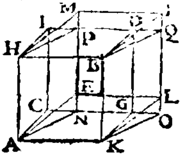
THEOR. 25. PROPOS. 30.

30.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ nõ ĩ ijſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

SVPER baſin A B, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadẽ plana parallela, ſint conſtituta parallelepipeda A I D K, A M F K, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes A C, A E, *K* G, K L; H I, H M, B D, B F, non ſint in eiſdem rectis, hoc eſt, neque C I, G D, protractæ tranſeant per puncta M, E, F, L, neque C G, I D, productæ,

ctæ, &c. Dico parallelepipeda A I D K, A M F K, eſſe æqualia. Cum enim plana C D, E F, oppoſita baſi A B, ſint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ C G, I D, quarum C G, ſecet E M, L F, protractas in punctis N, O; Et I D, eaſdem in punctis P, Q; adiunganturque rectæ A N, K O, H P, B Q.



34. *primi.* Quia igitur rectæ P Q, M F, ſunt
æquales, cum opponantur in parallelogrammo F P; & M F, ipſi H B, eſt
æqualis; erunt & P Q, H B, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter
33. *primi.* parallelogrammum H I D B. Igitur & H P, B Q, parallelæ
ſunt & æquales, ideoq; parallelogrammum eſt H P Q B.
Eadem ratione parallelogramma erunt H P N A, A N O K,
K O Q B: Eſt autem & parallelogrammum N O Q P.
Igitur parallelepipedum eſt A P Q K. Quamobrem paral-
29. *undec.* lelepipedum A I D K, æquale eſt parallelepipedo A P Q K,
cum utriuſque eadem ſit baſis A B, & inſiſtentes lineæ ſint
in rectis eiſdem C O, I Q. Eodem modo eidem parallelepipedo A P Q K, æquale erit parallelepipedum A M F K, cũ utriuſque eadem ſit baſis A B, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem N M, O F. Quare parallelepipeda A I D K, A M F K, inter ſe ſunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

CONVERTETVR *hæc propoſitio, atque præcedens, in hunc modum.*

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſin, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine.

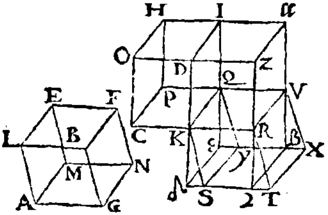
NAM *ſi unum dicatur altius; ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abſciſſum,*

abſciſſum, & reliquum. Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum. 29. *vel* 30. *undec.*

THEOR. 26. PROPOS. 31. 31. 32.

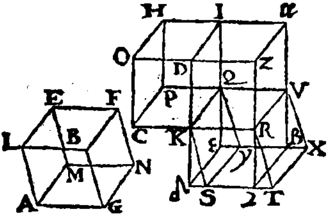
SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

SVPER æquales baſes AB, CD, in eadē altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda eſſe æqualia inter ſe. Sint.n.primū inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; & inſiſtētes CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares. Quo poſito, erunt omnes dictæ perpēdiculares inter ſe æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, ſitq; KR, æqualis ipſi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenſo æqualis angulo BLA, ponaturq; KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinē perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedū QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia. Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA; & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoq; parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. Quare cū tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, ęqualia ſint & ſimilia trib⁹ planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG; Tā aūt illa, quā hęc ęqualia ſint & ſimi- 24 *undec.*



24. *undec.* & ſimilia tribus reliquis oppoſitis: Erunt, per defin. 10. huius
lib. parallelepipeda Q S T V, E A G F, inter ſe æqualia.

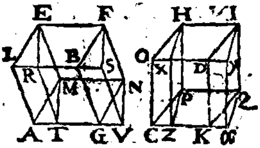
CONVENIANT rectæ D K, T S, productæ in δ; & I Q, X Y, in ε, cõpleaturq; parallelepipedum Q δ γ V. Itẽ H I, β V, protractæ conueniant in α; & O D, γ R, in Z, perficiaturq; parallelepipedum I K R α. Quoniam igitur parallelepipeda Q S T V, Q δ γ V, eandẽ habent baſin K V, ſuntq; in eadem altitudine, nempe inter eadẽ plana parallela K V, δ X, & inſiſtentes ipſorum lineæ K S, K δ, R T, R γ; Q Y, Q ε, V X, V β, collocantur in eiſdem rectis δ T, ε X; ipſa
29. *undec.* inter ſe æqualia erunt. Eſt autẽ parallelepipedum Q S T V, parallelepipedo E A G F, æquale: Igitur eidem parallelepipedo E A G F, æquale erit parallelepipedum Q δ γ V.



35. *primi.* QVONIAM vero parallelogramma K T, K γ, æqualia ſunt inter ſe; & K T, æquale eſt ipſi L G, erit & K γ, ipſi L G, hoc eſt, ipſi C D, æquale; cum baſes L G, C D, po-
7. *quinti.* nantur æquales. Quare erit, vt C D, ad D R, ita K γ, ad
25. *undec.* D R: Vt autẽ C D, baſis ad baſin D R, ita eſt ſolidũ C H I K, ad ſolidum K I α R; cum parallelepipedum C H α R, ſecetur plano I K, planis oppotitis C H, α R, parallelo: Et eadem ratione ut K γ, ad D R, ita eſt ſolidum Q δ γ V, ad ſolidum I K R α; cum & parallelepipedũ I δ γ α, ſecetur plano K V, oppoſitis planis D α, δ β, parallelo. Igitur æqua-
9. *quinti.* lia erunt parallelepipeda C H I K, Q δ γ V; cum eandem habeant proportionem ad idem ſolidum I K R α. Quare cum parallelepipedum Q δ γ V, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo A E F G; æqualia quoque erunt parallelepipeda A E F G, C H I K. Quod eſt propoſitum.

SINT iam neque inſiſtentes lineæ A M, G N, L E, B F, ad baſin A B; neque C P, K Q, O H, D I, ad baſin C D,
11. *undec.* perpendiculares: Et a punctis E, F, M, N, demittantur E R, F S, M T, N V, ad planum, in quo baſis A B, perpendiculares; Item a punctis H, I, P, Q, ad planum, in quo baſis C D,

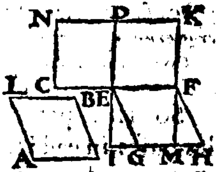
C D, perpendiculares H X, I Y, P Z, Q α. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter ſe æquales, cum ſint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ R S, S V, V T, T R: Item rectæ X Y, Y α, α Z, Z X, ut fiãt parallelepipeda E T V F, H Z α I; quæ cũ ſint eiuſdẽ altitudinis, habeantque inſiſtentes lineas perpendiculares, erunt inter ſe æqualia, ut oſtenſum eſt. Sed parallelepipedum E T V F, æquale eſt parallelepipedo A E F G, cum hoc eandem cum illo habeat baſin E N, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum H Z α I, æquale eſt eadem ratione parallelepipedo C H I K, cum hoc eandem cum illo baſin H Q, eandemque altitudinem poſſideat. Igitur & inter ſe æqualia ſunt parallelepipeda A E F G, CHIK. Idemque oſtendetur, ſi unius parallelepipedi inſiſtentes lineæ ſint perpendiculares ad baſin, alterius uero non. Quocirca ſolida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, &c. Quod demonſtrandum erat,



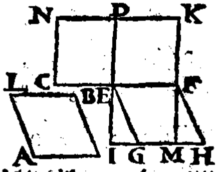
29. uel 30. undecimi.

SCHOLION.

POTEST *cum Campano expeditius fortaſſe demonſtrari, duo parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia; Nimirum ex ſolis baſibus, ſine conſtructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem ſit demonſtratio illius, quæ noſtra. Sint enim duæ baſes æquales, nempe duo parallelogramma A B, C D. Dico parallelepipeda ſuper ipſas conſtituta, in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes A B, C D, ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L; & recta EF, rectæ L B; & recta E G, rectæ L A, ponatur æqualis; per-*



ficiaturque parallelogrammum E H, quod æquale erit, & ſimile parallelogrammo A B. Conueniat autem H G, producta cum D E, producta in I, & compleatur parallelogrammum I K. Iam uero intelligantur ſuper baſes E H, I F, E K, conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper A B, C D, conſtructis; ſintq; inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper E H, æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper A B, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia ſint et ſimilia planis huius,



29. undec. *per conſtructionem: Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper E H, I F, cum habeant baſin eandem, cuius infimum latus E F, erectam ſuper planum I K; Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima G H, I M, in eodem plano, cuius infimum latus I H; atque inſiſtentes lineas E G, F H, E I, F M, &c. in eiſdem rectis lineis I H, &c. Igitur æquale erit parallelepipedū ſuper I F, parallelepipedo ſuper A B. Quoniam vero parallelo-* 35. primi *grammma E H, I F, æqualia ſunt; & E H, æquale eſt ipſi C D:* 7. quinti. *æqualia erunt I F, C D. Erit igitur, ut I F, ad E K, ita C D,* 25. undec. *ad E K: Eſt autem vt I F, ad E K, ita ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, quod ſolidum ſuper I K, ſecetur plano ſuper E F, erecto parallelo planis ſuper D K, I M, erectis. Et eadem ratione, vt C D, ad E K, ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper E K, cum ſolidum ſuper C K, ſecetur plano ſuper D E, erecto parallelo planis ſuper C N, F K, erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, ita ſolidum ſuper* 9. quinti. *C D, ad ſolidum ſuper E K; Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper I F, & C D. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper I F, æquale parallelepipedo ſuper A B. Aequalia ergo erunt et parallelepipeda ſuper A B, C D. Quod eſt ꝓpoſitū.*

CONVERTETVR *quoque hac propoſ. 31. in hunc modum.*

SOLIDA parallelepipeda ęqualia, ſuper ęquales baſes, in eadē ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadē altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin.

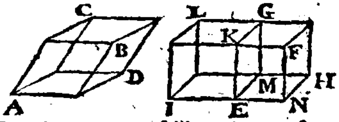
Si enim vnum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine; fient æqualia abſciſſum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur 31. undec. *æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.*

Quod ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius credatur maior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis; demonſtrabimus eodem modo, partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.

THEOR. 27. PROPOS. 32. 33.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine; inter ſe ſunt, ut baſes.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiuſdem altitudinis ſuper baſes AB, EF. Dico eſſe ſolidum ad ſolidũ, ut eſt baſis ad baſin. Super rectam enim EK, conſtruatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in 45.primi. angulo IEK, ꝗ ſit ęqualis angulo ENF. Conſtituent autem parallelogrãma EF, IF, totum parallelogrammum unum FI, ut in 45. propoſ. lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum unum parallelepipedum IFLH; erunt parallelepipeda ABCD, IK- 31. undec. LM, æqualia, cum habeant ęquales baſes, per conſtructionem AB, IK; & eandem altitudinem, ex hypotheſi. Quare erit ut ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, ita ſolidũ 7. quinti. ABCD, ad ſolidum EFGH: Eſt autem ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, ut baſis IK, hoc eſt, illi æqualis baſis 25. undec. AB, ad baſin EF. Igitur & ſolidum ABCD, erit ad ſolidum EFGH, ut baſis AB, ad baſin EF. Solida ergo parallelepipeda ſub eadem altitudine, inter ſe ſunt, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.



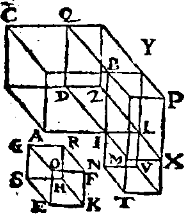
SCHOLION.

CONVERSO modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, ut baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abſcindatur minori æqualis, & ducatur planum baſi parallelum; eritque ut baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abſciſſum: ſed 32. undec.
ſic quoque erat ad totum. Abſciſſum ergo æquale eſt toti. 9. quinti
Quod eſt abſurdum.

36. THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT ſimilia parallelepipeda A B C D, EFGH, ſuper baſes ſimiles A B, E F, in quibus latera homologa ſint A I, E K. Dico proportionem parallepipedi A B C D, ad parallepipedum E F G H, eſſe triplicatam proportionis laterum homologorum A I, E K. Producatur enim A I, ad L, & ſit I L, æqualis ipſi E K, uel G R; Item D I, ad M, & ſit I M, æqualis ipſi H K, uel G O; Item B I, ad N, & ſit I N, æqualis ipſi K F, uel GS. Deinde completis parallelogrammis L M, L N, I T, perficiatur parallelepipedum T X I V. Quoniam uero latera I L, I M, æqualia ſunt lateribus G R, G O;
15. primi. & anguli contenti æquales, cum angulus L I M, ſit æqualis angulo A I D, qui ob ſimilitudinem parallelepipedorum æqualis eſt angulo E K H, ſeu R G O: Erunt parallelogramma I X, G F, ſimilia & æqualia. Eadem ratione ſimilia erunt & æqualia L N, R S; Item I T, G E. Quare tria plana I X, LN, I T, parallelepipedi T X I V, ſimilia ſunt & æqualia tribus planis G F, R S, G E, parallelepipedi EFGH:
24. undec. Sunt autem tria cuiuſque ſimilia & æqualia tribus reliquis oppo-



oppoſitis. Igitur æqualia ſunt, & ſimilia parallelepipeda
T X I V, E F G H, ex defin. 10. huius lib. Rurſus
completis parallelogrammis M B, B L, L M, perficiatur
parallelepipedum M P B L; Item completis parallelogrammis I Y,
D L, I Q, perficiatur parallelepipedum I Y Q Z.
Quoniam igitur, ob ſimilitudinem parallelepipedorum A B C D,
E F G H, eſt ut A I, ad E K, hoc eſt, ad I L, ita D I, ad
H K, hoc eſt, ad I M; & B I, ad F K, hoc eſt, ad I N.
Vt autem A I, ad I L, ita eſt parallelogrammum A D, ad D L; 1. ſexti.
Et ut D I, ad I M, ita parallelogrammum D L, ad L M; &
ut B I, ad I N, ita parallelogrammum B L, ad L N. Igitur
erit ut A D, ad D L, ita D L, ad L M; & B L, ad L N. Sed
ut A D, baſis ad D L, baſin, ita eſt parallelepipedum ADCB, 32. undec.
ad parallelepipedum D L Y Q: & ut baſis D L, ad
baſin L M, ita parallelepipedum D L Y Q, ad
parallelepipedum L M B P; Et ut baſis B L, ad baſin L N, ita
parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Quare erit,
ut parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q,
ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum LMBP,
& parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedũ LNTX.
Ac proinde quatuor quantitates ſunt continue
proportionales A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X, ideoque
proportio primæ A D C B, ad quartam L N T X, hoc eſt, ad
E F G H, erit triplicata proportionis primæ A D C B, ad
ſecundam D L Y Q, ex definitione 10. lib. 5. Vt autem ADCB,
ad D L Y Q, ita eſt baſis A D, ad baſin D L; Et ut 32. undec.
A D, ad D L, ita eſt recta A I, ad I L, hoc eſt, ad E K. Igitur 1. ſexti.
proportio parallelepipedi A D C B, ad parallelepipedum E F G H,
eſt triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum A I, ad E K. Quapropter ſimilia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

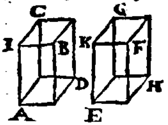
Ex hoc perſpicuum eſt, ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, ut eſt prima ad quartam, ita eſſe parallelepipedum ſuper primam deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonſtratum eſt, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad ſecundam, nimirũ laterum homologorũ.

34. 35.

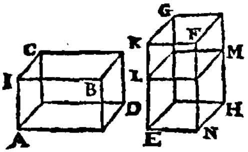
THEOR. 29. PROPOS. 34.

AEQVALIVM ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur: Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; Illa ſunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes AD, EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut AD, ad EH, ita altitudinem ſolidi EHGF, ad altitudinem ſolidi ADCB. Sint enim primo inſiſtentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita ut AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, ut baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI. Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholion propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; erit ut 7. quinti. ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum 32. undec. EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL; Et ut ſolidum EHGF, ad ſolidum EH-

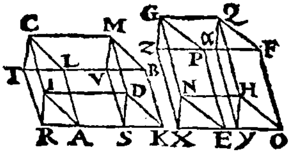


E H M L, ita eſt, eadem ratione, baſis K N, ad baſin L N, cum hac ratione ſolida E H G F, E H M L, eandem habeant altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur K N, L N; Erunt enim inter eadem plana parallela K N, G H. Igitur erit ut baſis A D, ad baſin E H, ita baſis K N, ad baſin L N: Sed ut K N, ad L N, ita eſt recta E K, ad rectam E L, 1. ſexti. hoc eſt, ad A I, ipſi E L, æqualem. Quare erit ut baſis A D, ad baſin E H, ita altitudo E K, ad altitudinem A I; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.

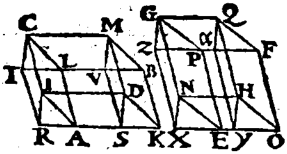
SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines E K, A I, ſunt æquales; cum ſit baſis A D, ad baſin E H, ut altitudo E K, ad altitudinem A I, ex hypotheſi; erunt & baſes A D, E H, ęquales. Quare parallelepipeda A D C B, E H G F, cũ æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe ęqualia erunt. 31. vndec.

QVOD ſi altitudo E K, maior fuerit, abſcindatur E L, ipſi A I, æqualis, & per L, ducatur planum L M, parallelum baſi E H. Quia igitur ex hypotheſi eſt, ut baſis A D, ad baſin E H, ita altitudo E K, ad altitudinem A I, hoc eſt, ad E L, ipſi A I, æqualem; Vt autẽ baſis A D, ad baſin E H, ita eſt ſolidum A D C B, ad ſolidum E H M L, cum altitudines 32. undec. A I, E L, æquales ponantur; Et ut E K, ad E L, ita eſt K N, ad L N; Vt autem baſis K N, ad baſin L N, ita eſt ſoli- 1. ſexti. dum D H G F, ad ſolidum E H M L, cum ſolida E H G F, E H- 32. undec. M L, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur K N, L N; Erunt enim hac ratione inter plana parallela K N, G H: Erit ut ſolidum A D C B, ad ſolidum E H M L, ita ſolidum E H G F, ad idem ſolidum E H M L; ideoque æqualia erunt ſolida A D C B, E H G F. 9. quinti.

SED proponantur iam parallelepida A B C D, E F G H, æqualia, quorũ inſiſtentes lineæ A I, K D, B M, L C; E N, O H, F Q, P G, nõ ſint perpendiculares ad baſes A B, E F. Demittantur autẽ a punctis I, D, M, C, ad planum baſis A B, perpendiculares I R, D S, M V, C T; Item a punctis N, H, Q, G, ad planum baſis E F, perpendiculares



diculares N X, H Y, Q α, G Z; connectanturque rectæ R S, T V, R T, S V; X Y, Z α, X Z, Y α: Eruntque perpendiculares R I, X N, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib 6. Dico rurſus, ut baſis A B, ad baſin E F, ita eſſe altitudinē X N, ad altitudinem R I. Cum enim æqualia ſint ſolida A B C D, E F G H, ex hypotheſi, ſit autem 29. uel 30. A B C D, æquale ſolido R V C D, eo quod habeant eandem undecimi. baſin C D, eandemque altitudinem R I; & E F G H, eadē ratione, æquale ſolido X α G H: Erunt & parallelepipeda R V C D, X α G H, æqualia Quare cum habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes C D, G H; erit, ut iam demonſtratum eſt, ut baſis C D, ad baſin G H, hoc eſt, ut baſis A B, ad baſin E F, ita altitudo X N, ad altitudinem R I. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



Sint iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Cōſtructa enim figura, ut prius; Cum ſit ut baſis A B, ad baſin E F, ita altitudo X N, ad alti- 24. undec. tudinem R I; Sit autē A B, ipſi C D, & E F, ipſi G H, ęqualis; Erit quoque ut baſis C D, ſolidi R V C D, ad baſin G H, ſolidi X α G H, ita altitudo X N, ad altitudinem R I. Quare, cum X N, R I, ſint inſiſtentes lineæ, perpendiculares ad baſes C D, G H; erunt, ut iam oſtenſum eſt, æqualia parallelepipeda R V C D, X α G H: Sunt autem hæc paralle- 29. uel 30. lepipeda parallelepipedis A B C D, E F G H, æqualia. Igitur undecimi. æqualia quoque erunt parallelepipeda A B C D, E F G H: Idemque oſtendetur, ſi inſiſtentes lineæ unius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius uero non. Quam ob rem, Æqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

Omnia hæc, quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt

quoque

quoque priſmatis, quæ habent duo plana oppoſita triangularia, ſi prædictæ hypotheſes ſeruētur. Nam ſi duobus priſmatis eiuſmodi eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, uel ſuper æquales baſes conſtitutis, apponantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem, uel æquales baſes exiſtentia. Quare æqualia erunt huiuſmodi parallelepipeda; ac proinde 29. 30. uel 31. undec. *& data priſmata, eorum videlicet dimidia.*

RVRSVS, *ſi duobus priſmatis prædictis eiuſdem altitudinis, & ſuper diuerſas baſes conſtitutis, adijciantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis. Quare erit parallelepipedū ad parallelepipedū, ut baſis ad baſin; Atq; adeo priſma ad priſ*- 32. undec. *ma, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad dimidium alterius,* 15. quinti *ut eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogramma, vel certe ut triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet vnius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangula.*

PRAETEREA, *ſi duobus priſmatis præfatis ſimilibus addantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, conſtituētur duo parallelepipeda ſimilia, quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur* 33. undec. *& priſmata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant* 15. quinti *proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque ſunt latera homologa priſmatum.*

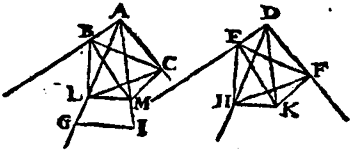
DENIQVE *ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adiungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum priſmatis. Quare cum baſes, & altitudines parallelepipedorum ſint reciprocæ;* 34. undec. *& baſes priſmatum eædem ſint, vel certe triangula earum dimidia eandem habentia proportionem;* 15. quinti *Erunt quoque baſes priſmatū & eorum altitudines reciprocæ.*

THEOR. 30. PROPOS. 35. 37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorū uerticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant,

ſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis uero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

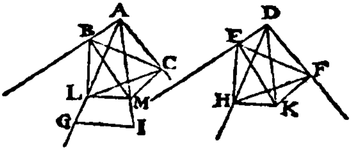
SINT duo anguli plani æquales B A C, E D F, quorum uerticibus A, & D, inſiſtant extra ipſorum plana, ſublimes rectæ lineæ A G, D H, ita ut angulus B A G, angulo E D H, & angulus C A G, angulo F D H, ſit ęqualis. A ſumptis autem punctis G, H, in rectis A G, D H, demittantur ad plana, in quibus anguli B A C, E D F, exiſtunt, pēdiculares G I, H K, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ I A, K D. Dico angulos G A I, H D K, eſſe æquales inter ſe. Nã ſi A G, D H, ſunt inæquales, auferatur a maiori A G, ipſi D H, æqualis linea A L; & ex L, ad planum anguli B A C, perpendicularis demittatur L M. Quoniam igitur G I, L M, rectæ ſunt *6. undec.* ad planum anguli B A C, ipſæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli A G I. Quare L M, cadet in rectam A I. Ducantur iam ex punctis M, K, ad rectas A B, A C, D E, D F, perpendiculares M B, M C, K E, K F; & connectantur rectæ B C, B L, L C, E F, E H, H F. Et quia L M, recta eſt ad planum anguli B A C, ipſa rectum angulum efficiet cum recta A M, in eodem plano ducta, per defin. 3. huius lib. Quare quadratum



rectę

rectæ A L, æquale erat quadratis rectarum A M, M L: 47.primi.
Eſt autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum 47.primi.
A C, C M, cum & angulus A C M, rectus ſit, ex conſtructione.
Quadratum ergo rectæ A L, ęquale eſt quadratis
rectarum A C, C M, M L: At quadratis rectarũ C M,
M L, æquale eſt quadratum rectę C L, cum angulus C M L, 47.primi.
rectus ſit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ
A L, æquale eſt quadratis rectarum A C, C L; Ac proinde
angulus A C L, rectus erit. Rurſus quia quadratum 48.primi.
rectæ A L, æquale eſt quadratis rectarum A M, M L: 47.primi.
Eſt autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum 47.primi.
A B, B M, cum angulus A B M, per conſtructionem,
ſit rectus. Igitur quadratum rectæ A L, æquale
eſt quadratis rectarum A B, B M, M L: At quadratis rectarum
B M, M L, æquale eſt quadratum rectæ B L, quod 47. primi
& angulus B M L, ſit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum
ergo rectæ A L, æquale eſt quadratis rectarum
A B, B L; proptereaque angulus A B L, erit rectus. Non 48.primi.
aliter oſtendentur recti, anguli D F H, D E H. Quoniam
igitur anguli A B L, L A B, trianguli A B L, æquales
ſunt angulis D E H, H D E, trianguli D E H; ſuntque
latera A L, D H, æqualia; Erunt & reliqua latera AB, BL, 26.primi.
reliquis lateribus D E, E H, æqualia. Eodem argumento
æquales erunt rectæ A C, C L, rectis D F, F H. Quare
cum latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſint lateribus
D E, D F, trianguli D E F; & anguli cõtenti B A C,
E D F, æquales, ex hypotheſi; erunt & baſes B C, E F, inter 4.primi.
ſe, & anguli ABC, ACB, angulis D E F, D F E, æquales:
Sunt autem & toti anguli A B M, A C M, totis angulis
D E K, D F K, æquales, cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui
anguli M B C, M C B, reliquis angulis K E F, K F E,
æquales erunt; Ac propterea cum & latera B C, E F, ſint
oſtenſa æqualia; erunt latera B M, C M, lateribus E K, F K, 26.primi.
æqualia. Quia igitur latera A C, C M, trianguli A C M,
æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli D F K; &
anguli A C M, DFK, ſunt recti; erunt & baſes A M, D K, 4.primi.
inter ſe æquales. Cum autem æquales ſint oſtenſæ rectæ
B L, E H, erunt etiam earum quadrata æqualia:
Quia uero quadratum rectæ B L, æquale eſt quadratis 47.primi.

dratis rectarum B M, M L; & quadratum rectæ E H, quadratis rectarum E K, K H, quod anguli B M L, E K H, recti ſint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum



B M, M L, æqualia quadratis rectarum E K, K H. Ablatis ergo quadratis rectarum B M, E K, quæ æqualia ſunt, quod rectæ B M, E K oſtēſę ſint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, H K, æqualia erunt, ac proinde rectę L M, H K, ęquales. Quam ob rem, cum latera A L, A M, trianguli A L M, ęqualia ſint lateribus D H, D K, trianguli D H K, & baſis L M, baſi H K, æqualis; erunt & anguli L A M, HDK, ęquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum uerticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

8. primi.

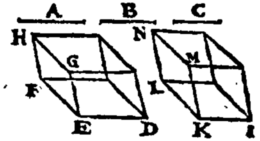
COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum uerticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, utrumque utrique. Erunt a punctis extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani B A C, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales A L, D H, conſtituunt angulos æquales LAB, H D E; Item L A C, H D F; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares L M, H K, eſſe æquales.

38. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum uero prædicto.

Sint continue proportionales tres rectæ A, B, C. Conſtituaturque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunque D E F, D E G, F E G, ita ut recta D E, ipſi A, & E F, ipſi B; & E G, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis D F, F G, G D, perficiatur parallelepipedũ D H; quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. Deinde ad rectam I K, eiuſque punctum K,
fiat ſolidus angulus K, ęqualis 26. undec.
ſolido angulo E, ex tribus angulis planis I K L, I K M, L K M, qui æquales ſint tribus D E F, D E G, F E G; ita ut rectæ I K, K L, K M, æquales ſint mediæ lineę B.

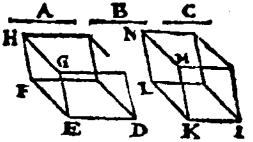


Completis uero parallelogrammis I L, L M, M I, perficiatur parallelepipedum I N; quod contineri dicitur ſub linea B, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum D H, æquale eſſe ſolido I N. Cum enim ſit ut D E, ad I K, ita K M, ad E G, (quod D E, ipſi A; & I K, K M, ipſi B; & E G, ipſi C, ſumpta ſit equalis,) & anguli D E G, I K M, æquales:
Erunt parallelogramma D G, I M, ęqualia, propterea quod 14. ſexti.
latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam uero anguli plani D E G, I K M, ſunt æquales, quorum uerticibus inſiſtunt ſublimes lineæ ęquales E F, K L, quę; quales angulos comprehendunt cum lineis primo poſitis, ex cõſtructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium D G, I M, demiſſę, nimirum altitudines parallelepipedorum D H, I N, ſi baſes ſint D G, I M, inter ſe ęquales, per coroll. propoſ. præcedentis. Quare parallelepipeda D H, I N, cũ habeant baſes D G, I M, ęquales,
& ęquales quoque altitudines, inter ſe ęqualia erunt. Si 31 undec.
tres igitur rectę lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

Viciſſim quoque, ſi parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo a media linea deſcripto: Erunt tres rectæ continue proportiona-

portionales. Sit enim parallelepipedum D H, deſcriptum ex rectis A, B, C, vt dictum eſt, æquale ſibi æquiangulo parallelepipedo I N, deſcripto a media B. Dico tres A, B, C, eſſe continue proportionales. Nam, veluti prius, oſtendentur eorum altitudines ex F, L, demiſſæ eſſe æquales. Quare cum & ipſa ponantur æqualia; erunt eorum baſes D G, I M, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. demonſtrauimus. Quæ baſes cum angulos habeant æquales D E G, I K M, ex conſtructione; habebunt latera circa illos angulos reciproca; hoc eſt, erit ut D E, ad I K, ita K M, ad E G. Quapropter cum D E, ipſi A; & I K, K M, ipſi B; & E G, ipſi C, ſumpta ſit æqualis; Erit quoque ut A, ad B, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.



14. *ſexti.*

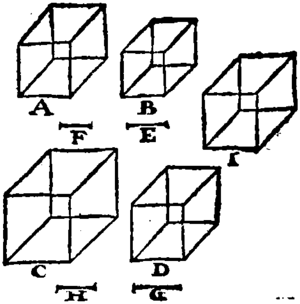
39.

THEOR. 32. PROPOS. 37.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda, quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; Vt quidem A, ad B, ita C, ad D; conſtituanturque ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & B, ſimilia ſimiliterque deſcripta; Item ſuper C, & D, alia duo C, & D, ſimilia ſimiliterque poſita, ſiue hæc ſint illis ſimilia, ſiue non. Dico eſſe quoque ſolida A, B, C, D, proportionalia; Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Inueniantur enim per ſcholion propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duę continue proportionales E, F; Item duabus

duabus C,D,alię duę G,H Quoniam igitur ſunt quatuor lineę A, B, E, F, & quatuor lineę alię C,D,G, H, quæ binę in eadem ratione ſumuntur; erit ex ęquo, ut A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B; Et ut C, ad H, ita ſolidum C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit ut ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.

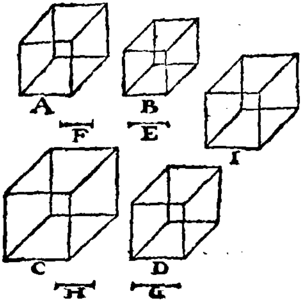


SINT iam e contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A,B,C,D,eſſe quoque proportionales. Tribus enim rectis A,B,C,inueniatur quarta proportionalis I, 12. *ſexti.* ſuper quam deſcribatur parallelepipedum ipſi D,uel C,ſimile 27. *undec.* ſimiliterque poſitum. Quoniam igitur eſt, ut recta A,ad rectam B,ita recta C,ad rectam I; erit quoque, ut iam eſt oſtenſum,ut ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum I. Vt autem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ponitur quoque ſolidum C, ad ſolidum D: Igitur erit ut ſolidum C,ad ſolidum I, ita idem ſolidum C, ad ſolidum D Ac idcirco ęqualia erunt ſolida I,& D. Quę cũ ſint ſimilia, 9. *quinti.* ſimiliterq; deſcripta,continebuntur planis ęqualibus & ſimilibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana ęqualia & ſimilia habent latera homologa ęqualia, per lemma propoſ. 22. lib 6. Igitur rectę I, & D, ęquales ſunt, Ac propterea erit, ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Poſita eſt autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque ſi quatuor rectę lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

BREVIVS tota hęc propoſitio demonſtrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primo ut recta A,ad rectam B, ita recta C,ad rectam D. Dico eſſe quoque ut ſolidum A,

ad

ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Cum enim ſit 33. undec. proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: Erunt proportiones ſolidi A, ad ſolidū B, & ſolidi C, ad ſolidum D, ęquales; quādoquidē triplicatæ ſunt proportionum ęqualium, nempe rectę A, ad rectam B; & rectæ C, ad rectam D. Quod eſt primum. Rurſus ponatur ſecundo eſſe, ut ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Dico eſſe quoque, ut recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, 33. undec. triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, ęquales; quandoquidem earum proportiones triplicatę, nimirum ſolidi A, ad ſolidum B; & ſolidi C, ad ſolidū D, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.



SCHOLION.

EODEM modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales, erūt & parallelepipeda ſimilia ſimiliterque deſcripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiuſque ſolidum ſumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor ſolida proportionalia, ut demonſtratum eſt. Cum igitur ſolidum ſecundæ lineæ æquale ſit ſolido tertiæ lineæ; & linea ſecunda æqualis tertiæ lineæ; perſpicuum eſt, quod proponitur.

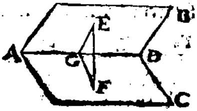
TOTA vero hæc propoſitio conuenit etiam priſmatis, quorum duo plana aduerſa æqualia, ſunt vel triangula, uel parallelogramma, ut Campanus ait. Nam additis priſmatis, quæ ſingula

ſingula ſingulis ſint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ
ut hic eſt demonſtratum, proportionalia erunt. Cum igitur
priſmata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipſis propor- 15. quinti.
tionem; perſpicuum eſt, quod proponitur.

THEOR. 33. PROPOS. 38. 13.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

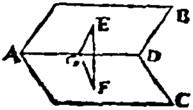
PLANVM A B, rectum ſit ad planum A C, ſitque eorum communis ſectio recta A D; Et ab E, puncto plani A B, ad planum A C, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem ſectionem A D. Nam ſi fieri poteſt, ca-
dat extra ad punctum F; & ab F, in plano A C, ducatur 12. primi.
ad rectam A D, perpendicularis F G, connectaturq; recta E G, in plano A B. Quoniam igitur F G, perpendicularis eſt ad communem ſectionem A D; erit quoque perpendicularis ad planum A B, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo ad rectam G E, per 3. defin. huius lib. Eſt autem & E F, recta ad F G, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo E F G, duo anguli E F G, E G F, recti ſunt, quod eſt abſurdũ;
cum duobus rectis ſint minores. Per- 17. primi.
pendicularis ergo ex E, demiſſa ad planum A C, non extra communem ſectionem A D, cadet. ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

HAEC eſt demonſtratio Theonis. Nos tamen idem demonſtrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano

A B, demiſſa perpendicularis ad planum A C, non cadit in communem ſectionem AD, ſed in punctum F, extra ſectionem; ducatur ex



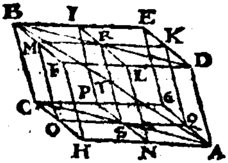
12.primi. *E, ad rectam A D, perpendicularis E G; quæ ex 4.defin. recta erit ad planum A C. Quare ex puncto E, extra planum A C, ductæ ſunt ad ipſum planum A C, duæ perpendiculares E F, E G. Quod fieri nequit, ut in ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.*

40.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerſo, planorum latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, bifariam ſe mutuo ſecabunt.

Sɪɴᴛ parallelepipedi A B, plana oppoſita AC, BD, quorum omnia latera bifariã ſecta ſint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quæ extenſa ſint duo plana IN, KO, quorum ſectio communis ſit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectã R S, & diametrũ A B, ſe mutuo ſecare bifariam. Connexis enim rectis R B, R D, S A, S C; conſiderentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia ſunt lateribus C O, O S,



trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æ-
34.primi. qualiũ AG, CH; & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN,
æquales, cum ſint parallelogramma A S, H S.) & angulus
29.primi. AQS, æqualis alterno angulo COS: Erunt & baſes AS, CS,
4. primi. ęquales; & anguli ASQ, CSO, ęquales. Atqui anguli ASQ,
13.primi. A S O, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & C S O, A S O,
duobus

duobus ſunt rectis æquales; Ac propterea AS, CS, vnã rectã 14. *primi.*
lineam conſtituent. Eodem modo oſtendentur eſſe æquales
BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectã Rurſus quia
vtraq; AD, BC, parallela eſt, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma
AF, FC; ipſæ quoq; inter ſe parallelæ erunt, & 9. *undec.*
æquales. Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes,
parallelæ ſunt, & æquales; Ac proinde ipſarum dimi- 33. *primi.*
diæ AS, BR, æquales ſunt. Quia vero A C, B D, parallelæ
ſunt; erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipſis plano, ideoq; 7. *undec.*
ſe mutuo ſecabunt, in puncto videlicet T. Cum autem duo
anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales ſint duobus angulis 29. *& 15.*
BRT, BTR, trianguli BRT; & latus A S, lateri B R: *primi.*
Erunt reliqua latera TA, T S, reliquis lateribus T B, T R, 26. *primi.*
æqualia; Ac propterea AB, RS, ſe mutuo ſecant bifariam in
T. Si igitur ſolidi parallelepipedi corũ, quæ ex aduerſo, &c.
Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

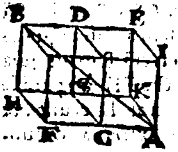
HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes ſe mutuo bifariam ſecare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonſtratum eſt, rectam R S.

SCHOLION.

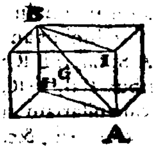
HVIC *theoremati addi poteſt aliud non diſſimile illi, quod ad propoſ. 34. primi lib. demonſtrauimus, videlicet.*

SI ſolidum pallelepipedum plano ſecetur per centrum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.

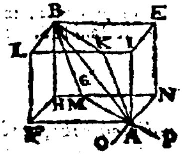
*S*ECETVR *parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc eſt, per punctum medium diametri* AB, *quod ſit* G. *Dico parallelepipedum bifariam ſecari. Sit enim primo planũ CD, oppoſitis planis* AE, *BF, parallelũ. Et quia plana parallela BF, DC, EA, ſecãt rectas quaſcũq; ꝓportionaliter; ſecatur aũt* 17. *undec.*



B A, biſariam in G; ſecabuntur quoq;
latera aduerſorum planorum A H, B I,
atque adeo & baſes A H, B I, bifariã. Cũ
25. undec. *igitur ſit vt baſis K C, ad baſin C H, ita*
ſolidum A D, ad ſolidum C B; erit parallelepipedum
A B, ſectum bifariam,
plano C D, per centrum G, ducto.



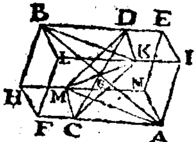
TRANSEAT ſecundo planum ſecans A I B H, per diametros
B I, A H, planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur
parallelepipedum per centrum G; immo
per totam diametrum A B; cum A B,
7. undec. *in plano ſit parallelarum A H, B I. Demonſtratum*
28. undec. *autem eſt antea, parallelepipedum ſecari plano per diametros oppoſitorum*
planorum ducto bifariam.



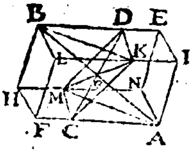
TERTIO planum ſecans A K B M, neque ſit aduerſis
planis parallelum, neque per diametros oppoſitorum planorũ
ductum, ſed tantum per angulos A, & B, planorum A H,
B I. Quoniam igitur plana parallela A H, B I, ſecantur plano
A K B M; erunt communes ſectiones
16. undec. *A M, B K, parallelæ. Similiter parallelæ*
erunt A K, B M, cum ſint communes
ſectiones planorum parallelorum
A L, B N, factæ a plano A K B M.
Quare parallelogrammũ eſt A K B M;
ideoq; tam rectæ A K, B M, quam rectæ
34. primi. *A M, B K, inter ſe erunt æquales. Quia ergo latera B K,*
B L, trianguli B K L, æqualia ſunt lateribus A M, A N,
trianguli A M N; & angulus K B L, angulo M A N, æqualis.
(Productis enim N A, M A, ad O, P, erunt A O,
10. vndec. *A P, rectis B L, B K, parallelæ; ac proinde æquales anguli*
15. primi *erunt O A P, L B K. Cum igitur O A P, æqualis ſit angulo*
M A N; æquales quoque erunt anguli K B L, M A N.)
4. primi. *Erunt baſes K L, M N, inter ſe, & anguli B K L, B L K, angulis*
A M N, A N M, æquales; & triangulum triangulo
æquale. Quare & ſimilia erunt triangula B K L, A M N,
4. ſexti. *cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam*
vero recta K L, rectæ M N; & angulus B K L, angulo
A M N; & angulus K B L, angulo M A N, eſt æqualis, ut
oſtendi-

oſtendimus; erit & reliqua I K, reliquæ H M; & reliquus angulus BKI, reliquo A M H; & reliquus K B E, reliquo M A F, æqualis. (Eſt .n. tota L I, toti N H, æqualis, & tã anguli B K L, B K I, quam anguli A M N, A M H, duobus rectis æquales; & totus angulus L B E, toti angulo N A F, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum L E, F N.) Sunt autem & latera B E, E I, lateribus A F, F H, æqualia; & anguli B E I, E I K, angulis A F H, F H M, ob parallelogramma L E, F N. Igitur quadrilaterum B K I E, & æquilaterum, & æquiangulum eſt quadrilatero A M H F; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula ſingulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & ſimilia triangula B H M, A I K; & quadrilatera A K L F, B M N E; cum inter ſe ſint & æquilatera & æquiangula. Quapropter ſolidum contentum planis A K L F, F H M A, A K B M, M H B, B K L, L B H F, æquale erit ſolido contento planis B M N E, E I K B, B M A K, K I A, A M N, N A I E, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa ſint ſimilia & æqualia, ut demonſtratum eſt. Parallelepipedum ergo A B, ſectum eſt plano A K B M, per centrum G, bifariam.

POSTREMO planum ſecans C D, neque aduerſis planis parallelum ſit, neque per diametros planorum oppoſitorum, neq; per ullos angulos eorum ductum, ſed utcunque ſecet plana oppoſita A H B I. Oſtendemus autem, ut prius, planum ſecans C D, eſſe parallelogrammum, & tam rectas C K, D M, quam rectas C M, D K, eſſe æquales. Ducantur in parallelogrammo C D, diametri C D, K M; connectanturque rectæ A M, B K, quæ parallelæ erunt, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum 16. undec. A H, B I, factæ a plano per rectas A B, K M, ducto. Quoniam igitur A F, B E, parallelæ ipſi L I, ob parallelogramma A L, L E, 9. undec. inter ſe ſunt parallelæ; Erunt A B, C D, in eodem cum illis plano; 7. undec. ac propterea ſe mutuo ſecabunt in centro G; In ſolo enim centro G, recta A B, per hypotheſin, ſecat planum C D, in quo exiſtit recta C D. Simili argumento, cum A M, B K, ſint oſtenſæ parallelæ; erunt A B, M K, in eodem cum



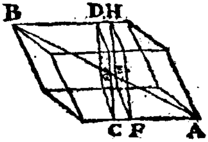
illis plano, ſeq; mutuo ſecabunt in centro G. Quare diametri CD, KM per centrum G, tranſibunt, ibiq; ſe mutuo ſecabunt; atq; adeo bifariã, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 1. oſtendimus. Quia ergo latera BG, GD, triãguli BGD, æqualia sũt lateribus
15. primi. *AG, GC, trianguli AGC; & angulus BGD, æqualis angulo*
4. primi *AGC; Erit & baſis BD, æqualis baſi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia ſint tribus lateribus AC, CM; MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propoſ. 8. lib. 1 docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Eſt autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis.*



Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; Erit & baſis KL, baſi
4. primi. *MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterũ eſt, & æquiangulum; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula conueniant ſingulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rurſus quia tota LI, toti NH, eſt æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis; Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterum eſt quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales ſint angulis CFH, FHM, propter ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, æqualia eſſe & ſimilia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, ut perſpicuum eſt. Quamobrem ſolidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale eſt ſolido*

lido cõtẽto planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cum hiſte illa ſint demonſtrata & æqualia & ſimilia. Parallelepipedum igitur AB, ſectum eſt per centrum G, plano CD, bifariam.

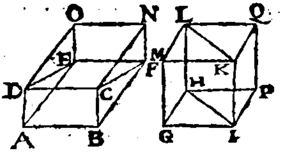
S ED *ſecetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi tranſire, hoc eſt, punctum G, in quo planum CD, ſecat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, ut ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, ſecabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, ut demonſtratum eſt. Ponitur autẽ & bifariam ſecari plano CD; Igitur ſolida CB, FB, cum ſint dimidia parallelepipedi AB, inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Nõ ergo aliud pũctũ, præter G, diuidet diametrũ AB, bifariã; Ac pinde G, cẽtrũ erit parallelepipedi. Qđ demõſtrandũ erat.*



THEOR. 35. PROPOS. 40. 41.

SI fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat baſin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: AEqualia erunt ipſa priſmata.

S INT duo priſmata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorũ illud baſin habeat parallelogrãmũ ABCD, hoc uero, triãgulũ GHI; ſitq; parallelogrãmũ AC, triãguli GHI, duplũ. *Dico* hæc priſmata eſſe æqualia. Perficiantur.n. parallelepipeda AN, GQ; Quod quidẽ fiet, ſi plana triangulorũ extendãtur, perficianturq; parallelogrãma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, conſtituta erũt duo parallelepipeda AN, GQ, eiuſdẽ altitudinis cũ priſmatis. Nam plana horum ſolidorũ oppoſita eſſe parallela; facile colligetur ex propoſ. 15. huius lib. Quoniam *34. primi.* igitur parallelogrammum G P, duplum eſt trianguli G H I; Ponitur autem & parallelogrammũ A C, eiuſdem trianguli G H I, duplum: æqualia erunt parallelogramma A C, G P. Quare parallelepipeda A N, G Q, eiuſdem altitudinis *31. undec.* ſuper æquales baſes A C, G P, inter ſe ſunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum priſmata A B C D E F, G H I K L M, (Nam parallelepipeda A N, G Q, per diametros C F, D E; H I, L K, planorum aduerſorum *28. undec.* ſecantur bifariam, in bina ſcilicet priſmata) æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaque ſi fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita; cum imperet parallelepipeda compleri; quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammũ ABCD, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BC*F. Eſſet enim iam parallelepipedum completum.*

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLIDIS

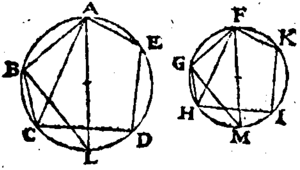
ELEMENTVM XII.

Et Solidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

QVAE in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia A B C D E, F G H I K, deſcripta in circulis, quorum diametri A L, F M. Dico ita eſſe polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K, ut quadratum diametri A L, ad quadratum diametri F M. Subtendantur enim angulis æqualibus A B C, F G H, rectæ A C, F H, & connectantur rectæ B, L, G M. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt ut A B, ad B C, ita F G,
ad G H; erunt triangula
A B C, F G H, æquiangula, 6. ſexti.
cum circa angulos
æquales A B C, F G H,
habeant latera proportionalia:
Eſt autem angulus A L B, angulo 21. tertij.
A C B; & angulus F M G, angulo F H G, æqualis. Igitur
& anguli A L B, F M G, æquales erunt. Cum ergo & anguli
A B L, F G M, æquales ſint, nempe recti in ſemicirculis 31. tertij.
exiſtentes; erunt & reliqui B A L, G F M, æquales. Quare 32. primi.
erit ut A L, ad A B, ita F M, ad F G; & permutando, vt 4. ſexti.



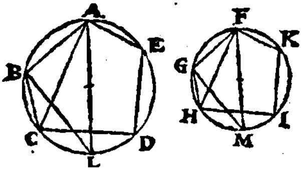
A L, ad

A L, ad F M, ita A B, ad F G. Igitur eſt ut quadratum ex A L, ad quadratum ex F M, ita polygonum A B C D E, ſuper A B, ad polygonum F G H I *K*, ſuper F G; cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ. Quæ itaque in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, ut a diametris quadrata. Quod erat demonſtrandum. 22. *ſexti.*

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata.



Hec figura pertinet ad superiorē demonstrationē vide pagu.

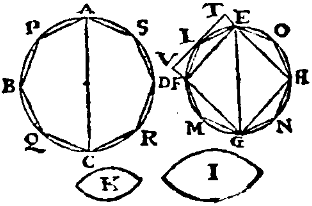
Sint duo circuli A B C D, E F G H, quorum diametri A C, E G. Dico eſſe, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulum A B C D, ad circulum E F G H. Si enim res non ita ſe habet; Sit ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ uel minor erit, uel maior circulo E F G H. Si .n. eſſet æqualis, haberet circulus A B C D, ad circulum E F G H, & ad I, eandem proportionẽ; 7. *quinti.* ac propterea eſſet circulus A B C D, ad circulum E F G H, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor quam circulus E F G H, magnitudine ſcilicet *K*, ita ut circulus E F G H, ęqualis ſit magnitudinibus I, & K, ſimul. Inſcribatur in circulo E F G H quadratũ E F G H; qđ quia dimidiũ eſt quadrati circa eũdẽ circulũ deſcripti, ut ad ꝓpoſ. 9 lib. 4. oſtẽdimus, maius erit, q̃ dimidium circuli E F G H. Secentur biſariam peripheriæ E F, F G, G H, H E, in punctis L, M, N, O, adiunganturq; rectæ L E, L F, M F, M G, N G, N H, O H, O E. Ducatur per L, recta T V, tangens circulũ in L, quæ parallela erit ipſi E F, ut ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratq; rectis H E, G F, productis in T, & V. Quia ergo triangulũ E L F, dimidiũ eſt parallelogrammi T E F V; maius erit triangulũ E L F, quã dimidiũ ſegmẽti circuli E L F. Eadẽ ratione erunt reliqua triangula 41. *primi.*

la maiora, quam dimidia ſegmētorū, in quibus ſunt. Omnia
igitur triangula ſimul maiora ſunt, quā dimidium omnium
ſegmentorū ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ EL, LF, &c.
ſecentur bifariā, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur
eodem modo triangula, quæ maiora erunt ſimul, quā dimidium
omnium ſegmentorū ſimul, in quibus ſunt; & ſic deinceps.
Quoniam uero, ſi a circulo E F G H, auferatur plus
quam dimidium, nempe quadratum E F G H; & a reliquis
ſegmentis plus quā dimidiū, nēpe triāgula ELF, FMG, &c.
atque in hūc modum ſemper fiat detractio; relinquitur tandem
minor magnitudo, quam K, exceſſus inter circulum 1. decimi.
EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli ſegmenta relicta
EL, LF, FM, &c. ſimul ſūpta minora, quam magnitudo
K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus
I, & K, ſimul; ſi ex circulo detrahantur dicta ſegmenta,
& ex I, & K, ipſa magnitudo K, quæ maior eſt præfatis
circuli ſegmentis; erit reliquum polygonū ELFMGNHO,
maius reliqua magnitudine I. Inſcribatur in circulo ABCD,
polygonum APBQCRDS, ſimile polygono ELFMGNHO.
Quod quidem facile fiet, ſi ſemicirculi ABC, ADC, bifariā
ſecentur in B, & D; & rurſus circunferentiæ AB, BC,
CD, DA, bifariā in P, Q, R, S; & ſic deinceps, donec in tot
partes æquales diuiſa ſit circūferētia ABCD, in quot diſtributa
ē circūferētia EFGH. Nā iūctis rectis AP, PB, BQ, &c.
erit figura inſcripta ſimilis figuræ ELFMGNHO, ut patet.
Quoniā igitur eſt polygonū APBQCRDS, ad polygonū 2. duodec.
ELFMGNHO, ut quadratū diametri AC, ad quadratum
diametri EG, hoc eſt, per hypotheſin, ut circulus ABCD,
ad I: Eſt aūt polygonum APBQCRDS, minus circulo
ABCD. Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit 14. quinti.
quam I. Oſtenſum aūt eſt & maius. Quod eſt abſurdum.
Non igitur minor eſt magnitudo I, circulo EFGH.

Sit ſecundo magnitudo I, maior circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, eſſe ut quadratū diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertēdo I, ad circulum ABCD, ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur ut I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinē aliquā, nēpe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, maior quoque erit circulus

circulus A B C D, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C, ita circulus E F G H, ad magnitudinem K, quæ minor eſt circulo A B C D. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem. Non ergo maior eſt magnitudo I, circulo EFGH. Sed neq; minor eſt oſtenſa. æqualis igitur eſt. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri EG, ita circulus A B C D, ad I; ſit autem ut circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis eſt magnitudini I; Erit quoque ut quadratũ diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H. Circuli igitur inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat oſtendendum.

7. quinti.



C O R O L L A R I V M.

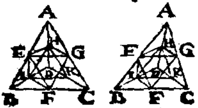
Hinc fit, ita eſſe circulum ad circulum, ut polygonum in illo deſcriptum ad polygonum ſimile in hoc deſcripto. Quoniam tã circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum eſt, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ueluti demonſtratũ eſt.

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens baſim, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.

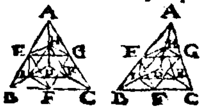
SIT pyramis, cuius baſis triangulum ABC, uertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E,F,G,H,I,K, connectanturque rectæ EF FG,GE HI,IK,KH, HE, EI, IF. Diuiſa itaque eſt pyramis in duas pyramides A E G H, H I K D, quarum baſes triangula A E G, H I K, & uertices H, D; nec non in duo ſolida E B F G H I K, quæ mox oſtendemus eſſe priſmata, quorum illius baſis eſt parallelogrammum E B F G,& triangula oppoſita E H G, B I F; huius uero baſis eſt triangulum C F G, cui opponitur triangulum K I H,



habentq; hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum F G H I; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis uertex D, in ſublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe,& ſimiles toti; Item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis.

Cum enim latera A D, B D, trianguli A D B,ſecta ſint bifariam, ac proinde proportionaliter; erunt H I, A B, parallelæ. 2. ſexti.
Eadem ratione parallelæ erunt I K, B C; & H K,
A C; & E G, B C; & E F, A C; & F G, A B; & E H, BD;
& E I, A D; & I F, D C; & H G, D C. Sunt autem & rectæ F G, H I, cum parallelæ ſint ipſi A B, inter ſe parallelæ; 9. undec.
Atque eadem ratione parallelæ ſunt G H, F I, cum ſint parallelæ ipſi D C. Quare parallelogramma ſunt A E I H,
H E B I, I D H E, E B F G, G H K C, C K I F, F G H I.
Quoniam uero rectæ H E, H G, rectis D B, D C, ſunt parallelæ erunt anguli E H G, B D C, æquales: Ac eadem ratione 10. undec.
æquales erunt anguli H E G, D B C; & H G E, DCB.
Proportionalia igitur ſunt latera trianguli H E G, lateribus 4. ſexti.
trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde ſimile eſt
triangulum H E G, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE,HAG,AEG,triangulis DAB,DAC,ABC, ſimilia per coroll. propoſ.4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD,ſimilis eſt,per defin. 9. huius lib. Rurſus quia
rectæ H I, H K, rectis A B, A C, ſunt parallelæ, erunt anguli I H K, B A C, æquales. Eadem ratione æquales erunt 10. undec.
anguli H I K, A B C; & H K I, A C B. Quare latera trian
guli

4. *ſexti.* guli H I K, lateribus trianguli A B C, circa æquales angulos
ſunt propoportionalia ; ac propterea triangulum H I K,
triangulo A B C, ſimile eſt : Sunt autem & triangula D H I,
D I K, D K H, triangulis *D A B*, D B C, D C A, ſimilia,
per idem coroll. propoſ. 4. lib. 5. Pyramis ergo H I K D,



ſimilis eſt quoque eidem pyramidi A B C D, per defin. 9. huius
lib. Quoniam autem triangula
A H E, H D I, ſimilia ſunt triangulo
A D B, ut oſtenſum eſt ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ipſa
21. *ſexti.* quoque inter ſe ſimilia erunt. Cum igitur ſint ſuper rectas
æquales A H, H D, conſtituta; ipſa erunt æqualia, per
lemma propoſ. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt
& ſimilia triangula A H G, H D K, cum ſimilia ſint oſtenſa
triangulo A D C, & conſtituta ſuper æquales rectas
A H, H D. Pari ratione æqualia, & ſimilia erunt triangula
A E G, H I K, cum ſimilia ſint oſtenſa triangulo
34. *primi.* A B C, & ſuper rectas poſita A E, H I, quæ æquales
ſunt, ob parallelogrammum A E I H. Non ſecus æqualia
erunt & ſimilia triangula E H G, I D K, cum ſint
oſtenſa ſimilia triangulo B D C, & habeant rectas H E,
34. *primi.* D I, quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum H E I D.
Pyramides igitur A E G H, H I K D, æquales ſunt & ſimiles,
per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia triangula
unius æqualia ſunt & ſimilia omnibus triangulis alterius,
ut demonſtratum eſt.

RVRSVS, quia rectę E H, H G, G E, æquales ſunt,
34. *primi.* & parallelæ rectis B I, I F, F B, ob parallelogramma E H I B,
F G H I, B F G E; erunt triangula E H G, B I F, æquiangula
inter ſe, & æqualia, per coroll. propoſ. 8. lib 1.
15. *undec.* Ac propterea & ſimilia: Sunt autem & parallela; cum E H,
H G, per quas ducitur planum E H G, parallelæ ſint rectis
B I, I F, per quas planum B I F, ducitur. Igitur ſolidum
B I F G H E, contentum duobus triangulis E H G,
B I F, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; &
tribus parallelogrammis E G F B, B E H I, I F G H, priſma
eſt, ex definitione. Eodem modo priſma oſtendetur
34. *primi.* ſolidum C F G H I K. Cum enim rectæ F C, C G, G F,
æquales ſint, & parallelæ rectis I H, H K, K I, ob parallelogram-

logramma C F I K, C G H K, F G H I; erunt triangula C F G, H I K, æqualia, & æquiangula inter ſe, ac propterea ſimilia: Sunt autem & parallela, quod rectæ C F, C G, 15. *undec.* per quas ducitur planum C F G, parallelæ ſint rectis K I, K H, per quas planum K I H, ducitur. Igitur ſolidum C F G H I K, contentum duobus triangulis C F G, *K* I H, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis C F I K, K H G C, I F G H, priſma eſt. Quoniam uero priſmata E B F G H I, C F G H I K, ſunt eiuſdem altitudinis, nempe inter plana parallela B C G E, H I K; & parallelogrammum E B F G, baſis illius, duplum eſt trianguli C F G, baſis huius, per ſcholion propoſ. 41. lib. 1. Ipſa inter ſe æqualia erunt. 40. *undec.*

DENIQVE quia priſma E B F G H I, maius eſt pyramide E B F I, totum parte; Eſt autem pyramis E B F I, æqualis & ſimilis pyramidi A E G H, necnon pyramidi H I K D, ut perſpicuum eſt ex æqualitate & ſimilitudine triangulorū: Maiora erunt priſmata E B F G H I, C F G H I *K*, pyramidib' A E G H, H I K D. Ac proinde illa quidē dimidiū pyramidis A B C D, excedent, hæ uero a dimidio eiuſdē deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales ſecatur, maior dimidium eius ſuperat, minor uero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens baſin, &c. Quod erat oſtendendum.

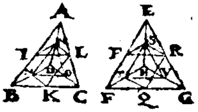
THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habētes baſes; ſit autē illarū utraq; diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodē modo diuiſa ſit utraque pyramidum, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idque ſemper fiat: Erit ut unius pyramidis baſis ad alterius pyramidis

baſim,

baſim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

SINT duæ pyramides ABCD,EFGH,eiuſdem altitudinis,quarum latera biſariam diuiduntur in punctis I,K,L, M,N,O; P, Q, R, S,T, V,connectanturque rectæ IL, LK, KN,NO,OM,MN,LM,MI; PR,RQ,QT,TV,VS,ST, RS SP, ita vt pyramis vtraque ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina priſmata ęqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propoſitio præcedēs: Eodemque modo intelligantur eſſe diuiſæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & ſic deinceps. Dico ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide ABCD, ad omnia priſmata generata in pyramide EFGH,illis multitudine æqualia, vt eſt baſis ABC,ad baſin EFG. Cum enim ſit ut BC,ad CK,ita FG,ad GQ, eo quod utraque linea ſit diuiſa biſariam; ſint autem triangula ABC,LKC, ſimilia ſimiliterque poſita; Item triangula EFG,RQG,ex coroll. propoſ.4. lib. 22. ſexti. 6. Erit quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG: Et permutando, ut ABC, ad EFG,ita LKC, ad RQG. Vt autē LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ut mox oſtendemus, atque adeo ita priſma IBKLMN,ad priſma PFQRST, cum hæc illis ſint æqualia: Et ut unum priſma, uidelicet IBKLMN, ad unum priſma 12. quinti. PFQRST,ita ſunt duo priſmata IBKLMN,CKLMNO, ad duo priſmata PFQRST,GQRSTV: Igitur erunt quoque, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita duo priſmata in pyramide ABCD,ad duo priſmata in pyramide EFGH. Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina priſmata in pyramidibus EPRS,STVH, factis in pyramide EFGH,ut ſunt baſes AIL, MNO,illarum pyramidū ad baſes



ad baſes EPR, STV, harum pyramidum; & ſic deinceps, ea
dem ſemper facta diuiſione. Sed ut illæ baſes ad has, ita eſt
LKC, baſis, quæ illis eſt æqualis & ſimilis, ad baſin RQG, G,
quæ his eſt æqualis, & ſimilis, ut in præcedenti eſt demon-
ſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis A B C, ad baſin E F G. Igitur
erunt quoque, ut baſis A B C, ad baſin E F G, ita priſma-
ta cuiuſlibet pyramidis factæ in pyramide A B C D, ad priſ-
mata cuiuſlibet pyramidis factæ in pyramide E F G H: Ac
propterea erunt quoque, ut priſmata pyramidis ABCD, ad
priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AI-
LM, ad priſmata pyramidis E P R S, quam priſmata pyra-
midis M N O D, ad priſmata pyramidis STVH; & ita de-
inceps. Quare cum ſint, ut duo priſmata pyramidis A B-
CD, ad duo priſmata pyramidis EFGH, ita omnia priſma- 12.quinti
ta in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ſimul, ad
omnia priſmata ĩ pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c.
ſimul, ſi hęc illis multitudine ſint ęqualia; Erunt quoque,
ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyrami-
de ABCD, ad omnia priſmata in pyramide EFGH. Quo-
circa ſi fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangu-
lares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

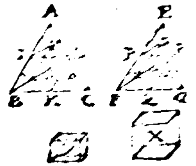
QVOD autem ſit LKC, *ad* RQG, *ita priſma*
CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ita oſtende-
mus. Intelligantur ex uerticibus D, *H, ad baſes* ABC,
EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines
æquales pyramidum ABCD, *EFGH*. Quoniam
igitur plana parallela ABC, *MNO, ſecant duas*
*rectas, nempe D*C, *& perpendicularem ex* D, *demiſ-* 17. undec.
ſam proportionaliter; ſecatur autem DC, *bifariam in*
O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, *demiſſa*
bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Ea-
dem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſe-
cabitur a plano STV. Quare cum totæ perpendicu-

[illegible] demonstrandum.

THEOR. 4. PROPOS. 5.

SUB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes, inter ſe ſunt, ut baſes.

Sint duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum triangulæ baſes ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſim. Si enim non ita ſit, ponatur ut baſis ABC ad baſim EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primum minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta propoſ. 3. huius. Rurſus eodem modo ſecentur pyramides in pyramide



EFGH, in duas pyramides æquales, & in duo priſmata æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi a pyramide EFGH auferatur plus quam dimidium, nempe duo priſmata PFQRST, GQRSTV, quæ maiora ſunt dimidio pyramidis EFGH: Item a reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata

3. duodec.

1. decimi

mata æqualia; & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide 4. duodec. EFGH, ut baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, ut pyramis ABCD, ad ſolidũ X; Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quã tota pyramis ABCD; Erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora, quam 14. quinti ſolidum X. Oſtenſa uero ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.

Sit ſecundo ſolidũ X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, ut baſis ABC, ad baſin EFG; Erit conuertendo ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ut baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur ut ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidum X, maius ponitur pyramide EFGH; erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare 14. quinti erit; ut baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, ut eſt baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum pyramide EFGH; ſed neque minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidũ X; Sit autem pyramis ABCD, ut ad ſolidum X, ita ad pyrami- 7. quinti. dem EFGH, ſolido X, æqualẽ: Erit quoque ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abſciſſionis ad oẽs angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Eritq; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidẽ modo cõſtitutã: Sed ſic quoq; erat ad totã pyramidẽ. Pyramis ergo cõſtituta

9. quinti. *æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.*

COROLLARIVM.

HINC fit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, uel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habeant cum baſibus, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

ITEM ſequitur, e conuerſo pyramides triangulares æquales ſuper eandem, uel æquales baſes, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 30. & 31 lib. 11. demonſtrando uſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

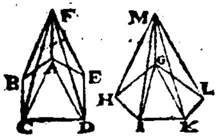
6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, ut baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonæ A B C D E, G H I K L, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia, erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. Quia uero eſt, ut baſis A B C, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem A C D F; Erit componendo ut baſis A B C D, ad baſin A C D, ita pyramis A B C D F, ad pyramidē A C D F: Sed rurſus eſt ut baſis A C D, ad baſin A D E, ita pyramis ACDF, ad pyramidem A D E F. Igitur ex æquo ut baſis ABCD, ad baſin A DE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit ut baſis A B C D E, ad baſin A DE, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem A D E F. Simili argumento erit ut baſis G H I K L, ad baſin G K L, ita pyramis G H I K L M,

5. duodec.

5. duodec.



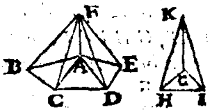
K L M, ad pyramidem G K L M; Et conuertendo ut baſis G K L ad baſin G H I K L, ita pyramis G K L M, ad pyramidem G H I K L M. Rurſus quoniã eſt, ut baſis A D E, ad baſin G K L, ita pyramis A DEF, ad pyramidem G K L M; Erũt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABÇDEF, A DEF, GKLM, GHIKLM, ut in hac formula uides, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit ut baſis ABÇDE, ad baſin G H I K L, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M; Ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

5. duodec.

ABCDE	ABCDEF.
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL	GHIKLM.

SCHOLION.

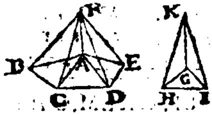
QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quorum baſes polygona latera habent multitudine æqualia; facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum unius baſis plura continet latera, quam baſis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius uero triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin.



Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa. Quoniam uero eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin G H I, ſecundam quantitatẽ, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; *5. duodec.* *Et eodem modo, vt baſis A C D, quinta quantitas, ad baſin G H I, ſecundam quantitatem, ita pyramis A C D F, ſexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem: Erit ut baſis A B Ç D, prima quantitas cũ quinta, ad baſin G H I, ſecundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem.* *24. quinti* *Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quanti-*

tas, ad baſin G H I, ſecundam quantitatem, ita pyramis A B-CDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, ut modo eſt oſtenſum: & vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis A D-

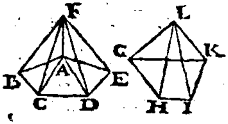
5. duodec.



E F, ſexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; Erit etiam vt baſis A B C D E, prima quantitas cum quinta, ad baſin G H I, ſecundam quantitatem, ita

24. quinti *pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cum autem, vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona ABCDE, ad baſin triangularem G H I, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K; Erit quoque conuertendo, vt baſis G H I, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHI K, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides quælibet, quarum vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat a polygono, eiuſque pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoque ſumere a triangulo, eiuſque pyramide, ut dictum eſt.*

SED iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis A B C-D E F, G H I K L, quarum baſes ſint polygona, ſintque plura latera in vna baſe, quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidē



ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono A B-C D E, in triangula ABC, ACD, A D E, erit pyramis eius in totidē diuiſa pyramides. Quia vero, ut iam eſt demonſtratum, eſt vt baſis A B C, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatē; ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem; & vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; Erit etiam ut baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDE, ter- 24. quinti

tia

tia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, ut baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, ut proxime demonſtratum eſt; Et eſt quoque ut baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, ut ante eſt oſtenſum; Erit etiam ut baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE. 24. quinti

HANC *autem propoſitionem 6. & ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrata ſunt, conuertemus hoc modo.*

1. PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, ut baſes; candẽ habent altitudinẽ.

QVOD *non ſecus oſtendemus, ac ea, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, oſtenſa ſunt.*

COROLLARIVM.

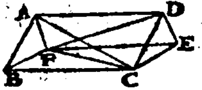
PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, uel eandem conſtitutas, eſſe inter ſe ęquales; cum eandem habeant proportionem cũ baſibus, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales, & ſuper æquales baſes, uel ſuper eandem conſtructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere baſes, ſi non habuerint eandem. Hæc autẽ duo demõſtrabuntur, ut in coroll. propoſ. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, triangulares baſes habentes.

SIT priſma ABCDEF, cuius duo triangula oppoſita, æqualia, ac ſimilia ABF, DCE. Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Ducantur in tribus parallelogrāmis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. Quoniam igitur *34. primi* triangula ABC, ADC, æqualia ſunt; eſtque ut baſis ABC, ad baſin *5. duodec.* ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, uertice ad planum ABCD, demiſſam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, ſuper æquales baſes ADF, EFD, conſtituta, & ſub eadem altitudine, nempe perpendiculari a uertice C, ad planum ADEF, demiſſa. Eſt autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe baſi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc uero eiſdem quatuor planis, nimirum baſi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ſeu CDEF, (quæ eadem eſt pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE, totum priſma componentes, ut perſpicuum eſt) æquales ſunt inter ſe; Ac propterea priſma ABCDEF, in tres pyramides eſt diuiſum. Quocirca omne priſma triangularem habens baſim, &c. Quod erat demonſtrandum.



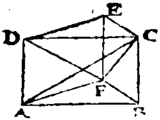
COROLLARIVM. I.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem: Siue priſma quodlibet triplum eſſe pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſin, & altitudinem.

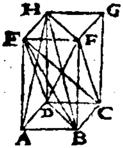
SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens baſin ABF; & priſma ABCDEF, ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularem ABF. Dico pyramidem eſſe tertiam partem

priſma-

priſmatis. Nam ſi ducatur recta DF, erit priſma diuiſum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF; ut demonſtratum eſt; *7. duodec.* Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis ABFC, (cum hæc illi ſit æqualis, immo eadem, quod eiſdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſin ABF, conſtitutæ, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. manifeſtum eſt quamlibet pyramidē eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem, & altitudinem; ac propterea priſma e contrario eſſe pyramidis triplum.



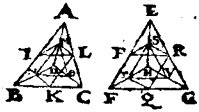
SIT ſecundo pyramis ABCDE, cuius baſis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & priſma ABCDEFGH, ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Reſoluta enim baſi ABCD, & plano oppoſito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD; EHF, FGH; erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diuiſum. Ductis ergo rectis AH, BH; DF, CF; erit, ut demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD; Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit, ut pyramis ADBH, ad priſma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad priſma CDHGFB; Ac propterea ut una pyramis ad ſuum priſma, ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma ABCDEFGH. *12. quinti* Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiā partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, ęquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt æquales, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramides BCDF, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis ABCDE, tertia pars priſmatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſim ABCD, conſtitutæ, per coroll. propoſ. 5 huius lib. perſpicuum eſt, quālibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemque altitudinem.



Quod ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diuiſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Vnde ſingulæ pyramides triangulares horum priſmatum erunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis baſem baſim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

SINT duæ pyramides ABCD, EFGH, eiuſdem altitudinis, quarum latera biſariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina priſmata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST, GQRSTV; vt vult propoſitio præcedens: Eodemque modo intelligantur eſſe diuiſæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & ſic deinceps. Dico ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide ABCD, ad omnia priſmata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Cum enim ſit ut BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod utraque linea ſit diuiſa biſariam; ſint autem triangula ABC, LKC, ſimilia ſimiliterque poſita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Erit quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG; Et permutando, ut ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autẽ LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ut mox oſtendemus, atque adeo ita priſma IBKLMN, ad priſma PFQRST, cum hæc illis ſint æqualia: Et ut unum priſma, uidelicet IBKLMN, ad unum priſma PFQRST, ita ſunt duo priſmata IBKLMN, CKLMNO, ad duo priſmata PFQRST, GQRSTV: Igitur erunt quoque, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita duo priſmata in pyramide ABCD, ad duo priſmata in pyramide EFGH. Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina priſmata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, ut ſunt baſes AIL, MNO, illarum pyramidũ



22. ſexti.

12. quinti.

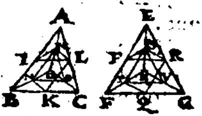
ad baſes

ad baſes EPR, STV, harum pyramidum; & ſic deinceps, eadem ſemper facta diuiſione Sed ut illæ baſes ad has, ita eſt LKC, baſis, quæ illis eſt æqualis & ſimilis, ad baſin RQ, G, quæ his eſt æqualis, & ſimilis, ut in præcedenti eſt demonſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis A BC, ad baſin E F G. Igitur erunt quoque, ut baſis A B C, ad baſin E F G, ita priſmata cuiuſlibet pyramidis factæ in pyramide A B C D, ad priſmata cuiuſlibet pyramidis factæ in pyramide E F G H: Ac propterea erunt quoque, ut priſmata pyramidis ABCD, ad priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM, ad priſmata pyramidis E P R S, quam priſmata pyramidis M N O D, ad priſmata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum ſint, ut duo priſmata pyramidis A B-CD, ad duo priſmata pyramidis EFGH, ita omnia priſma- 12. quinti ta in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ſimul, ad omnia priſmata ĩ pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſimul, ſi hęc illis multitudine ſint ęqualia; Erunt quoque, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in pyramide EFGH. Quocirca ſi fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

QVOD autem ſit L K C, ad R Q G, ita priſma C K L M N O, ad priſma G Q R S T V, ita oſtendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad baſes ABC, E F G, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum A B C D, E F G H. Quoniam igitur plana parallela A B C, M N O, ſecant duas rectas, nempe D C, & perpendicularem ex D, demiſ- 17. undec. *ſam proportionaliter; ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur a plano S T V. Quare cum totæ perpendicu-*

baſim; ita & omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.



SINT duæ pyramides ABCD, EFGH, eiuſdem altitudinis, quarum latera biſariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti; nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina priſmata æqualia IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV; vt vult propoſitio præcedens: Eodemque modo intelligantur eſſe diuiſæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & ſic deinceps. Dico ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide ABCD, ad omnia priſmata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Cum enim ſit ut BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod utraque linea ſic diuiſa biſariam; ſint autem triangula ABC, LKC, ſimilia ſimiliterque poſita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propoſ. 4. lib. 22. ſexti. 6. Erit quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG; Et permutando, ut ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autẽ LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ut mox oſtendemus, atque adeo ita priſma IBKLMN, ad priſma PFQRST, cum hæc illis ſint æqualia. Et ut unum priſma, uidelicet IBKLMN, ad unum priſma 12. quinti. PFQRST, ita ſunt duo priſmata IBKLMN, CKLMNO, ad duo priſmata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita duo priſmata in pyramide ABCD, ad duo priſmata in pyramide EFGH. Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina priſmata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, ut ſunt baſes AIL, MNO, illarum pyramidũ ad baſes

ad baſes EPR, STV, harum pyramidum; & ſic deinceps, eadem ſemper facta diuiſione Sed ut illæ baſes ad has, ita eſt LKC, baſis, quæ illis eſt æqualis & ſimilis, ad baſin RQ[illegible], G,
quæ his eſt æqualis, & ſimilis, ut in præcedenti eſt demonſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis A BC, ad baſin E F G. Igitur erunt quoque, ut baſis A B C, ad baſin E F G, ita priſmata cuiuſlibet pyramidis factæ in pyramide A B C D, ad priſmata cuiuſlibet pyramidis factæ in pyramide E F G H: Ac propterea erunt quoque, ut priſmata pyramidis ABCD, ad priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM, ad priſmata pyramidis E P R S, quam priſmata pyramidis M N O D, ad priſmata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum ſint, ut duo priſmata pyramidis A BCD, ad duo priſmata pyramidis EFGH, ita omnia priſma- 12. *quinti*
ta in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ſimul, ad omnia priſmata ī pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſimul, ſi hęc illis multitudine ſint ęqualia; Erunt quoque, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in pyramide EFGH. Quocirca ſi fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

*Q*VOD *autem ſit L K C, ad R Q G, ita priſma C K L M N O, ad priſma G Q R S T V, ita oſtendemus. Intelligantur ex uerticibus D, H, ad baſes ABC, E F G, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum* A B C D, *E F G H.* Q*uoniam igitur plana parallela* A B C, *M N O, ſecant duas*
rectas, nempe D C, & perpendicularem ex D, *demiſ-* 17. *undec.*
ſam proportionaliter; ſecatur autem DC, *bifariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex* D, *demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur a plano S T V. Quare cum totæ perpendicu-*

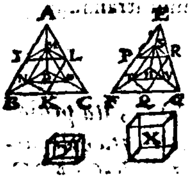
lares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, ut baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes, inter ſe ſunt, ut baſes.

SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Si enim non ita ſit, ponatur ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod uel minus erit, uel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta propoſ. 3. huius lib. Rurſus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi a pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo priſmata PFQRST, GQRSTV, quæ maiora ſunt dimidio pyramidis EFGH: Item a reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidū X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata



3. duodec.

1. decimi

mata æqualia; & eodem modo factæ pyramides A I L M, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide E F G H. Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, ut baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, ut pyramis ABCD, ad ſolidũ X; *4. duodec.* Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quã tota pyramis ABCD; Erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora, quam ſolidum X. *14. quinti* Oſtenſa uero ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.

SIT ſecundo ſolidũ X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, ut baſis ABC, ad baſin E F G; Erit conuertendo ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ut baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur ut ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidum X, maius ponitur pyramide EFGH; erit & pyramis A B C D, maior ſolido Y. *14. quinti* Quare erit; ut baſis EFG, ad baſin A B C, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide A B C D. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, ut eſt baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum pyramide EFGH; ſed neque minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidũ X; Sit autem pyramis ABCD, ut ad ſolidum X, ita ad pyramidem EFGH, ſolido X, æqualẽ: *7. quinti.* Erit quoque ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abſciſſionis ad oẽs angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Eritq; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidẽ modo cõſtitutã: Sed ſic quoq; erat ad totã pyramidẽ. Pyramis ergo cõſtituta

9. quinti. *æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.*

COROLLARIVM.

HINC fit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, uel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habeant cum baſibus, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

ITEM ſequitur, e conuerſo pyramides triangulares æquales ſuper eandem, uel æquales baſes, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrando uſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

6.

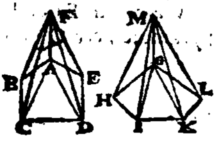
THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, ut baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonæ A B C D E, G H I K L, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia, erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. Quia uero eſt, ut baſis A B C, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem A C D F; Erit componendo ut baſis A B C D, ad baſin A C D, ita pyramis A B C D F, ad pyramidem A C D F: Sed rurſus eſt ut baſis A C D, ad baſin A DE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem A D E F. Igitur ex æquo ut baſis ABCD, ad baſin A DE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem A DEF. Componendo ergo erit ut baſis A B C D E, ad baſin A DE, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem A D E F. Simili argumento erit ut baſis G H I K L, ad baſin G K L, ita pyramis G H I K L M,

9. duodec.

5. duodec.

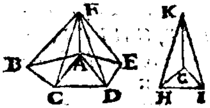


K L M, ad pyramidem G K L M; Et conuertendo ut baſis G K L ad baſin G H I K L, ita pyramis G K L M, ad pyramidem G H I K L M. Rurſus quoniã eſt, ut baſis A D E, ad baſin G K L, ita pyramis 5. duodec. A D E F, ad pyramidem G K L M; Erũt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF, A DEF, GKLM, G H I K L M, ut in hac formula uides, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit ut baſis ABCDE, ad baſin G H I K L, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M; Ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

ABCDE.	ABCDEF.
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL.	GHIKLM.

SCHOLION.

QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quorum baſes polygona latera habent multitudine æqualia; facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum unius baſis plura continet latera, quam baſis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius uero triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa. Quoniam uero eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin G H I, ſecundam quantitatẽ, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K, 5. duodec. *quartam quantitatem; Et eodem modo, vt baſis A C D, quinta quantitas, ad baſin G H I, ſecundam quantitatem. ita pyramis A C D F, ſexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem: Erit ut baſis A B C D, prima quantitas cũ quinta, ad baſin G H I, ſecundam quantitatem, ita pyramis A B C-* 24. quinti *DF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quanti-*



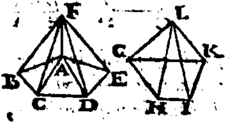
tas, ad baſin G H I, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo eſt oſtenſum: & vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; Erit etiam vt baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cum autem, vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona ABCDE, ad baſin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt baſis GHI, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides quælibet, quarum vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales; vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat a polygono, eiuſque pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoque ſumere a triangulo, eiuſque pyramide, ut dictum eſt.

[illegible]

5. duodec.

24. quinti

Sed iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum baſes ſint polygonæ, ſintque plura latera in vna baſe, quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidē ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidē diuiſa pyramides. Quia vero, vt iam eſt demonſtratum, eſt vt baſis ABC, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatē; ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; Erit etiam ut baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDE, tertia



[illegible]

[illegible]

24. quinti

tia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, ut baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, ut proxime demonſtratum eſt; Et eſt quoque ut baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, ut ante eſt oſtenſum; Erit etiam ut baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE. 24. quinti

HANC *autem propoſitionem 6. & ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrata ſunt, conuertemus hoc modo.*

1. PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, ut baſes; eandẽ habent altitudinẽ.

QVOD *non ſecus oſtendemus, ac ea, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, oſtenſa ſunt.*

COROLLARIVM.

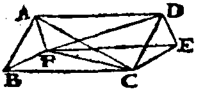
PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, uel eandem conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; cum eandem habeant proportionem cũ baſibus, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales, & ſuper æquales baſes, uel ſuper eandem conſtructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere baſes, ſi non habuerint eandem. Hæc autẽ duo demõſtrabuntur, ut in coroll. propoſ. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, triangulares baſes habentes.

SIT priſma ABCDEF, cuius duo triangula oppoſita, æqualia, ac ſimilia ABF, DCE. Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Ducantur in tribus parallelogrāmis tres diametri, nempe A C, in ABCD; C F, in B C E F; F D, in ADEF. Quoniam igitur *34. primi* triangula A B C, A D C, æqualia ſunt; eſtque ut baſis ABC, ad baſin *5. duodec.* ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, uertice ad planum ABCD, demiſſam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides A D F C, E F D C, ſuper æquales baſes A D F, E F D, conſtituta, & ſub eadem altitudine, nempe perpendiculari a uertice C, ad planum A DEF, demiſſa. Eſt autem pyramis ADCF, eadem pyramidi A D F C, cum illa contineatur quatuor planis, nempe baſi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc uero eiſdem quatuor planis, nimirum baſi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ſeu CDEF, (quæ eadem eſt pyramidi E F D C, cum tam E F D C, quam CDEF, contineatur planis C D E, EFD, D C F, FCE, totum priſma componentes, ut perſpicuum eſt) æquales ſunt inter ſe; Ac propterea priſma ABCDEF, in tres pyramides eſt diuiſum. Quocirca omne priſma triangularem habens baſim, &c. Quod erat demonſtrandum.

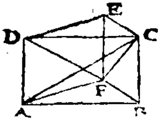


COROLLARIVM. I.

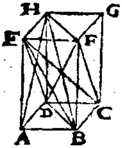
HINC colligitur, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis quod eandem cum illa habet & baſim, & & altitudinem: Siue priſma quodlibet triplum eſſe pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſin, & altitudinem.

SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens baſin ABF; & priſma ABCDEF, ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularem A B F. Dico pyramidem eſſe tertiam partem priſma-

priſmatis. Nam ſi ducatur recta D F, erit priſma diuiſum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF; ut demonſtratum eſt; 7. duodec. Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis A B F C, (cum hæc illi ſit æqualis, immo eadem, quod eiſdem planis comprehendatur ABF, F C A, A B C, C B F,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſin ABF, conſtitutæ, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. manifeſtum eſt quamlibet pyramidē eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem, & altitudinem; ac propterea priſma e contrario eſſe pyramidis triplum.



SIT ſecundo pyramis ABCDE, cuius baſis rectilineum quodcunque A B C D, quotlibet laterum; & priſma ABCDEFGH, ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Reſoluta enim baſi ABCD, & plano oppoſito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD; EHF, FGH; erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diuiſum. Ductis ergo rectis A H, B H; D F, CF; erit, ut demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD; Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit, ut pyramis ADBH, ad priſma ABFEHD, ita pyramis B CD F, ad priſma CDHGFB; Ac propterea ut una pyramis ad ſuum priſma, ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſ- 12. quinti ma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiã partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt æquales, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramides B CD F, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis ABCDE, tertia pars priſmatis A BC D E F G H. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſim ABCD, conſtitutæ, per coroll. propoſ. 5 huius lib. perſpicuum eſt, quãlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet *baſim multilateram, eandemque altitudinem.*



Quod ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diuiſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Vnde ſingulæ pyramides triangulares horum priſmatum erunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis baſem

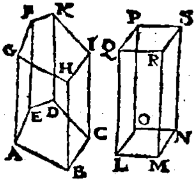
ſem baſi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem Nam eiuſmodi pyramis æqualis eſt pyramidi illi, quæ eandem cum priſmate habet & baſem, & altitudinem, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Quam quidem iam oſtendimus tertiam eſſe priſmatis partem.

SCHOLION. I.

Ex dictis facile demonſtrabimus hanc propoſitionem, videlicet.

SVB eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcunque habeant baſes; inter ſe ſunt, ut baſes.

QVAMVIS enim hoc demõſtratum ſit in lib. 11. de priſmatis, quorum duo plana oppoſita, parallela, & æqualia, ſunt triangula, licet eorum baſes ſint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ; nec nõ de parallelepipedis, quæ nomine priſmatum contineri diximus: Nunc tamen idipſum demonſtrabimus uniuerſe de omnibus priſmatis, quorum duo plana aduerſa, ſiue baſes, ſunt polygona, quamuis plura latera ſeu anguli in vnius baſe reperiantur, quam in baſe alterius. Sint igitur duo priſmata eiuſdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum baſes ſint figuræ multilateræ. Dico, vt eſt baſis ABCDE, ad baſim LMNO, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis vtriuſque baſis ad vnum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, lineæ rectæ ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis, habentes eaſdem baſes: Ac proinde, per coroll. prædictum, qualibet pyramis tertia pars erit ſui priſmatis. Quam ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, ut baſis ad baſin, vt oſtenſum eſt propoſ. 6. eiuſque ſcholio. Igitur erit quoque vt baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum.



15. Quinti.

CONVERSO *modo, ſi priſmata quarumcunque baſium inter ſe ſint, ut baſes, ipſa erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo oſtendemus, quo ſcholion propoſ. 5. demonſtratum eſt.*

COROLLARIVM. II.

VNDE priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, uel æquales baſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

E CONTRARIO, Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, uel eandem, in eadem ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. fuit demonſtratum.

SCHOLION. II.

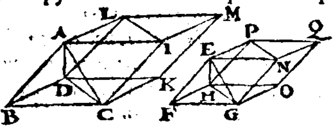
CAETERVM *tam ea, quæ in priori corollario, quam illa, quæ in ſcholio proxime demonſtrata ſunt, intelliguntur tantummodo de priſmatis, quæ in vertice habent plana baſi parallela, æqualia, & ſimilia. Quod dixerim, ne hallucineris in priſmate conſtante duobus triangulis parallelis, æqualibus, & ſimilibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo priſma dici ab Euclide, vt in defin. priſmatis diximus. Nam ſi in huiuſmodi priſmate intelligatur quidem baſis unum illorum triangulorum, erit neceſſario pyramis eiuſdem altitudinis, eandemque habens baſim, tertia pars ipſius priſmatis, ut in corollario 1. demonſtratum eſt. Item ipſum priſma ad quodlibet aliud priſma proportionem habebit, quam baſis ad baſim, ut in ſcholio oſtendimus. At vero ſi in priſmate tali baſis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice ſit linea recta, non erit pyramis eandem habens baſim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, ſed duæ tertiæ partes, hoc eſt, priſma ad pyramidem proportionem habebit ſeſquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic priſmati addatur aliud æquale & ſimile, ut parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars conſtituti parallelepipedi, ex corollario*

lario predicto, cum parallelepipedum ſit priſma eandem & altitudinem, & baſin habens cum pyramide. Quare ſi pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum priſma propoſitum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum ſeſquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem ſuper dimidium parallelogrammum conſtitutam, quæ eandem cum tali priſmate habeat altitudinem, cum ſit dimidium prioris pyramidis, eſſe tertiam partem priſmatis. Quæ cum ita ſint, non habebit tale priſma ita conſtitutum ad aliud priſma eiuſdem altitudinis, eandem proportionem, quam baſis ad baſin, niſi hoc aliud priſma in vertice lineam rectam habeat quoque, & baſin parallelogrammum. Itaque ea, quæ oſtendimus in ſcholio, intelligenda ſunt de priſmatis eiuſdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atque ſimilia. Hac enim ratione, ſi vertices priſmatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eiſdem baſibus, eiuſdemque altitudinis, duæ tertiæ partes priſmatum, vt modo demonſtrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam priſmata, &c.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides ſimiles triangulares ABCD, EFGH, ita ut baſes A B C, E F G, ſint ſimiles, & reliqua triangula unius ſimilia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe B C, F G. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma B I, BK, B L. Deinde ducantur



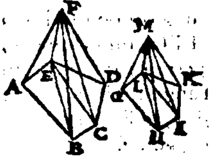
cantur L M, I M, rectis A I, A L, parallelæ & æquales, conuenientes in M, connectaturque recta K M: Erit igitur cõpletum parallelepipedum B M, eiuſdem cum pyramide altitudinis; cum plana ſolidi B M, ſint parallela, ut facile colligitur ex propoſ. 15. lib. 11. Rurſus eodem modo perficiatur parallelepipedum F Q. Quoniam igitur ob ſimilitudinem pyramidum, anguli plani A B C, E F G, ſunt æquales, eſtque ut A B, ad B C, ita E F, ad F G; erunt parallelogramma B I, F N, ſimilia. Eodem modo cũ anguli A B D, E F H, ſint æquales, ſitque ut A B, ad B D, ita E F, ad F H; Item anguli D B C, H F G, æquales, & ut D B, ad B C, ita H F, ad F G; erunt & parallelogramma B L, B K, parallelogrammis F P, F O, ſimilia. Sed tam tria B I, B K, B L, parallelepipedi B M, reliquis tribus oppoſitis D M, A M, C M; quam tria F N, F O, F P, parallelepipedi F Q, reliquis oppoſitis tribus H Q, E Q, G Q, ſunt æqualia & ſimilia. 24. *undec.* Igitur ſex plana circumſcribentia ſolidum B M, ſimilia ſunt ſex planis ſolidum F Q, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. ſimilia ſunt parallelepipeda B M, F Q. Quoniã uero ductis rectis L I, P N, priſmata D B C I L A, H F G N P E, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda B M, F Q, eorum dupla; 15. *quinti* & pyramides A B C D, E F G H, eandem, quam priſmata dicta, earum tripla; habebũt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipepa. 11. *quinti* Cum igitur proportio parallelepipedi B M, ad parallelepipedum F Q, ſit triplicata proportionis homologorum laterũ B C, F G; 33. *undec.* erit quoque proportio pyramidis A B C D, ad pyramidem E F G H, proportionis B C, ad F G, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex hoc quoque eſt manifeſtum, ſimiles pyramides, quarum baſes plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

Sint pyramides ſimiles, quarum baſes rectilinea ſimilia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH.

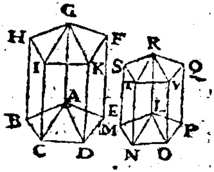
GH. Nam ſi ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppoſitos rectæ
20. ſexti. EB, EC; LH, LI, diuiſæ erunt baſes ſimiles in triangula numero æqualia, & ſimilia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, ſimilia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidũ ſimilitudinem, triangula AEF, GLM, ſimilia ſunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit ut FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autẽ EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter ſimilitudinem triangulorũ AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rurſus quia eſt ut EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula ſimilia ABE, GHL; Et ut BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidũ ſimilitudinem ſimilia ſint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum ſit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH; & ut EB, ad BF, ita LH, ad HM; erit etiam ex æquo, ut FE, ad FB, ita ML, ad MH.
5. ſexti. Quare æquiangula, atque adeo & ſimilia ſunt triangula FEB, MLH: Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, ſimilia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. *ſimiles ſunt. Eadem ratione ſimiles erunt pyramides EBCF, LHIM;*
8. duodec. Itẽ CDEF, IKLM. Quapropter, ut demonſtratũ eſt, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, ſingulę ad ſingulas, triplicatã proportionẽ habebunt laterũ homologorũ AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, ſingulorũ ad ſingula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unã & eandẽ proportionẽ, ob ſimilitudinem baſium ABCDE, GHIKL; habebunt quoq; pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemq; proportionẽ, triplicatã ſcilicet illius; Atque idcirco erit, ut
12. quinti. una pyramis ABEF, ad unã pyramidem GHLM, ita oẽs pyramides nempe pyramis ABCDEF, ad oẽs pyramides, nimirũ ad pyramidẽ
8. duodec. GHIKLM. Quam ob rẽ, cũ pyramis ABEF, ad pyramidẽ GHLM, habeat triplicatã ꝓportionẽ homologorũ laterũ AB, GH; habebit quoq; pyramis ABCDEF, ad pyramidẽ GHIKLM, triplicatã proportionẽ eorundẽ laterũ homologorũ AB, GH. Quod erat ꝓpoſitũ.



SCHOLION.

EADEM ratione, priſmata ſimilia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo priſmata ſimilia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem eſſe triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam ſi ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO, erunt, vt de pyramidibus dictum
20. ſexti. *eſt, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, ſimilia. Similiter, ſi ex angulis G, & R, ducantur rectæ*

rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, ſimilia, cū omnia plana priſmatum oppoſita ſimilia exiſtant, per definitionē priſmatis. Quoniā uero, ob ſimilitudinem priſmatum, parallelogramma CH, NS, ſimilia ſunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM: Vt autem CB, ad CA, ita quoque eſt NM, ad NL, ob ſimilitudinē triangulorū BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rurſus quoniā angulus ſolidus N, æqualis eſt ſolido angulo C, ob ſimilitudinem priſmatum; ſi ille huic ſuperponatur, omnia inter ſe conuenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD; & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Conuenit autē & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, ſint æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales ſunt; Ac propterea cū latera circa ipſos oſtenſa ſint eſſe proportionalia, erunt parallelogramma CG, NR, ſimilia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrāmis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triāgulis LMN, RST, ſimilia ſunt. Igitur priſmata ABCIGH, LMNTRS, ſimilia ſunt, ex defin. ſolidorū ſimilium. Non aliter oſtendentur eſſe ſimilia priſmata CDAGIK, NOLRTV; nec non priſmata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter priſmata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad priſmata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, p ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 34. lib. 11. triplicatā habēt proportionē, ſingula ad ſingula, laterum homologorū BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, ſingulorum ad ſingula. Ac propterea eodē modo demonſtrabimus, priſmata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante vſi ſumus ad idem demonſtrandum in pyramidibus multangulis.



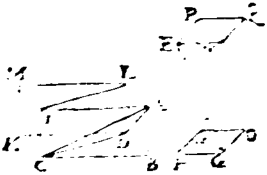
Ex qbus oībus colligiī, pyramides multangulas ſimiles diuidi in pyramides triāgulares ſimiles, et numero æquales, et homologas totis. Hoc .n. manifeſtū eſt ex demōſtratione p̄cedētis coroll.

Eodem modo inferī, priſmata multangula ſimilia diuidi in priſmata ſimilia triāgulares baſes habētia, & numero aqualia, et homologa totis. Vt appares ex huius ſcholÿ demonſtratione.

[illegible]

[illegible]

[illegible] pyramides [illegible] triangulares ABCD, EFGH, [illegible] baſes ABC, EFG, & altitudines reciprocas, [illegible] ABC ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. [illegible] parallelepipeda BM, FQ, [illegible] pyramidibus, [illegible] rectè BI, FN, [illegible] DBCILA, HFGNPE, cum ſint [illegible] pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter ſe æqualia; Ac propterea parallelepipeda BM, FQ, cum ſint pyramidum [illegible] æqualia quoque erunt. Quare baſes eorum & altitudines reciprocantur, hoc eſt, erit ut baſis BI, ad baſin FN, ita altitudo ſolidi FQ, ad altitudinem ſolidi BM. Ut autem baſis BI, ad baſin FN, ita eſt triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem ſint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea baſes, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.



34. undec.

15. quinti

Sint [illegible] iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, ut prius, cum ſit ut ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; ſintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque baſes parallelepipedorum

15. quinti

pipedorũ & altitudines eorundem reciprocæ; Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallelepipeda B M, F Q. 34. undec. Quare & priſmata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. AEqualium igitur pyramidũ, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

EADEM ratione AEqualium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares, reciprocantur baſes atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentiũ reciprocantur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem A B C D, baſin habeat triangularem; at uero EFGHI, non triangularem. Fiat baſi non triangulari EFGH, æquale triangulũ K L M. Quod quidem fiet, ſi baſis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propoſ. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammũ facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 42. lib. 1. Deinde ſuper K L M, fiat pyramis K L M N, eiuſdem altitudinis cum pyramide E F G H I. Quoniam ergo pyramides EFGHI, K L M N, æquales habent baſes, & eandem altitudinem, ipſæ erunt æquales, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 6. huius lib. oſtendimus: Ponitur autem pyramis E F G H I, æqualis pyramidi ABCD. *Igitur & pyramis KLMN, pyramidi* ABCD, *æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides* ABCD, *K L M N, baſes triangulares; erit ut baſis* A B C, *ad baſin KLM, hoc eſt, ad huic æqualem baſin* EFGH, *ita altitudo pyramidis K L M N, hoc eſt, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis* ABCD. *Ac proinde pyramidum* ABCD, *EFGHI, æqualiũ baſes & altitudines reciprocantur.* 9. duodec.

SED reciprocentur iam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico *ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo; cum baſis K L M, æqualis ſit baſi EFGH, & alti* tudo pyramidis KLMN, eadem quæ pyramidis EFGHI; ponatur autem eſſe ut ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque ut baſis ABC, ad baſin KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. 9. duodec. Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis ſit pyramidi EFGHI, per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod eſt propoſitum.

SINT ſecundo pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum baſes ſint multangula. Fiat rurſus triangulũ MNO, æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cũ pyramide ABCDE: Eritq; ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponit̃ pyramidi FGHIKL. Igit̃ & pyramis MNOP, æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, ut nũc demõſtrauimus, erit ut baſis MNO, hoc eſt, baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſin FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinẽ pyramidis ABCDE; (ponunt̃ .n. hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualiũ ABCDE, FGHIKL, baſes & altitudines reciprocãtur.

SED reciprocẽtur iam baſes harum pyramidum atq; altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta.n. eodẽ modo figura, cum baſis MNO, æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autẽ ut ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis ABCDE; Erit quoq; ut MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis MNOP. Quare ut ante oſtẽdimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIKL. Eſt autẽ pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. Igit̃ & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod eſt propoſitũ.

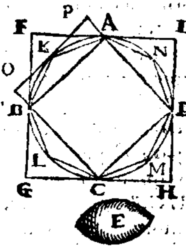
OMNIA hæc facile quoq; demonſtrabũtur cõuenire priſmatis quibuſcunq;. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erũt & eorũ pyramides earundẽ altitudinũ cũ ipſis, & ſuper eaſdẽ baſes, æquales;

æquales; cū ſint eorū tertiæ partes, ex coroll. propoſ. 7. huius libr. Vel certe duæ tertiæ, ſi nimirū priſmatū baſes fuerint parallelogrāma, & eorū uertices, lineæ rectæ, ut in ſcholio eiuſdē propoſ. oſtenſum eſt. Quare, ut modo demonſtrauimus, baſes harū pyramidū atq; altitudines reciprocantur. Cū ergo hæ baſes & altitudines eædem ſint quæ priſmatū; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

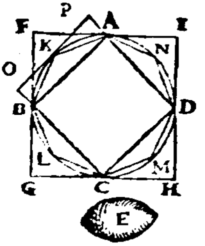
RVRSVS, ſi priſmatū baſes, & altitudines reciprocētur, reciprocabūtur quoq; baſes, & altitudines pyramidū eaſdē baſes & altitudines cum priſmatis habentium. Quare, ut demonſtratū eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earum ſint tripla, uel certe ſeſquialtera, æqualia quoq; ſunt. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 9.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.



HABEANT conus & cylindrus baſin eandē circulū ABCD, & altitudinē eandē. Dico conū cylindri eſſe tertiā partē. Si .n. conus nō credatur eſſe tertia pars cylindri, nō erit cylindrꝰ coni triplus, ſed uel maior, uel minor triplo coni. Sit primū maior quā triplꝰ coni, magnitudine E, ita ut cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratū ABCD, & circa eūdē, quadratū FGHI; intelligāturq; ſuper hęc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniā igitur quadratū ABCD, dimidiū eſt quadrati FGHI, ut ad propoſ. 9. lib. 4. oſtēdimus; eſtq; ut baſis ad baſin, ita pallelepipedū ad 32. *undec.* parallelepipedū eiuſdē altitudinis; Erit & parallelepipedū baſis ABCD, dimidiū parallelepipedi baſis FGHI; Ac proinde parallelepipedū baſis ABCD, maiꝰ erit, q̃ dimidiū cylindri, cuius baſis circulus A B C D Secētur bifariā peripheriæ A B, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, ut ad propoſ.27 lib. 3. oſtendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulū 41. primi. AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis AKB, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis A B O P: cum ſit priſma ad priſma, ut baſis ad baſin, quemadmodum ad propoſ.7. huius lib. demonſtrauimus; Ac propterea priſma baſis A K B, maius erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt *priſmata, quorum baſes reliqua* triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ A K, K B, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo priſmata eiuſdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidia omniū ſegmentorum cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam uero ſi a cylindro, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum baſis A B C D; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum priſmata baſium A K B, B L C, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio; re- 1. decimi. linquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus cylindri ſupra triplum coni: Sint iam ſegmenta cylindri relicta baſium A K, K B, B L, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini, E, ſimul; Si ex cylindro auferantur ſegmenta dicta, & ex triplo



plo coni una cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior eſt dictis cylindri ſegmentis; erit reliquum priſma baſis multangulæ A K B L C M D N, eandem habens altitudinē cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars priſmatis. Quare cum dicti priſmatis ſit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipſo baſis & altitudo, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt cylindrus triplo coni.

SIT ſecundo cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita ut conus æqualis ſit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur rurſus in circulo quadratum A B C D, & circa eandem, quadratum F G H I; intelliganturq; ſuper hæc quadrata, pyramides ſub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium eſt quadrati F G H I, ut ad propoſ. 9. lib. 4. demonſtrauimus; eſtq; ut baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis; Erit 6. duodec. quoque pyramis ſuper A B C D, dimidium pyramidis ſuper baſin F G H I; ac proinde pyramis ſuper baſin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius baſis circulus A B C D. Secentur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in *K*, L, M, N, adiunganturq; rectæ A*K*, *K*B, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in *K*, quæ parallela erit ipſi A B, ut ad propoſ. 27. lib. 3. demonſtrauimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O; & ſuper A K B, A B O P, intelligantur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulum A K B, dimidium eſt parallelogrammi A B O P, erit quoque pyramis ſu- 41. primi. per baſin A K B, dimidium pyramidis ſuper baſin A B O P, cum pyramides habeant proportionem eandem, quam ba- 6. duodec. ſes; ac proinde pyramis ſuper baſin A K B, maior erit dimidio ſegmenti coni, cuius baſis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum baſes reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul maiores ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo; conſtituentur eodem modo pyramides eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt ſimul, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam uero ſi a cono, cuius baſis circulus A B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſim A B C D, quam maiorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cuius baſis eſt circulus A B C D; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium A K B, B L C, C M D, D N A; atque in hunc modum ſemper fiat detractio; re-

1. *decimi.* linquetur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri. Sint iam ſegmenta coni relicta baſium A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahantur ſegmenta prædicta; & ex tertia parte cylindri unà cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior eſt præfatis coni ſegmentis; erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior, quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis, maius erit cylindro. Quocirca, cum priſma eandem habens baſim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cum cono & cylindro, triplum ſit ipſius pyramidis, ut ſupra in corollario propoſitionis ſeptimæ huius libri a nobis eſt demonſtratum; erit huiuſmodi priſma maius cylindro, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo cylindrus minor eſt triplo coni: Sed neque maior triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, propterea; conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem.

Quod erat demonſtrandum.

SCHO-

SCHOLION.

QVAMVIS propoſitio hæc ſolum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam ſcalenis conuenit, ut perſpicuum eſt eius demonſtratione diligenter intuenti. Itaque propoſitio uniuerſe ita proponi poterit.

OMNIS conus, ſiue rectus, ſiue ſcalenus, tertia pars eſt cuiuſlibet cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cū ipſo & baſim & altitudinem habentis, licet nō ſit idem axis coni & cylindri.

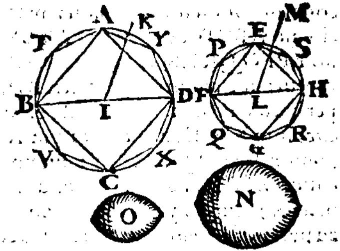
THEOR. 11. PROPOS. 11.

II.

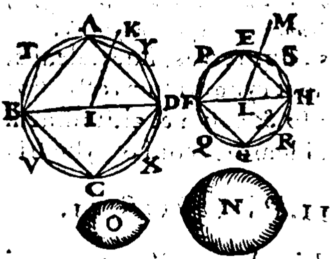
SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut baſes.

SINT ſub eadē altitudine coni & cylindri, quorū baſes circuli ABCD, EFGH, altitudines uero æquales IK, LM. Dico ut eſt baſis ad baſim, ita eſſe conū ad conū, & cylindrū ad cylindrū. Si.n.hoc nō credatur, ſit ut baſis ABCD, ad baſim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquā magnitudinē, nempe ad N, quæ uel maior erit, uel minor cono EFGHM. Si.n.eſſet æqualis, haberet conus ABCDK, ad conū EFGHM, & ad N proportionē eandē; ac propterea eſſet conus ad conū, ut baſis ad baſin: qđ nō conceditur. Sit ergo primū N, minor quā conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis ſit magnitudinibus N, & O, ſimul. Inſcribat̃ in circulo EFGH, quadratū EFGH, diuidãturq; peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariã in P, Q, R, S, & adiungant̃ rectæ EP, PF, FQ, &c. Qm̃ igit̃ ſi ex cono EFGHM, detrahatur pyramis ſuꝑ baſin EFGH,

7. quinti.



eiuſdem altitudinis, & a reliquis ſegmentis auferantur pyramides eiuſdem altitudinis baſium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio, ſemper plus dimidio ſubtrahitur, ut in poſteriore parte præcedentis propoſitionis oſtenſum eſt; 1. decimi. relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, exceſſus coni EFGHM, ſuper N. Sint ergo iam ſegmenta coni relicta baſium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta) ſimul ſumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, ſimul; ſi ex cono detrahantur dicta coni ſegmenta, & ex N, & O, ipſa magnitudo O, quæ prædicti coni ſegmentis maior eſt; erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum EPFQGRHS, eiuſdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, ſimile polygono EPFQGRHS, ut in propoſ. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur, per coroll. propoſ. 2. huius lib. eſt ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS; Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N; 6. duodec. & ut polygonum ad polygonum, ita eſt pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis cum conis; Erit quoque ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Oſtenſa autem fuit & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.



SIT ſecundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo ut circulus EFGH,

ad c

ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDK, quam O. 14. quinti. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono ABCDK. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut eſt baſis illius coni ad baſin huius coni. Non ergo maior eſt N, magnitudo cono EFGHM; Sed neque minor eſt oſtenſa; Aequalis igitur eſt. Quapropter cum ponatur, ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Sit autem, ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, 7. quinti. ad conum EFGHM; erit quoque ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

QVONIAM autem, ut conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita eſt cylindrus ABCDK, (qui triplus eſt coni 15. quinti. ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus eſt coni EFGHM) Erit quoque ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita cylindrus ABCD K, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo uſi ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

PERSPICVVM quoque eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, ut eius demonſtratio manifeſte indicat, ita ut propoſitio vniuerſe proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus; inter ſe proportionem habent, quam baſes.

CONVERTETVR *hæc propoſitio quoq; hoc modo.*

SI coni & cylindri inter ſe ſint, ut baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

QVOD *quidem demonſtrabis eo modo, quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.*

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſuper eandem, uel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti, uel ſcaleni, ſiue unus rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habeant, quam baſes, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

ITEM ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, uel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes eſſe, ſi non habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

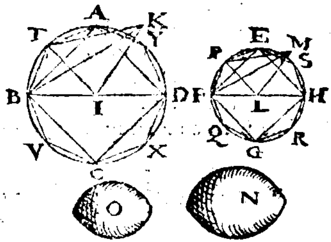
10.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorũ, quæ in baſib⁹.

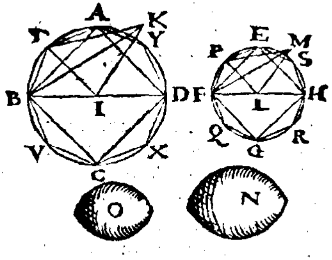
SINT ſimiles coni, & cylindri, quorum baſes circuli A B C D, E F G H, axes uero I K, L M, & diametri baſiũ B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus A B C D K, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H. Eritque N, uel minor, uel maior cono E F G H M. Si enim eſſet æqualis, haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, 7. quinti.
proportionem eandem; Ac proinde proportio coni A B C D K, ad conum E F G H M, eſſet quoque triplicata proportionis diametri B D, ad diametrum F H; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor, quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatq; eadem prorſus conſtructio figuræ, quæ in præcedenti propoſitione, ita ut rurſus pyramis E P F Q G R H S M, maior oſtendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ K B, K T; M F, M P, ut habeantur duo triangula

gula B K T, F M P, pyramidum A T B V C X D Y K,
E P F Q G R H S M; & cōnectantur re-
ctæ TI, PL. Quoniam igitur coni
A B C D K, E F-
G H M; ſimiles
ponuntur, erit,
ex 24. defin. lib. 11.
ut diameter B D,
ad diametrū F H,
ac propterea ut ſe- 15. *quinti.*



midiameter BI, ad ſemidiametrum FL, ita axis IK, ad axem
LM; Ac permutādo ut BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cū igi-
tur anguli BIK, FLM, recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quod
coni recti ponantur, proptereaq; axes recti ad eorum baſes;
Erunt triangula BIK, FLM, æquiangula; Ac propterea 6. *ſexti.*
ut KB, ad BI, ita MF, ad FL. Vt autem BI, ad BT, ita 4. *ſexti.*
FL, ad FP; ob ſimilitudinem triangulorum BIT, FLP.
(Cum enim anguli BIT, FLP, inſiſtentes ſimilibus ar-
cubus BT, FP, ſint æquales, ut in ſcholio propoſ. 33. lib. 6.
oſtenſum eſt; ſitq; ut BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æ-
qualitatē tā linearū BI, IT, quam FL, LP; erunt triangula
BIT, FLP, ſimilia.) Igitur ex æquo, ut KB, ad BT, ita MF, 6. *ſexti.*
ad FP. Rurſus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia sūt
lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus cō-
prehēſi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cū axis IK, rectus ponatur ad
circulū ABCD; erunt baſes KB, KT, æquales. Eodem modo 4. *primi.*
æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT,
rectis MF, MP, proportionales erūt, cū utrobiq; ſit propor-
tio æqualitatis. Quoniā uero, ut KB, ad BT, ita KT, ad ean- 7. *quinti.*
dē BT; Itē ut MF, ad FP, ita MP, ad eandē FP: Erat autē ut
KB, ad BT, ita MF, ad FP; Erit quoque ut KT, ad BT, ita
MP, ad FP; Et cōuertēdo ut BT, ad TK, ita FP, ad PM. Qua-
re cū ſit ut TK, ad KB, ita PM, ad MF; & ut KB, ad BT, ita
MF, ad EP; Et ut BT, ad TK, ita FP, ad PM, ueluti oſtēſū
eſt; habebūt triāgula BKT, FMP, latera ꝓportionalia, ideo-
que æquiāgula erūt; Ac ꝓinde ſimilia, ex deffinitione. Non 5. *ſexti.*
aliter oſtendentur reliqua triangula ambientia pyramides
A T-

ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter ſeſimilia eſſe: Quæ cum ſint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides ſimiles, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum B T, F P, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita eſt BI, ad FL, ob ſimilitudinem triangulorum B I T, F L P; Et ut BI, ad 15. *quinti.* F L, ita B D, ad F H. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatã diametrorũ B D, FH. Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Erit ergo ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem E P F Q G R H S M, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis A T B V C X D Y K, minor ſit cono 14. *quinti.* A B C D K, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. oſtenſa autẽ eſt & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.



Sit secundo N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidẽ EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime oſtendimus: Erit ut conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo ut N, ad conum A B C D K, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum P F, ad T B, hoc eſt, diametri F H, ad diametrum B D; habebit quoque N, ad conum A B C D K, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus E F G H M, ad O, propor-

proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrũ B D. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM; erit quoque conus ABCDK, maior quam O. Quaproter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habet triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent baſium diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono E F G H M: Sed neque minor eſt oſtenſa. AEqualis igitur eſt; ac proinde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad conum EMGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorum B D, & F H; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicata.

14. quinti.

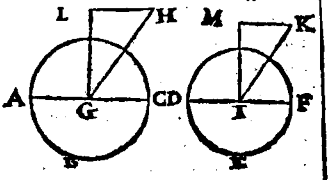
7. quinti.

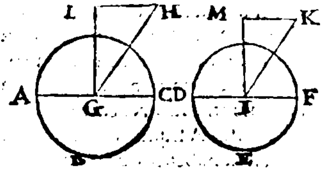
QVONIAM uero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo uſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atque priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.

15. quinti.

SCHOLION.

HAEC propoſitio, quamuis etiam extendatur ad ſimiles conos & cylindros ſcalenos: tamen hic demonſtratur in ſolis rectis conis & cylindris ſimilibus, cũ in demonſtratione aſſumantur axes recti ad baſes. Quocirca eam hac ratione oſtendemus in ſimilibus conis & cylindris ſcalenis. Sint ſimiles coni, & cylindri ſcaleni, quorum baſes circuli ABC, DEF, axes uero GH, IK, & diametri baſium AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere





habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. In-
telligantur ſuper eaſdem baſes duo coni, & cylindri recti earũ-
dem cum ſcalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducan-
turq; per rectas GH, GL, item per IK, IM, plana ſecantia ba-
ſes lineis rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti
ſunt baſibus ABC, DEF; erunt & pla-
18. undec. na per GH, GL; & per IK, IM, ad eaſ-
dem rectæ; Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad
38. undec. baſes demiſſæ cadent in AC, DF, communes ſectiones; & proin-
de erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æ-
quales inter ſe erunt, cum coni & cylindri ſcaleni ſimiles po-
nantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe re-
32. primi. cti, ex defin. 3. lib. 11. reliqui igitur HGL, KIM, æquales
quoq; erunt. Quoniam uero coni ABCH, ABCL, ponuntur eſſe
eiuſdem altitudinis, erit recta HL, per axium uertices ducta ip-
29. primi. ſi AC, parallela, ideoq; angulus L, rectus: Eodemq; argumen-
to rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti ſint.
Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum ſint æ-
quales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur
4. ſexti. GHL, IKM, æquiangula ſunt; atq; idcirco erit ut GH, ad GL,
ita IK, ad IM; & permutando, ut GH, ad IK, ita GL, ad IM.
Vt autem axis GH, ad axem IK, ita eſt AC, diameter ad DF,
diametrum, quod coni & cylindri ſcaleni ponantur ſimiles. Igi-
tur & GL, axis ad IM, axem erit, ut diameter AC, ad DF, dia-
metrum; Et proinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, ſi-
12. duodec. miles erunt, ex definitione. Quare proportionem habebunt dia-
metrorũ triplicatã. Quia uero tã conus & cylindrus ABCL,
cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant baſim, & alti-
tudinẽ,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro
DEFK, (ob eandem rationem,) eſt æqualis, ut conſtat ex corell.
7. quinti. propoſ. 11. huius lib. Erit ut conus & cylindrus ABCL, ad co-
nũ & cylindrũ DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad co-
nũ & cylindrũ DEFK; ideoq; proportio coni & cylindri AB-
CH, ad conũ & cylindrũ DEFK, triplicata quoq; erit diame-
tri AC, ad diametrum DF. Quod eſt propoſitum.

THEOR.

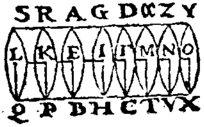
THEOR. 13. PROPOS. 13.

11.

SI cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrū, ita axis ad axem.

SECETVR cylindrus ABCD, plano GH parallelo aduerſis planis AB, CD, quod quidem ſecet axem EF, in I. Dico ut eſt cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita eſſe axem E I ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in utramq; partem, una cum eius axe, & rectangulo EC, ad cuius reuolutionē deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantumlibet; Sumāturq; in axe producto quotcūq; rectæ E K, K L, æquales ipſi EI; Itē quotcunq; rectæ FM, MN, NO, æquales ipſi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis E B, F C; quæ quidē ad reuolutionē rectanguli E C, deſcribent circulos GH, PR, QS, T α, VZ, XY, parallelos & æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componentes totum cylindrum S Q-X Y. Quoniam uero tam cylindri S P, PA, AH, ſuper baſes æquales QS, PR, BA, & ſub altitudinibus æqualibus K L, E K, I E, æquales ſunt, quam cylindri X Z, Z T, T D, D H, ſuper æquales baſes X Y, V Z, T α, C D, & ſub altitudinibus æqualibus N O, M N, FM, I F, ex corollario propoſ. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus S H, cylindri A H, quam multiplex eſt axis I L, ipſius axis I E. Item tam multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quam multiplex eſt axis I O, ipſius axis I F. Quoniam autem ſi axis I L, (multiplex I E, primæ magnitudinis æqualis eſt axi I O, (multiplici axis I F, ſecundæ magnitudi-

gnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propoſ. 11. huius lib. liquet. Si uero axis maior eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, ſecundam magnitudinem, ut cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

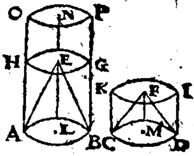
Etsi hanc propoſitionem Euclides de ſolo cylindro recto demonſtrat; tamen eius demonſtrationem cylindro ſcaleno facile accommodabis, ſi modo adhibeas deſcriptionem cylindri ſcaleni, ſicut in demonſtratione Euclidis aſſumpta fuit cylindri recti deſcriptio; ita ut quemadmodum in conis rectis rectangulũ circa quieſcen latus circunfertur, ſic quoque in conis ſcalenis circunferantur ſemidiametri L S, K R, E A, &c. ſemper æquidiſtantes circa centra L, K, E, &c. una cum recta S Y, ſemidiametros coniungente; hac enim ratione ſemper cylindri deſcribentur, ut conſtat ex ijs, quæ ſcribit Serenus in lib. 1. de ſectione cylindri.

II.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, vt altitudines.

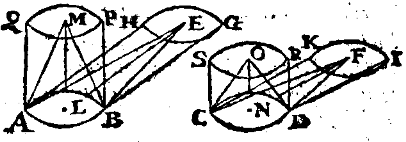
Svnt ſuper baſes æquales A B, C D, duo coni A B E, CDF, & duo cylindri A BGH, CDIK, quorum axes, ſeu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipſi ſunt altitudines) LE, MF. Dico eſſe conum ABE, ad conū CDF, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, ut eſt altitudo LE, ad altitudinem M F. Extendatur enim cylindrus A B G H, ad partes G H, una cum eius axe L E, & rectangulo A E; abſcindaturque axis E N, æqualis axi M F, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo G H, ut fiat cylindrus GHOP, eiuſdem altitudinis cum cylindro C D I K. Quoniam igitur cylindri H P, C I, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. propterea que cylindrus A G, ad ipſos eandem habet proportionem.: 7.quinti. Eſt autem cylindrus A G, ad cylindrum H P, ut axis, ſeu altitudo LE, ad axem ſeu altitu- 13.duodec. dinem EN, hoc eſt, ad altitudinem MF, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum C I, erit quoque, ut altitudo L E, ad altitudinem MF.



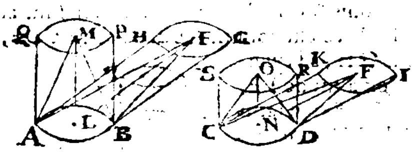
Qvia uero coni ABE, CDF, ſunt tertiæ partes cylindro- 10.duodec. rum AG, C I; ipſi habebunt eandem cum cylindris propor- 15.quinti tionem; Ac proinde erit quoque conus A B E, ad conum CDF, ut altitudo L E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut altitudines. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

Hoc idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales AB, CD; coni ABE, CDF, & cylindri ABGH, CDIK, ſcaleni, quorum altitudines LM, NO. Dico conum ABE, ad



conum C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, eſſe, vt eſt altitudo LM, ad altitudinem NO. Super baſin A B, cõſtruatur, cylindrus rectus ABPQ, ſub altitudine LM; Item ſuper baſin CD, cylindrus rectus C D R S, ſub altitudine N O. Quoniam igitur eſt cylin-



14. duodec. *drus rectus A B P Q, ad cylindrum rectum C D R S, vt altitudo L M, ad altitudinem N O: Eſt autem cylindro A B P Q, cylindrus ABGH; Item cylindro C D R S, cylindrus C D I K, equalis, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum C D I K, ut altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod eſt propoſitum.*

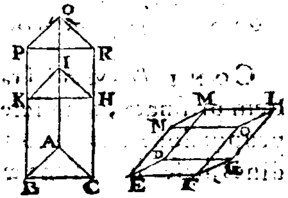
10. duodec. Q V O N I A M *autem coni, cum ſint tertiæ partes cylin-*
15. quinti *drorum, eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, ut altitudo LM, ad altitudinem N O. Quod tamen eodem argumento, quo vſi ſumus in cylindris, confirmari poteſt, vt perſpicuum eſt, ſi ſuper baſes A B, C D, fiant coni recti A B M, C D O, earundem altitudinum cum cylindris A B P Q, CDRS.*

I D E M *concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus A B E, & cylindrus A B G H, fuerit ſcalenus, alter vero, nimirũ conus CDO, et cylindrus C D R S, rectus. Nã cũ cylindrus ſcalenus A B G H, æqualis ſit cylindro recto A B P Q; ſit autẽ cylindrus rectus A B P Q, ad cylindrũ rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO, vt Euclides demõſtrauit: Erit quoq; cylindrus ſcalenus A B G H, ad cylindrũ rectum CDRS, ut altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod eſt propoſitum.*

15. quinti Q V O N I A M *vero coni eandẽ habent proportionẽ, quam cy-*
10. duodec. *lindri, cum illi horũ ſint tertiæ partes; Erit etiã conus ſcalenus ABE, ad conũ rectũ CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus oſtẽdetur eadẽ ratione, qua vſi ſumus in cylindris, vt manifeſtum eſt.*

E A D E M *quoq; hæc propoſitio conuenit priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes cõſtitutis. Sint n. ſuper*

ſuper baſes æquales *ABC*, *DEFG*, priſmata *ABCHIK*, *DEFGLMNO*, & pyramides ſub eiſdē altitudinibus. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidē ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namque inſiſtentes lineæ *AI*, *CH*, *BK*, priſmatis *ABCHIK*, ad baſin *ABC*, perpendiculares, ita ut BK ſit altitudo priſmatis *ABCHIK*; Productis autem rectis *AI*, *CH*, *BK*, ſumantur *IQ*, *HR*, *KP*, æquales altitudini priſmatis *EL*; & ductis rectis *PQ*, *QR*, *RP*, compleatur priſma *HIKPQR*, eiuſdē altitudinis cū priſmate *EL*. Eruntq; priſmata *HIKPQR*, *EL*, cum habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia, ex coroll. 2. propoſ. 7. huius lib. Ac propterea priſma *ABCHIK*, ad vtrunq; eandē habebit proportionem. Quia vero, ex 7.quinti
ſcholio propoſ. 25. lib. 11. priſma *ABCHIK*, ad priſma *HIKPQR*, eſt vt planū *BI*, ad planum *KQ*; Et vt planū *BI*, ad planum *KQ*, ita eſt recta *BK*, ad *KP*; Erit priſma *ABC*- 1. ſexti.
HIK, ad priſma *HIKPQR*, hoc eſt, ad priſma *EL*, ut *BK*, altitudo priſmatis *ABCHIK*, ad *KP*, altitudinem priſmatis *HIKPQR*, hoc eſt, priſmatis *EL*. Quod eſt propoſitū.



Qvod ſi inſiſtētes lineæ *AI*, *CH*, *BK*, nō ſint perpendiculares ad baſin *ABC*, cōſtituēdū erit ſup baſin *ABC*, aliud priſma, cuius inſiſtētes ſint perpēdiculares ad baſin, et æquales altitudini priſmatis *ABCHIK*. Nam cū ex 2. coroll. propoſ. 7. huius lib. hæc duo priſmata eandem habentia altitudinem, & baſin, ſint æqualia, ſitq; priſma conſtitutū ad priſma *EL*, vt illius altitudo ad huius altitudinem; erit & priſma *ABCHIK*, ad priſma *EL*, ut altitudo illius, ad altitudinem huius.

Qvoniam vero pyramides eandem habent proportio- 15.quinti
nem cū priſmatis, quod illæ ſint horum tertiæ partes: Perſpicuum eſt, ita quoque eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt altitudo ad altitudinem.

Eadem prorſus eſt ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, vt dictum eſt; atque ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.

Haec omnia eodem fere modo demonſtrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.

Omnia quoque hæc facile conuerti poſſunt hoc modo.

Coni & cylindri tam recti, quam ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habebunt æquales.

Nam alias pars æqualis foret toti, vt in conuerſo propoſ. 31. lib. 11. oſtenſum eſt.

12. THEOR. 15. PROPOS. 15.

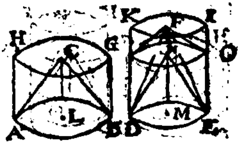
AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines; & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.

Sint æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK; quorum baſes AB, DE; axes, altitudinesve LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit ut baſis AB, ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinē æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.

Quod ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, ut in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, ut fiat duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH,

DE-

DEIK; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. Eſt autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: Itẽ ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines. 7. quinti. 11. duodec. 14 duodec.

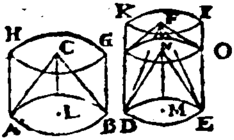


In conis neceſſario concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes; Quare ut oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam conſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demonſtrari poteſt, quo uſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF, conſtituantur duo coni, ut in figura. 10. duodec.

Sed iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit ut baſis AB, ad baſin DF, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.

Quod ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN; Eſt autem, ut baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: Item ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum baſes ſint æquales; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit. 11. duodec. 14. duodec. 9. quinti.

AT vero in conis hæc erit demonſtratio. Si conorum ABC, DEF, baſes & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eædem ſint baſes, altitudineſque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut oſtenſum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo, conos eſſe æquales, quo oſtendimus cylindros æquales eſſe. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

NON difficile erit idem oſtendere de conis, & cylindris ſcalenis. Si enim æquales ſint coni & cylindri ſcaleni, erunt quoque recti eaſdem cum illis baſes, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare vt oſtenſum eſt, baſes & altitudines reciprocabuntur. Quod ſi baſes, & altitudines conorum & cylindrorum ſcalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, ſi eædem ſint baſes, & altudines rectorum & ſcalenorum. Quare, ut demonſtratum eſt, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri ſcaleni, cum ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. inter ſe quoque erunt æquales.

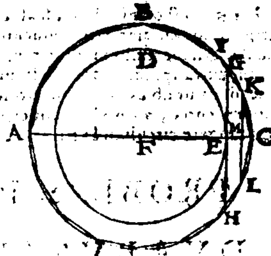
IDEM facile concludetur, licet unus conorum & cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, vt perſpicuum eſt ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus.

13.

PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcri-

inſcribere, quod non tangat minorem circulum.



SINT duo circuli ABC, D E, circa idem centrũ F, oporteatq; in maiori ABC, inſcribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari cõtinentur, non tangens minorem D E, Extendatur per cẽtrum F, recta A C, ſecans circulum D E in E, puncto, & per E, ducatur G H, ad A C, perpẽdicularis, quę tãget circulum D E, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus A G C, maior eſt arcu C G, ſi ex A G C, auferatur dimidiũ A B, & ex reſiduo BC, dimidiũ B I, & ex reſiduo I C, dimidium I K, & ſic deinceps; relinquetur tandẽ minor *1. decimi.* arcus, quã CG Sit igitur iam arcus C K, arcu CG, minor, & ſubtendatur recta CK. Dico rectã C K, eſſe unum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrãs A B, in totidẽ partes æquales diuidatur, in quot diuiſus eſt quadrans BC; nec nõ ſemicirculus AHC, in totidem partes, quot cõtinet ſemicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ ſubtendantur, quæ æquales quidem erũnt ipſi *29. tertij.* rectæ C K, eo quod arcus arcui C K. æquales ſubtendant; Deſcriptum erit polygonum in circulo A B C, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem D E, ita oſtendetur. Ex K, ad A C, demittatur perpendicularis K L, ſecans ipſam A C, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti ſunt, erunt rectæ GH, K L, *28. primi.* parallelę. Quare cũ recta G H, tangat circulum DE, in ſolo puncto E; recta K L, erit tota extra dictum circulũ, nec unquam ipſum continget, quod nunquam cum recta G H, conueniat. Multo igitur minus recta C K, quæ longius a circulo D E; abeſt, quam K L, circulum D E, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inſcripti, cum æqualia ſint lateri C K, ideoque æqualiter cum C K, a cen- *14. tertij.*

tro F, diſtent, circulum D E, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Hinc eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cũ diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulũ minorem poſſe contingere, ſed totam extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea K L, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris C K, cum diametro A C, conuenientis, ad A C, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum D F.

14. PROBL. 2. PROPOS. 17.

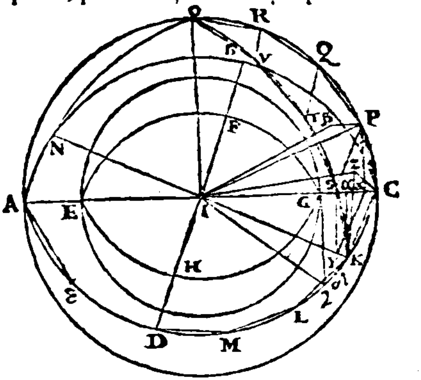
DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidũ polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

Sint duæ ſphæræ A B C D, E F G H, circa idem centrum I, oporteatque in maiori A B C D, inſcribere ſolidum polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorem ſphæram E F G H. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo per centrum, ſintque communes ſectiones factæ in ſphæris plana A B C D, E F G H, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphæræ deſcribuntur, circunducti congruent ſectionibus A B C D, E F G H. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias ſectionum ſunt æquales, cum ducantur ex centro ſphærarum ad earum ſuperficiem; erunt ipſæ ſectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri A C, B D, ſe ſe in centro I, ſecantes ad angulos rectos, ut ſint quadrantes A B, B C, C D, D A, &c.
16. duodec. Deinde in maiori circulo A B C D, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum E F G H. Quod quidem, ut

facilius

facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur.
Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G γ, ad circunferentiam
uſque circuli A B C D, quæ circulum E F G H, tanget in
G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et rectæ G γ, applicetur in
circulo A B C D, recta æqualis A ε. Quia uero, ſi arcui 1. quarti
C γ, intelligatur ſubtendi recta, ut fiat triangulum G C γ,
latus C γ, oppoſitum maiori angulo, nempe recto, maius eſt 19. primi
latere G γ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto;
erit quoque recta C γ, maior recta A ε; ac proinde arcus
C γ, arcu A ε, maior erit, ut conſtat ex ſcholio propoſ. 28.
lib. 3. Abſcindatur ergo arcus C δ, arcui A ε, æqualis. Quod
ſi ex quadrãte C D, dimidium auferatur D L, & ex reliquo
C L, dimidium L K, & ſic deinceps; relinquetur tandem arcus
minor arcu C δ, ſeu arcu A ε. Sit ergo iam arcus C K, 1. decimi
minor; Eritque recta C K, ſubtenſa minor quam rectá A ε,
hoc eſt, quam G γ, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Dico igitur,
rectam C K, eſſe unum latus polygoni æquilateri inſcribendi.
Nam cum recta ſubtendens arcum C δ, minorem arcu
C γ, non tangat circulum E F G H, ut ex demonſtratione
præcedentis propoſ. patet, multo minus recta C K, ſubtendens
arcum minorem arcu C δ, eundem circulum tanget.
Rurſus ducta diametro K N, erigatur ex centro I, ad plana
circulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occurrens 12. undec.
ſuperficiei ſphærę maioris in O; Et per rectas O I, A C,
& O I, K N, plana ducantur, quæ ad circulum A B C D, 18. undec.
recta erunt, efficientque communes ſectiones, circulos, ut
iam dictum eſt, quorum ſemicirculi ſint A O C, N O K. Quia
uero anguli O I C, O I K, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. quadrãtes
erunt O C, O K; atque adeo, cum circuli A B C D,
A O C, N O K, æquales ſint, quod eorum diametri ſint &
ſphæræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes C D,
O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes ęquales
diſtribuatur, in quot diuiſus fuit arcus C L; Et quadrantes
O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus
quadrantis C D; Erunt rectæ his omnibus arcubus
æqualibus ſubtenſæ, nimirum C K, K L, L M, M D; C P,
P Q, Q R, R O; K S, S T, T V, V O, æquales. Coniunctis 29. tertij
autem rectis P S, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad
planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, quæ in
commu-

38. & 6 undec. cõmunes ſectiones A C, N K, cadẽt; eruntq; inter ſe parallelę.



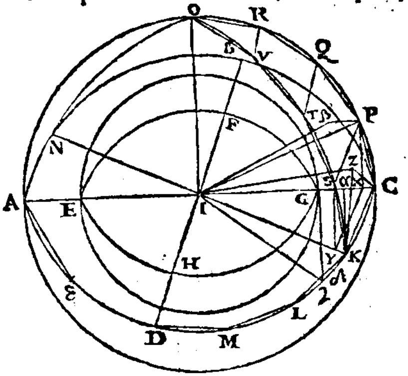
QVONIAM igitur triãgulorũ PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. & anguli P C X, S K Y, 27. tertij. æquales, quod & æquales ſint peripheriæ AOP, N O S, quibus inſiſtũt; (Nam ſi ex ſemicirculis AOC, N O K, ęqualibus demantur arcus æquales CP, KS; reliqui arcus A O P, N O S, æquales quoque erunt.) Erũt duo anguli P C X, PXC, triãguli PCX, ęquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY: Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis oppoſita, æqualia. 26. primi. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus S Y, Y K, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales ſint & parallelæ; 33. primi ſi connectatur recta X Y; ęquales quoque erunt & parallelæ PS, XY. 2. ſexti. At quia & rectæ CK, XY, parallelæ ſunt, quod latera IC, I K, proportionaliter ſecta ſint. (Si enim ex ſemidiametris I C, I K, æqualibus demantur æquales rectæ CX, KY, relinquentur & IX, IY, ęquales; Ac proinde erit, ut 9. undec. I X, ad XC, ita IY, ad YK.) Erunt parallelæ quoq; PS, CK, inter ſe, cum utraq; parallela ſit ipſi XY; ideoque eas coniungentes 7. undec. rectæ C P, K S, in eodem cum ipſis plano exiſtent. Totũ igitur quadrilaterũ C K S P, in uno erit plano. Quod ſi ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectę Q C, T K, oſtendemus ſimiliter C K, Q T, eſſe parallelas; atq; adeo ipſas PS, Q T, inter ſe parallelas eſſe, cũ eidẽ C K, ſint parallelæ; totumque quadrilaterum PSTQ, in uno eſſe plano. Eadem ratione in uno erit plano quadrilaterũ Q T V R: Eſt autẽ & triangulum 2. undec. RVO, in uno plano. Si igitur eadem cõſtructio exhibeatur

beatur ſuper reliqua latera KL, LM, MD, ductis ſcilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemiſphærio; ut tota ſphæra maior repleatur quadrilateris, & triãgulis, quę ſimilia ſint prædictis inter quadrãtes OC, OK, ſuper latus CK, conſtructis; inſcriptum erit in ſphæra maiori ſolidum polyedrum circunſcriptum dictis quadrilateris, atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere ſphæram minorem EFGH.

DVCATVR ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectę ZC, ZK. Quoniam igitur, ex defin. 3 lib. 11. anguli IZC, IZK, recti ſunt; erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum *47. primi.* rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia ſint; erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarũ IZ, ZK, ęqualia; Ac proinde dempto cõmuni quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, ęqualia erunt, ideoq; & ipſę rectę ZC, ZK ęquales. Similiter oſtendemus rectas, quę ex Z, ad P, S, ducẽtur, ęquales eſſe & inter ſe, & rectis ZC, ZK; Quare circulus ex Z, ad interuallũ ZC, deſcriptus per quatuor puncta C, K, S, P, tranſibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos deſcribi poſſe, demonſtrabimus. Quoniam uero, ut poſtea oſtendemus, angulus CZK, obtuſus eſt: erit quadratum rectę CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; *12. ſecundi* ideoque cum hæc quadrata æqualia ſint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectę ZC.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Kα. Cum igitur AC, dupla ſit ipſius AI, & Aα, maior ſit, quã AI, erit AC, minor duplo ipſius Aα. Quam ob rem cũ ſit, ut AC, ad Aα, ita rectangulum ſub AC, αC, ad rectangulum *1. ſexti.* ſub Aα, αC, quod baſes horum rectangulorũ ſint AC, Aα, & eadem altitudo αC; erit quoque rectangulum ſub AC, αC, minus duplo rectanguli ſub Aα, αC. Eſt autem rectangulũ ſub AC, αC, æquale quadrato rectę CK; *17. ſexti.* & rectangulum ſub Aα, αC, ęquale quadrato rectę Kα; quod rectæ CK, inter AC, αC, ſit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum

gulum A K C.) Igitur & quadratum rectæ C K, minus erit duplo quadrati rectæ K α. Ac propterea cum quadratum rectę C K, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectę Z C; erit quadratum rectæ K α, maius quadrato rectæ Z C.



47.primi. Quoniã uero quadratũ rectæ I C, ęquale eſt quadratis rectarũ I Z, Z C; & quadratũ rectæ I K, quadratis rectarum I α, α K: Suntq; ęqualia quadrata rectarũ æqualiũ I C, I K; Erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, æqualia quadratis rectarũ I α, α K. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ α K; & ex illis minus, uidelicet rectæ Z C, erit reliquum quadratum rectæ I Z, maius quadrato reliquo rectæ I α; ideoque recta I Z, maior quam recta I α. Quapropter cum punctum α, non tangat ſphęram minorem E F G H, quod per coroll. propoſ pręcedentis recta K α, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans, eandem ſphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani C K S P, longius abſint a ſphęra E F G H, quam punctum Z, ut mox oſtendemus, non tanget planum C K S P, ſphæram E F G H.

SED & expeditius ex ipſa fere cõſtructione figurę oſtendemus, planum C K S P, non tangere ſphęram minorem E F G H, ſi prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam C K, minorem eſſe recta G γ: Eſt autem C K, maior, quam Z C, quod angulus C Z K, obtuſus ſit, ut mox demonſtrabitur; Multo maior erit G γ, quam Z C; Ac proinde quadratum rectę G γ, maius quadrato rectæ Z C. Quia uero quadratum rectę 19.primi.

I γ,

47. primi

I γ, æquale eſt quadratis rectarum I G, G γ; & quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C; ſunt autem quadrata rectarum I γ, I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ G γ, & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quam ob rem, cum I G, ſit ſphæræ minoris E F G H, ſemidiameter; exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, ut prius, planum C K S P, ſphæram E F G H, nequaquam continget.

47. primi.

DVCATVR rurſus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis I β, eritque, β, centrum circuli circa P S T Q, deſcripti, ut demonſtratum eſt: Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus ſit, ex 3. defin. lib. 11. erit quadratum rectæ I P, æquale quadratis rectarum I β, β P. Quia uero & quadratum rectæ I C, (quod æquale eſt quadrato rectæ I P, ob æqualitatẽ rectarũ I C, I P) æquale eſt quadratis rectarũ I Z, Z C; erunt quadrata rectarũ I β, β P, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia: eſt uero quadratum rectæ Z C, maius quadrato rectę β P, quod & linea Z C, maior ſit, quã linea β P, ut poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratũ rectæ I β, reliquo quadrato rectę I Z, maius erit; ideoq; & linea I β, maior quam linea I Z: Ac proinde multo magis punctum β, extra ſphæram E P G H, exiſtet, quam punctum Z, proptereaque multo minus planum P S T Q, quam C K S P, tanget ſphæram minorem E F G H. Eodem modo demonſtrabimus, quod neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſſint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Ex iis, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quauis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in una ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra

in

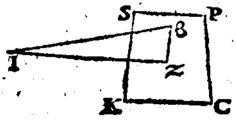
in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum; ut conſtat, ſi intelligatur harũ ſphærarum minor intra maiorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuo lineæ rectæ ductæ a centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium; Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cum ſingulæ pyramides in una ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionẽ triplicatã laterũ homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorũ ſphærarũ, ut cõſtat ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Sint autem, ut una pyramis ad
12.*quinti* unam pyramidem, ita omnes pyramides, id eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, hoc eſt, ad ſolidũ polyedrum ex ipſis conſtitutum: Habebit quoque polyedrũ unius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidiametrorum, atque adeo diametrorum ſphærarum, cum ſemidia-
15. *quinti* metri atque diametri eandem habeant proportionem.

SCHOLION.

QVONIAM vero ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, vt vera, quæ tamen nondum ſunt demonſtrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonſtranda.

PRIMO itaque oſtendendum eſt, angulum CZK, in quadrilatero CKSP, eſſe obtuſum. Quod ut commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterũ ex cẽtro Z, circulus. Quoniã igitur in figura ſuperiori, eſt ut IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll propoſ 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, ſimilia ſint.) Eſt autem IK, maior quam IY;
14.*quinti* *erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis ſit oſtenſa ipſi SP, erit quoque KC, maior quam SP; Ac propterea arcus CK, maior erit arcu SP, ex ſcholio propoſ. 28. lib.*
28. *tertij.* *3. Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, ſint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipſi KC, lineæ ſint æquales demonſtratæ; (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Ac idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque adeo angulus CZK, obtuſus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, ut perſpicuum eſt ex coroll. 2. ultimæ propoſ. lib. 6.*

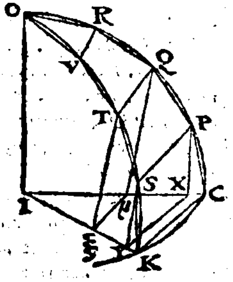
SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadri-



quadrilateri C K S P; longius a centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero C K S P, & adiungantur rectæ I ϑ, Z θ. Quoniam ergo angulus I Z θ, rectus eſt ex defin. 3. lib. 11. Erit latus illi oppoſitum I θ, maius latere I Z, quod minori angulo I θ Z, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius a centro I, diſtat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare.

19.primi.

TERTIO, ac vltimo probandum eſt, rectam Z C, maiorem eſſe recta β P. Quod vt aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam P S, maiorem eſſe recta Q T. Deſcribatur igitur pars ſuperioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur ſemidiametris I C, I O, & quadrantibus Q O, O K; &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli A B G D, in quo eſt triangulum I C K, perpendiculares Q μ, T ξ, quæ in communes ſectiones I C, I K, cadent, eruntque inter ſe ſe parallelæ, vt de rectis P X, S Υ, dictum eſt. Quod ſi adiungatur recta μ ξ, erunt Q T, μ ξ, parallelæ & æquales, quemadmodum oſtenſum fuit parallelas eſſe & æquales P S, X Υ. Quia vero μ ξ, ipſi C K, parallela eſt, quod latera I C, I K, proportionaliter ſint ſecta in μ, & ξ, veluti diximus de recta X Υ; erũt quoque μ ξ, X Υ, parallelæ. Quare erit, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. vt I Υ, ad Υ X, ita I ξ, ad ξ μ: eſt autem I Υ, maior quam I ξ. Igitur & Υ X, maior erit quam ξ μ; Ac proinde & P S, quæ æqualis eſt ipſi X Υ, maior erit quam Q T, quæ æqualis eſt ipſi ξ μ.



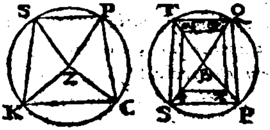
38. undec.
6. undec.
2. ſexti.
30. primi.

HOC ergo demonſtrato, deſcribantur ex centris Z, β, circa quadrilatera C K S P, P S T Q, circuli, egredianturq; e centris rectæ Z C, Z K, Z S, Z P; β P, β S, β T, β Q. Si igitur Z C, non credatur maior, quã β P, erit vel æqualis, vel minor. Sit

primum

primum æqualis. Quia ergo latera Z K, Z C, æqualia ponuntur lateribus β S, β P; & baſis K C, maior eſt baſe P S; erit angulus K Z C, maior angulo S β P: Eadem ratione maior erit angulus S Z P, angulo T β Q. At quoniam baſes K S, C P, *baſibus* S T, P Q, *ſunt æquales; erunt anguli* K Z S, C Z P, *angulis* S β T, P β Q, *æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdũ. Non igitur æqualis eſt recta Z C, recta β P.* 25. primi. 8. primi.

Sɪᴛ *ſecundo Z C, minor, quam β P. Et abſcindantur β π, β ρ, β ω, β φ, ipſis Z C, Z K, Z S, Z P, æquales, connectanturq; rectæ π ρ, ρ ω, ω φ, φ π, quæ parallelæ erunt rectis P S, S T, T Q, Q P, eo quod rectæ ex centris ſectæ ſint proportionaliter;* 2. sexti.



Ac proinde, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit ut β S, ad S P, ita β ρ, ad ρ π. Cum ergo β S, maior ſit, quam β ρ, erit & S P, maior quam ρ π. Eademq; ratione maiores erunt S T, T Q, Q P, *rectis ρ ω, ω φ, φ π; Ac propterea cũ* P S, *minor ſit quã* C K, *&* S T, P Q, *æquales rectis* K S, C P; *&* T Q, *minor quã* P S, *erunt rectæ π ρ, ρ ω, ω φ, φ π, minores rectis* C K, K S, S P, P C. *Quare cũ rectæ β π, β ρ, β ω, β φ, rectis* Z C, Z K, Z S, Z P, *ſint æquales; erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β; Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi ſint quatuor rectis æquales ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta* Z C, *quam β P: Sed neque æqualis eſt oſtenſa; Maior igitur eſt. Quod erat oſtendendum.* 14. quinti.

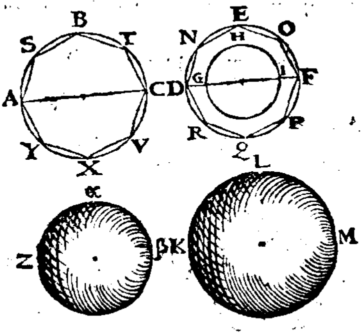
15. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SPHAERAE inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

Sɪɴᴛ duæ ſphęrę A B C, D E F, quarum diametri A C, D F. Dico ſphęram ABC, ad ſphęram D E F, habere proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Si enim hoc non concedatur, habebit ſphęra A B C, ad

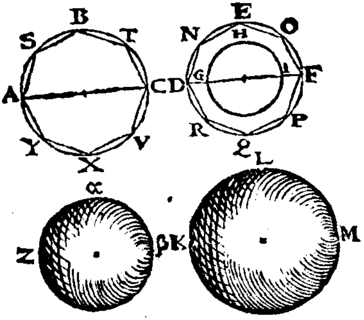
aliam

aliam ſphæram GHI, minorem, vel KLM, maiorem quam DEF, triplicatam proportionem diametri A C, ad diametrū DF. Habeat primum ſphera ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrū D F; intelligaturq; ſphæra GHI, concentrica ſphæræ DEF. Inſcribatur in ſphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFP QR, 17. *duodec.* non tangens minorem ſphæram G H I; Atq; huic ſimile polyedrum A S B T C V X Y, inſcribatur in ſphæra A B C: Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ ABC, ad ſphæram G H I, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F: Eſt autem, per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri AS B T C V X Y, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F; Erit ut ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, ita polyedrū ASBTCVXY, ad polyedrū DNEOFPQR. Quare cum ſphæra A B C, maior ſit polyedro ASBTCVXY; erit & ſphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, 14. *quinti.* pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F.



HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Cum igitur, ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum D F; Erit ut ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, ut ſphæra KLM, ad ſphærā ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum AS-

B T C V X Y: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſ. polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum A S B T CVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Ponatur ut ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphęra DEF, ad aliam ſphæram Z α β. Habebit igitur & ſphæra D E F, ad ſphærã Z α β, proportionem triplicatã diametri DF, ad diametrũ A C.



Et quia ſphæra KLM, maior ponitur, quam ſphæra D E F, erit quoq; ſphæra ABC, maior, quam ſphæra Z α β. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Z α β, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum A C. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt nõ poſſe ſphæram ad ſpheram alia ſphera minorem, proportionem habere triplicatam diametrorũ. Non ergo habebit ſphęra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatã diametri AC, ad diametrum DF; Sed neq; ad minorem habet, ut demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram D E F, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaq; inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendũ.

COROLLARIVM.

Hinc fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, ut polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tã ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonſtratum eſt.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM XIII.

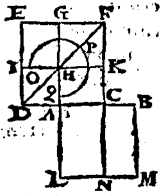
Et Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

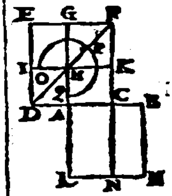
I.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplũ poteſt eius, quod a dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitq; maius ſegmentũ AC. Producta autem BA, ad D; ſit AD, dimidia totius AB. Dico quadratũ rectæ CD, quintuplum eſſe quadrati rectæ AD. Deſcribatur .n. ſuper CD, quadratũ CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipſi DE, parallela, ſecans diametrũ in H, pũcto, ꝑ qđ ducatur IK, parallela ipſi CD. Producta deinde GA, ꝑficiatur quadratũ AM, protrahaturq; FC, ad N. eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarũ AD, AC. Quia ergo eſt ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulũ CM, ſub AB, CB, æquale ipſi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cũ ponatur AB, dupla ipſi⁹ AD, ſitq; AL, ipſi AB, & AH ipſi AD, æqualis; erit quoq; AL, ipſius AH, dupla: Eſt au- 3.defin.ſex. 17.ſexti.



1. *ſexti.* tem ut A L, ad A H, ita rectangulum A N, ad A K, rectangulum. Duplum igitur eſt A N, ipſius A K. Quoniam au-
43. *primi.* tem A K, ipſi I G, eſt æquale; erit A N, æquale duobus A K, I G. Additis igitur æqualibus C M, K G; erit quadratũ A M, gnomoni O P Q, æquale. Quare cum quadratum A M, quadruplum ſit quadrati A I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea A B, dupla ponatur lineæ A D; erit & gnomon O P Q, eiuſdem quadrati A I, quadruplus; Ac propterea, ſi gnomoni O P Q, addatur ipſum quadratum A I, quintuplum efficietur quadratum C E, quadrati A I.



Aliter. Ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ A B, quadruplum eſt quadrati rectæ A D, quod linea A B, dupla lineæ A D, ponatur; Eſt autem quadratũ rectæ
2. *ſecundi.* A B, æquale rectangulis ſub A B, A C, & ſub A B, B C, comprehenſis; Et rurſus, quod ſub A B, A C, æquale eſt ei, quod ſub A D, A C, bis; (ſicut enim A B, ipſius A D, eſt dupla, ita quoq; erit rectangu-
1. *ſexti.* lum ſub A B, A C, rectanguli ſub A D, A C, duplum, cum utriuſque rectanguli eadem ſit altitudo A C. Ac propterea rectangulum ſub A D, A C, bis ſumptum æquale erit rectangulo ſub A B, A C.) Quod uero ſub A B,
17. *ſexti.* B C, æquale eſt quadrato rectæ A C, cum ſit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B. Igitur quadratum rectæ A C, una cum rectangulo ſub A D, A C, bis, quadruplum quoq; erit quadrati rectæ A D; Ac proinde quadrata rectarũ A C, A D, vna cum rectangulo ſub A D, A C, bis, quintupla erunt quadrati eiuſdem rectæ A D. Quo circa cum quadra-
4. *ſecundi.* tum rectæ C D, æquale ſit quadratis rectarum A C, A D, una cum rectangulo ſub A D, A C, bis; Erit & quadratum rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintuplum; Si recta igitur linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

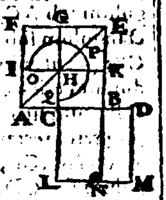
THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit; Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ; maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA ſit recta A B, in C, poſſitque quintuplum ſegmenti A C; ſumatur autem ipſius A C, dupla C D, quę, ut poſt oſtendemus, maior erit reliquo ſegmento B C. Dico ſi C D, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe C B, reliquam partem prioris lineæ. Deſcribatur ſuper A B, quadratum B F, in quo ducta diametro A E, ex C, ducatur ipſi A F, parallela C G, ſecans diametrum in puncto H, per quod agatur I K, parallela ipſi A B. Producta deinde G C, perficiatur quadratum C M, protrahaturq; E B, ad N. Eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. C I, K G, quadrata rectarum A C, C B. Quia igitur quadratum B F, quintuplum ponitur quadrati C I; Si tollatur quadratum C I, relinquetur gnomon O P Q, eiuſdem quadrati C I, quadruplus: Eſt autem & quadratũ C M, quadruplũ quadrati C I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta C D, dupla ſit rectæ A C. Igitur gnomon O P Q, quadrato C M, æqualis erit. Rurſus quoniam C D, ponitur ipſius A C, dupla; eſtq; L C, ipſi C D; & C H, ipſi A C, æqualis; erit & L C, ipſius C H, dupla. Cum igitur ſit ut L C, ad C H, ita rectangulum L B, ad rectangulum 1. ſexti. C N; erit quoque illud huius duplum: Eſt autem C K, ipſi 43. primi. H F, æquale. AEquale igitur eſt L B, ipſis C K, H F; Ac proinde & reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B M. Quoniam ergo ſunt tres rectæ CD, CB, BD; eſtq; rectangulum BM, ſub CD, B D, comprehenſum æquale ipſi KG, quadrato rectæ C B; Erit ut C D, ad C B, ita C B, ad 17. ſexti. B D. Quamobrem, ex definitione, recta C D, ſecta eſt in



B, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum C B.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ A B, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; eſtq; quadratum rectæ *4. ſecundi.* AB, æquale quadratis rectarum C B, A C, una cum rectangulo ſub A C, C B, bis; Erunt & quadrata rectarum C B, A C, una cum rectangulo ſub AC, CB, bis, quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadruplum eiuſdem quadrati rectæ A C: Eſt autem & quadratum rectæ C D, eiuſdem quadrati rectæ A C, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequale igitur eſt quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum ſub AC, CB, bis æquale ſit rectangulo ſub CD, CB; (ſicut enim recta CD, dupla eſt rectæ AC, ita quoque *1. ſexti.* duplum erit rectangulum ſub CD, CB, rectanguli ſub AC, CB; cum utriuſque rectanguli eadem ſit altitudo CB; Ac propterea rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectangulo ſub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectan*2. ſecundi.*gulum ſub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: At quadratum rectæ C D, æquale eſt rectangulis ſub C D, C B, & ſub C D, B D. Igitur quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectangulis ſub C D, C B, & ſub C D, B D; Ac proinde dempto communi rectangulo ſub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale re*17. ſexti.*ctangulo ſub CD, BD; ideoque erit ut CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta C D, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtq; ſegmentum maius CB. Si igitur recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

QVOD *autem recta* CD, *maior ſit neceſſario, quam* C B, *ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ* C D, *quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ.* 4. *lib.* 2. *quadrati rectæ* A C; *Addito quadrato*

rectæ

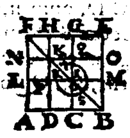
recta A C, erunt duo quadrata rectarum C D, A C, quintupla eiuſdem quadrati rectæ A C. Eſt autem quadratum rectæ A D, maius quadratis rectarum A C, CD, cum æquale ſit quadratis rectarum A C, C D, una cum rectangulo ſub A C, C D, bis. Igitur quadratum rectæ A D, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ A C. Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati rectæ A C. Quare recta A D, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua C D, quam reliqua C B. Quod eſt propoſitum.

4. ſecundi.

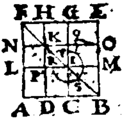
THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

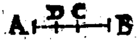
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.



SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentũ AC, bifariã diuidatur in D. Dico quadratũ rectæ BD, quintuplũ eſſe quadrati rectæ CD. Deſcribatur ſuper AB, quadratũ AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducãtur ipſis AF, BE, parallelæ CG, DH, ſecãtes diametrũ in I, K, punctis, per quæ agantur ipſis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ ſecẽt rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarũ A C, C D, B D. Quoniam igitur recta A C, dupla eſt rectæ C D, erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. quadratum L G, quadruplum quadrati P Q. Eſt autem rectangulum C E, æquale quadrato L G. (Nam cum ſit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum ſub A B, C B; nempe 17. ſexti. C E, æquale quadrato rectę A C, nimirum ipſi L G,) Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia uero æqualia ſunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum A D, C D; erunt earum latera H K, I Q, æqualia; ac proinde 34. primi. rectæ E O, O M, ipſis oppoſitæ æquales e- 36. primi. runt. Quare rectangula I O, Q E, æqua- 43. primi. lia erunt: Eſt autem I O, ipſi I D, æquale. Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi C O; gnomon R S T, rectangulo C E, erit æqualis. Cum igitur C E, oſtenſum ſit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon R S T, eiuſdem quadrati P Q, quadruplus; Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta B D, quintuplum quadrati P Q, ex recta C D.



Aliter. Cum A C, diuiſa ſit bifariam in D, & ei addita C B; erit rectangulum ſub A B, B C, una cum quadra- 6. ſecundi. to rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulū ſub A B, B C, quadruplum eſt quadrati rectæ C D; (Nam cum ſit, ut A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit 17. ſexti. rectangulum ſub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C: quod cum, ex ſcholio propoſ. 4 lib. 2. quadruplum ſit quadrati rectę C D; erit & rectangulum ſub A B, B C, quadruplum eiuſdem quadrati rectę C D.) Ac propterea rectangulum ſub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratū rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.



SCHOLION.

Conversum huius theorematis demonſtrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

Si recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quinti quintuplum poſſit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati; Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.

SIT recta A B, diuiſa inæqualiter in C, cuius maius ſegmentum A C, bifariam ſectum ſit in D; ſitque quadratum rectæ B D, quintuplum quadrati rectæ C D. Dico rectam A B, diuiſam eſſe in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propoſ. erit quadratum L G, rectæ A C, quadruplum quadrati P Q, rectæ C D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt autem & gnomon R S T, eiuſdem quadrati P Q, quadruplus. (cum enim quadratum D O, rectæ B D, quintuplum ponatur quadrati P Q, ex recta C D; dempto quadrato P Q, relinquetur gnomon R S T, eiuſdem quadrati P Q, quadruplus.) Igitur gnomon R S T, æqualis erit quadrato L G: At gnomoni R S T, æquale eſt rectangulum C E, ut ſupra oſtenſum eſt. Ergo & quadrato L G, rectæ A C, æquale erit idem rectangulum C E, ſub A B, B C, comprehenſum: Ac proinde erit, ut A B, ad A C, ita A C, ad C B. Quocirca, ex definitione, ſecta erit A B, in C, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum. 17. ſexti.

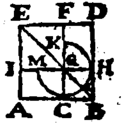
ALITER. Cum A C, diuiſa ſit bifariam in D, & ei addita C B; erit rectangulum ſub A B, B C, vna cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D; Ac propterea cum 6. ſexti. *quadratum ex recta linea B D, deſcriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta C D, deſcripti; erit & rectangulum ſub rectis lineis A B, B C, deſcriptum, vna cum quadrato rectæ C D, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ C D. Quare ablato quadrato rectæ C D, rectangulum ſub A B, B C, quadruplum erit quadrati rectæ C D. Eſt autem eiuſdem quadrati rectæ C D, quadruplum quadratum rectæ A C, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ A C, æquale eſt rectangulum ſub A B, B C. Quamobrem erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; Ac* 17. ſexti. *proinde ſecta A B, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

THEOR.

5.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; Quod a tota, quodq; a minore ſegmento, ſimul utraque quadrata, tripla ſunt eius, quod a maiore ſegmento deſcribitur, quadrati.



SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque ſegmentum maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum A B, B C, ſimul tripla eſſe quadrati rectæ A C. Deſcribatur enim ſuper A B, quadratum A D, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipſi B D, parallela C F, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela ipſi A B. Eruntque CH, I F, quadrata rectarum B C, A C, ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. Quoniam igitur eſt, ut A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum ſub A B, B C, nempe A H, æquale ipſi I F, quadrato rectæ A C. Cum ergo A H, æquale ſit ipſi C D; erit gnomon K L M, una cum quadrato C H, duplus quadrati I F; Ac proinde, addito quadrato I F, erit quadratum A D, rectę A B, una cum quadrato C H, rectæ B C, eiuſdem quadrati I F, rectæ A C, triplum. 17. *ſexti.*

ALITER. Quoniam eſt, ut A B, ad A C, ita AC, ad C B; erit rectangulum ſub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C; Atque adeo rectangulum ſub A B, B C, bis, una cum quadrato rectæ A C, triplum quadrati rectæ A C. 17. *ſexti.* Sunt autem quadrata rectarum A B, B C, ſimul æqualia quadrato rectę A C, una cum rectangulo ſub A B, B C, bis. 7. *ſecundi* Igitur & quadrata rectarum A B, B C, tripla ſunt quadrati rectæ A C. Quocirca, ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; Quod a tota, quodque a minore ſegmento, ſimul utraque quadrata, tripla ſunt eius, quod a maiori ſegmento deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.

SCHO-

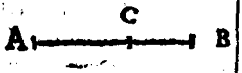
SCHOLION.

CONVERSVM *etiam huius uerum eſt, uidelicet.*

SI recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, una cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex majore ſegmento deſcripti; Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur.

Secta ſit recta A B, *inæqualiter in* C, *ita ut quadratum totius* A B, *& quadratum minoris ſegmenti* B C, *utraq; ſimul tripla ſint quadrati maioris ſegmenti* A C. Dico rectam A B, *ſectam eſſe extrema ac media ratione. Conſtructa enim figura, ut prius; cum quadrata* A D, C H, *tripla ſint quadrati* I F; *Dempto quadrato* I F, *erit gnomon* K L M, *una cum quadrato* C H, *duplus eiuſdem quadrati* I F. *Eſt autem gnomon* K L M, *una cum quadrato* C H, *æqualis duobus rectangulis* A H, C D. *Igitur & rectangula* A H, C D, *dupla ſunt quadrati* I F. *Ac propterea cum æqualia ſint* A H, *&* C D; *erit* A H, *ipſi* I F, *æquale. Quapropter cum rectangulum* A H, *ſub* A B, B C, *æquale ſit quadrato* I F, *rectæ* A C; *erit ut* A B, *ad* A C; *ita* A C, *ad* C B; 17. *ſexti.* *Ac proinde* A B, *diuiſa erit in* C, *extrema & media ratione.*

Aliter. Cum quadrata rectarum A B, B C, *tripla ſint quadrati rectæ* A C; *Sint uero quadrata rectarum* A B, B C, *æqualia quadrato rectæ* A C, *& rectangulo ſub* A B, B C, *bis;* 7. *ſecundi.* *erit & quadratum rectæ* A C, *una cum rectangulo ſub* A B, B C, *bis, triplum quadrati rectæ* A C.



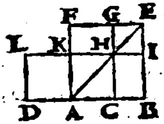
Dempto ergo quadrato rectæ A C, *relinquetur rectangulum ſub* A B, B C, *bis duplum quadrati rectæ* A C; *Et proinde rectangulum ſub* A B, B C, *ſemel, æquale quadrato rectæ* A C. *Quare ut prius, erit ut* A B, *ad* A C, *ita* A C, *ad* C B; 17. *ſexti.* *ideoque* A B, *in* C, *ſecta erit extrema ac media ratione.*

THEOR.

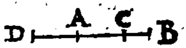
THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturq; ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ a principio, recta linea.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, ſitq; maius ſegmentum A C, & adijciatur ei in rectum A D, æqualis maiori ſegmento A C. Dico rectam B D, ſecari in A, extrema ac media ratione, eſſeq; maius ſegmentum A B. Deſcribatur enim ſuper A B, quadratum B F, in quo ducta diametro A E, ducatur ex C, ipſi B E, parallela C G, ſecans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipſi B D, parallela I K, & ex D, ducatur ipſi A F, parallela D L, occurrens ipſi I K, productæ in L. Eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. C K, I G, quadrata rectarum A C, B C. Quoniam igitur eſt ut A B, ad A C, ita A C, *17. ſexti.* ad C B; erit rectangulum I F, contentum ſub A B, B C, *36. primi.* æquale quadrato C K, rectæ A C: Eſt autem C K, ipſi A L, æquale. Igitur I F, æquale erit ipſi A L; additoq; communi B K, erit rectangulum B L, contentum ſub B D, D A, æquale quadrato B F, rectæ A B; Ac proinde erit ut B D, ad *17. ſexti.* A B, ita A B, ad D A. Quare B D, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum A B.



ALITER. Quoniam eſt ut A B, ad A C, hoc eſt, ad A D, ita A C, ad C B; Erit conuertendo ut D A, ad A B, ita B C, ad C A; & componendo ut D B, ad A B, ita A B, ad C A, hoc eſt, ad A D. Secta igitur eſt B D, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, appo-



naturq;

naturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

SIMILITER *cum Campano & hoc demonſtrabimus.*

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA *enim linea* B D, *extrema ac media ratione ſecetur in* A, *cuius maius ſegmentum* A B, *minus autem ſegmentũ* A D; *& ex maiori ſegmento* A B, *detrahatur recta* A C, *æqualis minori ſegmento* A D. *Dico maius ſegmentum* A B, *diuiſum eſſe in* C, *extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſſe rectam* A C, *quæ æqualis eſt minori ſegmento* A D. *Facta enim prioris figuræ conſtructione; cum ſit ut* B D, *ad* A B, *ita* A B, *ad* A D; *erit rectangulum* B L, *contentum ſub* B D, A D, *æquale quadrato* BF, *rectæ* A B; *& ablato communi* BK, 17. ſexti.
erit A L, *æquale ipſi* I F: *Eſt autem* A L, *ipſi* C K, *æquale.* 36. primi.
Æquale igitur eſt I F, *cõtentum ſub* A B, C B, *quadrato* C K, *rectæ* A C; *Ac proinde erit ut* A B, *ad* A C, *ita* A C, *ad* C B. 17. ſexti.
Quare A B, *ſecta eſt in* C, *extrema ac media ratione, cuius ſegmentum maius eſt* A C, *minus uero ſegmentũ recta* C B. *Quod eſt propoſitum.*

ALITER. *Quoniam eſt ut tota* B D, *ad totam* A B, *ita* A B, *detracta ex* B D, *ad* A D, *hoc eſt, ad* A C, *detractam ex* A B; *erit quoque ita* A D, *reliqua ipſius* B D, *hoc eſt,* A C, *ad* C B, *reliquam ipſius* A B; *ut tota* B D, *ad totam* A B, 19. quinti.
hoc eſt, ut A B, *ad* A C; *Ac propterea diuiſa erit* A B, *in* C, *extrema & media ratione.*

RVRSVS *& hoc demonſtrabimus, quod ſequitur.*

SI linea ſecetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidium maioris ſegmenti; Erit quoque dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim A *B, extrema ac media ratione in C, ſitq; D E, dimidium totius, & D F, dimidium maioris ſegmenti* A *C*. Dico D *E, in F, ſecari extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum eſſe* D F. *Cum enim ſit ut* A *B, tota ad* D *E, totam, ita* A *C, ablata ad* D *F, ablatam, cum utrobique ſit proportio dupla;* 19. quinti. *erit quoque reliqua C B, ad reliquam F E, ut tota ad totam; Ac proinde & C B, dupla erit ipſius F E. Quoniam uero eſt ut* A *B, ad* A *C, ita* D *E, dimidia illius ad* D *F, dimidiam huius:* 15. quinti. *Item ut* A *C, ad C B, ita* D *F, dimidia illius ad F E, dimidiam huius; Eſt autem ex defin. linea ſecta extrema ac media ratione,* A*B, ad* A*C, ut* A*C, ad C*B*: Erit quoq;* D*E, ad* D*F, ut* D*F, ad F E; Ac proinde ex eadẽ defin.* D*E, ſecta erit in F, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.*

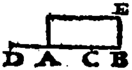
6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; Vtrunque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ uocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis A B, in C, extrema & media ratione. Dico utrunque ſegmentum A C, C B, eſſe lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur .n. maiori ſegmento A C, recta A D, æqualis dimidiæ totius AB. 1. tertijdec. Quoniã igitur quadratũ rectæ CD, quintuplũ eſt quadrati

drati rectę AD, habebit quadratum rectæ CD, ad quadratū
rectæ AD, proportionem, quā numerus ad numerū. Qua-
re commenſurabilia erunt quadrata rectarū CD, AD; pro- 6.decimi.
ptereaq; ipſæ rectæ CD, AD, cōmēſurabiles quoq; exiſtēt,
ſaltem potentia: Eſt autem AD, Rationalis, cum ſit dimidia
lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia ue
ro quadrata rectarum CD, AD, non ha-
bent proportionem, quam numerus qua-
dratus ad numerum quadratum, (ut con
ſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent. n.



proportionem quam 5. ad 1. uel 25. ad 5.) erunt rectæ CD,
AD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationa- 9. decimi.
les potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex CD, Ra
tionali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commē
ſurabilis; erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur 74. decimi.
Apotome.

Rvrsvs applicato ad AB, rectangulo AE, conten-
to ſub AB, CB; cum ſit ut AB ad AC, ita AC ad CB;
erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam- 17. ſexti.
obrem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum
AE, applicatum ſecundum lineam Rationalem AB, facit
alterum latus BE, hoc eſt, rectam CB, illi æqualem, Apo- 98. decimi.
tomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac
media ratione ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

Sed & hoc theorema cum Campano oſtendemus.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque maius ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum, Apotome.

Sit recta AB, extrema ac media ratione diuiſa in C, ſitq; maius ſegmentum AC, linea Rationalis. Dico minus ſegmentū CB, eſſe Apotomen. Diuiſa. n. AC, biſariam in D; erit CD, dimidia ipſius Rationalis AC, Rationalis, cū ſit ipſi AC, commen-

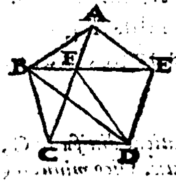
commenſurabilis. Quoniam autem quadratum rectæ B D, 3. tertijdec. quintuplum eſt quadrati rectæ C D; habebunt quadrata rectarum B D, C D, proportionem, quam numerus ad numerum, ac propterea commenſurabilia exi- 6. decimi. ſtent. Quare & ipſæ rectæ B D, C D, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum igitur C D, ſit Rationalis; erit quoq; B D, Rationalis. Quia uero quadrata rectarum B D, C D, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ B D, C D, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex B D, Rationali detrahatur C D, Rationalis potentia tantum commenſurabilis; erit reliqua C B, Irrationalis, quæ 74. decimi. uocatur Apotome.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7

SI pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint: AEquiangulum erit ipſum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps ſint, æquales A, B, C. Dico ipſum pentagonum eſſe æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectę B E, A C, B D; & ex puncto F, ubi ſe interſecant rectæ B E, A C, recta ducatur F D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia ſunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; Erunt & baſes B E,
4. primi. B D, & anguli A E B, C D B, æquales: Sunt autem & anguli
5. primi. B E D, B D E, æquales; cum æqualia ſint oſtenſa latera B E,
B D;



B D; Toti igitur anguli A E D, C D E, æquales erunt. Rur-
ſus quia latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia ſunt lateri-
bus B A, B C, trianguli B A C; & anguli quoque ipſis con-
tenti æquales, ex hypotheſi: Erit & baſis B E, baſi A C, æqua- 4.*primi.*
lis, & anguli A B E, A E B, angulis B A C, B C A, æquales. Cum
ergo æquales ſint anguli A B E, B A C, trianguli A B F; erunt
quoque latera B F, A F, æqualia; Ac propterea ſi ipſa de- 6.*primi.*
mātur ex rectis æqualibus B E, A C, erunt reliquæ lineæ F E,
F C, æquales. Itaque cum latera F E, E D, trianguli F E D,
æqualia ſint lateribus F C, C D, trianguli F C D, & baſis com
munis F D; erunt & anguli dictis lateribus contenti F E D, 8.*primi.*
F C D, ęquales: Sunt autem & anguli A E B, B C A, oſtenſi
æquales. Aequales igitur ſunt toti anguli A E D, B C D;
Ac proinde cum angulo A E D, oſtenſus ſit ęqualis angulus
C D E, & angulo B C D, ęquales ponantur anguli A B C,
B A E; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoq; æqui-
angulum erit ipſum pentagonum.

SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C,
D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqua-
lia ſunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli quo-
que ipſis cōtenti, æquales, ex hypotheſi; Erunt & baſes B E,
B D, & anguli A E B, C D B, æquales; Sunt autem & angu- 4.*primi.*
li B E D, B D E, ęquales, quod ęqualia oſtenſa ſint latera B E, 5.*primi*
B D. Igitur toti anguli A E D, C D E, ęquales erunt. Quare
cum ęquales ponantur anguli B A E, C D E; erunt tres angu
li deinceps ęquales A, E, D; Ac proinde, ut iam demonſtra-
tum eſt, pentagonum ęquiangulum erit. Si pentagoni igi-
tur ęquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 11.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR, in pẽtagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, & D, rectæ DB, CE, ſe mutuo ſecantes in F. Dico ipſas ſecari extrema & media ratione, maioraque earum ſegmenta FB, FE, æqualia eſſe lateri cuilibet pentagoni. Deſcripto enim circulo circa pentagonum, erũt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. 14. quarti. 28. tertij. Quia vero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; Erunt & baſes DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; 4. primi. Ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, ſint æquales, & ipſis æqualis ſit externus angulus BFC; erit angulus BFC, duplus anguli DCE. 32. primi. Eſt autem & angulus BCE, eiuſdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, ſit duplus. 33. ſexti. Igitur anguli BFC, BCF, æquales ſunt; Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. 6. primi. Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus inſiſtentes æquales ſunt; 27. tertij. erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD; Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. 32. primi. Quare erit ut BD, ad DC, hoc eſt, ad BF, æqualem ipſi DC; ita CD, hoc eſt, ſibi æqualis BF, ad FD; 4. ſexti. Ac propterea BD, ſecta eſt in F, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum BF, lateri pentagoni æquale, ut oſtenſum eſt. Simili ratione oſtendemus, rectam CE, ſecari in F, extrema ac media ratione, maiuſque illius ſegmentum EF, æquale eſſe lateri pentagoni DE. Itaque ſi pentagoni æquilateri & æquiãguli duos angulos, &c. Quod erat oſtendendum.

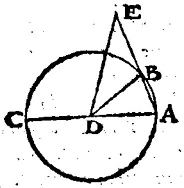
9.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur,

ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus.

IN circulo A B C, ſit latus decagoni A B, cui in rectum
addatur B E, æqualis ſemidiametro circuli, ac proinde lateri
hexagoni eidem circulo inſcripti. Dico E A, rectam ſectam
eſſe in B, extrema ac media ratione,
maiusque ſegmentum eſſe E B, latus
hexagoni. Ducatur enim ex A, per
centrum D, diameter A C, coniunganturque
rectæ D B, D E. Quoniam
igitur A B, arcus, eſt decima
pars totius periphæriæ circuli; continebit
arcus ſemicirculi arcum A B,
quinquies; Ac proinde arcus B C, quadruplus erit arcus
A B. Quare & angulus B D C, anguli A D B, quadruplus *33. ſexti.*
erit. Rurſus quia latera B D, B E, ſunt æqualia, nempe
latera hexagoni; (eſt enim B E, latus hexagoni ſemidiametro
BD, æquale, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4.) erunt & anguli *5. primi*
B D E, B E D, æquales: quibus cum æqualis ſit externus *32. primi.*
A B D; erit angulus A B D, duplus anguli B E D: Eſt
autem angulo A B D, æqualis angulus B A D; ob æqualitatem *5. primi*
laterum D A, D B. Igitur & angulus B A D, duplus
erit anguli B E D: Ac proinde duo anguli DAB, DBA,
ſimul quadrupli erunt anguli B E D. Cum ergo angulis
D A B, D B A, æqualis ſit externus B D C; erit angulus *32. undec.*
B D C, quadruplus eiuſdem anguli B E D. Atqui idem angulus
B D C, oſtenſus fuit quadruplus anguli A D B. Igitur
æquales ſunt anguli A E D, A D B. Quocirca cum
duo anguli A E D, D A E, trianguli A D E, æquales ſint
duobus angulis A D B, B A D, trianguli A B D; erunt
triangula A D E, A B D, æquiangula. Igitur erit ut EA, *32. primi.*
ad A D, hoc eſt, ad E B, ipſi A D, æqualem, ita A D, hoc *4. ſexti.*
eſt, E B, ſibi æqualis, ad B A; Ac idcirco recta E A, ſecta eſt
in B, extrema & media ratione, eſtque maius ſegmentum
E B, latus hexagoni. Itaque ſi hexagoni latus, & decagoni,
in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta
linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmẽtum
eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum.



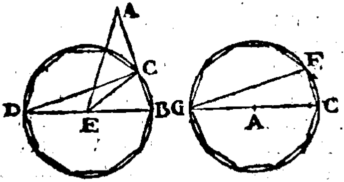
SCHOLION.

QVIA vero demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius lib. ſi minus ſegmentum lineæ diuiſæ extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur; maius ſegmentum ſecari quoque extrema & media ratione, eiuſque ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum; Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib. 14. propoſ. 4.

CONVERSVM *quoque huius theorematis facile cum Campano demonſtrabimus. Videlicet.*

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione, ſitque primo AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus ſegmentū CB, eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulū cadat. Et ducta ex B, per centrum F, diametro BED, cōnectantur rectæ EA, EC. Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro EB, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoque vt AB, ad BE, ita EB, ad BC, ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, cum habeāt latera 6. ſexti.



latera circa communem angulum B, proportionalia; eritque angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera C A, C E, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni; erunt anguli CAE, C E A, æquales; quibus cum æqualis ſit externus B C E, erit BCE, duplus anguli A; Eſt autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum E B, E C, æqualis. Igitur & C B E, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, C B E, ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli. Cum ergo angulis BCE, C B E, æqualis ſit externus C E D; erit quoque angulus C E D, eiuſdem anguli A; & propterea anguli BEC, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus erit. Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus B C; Ac proinde arcus ſemicirculi B C D, eiuſdem arcus B C; quintuplus exiſtet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus B C. Quapropter recta B C, latus eſt decagoni. 5.primi. 32.primi 5.primi. 32.primi 33. ſexti.

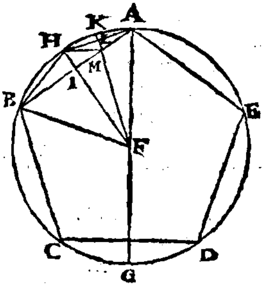
S I T *ſecundo C B, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentum A C, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus B C, in circulo BCD, ducaturque diameter B E D. Deinde interuallo A C, deſcribatur circulus C F G, cuius diameter CAG; eritque ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. A C, latus hexagoni circuli C F. Quoniam igitur A B, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum A C, latus hexagoni circuli C F G; erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum C B, latus decagoni eiuſdem circuli C F G. Deſcribatur ergo in circulo C F G, decagonum æquilaterum & æquiangulum CFG; Item in circulo B C D, decagonum æquilaterum, & æquiangulum B C D; eruntque latera B C, C F, inter ſe æqualia. Quoniam vero, ſi connectantur rectæ C D, F G, anguli CDB, FGC, ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtendimus, quod inſiſtant arcubus ſimilibus B C, C F, nempe decimis partibus peripheriarum; & ſunt quoque anguli B C D, C F G, in ſemicirculis æquales, nimirum recti: Erunt quoque latera B D, C G, inter ſe æqualia. Quam ob rẽ cum diametri B D, C G, ſint æquales, æquales quoque erunt circuli B C D, C F G. Ac proinde, cum recta A C, ſit latus hexagoni circuli C F G, erit quoque eadem recta A C, latus hexagoni circuli B C D.* 31. tertÿ. 26.primi

Quod eſt propoſitum.

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

IN circulo A B C D E, cuius centrum F, deſcriptum ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris A B, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, una cum quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta FB. Diuiſo deinde arcu AB, biſariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, ſecans rectam A B, in I: eritque recta A H, latus decagoni, & B F, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu A H, biſariam in K, adiungatur recta F K, ſecans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, puncto, ad quod recta ducatur H M. Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales ſunt; erunt & anguli ipſis inſiſtentes AFH, B F H, æquales. 27. tertij. Quare cum latera AF, F I, trianguli A F I, æqualia ſint lateribus B F, F I, trianguli BFI; & anguli ipſis contenti, æquales quoque; 4. primi erunt & baſes A I, B I, æquales, & anguli A I F, BI F, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ A L, H L, & anguli ALF, H L F, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis æqualibus A B C G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, AED; relinquentur arcus C G, D G, inter ſeſe æquales, ideoq; erit arcus C G, dimidium arcus C D: Eſt autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cum arcus A B, C D, æquales ſint;



ſint ; erunt quoque eorum dimidij arcus C G, A H, æqua-
les ; Ac proinde cum arcus A H, duplus ſit arcus H K, erit
& arcus C G, duplus eiuſdem arcus H K. Eodem modo,
quia arcus A B, B C, æquales ſunt, & eſt arcus A B, du-
plus arcus B H, erit etiam arcus B C, eiuſdem arcus B H,
duplus. Quare arcus C G, B C, æquemultiplices ſunt, nem-
pe dupli, arcuum H K, B H ; Ac propterea totus arcus
B G ; duplus quoque erit totius arcus B K ; & idcirco angu- 1. *quinti.*
lus quoque B F G, duplus anguli B F K : Sed quia (cum an- 33. *ſexti.*
guli F A B, F B A, ob æqualitatem laterum F A, F B, æqua- 5. *primi*
les ſint, ipſiſque æqualis *externus* B F G ;) idem angulus 32. *primi.*
lus B F G, duplus eſt quoque anguli F A B ; erunt idcirco
anguli B F M, F A B, æquales ; Ac propterea triangula
A B F, F B M, cum habeant angulos F A B, M F B, æqua-
les, & angulum A B F, communem, æquiangula erunt, 32 *primi.*
Quocirca erit ut A B, ad B F, ita B F, ad B M ; ideoque 4. *ſexti.*
rectangulum ſub A B, B M, æquale erit quadrato rectæ 17. *ſexti.*
B F. Rurſus quia latera A L, L M, trianguli A L M, æqua-
lia ſunt lateribus H L, L M, trianguli H L M, & anguli quo-
que *ipſis contenti æquales, nempe recti* : erunt & baſes A M,
H M, & anguli L A M, L H M, æquales : Eſt autem angu- 4. *primi*
lus L A M, angulo H B A, æqualis, quod & latera H A, 5. *primi.*
H B, æqualia ſint. Igitur & angulus L H M, eidem angu-
lo H B A, æqualis erit ; Ac propterea triangula A B H,
A H M, cum habeant angulos A B H, A H M, æquales,
& angulum H A M, communem, æquiangula erunt. 32. *primi.*
Quam ob rem erit ut A B, ad A H, ita A H, ad A M ; 4 *ſexti.*
ideoque rectangulum ſub A B, A M, æquale erit quadrato 17. *ſexti.*
rectæ A H : oſtenſum eſt autem & rectangulum ſub A B,
B M, æquale quadrato rectæ B R. Igitur rectangula ſub
A B, B M, & ſub A B, A M, ſimul æqualia ſunt quadratis
rectarum B F, A H. At uero rectangula ſub A B, B M, &
ſub A B, A M, æqualia ſunt quadrato rectæ A B. Quadra- 2. *ſecundi*
tum ergo rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale eſt
quadratis rectarum B F, A H, lateris uidelicet hexagoni, &
lateris decagoni. Si igitur in circulo pentago-
num æquilaterum deſcribatur, &c.
Quod erat demon-
ſtrandum.

COROLLARIVM. I.

Hinc ſequitur, lineam rectam, quæ ex centro ducta diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos. Oſtenſum enim eſt, rectam FH, propterea quod arcum A B, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris eſt demonſtratio.

COROLLARIVM. II.

Perſpicuum quoque eſt, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppoſitum ſubtendit, & latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos. Demonſtratum enim eſt diametrum A G, ex puncto A, ductam diuidere arcum C D, quem latus oppoſitum C D, ſubtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum tranſeat per centrum, ſecabit quoque latus C D, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, ut conſtat.

SCHOLION.

Qvoniam ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum deſcribitur, eiuſque demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc a nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrum D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuiſa ſemidiametro C D, bifariã in E, ducatur recta E A, cui æqualis abſcindatur E F, adiungaturque recta A F. Dico rectam A F, eſſe latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cum enim C D, ſecta ſit bifariam in E, eique addita

6. ſecundi *D F; erit rectangulum ſub C F, D F, vna cum quadrato rectæ*
D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoque quadrato rectæ E A,
47. primi. *quæ ipſi E F, eſt æqualis: Eſt autem quadratum rectæ E A, æqua-*
le quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum ſub C F,
D F, vna cum quadrato rectæ D E, æquale eſt quadratis recta-
rum A D, D E; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ
D E,

D F, relinquetur rectangulum ſub C F, D F, æquale quadrato
rectæ A D, hoc eſt, quadrato rectæ C D. Quamobrem erit
vt C F, ad C D, ita C D, ad O F; proptereaque recta C F, di- 17. *ſexti.*
uiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius
ſegmentum C D, ſit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll.
propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmentum D F, latus decagoni
eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib.
Rurſus quoniam quadrato lateris hexagoni A D, una cum qua-
drato lateris decagoni D F, æquale eſt quadratum lateris pen- 10. *tertijdec.*
tagoni eiuſdem circuli; Eſt autem eiſdem quadratis rectarum 47. *primi.*
A D, D F, æquale quadratum rectæ A F; erit quadratum la-
teris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; ac propterea recta
A F, lateri pentagoni æqualis. Quod erat propoſitum.

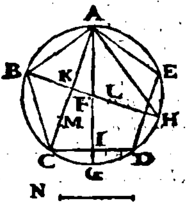
THEOR. 11. PROPOS. 11. 12.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ uocatur Minor.

IN circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem, deſcribatur pentagonum æquilaterum A B C D E. Dico eius latus A B, eſſe lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, ſecetque A G, latus C D, in I; connectanturque rectæ A C, A H, quarum A C, ſecet diametrum B H, in K. Abſcindatur quoque ex ſemidiametro F H, quarta ei⁹ pars F L; Itē ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, ponitur Rationalis; erunt quoque F L, B F, illi commenſurabiles, cum ſint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota B L,

eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota B L,
compoſita, cum ſit commenſurabilis utrique F L, B F, Ra- 16. *decimi.*
tionalis erit. Rurſus quoniam recta F B, ex centro ducta ſecat arcum A C, biſariam in B; ſecabit quoque rectā A C, biſariam

biſariam in K, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præceden-
tis propoſ. Secat autem & recta A G, rectam C D, in I, bi-
fariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiuſdem propoſ.
Triangula ergo A C I, A F K, cum habeant angulos A I C,



A K F, rectos, & angulum C A I,
32. primi communem, æquiangula inter ſe
4. ſexti. erunt. Quam ob rem erit, ut C I, ad
C A, ita F K, ad F A; & permutan-
do ut C I, ad F K, ita C A, ad F A:
Vt autem C A, ad A F, ita eſt C M,
5. quinti quarta pars ipſius C A, ad F L, quartã
partem ipſius F A. Erit igitur ut C I,
ad F K, ita C M, ad F L; & permu-
tando, ut C I, ad C M, hoc eſt, ut C D, dupla ipſius C I, ad
I C K, duplam ipſius C M, ita F K, ad F L; Atque compo-
nendo, ut C D, C K. ſimul ad C K, ita F K, F L, ſimul, ni-
mirum recta K L, ad F L; Ac propterea erit, ut quadratum
22. ſexti. rectæ compoſitæ ex C D, C K, ad quadratum rectæ C K,
ita quadratum rectæ K L, ad quadratum rectę F L. Quia ue
ro ſi A C, ſecetur extrema ac media ratione, (ducta uideli
8. tertijdec. cet recta B D,) maius eius ſegmentum æquale eſt lateri
pentagoni, nimirum ipſi C D; Erit quadratum rectę com-
1. tertijdec. poſitę ex C D, maiori ſegmento, & C K, dimidia totius,
quintuplũ quadrati rectæ C K, dimidię ſcilicet totius. Qua-
re & quadratum rectę K L, quintuplum erit quadrati re-
6. decimi. ctę F L, ideoque quadratum rectę K L, commenſurabile
erit quadrato rectę F L; Ac proinde rectę K L, F L, com-
menſurabiles quoque erunt, ſaltem potentia: Eſt autẽ F L,
oſtenſa Rationalis. Igitur & K L, Rationalis erit. De-
inde quia qualium partium 4. eſt B F, talium 1. eſt F L;
ac propterea qualium 5. eſt B L, talium 1. eſt F L; erit qua-
dratum rectę B L, talium partium 25. qualium 1. eſt qua-
dratum rectę F L, (ut in his numeris patet 1. 5. 25. habent
20. ſexti. enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qua
lium uero partium 1. eſt quadratum rectę F L, talium 5.
oſtenſum eſt quadratum rectę K L. Qualium igitur 25.
eſt quadratum rectę B L, talium 5. eſt quadratum rectę
K L; ac proinde quadratum rectę B L, quintuplum erit
quadrati rectę K L. Quia ergo quadrata rectarum B L,
K L,

K L, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut patet ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. uel 5. ad 1.) Erunt rectæ B L, K L, longitudine incommenſurabiles; 9. decimi. ideoque, cum oſtenſę ſint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex Rationali B L, dematur Rationalis K L, potentia tantū commenſurabilis; erit reliqua B K, Irrationalis, quę dicitur Apotome, 74. decimi ei uero congruens erit K L.

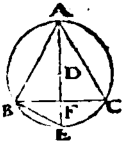
IAM uero recta B L, poſſit plus, quam recta K L, quadrato rectę N. Quoniā igitur quadratum rectę BL, ęquale eſt quadratis rectarū K L, & N; Qualium autem partiū 5. fuit quadratum rectę B L, talium 1. fuit quadratum rectę K L; Erit reliquum quadratum rectę N, talium partiū 4. qualium 5. eſt quadratum rectæ B L; Ac propterea quadrata rectarū B L, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerū. Quare cōmmenſurabilia erunt; 6. decimi. propterea q; rectę ipſę B L, & N cōmenſurabiles, ſaltem potentia: Eſt autem B L, oſtenſa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia uero quadrata rectarum B L, & N, proportionē non habent, quā numerus quadratus ad numerū quadratū; (ut perſpicuum eſt ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. quod proportio eorum ſit, quę 5. ad 4.) Erunt rectæ B L, & N, longitudine incommenſurabiles; 9. decimi. Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quapropter cum tota recta B L, Rationalis, longitudine ſit commenſurabilis Rationali BH; (Qualium enim partium 8. eſt B H, talium 5. eſt BL,) poſſitque plus, quam congruens K L, quadrato rectę N, ſibi longitudine incommenſurabilis, ut oſtenſum eſt; Erit B K, Apotome quarta, ex definitione.

POSTREMO quia recta A B, eſt media proportionalis inter B H, B K, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (quod triangulum A B H, habeat angulum B A H, rectum, 31. tertij. a quo ducta eſt A K, ad baſin perpendicularis) erit quadratum rectę A B, 17. ſexti. ęquale rectangulo ſub B H, B K. Quocirca cum ſuperficiem contentam ſub Rationali B H, & Apotoma quarta B K, poſſit recta linea A B; Erit A B, linea Minor. 95. decimi. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

8. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

In circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C Dico quadratum lateris A B, triplum eſſe quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro A E, quæ ſecet, ex coroll. propoſ. 10. huius lib. arcum B C, biſariam in E, & rectā B C, biſariam quoque & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus B C, ſit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus B E, eiuſdem peripherię ſexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & ęqualis ſemidiametro circuli, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quoniam igitur *47. primi.* quadratum rectę A E, ęquale eſt quadratis rectarū A B, *31. tertij.* B E, quod angulus A B E, in ſemicirculo rectus ſit: eſt autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ BE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea A E, dupla ſit lineę B E, erunt quadrata rectarum A B, B E, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum A B, BE, talium partiū 1. erit quadratum rectę B E; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectę A B. Quare quadratum rectę A B, triplum eſt quadrati rectę B E, quę ęqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.



COROLLARIVM.

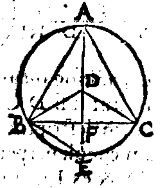
Hinc facile colligi poteſt, ſemidiametrum D E, biſariam ſecari in F, a latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ B E; ſi ponatur quadratum rectæ A B, partium 12. erit quadratum rectæ B E, talium partium 4. Eſt autem *47. primi.* quadratum rectæ B E, æquale quadratis rectarum B F, F E. Igitur & talium

& talium partium 4. erunt quadrata rectarum B F, F E. Eſt autem talium partium 3. quadratum rectæ B F, (quod quadratum rectæ AB, quadruplum ſit quadrati rectæ BF, ex ſcholio propoſ. 4. lib 2. Eſt enim A B, dupla ipſius B F.) Igitur, talium 1. erit quadratum rectæ F E; Ac proinde quadratum rectæ B E, hoc eſt, quadratum rectæ DE, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ F E. Cum igitur, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. idem quadratum rectæ D E, quadruplum ſit quadrati dimidiæ lineæ ipſius DE; erit F E, dimidia ipſius D E. Quocirca D E, bifariam ſecatur in F.

SCHOLION.

Hoc tamen corollarium aliter demonſtrabitur hoc theoremate propoſito.

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex uno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque uiciſſim bifariam, & angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito.



In circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. Dico rectam A E, per centrum D, ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariã & angulũ B A C, & latus B C, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque D E, ſecari a latere B C, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis B D, C D, B E; cum latera A, B A D, trianguli B A D, æqualia ſint lateribus A C, A D, trianguli C A D; & baſes B D, C D, æquales
quoque: Erunt anguli B A D, C A D, 8. *primi*
æquales. Quod eſt primum.

Deinde, cum latera A B, A F, trianguli B A F, æqualia ſint lateribus A C, A F, trianguli C A F, & anguli
ipſis contenti æquales oſtenſi: Erunt & baſes B F, C E, & an- 4. *primi.*
guli ad F, æquales, ideoque recti. Quod eſt ſecundum.

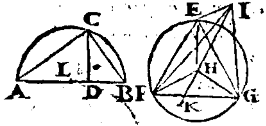
Poſtremo, cum anguli B A E, C A E, demonſtra-
ti ſint eſſe æquales; erunt & arcus B E, C E, æquales. Quare 26. *tertij.*
cum

cum B E C, arcus ſit tertia pars circunferentiæ, erit B E, ſexta pars eiuſdem; Ac propterea recta B E, latus hexagoni, atque ſemidiametro proinde B D, equalis, ex corell. propoſ. 15. lib. 4.
5. primi *Igitur anguli B D E, B E D, equales erunt. Quoniam ergo anguli B D F, B E D, trianguli D B F, equales ſunt angulis B E F, B F E, trianguli E B F, & latus B F, commune; Erunt & latera D F, E F, equalia.* 26. primi

13. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM conſtituere; & data ſphæra complecti; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.

SIT datę ſphęrę diameter A B, circa quam ſemicirculus deſcribatur A C B; & ex A B, auferatur tertia pars B D; ut ſit A D, ipſius D B, dupla; at uero A B, eiuſdem D B, tripla; & ipſius A D, ſeſquialtera. Deindè ducta D C, perpendiculari ad A B, connectantur rectę A C, B C. Ad interuallum rectę H E, quę equalis ſit ipſi D C, deſcribatur circulus E F G, cuius centrum H, in quo triangulum ęquilaterum inſcribatur E F G, adiunganturque rectę H F, H G, quę ſingulę ęquales erunt ipſi D C, cum ęquales ſint ipſi H E, ad cuius interuallum deſcriptus eſt circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis H I, quę ęqualis ponatur rectę A D, & ex I, demittantur rectę I E, I F, I G. Dico ſolidum contentum quatuor triangulis F E G, I E F, I F G, I E G, eſſe Pyramidem, ſiue Tetraedrum. Quoniam latera D A, D C, trianguli A D C, ęqualia ſunt lateribus H I, H E, trianguli I H E, & anguli ipſis contenti, recti, ex hypotheſi, & 3. defin. lib. 11. erit baſis A C, baſi I E, ęqualis. Non aliter oſtendemus eandem rectam A C, ęquale eſſe rectis I F, I G. Rurſus quia tres lineę A D, D C, D B, proportionales ſunt 4. primi.



ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. ut AD, ad DB, ita quadratū rectę AD, ad quadratū rectæ DC; & cōponēdo, ut AB, ad DB, ita quadrata rectarū AD, DC, ſimul ad quadratū rectæ DC. Sunt autē quadrata rectarū AD, DC, æqualia quadrato rectæ AC. Igitur erit quoq; 47. *primi.* ut AB, ad DB; ita quadratū rectæ AC, ad quadratum rectæ DC; Ac proinde cū AB, ſit ipſius DB, tripla; erit quoq; quadratū rectę AC, triplum quadrati rectę HE, cū HE, æqualis ſit ipſi DC: Atqui & quadratum rectæ EF, triplum quoque 12. *tertijdec.* eſt eiuſdem quadrati rectæ HE. Quadratū ergo rectæ AC, quadrato rectæ EF, æquale erit; & propterea recta AC, rectę EF. Quare cū recta AC, oſtenſa quoque ſit æqualis rectis IE, IF, IG; erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera & ęqualia inter ſe. Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cuius baſis EFG, uertex uero I. Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cuius diameter AB; & diametrum ſphæræ AB, potentia ſeſquialteram eſſe lateris EF, uel AG.

EXTENDATVR perpendicularis IH, uſque ad K, ut ſit HK, ipſi DB, & tota IK, toti AB, æqualis. Quia ergo tres rectæ AD, DC, DB, proportionales ſunt, quibus æquales exſtunt tres IH, HE, HK; erunt quoq; IH, HE, HK, proportionales. Quare cum HE, ſit ad IK, perpēdicularis, & media proportionalis inter IH, HK, ſemicirculus circa IK, deſcriptus in plano rectarū IK, HE, tranſibit per E, ut mox oſtentur; Eodemq; argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HF, tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HG, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circunductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc ſphęra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

QVONIAM vero tres rectę AB, AC, AD, ꝓportionales ſunt, ex coroll. ꝓpoſ 8. lib. 6. erit ut AB, ad AD, ita quadratū rectę AB, ad quadratū rectę AC, ex coroll. ꝓpoſ. 20. lib. 6. Eſt autē recta AB, ſeſquialtera rectę AD, qđ qualiū partiū 3.

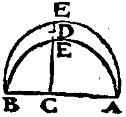
eſt

eſt AB, taliū a, ſit A D, Igitur & quadratū rectę A B, ſeſquialterū erit quadrati rectę A C; Ac propterea cum A B, ſit diameter ſphæræ, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqualis, perſpicuum eſt, diametrum ſphęrę potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus; & data ſphęra cōplexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD *autem ſemicirculus circa* I K, *in plano rectarum* I K, H E, *deſcriptus, tranſeat per* E, *facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.*

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media propotionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.



SIT *enim ad* A B, *perpendicularis* C D, *& media proportionalis inter* A C, *&* C B. Dico *ſemicirculum circa* A B, *deſcriptum tranſire per* D. *Nam ſi tranſeat citra* D, *uel ultra, nimirum per punctum* E; *erit quoque* C E, *media proportionalis inter* A C, *&* C B, *ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ* C D, *quam quadratum* 17. *ſexti.* *rectæ* C E, *æquale erit rectangulo ſub* A C, C B; *Ac proinde quadrata rectarum* C D, C E, *inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ* C D, C E, *æquales erunt, pars & totum.* Quod *eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per* D.

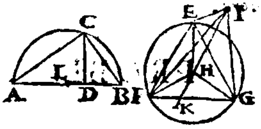
HINC *manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori*

figura

figura deſcriptum circa I K, in plano rectarum I K, H E, tranſire per E, cum H E, ſit ad I K, perpendicularis, & media proportionalis inter I H, H K.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum ſphæræ eſſe quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ A B, oſtenſa ſit ſeſquialtera lateris pyramidis E F; erit quadratum rectæ E F, talium partium 6. qualium 9. eſt quadratum rectæ A B: At qualium partium 6. eſt quadratum rectę E F, talium partium 2. eſt quadratum rectæ H E, quod quadratum rectę E F, triplum ſit quadrati rectæ H E. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ A B, talium partium 2. erit quadratum rectæ H E; Ac propterea diameter ſphæræ A B, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri H E, cum proportio quadratorum ſit, quę 9. ad 2.



12.dertyde

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi A C B, eritque L, centrum quoque ſphæræ. Dico rectam L D, (quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſim E F G, ducitur perpendicularis; cum A D, æqualis ſit ipſi I H, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt quod centrum ſphærę) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ A B. & tertiam partem ſemidiametri A L. Quoniam A D, dupla eſt ipſius D B; Qualium partium 4. eſt A D, talium 2. erit D B; ac proinde talium 6. tota A B, & ſemidiameter A L, talium 3. Quare ſi A D, eſt 4. & A L, 3. erit L D, 1. & idcirco L D, ſexta pars erit rectæ A B, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ A L, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo *pyramidis* H I, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim H I, eadem, quę A D, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. ut hic apparet 9.
6. 4.

SCHOLION.

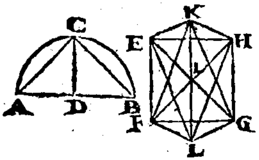
QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturque, ut hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſe complicatis componetur Tetraedrum, ſecundum totam ſoliditatem. Hanc uero praxim, & ſequentes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto Durero non ignobili ſcriptore.

15.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

SIT ſphęræ, quæ conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter A B, circa quam ſemicirculus deſcribatur A C B, & ex centro D, ad A B, perpendicularis ducatur D C, 4. primi. connectanturq; rectę A C, B C, quę ęquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta E F, quę ęqualis ſit ipſi A C, uel B C, deſcribatur ſuper eam quadratum E F G H, in quo ducantur diametri E G, F H, ſe mutuo ſecantes in I: eruntque rectę I E, I F, I G, I H, ęquales, cum ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, ut in 4. lib. demonſtratum eſt. Deinde ex I, in utranque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis K L, ponanturque I K, I L, ęquales ipſi I E: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectę K E, K F, K G, K H; L F,



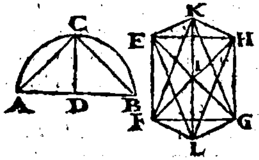
LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis K E F, K F G, K G H, K E H; L F E, L E H, L H G, L F G, eſſe octaedrum, quod quęritur. Quoniam latera E I, I K, trianguli E I K, ęqualia ſunt lateribus E I, I H, trianguli E I H; & anguli ipſis contenti, recti; (ipſe quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At uero E I H, eo quod ſit ęqualis angulo G I H, ſibi deinceps, ob ęqualitatem laterum EI, I H, G I, I H, & baſium E H, G H.) *8. primi.* Erit & baſis E K, baſi E H, ęqualis; *4. primi.* Eodęmq; modo eidem E H, ęqualis erit K H; ideoque triangulum ęquilaterum erit K E H. Simili argumento concludemus, reliqua triãgula eſſe ęquilatera; atque adeo ęqualia triangulo K E H, cum illorum latera ęqualia ſint lateribus quadrati E F G H, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitnr iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & ęqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphęra diametri A B, qua nimirum & pyramis conſtructa comprehenditur; & diametrum ſphęrę A B, potentia duplam eſſe lateris E F, uel A C.

QVONIAM I E, perpendicularis eſt ad K L, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta K I, I L; (quod tres rectę K I, I E, I L, ęquales ſint, ideoq; eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa K L, in plano rectarum K L, I E, deſcriptus tranſibit per punctum E, ex lemmate pręcedentis propoſ. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem K L, in plano rectarum K L, I F, incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G, H. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circunductus, manente fixa diametro K L, deſcribet ſphęram, quę complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hęc ſphęra ęqualis ſit datę ſphęrę, cuius diameter A B; (Nam cum rectę A C, E F, ęquales ſint, ideoque ipſarum quadrata ęqualia; Sit autem tam quadratum rectę A C, duplum quadrati rectę A D, quam quadratum rectę E F, quadrati rectę E I; Erunt & rectę A D, E I, hoc eſt, K I, ſemidiametri ęquales. Quare & totę diametri A B, K L, ęquales erunt; ac proinde ſphęrę ipſarum ęquales exiſtent.) comprehendetur idem octaedrum data ſphęra.

47. primi. QVIA vero quadratum rectæ AB, æquale eſt quadratis rectarum A C, B C, quæ æqualia ſunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ A C, Quamobrem cum AB, ſit diameter ſphæræ, & A C, recta æqualis lateri octaedri EF; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris octaedri. Itaque octaedrum conſtruximus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

Ex dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphæræ: quales ſunt KL, EG, FH, ſecantes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atque proinde, cum KI, recta ſit ad lineas EG, HF; recta quoque erit ad planum EFGH, per ipſas ductum; 4. undec. Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. 18. undec. Immo eadem ratione, ut paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, ſe mutuo ad angulos rectos ſecabunt; Quæ quidem plana ſunt quadrata, cum omnia eorum latera ſint ipſius octaedri latera, ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, ut oſtendimus,) quadratum diametri HF, æquale exiſtat quadratis laterum octaedri FK, KH. 48. primi. Ita enim efficitur, ut angulus FKH, rectus ſit. Eademque eſt ratio de cæteris angulis.



COROLLARIVM. II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, uertices uero K, & L; altitudines denique, ſemidiametri I K, I L: cuiuſmodi ſunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana unius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, ut conſtat, cum ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſim communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, ut eſt demonſtratum.

COROLLARIVM. III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri ſphæræ diuiſum in ſex partes. 13 tertijde Quoniam igitur diameter ſphæræ eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri

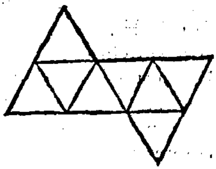
edri; erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium
6. est quadratum diametri ſphæræ. Rurſus quia diameter ſphæræ
eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri 14. tercidec
talium partium 3. qualium 6. eſt quadratum diametri ſphæræ. Igitur
cum talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium
3. eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri
potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.

COROLLARIVM. IIII.

DENIQVE, quia in quadrato E F G H, recta E H, parallela
eſt rectæ F G; & in quadrato E L G K, recta E K, rectæ G L: Erit
planum E H K, per E H, E K, ductum plano F G L, per F G, G L, 15. undec.
ducto parallelum. Cum igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus
octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.

SCHOLION.

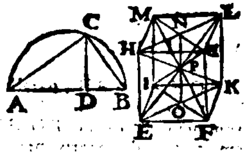
QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, ut hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſeſe complicatis cōponetur octaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ut ait Albertus Durerus.



PROBL. 3. PROPOS. 15. 14.

CVBVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, ut ſit A B, ipſius B D, tripla. Deinde ducta D C, perpendiculari ad A B, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, ſit æqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur



perpendiculares E I, F K, G L, H M, æquales quoque ipſi
B C, quarum extrema coniumgantur rectis I K, K L, LM,
M I. Quoniam ergo anguli I E F, K F E, recti ſunt, ex
deſin. 3. lib. 11. erunt rectæ
6. undec. E I, F K, parallelæ: Sunt au-
tem & æquales, quod utraque
æqualis poſita ſit ipſi B C, hoc
eſt, ipſi E F. Igitur & E F,
33. primi. I K, parallelæ ſunt & æquales;
& ideo parallelogrammum eſt
E F K I; In quo, cum lineæ
E I, I K, K F, æquales ſint ip-
ſi E F, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: Sunt au-
34. primi. tem & omnes quatuor anguli recti, cum E I K, F K I,
æquales ſint oppoſitis rectis K F E, I E F. Igitur E F K I,
quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt F K L G,
G L M H, H M I E; Atque idcirco & I K L M, quadratum
24. undec. erit, cum ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito E F G H.
Eſt enim E L, ſolidum parallelepipedum, quod eius plana
15. undec. oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mu-
tuo tangentes ducta. Quare cubus erit E L. Quem dico
comprehendi ſphæra diametri A B. Sint enim planorum
oppoſitorum E F K I; G H M L, diametri E K, F I, GM,
HL, per quæ ducantur plana EKLH, FIMG. Quia igitur
28. undec. tam planum EKLH, quam FIMG, cubum biſariam ſecat;
utrumque per centrum cubi tranſibit, ex ſcholio propoſ.
39. lib. 11. per punctum uidelicet P, in quo, ex coroll. eiuſ-
dem propoſ. ſe mutuo quoque biſariam diuident omnes
diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio,
recta ſcilicet N O, per idem punctum P, incedet. Quia ue-
ro plana E K L H, FIMG, rectangula ſunt, (Cum enim H E,
perpendicularis ſit duabus rectis E I, E F, ob quadrata E M,
4. undec. E K; perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoq; ad
rectã EK, ex deſin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt H E K.
Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano E K L H,
nec nõ & anguli in plano F I M G. Rectangula ergo ſunt pla-
na EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera unius æqualia
ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri E L,
HK, FM, GI, æquales, ut conſtat ex ſcolio propoſ. 34. lib. 1.

Ac

Ac proinde & ſemidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa EL, ex centro P, deſcriptus, & circunductus, fixa manente diametro EL, ſphæram deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem: quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri AB, ita demonſtrabitur.

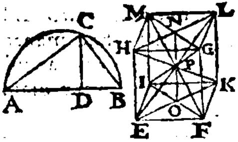
47. primi. Cvm quadratum rectæ EK, æquale ſit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc eſt, quadrati rectæ KL: Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL: 47. primi. Eſt autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, ſit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc eſt, quadrati rectæ BC: At uero eiuſdem quadrati rectæ BC, triplum eſt quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. ut eſt AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipſius BD, ſit tripla, erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia ſunt; Ac propterea ipſæ rectæ EL, AB, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarum ſphæræ, æquales exiſtunt.

Qvia uero oſtenſum eſt quadratum diametri EL, triplum eſſe quadrati lateris cubi KL; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia triplum eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

Ex demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales eſſe, ſeſeq; mutuo bifariã ſecare in cẽtro P. Quod vero & recta NO, cõiungẽs cẽtra N, & O, quadratorũ oppoſitorum GHML, EFKI, in eodẽ cẽtro P, bifariã diuidatur, hac rõne oſtẽdet. Duo anguli OPP, OPF, triãguli OPP, ęquales ſũt duobus angulis

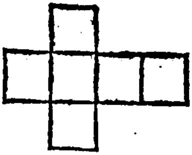
29. primi. NMP, NPM, trianguli NMP : (Nam angulus OFP, æqualis eſt alterno
16. undec. NMP, inter lineas F I, GM, quę parallelæ ſunt, cum ſint communes
ſectiones planorum parallelorum E F K I, G H M L; & angulus
15. primi. OPF, æqualis eſt oppoſito ad uerticem N P M) Sunt autem & latera P F, P M, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri, Igitur & latera P O, P N, æqualia erunt; ac proinde recta N O, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.



COROLLARIVM, II.

RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentijs laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratum lateris
13. tertijde. tetraedri : Qualium uero partium 9. eſt idem quadratum diame-
15. tertijde. tri, talium 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quēadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrum ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt A C, cubi uero B C. Perſpicuum autem eſt, dia-
47. primi. metrum ſphæræ A B, poſſe & rectam A C, & rectam B C, cum angulus A C B, ſit rectus.

SCHOLION.



QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturque, ut hec figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quedam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſaræ cuiuſpiam, ut conſtat.

16.

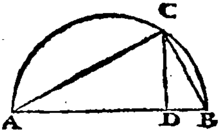
PROBL. 4. PROPOS. 16.

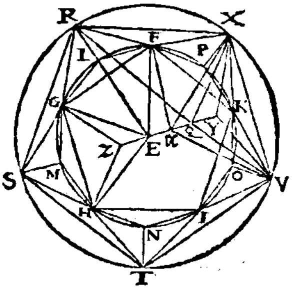
ICOSAEDRVM conſtituere ; & ſphæra

ſphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonſtrare, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ uocatur Minor.

Sit ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: Et ex
AB, abſcindatur quinta pars BD, ut AB, ipſius BD, ſit quintupla; & ipſius AD, ſeſquiquarta; At uero AD, ipſius BD,
quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ
ipſi BC, ſit æqualis, circulus deſcribatur ex centro E; in quo
pentagonum æquilaterum inſcribatur FGHIK. Poſt hęc 11. quarti.
diuiſis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, biſariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM,
MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, &
punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ
æquales ponantur ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC. Erũtq;
omnes inter ſe æquales; ſed & parallelæ ſunt. Igitur rectæ, 6. undec.
quæ illas coniungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT;
EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, ut uitaremus confuſionem, non duximus.) binæ inter ſe æquales erunt: Ac 33. primi.
proinde, cum æquales ſint EL, EM, &c. ſemidiametro EF;
æquales quoq; erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter ſe,
& ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC. Quia uero planum per
rectas QR, QS, ductum parallelum eſt plano FGHIK, per 15. undec.
rectas EL, EM, ducto: Eademq; ratione planum per rectas
QS, QT, ductum parallelum eſt plano eidem FGHIK,
per rectas EM, EN, ducto: conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana unum planum, per ea, quæ ad
propoſ. 16. lib. 11. oſtendimus. Non aliter oſtendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere unum planum;
nec non planum per QV, QX; & planum per QX, QR.
Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde ſi ex Q, ad interuallum QR, in eo
plano circulus deſcribatur, is per reliqua puncta S, T, V, X,
tranſibit, eritq; æqualis circulo FGHIK. Coniungantur
puncta

puncta R, S, T, V, X; rectis R S, S T, T V, V X, X R. 6. undec. Quia igitur L R, P X, æquales ſunt & parallelæ; ſi conci-33. primi. piatur duci recta L P, erunt quoque L P, R X, æquales & 28. tertij & parallelæ; Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem L P, quintam partem circuli F G H I K, nempe duas decimas partes F L. F P. Igitur & R X, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorſus argumento concludemus, reliquas rectas R S, S T, T V, V X, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum eſt RSTVX, omnia latera ęqualia habens lateribus pentagoni F G H I K. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagon F G H I K, rectæ RF, RG, SG, S H, T H, T I, V I, V K, XK, X F. Quia igitur perpendicularis L R, æqualis ponitur ſemidiametro E F, hoc eſt, lateri hexagoni circuli F G H I K; & eſt L F. latus decagoni; 10. tertijdec erit quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: Eſt autem eiſdem quadratis 47. primi. æquale quadratum rectæ FR, quod angulus FLR, rectus ſit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale eſt quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, ſeu FG, hoc eſt, ipſi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus utriuſque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia, cum eorum omnia latera ęqualia ſint lateribus pentagoni æquilateri. Poſt hęc, perpendicularis EQ, in utramque partem extendatur,



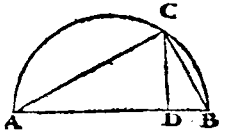


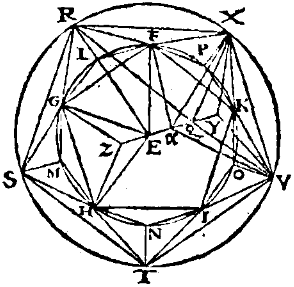
tēdatur, ſintq; rectę Q Y, E Z, ęquales ſingulę lateri decagoni circuli F G H I K, uel R S T V X; & connectantur rectę V Q, V Y, X Q, X Y; G E, G Z, H E, H Z. Quoniã ergo Q X, ſemidiameter eſt circuli R S T V X, hoc eſt, latus hexagoni; & Q Y, latus eſt decagoni eiuſdem circuli; erit quadratum lateris pentagoni, X V, æquale quadratis rectarum Q X, Q Y: Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ X Y, quod angulus X Q Y, rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum F G H I K, R S T V X, parallela ſint oſtenſa, ſitque E Q, ad illius planum recta, ex conſtructione; erit quoque E Q, ad huius planum recta, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam Q X, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ X Y, æquale eſt quadrato rectæ X V, proptereaque recta X Y, rectæ X V, æqualis. Eodemque modo eidem X V, æqualis oſtendetur V Y; Ac proinde triangulum V Y X, æquilaterum eſt. Non aliter demonſtrabimus, ſi ducantur rectæ R Y, S Y, T Y, (quas tamen, ut uitaremus confuſionem linearum, non duximus.) quatuor triangula R Y X, R Y S, S Y T, T Y V, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo V Y X, hoc eſt, prioribus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum G Z H, (cum E G, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiameter, & E Z, latus decagoni, angulusque G E Z, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula H Z I, I Z K, K Z F, F Z G, (quorum tamen lineas, ne pareremus confuſionem, non duximus) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia hæc triangula uiginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturq; ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſtitutum erit ex ipſis Icoſaedrum. Quod dico cõprehendi ſphæra diametri A B.

10. tertijde.
47. primi.

DIVISA recta E Q, biſariam in α, ducantur rectæ α F, α X, α V. Quoniam igitur latera α Q, Q V, trianguli α Q V, æqualia ſunt lateribus α Q, Q X, trianguli α Q X, cum Q V, Q X, ſint ſemidiametri circuli R S T V X;

VX: Sunt autem & anguli α Q V, α Q X, æquales, nempe
4. primi. recti, ex defin. 3. lib. 11. Erunt & baſes α V, α X, æquales.
Eademque ratione, ſi ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T,
oſtendentur rectæ α R, α S, α T, æquales & inter ſe, & ipſis
α V, α X. Rurſus quia latera α Q, Q X, trianguli α Q X,
æqualia ſunt lateribus α E, E F, trianguli α E F, cum Q X,
E F, ſint ſemidiametri circulorum æqualium, & E Q, diuiſa
ſit bifariam in α:





Sunt autem & anguli
α Q X, α E F, æqua-
les, nimirum recti, ex
defin. 3. lib. 11. Erunt
quoq; baſes α X, α F,
4. primi. æquales: Eodémque
modo ſi ex α, E, ad G,
H, I, K, rectæ ducantur,
oſtendentur α G,
α H, α I, α K, æquales
ipſi α X; Ac proinde
decem lineæ ductæ
ad decem angulos F,
G, H, I, K; R, S,
T, V, X, ęquales ſunt.
Quoniã uero Q E,
ſemidiameter eſt, hoc
eſt, latus hexagoni circuli F G H I K; & E Z, latus decagoni
9. tertij dec. ni eiuſdem circuli, erit Q Z, diuiſa in E, extrema ac media
ratione, maiuſque ſegmentum erit Q E. Quare minus
ſegmentum Z E, aſſumens E α, dimidium maioris ſegmenti,
3. tertij dec. hoc eſt, recta α Z, quintuplum poteſt eius, quod ex E α,
deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta α F, quintuplum
eiuſdem quadrati rectæ E α. (Nam cum quadratum rectæ
E F, quadruplum ſit quadrati rectæ α E, ex ſcholio propoſ.
4. lib. 2. quod recta E F, dupla ſit ipſius E α; erunt quadrata
rectarũ E F, E α, ſimul quintupla quadrati rectæ E α. Cũ ergo
47. primi. quadratis rectarũ E F, E α, æquale ſit quadratũ rectæ α F; erit
quoq; quadratũ rectę α F, quintuplũ quadrati rectę E α.) Igit
æqualia sũt quadrati rectarũ α Z, α F, ac proinde rectæ ipſæ
α Z, α F, ęquales erũt. Cũ igit Z Y, bifariã ſecet in α, (ꝑpterea
quod

quod ſi æqualibus α E, α Q, æquales rectæ addantur E Z, Q Y, totæ Z α, Y α, æquales fiant.) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icoſaedri æquales. Quo circa ſphęra deſcripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angulos Icoſaedri conſtituti tranſibit. Hanc ergo ſphæram dico æqualem eſſe ſpheræ diametri A B.

Cvm ſit ut α Z, ad α E, ita Y Z, dupla ipſius α Z, ad Q E. duplam ipſius α E; 15. quinti. Ac propterea ut quadratum rectæ α Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ YZ, 22. ſexti. ad quadratum rectæ Q E; ſit autem quadratum rectæ α Z, oſtenſum quintuplum quadrati rectæ α E: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ Q E, hoc eſt, quadrati rectæ B C; quod recta Q E, æqualis ſit poſita ſemidiametro E F, hoc eſt, rectæ B C: Eſt autem & eiuſdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectę AB. (Nam cum, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. ſit ut A B, ad B C, ita BC, ad BD; erit ut AB, ad BD, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectę BC, ex coroll. propoſ. 19. lib. 6. Ac proinde exiſtente AB, quintupla ipſius B D, erit etiam quadratum rectę AB, quintuplum quadrati rectę B C.) Quadrata igitur rectarum Y Z, AB, ęqualia ſunt, ideoq; & rectę Y Z, A B; Ac propterea & ſphęrę circa ipſas, ęquales erunt.

Qvoniam denique diameter ſphęrę AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipſius oſtendendum eſt, latus Icoſaedri eſſe lineam Irrationalem, quę Minor uocatur.) poteſtque quintuplum quadrati rectę BC, hoc eſt, rectę illi ęqualis E F; erit quoque ſemidiameter E F, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum A B, E F, cum habeāt proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5 ad 1. uel 10. ad 2. erunt commenſurabilia; 6. decimi Ac propterea & rectę A B, E F, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo AB, ſit Rationalis, erit & E F, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea F G, latus pentagoni, hoc eſt, [illegible] latus Icoſaedri, Irrationalis erit linea, quę uocatur Minor. Icoſaedrum igitur conſtituimus, & ſphęra ſumus complexi, qua & ante dictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quę uocatur Minor. quod erat faciendum.

COROL-

COROLLARIVM I.

Ex dictis infertur, ſphæræ diametrum eſſe potentia quintuplā ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutum eſt, & qui per quinque Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum enim eſt, quadratum diametri A B, quintuplum eſſe quadrati rectæ B C, hoc eſt, ſemidiametri E F.

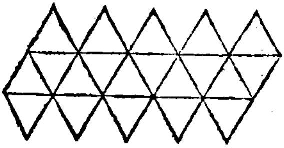
COROLLARIVM. II.

Item manifeſtum eſt, ſphæræ diametrum eſſe compoſitam ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli. Nam Y Z, diameter ſphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, E Z, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM. III.

Constat denique latera Icoſaedri oppoſita, qualia ſunt RX, HI, eſſe parallela. Nā recta RX, oſtenſa eſt parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ L P, ſit quoque parallela recta H I, ut in ſcholio propoſ. 27. lib. 3. demonſtrauimus; (eo quod æquales ſint arcus HL, I P; continet enim uterque tres decimas partes totius circũferentiæ,) perſpicuum eſt, rectas RX, HI, eſſe parallelas. Eadēq; eſt ratio de cæteris lateribus oppoſitis.

SCHOLION.

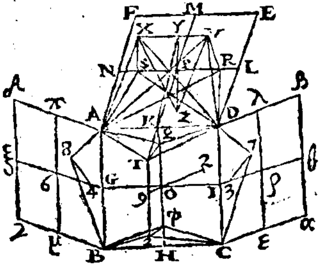


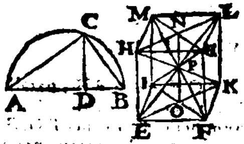
Qvod ſi ex aliqua materia conficiantur uiginti triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, ut hæc figura indicat, componetur Icoſaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſeſe aptentur.

PROBL. 5. PROPOS. 17.

17. DODECAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demõſtrare, qđ Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ uocatur Apotome.

Sɪᴛ una baſis cubi data ſphæra comprehenſi, quadra-
tum ABCD, cui inſiſtat aliud æquale ad rectos angulos
ADEF, ut ſit communis horum ſectio recta AD. (Inſiſtūt
enim omnes baſes cubi ſibi mutuo ad angulos rectos. Nam
in præcedentibus, ut cubus conſtitueretur, erectæ ſunt
ex angulis baſis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ip-
ſi baſi EFGH perpendiculares. Id quod facile apparere po-
teſt ex figura propoſitionis 15. huius lib. Quare & baſes cu-
bi per ipſas ductæ, rectæ erunt ad eandem baſin EFGH.)
Diuiſis itaque cunctis 18. undec.
lateribus bifariã in pun
ctis G, H, I, K, L, M, N,
quæ rectis connectan-
tur ſecātibus ſeſe in O,
P, cētris quadratorum,
ut conſtat ex demon-
ſtratione octaui pro-
blematis lib. 4. Secen-
tur OK, PL, PN, extre
ma ac media ratione
in pūctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorū educantur
extra cubū perpēdiculares QT, RV, SX, æquales ſegmentis
maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX,
DT, DV, VX; Dico ATDVX, eſſe unū ex duodecim pēta-
gonis æquilateris, & æquiãgulis Dodecaedri cōſtituēdi. Qđ
enim pentagonū ATDVX, ſit in uno plano, ita oſtendetur.
Cū RV, SX, ſint ad quadratū ADEF, rectæ, ipſæ erūt paral 6. undec.
lelæ; Ac ꝓinde, cū ſint æquales, (quia ſegmēta maiora PR,
PS, quibus æquales ſunt poſitæ, æqualia ſunt, cum & lineæ
ſectæ PL, PN, æquales ſint.) erūt quoq; cōiungētes rectæ 33. primi.
RS, VX, æquales & parallelæ: Eſt aūt & AD, eidem RS, 33. primi.
ſiue LN, parallela, eo qđ AN, DL, parallelæ ſint & æqua-
les. Igit̃ & AD, VX, parallelæ sūt; Ac ꝓpterea rectę cōiun 9. undec.
gētes AX, DV, in eodē cū ipſis erūt plano; ideoq; trapeziū 7. undec.
ADVX, in uno exiſtet plano: Eſt aūt & triãgulū ATD, in
uno plano. Dico qđ & in eodē plano cū trapezio ADVX.
Ex P, ducat̃ PY, parallela ipſi RV, q̃ erit recta ad quadratū 8. undec.
ADEF, qđ ad idē recta ſit RV: Et cōnectant̃ rectę KT, KY.
Qm̃ igiur eſt ut OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob ſectionē
rectæ





perpendiculares E I, F K, G L, H M, æquales quoque ipſi B C, quarum extrema coniungantur rectis I K, K L, LM, M I. Quoniam ergo anguli I E F, K F E, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. erunt rectæ
6. undec. E I, F K, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque æqualis poſita ſit ipſi B C, hoc eſt, ipſi E F. Igitur & E F,
33. primi. I K, parallelæ ſunt & æquales; & ideo parallelogrammum eſt E F K I; In quo, cum lineæ E I, I K, K F, æquales ſint ipſi E F, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: Sunt au-
34. primi. tem & omnes quatuor anguli recti, cum E I K, F K I, æquales ſint oppoſitis rectis K F E, I E F. Igitur E F K I, quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt F K L G, G L M H, H M I E; Atque idcirco & I K L M, quadratum
24. undec. erit, cum ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito E F G H. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, quod eius plana
15. undec. oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit E L. Quem dico comprehendi ſphæra diametri A B. Sint enim planorum oppoſitorum E F K I; G H M L, diametri E K, F I, GM, HL, per quæ ducantur plana EKLH, FIMG. Quia igitur
28. undec. tam planum EKLH, quam FIMG, cubum bifariam ſecat; utrumque per centrum cubi tranſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum uidelicet P, in quo, ex coroll. eiuſdem propoſ. ſe mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet N O, per idem punctum P, incedet. Quia uero plana EKLH, FIMG, rectangula ſunt, (Cum enim HE, perpendicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata E M,
4. undec. EK; perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoq; ad rectā BK, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, nec nō & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera unius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri E L, HK, FM, GI, æquales, ut conſtat ex ſcolio propoſ. 34. lib. 1.

Ac

Ac proinde & ſemidiametri PE, PL, P H, P K; P F, P M, P G, P I, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa E L, ex centro P, deſcriptus, & circunductus, fixa manente diametro E L, ſphæram deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem: quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri A B, ita demonſtrabitur.

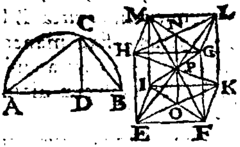
Cvm quadratum rectæ B K, æquale ſit quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F K, ac proinde duplum quadrati rectæ E F, hoc eſt, quadrati rectæ K L: Erunt quadrata rectarum E K, K L, tripla quadrati rectę K L: 47. primi. E ſt autem quadratis rectarum E K, K L, æquale quadratum rectæ E L, quod angulus E K L, ſit rectus in rectangulo E K L H. 47. primi. Igitur & quadratum rectæ E L, triplum erit quadrati rectæ K L, hoc eſt, quadrati rectæ B C: At uero eiuſdem quadrati rectæ B C, triplum eſt quadratum rectæ A B. (Nam tres rectæ A B, B C, BD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. ut eſt A B, ad B D, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ B C. Cum ergo A B, ipſius B D, ſit tripla, erit quoque quadratum rectæ A B, quadrati rectæ B C, triplum.) Igitur quadrata rectarum E L, A B, æqualia ſunt; Ac propterea ipſæ rectæ E L, A B, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarum ſphæræ, æquales exiſtunt.

Qvia uero oſtenſum eſt quadratum diametri E L, triplum eſſe quadrati lateris cubi K L; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia triplum eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

Ex demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi E L, HK, FM, GI, æquales eſſe, ſeſeq; mutuo bifariã ſecare in cẽtro P. Quod vero & recta NO, cõiungẽs cẽtra N, & O, quadratorũ oppoſitorum GHML, EFKI, in eodẽ cẽtro P, bifariã diuidatur, hac rõne oſtẽdet. Duo anguli OFP, OPF, triãguli OFP, ęquales sũt duobus ãgulis

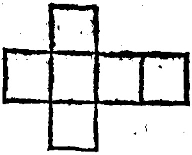
29. *primi.* NMP, NPM, trianguli NMP: (Nam angulus OFP, æqualis eſt alterno NMP, inter lineas F I, GM, 16. *undec.* que parallelæ ſunt, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum E F K I, G H M L; & angulus OPF, æqualis eſt oppoſito 15. *primi.* ad uerticem N P M.) Sunt autem & latera P F, P M, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri, Igitur & latera P O, P N, æqualia erunt; ac proinde recta N O, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.



COROLLARIVM. II.

RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentijs laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratum lateris 13. *tertÿde.* tetraedri: Qualium uero partium 9. eſt idem quadratum diame- 15. *tertÿde.* tri, talium 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrum ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt A C, cubi uero B C. Perſpicuum autem eſt, diametrum ſphæræ A B, poſſe & rectam A C, & rectam B C, cum an- 47. *primi.* gulus A C B, ſit rectus.

SCHOLION.



QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturque, ut hæc figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quedam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſaræ cuiuſpiam, ut conſtat.

16. PROBL. 4. PROPOS. 16.

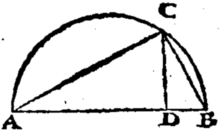
ICOSAEDRVM conſtituere; & ſphæra

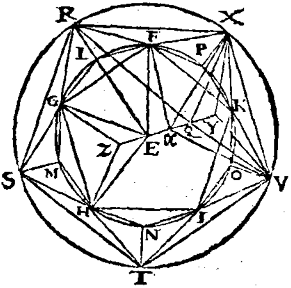
ſphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonſtrare, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ uocatur Minor.

Sit ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: Et ex AB, abſcindatur quinta pars BD, ut AB, ipſius BD, ſit quintupla; & ipſius AD, ſeſquiquarta; At uero AD, ipſius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perperdiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipſi BC, ſit æqualis, circulus deſcribatur ex centro E; in quo pentagonum æquilaterum inſcribatur FGHIK. Poſt hęc 11. quarti. diuiſis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC. Erũtq; omnes inter ſe æquales; ſed & parallelæ ſunt. 6. undec. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, ut uitaremus confuſionem, non duximus.) binæ inter ſe æquales erunt: 33. primi. Ac proinde, cum æquales ſint EL, EM, &c. ſemidiametro EF; æquales quoq; erunt QR, QS. QT, QV, QX, & inter ſe, & ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC. Quia uero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum eſt plano FGHIK, per 15. undec. rectas EL, EM, ducto: Eademq; ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum eſt plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto: conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana unum planum, per ea, quæ ad propoſ. 16. lib. 11. oſtendimus. Non aliter oſtendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere unum planum; nec non planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde ſi ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus deſcribatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, tranſibit, eritq; æqualis circulo FGHIK. Coniungantur

puncta

puncta R, S, T, V, X; rectis R S, S T, T V, V X, X R.
6. undec. Quia igitur L R, P X, æquales ſunt & parallelæ; ſi concipiatur
33. primi. duci recta L P, erunt quoque L P, R X, æquales &
28. tertij & parallelæ; Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus
auferent: Aufert autem L P, quintam partem circuli
F G H I K, nempe duas decimas partes F L, F P. Igitur &
R X, quintam partem auferet circuli R S T V X. Simili prorſus
argumento concludemus, reliquas rectas R S, S T, T V,
V X, quintas partes
auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum eſt RST-
V X, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni F G H I K. Demittantur
ex angulis pentagoni
RSTVX, ad angulos
pentagon F G H I K,
rectæ RF, RG, SG,
S H, T H, T I, V I,
V K, X K, X F. Quia
igitur perpendicularis L R, æqualis ponitur ſemidiametro E F, hoc eſt, lateri
hexagoni circuli F G H I K; & eſt L F, latus decagoni;
10. tertijde erit quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli æquale
quadratis rectarum LR, LF: Eſt autem eiſdem quadratis
47. primi. æquale quadratum rectæ FR, quod angulus FLR, rectus ſit
ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale eſt
quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni
L P, ſeu FG, hoc eſt, ipſi R X, æqualis erit. Eademque
ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus
utriuſque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula
RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK,
VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia, cum eorum
omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni æquilateri.
Poſt hæc, perpendicularis EQ, in utramque partem extendatur,

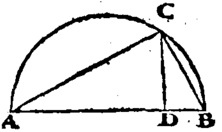


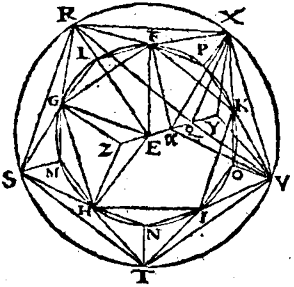


tēdatur, ſintq; rectę Q Y, E Z ęquales ſingulę, lateri decagoni circuli F G H I K, uel R S T V X; & connectantur rectę V Q, V Y, X Q, X Y; G E, G Z, H E, H Z. Quoniã ergo Q X, ſemidiameter eſt circuli R S T V X, hoc eſt, latus hexagoni; & Q Y, latus eſt decagoni eiuſdem circuli; erit quadratum lateris pentagoni, X V, æquale quadratis rectarum 10. tertijde. Q X, Q Y: Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ X Y, 47. primi. quod angulus X Q Y, rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum F G H I K, R S T V X, parallela ſint oſtenſa, ſitque E Q, ad illius planum recta, ex conſtructione; erit quoque E Q, ad huius planum recta, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam Q X, in eodem plano:) Igitur quadratum rectæ X Y, æquale eſt quadrato rectæ X V, proptereaque recta X Y, rectæ X V, æqualis. Eodemque modo eidem X V, æqualis oſtendetur V Y; Ac proinde triangulum V Y X, æquilaterum eſt. Non aliter demonſtrabimus, ſi ducantur rectæ R Y, S Y, T Y, (quas tamen, ut uitaremus confuſionem linearum, non duximus.) quatuor triangula R Y X, R Y S, S Y T, T Y V, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo V Y X, hoc eſt, prioribus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum G Z H, (cum E G, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiameter, & E Z, latus decagoni, anguluſque G E Z, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula H Z I, I Z K, K Z F, F Z G, (quorum tamen lineas, ne pareremus confuſionem, non duximus) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia hæc triangula uiginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturq; ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſtitutum erit ex ipſis Icoſaedrum. Quod dico cõprehendi ſphæra diametri A B.

DIVISA recta E Q, bifariam in α, ducantur rectæ α F, α X, α V. Quoniam igitur latera α Q, Q V, trianguli α Q V, æqualia ſunt lateribus α Q, Q X, trianguli α Q X, cum Q V, Q X, ſint ſemidiametri circuli R S T V X:

VX: Sunt autem & anguli α Q V, α Q X, æquales, nempe
4. *primi.* recti, ex defin. 3. lib. 11. Erunt & baſes α V, α X, æquales.
Eademque ratione, ſi ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T,
oſtendentur rectæ α R, α S, α T, æquales & inter ſe, & ipſis
α V, α X. Rurſus quia latera α Q, Q X, trianguli α Q X,
æqualia ſunt lateribus α E, E F, trianguli α E F, cum Q X,
E F, ſint ſemidiametri circulorum æqualium, & E Q, diuiſa
ſit bifariam in α:
Sunt autem & anguli
α Q X, α E F, æquales, nimirum recti, ex
defin. 3. lib. 11. Erunt
4. *primi.* quoq; baſes α X, α F,
æquales: Eodemque
modo ſi ex α, E, ad G,
H, I, K, rectæ ducantur,
oſtendentur α G,
α H, α I, α K, æquales
ipſi α X; Ac proin
de decem lineæ ductæ
ad decem angulos F,
G, H, I, K, R, S,
T, V, X, ęquales ſunt.
Quoniã uero Q E,
ſemidiameter eſt, hoc
eſt, latus hexagoni circuli F G H I K; & E Z, latus decagoni
9. *tertij dec.* eiuſdem circuli, erit Q Z, diuiſa in E, extrema ac media
ratione, maiuſque ſegmentum erit Q E. Quare minus
ſegmentum Z E, aſſumens E α, dimidium maioris ſegmenti.
3. *tertij dec.* hoc eſt, recta α Z, quintuplum poteſt eius, quod ex E α,
deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta α F, quintuplum
eiuſdem quadrati rectæ E α. (Nam cum quadratum rectæ
E F, quadruplum ſit quadrati rectæ α E, ex ſcholio propoſ.
4. lib. 2. quod recta E F, dupla ſit ipſius E α; erunt quadrata
rectarũ E F, E α, ſimul quintupla quadrati rectæ E α. Cũ ergo
47. *primi.* quadratis rectarũ E F, E α, æquale ſit quadratũ rectæ α F; erit
quoq; quadratũ rectę α F, quintuplũ quadrati rectę E α.) Igit'
æqualia sũt quadrati rectarũ α Z, α F, ac proinde rectæ ipſæ
α Z, α F, ęquales erũt. Cũ igit' Z Y, bifariã ſecet' in α, (ꝓpterea
quod





quod ſi æqualibus α E, α Q, æquales rectæ addantur E Z, Q Y, totæ Z α, Y α, æquales fiant.) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icoſaedri æquales: Quo circa ſphęra deſcripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angulos Icoſaedri conſtituti tranſibit. Hanc ergo ſphæram dico æqualem eſſe ſpheræ diametri A B.

Cvm ſit ut α Z, ad α E, ita Y Z, dupla ipſius α Z, ad Q E. duplam ipſius α E; Ac propterea ut quadratum re- 15. quinti.
ctæ α Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ YZ. 22. ſexti.
ad quadratum rectæ Q E; ſit autem quadratum rectæ α Z, oſtenſum quintuplum quadrati rectæ α E: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ Q E, hoc eſt, quadrati rectæ B C; quod recta Q E, æqualis ſit poſita ſemidiametro E F, hoc eſt, rectæ B C: Eſt autem & eiuſdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectę AB. (Nam cum, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. ſit ut A B, ad B C, ita BC, ad BD; erit ut AB, ad BD, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectę BC, ex coroll. propoſ. 19. lib. 6. Ac proinde exiſtente AB, quintupla ipſius B D, erit etiam quadratum rectę AB, quintuplum quadrati rectę B C.) Quadrata igitur rectarum Y Z, AB, ęqualia ſunt, ideoq; & rectę Y Z, A B; Ac propterea & ſphęrę circa ipſas, ęquales erunt.

Qvoniam denique diameter ſphęrę AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipſius oſtendendum eſt, latus Icoſaedri eſſe lineam Irrationalem, quę Minor uocatur.) poteſtque quintuplum quadrati rectę BC, hoc eſt, rectę illi ęqualis E F; erit quoque ſemidiameter E F, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum A B, E F, cum habeãt proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. uel 10. ad 2. erunt commenſurabilia; 6. decimi
Ac propterea & rectę A B, E F, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo AB, ſit Rationalis, erit & E F, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea F G, latus pentagoni, hoc eſt, 11. hu.
latus Icoſaedri, Irrationalis erit linea, quę uocatur Minor. Icoſaedrum igitur conſtituimus, & ſphęra ſumus complexi, qua & ante dictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quę uocatur Minor. quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Ex dictis infertur, ſphæræ diametrum eſſe potentia quintuplã ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutum eſt, & qui per quinque Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum enim eſt, quadratum diametri A B, quintuplum eſſe quadrati rectæ B C, hoc eſt, ſemidiametri E F.

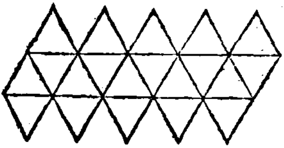
COROLLARIVM. II.

ITEM manifeſtum eſt, ſphæræ diametrum eſſe compoſitam ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli. Nam Y Z, diameter ſphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, E Z, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM. III.

CONSTAT denique latera Icoſaedri oppoſita, qualia ſunt RX, HI, eſſe parallela. Nã recta RX, oſtenſa eſt parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ L P, ſit quoque parallela recta H I, ut in ſcholio propoſ. 27. lib. 3. demonſtrauimus; (eo quod æquales ſint arcus HL, I P; continet enim uterque tres decimas partes totius circunferentiæ,) perſpicuum eſt, rectas RX, HI, eſſe parallelas. Eadẽq; eſt ratio de cæteris lateribus oppoſitis.

SCHOLION.

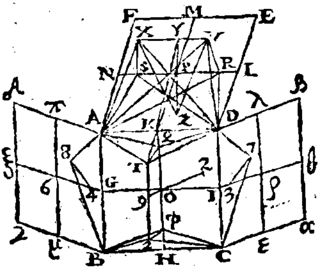


QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur uiginti triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, ut hæc figura indicat, componetur Icoſaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſeſe aptentur.

17. PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demõſtrare, qđ Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ uocatur Apotome.

Sɪᴛ una baſis cubi data ſphæra comprehenſi, quadratum ABCD, cui inſiſtat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, ut ſit communis horum ſectio recta AD. (Inſiſtũt enim omnes baſes cubi ſibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, ut cubus conſtitueretur, erectæ ſunt ex angulis baſis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipſi baſi EFGH perpendiculares. Id quod facile apparere poteſt ex figura propoſitionis 15. huius lib. Quare & baſes cubi per ipſas ductæ, rectæ erunt ad eandem baſin EFGH.)



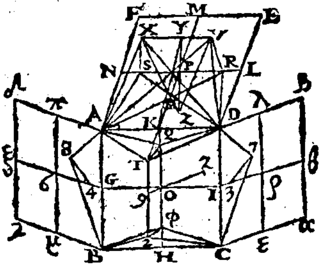
Diuiſis itaque cunctis lateribus bifariã in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis connectantur ſecantibus ſeſe in O, P, centris quadratorum, ut conſtat ex demonſtratione octaui problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in pũctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorũ educantur extra cubũ perpẽdiculares QT, RV, SX, æquales ſegmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, eſſe unũ ex duodecim pẽtagonis æquilateris, & æquiãgulis Dodecaedri cõſtituẽdi. Q d̃ enim pentagonũ ATDVX, ſit in uno plano, ita oſtendetur. 18. undec.

Cũ RV, SX, ſint ad quadratũ ADEF, rectæ, ipſæ erũt paral- 6. undec.
lelæ; Ac proinde, cũ ſint æquales, (quia ſegmẽta maiora PR,
PS, quibus æquales ſunt poſitæ, æqualia ſunt, cum & lineæ
ſectæ PL, PN, æquales ſint.) erũt quoq; cõiungẽtes rectæ 33. primi.
RS, VX, æquales & parallelæ: Eſt aũt & AD, eidem RS, 33. primi.
ſiue LN, parallela, eo q d̃ AN, DL, parallelæ ſint & æquales. Igit & AD, VX, parallelæ sũt; Ac ꝓpterea rectę cõiun- 9. undec.
gẽtes AX, DV, in eodẽ cũ ipſis erũt plano; ideoq; trapeziũ 7. undec.
ADVX, in uno exiſtet plano: Eſt aũt & triãgulũ ATD, in
uno plano. Dico q d̃ & in eodẽ plano cũ trapezio ADVX.
Ex P, ducať PY, parallela ipſi RV, q̃ erit recta ad quadratũ 8. undec.
ADEF, q d̃ ad idẽ recta ſit RV: Et cõnectanť rectę KT, KY.
Qm̃ igitur eſt ut OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob ſectionẽ

rectæ

rectæ O K: Eſt autem K P, ipſi O K, æqualis; (ſunt enim
dimidia latera cubi;) & PY, ipſi OQ, (cum æqualis ſit ipſi
R V, quę poſita fuit ęqualis ipſi OQ, maiori ſegmento;) Erit
quoque ut K P, ad PY, ita OQ, hoc eſt, QT, illi æqualis, ad
Q K. Quare cum triangula P K Y, Q T K, duo latera habeant
duobus lateribus proportionalia, ſintque ad unum angulum
K, compoſita, ita ut homologa latera ſint parallela,
6. undec. nempe PK, & QT, inter ſe, quod utrumque rectum ſit ad
quadratum ABCD; & PY, QK, inter ſe, quod utrunque rectum
32. ſexti. ſit ad quadratum ADEF: Erunt reliqua latera K Y,
1. undec. KT, in rectam lineam collocata; Ac propterea recta TY, in
uno erit plano, ideoq; planum ATD, & planum ADVX,
unum planum conſtituent, per rectas T Y, A D, ductum.
Quocirca pentagonum ATDVX, in uno exiſtit plano.

QVOD vero ſit ęquilaterum, ita docebitur. Cum latera
A N, N S, trianguli ANS, æqualia ſint lateribus A K,
KQ, trianguli A K Q; (Sunt enim A N, A K, dimidia latera
cubi, & NS, KQ,
ſegmenta minora rectarum
æqualium ſectarum.)
& anguli
ANS, AKQ, recti; ſi
ducatur recta A Q, erunt
4. primi. baſes A S, A Q,
æquales. Rurſus cum
latera AS, SX, trianguli
ASX, ſint æqualia lateribus
A Q, Q T; triāgulig
A Q T; (Nam rectæ AS, A Q, oſtenſæ ſunt æquales,
& SX, QT, ſunt ſegmenta maiora rectarum æqualium ſectarum)
& anguli ASX, AQT, recti, ex defin. 3 lib. 11. Erūt
4. primi. quoq; baſes AX, AT, æquales. Quod ſi ducatur recta DQ,
oſtendemus eodem argumento, rectam DT, rectæ AT; ſi
uero ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, eſſe æqualē.
Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV,
ęqualia; quibus etiam æquale oſtendemus reliquum V X,
4. tertijdec. hac ratione. Quadrata rectarum PN, NS, ſimul tripla ſunt
quadrati rectæ PS, hoc eſt, quadrati rectæ S X: Eſt autem
quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igitur &
quadra-

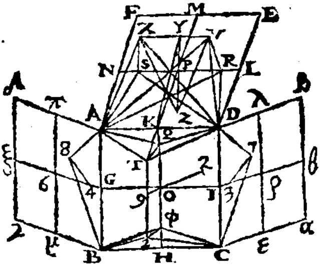


quadrata rectarum A N, N S, ſimul tripla ſunt quadrati rectæ
S X. Cum ergo quadratis rectarum A N, N S, æquale ſit 47. *primi.*
quadratum rectæ A S; erit quoque quadratum rectæ A S,
triplum quadrati rectæ S X; Ac proinde quadrata rectarum
AS, SX, ſimul, quadrupla eiuſdem quadrati rectæ S X: Eſt
autem quadratis rectarum A S, SX, æquale quadratum rectæ 47. *primi.*
A X. Quadratum ergo rectæ A X, quadruplum quoque
erit quadrati rectæ SX, hoc eſt, quadrati rectæ P S, hoc
eſt, quadrati rectæ X Y; Sunt enim rectæ P S, X Y, æquales. 34. *primi.*
Cum igitur & quadratum rectæ V X, quadruplum ſit eiuſ-
dem quadrati rectæ X Y, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod V X,
dupla ſit ipſius X Y; Erunt quadrata rectarum A X, V X,
æqualia; Ac proinde rectæ ipſæ æquales. Quare cũ & X A,
A T, T D, D V, oſtenſæ ſint eſſe æquales; æquilaterum eſt
pentagonum A T D V X.

QVOD autem & æquiangulũ ſit, ita perſpicuum fiet.
Ductis rectis A R, A V; cum P N, ſecta ſit in S, extrema ac
media ratione, eique addita P R, æqualis maiori ſegmento
P S; erit quoque N R, ſecta in P, extrema ac media ratione, 5. *tertijdec.*
maiuſque ſegmentum erit N P. Quadrata igitur rectarum
N R, R P, ſimul tripla ſunt quadrati rectę N P, hoc eſt, qua- 4. *tertijdec.*
drati rectæ A N: Eſt autem quadratum rectæ R V, æquale
quadrato rectę R P. Ergo & quadrata rectarum N R, R V,
tripla ſunt quadrati rectę A N; Ac proinde quadrata recta-
rum NR, RV, A N, quadrupla ſunt eiuſdem quadrati rectæ
A N: Sunt autem quadrata rectarũ N R, A N, æqualia qua- 47. *primi.*
drato rectæ A R. Igitur & quadrata rectarum R V, A R,
quadrupla ſunt quadrati rectæ A N. Cum ergo quadratis
rectarũ A R, R V, æquale ſit quadratum rectę A V; Erit 47. *primi.*
quoque quadratum rectæ A V, eiuſdem quadrati rectę A N,
quadruplum. At uero eiuſdem quadrati rectæ A N, qua-
druplum eſt quadratũ rectæ A D, ex ſcholio propoſ. 4. lib.
2. quod A D, dupla ſit ipſius A N. Aequalia igitur ſunt
quadrata rectarum A V, A D, ideoq; & rectę A V, A D, ęqua-
les. Simili argumento, ductis rectis D S, D X, oſtendemus
DX, D A, ęquales eſſe; ac propterea tres rectę A D, A V, D X,
inter ſe eſſe æquales. Quoniam igitur latera T A, T D, triã-
guli T A D, æqualia ſunt lateribus D V, V X, trianguli D X V;
& baſes A D, D X, æquales quoque: Erunt & anguli A T D, 8. *primi.*

DVX, æquales Non ſecus oſtendetur angulus DVX, ęqualis angulo A X V; Ac proinde, cum in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, A X V; ipſum erit æquiangulum. 7. tertij dec.

Qvod ſi ſumantur alia duo cubi quadrata C α β D, B γ δ A, recta ad quadratum ABCD, in cōmunibus ſectionibus CD, AB, quorũ ſingula latera bifariam ſecentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur ſe mutuo ſecantibus in quadratorum centris ρ, σ, Secentur deinde O H, O K, ρ I. σ G, extrema ac media ratione in pũctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 2, Q T, 3 7, 4 8, æquales ſegmentis maioribus φ O, Q O, 3 ρ, 4 σ, coniungãturq; rectę T 2, 2 C, C 7, 7 D, D T, T A, A 8, 8 B, B 2, demonſtrabimus eadem ratione, pentagona T 2 C 7 D, T[illegible]B 8 A, æquilatera eſſe & ęquiangula, & æqualia priori A T D V X, ob communia latera T D, T A. Conſtructa igitur iam ſunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & ſibi mutuo cohęrentia lateribus cōmunibus T D, T A. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem ſimilia pentagona tangẽtia reliqua nouẽ cubi latera; conſtitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem ſphæra comprehendi, qua & cubum, & præcedentes figuras, hac arte demonſtrabimus.

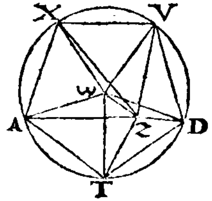


2

Intelligantvr plana cubi oppoſita ſecari planis, quę per rectas planorũ latera bifariã ſecantes ducuntur, nempe planũ ADEF, & eius oppoſitũ, planis ductis per rectas KM, L N; Itẽ planũ A B C D, & eius oppoſitũ, planis per rectas GI, H K, ductis, &c. Quoniã igitur plana ſecãtia recta ſunt ad dicta plana cubi, quod parallela ſint baſib⁹ cubi, quę rectę ſunt ad plana A D E F, ABCD: Erunt & communes eorũ ſectiones ad eadẽ cubi plana rectę. Quare cũ Y P, recta ſit ad planũ ADEF, ipſa producta uerſus Z, erit communis ſectio plano- 19. undec.

planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodē pacto, ſi ex
O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9 OZ; erit
ipſa, communis ſectio planorum quę per rectas G I, HK, ducuntur.
Quia uero dictæ cōmunes ſectiones, & diametri cubi
ſe mutuo biſariā ſecānt; ſecent ſe mutuo biſariā in Z: Se- 39. undec.
cant autem ſeſe diametri cubi biſariam in centro ſphæræ cubum
complectentis, ex coroll. 1. propoſ. 15. huius lib. Punctū
igitur Z, centrum erit ſphęrę circa cubum deſcriptę; Ac proinde
omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter
ſe ęquales erunt: Quibus omnibus ęquales quoque eſſe omnes
rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, ſic fiet
perſpicuum, ducta recta Z X. Quoniam parallelę ſunt KP, 6. undec.
OZ, quod utraque recta ſit ad planum ABCD; Item parallelę
ſunt O K, ZP, quod utraque recta ſit ad planum A DE
F; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi eſſe
coniuncta) parallelogrāmum, ac propterea P Z, ęqualis erit 34. primi
ipſi K O, hoc eſt, ipſi N P, dimidio lateri cubi: Eſt autem &
P Y, ipſi P R, æqualis. Tota ergo Z Y, toti N R, ęqualis
erit. Quare cum quadrata rectarum NR, PR, ſimul tri- 4. tertijdec.
pla ſint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, ſecta ſit extrema
& media ratione; erunt quoque quadrata rectarum Z Y,
P Y, hoc eſt, quadrata rectarum Z Y, Y X, ſimul tripla quadrati
rectę P Z: (Eſt enim Y X, ęqualis ipſi P S, hoc eſt,
ipſi P Y:) Eſt autem quadratis rectarum Z Y, Y X, ęqua- 47. primi.
le quadratum rectę Z X. Igitur & quadratū rectę Z X, triplum
erit quadrati rectę ZP, hoc eſt, quadrati dimidij lateris
cubi. At quia eiuſdem quadrati dimidij lateris cubi triplum
eſt quoque quadratum ſemidiametri ſphæræ cubum cōprehendētis.
(Nam ut diameter ad latus cubi, ita eſt ſemidiame- 15. [illegible] qui.
ter ad dimidium lateris; Ac proinde ut quadratum diametri
ad quadratum lateris, ita quadratū ſemidiametri ad qua- 22. ſexti.
dratum dimidij lateris. Cum ergo quadratum diametri tri- 15. tertijdec.
plum ſit quadrati lateris, erit quoque quadratum ſemidiametri
triplum quadrati dimidij lateris.) Aequale igitur eſt quadratum
rectę Z X, quadrato ſemidiametri ſphęrę, ſeu cubi;
Ac propterea Z X, ęqualis ſemidiametro. Eadē ratione erit
ducta recta Z V, ſemidiametro ęqualis, Vel certe, quia cum
latera ZY, YX, triāguli ZYX, ęqualia ſint lateribus ZY, YV,
triāguli ZYV, & anguli cōtenti recti. (cum.n. PY, ſit perpen-

dicularis ad L N, erit quoque eadem ad ſibi parallelam VX,
4.*primi.* perpendicularis.) Erunt baſes ZX, ZV, æquales. Eademq;
ratione ſemidiametro ſphęrę ęquales erunt rectę ductę Z A,
Z D. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductę ex Z, centro ſphęrę
ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales ſemidiametro
ſphęrę. Vt autem oſtendatur & recta ducta ZT,
ad quintum angulum T, ſemidiametro æqualis, deſcribatur
circa pentagonum, cum ſit æquilaterum & æquiangulum,
circulus ATDVX, & in planum ipſius ex Z, centro ſphæræ



perpēdicularis demittatur Zω, cōnectanturque
rectę ωA, ωT, ωD,
ω V, ω X. Quoniam igitur qua-
47.*primi.* dratū rectę Z A, ęquale eſt quadratis
rectarum Z ω, ω A; & quadratum
rectę ZX, quadratis rectarum
Z ω, ω X: Sunt autem quadrata
rectarum Z A, Z X, ęqualia,
quod rectę Z A, Z X, oſtenſæ
ſint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis
rectarum Z ω, ω X, ęqualia; Ac proinde dempto cōmuni
quadrato rectę Z ω, ęqualia relinquentur quadrata rectarum
ω A, ω X, ideoque rectæ ipſæ ω A, ω X, æquales erūt.
Non aliter oſtendentur rectæ ω V, ω D, & inter ſe, & ipſis
ω A, ω X, æquales, quod & rectę Z V, Z D, ęquales ſint oſtē
ſæ rectis Z A, Z X. Quare cum ex ω, cadant in circunferentiam
9.*tertij.* plures rectę lineę ęquales, quam duę; punctum ω, centrum
erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis
æquali; ideoque quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erūt
quadratis rectarum Z ω, ω T. Cum ergo illis duobus æquale
47. *primi* ſit quadratum rectę Z A; his uero quadratum rectę Z T;
Erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T; proptereaq; &
rectę Z A, Z T, ęquales. Quare ſphęra complectens cubum
ex centro Z, deſcripta comprehendet pentagonum quoque
ATDVX; Eodemq; modo & reliqua pentagona Dodecaedri;
Ac propterea eadem ſphęra comprehendetur Dodecaedrum,
qua cubus.

POSTREMO cum ſit ut N P, ad P S, ita P S, ad S N:
15. *quinti.* erit quoque ut N L, dupla ipſius N P, ad RS duplam ipſius
PS, ita RS, dupla ipſius PS, ad rectam compoſitam ex S N,
R L,

RL, nimirum ad duplam ipſius SN. Si igitur cubi latus NL, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentũ erit SR: Sed NL, tota ita ſecta, Rationalis eſt. (Nam eius quadratũ commenſurabile eſt quadrato diametri ſphærę, quę Rationalis ponitur; cum ſit illud tertia pars huius.) Igitur maius 15. hu.
ſegmentum SR, hoc eſt, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis eſt linea, quę uocatur Apotome. Dodecaedrum 6. tertijdec.
ergo conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Cvm ergo demonſtratum ſit; recta LN, extrema ac media ratione ſecta, maius ſegmentum eſſe rectam RS: ſit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perſpicuum eſt, ſi latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmẽtum eſſe latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti.

COROLLARIVM II.

Sic quoque latus cubi æquale eſt lineæ rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Nam AD, latus cubi ſubtendit angulum T, pentagoni, eſtque oſtenſum ęquale rectis AV, DX, ſubtẽdentibus angulos X, & V, eiuſdẽ pentagoni.

Qvoniam uero recta ſubtendens dictum angulum pentagoni ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum latus pẽ- 8. tertijdec.
tagoni; ac propterea recta compoſita ex dicta recta ſubtendente 5. tertijdec.
angulum pentagoni, hoc eſt, ex latere cubi, & ex maiori ſegmento, id eſt, ex latere Dodecaedri, ſimiliter diuiditur, facitque minus ſegmentum latus Dodecaedri, & maius ſegmentum latus cubi: Efficitur, ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri, maius ſegmentum eſſe latus cubi eiuſdem ſphæræ.

COROLLARIVM III.

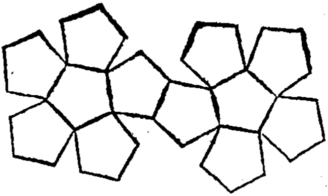
Constat etiam ex dictis, in Dodecaedro eſſe ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Nam duo ex dictis lateribus ſunt VX, Tz, quæ uidelicet parallela ſunt lateribus cubi EF, AB; aliaque quatuor reperiuntur ſuper reliquas quatuor baſes cubi, quorum, quæ ſuper baſes cubi oppoſitas exiſtunt, parallela ſunt, cũ parallela ſint cubi lateribus parallelis & oppoſitis, ſecanturque, ex demonſtratis, bifariam & ad rectos angulos, a lineis rectis, quæ centra baſiũ cubi oppoſitarum coniungunt; quales ſunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ ut demonſtratum eſt, ſe mutuo interſecant in centro Z. Dico ſe mutuo ſecare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales ſint dimidio lateri cubi; & Y P, 9 O, æquales maioribus ſegmentis æqualibus PS, OQ; Erunt totæ YZ, 9Z, æquales; Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z, ad ſectiones oppoſitorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales ſunt, ſeq; bifariam in centro Z, mutuo ſecant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo KOZ P, angulus OZP, rectus eſt, cum opponatur recto OKP. Non aliter oſtendentur reliquæ lineæ rectæ centra baſium coniungentes efficere angulos rectos. Oẽs enim parallelæ ſunt lateribus cubi parallelis rectos angulos conſtituentibus, ut perſpicuum eſt.

COROLLARIVM. IIII.

Denique conſtat, ſi recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, ut dictum eſt, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Cum enim quadrata rectarum Z Y, Y P, tripla oſtenſa ſint quadrati rectæ PZ; erit Z Y, ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentũ erit P Z, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. Ac proinde erit ut Z Y, ad Z P, ita ZP, ad PY; ideoque ut dupla ipſius ZY, nempe recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariã, ad duplã ipſius Z P, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipſius ZP, ad duplam ipſius PY, hoc eſt, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariã, ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum, latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ.

15. *quinti.*

SCHOLION.



Quod ſi ex aliqua materia cõficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, diſponanturq; ut hac figura indicat, cõponetur Dodecaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſe complicentur.

18. PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere,

nere,& inter ſe comparare.

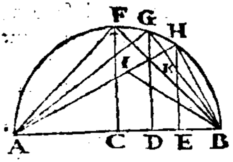
SIT ſphęrę diameter A B, quę in C, ſecetur biſariam; In D, uero ita, ut B D, ſit ipſius pars tertia; In E, denique ita, ut B E ſit quinta pars eiuſdem. Deſcripto deinde circa A B, ſemicirculo, ducantur ad eius circunferentiam ex C, D, E, ipſi A B, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturque rectę A F, B F, A G, B G, A H, B H. Poſt hęc ex H A, abſcindatur H I, ęqualis lateri Decagoni in eo circulo deſcripti, cuius ſemidiameter, ſeu latus Hexagoni eſt B H; connectaturque recta B I. Poſtremo B G, ſecetur extrema ac media ratione in K, ſitque maius ſegmentum B K.

QVOD igitur attinet ad expoſitionem laterũ prædictarũ figurarum, dico A G, eſſe latus Pyramidis, ſeu Tetraedri; A F, latus Octaedri; B G, latus cubi; BI, latus Icoſaedri; BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam AG, media proportionalis eſt inter B A, A D, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propoſ. 20. eiuſdẽ lib. ut B A, ad A D, ita quadratũ rectę B A, ad quadratũ rectę A G: Eſt autem B A, ipſius A D, ſeſquialtera; cum talium partium 2 ſit A D, qualium 3. eſt B A. Igitur & quadratum rectę B A, ſeſquialterum eſt quadrati rectæ A G; Ac proinde cum diameter ſphęrę ſit potentia ſeſquialtera 13.tertijdec. lateris Tetraedri; Erit A G, latus Tetraedri.

RVRSVS quoniã A F, eſt media proportionalis inter B A, A C, ex eodẽ coroll. ꝓpoſ. 8. lib. 6. Ac proinde ut B A, ad A C, ita quadratũ rectę B A, ad quadratũ rectę A F, ex adducto coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autẽ B A, ipſius A C, dupla: Erit quadratũ rectę B A, duplũ quadrati rectæ A F. Quare cum diameter ſphęrę potentia ſit dupla lateris Octaedri; Erit A F, 14.tertijdec. latus Octaedri. Eodem modo erit B F, latus Octaedri.

DEINDE cũ BG, ſit media proportionalis inter A B, B D, ideoque ut AB, ad BD, ita quadratũ rectę AB, ad quadratum rectę BG, ex pręfatis duobus corollarijs lib. 6. Sit autem A B, ipſius BD, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectę AB, triplum quadrati rectę B G. Quocirca cum ſphęrę diameter potentia ſit tripla lateris cubi; Erit B G, 15.tertijdec. latus cubi.

PRAETEREA quia, ex eiſdem corollarijs, BH, eſt media proportionalis inter AB, B E, atque idcirco ut A B, ad BE, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectę B H: Eſt autem, ex conſtructione A B, ipſius B E, quintupla: Erit quadratum rectę AB, quintuplum quadrati rectę B H. Cum igitur diameter ſphęræ potentia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex coroll 1 propoſ. 16. huius lib. Erit B H, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli: Eſt autem HI, latus decagoni eiuſdem circuli, ex conſtructione. Igitur 10.tertÿdec. latus pentagoni poterit & B H, & H I, ſimul; Ac proinde 47.primi. cum quadratum rectę B I, ęquale ſit quadratis rectarũ B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiuſdem. Quam ob 16.tertÿdec. rem B I, latus eſt Icoſaedri.



DENIQVE, cum B G, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius ſegmentum, latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. huius lib. Expoſita ergo ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphęra deſcriptarum.

QVOD uero ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cum demonſtratum ſit, diametrum ſphęrę eſſe potentia ſeſquialteram lateris pyramidis; potentia uero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perſpicuum eſt, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. eſſe quadratum lateris Tetraedri; talium uero 3, quadratum laterius Octaedri; & denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertium lateris Octaedri, potentia uero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex ſphęrę diametro deſcripta, proportionem inter ſe habent, quam numerus ad numerum; 6. decimi. Ac propterea diameter ſphęrę, & latera dictarum figurarum lineę ſunt commenſurabiles; atque adeo cum diameter ſphęrę ponatur eſſe Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia.

Diamet.	6.
Tetraed.	4.
Octaed.	3.
Cub.	2.

tionalia: Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ut conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Erunt huiuſmodi lineę, nimirum diameter ſphęrę, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommenſurabiles, ac proinde *9. decimi.* Rationales potentia tantum commenſurabiles.

AT uero latera Icoſaedri & Dodecaedri, quoniam ſunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor; hoc uero, Apotome, ut demonſtratum eſt; nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum ſint diametro ſphęrę commenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum. oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.

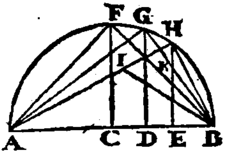
SED neque inter ſe ullo pacto commenſurabilia ſunt dicta latera Icoſaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cum latus Dodecaedri ſit Apotome, erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. *104. decimi* Item cum latus Icoſaedri ſit linea Minor, erit & latus Dodecaedri linea Minor. *106. decimi* Quod ſi dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantum, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam Minorem, ex eo, quod latus Icoſaedri Mi- *106. decimi* nor ſit. Quod eſt abſurdum. Nã ex ſcholio propoſ. 112. lib. 10 Apotome, & Minor ſunt lineę Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita ut neutra ſit eadem alteri.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphęrę, ideoque Rationalia exiſtant; duo uero poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquiſque lateribus; ac proinde Irrationalia ſint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, ut latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri; Latus denique Icoſaedri maius latere Dodecaedri; Hoc eſt, eo ordine ſe mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras conſtruximus. Quę forte cauſa fuit, cur Euclides non eodem

eodem ordine huiuſmodi figuras fuerit fabricatus, quo e definiuit.

Nam latus Tetraedri maius eſſe latere Octaedri, perſpicuum eſt. Cum enim AG, latus Tetraedri ſubtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG quam AF, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3.

Eodem modo oſtendemus latus Octaedri maius eſſe latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum ſubtendit, quam B G, cubi latus.



Latus autem cubi B G, maius eſſe latere Icoſaedri B I, hac arte demonſtrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipſius BD, & quadrata habent
20. ſexti. proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectę AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cum nõcupla proportio ſit duplicata proportionis triplę, ut hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ B D. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectę A B, taliū 3. eſt quadratum
15. tertijdec. rectę B G, quod illud huius triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum GD, BD, cū ęqualia ſint quadrato rectę B G. Igitur ſi auferatur quadratum rectę B D, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectę G D. Quoniam uero quadratum rectæ AB, quintuplum eſt quadrati rectæ B H, erit quadratum rectæ B H, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad
8. quinti. 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; erit numerus, ad
10. quinti quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratū rectæ GD, maius eſt quadrato rectæ B H, ideoque recta GD, maior, quam recta BH. Rurſus quia diameter ſphæræ AB, componitur ex B H, ſemidiametro circuli, quo Icoſaedrum conſtituitur, & ex linea dupla lateris decagoni H I, eiuſdem circuli, per coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. conſtat latus decagoni H I, minus eſſe tertia parte rectæ A B, hoc eſt minus recta B D. Nam ſi H I, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus

duabus tertijs partibus, nempe ipſi A D; Ac propterea B H, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipſi B D; Atque adeo, cum quadratum rectæ A B, noncuplum ſit oſtenſum quadrati rectæ B D, erit idem quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ B H. Quod eſt abſurdum. quintuplũ enim eſt demonſtratũ. Non ergo H I, tertia pars eſt ipſius A B: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta H I, dicatur maior tertia parte rectæ A B, & proinde dupla ipſius H I, maior quam duæ tertiæ, hoc eſt, quam A D; erit B H, minor quam tertia pars B D. Quare quadratum rectæ A B, maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ B D. Quod magis eſt abſurdum. Non igitur maior eſt H I, tertia parte ipſius A B: Sed neque æqualis tertiæ parti, ut oſtendimus. Minor ergo eſt quam tertia pars, hoc eſt, quam B D. Itaque cum rectæ G D, D B, maiores ſint rectis B H, H I, ut demonſtratum eſt, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: Eſt autem quadratum rectę B G, æquale quadratis rectarum G D, D B; & quadratum rectæ B I, quadratis rectarum B H, H I. Quadratum ergo rectæ B G, maius quoque erit quadrato rectæ B I; Ac proinde recta B G, nempe latus cubi, maior erit quam recta B I, latus ſcilicet Icoſaedri.

47. primi

MAIVS denique eſſe latus Icoſaedri B I, latere Dodecaedri B K, hac ratione patefiet. Cum rectæ B G, diuiſæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit B K, & minus G K; erit rectangulum ſub B G, B K, maius rectangulo ſub B G, G K; atque adeo rectangula ſub B G, B K, & ſub B G, G K, ſimul maiora duplo rectanguli ſub B G, G K: Eſt autem rectangulis ſub B G, B K, & ſub B G, G K, æquale quadratum rectę B G; Et duobus rectangulis ſub B G, G K, æqualia ſunt duo quadrata rectæ B K. (Nã cũ ſit, ut B G, ad B K, ita B K, ad G K; erit quadratũ rectæ B K, æquale rectangulo ſub B G, G K; ideoque duo quadrata rectæ B K, æqualia duobus rectangulis ſub B G, G K.) Maius igitur quoq; eſt quadratũ rectæ B G, duobus quadratis rectæ B K; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ B G, ſex quadratis rectæ B K: Atqui tribus quadratis rectæ B G, æqualia ſunt quinque quadrata rectæ B H. (Cum enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ B G, & quin-

2. ſecundi

17. ſexti.

& quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectę B G, quam quinque quadrata rectę BH, ęqualia eidem quadrato rectę A B, ideoque tria illa his quinque ęqualia.) Igitur & quinque quadrata rectę B H, maiora erunt ſex quadratis rectę B K; Ac proinde unum quadratum rectę B H, maius erit uno quadrato rectę B K. (ſi namque ęquale eſſet quadratum rectę B H, quadrato rectę B K, uel minus; forent quinque quadrata rectę B H, minora ſex quadratis rectę B K. quod eſt abſurdū, cum illa quinque hiſce ſex maiora ſint demonſtrata.) Quam ob rem & recta BH, maior erit quam recta B K; Ac propterea cum B I, maior ſit quā B H, multo maior erit B I, latus uidelicet Icoſaedri, quam B K; latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum expoſuimus, & inter ſe comparauimus. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

INTERPRETES *hoc loco demonſtrant, præter dictas quinque figuras, non poſſe aliam conſtitui figuram ſolidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis cõtineatur, inter ſe æqualibus, hac fere ratione.*

Ex duobus triangulis, vel ex duabus figuris aliis, ſolidus angulus conſtitui non poteſt, cum ſaltem tres anguli plani requirantur ad ſolidi anguli conſtitutionem.

Ex tribus autem triangulis æquilateris, conſtat pyramidis angulus;

Ex quatuor, Octaedri angulus;

Ex quinque angulus Icoſaedri;

Ex ſex autem huiuſmodi triangulis ad idẽ punctum coeuntibus fieri non poteſt angulus ſolidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3. propoſ. 32. lib. 1. Erunt eiuſmodi anguli ſex, duodecim tertiæ partes unius recti, hoc eſt, quatuor rectis æquales. Quare ex ipſis nullus angulus ſolidus conſtituetur. 21. undec. *Nam ſolidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam ſex planis eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit.*

Ex tribus deinde quadratis, cubi angulus conſtituitur. Ex

quatuor

quatuor autem quadratis nullus angulus ſolidus conſtitui poteſt. Rurſus enim recti quatuor erũt. Multo ergo minus ex pluribus, quã quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus cõſtabit.

Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales ſint ſex rectis, vt oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnũ rectum, ac propterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiuſmodi anguli tres rectos, & inſuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipſis angulus ſolidus conſtituetur. Sed ex quatuor huiuſmodi angulis, nullus ſolidus angulus confici poteſt. Cum enim vnus, vt dictum eſt, maior ſit recto, eo quod contineat vnum rectum, & inſuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus ſolidus ex ipſis conſtituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. Nec ſane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangulis conſtitui poterit angulus ſolidus. Nam cum ſex anguli hexagoni æquales ſint octo rectis, vt ad propoſ. 32. lib. 1. eſt demonſtratum; Ac proinde vnus angulus contineat unum rectum, ac propterea duas partes ſextas unius recti; continebunt tres anguli eiuſmodi tres rectos, & ſex ſextas partes recti, hoc eſt, quatuor rectos. Quare ex ipſis nullo modo cõponetur angulus ſolidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus eiuſmodi angulis, quam tribus, angulus ſolidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores ſunt quatuor rectis. Quam ob rem perſpicuum eſt, præter dictas quinque figuras, aliam figuram ſolidam non poſſe conſtitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

NAM ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramis contenta quatuor huiuſmodi triangulis.

SI vero quatuor eiuſmodi triangula conueniant ad angulum ſolidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi comprehenſum.

SI denique aſſumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrũ viginti triangulis eiuſmodi contentum.

QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctũ, ut conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.

POSTREMO, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figura regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ ſunt omnes baſes in vnius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, ſiue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6. numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modũ & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum cõponentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium eſt rurſus 12. numerus laterum Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium eſt 30. numerus laterum Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum conſtituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium eſt rurſus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD ſi quis rurſus interrogauerit, quotnam angulos ſolidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ ſunt omnes baſes in vnius baſis angulos, vt habeantur omnium baſium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque ſemper anguli baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius anguli ſolidi, diuidendi ſunt omnes anguli in numerum angulorum, qui ſimul coeunt angulum ſolidum conſtituendum, vt

numerus

numerus angulorum ſolidorum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. *Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 12. anguli, qui ſi diuidantur in 3. (Tot enim anguli conſtituunt vnum ſolidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos ſolidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum ſolidũ cubi) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triãgula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius triãguli, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidũ angulum Octaedri.) conficiunt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 5. (Tot enim anguli conſtituunt angulum ſolidum Icoſaedri.) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorũ vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad conſtituendum angulum ſolidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.*

ELEMENTI DECIMITERTII FINIS.

EVCLIDIS

ELEMENTVM XIIII.

ET SOLIDORVM QVARTVM,
Vt quidam arbitrantur: vt alij uero,
Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI AD PROTARCHUM.

BASILIDES *Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinæ ſocietatem commendatus, longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumq; diſſererent aliquando de ſcripta ab* Apollonio *comparatione* Dodecaedri *& Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorum, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non recte tradidiſſe* Apollonium; *quæ a ſe emendata, ut pater meus dicebat, literis prodiderunt.* Ego *autem poſtea incidi in alterum librum ab* Apollonio *editum, qui demonſtrationem accurate complectebatur de re propoſita, ex eiuſque problematis indagatione magnam equidem* cepi uoluptatem. Illud certe ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cum ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiße uidemur, id monimentis conſignatum tibi dedicandum duximus: ut qui feliciter cum in omnibus diſciplinis, tum uel maxime in Geometria uerſatus, ſcite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi ſumus: Ob eam uero, quæ tibi cum patre fuit, uitæ conſuetudinem, quaque nos complecteris, beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, ut prooemio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expoſiti ab omnibus Euclidi aſcribuntur: Duo uero ſubſequentes a pleriſque Hypſicli Alexandrino recte, meo iudicio, tribui ſolent; in quorum quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrum, & Dodecaedrũ, tam ſecundum ſuperficies, quam ſoliditates: In poſteriori uero exponuntur deſcriptiones aliquot figurarum regularium unius intra aliam; ut hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypſicle ſcitu non iniucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inſcriptiones unius in alio; quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque uero problematibus decimusquintus abſoluitur: Viſum eſt, ut aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo uberius de dictis figuris regularibus in uniuerſum diſſerere proponendo uaria theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuo inſcribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuiſſe Campanum, & Franciſcum Fluſſatem Candallam, qui diligentem operam, & ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non ſolum inſequentes duos libros quam plurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; uerum etiam integrum librũ, qui decimusſextus eſt ordine adiunxit, in quo proprietates illu-

ſtres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuiſſe Hypſiclis inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & Dodecaedri, facile intelligi poteſt ex ex eius proœmio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.

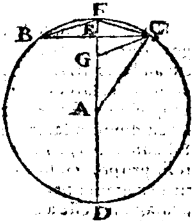
QVONIAM uero in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quam in earundem ordine, & inter ſe, & a Franciſco Fluſſate, idemque a nobis diſcrepant; annotauimus in margine ordinem utriuſque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior uero Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine unicus tantum numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur; Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hæc nota O, intelligẽdum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemque in Campano intellige, ſi forte loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quam apud Campanũ, illam propoſitionem deeſſe.

I. THEOR. I. PROPOS. I.

QVAE ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt utriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicula-
ris ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico
AE, dimidium eſſe lineę compoſitę ex latere hexagoni, & de
cagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim AE; in utramq; par
tem, ut perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, ęqua
li ipſi EF, connectantur rectę AC, CG, CF, BF. Quoniam
3. *tertij.* igitur pependicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt
latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, triã-
guli CEF; Cum igitur & anguli contenti ſint ęquales, nem-
4. *primi.* pe recti, erunt baſes CF, BF, ęquales, ideoque & arcus
CF,

C F, B F, ęquales ; Ac proinde exiſtente arcu B C , quinta 28. *tertij.* parte totius circunferentiæ , erit C F, eiuſdem pars decima ; atq; adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera C E , E F, trianguli CEF, ęqualia ſunt lateribus C E , E G , trianguli C E G , ſuntque anguli contenti , recti ; erunt & baſes C F, C G , & anguli 4. *primi.* C F G, C G F, æquales. Quia uero arcus C F , quinta pars eſt ſemicircunferentiæ D C F, cum ſit totius circunferentiæ decima pars ;



Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. eſt arcus DC, hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit arcus C F. Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli C A F: Eſt autem an- 33. *ſexti.* gulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circunfe- 20. *tertij.* rentiam , & huius ad centrum eadem ſit baſis D C. Igitur angulus CFD, atque adeo illi ęqualis oſtenſus CGF, duplus erit anguli CAF: Atqui angulus CGF, externus, æqualis eſt 32. *primi.* internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, ut oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium eiuſdem anguli C G F, ideoque ęquales ęrunt anguli GAC, GCA; ac proinde & latera AG, CG, æ- 6. *primi.* qualia : Eſt autem CG, recta oſtenſa ęqualis rectę C F. Igitur & A G , recta æqualis erit eidem C F. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus E F, F C, ſimul : Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul A F, FC, duplæ erunt ipſius A E , atque idcirco e contrario erit A E, ducta uidelicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus , &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ex his ſequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam , ſecare arcum , quem dicta hæc linea recta ſubtendit , bifariam . Demonſtratum enim eſt rectam A E , quæ ex centro perpendicularis eſt ad B C, diuiderit arcum B C, biſariam in F.

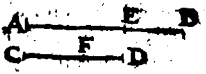
COROLLARIVM. II.

HINC quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam, æqualem eſſe utrique huic ſimul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti, ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam ut in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni, æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul; Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad latus pentagoni, eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

4.
2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.



SECENTVR binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, eſſe ut A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item ut A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cum enim ſit ut A B, ad A E, ita A E, ad E B; & ut C D, ad C F, ita C F, ad F D; erit rectangulũ ſub A B, E B, æquale quadrato rectæ A E; 17. ſexti. & rectangulum ſub C D, F D, æquale quadrato rectæ C F. Quamobrem erit ut rectangulum ſub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum ſub C D, F D, ad quadratum rectæ C F; (eſt enim utrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 4. lib. 5. ut quadruplum rectanguli ſub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli ſub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: Et componendo, ut quadruplum rectanguli ſub A B, E B, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli ſub C D, F D, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ

C F:

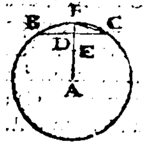
CF: Sed quod quater continetur ſub A B, E B, una cum
quadrato rectæ A E, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ 8. *ſecundi.*
ex AB,EB; Et quod quater continetur ſub C D, F D, una
cum quadrato rectæ CF, æquale eſt quadrato lineæ compo
ſitæ ex C D, F D. Igitur erit quoque, ut quadratum lineæ
compoſitæ ex AB,EB,ad quadratum rectæ AE,ita quadra
tum lineæ compoſitæ ex CD,FD,ad quadratum rectæ CF;
Ac proinde, ut recta compoſita ex AB,EB,ad rectam AE, 22. *ſexti.*
ita recta compoſita ex CD,FD,ad rectam C F: Et compo-
nendo, ut compoſita recta ex AB,EB,& recta AE,hoc eſt,
dupla ipſius AB,ad rectam AE,ita recta compoſita ex CD,
FD,& recta CF,id eſt,dupla ipſius CD, ad rectam CF; Et
permutando,ut dupla ipſius AB,ad duplam ipſius CD, ita
A E, ad C F: Vt autem dupla ipſius A B, ad duplam ipſius 15. *quinti.*
CD,*ita* eſt AB,ad CD. Erit ergo ut AB,ad CD, ita AE, ad
CF; Ac propterea,cum ſit ut tota A B, ad totam C D, ita
A E,ablata ad CF,ablatam,erit quoque reliqua EB, ad reli- 19. *quinti.*
quam FD, ut tota ad totam. Quare ut AE, ad C F, ita erit
EB,ad FD, cum utraque proportio eadem ſit proportioni
AB,ad CD: Et permutando,erit ut AE,ad EB, ſic C F, ad
FD; & ſic denique iuxta omnes modos arguendi ex propor
tionalitate, oſtendemus & totas lineas, & earundem par-
tes eſſe proportionales inter ſe. Si binæ itaque rectæ lineæ ex
trema ac media ratione ſecentur, &c. Quod erat oſten-
dendum.

COROLLARIVM

Ex hac propoſitione & præcedenti inferemus hoc theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus uero æquale eſt dimidio lateris decagoni eidem circulo inſcriptorum.

Ex centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inſcripti, ſecetur in B, extrema ac media ratione. Dico maius ſegmentum A B, eſſe æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiuſdem circuli ductæ; minus uero ſegmentum E D, æquale eſſe dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli, Extenſa namque recta A D, ad F, & connexa recta F C; erit F C, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propoſ. 1. huius lib. arcus B C, nempe quinta pars totius circunferentiæ, biſariam ſecetur in F; Ac proinde recta compoſita ex A F, latere hexagoni, & F C, latere decagoni, ſecta erit extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum A F, latus hexagoni, minus uero ſegmentum F C, latus decagoni. Quare ut in hac propoſ. oſtenſum eſt, erit ut tota AD, diuiſa ſecundum extremam ac mediam rationem, ad totam compoſitam ex AF, FC, ſimiliter diuiſam, ita A E, maius ſegmentum ad A F, maius ſegmentum; & E D, minus ſegmentum ad F C, minus ſegmentum: Eſt autem tota A D, dimidium totius compoſitæ ex A F, F C. Igitur & A E, ipſius A F, ſemidiametri, & ED, ipſius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per coroll. propoſ. 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis ſit dimidio ſemidiametri, perſpicuum eſt, maius ſegmentum A B, æquale eſſe dictæ perpendiculari, minus uero E D, dimidio lateris decagoni.



9. tertijdec.

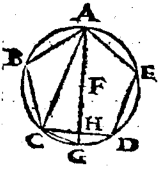
1. quartidc.

2.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

4. SI in circulo pentagonum æquilaterũ deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, utraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, ſubtendatque recta A C, bina latera A B, B C. Dico quadrata rectarum C D, A C, ſimul quintupla eſſe quadrati ex ſemidiametro circuli deſcripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 1. propoſ. 10. lib. 13. diuidat & arcum C D, & latus C D, biſariam in G, & H; erit arcus C G, decima pars totius circunferentiæ,



rentiæ, ideoque recta ſubtenſa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla eſt rectę FG; erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratū rectæ AG, quadruplum quadrati rectę FG: Sunt autem quadrato rectę AG, æqualia quadrata rectarū 47. primi AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG; quadrupla ſunt quadrati rectæ FG; Atq; adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiuſdem rectæ FG. Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris 10. tertijde. uidelicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum ſemidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiuſmodi.

SI in ſphæra eadem cubus, & dodecaedrum inſcribantur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, utraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circunſcribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum unum Dodecaedri in quapiam ſphæra deſcripti; eritq; ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta AC, ſubtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. Perſpicuum eſt autem, quadrata rectarū AC, CD, lateris ſcilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla eſſe quadrati ſemidiametri FG, &c. 3. quartide.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

0.

3.

SI latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmētū erit latus decagoni eiuſdē circuli.

SECETVR AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, ſitque maius ſegmentum AC. Dico AC, eſſe latus decagoni eiuſdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiuſdem circuli; adiungaturq; in rectum ipſi A B; eritque tota compoſita B D, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuiſa in A, extrema ac media ratione, cuius *9. tertij dec.* maius ſegmentum B A: Ponitur autem & A B, ſecta in C, ſimiliter. Igitur erit ut B D, tota ad maius ſui ſegmentum A B, ita A B, *2. quarti de.* tota ad maius ſui ſegmentum A C: Sed eſt quoque ut B D, tota ad maius ſui ſegmentum A B, ita A B, maius ſegmentum ad A D, ſegmentum minus, per definitionem lineæ ſectæ extrema ac media ratione. Igitur erit ut A B, ad A C, ita eadem A B, ad A D; Ac propterea A C, A D, æquales erunt. Cum ergo A D, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni eſt A B; erit & A C, eiuſdē circuli latus decagoni.

ALITER. Adiungatur ipſi A B, in rectum recta A D, *5. tertij dec.* æqualis maiori ſegmento A C; eritq; tota recta B D, diuiſa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur A B, maius ſegmentum ipſius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli; erit, per ea, quę demonſtrauimus ad propoſ. 9. lib. 13. A D, minus ſegmentum eiuſdem circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipſi A D, latus erit decagoni in eodem circulo deſcripti, cuius A B, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat oſtendendum.

2.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5. IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptum & Dodecaedrum, cuius unum pentagonum B C D E F, & Icoſaedrum, cuius unum triangulum G H I. Dico eundē circulum circumſcribere & pentagonum B C D E F, & triangulum G H I, hoc eſt, circulos B C D E F, G H I, ipſa circumſcribentes eſſe æquales: Circumſcribatur enim circulus K L M N O, N O, pentagonum KLMNO, ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita ut quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoque quodlibet ipſorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectę PE, Q H, RM; Seceturq; RM, extrema ac media ratione in S; eritque maius ſegmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni. Subtendat quoque recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit, per coroll. 2. propoſ. 17. lib 13. latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiuſdem propoſ. B F, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi CF, ſecti extrema ac media ratione; erit ut tota CF, ad totã RM, ita BF, maius ſegmentũ ad RS, maius ſegmentum; Ac propterea ut quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ R M, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ R S; Atque adeo, per ea, quæ demonſtrata ſunt in ſcholio propoſ. 4. lib. 5. ut triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Eſt autem triplum quadrati rectæ CF, ęquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi C F, ex propoſ. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13 æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: Quia uero quadratum rectæ M N, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ R M, & quinque quadratis rectæ R S. Igitur & quinque quadrata rectæ M N, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ C F, (cum hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectę R M,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinq; quadratis rectæ R S. Sed quoniam, (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis ſemidiametri PE, ſint ęqualia;) tria quadrata re-

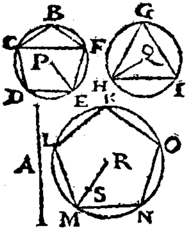
ctæ

16.tertijde

4.quartide.

2.quartide.

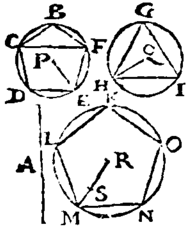
22.ſexti.



16.tertijde.

3.quartide

ctæ CF, & tria quadrata rectę BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri Q H; (Nam cū MN, æqualis ſit oſtenſa ipſi GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; ſit autem quadratū ipſius G H, 12. tertij de. æquale tribus quadratis ſemidiametri Q H; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectæ M N, æqualia quindecim quadratis rectę Q H.) Erunt quoque quindecim quadrata rectæ P E, æqualia quindecim quadratis rectæ Q H; ac propterea unū quadratum rectæ PE, uni quadrato rectæ QH, & idcirco ſemidiameter PE, ſemidiametro QH, æqualis. Quare circūli BCDEF, GHI, æquales ſunt: Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonſtrandū.



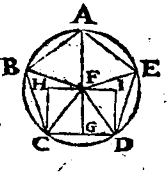
3. 6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Dodecaedri ſuperficiei æquale.

Ex centro F, circuli circumſcribentis pentagonum Dodecaedri A B C D E, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum contentum ſub FG, & CD, trigeſies ſumptum, eſſe æquale toti ſuperficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, reſolvetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. cum bina latera unius æqualia ſint binis lateribus aliorum, & baſis quoque unius baſibus aliorum æqualis.

qualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipſi CD, occurrens duabus perpendicularibus C H, D I, ductis ex C, D, ad C D, in punctis H, & I. Eritque rectangulum C I, contentum ſub H C, hoc eſt, ſub F G, & C D. Quoniam uero rectangulum C I, duplum eſt trianguli FCD, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipſi FCD, ęqualium; erit rectãgulũ CI, quinquies ſumptũ, æquale decem huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia ſint uni pentagono; Atque adeo ſextuplum rectanguli C I, quinquies ſumpti, nimirum rectangulum C I, ſumptum trigeſies, æquale quoque erit ſextuplo duorum pentagonorum, id eſt, duodecim pentagonis, hoc eſt, toti ſuperficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.



41. primi.

ALITER. Facta eadem figurę conſtructione, cum rectangulum C I, duplum ſit trianguli F C D, hoc eſt, æquale triangulo F C D, bis ſumpto; Erit rectangulum CI, trigeſies ſumptum æquale triangulo F C D, bis ſumpto trigeſies, hoc eſt, ſumpto ſexageſies; ac proinde toti ſuperficiei Dodecaedri. Cum enim unum pentagonum Dodecaedri conſtet quinque huiuſmodi triangulis, conſtabunt duodecim pentagona, nempe tota ſuperficies Dodecaedri, ſexaginta huiuſmodi triangulis. Ac idcirco triangulum F C D, ſumptum ſexageſies æqualis erit ſuperficiei Dodecaedri.

41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

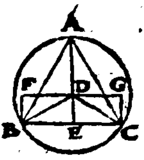
3.
7.

SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendicu-

lari

lari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſuperficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum ſub DE, & BC, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib 1. Sunt enim bina latera unius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis unius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipſi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritq; rectangulum BG, contentum ſub FB, hoc eſt, 41. primi. ſub DE, & BC. Quoniam uero rectangulum BG, duplum eſt rectanguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum rectangulorum ipſi DBC, æqualium: Erit rectangulũ BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint uni triangulo Icoſaedri.; Atque adeo idem rectangulum trigeſies ſumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter ſumpti, æquale erit uiginti triangulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.



ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ, cum 41. primi. rectangulum BG, duplum ſit trianguli DBC, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectangulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo DBC, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt uiginti triangula Icoſaedri, eo quod tria conficiunt unum. Igitur rectangulũ BG, trigeſies ſumptum æquale eſt toti ſuperficiei Icoſaedri.

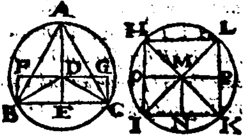
COROLLARIVM.

ITAQVE ſuperficies cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcun-

cuiuſcunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus. Cum enim ſuperficies Dodecaedri æqualis ſit illi rectangulo trigeſies ſumpto; 6.quartide Item ſuperficies Icoſaedri æqualis huic rectangulo trigeſies quoque ſumpto: 7.quartide Erit tam illud rectangulum trigeſima pars ſuperficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, ſuperficiei Icoſaedri: Quare erit ſuperficies dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, ut rectangulum illud, trigeſima uidelicet pars Dodecaedri, 15.quinti ad rectangulum hoc, trigeſimam ſcilicet partem Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

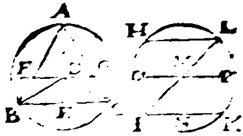
SCHOLION.

NON diſſimili argumento indagabimus ſuperficies reliquorum trium corporũ regularium, Tetraedri uidelicet, Octaedri, & cubi. Nam ſi ex centro circuli triangulum Tetraedri, uel Octaedri, ſiue quadratum cubi, circunſcribentis perpendicularis ducatur ad unum aliquod eorum latus; Erit, quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem ſumptum ſexies, ſuperficiei Tetraedri; In Octaedro uero, & cubo duodecies ſumptum ſuperficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC, circunſcriptum a circulo, cuius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, ut de triangulo Icoſaedri dictum eſt. 7.quartide *Dico rectangulum BG, ſexies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Tetraedri. Quoniam rectangulum BG, duplum eſt trianguli DBC,* 41.primi. *hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis; erit ipſum ſexies ſumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula conſtituant totam ſuperficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipſi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt unum; Erit rectangulum BG, ſexies ſumptum, ſuperficiei Tetraedri, ſeu Pyramidis æquale.*



SIT ſecundo idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Octaedri. Cum enim rectangulum BG, duplum ſit trianguli 41.primi.

DBC,



DBC, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies ſumptum æquale vigintiquatuor huiuſmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula conſtituunt octo triangula Octaedri, id eſt, totam ſuperficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt unum. Igitur rectangulum BG, duodecies ſumptum æquale eſt ſuperficiei Octaedri.

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex cẽtro M deſcribatur, & deducta MN perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, ut quadratum reſoluatur in quatuor triangula æqualia; Atq; per M, agatur OP, ipſi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum ſub OI, hoc eſt ſub MN, & IK, ſumptũ duodecies, æquale
41. primi. eſſe ſuperficiei cubi. Quoniam rectangulũ IP, duplum eſt triãguli MIK, hoc eſt, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies ſumptum æquale vigintiquatuor eiuſmodi triãgulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula conſtituant ſex quadrata, id eſt, totam ſuperficiẽ cubi, quod quatuor talia triãgula unum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies ſumptum æquale ſuperficiei cubi. Quod eſt propoſitum.

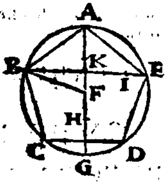
ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (ſunt.n. IP, PH, æqualia, cũ recta OI, ſit dimidiũ lateris HI, nẽpe æqualis ipſi MN) cõſtituẽt duodecim talia rectãgula ſex quadrata eiuſmodi, hoc eſt, totam ſuperficiẽ cubi.

4. 8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentũ ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinq; ſextis partibus lineæ ſubtendẽtis angulũ pentagoni æquilateri in eodẽ circulo deſcripti; æquale eſt dicto pẽtagono.

IN circulo, cuius centrũ F, deſcribatur pentagonũ æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in qua tuor æquales partes, quarum tres ſint A H: Angulum uero A, ſubtendens recta BE, ſecetur in ſex partes æquales, quarũ quinq; ſint BI, & una IE, ita ut BI, ſit quintupla ipſius I E. Dico rectangulum comprehenſum ſub AH, BI, æquale eſſe pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, continet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum ſit ſemidiameter; erit AH, ipſius A F, ſeſquialtera. Quia uero recta F A, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propoſ. 10. lib. 13. in puncto K; continebit tam KB, quam K E, tres ſextas rectæ B E; atq; adeo cum BI, cõtineat quinq;, continebit KI, duas; Ac proinde & K B, ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobrẽ erit ut A H, ad A F, ita KB, ad KI; atq; idcirco rectangulum ſub extremis A H, K I, æquale erit rectangulo ſub medijs AF, K B. Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli A B F, cum rectangulum; & triangulum eandem habeant baſin AF, & eãdem altitudinem BK, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas cõſtituta. Igitur & rectãgulum ſub AH, KI, duplum erit eiuſdẽ triãguli ABF: Eſt aũt & rectãgulũ ſub AH, KI, duplũ rectãguli ſub AH, IE; propterea qđ & baſis KI, dupla ſit baſis IE, (cõtinet. n. KI, duas ſextas partes ipſius BE, & IE, unã.) eadẽq; ſemꝑ altitudo AH. Igit' æqualia ſunt triãgulũ ABF, & rectãgulũ ſub AH, IE; ideoq; & eorũ quintupla æqualia erũt. At uero pẽtagonũ ABCDE, quĩtuplũ ẽ triãguli ABF, qđ pẽtagonũ in quinq; huiuſmodi triãgula reſoluat', ductis rectis e cẽtro F, ut ꝓpoſ. 6. huiꝰ lib. docuimꝰ; Rectãgulũ uero ſub AH, BI, quintuplũ eſt rectãguli ſub AH, IE, qđ & baſis BI, quintupla ſit baſis IE, eadẽq; ſemꝑ altitudo AH. Igit' pentagonũ ABCDE, & rectãgulũ ſub AH, BI, æqualia ſũt. Rectãgulũ ergo cõtẽtũ ſub tribꝰ, &c. Quod erat demonſtrãdũ.



16. ſexti.

41. primi.

1. ſexti.

1. ſexti.

COROLLARIVM.

QVONIAM uero, ſi pẽtagonum ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri *in aliqua ſphera deſcripti; BE, eſt latus cubi in eadẽ ſphæra deſcripti*, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & unũ latus triãguli Icoſaedri in eadẽ ſphæra cõſtituti, (comprehenſi uidelicet eodem circulo, quo & pentagonũ Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H.

5. *quarti de.*

(cum

(cum ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum F G, biſariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, biſariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad unum eius latus ducta; nempe ſub AH, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, nimirũ ſub B I, æquale eſſe pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

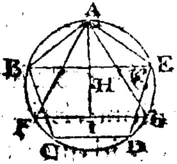
4. 8.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

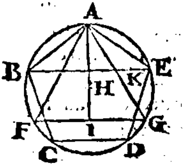
5. quarti de, IN circulo ABCD, circumſcribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icoſaedri, ſit latus pentagoni BD, & trianguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, per-
3. tertij. pendiculares EF, EG, ſecabunturque AD, BD, biſariam; & EG, protracta ſecabit quoque arcum BD, biſariam in C, ex coroll. 1. propoſ. 1. huius lib. atque adeo connexa recta C D, latus erit decagoni eiuſdem circuli. Sit denique H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe ut H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri; ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam lateris cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, ſectæ quoque extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt EF, ex coroll. propoſ. 2. huius lib. Erit, ut H,
2. quarti de, tota ad BD, maius ſui ſegmẽtum, ita EG, tota ad EF, maius
16. ſexti. ſui ſegmentum; Ac proinde rectangulum ſub extremis H, EF, æquale erit rectangulo ſub medijs BD, EG. Quia uero
1. ſexti. eſt, ut H, ad AD, ita rectangulum ſub H, EF, ad rectangulum ſub A D, E F, cum baſes ſint H, A D, altitudo uero ſemper eadem EF; Erit quoque ut H, ad AD, ita rectangulum ſub

ſub B D, E G, (quod oſtenſum eſt æquale rectangulo ſub H, E F,) ad idem rectangulum ſub A D, E F. Quare cum, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. ſit, ut rectangulum ſub B D, E G, ad rectangulum ſub A D, E F, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoque, ut H, latus cubi, ad A D, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

ALITER. Circumſcribat pentagonum Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cu- 5.quartide.
ius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13, diuidet latus F G, biſariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextæ partes ſint B K. Dico rurſus eſſe, ut B E, latus cubi ad FG, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam rectangulum ſub A I, B K, æquale eſt pentagono ABCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub A I, I F, æquale eſt triangulo A F G, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1, cum F G, baſis trianguli dupla ſit ipſius I F, baſis rectanguli: Erit ut rectangulum ſub A I, B K, ad rectangulum ſub A I, I F, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum A F G: Eſt autem ut rectangulum ſub A I, B K, ad rectangulum ſub A I, I F, ita B K, ad I F, cum baſes ſint B K, 1. ſexti.
I F, & altitudo eadem ſemper A I. Erit igitur quoque ut pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad I F, Ac proinde, (ſi primum, & tertium; nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, æquemultiplicentur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulū A F G, & recta I F, æquemultiplicentur per numerum 20.) erit quoque ut pentagonum ABCDE, duodecies ſumptū, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, uigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiē Icoſaedri, ita recta B K, 4. quinti.
duodecies ſumpta ad rectam I F, uigeſies ſumptam: Atqui recta B K, duodecies ſumpta æquiualet lateri cubi B E, decies ſumpto; (Nam cum B K, contineat quinque ſextas par



tes ipſius BE; continebit eadem BK, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE.)



Recta uero IF, uigeſies ſumpta æqualis eſt lateri Icoſaedri FG, decies ſumpto (eo quod FG, ſit ipſius IF, dupla.) Erit igitur ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiẽ Icoſaedri, ut latus cubi BE, decies ſumptum ad latus Icoſaedri FG, decies ſumptum; Ac propterea, cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quã unũ latus cubi ad unum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, ut latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

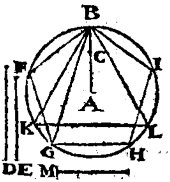
15.quinti

4.
9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione; Erit ut recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori ſegmento, ad rectam potentẽ id, quod a tota, & id quod a minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icoſaedri in ſphæra eadem cum cubo deſcripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus deſcribatur, in quo conſtituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triãgulum ęquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius ſphęræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Quoniam uero AC, maius ſegmentum ſemidiametri AB, ſectæ extrema ac media



dia

dia ratione, eſt latus Decagoni in circulo B F G H I, in quo 4. quarti de.
nimirum A B, latus eſt Hexagoni; poterit B F, latus pentagoni
& totam A B, latus uidelicet hexagoni, & maius ſegmentum 10. tertijdec.
A C, latus ſcilicet Decagoni in eodem circulo. Poſſit
iam & recta M, totam A B, & minus ſegmentum B C,
per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Dico
ſic eſſe D, latus propoſitum cubi ad E, latus propoſitum Icoſaedri,
ut eſt B F, potens totam A B, & maius ſegmentum
A C, ad M, potentem totam A B, & minus ſegmentum
B C. Quoniam quadratum lateris trianguli æquilateri
B K, triplum eſt quadrati ſemidiametri A B: Item quadrata 12. tertijdec.
rectarum A B, B C, tripla ſunt quadrati rectæ A C; Erit 4. tertijdec.
ut quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ A B, ita
quadrata rectarum A B, B C, hoc eſt, quadratum rectæ M,
ipſis æquale, ad quadratum rectæ A C. Vtrobique enim
proportio eſt tripla. Permutando ergo erit, ut quadratum
rectæ B K, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ
A B, ad quadratū rectę A C: Eſt autem ut quadratum rectæ
A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad
quadratum rectæ B F. (Nam cum rectæ B G, ſectæ extrema
ac media ratione, maius ſegmentum ſit B F, ex coroll.
1 propoſ. 17. lib. 13, eo quod B G, eſt latus cubi, & B F, latus Dodecaedri
eiuſdem ſphæræ; Erit ut tota A B, ad maius ſegmentum
A C, ita tota B G, ad maius ſegmentum B F. Ac 2. quarti de.
proinde ut quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, 22. ſexti.
ita quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F.) Igitur
erit quoque, ut quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ
B F, ita quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ M: Et
permutando, ut quadratū rectę B G, ad quadratū rectæ B K,
ita quadratum rectæ B F, ad quadratū rectæ M; Ac propterea
erit ut recta B G, ad rectam B K, ita recta B F, potens totam 22. ſexti.
A B, & maius ſegmentum A C, ad rectam M, potentem
totam A B, & minus ſegmentum B C. Cum igitur propoſita
latera D, E, cubi, & Icoſaedri, eandem habeant proportionem,
quam rectæ B G, B K, ut mox oſtendemus; perſpicuum
eſt, ut ſe habet recta B F, potens totam A B, & maius
ſegmentum A C, ad rectam M, potentem totam A B, & minus
ſegmentum B C, ita ſe habere propoſitum cubi latus D,
ad Icoſaedri propoſitum latus E. Si recta itaq; linea ſecetur

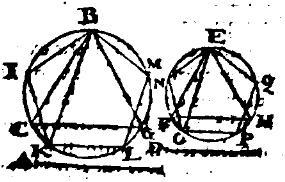
extrema ac media ratione, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

QVOD vero propoſita latera cubi & Icoſaedri D, & E, eiuſdem ſphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK; demonſtrabimus hoc propoſito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ: Item D, latus cubi, & EF, latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra. Dico eſſe vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icoſaedrorum BCG, EFH, & circa ipſa deſcriptis circulis, deſcribantur in his circulis pentagona æquilatera BIKLM, ENOPQ, connectanturque rectæ BK, CK, EO, FO. Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum eiuſdem ſphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipſo ſphæra deſcripti; Ac propterea, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiuſdem ſphæræ, ideoque ipſi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rurſus quia arcus BIK, ENO, ſimiles ſunt; (Nam vterque continet duas quintas partes ſuæ circumferentiæ.) Item arcus BMLK, EQPO; (vterque enim tres quintas partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione ſegmentorum ſimilium, æquales inter ſe; quam anguli BKC, EOF, inter ſe, vtpote illi, quam hi, in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtentes: Ac proinde, ex coroll. 1. propoſ.



5. quartide.

32.

32. lib. 1, reliquus angulus C B K, trianguli BCK, reliquo angulo F E O, trianguli EFO, equalis erit, & totum triangulum B C K, toti triangulo EFO, equiangulum. Quare erit, ut BK, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icoſaedri, ita E O, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad EF, latus Icoſaedri. Quod erat propoſitum.

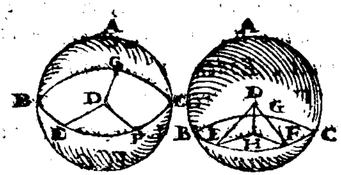
PERSPICVVM eſt igitur id, quod in demonſtratione aſſumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icoſaedri in una ſphæra, quam habent B G, B K, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.

Ex hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, ut vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.

LEMMA I.

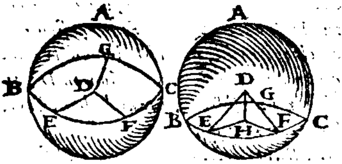
SI ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.

SECETVR ſphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem ſectionem planam B E F C G. Dico B E F C G, eſſe circulum. Transeat enim primo planum ſecans per centrum ſphæræ, ita ut centrum D, ſit in plano, ſeu communi ſectione BEFCG; ducanturque ex D, centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ quotcunque D E, D F, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales ſunt, ex definitione ſphæræ, cum ex eius centro ad ſuperficiem cadant; erit figura plana



B E F C G, unica linea contenta, circulus, eiuſque centrum D, idem cum centro ſphæræ.

TRANSEAT *ſecundo planum ſecans non per centrum ſphæræ: Ducatur autẽ ex D, centro ſphæræ ad planum ſecans perpendicularis DH, emittaturq; ex H, rectæ utcunque HE, HF, ad extremitatem uſq; communis ſectionis; & connectantur rectæ DE, DF.*



Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti ſunt; erit tam quadratum rectæ DE, 47. primi. *quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ AE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento oſtendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis ſectionis cadentes eſſe æquales & inter ſe, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, unica linea contenta, circulus erit; eiuſque centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

ITAQVE ſi planum ſecans tranſierit per centrum ſphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod ſphæra. Si uero planũ

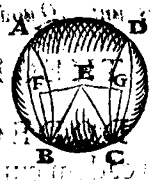
ſecans

ſecans per ſphæræ centrum non tranſierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam ſphæra; illud uidelicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum ſectionis ducta. Nam ſemper demonſtrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circunferentiam circuli eſſe æquales, ut perſpicuum eſt.

LEMMA II.

CIRCVLI in ſphæra æquales, æqualiter diſtant a centro ſphæræ: & circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæræ, æquales ſunt.

In ſphæra ABCD, *cuius centrum* E, *ſint circuli æquales* AB, DC. *Dico ipſos æqualiter à centro* E, *diſtare. Ducantur enim ex* E, *ad eorum plana perpendiculares* EF, EG; *quæ per coroll. præcedentis lemmatis in ipſorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ* FB, GC, *ad circunferentias circulorum utcunque, connectanturque rectæ* EB, EC. *Quoniam igitur anguli* EFB, EGC, *recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ* EB, *quadratis rectarum* EF, FB, *quam quadratum rectæ* EC, *quadratis rectarum* EG, GC, *æquale: Sunt autem quadrata rectarum* EB, EC, *æqualium, cum cadant ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum* EF, FB, *quadratis rectarum* EG, GC, *æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium* FB, GC, *cum ſint ſemidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ* EF, *reliquo quadrato*



47. primi

rectæ EG, æquale; Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, *DC, æqualiter diſtant à centro E.*

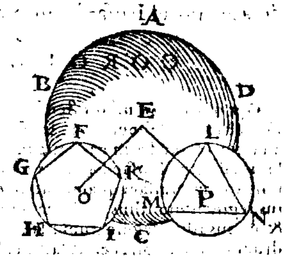
S E D iam æqualiter diſtent circuli A B, D C, *a centro ſphæræ E.* Dico *ipſos eſſe æquales. Conſtructa enim figura, ut prius, oſtendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia eſſe quadratis rectarũ EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur diſtare a centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, ſemidiametri ſcilicet circulorum* A B, *DC.* Circuli *igitur* A B, *DC, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.*

4.
10.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrũ in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt ut cubi latus ad latus Icoſaedri, in una eademque ſphæra.

I N ſphæra ABCD, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius unum pentagonum F G H I K: Item Icoſaedrum, cuius unum triangulum L M N. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, ut latus cubi ad latus Icoſaedri, in una eademque ſphæra, ſiue hæc eadem ſit, quæ ſphæra A B C D, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæræ tangunt; ſi per pentagonum, & triangulum plana ducantur; efficientur, per ſcholium præcedens, duo circuli in ſphæra F G H I K, L M N, L M N; comprehendentes pentagonum, & triangulum. Quia uero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, 5. hu. & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli F G H I K, L M N; Ac propterea per lemma 2. præcedens, ęqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erũt.



Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pẽtagona Dodecaedri, & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in 12. pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, ęquales inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 12. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarum altitudines ęquales erunt altitudinib⁹ pyramidum Dodecaedri. Quoniam autem est, ut basis FGHIK, ad basin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, 6. duodec. cum utriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 4. lib. 5 demonstrauimus, ut duodecim bases Dodecaedri, tota uidelicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursus quia est, ut tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem L M N E; erit, per idem scholion, ut tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrũ ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiẽ, ut cubi latus ad Icosaedri latus eiusdẽ cũ ipsis sphæræ; 9. quartidec. atque adeo, ex scholio propos. 10. huius lib. ut latus cubi ad bi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ unius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, ut latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandū.

COROLLARIVM.

QVONIAM uero oſtenſum eſt quoque, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, ut latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra: Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri unius eiuſdemque ſphæræ, ut eſt lineæ potens totam diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, ut latus cubi ad latus Icoſaedri in una eademque ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei Dodecaedri, ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcumque ſectā extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphære, eſſe inter ſe æquales.

9.quartide.

10. quartidecimi.

11. quartidecimi.

O.

I I.

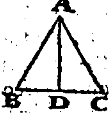
THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab uno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum B C, perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A B, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis A D. Quoniam ob æqualitatem laterum A B, A C, anguli B, & C, æquales ſunt, & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli A D B, æquales duobus angulis C, & D, trianguli A D C; habent autē & latus A D, commune, uel A B, A C, æqualia: Igitur & reliqua latera B D, C D, æqualia ſunt; ac propterea latus B C, hoc eſt, latus A B, duplum rectæ B D; & idcirco

5.primi.

26.primi



tirco quadratum lateris A B; quadruplum quadrati rectæ B D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Cum igitur quadrato rectæ AB, æqualia ſint quadrata rectarum A D, B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, quadrupla quadrati rectæ B D; Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, uel quadrata rectarum A D, B D, talium 1. erit quadratum rectæ B D, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ A D. Quare quadratum rectæ A B, partium 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ A D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat. 47. primi.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex uno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt B D, & C D, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus B C, ſecari bifariam a perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & baſis BD, baſi CD, æqualis; Erũt & anguli BAD, CAD, æquales, id eſt, angulus BAC, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari A D. 8. primi.

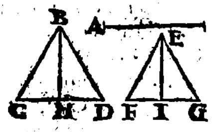
THEOR. 13. PROPOS. 13.

o.

13.

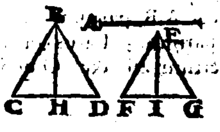
SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.

SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediã. Sit enim BCD, unum triangulũ Tetraedri, & EFG, Octaedri illius ſphærę, ducaturq; ex angulis B, & E, ad latera oppoſita CD, FG, perpendiculares BH, EI. Quoniã igitur quadratũ diametri A, ſeſquialterũ eſt quadrati lateris Tetraedri



BC, & duplũ quadrati lateris Octaedri E F; habebũt quadrata rectarũ A, BC, EF, proportionẽ, quã numeri 6. 4. 3. ideoq; commenſu- 13. tertijdec 14. tertijdec

6. decimi. commenſurabilia erunt. Quare & lineæ ipſæ A,BC,EF,cō-
menſurabiles exiſtent, ſaltem potentia; Atque adeo, cum
A,ponatur Rationalis,erunt quoque Rationales BC,EF;&
idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH,F I.



RVRSVS, quia tam quadratum rectæ BC,quadrati re-
12. quartidecimi. ctæ B H, quam quadratum rectę E F, quadrati rectæ E I,
ſeſquitertium eſt; habebunt tam
quadrata rectarum BC,BH, quā
quadrata rectarum E F,E I,pro-
portionem inter ſe,quam numeri
4,3.ideoque tam illa, quam hæc
6. decimi. inter ſe commenſurabilia erunt.
Quare & tam lineę ipſæ BC,BH,
quam lineę E F,EI,commenſurabiles exiſtent. Eſt autem
& tam C H,ipſi BC,quam FI, ipſi EF,dimidia uidelicet to-
ti,commenſurabilis. Igitur & tam B H, C H, quam E I,
12. decimi F I,commenſurabiles inter ſe erunt; Ac proinde,cum CH,
& F I, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoque B H, E I,
Rationales. Quoniam uero tam C H,B H, quam FI,EI,
9. decimi. longitudine ſunt incommenſurabiles,quod earum quadra-
ta non habeant proportionem, quam numerus quadratus
ad numerum quadratum; (ut conſtat ex coroll. propoſ.
24.lib.8.Habent enim proportionem,quā 1,ad 3,cum oſten-
12. quartide ſum ſit talium partium 1.eſſe tam C H, quam F I,qualium
3,eſt tam B H,quam E I.) Erunt tam C H,B H,quam F I,
E I, Rationales potentia tantum commenſurabiles: Ac pro-
22. decimi. inde tam rectangulum ſub C H, B H, Rationalibus poten-
tia tantum commenſurabilibus, quam rectangulum ſub FI,
E I, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus con-
tentum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG,
æqualia rectangulis ſub C H,BH, & ſub F I, E I, ex ſcholio
propoſ.41. lib.1.cum baſes triangulorum C D, E G, dupla
ſint baſium rectangulorum C H, F I. Igitur & triangula
BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota ſuperficies
Tetraedri triangulo BCD, ſit commenſurabilis; (eſt enim
triangulum B C D,totius ſuperficiei quarta pars.) Item to-
ta ſuperficies Octaedri triangulo E F G, commenſurabilis;
(Eſt enim triangulū E F G, totius ſuperficiei quarta pars.)
Erunt quoque, ex coroll. propoſ. 24.lib.10.ſuperficies Te-
traedri,

traedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphæræ diameter fuerit Rationalis, &c. Quod erat oſtendendum.

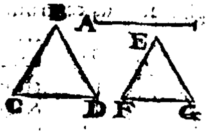
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſitionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea rectangula ſub CH, BH, & ſub FI, EI, hoc eſt, triangula BCD, EFG, ipſis æqualia, eſſe Media. Cum igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius unum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.

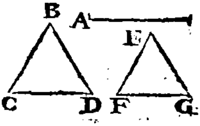
SIT ſphæræ diameter A, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulum BCD; Octaedri uero baſis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, ſeſquitertium eſſe trianguli EFG; At uero ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialteram ſuperficiei Tetraedri. Quoniam quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri CD; duplum uero quadrati lateris Octaedri FG; ſit, ut qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. ſit quadratum lateris CD, & talium 3. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ FG. Ut autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita eſt triangulum BCD, ad triangulum EFG. (quia tam



13. tertijdec.

14. tertijdec.

10. & 19. ſexti. tam quadrata, quam triangula proportionem inter ſe habent laterum CD, FG, duplicatam, cum ſint ſimilia.) Igitur & triangulum BCD, ſeſquitertium eſt trianguli E F G.



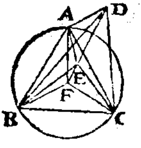
Rvrsvs, quoniã oſtenſum eſt triangulũ BCD, ſeſquitertiũ trianguli EFG; Ac propterea qualium partiũ 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. eſſe triangulũ EFG; Efficitur, ut triangulũ EFG, octies ſumptũ, hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earundem partium 24; At triangulũ BCD, quater ſumptum, id eſt, tota ſuperficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

o. 15.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtque perpendicularis ad dictam baſim.

Sit Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, D A B, D B C, D C A, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E, centrum ſphæræ recta D E F, incidens in baſim A B C, circulo inſcriptam, ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis ABC, & D F, perpendicularem eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ baſis rectis E A, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, E B, E C, ductæ ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem, æquales ſunt; erunt duo latera E A, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus



bus E C, B D, trianguli C E D; Sunt autem & baſes A D, C D, æquales, cum ſint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli A E D, C E D, æquales erunt; *8.primi.* Ac proinde & reliqui A E F, C E F, æquales erunt, eo quod tã A E D, A E F, quam C E D, C E F, duobus rectis æquiualeant. *13.primi.* Eadem ratione æquales erunt anguli B E F, C E F, ſi conſiderentur triangula B E D, C E D. Quoniam igitur latera E A, E F, trianguli E A F, ęqualia ſunt lateribus E C, E F, trianguli E C F; & anguli ipſis contenti, oſtenſi æquales; Erunt baſes F A, F C, æquales. *4.primi.* Sic quoque æquales erunt F B, F C, ſi conſiderentur triangula E B F, E C F. Quare cum tres rectæ F A, F B, F C, ex F, in circunferentiam circuli cadentes ſint æquales; erit F, centrum baſis A B C, ſeu circuli *9.tertij.* eam circunſcribentis.

QVIA uero, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſphæræ ad planum circuli A B C, demiſſa in centrum circuli cadit; efficitur, ut recta D E, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis ſit ad planum circuli, ſeu baſis Tetraedri A B C. Nam ſi alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque ſit demonſtratum centrum eiuſdem circuli, haberet unus idemque circulus duo centra: quod eſt abſurdum. *Recta igitur linea ex angulo quouis, &c.* Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

O.
16.

OCTAEDRVM in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis uero utriuſque eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentũ octo triangulis ęquilateris & ęqualib⁹ EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in ſphęra deſcriptũ, cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides ęquales & ſimiles ęqualium altitudinum, quarum baſis communis eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphęrę. Ductis enim ex G, centro ſphęrę ad omnes angulos rectis lineis G A, G B, G C, G D, G E, G F, quę ęquales ſunt, cum ſint ſemidiametri ſphęrę ductę uidelicet e centro ad ſuperficię ſphęræ:

14. tertijdec. quoniam quadratum diametri ſphęrę duplum eſt quadrati lateris Octaedri A B; & quadruplum quadrati ſemidiametri A G, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri ſphęrę, talium partium 2. erit quadratum rectę A B, & talium partium 1. quadratum rectę A G; Ac proinde quadratum rectę A B, duplum erit quadrati rectę A G. Cum ergo quadratum rectę A G, ęquale ſit quadrato rectę B G; erit quadratum rectę A B, ęquale duobus quadratis rectarum A G, B G; Ac propterea angu- *48. primi.* lus AGB, rectus erit. Non aliter oſtendentur reliqui anguli AGD, DGC CGB, recti. Quam ob rem A G, C G, & *14. primi.* BG, DG, in rectū erunt coniunctę; atque adeo rectę A C, *2. undec.* BD, ſeſe ſecantes in G, in uno exiſtent plano; Ac propterea *7. undec.* rectę earum extrema connectentes AB, BC, C D, D A, in eodem plano erunt cum ipſis. Quare quadrilaterum ABCD, in uno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrum in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum baſis communis ABCD, uertices uero E, & F; quę pyramides ęquales ſunt & ſimiles, ex defin. 10. lib. 11. cum quęlibet conſtet ex quatuor triangulis ęquilateris Octaedri, quę ęqualia ſunt & ſimilia, & baſi communi ABCD. Dico iam earum altitudines eſſe ęquales, & baſin ABCD, eſſe quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphęrę. Quoniam oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri A B, ęquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum AG, EG; erit quoque quadratum lateris A E, ęquale duobus quadratis ſemidiametrorū A G, *48. primi.* E G; Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, ſe mutuo ſecantibus in G, ad rectos *4. undec.* angulos inſiſtit, ipſa recta erit ad planum ABCD, per rectas A G, D G, ductum, nempe ad baſin pyramidum. Quare E G, altitudo eſt pyramidis A B C D E. Similiter oſtendemus F G, altitudinem eſſe pyramidis A B C D F. Cum ergo

ergo EG, FG, ſint ſemidiametri ſphæræ æquales, perſpicuũ
eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus
quia A C, eſt diameter ſphæræ; erit eius quadratum duplũ 14.tertijde.
quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadra-
tis laterum A D, DC. Quare angulus ADC, rectus eſt: Eo- 48.primi.
dem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare
quadrilaterum A B C D, rectangulum eſt: Sed & æquilate-
rum, cum eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum
eſt; quod cum ſit deſcriptum ex latere octaedri AB, conſtat,
ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Octaedrũ 14.tertijde.
ergo in ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

MVLTO breuius hanc propoſitionem demonſtrauimus in coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa uidelicet conſtructione octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur a Campano, non habita ratione conſtructionis Octaedri, uiſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

0.
17.

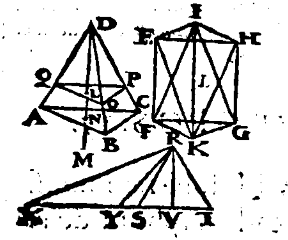
TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, ut rectangulum ſub linea potente uigintiſeptẽ ſexageſimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum ad quadratum diametri ſphæræ.

VEL, ut Campanus loquitur.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, ut rectangulum ſub linea, quæ potentia eſt ſubſeſquitertia triū quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente uigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphæræ.

SIT Tetraedrum ABCD, & octaedrum EFGHIK, in una eademque ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter ſphæræ DM, incidens in baſin ABC, ad pūctum N. Erit igitur N, centrū baſis ABC, & DN, perpendicularis ad eādem baſin. Quia uero pars diametri LN, inter centrum ſphæræ & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia pars ſemidiametri, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit DL, ſemidiameter taliū partium 3. qualium 1. eſt LN; Ac propterea DN, talium 4. Ducatur deinde, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum plano ABC; eruntque rectæ QO, OP, PQ, parallelæ rectis AB, BC, CA; Ac propterea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC; cum anguli illius æquales ſint angulis huius, ſinguli ſingulis: At ABC, eſt æquiangulum, ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propoſ. 6. lib. 1. ideoque ſimile ipſi ABC: Sunt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris ſimilia, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, ſimiles ſunt, ex defin. 9. lib. 11. Rurſus quia plana parallela ABC, QOP, ſecāt rectas DN, DC, proportionaliter; erit ut DN, ad DL, ita DC,

15. quartidecimi.



16. undec.

10. undec.

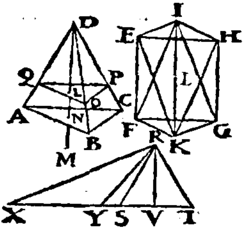
17. undec.

DC,ad DP: Erat autem DN,ad DL,ut 4 ad 3.(cum oſtēſum
ſit DN,eſſe talium partium 4. qualium 3.eſt DL.)Igitur
& DC,ad DP,erit ut 4.ad 3. Ac proinde, cum pyramides
ſimiles habeant proportionem laterum triplicatam; erit *8.duodec.*
pyramis ABCD,ad pyramidem QOPD, ut 64. ad 27. hæc
enim proportio triplicata eſt proportionis 4.ad 3.ut conſtat
in his numeris 64 48. 36. 27. Nam hi numeri ſunt minimi
in proportione 4.ad 3.ut conſtat ex 2.propoſ. lib. 8. Rurſus
quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; *20. ſexti.*
erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, ut
64.ad 36.ut in ijſdem numeris conſtat.

SIT iam triangulum æquilaterum RST,æquale triangulo
DQP;demittaturq; ex R,ad ST,perpēdicularis RV.
Eritq; latus RT,hoc eſt, DP, illi æquale, potentia ſeſquitertium *12. quarti*
perpendicularis RV.Ac proinde qualium partium 36. *decimi.*
fuit quadratum rectæ DP, talium 27.erit quadratum rectæ
RV: Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ
DC.Igitur linea RV, eſt potens uigintiſeptem ſexageſimas
quartas partes quadrati lateris tetraedri.

RVRSVS extenſa TS,fiat TX,ad TS,ut 64.ad 27. ex
coroll.propoſ.6.lib.10.diuidaturq; TX,bifariam in Y,ut ſit
TY,taliū partiū 32.qualiū 27.eſt TS, ſeu illi æqualis DP.
Quoniā uero proportio DC,ad DP,erat,ut 4.ad 3.nempe
ſeſquitertia;erit DC,taliū partiū 36.qualiū DP,eſt 27.(proportio
enim 36.ad 27.eſt ſeſquitertia) Ac propterea qualiū
patiū TY,eſt 32. Quare linea TY, cōtinet octo nonas partes
lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrū ABCD,
ad octaedrū EFGHIK,ut rectangulū contentū ſub recta
RV,(quæ poteſt uigintiſeptē ſexageſimas quartas partes
quadrati lateris DC) & ſub recta TY, (quæ cōtinet octo nonas
partes eiuſdē lateris) ad quadratū diametri ſphęrę DM.

CVM enim ductis rectis RX, RY; triangulum RTX, duplum *1. ſexti.*
ſit trianguli RTY; quod & baſis TX, dupla ſit baſis
TY: Eſt autem & rectangulum ſub RV, TY; duplum *41. primi.*
eiuſdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale
rectangulo ſub RV, TY. Ac propterea erit ut triangulum
RTX,ad triangulum RST,ita rectangulū ſub RV, *7. quinti.*
TY,ad idem triangulū RST: Eſt autem triangulum RTX,
ad triangulum RST, ut baſis TX, ad baſin ST, nimirum *1. ſexti.*



ut 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub R V, T Y, ad triangulum RST; hoc eſt, ad triangulum DQ P, ſiue Q O P, ſibi æquale, erit, ut 64. ad 27. Fuit autem & pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, ut 64. ad 27. Erit ergo ut rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidē QOPD: At uero ut triangulū QOP, ad quadratum diametri ſphęrę DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nam cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoque erit ad planū QOP, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque ſphærę ſemidiameter DL, altitudo erit pyramidis, ſeu tetraedri QOPD: Octaedrum autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum baſis communis quadratum EFGH, dimidium quadrati diametri ſphæræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphęrę LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. erit ut baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidem EFGHI; Ac propterea, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 4. lib. 5. oſtendimus, ut baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc eſt, ad Octaedrū EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, ut rectangulum ſub R V, potente uiginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis, ſeu tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo ſphęræ impoſitum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

16. quartidecimi.

SCHOLION.

QVONIAM uero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP; continebit DP, ſeu illi æqualis RT, tres quartas par-

tas partes lateris tetraedri DC *: Ac proinde, cum recta RT, ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV; erit RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, nempe trium quartarum partium lateris Tetraedri. Rurſus quia TY, fuit talium partium 32. qualium 27. ST, ſeu DP; (tres uidelicet quartæ partes lateris tetraedri.) erit TY, ſuperquintupartiens uigeſimas ſeptimas partes ipſius S* T, *nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare conſtat, eſſe quoque tetraedrum A* B *CD, ad octaedrum* EFGHIK, *ut rectangulum ſub RV, quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, quæ ſuperquintupartiens eſt uigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, ut uolebat Campanus.*

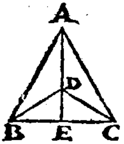
12. quartidecimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

0.
17.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico AE, triplam eſſe rectæ DE, quæ ſcilicet perpendicularis eſt e centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum latera DA, DB, trianguli ADB, æqualia ſint lateribus DB, DC, trianguli BDC; e centro enim ducuntur; ſit autem & baſis AB, baſi BC, æqualis: Erunt triangula ADB, BDC, æqualia ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare, ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum eſt trianguli BDC. Quoniam uero rectangulum ſub AE, EB,



triangulo ABC;& rectangulũ ſub DE, EB, triãgulo BDC,
æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1; cũ baſis triãguli BC,
dupla ſit baſis BE, utriuſq; rectanguli: Erit quoq; rectangu
lum ſub AE, EB, triplum rectanguli ſub DE, EB: Eſt autẽ
ut rectangulum ſub AE, EB, ad rectangulum ſub DE, EB,
1. *ſexti.* eiuſdem altitudinis EB, ita baſis AE, ad baſin DE. Igitur &
AE, tripla eſt ipſius DE. Linea ergo perpendicularis ex quo
libet angulo, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliquæ rectæ AD, inter angulum, & cẽtrum comprehenſæ. Cum enim AE, tripla ſit ipſius DE; qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, ſeſquialtera erit ipſius AD.

Ex quibus rurſus fit, rectam AD, rectæ DB, duplam eſſe.

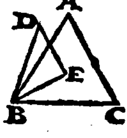
0.

17.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum ſphæræ inſcribatur; erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunq; octaedri deducitur.

SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrum D, deſcripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro ſphæræ D, perpendicularis demittatur DE; ducaturq; ſemidiameter ſphæræ DB. Dico ſemidiametrum DB, potẽtia triplam eſſe perpẽdicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum ABC, circũ



ſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli.
Ducta igitur recta BE; quoniam qua-
14. *tertij de.* dratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris octae-
dri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ DB,
ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri
partium 12. erit quadratum lateris AB, 6, & quadratum ſe-
midiame

midiametri ſphærę DB, 3. Quia uero quadratũ lateris A B, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triãgulum ambientis, rectæ ſcilicet B E; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare cum quadratum rectę D B, æquale ſit quadratis rectarũ BE, DE; ſit autem quadratum rectæ DB, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ D B, triplum eſt quadrati rectæ D E. Si igitur octaedrum ſphęræ inſcribatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

12. tertij de.

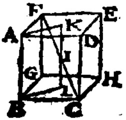
47. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

0.
18.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, æqualē eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: Perpendicularis autem a centro ſphæræ in aliquam baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.

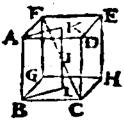
Sit cubus ABCDEFGH, in ſphæra deſcriptus, cuius centrum I, ex quo I K, perpendicularis ducatur ad unam baſin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri ſphæræ æquale eſſe ſuperficiei cubi; & perpendicularem I K, æqualem eſſe dimidio lateris cubi. Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, hoc eſt, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiuſdem quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti æquale ſex quadratis cubi, id eſt, toti ſuperficiei cubi.



15. tertij de.

PRODVCTA autem K I, ad baſin oppoſitam B C H G, vſque in punctum L; cum K L, recta ſit ad planum A E, recta quoque erit ad planum B H, illi parallelum, per ſcholion propoſ. 14. lib. 11. Rurſus, quia A B, K L, parallelæ ſunt, quod rectæ ſint ad planum AE;

6. undec.



ducatur per ipſas planum faciens in planis oppoſitis parallelis **A E, B H**, communes ſectiones, lineas rectas **A K, B L**, 16. *undec.* quæ parallelæ quoque erunt inter ſe; Ac propterea parallelogrammum erit A B L K; atque adeo recta A L, æqualis lateri cubi A B. Quoniam uero perpendicularis K L, e centro ſphæræ I, cadit in baſes **A E, BH**, ad puncta K, & L; erunt K, & L, centra circulorum dictas baſes ambientium in ſphæra, per coroll. lemmatis 1. propoſ. o. huius lib. Quare K L, in centro I, bifariam ſecabitur a dicta diametro CF, ut in coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. oſtendimus; Ac propterea, cum K L, oſtenſa ſit æqualis lateri cubi, erit I K, dimidium eiuſdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM

Ex dictis colligitur, ſolidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum cõprehendentis, æquale eſſe cubo. Cum enim quadratum diametri 15 tertijde. ſphęræ triplum ſit quadrati lateris cubi; erunt duo quadrata A E, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri ſphęrę: Perſpicuum autem eſt, ſolidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiã 31. *undec.* partem quadrati diametri ſphærę, æquale eſſe ſolido, quod fit ex I L, dimidio lateris cubi in B H, terniam partem quadrati diametri ſphæræ, eo quod dicta ſolida habeant & baſes, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo ſolida compleant totum cubum, manifeſtum eſt, id, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ, ęquale eſſe toti cubo. Quod eſt propoſitum.

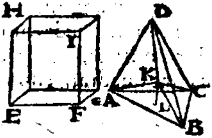
ALITER proponi poteſt hoc corollarium, ut dicamus, ſolidũ, quod fit ex latere cubi in tertiã partem quadrati diametri ſphęrę, æquale eſſe cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum A E, quod eſt tertia pars quadrati diametri ſphæræ: Vt perſpicuum eſt.

SCHOLION.

VNIVERSE autem Solidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſim ducta in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit enim corpus regulare

quod-

quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD; ſolidum autem EFGH, contentum ſub EI, tertia parte ſuperficiei corporis ABCD; & ſub altitudine FG, quæ æqualis ſit perpendiculari KL, ductæ ex centro K, ad baſin ABC. Dico ſolidum EFGH, æquale eſſe dato corpori regulari ABCD. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant baſes & altitudines. Cum enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint; ipſi æqualiter a centro diſtabunt, per lemma propoſ. 10. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipſorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero priſma contentum ſub baſi ABC, & altitudine KL, triplum eſt pyramidis ABCK, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Atque eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine KL, tripla ſunt ſuarum pyramidum; Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis ABCD. Quamobrem, cum idem priſma triplum ſit priſmatis EFGH, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida EFGH, ABCD, æqualia. Quod eſt propoſitum.

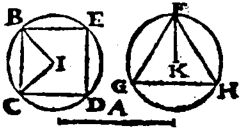


THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius unum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius unum triangulum F G H. Dico eundem circulum circunſcribere & quadratum BCDE, & triangulum F G H, hoc eſt, circulos BGDE, FGH, ipſa circunſcribentes, eſſe æquales.

les. Sint enim rectæ e centris IB, KF. Quia igitur quadratũ *15. tertij de.* diametri A, triplum eſt quadrati lateris cubi BC; & quadratum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum ſubtendat quadrantẽ; *47. primi.* Ac proinde quadratum rectę B C, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cũ rectarum ęqualium BI, IC, ęqualia ſint quadrata; duplum erit quadratum rectæ B C, quadrati rectę B I.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris B C, & talium 1. quadratum rectę BI. Rurſus quia quadratum diame- *14. tertij de.* tri A, duplum eſt quadrati lateris octaedri FG; & quadratũ *12. tertij de.* lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A., talium 3. erit quadratum lateris F G, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectæ BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipſæ, & circuli ex ipſis deſcripti B C D E, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.



COROLLARIVM

HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui baſes oppoſitas tam cubi quam octaedri circunſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex cẽtro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipſas circunſcribentium, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. qui *21. quarti decimi.* cum ſint æquales oſtenſi, æqualiter diſtabunt a centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitarum baſium connectunt (Nam ſi producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11.) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſiũ coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. Quod eſt propoſitũ.

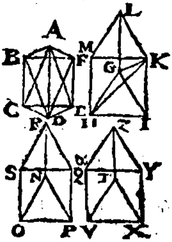
THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidẽ ſphæræ inſcribantur; Erit octaedrum ad tri

plum

plum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri.

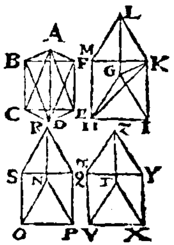
In eadem ſphæra inſcriptum ſit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita eſſe octaedrũ ad triplũ tetraedri, ut latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrũ in quatuor pyramides, quarum latus cõmune eſt ipſa diameter AD, & uertex communis A, nempe in BCDA, cuius baſis BCD; in BDFA, cuius baſis BDF; in CDEA, cuius baſis CDA; & in DEFA, cuius baſis DEF; quæ quidem omnes baſes infra quadratũ BCEF, exiſtunt continentes cum ipſo dimidiatam partem octaedri. Quoniam uero quęlibet harum pyramidũ conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triãgulis, quę qm̃ latus ipſorũ commune eſt AD, diameter, & reliqua latera ipſius octaedri latera exiſtunt, inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus Conſtituatur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cũ tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. Qm̃ igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoq; priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertiũ, cũ priſmata eiuſdem altitudinis ſint, ut baſes, ex ijs, quę ad propoſ. 7. lib. 12. demõſtrauimus. Eſt aũt & octaedrũ ABCDEF, eiuſdem priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nã priſma æquale eſt tribus pyramidibus, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualiũ quatuor cõtinere diximꝰ octaedrũ) Igit̃ æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα. Quia uero priſma TVXYZα, ad priſma GHIKLM, proportionẽ habet, quã altitudo illius ad altitudinẽ huiꝰ, ex ſcholio ꝓpoſ. 14. lib. 12. Eſt aũt altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro



8. primi.

14. quarti decimi.

octaedro æquale eſt, eadem quę octaedri, ex constructione: Erit quoque octaedrum ad priſma G H I K L M, hoc eſt, ad triplum tetraedri G H I K, ut altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Eſt autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, ęqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque ut latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratū lateris cubi ad quadratū altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, ut 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphęræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoque quadratum *lateris cubi ad quadratum* altitudinis tetraedri, eſt ut 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratū lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod demonſtrandum erat.



18. tertij de.

COROLLARIVM.

Ex dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, ut latus octaedri ad latus cubi. Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.

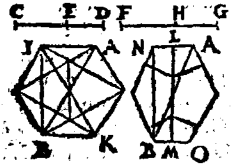
18. tertij de.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam

aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta A B, rectam C D, & eius ſegmentum maius C E; Item rectam FG, & eius ſegmentũ minus H G. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius A B, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptũ Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde Icoſaedri oppoſita A I, B K, connectantur recta I B, quæ ſubtendet unum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, ut cõſtat ex propoſ. 16. lib. 13. quod etiam uidere licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia uero AI, BK, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 15. lib. 13. erunt anguli AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum ſint inter ſe æquales, (Ducta enim alia diametro I K; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia ſint lateribus KB, B I; & baſes quoque AB, IK, equales; Erũt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt; ideoque quadratum rectæ propoſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB; Erat autem idem quadratũ rectæ AB, æquale, ex hypotheſi, quadratis rectarũ CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia ſunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, ſit maius ſegmentum ipſius CD, diuiſæ extrema ac media ratione; Item IA, maius ſegmentum ipſius I B, ſimiliter diuiſæ; (Nam I B, ſubtendit angulum pentagoni, cuius latus eſt, I A, latus Icoſaedri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pẽtagoni,

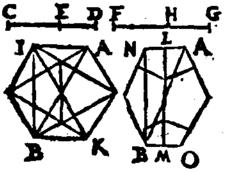


29. primi.

8. primi.

47. primi.

8. tertijdec. tagoni, ſi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe ęquale lateri eiuſdem pentagoni) æquale erit CE, maius ſegmentum ipſi I A, lateri Icoſaedri. Cum enim ſit 2. quartidec. ut C D, ad C E, ita I B, ad I A; erit quoque ut quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ C E, ita quadratum rectæ 22. ſexti. I B, ad quadratum rectæ I A; Ac componendo, ut quadrata rectarum C D, C E, ad quadratum rectæ C E; ita quadrata rectarum I B, I A, ad quadratum rectæ I A: Oſtenſa ſunt autem quadratis rectarum C D, C E, æqualia quadrata re- 14. quinti. ctarum I B, I A. Igitur & quadrato rectæ C E, æquale eſt quadratum rectæ I A; ideoque rectæ C E, I A, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.



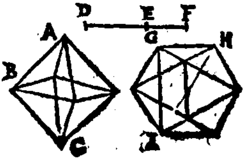
RVRSVS latera Dodecaedri oppoſita A N, B O, ſecentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta L M, & ipſa latera recta N B, coniungantur. Quoniam igitur N L, B M, æquales, parallelæ ſunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. 33. primi. erunt quoque L M, N B, æquales & parallelæ: Eſt autem recta L M, ſecans latera oppoſita bifariam, perpendicularis ad ipſa latera oppoſita, per idem coroll. Igitur & N B, ad eadem perpendicularis erit; Ac proinde quadratum re- 47. primi. ctæ propoſitæ A B, æquale erit quadratis rectarum N B, N A. Quare cum idem quadratum rectæ A B, æquale ſit poſitum quadratis rectarum F G, H G; æqualia erunt quadrata rectarum N B, N A, quadratis rectarum F G, H G. Ac propterea, cum H G, ſit minus ſegmentum ipſius F G, ſectæ extrema ac media ratione; Item N A, minus ſegmentum ipſius N B, hoc eſt, ipſius L M, ſimiliter diuiſæ, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. æquale erit H G, minus ſegmentum ipſi N A, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter oſtendemus, ac ſupra demonſtrauimus CE, maius ſegmentum æquale eſſe ipſi I A, lateri Icoſaedri. Si recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri,

ſaedri ; minus autem ſegmentum poſterioris, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

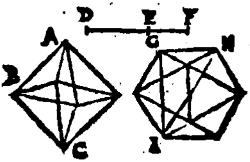
SI latus octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti duplum minoris ſegmenti.

POSSIT latus A B, octaedri ABC, & maius ſegmentum DE, & minus EF, rectæ DF, ſectæ extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem ſphæræ inſcriptum Icoſaedrū GHI, cuius latus GH, & ſubtendens angulum pentagoni ex lateribus Icoſaedri compoſiti GI, & diameter H I. Dico quadratum lateris GH, duplum eſſe quadrati minoris ſegmēti E F.



Cum enim GH, ſit latus pen-
tagoni, cuius unum angulū
ſubtendit recta GI; erit GH,
maius ſegmētum ipſius G I, 8. tertijdec.
diuiſæ extrema ac media ra-
tione; Ac proinde compoſi-
ta recta ex GI, GH, ſecabitur 5. tertijdec.
ſimiliter in G, puncto, extre-
ma ac media ratione. Quia uero quadratū diametri H I, æ-
quale eſt quadratis rectarum G I, G H, quod angulus 47. primi.
I G H, rectus ſit, ut in præcedenti propoſ. oſtenſum
eſt; & quadratum lateris A B, æquale quadratis re-
ctarum D E, E F, ponitur; Erunt, ut quadratum
diametri H I, ad quadratum lateris A B, ita quadrata
rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum D E, E F:
Eſt autem quadratum diametri H I, duplum quadra- 14. tertijde.
ti lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum G I, GH,
dupla ſunt quadratorum rectarum D E, EF. Atqui ut qua-
drata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum D E, E F,
ita eſt quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ E F.
(Nam cum ſit ut G I, ad G H, ita D E, ad E F: Erit quoq; 2. quartide.
ut qua-

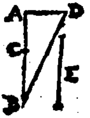
22. ſexti. ut quadratum rectæ G I, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectę EF; & componendo, ut quadrata rectarum GI, G H, ad quadratū rectæ G H, ita quadrata rectarum D E, E F, ad quadratū rectæ E F. Et permutando, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum D E, E F, ita quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ E F.) Quadratum igitur rectæ G H, duplum quoque eſt quadrati rectæ E F. Quare ſi latus Octaedri potuerit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod erat oſtendendum.



THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuiſa extrema ac media ratione cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat, cui recta ſubtendatur: Erit recta linea, quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ, latus octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri.

LINEA recta AB, ſecta in C, extrema ac media ratione conſtituat cum recta AD, quæ æqualis ſit minori ſegmẽto AC, angulum rectum A, cui recta ſubtendatur BD; ſitq; recta E, potentia ſubdupla ipſius B D. Dico E, latus eſſe octaedri illius ſphæræ, in qua AD, uel AC, latus eſt Dodecaedri. Cū enim per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. maius ſegmentum BC, latus ſit cubi illius ſphæræ, cuius minus ſegmentum AC, uel AD, latus eſt Dodecaedri; erit diameter illius ſphæræ potentia tripla maioris ſeg-



15. tertii.

ris ſegmenti BC, nempe lateris cubi: Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris ſegmenti, tripla eiuſdem quadrati maioris ſegmenti BC. Quadratum 4. tertijdec. igitur diametri ſphæræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD; hoc eſt, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter eſt ſphæræ. 14. tertijdec. Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; Poſſit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia ſubdupla ipſius BD; Erit E latus Octaedri eiuſdem ſphæræ, cuius AD latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuiſa, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

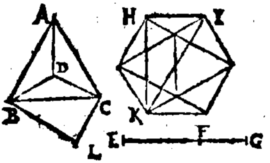
QVONIAM uero latus Octaedri E, potentia ſeſquialterum eſt 18. tertijdec. lateris cubi BC, cuius maius ſegmentum eſt AD, latus Dodecaedri, ut conſtat ex ijs, quæ oſtendimus ad propoſ. 5. lib. 13. cum BC, ſit maius ſegmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuiſæ: Perſpicuum eſt, ſi linea quæuis recta ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum eſſe latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ, in qua Octaedrum deſcriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri poſſit maius & minus ſegmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione ſectæ: latus Icoſaedri eidem ſphæræ inſcripti ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius ſegmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuiſæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icoſaedri HIK, eiuſdem ſphæræ. Dico HI, rectam potentia eſſe ſeſquialteram minoris ſegmenti FG. Subtendat enim recta HK, unum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, connectaturque recta IK, diameter. Quia igitur HI, eſt maius ſegmentum re- 8. tertijdec.

ctæ H K, diuiſæ extrema ac media ratione; Erit quoque
5. tertijdec. compoſita K H I, diuiſa eodem modo in H, maiusque ſegmentum H K, & minus H I. Fiat ex rectis B C, E F, F G,
21. primi. *48. primi.* triangulum BCL, ita ut B L, recta ipſi EF, & C L, ipſi F G, ſit æqualis: Eritque angulus L, rectus, quod recta BC. ponatur poſſe rectas BL, CL, hoc eſt, rectas EF FG: Eſt autem & angulus IHK, rectus, ut propoſ. 23. huius lib. oſtẽdimus;

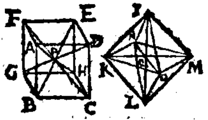


2. quartide. Eſtq; ut BL, ad LC, ita KH, ad HI. Igitur triangula BLC, KHI, ęquiangula ſunt;
6. ſexti. Ac propterea ut KI, ad IH, ita BC, ad CL;
4. ſexti. & permutãdo, ut KI, ad BC, ita H I, ad C L:
13. tertijdec. Atqui I K, diameter eſt potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri B C. Ergo & HI, latus Icoſaedri erit potẽtia ſeſquialterũ ipſius C L, hoc eſt, minoris ſegmenti F G. Si latus itaq; Tetraedri poſſit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadẽ cum ipſo ſphæra deſcriptum eſt, ut ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item ut latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.

SINT in eadem ſphæra cubus A B C D E F G H, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam eſſe proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet ſuperficies cubi ad ſuperficiẽ Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad ſemidiametrum ſphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, reſoluetur cubus in ſex pyramides æquales, quod habeant & baſes æquales, & altitudines: (cum enim circuli deſcripti circa pyramides, ſeu cubi baſes æquales, ſint æquales, ac



ac propterea æqualiter a centro ſphæræ diſtent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, ſeu baſium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob cauſam. Quoniam autem idem circulus cōplectitur & cubi quadratum, & Octaedri triangulum; æqualiter diſtabunt baſes pyramidum cubi, & Octaedri a centro ſphęrę, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidū cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, ut una pyramis cubi ad unā pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſim pyramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 4. lib. 5. demonſtrauimus, ut ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies uidelicet tota cubi, ad baſim pyramidis Octaedri; Ideoq; rurſus, ex eodē ſcholio, ut cubus ad octuplū pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrū, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur.

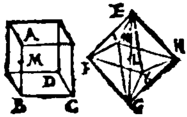
21. *quarti decimi.*

SINT rurſus in eadem ſphæra cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK, ſitque diameter ſphęrę, ſeu Octaedri EG, & centrū L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM; Item ex ſemidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam uero quadratū IFKH, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarū pyramidum, in quas Octaedrum ſecari diximus propoſ. 16. huius lib. ſeſquialterum eſt quadrati BD, lateris cubi BC: Eſt autem & recta AB, rectę BM, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabūtur baſes IFKH, BD, & altitudines AB, BM: Ac propterea parallelepipedū ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo ſuper baſim BD, & ſub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rurſus quia recta EL, rectę EN, tripla eſt; erit & parallelepipedū ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL, triplū parallelepipedi ſuper eandem baſim, & ſub altitudine EN, ut in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus: Sed & idem parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL, triplum eſt pyramidis IFKHE, ex corollario 1. propoſ. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, ęqualis erit parallelepipedo

18 *tertijdec.*

34. *undec.*

ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, ex ſcholio ꝑpoſ. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla ſit altitudinis E N; Item *16.quartide* Octaedrum E F G H I K, duplum eſt pyramidis I F K H E. Aequale igitur erit parallelepipedū ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine LN, Octaedro E F G H I K. Cæterum quia parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & altitudine BM, eſt ad parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, ut altitudo B M, ad altitudinem LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad L N, ita eſt A B, ad EL. (Cum enim ſit ut A M, ad MB, ita EN, ad NL; & componendo, ut A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoque permutando, ut AB, ad EL, ita BM, ad L N.) Et parallelepipedū ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine B M, æquale eſt oſtenſum cubo A B C D; Et parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine L N, æquale Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque ut cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

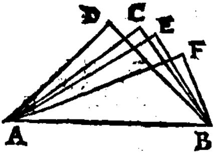


SCHOLION.

13.tertijdec. QVIA *demonſtratum eſt, diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialteram potentia lateris Tetraedri, ita ut, ſi quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; perſpicuum eſt, ſi ex quadrato diametri datæ auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtendimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam, ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis,*

da

ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphera ponatur AB, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes quadrati diametri AB; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia, ita vt quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC; Erit recta AC, latus Tetraedri.



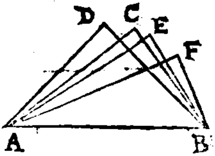
14. tertijdec. RVRSVS cum oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri; Fit, ſi ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium ſit quadrati diametri AB; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter ſe proproportionem habentia æqualitatis, ſecundum doctrinam ſcholij propoſ. 33. lib. 6. rectam AD, latus eſſe Octaedri.

15. tertijdec. DEINDE, quoniam docuimus diametrum ſphæræ potentia eſſe triplam lateris cubi; Efficitur, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars ſit quadrati diametri AB; Vel ſi quadrato diametri AB, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita ut quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC, iuxta doctrinam eiuſdem ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus exiſtere. Vel certe cum diameter AB, poſſit & latus Tetraedri, & latus cubi; ex corcll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtũ eſt, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratum lateris cubi BC: Quemadmodum e cõtrario, ſi ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRAETEREA, quia ſi recta aliqua potuerit totã quãpiam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius ipſius ſegmentum; Maius ſogmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæ- 23. quartidecimi. ræ, cuius diameter eſt recta prior linea; Conſtat, ſi quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. demonſtrata ſunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarũ AE, BE, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuiſa ad maius ſegmentum: Rectam minorem BE, eſſe Icoſaedri latus.

23 quartidecimi.

POSTREMO, quoniam ſi recta quæpiam potuerit totã aliquam rectam diuiſam extrema ac media ratione, & minus illius ſegmentum; Minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri eius ſphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, ſi quadrato diametri AB, conſtituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extremę ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum: Minorem lineam BF, latus eſſe Dodecaedri.



HACTENVS ergo Hypſicles, Campanus, & Franciſcus Candalla de comparatione ſolidorum regularium eidem ſphæræ impoſitorum ſcripſerunt: Sequentes autem quinque propoſ. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de proportionibus, ad hunc, qui ſequitur, modum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI ſint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita ut ſit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.

SINT quatuor rectę A, B, C, D, continue proportionales; nec non quatuor A, E, F, G, ita ut A, recta antecedens ſit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertię ad tertiam, eſſe duplicatam proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecundam, & proportionem D, ad G, quartę ad quartam, eſſe

eſſe triplicatam eiuſdem proportionis B, ad E, ſecundę ad
ſecundam? Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin.
10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis
rectę B, ad rectam A; habeat autem
& quadratum rectę B, ad quadratum
rectę A, duplicatam proportionem
eiuſdem proportionis rectę *20. ſexti.*
B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita quadratum
rectę B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit,
ut recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum
rectę A: Et conuertendo, ut recta A, ad rectam F, ita
quadratum rectę A, ad quadratum rectę E. Quoniam igitur
eſt quadratum rectę B, ad
quadratum rectę A, ut recta
C, ad rectam A; & quadratum
rectę A, ad quadratum rectę E,
ut recta A, ad rectam F; Erit ex
ęquo, quadratum rectę B, ad quadratum rectę E, ut recta C,
ad rectam F: Eſt autem proportio quadrati rectę B, ad quadratū
rectę E, duplicata proportionis rectę B, ad rectam E: *20. ſexti.*
Igitur & proportio rectę C, ad rectam F, duplicata eſt proportionis
rectę B, ad rectam E. Quod eſt primum.

quadr. B.	*Recta C.*
quadr. A.	*Recta A.*
quadr. E.	*Recta F.*

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib.
5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectę B, ad
rectam A; habeat autem & cubus rectę B, ad cubum rectę
A, triplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectę *33. undec.*
B, ad rectam A; Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus rectę
B, ad cubum rectę A.
Eadem ratione erit ut recta
G, ad rectam A, ita cubus
rectę E, ad cubum rectę
A; Et conuertendo ut
recta A, ad rectam G, ita cubus rectę A, ad cubum rectę E.
Quia ergo eſt cubus rectę B, ad cubum rectę A, ut recta D,
ad rectam A; & cubus rectę A, ad cubum rectę E, ut recta A,
ad rectam G; Erit ex ęquo, cubus rectę B, ad cubum rectę
E, ut recta D, ac rectam G: Eſt autem propoportio cubi rectę
B, ad cubum rectę E, triplicata proportionis rectę B, ad *33. undec.*
rectam E. Igitur & propotio rectę D, ad rectam G,
triplica-

Cubus B.	*Recta D.*
Cubus A.	*Recta A.*
Cubus E.	*Recta G.*

triplicata eſt proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod eſt ſecundum. Itaque ſi ſint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

Hoc idem demonſtrauimus ad propoſ. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus, duorum ordinum ab uno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum BC, recta perpendicularis A D, quæ bifariam ſecabit latus BC, ut in coroll. propoſ. 12. huius lib. demonſtratum eſt; Ac propterea B D, dimidium eſt lateris A B. 13. ſexti. Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cum enim rectangulo ſub A D, B D, æquale ſit triangulum A B C, ut perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. Sit autem 17. tertij. eidem rectangulo ſub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. Quoniam uero quadratum lateris A B, ad quadratum 20. ſexti. rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Conſtat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam lateris

ris

ris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Itaqve, ſi in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppoſitum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale eſt ipſi triangulo. Oſtenſum enim eſt, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis eſt inter A D, & D B, æquale eſſe triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadẽ ſphæra deſcribantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.

Sit quadratum cubi cuiuſuis A B C D, & Tetraedri in eadem ſphæra deſcripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppoſitum F G, deducta diuidens F G, latus bifariam, ex coroll. propoſ. 12. huius lib. Dico, eſſe quadratum AC ad triangulum E F G, ut latus trianguli E F, ad perpendicularem E H.

Poſita enim inter E H, F H, media proportionali I K, cum
quadratum lateris Tetraedri E F, duplum ſit quadrati lateris 18. tertijdec.
cubi A B; ſit autem & duplum rectanguli ſub latere E F, & 1. ſexti.
dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum
eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangulum
ſub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; Ac pro- 17. ſexti.
pterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc eſt,
tres rectæ FH, AB, EF, continue erunt proportionales: Sũt
autem & tres rectæ FH, IK, EH, continue proportionales,
ex

ex conſtructione. Igitur cum omnium antecedens ſit F H, erit proportio rectę E F, ad rectam E H, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ A B, ad rectam I K, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cum & quadratum A C, rectæ A B, ad quadratum rectæ I K, hoc eſt, ad triangulum E F G, (eſt enim ex coroll. propoſ. 29. huius lib quadratum rectæ I K, æquale triangulo E F G,) proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ A B, ad rectam I K; Erit quadratum cubi A C, ad triangulum Tetraedri E F G, ut latus E F, ad perpendicularem E H. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

28. *quartidecimi.*

20. *ſexti.*

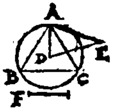
F H.
A B. I K.
E F. E H.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterũ eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis uero, ſiue altitudo Tetraedri potẽtia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadẽ ſphæra deſcripti.

SIT Tetraedri triangulum A B C, & altitudo, ſeu axis Tetraedri D E, latusque cubi eiuſdem ſphęrę F. Dico latus Tetraedri A B, eſſe potentia ſeſquialterum axis D E: Axem uero D E, potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum deſcripto circulo A B C; ad centrũ D, in quod uidelicet cadit axis D E, ut cõſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur A D, ſemidiameter, & A E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris A E, hoc eſt, lateris A B, æquale eſt quadratis rectarum A D, D E, & triplũ quadrati ſemidiametri A D; Fit, ut poſito quadrato lateris A B, ſeu A E, partium 6. quadratum rectæ A D, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.

5. *quarti.*



47. *primi.*

12. *tertijdec.*

QVO-

QVONIAM uero latus Tetraedri A B, potentia duplum 18. tertijdec.
eſt lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium
partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris A B;
Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratum axis DE.
Igitur quadratum axis DE, ſeſquitertium eſt quadrati lateris
cubi F: Latus itaque Tetraedri potentia ſeſquialterum
eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM. I.

QVIA uero, poſito quadrato lateris A B, partium 6. quadratum
diametri ſphæræ talium partium eſt 9. quod diameter potentia
ſit ſeſquialtera lateris Tetraedri: Harundem uero partium 4. 13. tertijdec.
oſtenſum eſt quadratum axis D E; perſpicuum eſt, diametrum
ſphæræ potentia eſſe duplam ſeſquiquartam axis Tetraedri; Ac
proinde, cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatã, 20. ſexti.
manifeſtum eſt, diametrum eſſe ſeſquialterã axis Tetraedri. Seſquialteræ
enim proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta,
ut in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in
coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13.

COROLLARIVM. II.

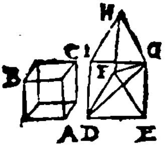
CONSTAT quoque, ita eſſe axem, ſeu altitudinem Tetraedri
ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti, ut latus Tetraedri ad perpendicularem
ex uno angulo baſis ad latus oppoſitũ ductam. Quia
uidelicet, tam latus trianguli æquilateri, hoc eſt, latus Tetraedri, potentia
ſeſquitertium eſt perpendicularis ex uno angulo ad latus oppoſitum 12. quartidecimi.
deductæ; quam ex hac propoſ. ipſe axis Tetraedri lateris
cubi.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti.

DESCRIBANTVR in eadem ſphæra cubus ABC,
& Tetraedrum D E F G. Dico cubum Tetraedri eſſe triplũ.
Conſtituatur ſuper DEF, baſim Tetraedri priſma D E F G H I,
eandẽ habẽs cũ Tetraedro altitudinẽ. Q̃m igitur eſt
baſis priſmatis, ſeu cubi ABC, ad baſim priſmatis, ſeu Tetraedri
DEF, ut latus Tetraedri ad ꝑpendicularẽ ductã ex angulo 10. quartidecimi.
quouis baſis DEF, ad lat⁹ oppoſitũ. Vt aũt lat⁹ Tetraedri
ad

ad perpendicularem dictam, ita eſt, per coroll. 2. propoſ 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde priſmatis D E F G H I, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, ſeu priſmatis ABC; Erit baſis priſmatis ABC, ad baſim priſmatis DEF G H I, ut huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 9. lib. 12. demonſtrauimus, æqualia erunt priſmata A B C, D E F G HI, cum ipſorum baſes & altitudines reciprocentur. Atqui priſma DEFGHI, triplum eſt pyramidis, ſeu Tetraedri D E-FG; ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiuſdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. Quod oſtendendum erat.



COROLLARIVM.

VNDE priſma, eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. Oſtenſum enim eſt, cubũ AB C, æqualem eſſe priſmati D E F G H I, &c.

ELEMENTI DECIMIQVARTI FINIS.

* * *

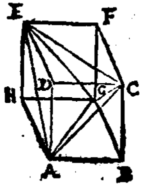
EVCLIDIS
ELEMENTVM XV.
ET SOLIDORVM QVINTVM, ut nonnulli putant. Vt uero alij, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1. I.

IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato A B C D E F G H, oporteat deſcribere pyramidem, ſeu Tetraedrum. Ab uno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri EA, EG, EC, a quarum extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur A G, G C, C A, in reliquis tribus baſibus. Quoniam igitur diametri quadratorum ęqualium ęquales ſunt, quod potentia duplæ ſint laterum æqualium quadratorum, ut in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; perſpicuum eſt, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, G C E, ex dictis diametris compoſita, æquilatera eſſe, & inter ſe æqualia; Ac propterea pyramidem,



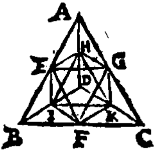
dem, ſeu tetraedrum conſtitui ex ipſis. Quia uero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur; manifeſtum eſt, ipſum in cubo eſſe inſcriptum, ex defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

2.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrũ deſcribere.

Sit in pyramide, ſeu tetraedro ABCD, deſcribẽdũ octaedrũ. Diuiſis omnibus lateribus bifariã in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, conſtituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, ſupra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum conſiſtunt. Quoniam uero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia ſunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod ſint dimidia rectarum ęqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod ſint anguli triangulorum æquilaterum ABD, ACD: æquales erunt baſes EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula ęquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex definitione 31. lib. 11. intra tetraedrum deſcriptum eſt; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex conſtructione. In data igitur pyramide octaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



4. *primi.*

COROLLARIVM.

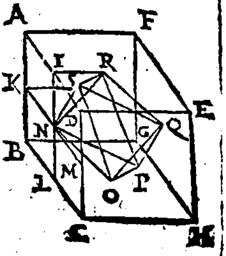
Qvoniam uero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata ſunt æqualia, ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecantia, ut in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. demonſtrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, ſecat biſariam. (Nam quadratum HIKG, ipſam diuidit in pyramidem HIKD, & priſma HIKGAB; nec non

non in pyramidem E B F I, & priſma E F C G K I; Conſtat autem pyramidem pyramidi eſſe æqualem, & priſma priſmati: Eodemque modo reliqua quadrata G H I F, F K H E, diuidunt biſariam eandem pyramidem A B C D.) Manifeſtum eſt, ſi in tetraedro octaedrum inſcribatur, tetraedrum biſariam ſecari, tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum biſariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant. 3. duodec.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

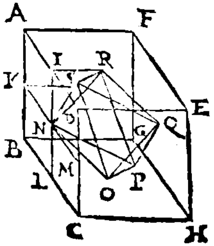
IN dato cubo octaedrum deſcribere. 3.

DESCRIBENDUM ſit octaedrum in cubo dato A H. Diuidantur latera baſis A B C D, biſariam in punctis I, K, L, M; quæ connectantur rectis I L, K M, ſecantibus ſeſe in N, puncto, quod quidem centrũ eſt quadrati ABCD, ut conſtat ex demõſtratione propoſ. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum baſium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta baſium, cuiuſmodi ſunt N I, R I, N K, S K, &c. æquales dimidijs lateribus cubi, ſeu quadratorum, ut perſpicuum eſt ex prędicta demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Poſtremo ſi præfata centra coniungantur duodecim rectis N O, O P, P Q, Q R, R S, S N, N P, P R, R N, S O, O Q, Q S; conſtituta erunt octo triangula, quorũ quidẽ quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planum N O Q R; quatuor autem O P Q, Q P R, R P N, N P O, infra idem planum conſiſtunt. Quoniã uero latera I N, I R, trianguli I N R, æqualia ſunt lateribus K N, K S, trianguli K N S, quod omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, ut dictum eſt; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum N I, I R, parallelæ ſint rectis B A, A F; angulus N I R, æqualis ſit recto angulo K A F, 10. undec. in quadrato A G, eademque ratione angulus NKS, an-



gulo

4. *primi* gulo recto I A F, in quadrato A E; Erunt baſes N R, N S, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum e centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, ut quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus uidelicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim uides duas rectas N I, R I, ductas eſſe ad I, dimidium lateris A D, quod cõmune eſt quadratis A C, A E quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ N K, S K, ductæ ſunt ad K, dimidium lateris A B, quod commune eſt quadratis A C, A G, quorum centra exiſtunt puncta N & S, &c. Quam ob rẽ conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & ęqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQR SP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earũ centris. Quam ob rem in dato cubo Octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.



1. *quintide*
2. *quintide*

Aliter. In cubo dato inſcribatur pyramis; In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera uero pyramidis, ex demonſtratione propoſ. 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri, perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi; atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

COROLLARIVM.

Qvia uero diametri Octaedri in cubo deſcripti N Q, R O, ſi ducerẽtur, ſe mutuo ſecãt ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. quæ quidẽ coniungũt centra baſium cubi oppoſitarũ: Manifeſtum eſt, rectas lineas centra baſiũ cubi oppoſitarũ connectentes nõ ſolũ ſe ſe mutuo bifariam, ut docuimus coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. ſed etiam ad angulos rectos, ut hic oſtendimus, diuidere.

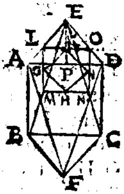
PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

IN dato octaedro cubum inſcribere.

Datum octaedrum ſit ABCDEF, in quo oporteat deſcribere cubum. Quoniam in octaedro ſex pyramides quadrangulæ continentur, quarum uidelicet uertices ſunt ſex anguli octaedri, & quęlibet duę octaedrum conſtituūt; ſit una earum pyramis ABCDE, cuius baſis ABCD, quadratum, triangula uero æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, ęquilatera, cum ſimilia ſint triāgulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod latera habeant communia. Eſt enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; Et denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc uero ipſi NEO; & hoc ipſi OEL, æquale eſſe. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter ſe ęquales ſunt. Quia uero ducta recta EKP, tripla eſt rectę KP; Eſt autem ut EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplę erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione ſecantur, quadrilaterumque conſtituent LMNO. Rurſus quia LO, LM, parallelę ſunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipſis exiſtentibus plano; æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus eſt, cum ABCD, quadratum ſit, ut oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. & in propoſ. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non ſecus demonſtrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos eſſe. Quoniam uero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, parallelum eſt plano



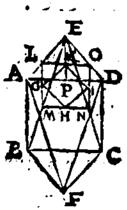
18. quartide
2. ſexti.

10. undec.

15. undec.

ABC.

A B C D; ipſa quoque inter ſe parallela erunt; atque adeo,
cum conueniant in punctis M, & O, unum planum efficiẽt,
ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Quocirca L M N O, quadratũ



erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos
rectos. Deinde, cum latera E L, E K,
trianguli E L K, æqualia ſint lateribus E O,
EK, trianguli EOK, & anguli quoq; ipſis cõ
tẽti, æquales, quod recta E K, ex angulo E, ꝑ
centrũ K, trianguli æquilateri E A D, ducta
biſariã ſecet angulũ A E D, per coroll. 3. propoſ.
4.primi. 12. lib. 13. Erunt & baſes K L, K O, æquales,
hoc eſt, recta L O, biſariam ſecabitur in K.
Eadem ratione L M, M N, N O, biſariam ſecabuntur in G, H,
I. Ac proinde rectæ G L, G M, H M, H N, I N, I O, K O, K L,
cum ſint laterum quadrati L N, dimidiæ, æquales inter ſe
erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum
4.primi. rectos, æquales erunt & rectæ G H, H I, I K, K G, centra
G, H, I, K, connectentes. Quia uero hæ rectæ in plano exiſtunt
quadrati L N, angulosque comprehendunt rectos;
13.primi (cum enim anguli L K G, G K I, I K O, duobus ſint rectis
æquales; Sint autem L K G, I K O, per coroll. 2. propoſ.
32. lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus G K I; Eademque
ratione recti erunt anguli K G H, G H I, H I K.) quadratum
erit G H I K, cum habeat & latera æqualia, & angulos
rectos. Quod ſi eadem arte in reliquis quinque pyramidibus
Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur,
deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cum latera habeant
communia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex huiuſmodi
quadrata cubum component: qui quidem ex defin.
31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cum octo eius
anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. Quare
in dato Octaedro cubũ deſcripſimus. Quod faciendũ erat.

5.
6. PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN dato Icoſaedro, Dodecaedrũ ĩſcribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro
continentur, quarum uidelicet baſes ſunt pentagona

ex

ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, uertices uero, duodecim anguli Icoſaedri, una pyramis ABCDEF, cuius baſis pentagonum ABCDE, triangula uero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rurſus ex uertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 3 bifariam ſecabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita ut decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales ſint: quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pētagoni, æquales quoque erunt rectę MN, NO, OP, PQ, QM, 4.primi. puncta M, N, O, P, Q, connectentes; Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, 8.primi quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum ęquilaterorum ęqualium ad baſes oppoſitas demiſſę. Cum enim latera FB, BM, trianguli FBM, lateribus FB, BN, trianguli FBN, ęqualia ſint, contineantq; angulos ęquales, nempe triangulorum æquilaterorum; erunt baſes FM, FN, ęquales; & ſic de re- 4.primi. liquis. Quoniam uero & rectę FG, FH, FI, FK, FL, nimirum ſemidiametri circulorū ęqualium triangula ęquilatera ęqualia circunſcribentium, ęquales ſunt, & angulos comprehendunt ęquales, ut demonſtratum eſt; Erunt & rectę GH, HI, IK, KL, LG, ęquales. Rurſus quia tam anguli AMQ, 4.primi QMN, NMB, quā anguli BNM, MNO, ONC, ęquales ſunt 13.primi. duobus rectis, Sunt autē anguli AMQ, NMB, angulis 4.primi BNM, ONC, ęquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, ęquales; Eademq; ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter ſe, & hiſce ęquales erunt. Quare pentagonum erit ęquilaterū & ęquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, exiſtens. Deniq; cum rectę FM, FN, FO, FP, FQ, ęquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, ęquales ſint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplę ſunt ipſarum

GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propoſ. 1 . lib. 14. paralle-
2. ſexti. læ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipſis MN, NO, OP, PQ,
QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG,
10. undec. angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM,
ideoque & inter ſe æquales erunt. Quia uero plana per re-
15. undec. ctas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela ſunt plano penta
goni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto, conueniūtq;
in recta HI; ipſa unum planum efficient, ex ſcholio propoſ.
16. lib. 11. Eodemque modo oſtendemus plana per IK, KL,
& per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum
conſtituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca
GHIKL pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum,
cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis undecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pētagona Dodecaedrum conſtituēt: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cum uiginti anguli Dodecaedri in centris uiginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

ITAQVE cum omnes rectæ e centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cum enim ex coroll. lemm. 1. propoſ. 10. lib. 14. perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circunſcribentium, atque adeo eorundem diſtantiæ exiſtant a centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemm. 2. eiuſdem propoſ. 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

0.

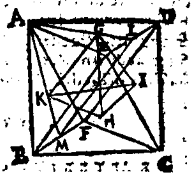
PROBL. 6. PROPOS. 6.

5.

IN dato octaedro pyramidē deſcribere.

PYRAMIS deſcribenda ſit in octaedro ABCDEF. In pyramide octaedri ſuperiori ABCDE, ſumantur G, & H, cen-

H, centra triangulorũ ex aduerſo ſibi reſpondentiũ A E D, B E C; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerſo quoque ſibi correſpondentium CFD, AFB: quę quidem centra coniungantur ſex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, ut fiat pyramis HIKG. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ AL, AM, ſecantes latera oppoſita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M, per ſcholiũ propoſ. 12. lib. 13. coniungaturq; recta LM, quæ ipſi BE, uel FD, ęqualis & parallela erit, cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales ſint, & parallelæ, nimirũ dimidia laterum D E, B F, oppoſitorum in quadrato E F; Quoniam uero rectæ AL, A M, ſectæ ſunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod A G, A K, duplę ſint ipſarum GL, KM, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. Erunt GK, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula AEM, AGK, ſimilia. Quare erit ut AL, ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, ut AL, ad AG, ita LM, ad GK: Eſt autem AL, ipſius AG, ſeſquialtera, quod GL, ſit tertia pars ipſius AL, ideoque AG, eiuſdem AL, duæ tertiæ. Igitur & L M, hoc eſt, ipſi æqualis D F, ſeſquialtera erit ipſius G K. Hac eadem arte oſtendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentium ſeſquialtera eſſe latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HIKG, componentes inter ſe eſſe æquales, hoc eſt, triangula æquilatera æqualia ex ipſis confici, ideoque Tetraedrum conſtitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor baſium octaedri, deſcriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.



33. primi.

2. ſexti.

4. ſexti.

18. quartidecimi.

ALITER. In octaedro dato inſcribatur cubus, & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli conſiſtant in centris baſium octaedri; Et in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

4. quintide.

1. quintide.

COROLLARIVM. I.

9. undec. Qvia uero oſtenſum eſt, utramque GK, DF, parallelam eſſe ipſi LM; ac propterea & GK, ipſi DF, atque adeo ipſi BE, parallelem eſſe: Atque eadem ratione KH; ipſis FC, EA, parallelã eſſe; Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum eſſe plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela, binis nimirum ſingula; Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri, octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingulas uidelicet binis oppoſitis. 15. undec.

COROLLARIVM. II.

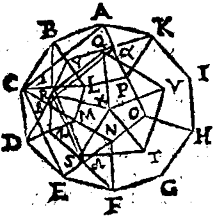
Praeterea, cum octaedrum circunſcribat & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur; Atque adeo recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circunſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, ut conſtat ex 4. propoſ. huius lib. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti, per coroll. 1. propoſ. 21. lib. 14. uel per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.

0. PROBL. 7. PROPOS. 7.

7. IN dato Dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.

Sit dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NPEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima, rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. biſariam diuident latus oppoſitum BL; & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, biſariam & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiuſdẽ propoſitionis, quod & arcus

& arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona deſcriptorum
biſariam diuidant, (conſtat enim rectas AK, PK;
Item CD, MD, arcus ſubtendere æquales.) Igitur A α, C β, 28. tertij.
parallelæ ſunt rectæ BY; atque adeo & inter ſe parallelæ: 28. primi.
Sunt autem & æquales nempe dimidia
rectarum AP, CM, quæ æquales
ſunt, cum latera KA, KP, 4. primi.
lateribus DC, DM, æqualia ſint,
anguloſque contineant æquales.
Rectæ ergo ipſas connectentes
AC, αβ, æquales erunt, & parallelæ. 33. primi.
Non aliter oſtendemus, ſi
ex angulis B, F, quos ſubtendant
rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ
ducantur BZ FZ, cõnectanturque rectæ CE, γδ, æquales 4. primi.
eſſe ipſas CE, γδ: Sunt autem AC, CE, inter ſe æquales,
cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehenſos.
Igitur & αβ, γδ, æquales erunt. Quapropter, cũ
& rectæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales ſint. (Nam Y Q, Y R,
Z R, Z S, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium rectarum
B L, D M, a centris Q, R, S, circulorum æqualium,
qui nimirum pentagona æqualia circunſcribunt, atq; adeo
æquales. Item Q α, R β, R γ, S δ, diſtantiæ ſunt rectarum 14. tertij.
æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulorum
æqualium, ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, 14. tertij.
Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt,) Erunt quoque anguli αYβ, 8. primi.
γZδ, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR,
Z S, æquales ſint; æquales quoque erunt rectæ QR, RS, 4. primi.
centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales
demonſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes.
Quare triangula Q X R, R X S, S X T, T X V,
V X Q, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri L, M, N,
O, P, conſtituta; æquilatera erunt, & æqualia. Quod
ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dodecaedri,
ſimilia triangula conſtruantur; (Habet enim
Dodecaedrum uiginti angulos ſolidos.) quę quidem latera
habent communia, deſcriptum erit Icoſaedrum intra
Dodecaedrum, cum duodecim anguli ſolidi Icoſaedri
conſiſtant in centris duodecim baſium dodecaedri. In dato

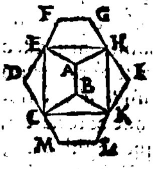


ergo Dodecaedro Icoſaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

6. PROBL. 8. PROPOS. 8.

8. IN dato Dodecaedro cubũ deſcribere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inſcribendus ſit cubus; ABCDE, BFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, ABKIH, ſm latus idem commune AB; alia autẽ duo AEFGH, BCMLK, ſm angulos EAH, CBK. In his uero pẽtagonis ſubtendantur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC. Quoniã igitur rectæ AE, BC, æquales, auferunt ex circulo pentagonum *28. tertij.* ABCDE, circumſcribente arcus æquales; Erunt, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt AB, HK. Quare, & EC, HK, inter *9. undec.* ſe parallelæ erunt; Ac propterea rectæ *33. primi.* EH, CK, quæ ipſas connectunt, parallelæ *7. undec.* erunt, in eodemq; cum ipſis plano; Ideoq; parallelogrammum erit EHKC; quod dico eſſe æquilaterum. Cum enim omnia latera AE, AH, DE, DC; BC, BK; IH, IK, æqualia ſint, angulosque contineant æ- *4. primi.* quales, ex hypotheſi; æquales erũt baſes EH, HK; KC, CE. Quia uero planum ECKH, productum communem ſectionem in ſphæra facit circulum, per lemma 1. propoſ. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, deſcriptum; Erunt tam an- *22. tertij.* guli oppoſiti E, K, quam C, H, duobus rectis ęquales; Ac pro- *34. primi.* pterea cum oppoſiti E, & K, ſint æquales, nec non & oppoſiti C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit, collocans ſuos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorũ Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis ſimiliter octo angulis octo aliæ rectæ ſubtendantur eodem ordine; conſtitutum erit ſolidum ſex quadratis contentum; quę cum ſint æqualia, eo quod eorum latera ęquales angulos pen-



los pentagonorum æqualibus rectis comprehenſos, ſubtendentia æqualia ſint; cubum conſtituent intra Dodecaedrũ deſcriptum, propterea quod duodecim eius latera iaceant in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiuſque octo anguli in octo Dodecaedri angulis reſideant. In dato ergo Dodecaedro cubum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

4. *primi.*

COROLLARIVM.

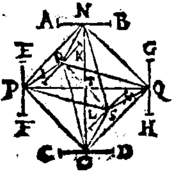
HINC fit, rectam, quæ ſubtendit unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam eſſe oppoſito lateri. Oſtenſum enim eſt, E B, ipſi A B, eſſe parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

0.
9.

IN dato Dodecaedro octaedrum deſcribere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inſcribendum ſit octaedrum, ſex illa latera, quæ oppoſita eſſe diximus in corollario 3. propoſ. 17. lib. 13. nimirum A B, C D; E F, G H, I K, L M, quæ bifariam ſecentur in N, O, P, Q, R, S. Rectę igitur N O, P Q, R S, ſectiones oppoſitorum laterum coniungentes ęquales erunt, ſeque mutuo in T, centro ſphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoq; erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. Quocirca duodecim rectę ſubtendẽtes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STQ, quales ſunt N P, P O, O Q, Q N, N R, R P, P S, S Q, Q R, R O, O S, S N, ęquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula N R P, P R O, O R Q, Q R N, O S P, P S N, N S Q, Q S O, ęquilatera, & æqualia erunt, conſtituentque octaedrum intra Dodecaedrum deſcriptum, cum ſex an-



4. *primi.*

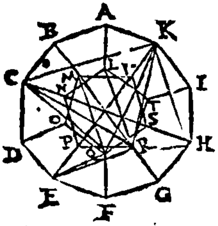
guli

guli octaedri tangant ſex latera Dodecaedri oppoſita, ex conſtructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

0. PROBL. 10. PROPOS. 10.

10. IN dato Dodecaedro Pyramidem deſcribere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo deſcribenda ſit pyramis, ſiue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum ſolidum L, componentia, in quibus tres anguli C, K, R, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At uero K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipſi L oppoſitum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, ut ſit pyramis conſtructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, ſeu ſphęræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; quoniam Dodecaedrũ



17 tertij de. in ſphæra deſcribitur; ſi planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius ſectio cum ſphæra circulus, per lemma 1. propoſ. 10. lib. 14. Ac propterea angulus CKH, in ſe-
31. tertij. micirculo exiſtens, rectus erit. Non ſecus oſtendemus rectos eſſe angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. Quocirca cũ in omni triangulo rectangulo quadratu lateris recto
47. primi. angulo oppoſiti æquale ſit quadratis laterum circa rectum angulum; ſint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: AEqualia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarũ

KR,

KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, necnon & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualiũ KH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectæ cum ſubtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehenſos, æquales ſunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipſæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera ſunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inſcriptũ erit intra Dodecaedrum. Itaque in dato Dodecaedro Pyramidẽ deſcripſimus. Quod faciendũ erat. 4. primi.

ALITER. In propoſito Dodecaedro cubus deſcribatur; & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, necnon & anguli cubi in angulis Dodecaedri reſideant; perſpicuum eſt, angulos pyramidis ſedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro deſcripta erit. 8. quintide. 1. quintide.

PROBL. 11. PROPOS. 11. O. 11.

IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.

DESCRIBATVR in dato Icoſaedro Dodecaedrũ; & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi reſideant in angulis Dodecaedri; anguli uero Dodecaedri in centris baſium Icoſaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra baſium Icoſaedri: Ac propterea cubus in Icoſaedro deſcriptus erit. Quamobrem in dato Icoſaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat. 5. quintide. 8. quintide.

PROBL. 12. PROPOS. 12. O. 12.

IN dato Icoſaedro Pyramidẽ deſcribere.

IN dato Icoſaedro cub⁹ deſcribat, & huic cubo pyramis; fa- 11. quinti. decimi.

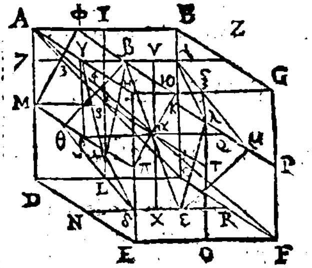
ctumq;

11. quintidec. ctumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri; & anguli pyramidis angulis
1. quintidec. cubi uniantur, manifeſtum eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri; Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam. In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.

SIT in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrũ. Secentur ſingula latera biſariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mπ, KP, NR, nuſquã inter ſe coeuntibus, quæ rurſus biſariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quę ſe mutuo in cẽtro α, biſariam ſecant, & ad angulos rectos, ut in coroll. propoſ. 3. huius lib. docuimus, ſuntque lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, Mπ, ſecentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, $\varkappa$, ut ſint maiora ſegmẽta, Yβ, Zγ, Mθ, $\pi\varkappa$, ductis rectis Yρ, Y$\varkappa$, $\beta\theta$, $\beta\varkappa$. Quoniã ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi ſunt æquales; & $\rho\varkappa$, βV, ſegmenta minora rectarũ ęqualium YV, $\rho\pi$, æqualia quoq;
4. tertijdec. Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yρ, $\rho\varkappa$, tripla eiuſdem
47. primi quadrati rectę Yβ. Quare, cum quadratis rectarum Yρ,
29. primi. $\rho\varkappa$, æquale ſit quadratum rectæ Y$\varkappa$, quod angulus Y$\rho\varkappa$, rectus ſit; Erit & quadratum rectę Y$\varkappa$, triplum quadrati rectæ Yβ. Rurſus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, recta
4. undec. eſt ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum; rectus erit angulus



gulus βYκ, ex defin. 3. lib. 11. Ac propterea quadratum rectæ βκ, æquale quadratis rectarum Yκ, Yβ, exiſtens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ. (quia nimirum quadrata rectarum Yκ, Yβ; quadrupla etiam ſunt quadrati rectæ Yβ, cum quadratum rectæ Yκ, triplum ſit oſtenſum quadrati rectæ Yβ.) Ideoque cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatã, dupla erit recta βκ, rectæ Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplæ proportionis, ut in his numeris 1. 2. 4. apparet: Eſt autem & θκ, dupla ipſius ρκ, quod minora ſegmenta θρ, κρ, rectarum æqualiũ Mρ, πρ, æqualia ſint. Erit igitur ut Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla ipſius Yβ, ad θκ, duplam ipſius ρκ: Eſt autem Yβ, maius ſegmentum ad ρκ, rectam minori ſegmento βY, æqualem, ut tota ad maius ſegmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit ut tota ad maius ſegmentum; Ac proinde θκ, erit maius ſegmentum rectæ βκ, ſectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione oſtendemus θκ, maius eſſe ſegmentum rectæ βθ, extrema ac media ratione ſectæ, ſi nimirum ducatur recta Yθ. Quare æquales erunt βθ, βκ, conſtituentes triangulum Iſoſceles βθκ, ſimile illi, quod ab Euclide conſtructum eſt propoſ. 10. lib. 4. ut poſtea demonſtrabimus; Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βθκ, circunſcribente deſcripti, ut perſpicuum eſt ex 11. propoſ. lib. 4.

47. primi.

20. ſexti.

15. quinti.

INTELLIGATUR iam planum trianguli βθκ, extendi, (ducta per β, recta βφ, ipſi Mπ, parallela,) per parallelas Mπ, φ10, ut ſit planum extenſum φπ, occurrens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi uero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipſi Aφ, parallela, connectaturque MS, quæ parallela eſt utrique Aφ, 73. Quoniam igitur, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum A73. ſimile eſt triangulo AMS; ac proinde ut AM, ad MS, ita eſt A7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoque A7. 73. æquales. Eadem ratione erit ut MA, ad Aφ, ita M7. ad 73. Eſt autem Aφ, maius ſegmentum rectæ MA, diuiſæ extrema ac media ratione. (quod æquales ſint Aφ, Yβ, nec non & MA, YV, dimidia cubi latera. Igitur & 73. hoc eſt, 7A, maius ſegmetũ erit rectæ M7. extrema ac media ratione ſectæ; Ac propterea tota MA, diuiſa erit extrema ac media ratione in 7. maiuſque

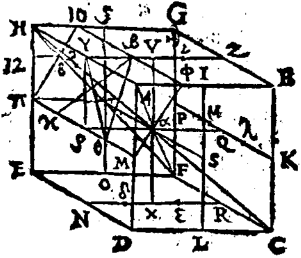
33. primi.

4. ſexti.

34. primi.

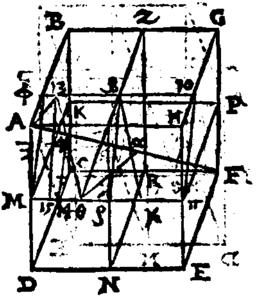
. tertiidec.

2. *ſexti.* ſque ſegmentum erit M 7. Atqui ut M 7. ad 7 A, ita eſt S 3.
ad 3 A. Secta eſt ergo & S A, extrema ac media ratione in
33. *primi.* 3. maiuſque ſegmentum eſt S 3. Quia uero $S \alpha T$, parallela
eſt ipſi $M \pi$, quod & recta ducta πT, æqualis & parallela
ſit ipſi MS; ſi per $S \alpha T$, planum ducatur parallelum plano
17. *undec.* $\varphi \pi$, ducto per $M \pi$, ſecabuntur rectæ AS, $A \alpha$, in eaſdē rationes,
in punctis 3. & 4. Atq; idcirco, cum AS, ſecta ſit in 3. extrema
ac media ratione, ſecta erit eodem modo $A \alpha$, ſemidiameter
cubi, in 4. maiuſq; ſegmentum erit α 4. Iiſdem argumētis
oſtēdemus, ducta diametro H F, quadrati EFGH,
& diametro cubi HC, ſemidiametrum cubi ſecari in 9. puncto
extrema ac media ratione a plano $\varphi \pi$, ut perſpicuū eſt,
ſi cubus inuertatur, ut in hac figura ſecūda apparet. Sunt enim lineamenta omnino ſimilia lineamentis prioris figuræ, licet baſes cubi ſedes mutauerint; ita ut quadratum AC, locū quadrati HF, & quadratum HF, locū quadrati, AC, obtineat in hac ſecunda figura, Oſtēdamus nūc, ſi rectæ iungātur θ 4. β 4. β 9. κ 9. rectilineū $\beta 4 \kappa \theta 9$. in plano $\varphi \pi$, exiſtēs, pentagonum eſſe ęquilaterū, & æquiāgulū.



INVERTATVR rurſum cubus, ut quadrata ADBH, AB
GH, quę nimirū continent triangulū $\beta \theta \kappa$, ſiue planum $\varphi \pi$,
hunc ſitum habeant, quē mōſtrat tertia hæc figura. Deinde
in plano $\varphi \pi$, recta coniuncta θ 4 extēdatur uſq; ad rectam
φ 10. in punctū 13. Quoniā igitur ducta recta K P, & iūctis
15. *undec.* rectis MK, πP, planū MP, parallelū eſt plano AG, (quod &
32. *undec.* rectę PK, KM, parallelæ ſint rectis GB, BA,) ſecatq; cubū biſariā;
ideoq; per cētrū α, trāſit, per ea, quę in ſcholio propoſ.
39 lib. 11. oſtenſa ſunt; ſi per rectas α 4 A, ϑ 4 13. planū extendatur,
16. *undec.* fient $\alpha\theta$, A 13. communes ſectiones planorū MP,
AG, parallelæ; Ac proinde triangula $\alpha \theta$ 4. A 13 4. æquiāgula
4. *ſexti.* erūt; Eritq; ut α 4. ad 4 A, ita θ 4. ad 4 13. Quare cū α A,
in 4. ſecta ſit extrema ac media rōne, ut oſtēdimus, eodē modo
erit

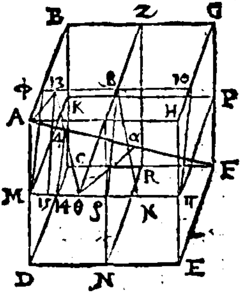
do erit secta θ 13. in 4. Rursus plano NZ, per centrū α, transeunti, parallelū ducatur planū per punctū 4. ex scholio propos. 15. lib. 11. secans planū $\varphi\pi$, recta 4 14. Est aūt eidē plano NZ, parallelū planum DB. 15. undec.



Rectæ igitur α A, ρ M, in easdem rationes secabūtur 17. undec. in punctis 4 & 13. Quocirca & ρ M, in 14. secta erit extrema ac media ratione, minusq; erit segmentū 14 M, ideoque æquale minori $\rho\theta$ ipsius Mρ. Quare cum ex ρ 14. maiori segmēto ipsius ρ M, auferatur $\rho\theta$, minus segmentū; Erit, ut demonstrauimus ad propos. 5 lib. 13. ρ 14. diuisa in θ extrema ac media ratione, maiusq; segmētū erit $\rho\theta$. Postremo acta p 13. recta 13 15. rectę 4 14, parallela, secabūtur rectę θ 13. θ 15. proportionaliter, Ac pro- 2. sexti. inde & θ 15. secta erit in 14. extrema ac media rōne, maiusq; segmētū erit θ 14. Quapropter erit ut $\rho\theta$ maius segmētum 2. quartide. ad θ 14. minus, ita θ 14. maius ad 14 15. minus: Vt autem θ 14. ad 14 15. ita est tota θ 15. ad θ 14. maius segmētū. Igitur erit ut $\rho\theta$, ad θ 14. ita θ 15. ad eandē θ 14. Ac propterea rectæ $\rho\theta$, uel $\rho\kappa$, & θ 15. æquales erūt. Quoniam uero planū NZ, & planū illi parallelū per 4 14. ductū, secātur plano $\varphi\pi$; erunt cōes sectiones $\beta\rho$, 4 14. parallelæ, ideoq; & 13 15. $\beta\rho$, paralle- 16. undec. læ erūt, angulusq; externus $\beta\rho\kappa$, interno 13 15 θ, æqualis. 29. primi. Cū igitur & latera $\beta\rho$, $\rho\kappa$, lateribus 13 15. 15 θ, sint ęqualia; AEquales erūt quoq; rectæ $\beta\kappa$, 13 θ; Ac proinde & earum 4. primi segmēta maiora $\theta\kappa$, θ4, (Ostēsum.n. est $\theta\kappa$, esse maius segmētū ipsius $\beta\kappa$.) æqualia erūt. Eadē arte & β 4. ipsi $\beta\gamma$, in prima figura ostēdet ęqualis, si simili situ triāgulū Isosceles formetur sup basin $\beta\gamma$, cuius uertex cōsistat in pūcto, quod rectā IS diuidit extrema ac media rōne. Eodēq; modo eisdē $\theta\kappa$, $\beta\gamma$, æquales erūt κ 9. β 9. AEquilaterū ergo est pētagonū β4$\theta\kappa$ 9. Sed & ęquiāgulū, ut mox ostēdemus. Si igitur hac arte duodecim triāgula, nimirū ad singulas rectas Mπ, YZ. NR, IL, ξO, κP, bina ipsi $\beta\theta\kappa$, similia, & ęqualia cōstruātur (Ita.n. ad Mπ, duo

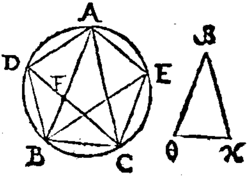
huiusmodi

huiuſmodi triangula uides βθκ, δθκ) & ipſorũ officio duodecim pentagona ipſi β 4. ϑ κ 9. ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis, Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP, bini nimirum in ſingulis, octo uero reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quæ ipſas extrema ac media ratione diuidunt, qualia ſunt puncta 4. & 9. in ſemidiametris A α, H α, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptum eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cũ non omnes eius anguli uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis cubi conſtituantur, ſed duodecim quidem in ſex planis cubi, octo uero in punctis, quæ octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



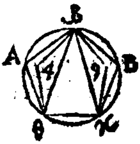
LEMMA.

Quod autem triangulum βθκ, cuius baſis θκ, maius ſegmentum exiſtit utriuſque lateris βθ, βκ, extrema ac media ratione diuiſi, ſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ. 10. lib. 4. ita demonſtrabimus. Deſcribatur circa triangulum Iſoſceles ABC, *quale Euclides conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus ADBCE,* diuiſiſq;



diuiſisque angulis A B C, A C B; *bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum* A D B C *E, ut propoſ.* 11. *lib.* 4. *tradidimus, ſecentque ſe mutuo rectæ* A B, C *D, in F.* Quoniam *ergo* AB, *in F, ſecatur extrema ac media ratione, maiuſque eius ſegmentum eſt* A *F, æquale lateri* B C; 8.tertijdec.
Erit ut A B, *tota ad maius ſuum ſegmentum B* C, *ita* βϑ, *tota ad maius ſuum ſegmentum* ϑκ; *Eodemque modo, ut tota* AC *ad maius ſegmentum* C B, *ita* βϑ, *tota ad maius ſegmentum* κθ: *Eſt autem quoque ut* A B, *ad* A C, *ita* βθ, *ad* βκ, *utrobique enim eſt proportio æqualitatis. Triangula igitur* βϑκ, A B C, *proportionalia habentia latera, æquiangula ſunt, æqualesque erunt anguli* , B; *Item* κ, *C, &* β, A; *propterea que uterque angulorum* θ, κ, *duplus erit anguli* β; *& triangula* βθκ, A B C, *ſimilia.* 2.quartidec. 5.sexti.

Pentagonvm *uero* β4ϑκ9, *æquilaterum, eſſe quoque æquiangulum, hac ratione oſtendemus.* D*eſcribatur circa triangulum* βϑκ, *circulus*



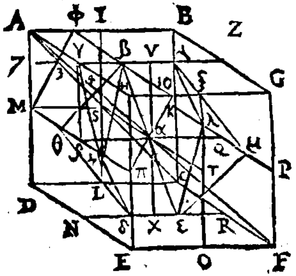
β.Aϑ κ *B, qui ſi tranſeat per puncta* 4, *et* 9, *perſpicuũ eſt ex ijs, quæ ad propoſ.* 16. *lib.* 4. *docuimus, pentagonũ æquiangulũ eſſe. Si uero non incedat per puncta* 4, *et* 9. D*eſcribatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propoſ.* 11. *lib.* 4. *pentagonum æquilaterum & æquiangulum* β Aϑ κ B. Quoniam *igitur tam rectæ* Aϑ, Aβ, *quam rectæ* 4ϑ, 4β, *æquales ſunt rectæ* ϑκ, *cum &* β4ϑκ 9, *&* β Aϑ κB, *pentagonum ſit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ* ϑ A, ϑ 4, *quam duæ* β A, β 4, *æquales, quod fieri non poſſe demonſtratum eſt propoſ.* 7. *lib.* 1. *Tranſit ergo circulus*

culus triangulo β θ κ, circumſcriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonũ β4θκ9, æquiangulũ eſt.

SCHOLION.

Ex his colligere licebit ſequentes propoſitiones.

I. **Diameter** Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in quo decaedrum deſcribitur.



Dvcatvr enim in prima figura diameter Dodecaedri β ε, intelligaturq; coniuncta recta γ ε, æqualis exiſtens & parallela lateri cubi V X, quod & V γ, X ε, æquales ſint, & parallela. 33. primi *Quoniam igitur angulus β V X, rectus eſt; rectus quoque erit angulus β γ ε, ad γ, conſtitutus;* 29. primi. *Ac proinde quadratum diametri β ε, æquale erit quadratis laterum β γ, γ ε, nempe Dodecaedri, & cubi.* 47. primi

II. Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt dodecaedri in cubo deſcripti: Maius uero ſegmentum latus cubi in hoc dodecaedro deſcripti.

In eadem enim prima figura, cum ſit ut Υ V, ad β V, ita Υ Z, dupla ipſius Υ V, ad β γ, duplam ipſius β V; 15. quinti. *Sit autem β V, minus ſegmentum ipſius Υ V, ſectæ extrema ac media ratione: Erit & β γ, minus ſegmentum lateris cubi Υ Z, ſecti extrema ac media ratione; compoſita vero ex Υ β, γ Z, hoc eſt, recta β κ, (quæ dupla fuit oſtenſa ipſius Υ β, ideoque compoſitæ ex Υ β, γ Z, æqualis) maius ſegmentum. Conſtat autem ex conſtructione β γ, eſſe latus Dodecaedri, & β κ, ſeu β[illegible], eſſe*

eſſe latus cubi, in dicto Dodecaedro deſcripti, cum ſubtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 δ. 8. quintidec.

III. **L**ATVS cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri uidelicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti.

NAM in prima rurſus figura, latus cubi Y Z, componitur ex latere Dodecaedri β γ, in ipſo deſcripti, & ex recta cõpoſita ex Y β, γ Z, quam conſtat eſſe latus Dodecaedri eidem cubo circunſcripti. Cum enim Y Z, cubi latus ſubtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 8. propoſ. huius lib. Sit autem latus illius pentagoni maius ſegmentum lateris Y Z, ſecti extrema ac media ratione: Erit β θ, exiſtens quoq; maius ſegmentum eiuſdem lateris Y Z, ut iam demõſtrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris Y Z, circunſcripti. 8. tertijdec.

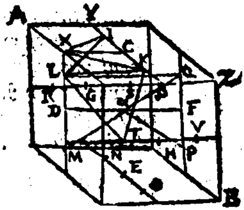
IIII. **R**ECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur.

IN prima enim figura, recta connectens puncta β, δ, in quibus conſtituuntur duo anguli pentagonorũ cõmuni lateri θ κ, oppoſiti, æqualis ẽ rectæ V X, (quod & β V, δ X, æquales ſint, & parallelæ) hoc eſt, lateri cubi, in quo Dodecaedrũ deſcribitur. 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icoſaedrum deſcribere.

CVBVS datus, in quo deſcribendum ſit Icoſaedrũ, ſit A B, per cuius baſium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nuſquã inter ſe conuenientes, & harũ medietates extrema ac media ratione ſecẽtur, ita ut maiora ſegmẽta prope cẽtra ſint, in punctis I, K; L, M; N, O; P, Q; R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor uicinioribus connectatur, ut L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. ut conſtituantur uiginti triangula I K L, I K Q, L M R, L M T, N O M, N O P, P Q V, P Q S, R S I, R S N, T V K, T V O, I L R, I S Q, K T L, K Q V, O P V, O T M, N S P, N M R; quorum priora duodecim ſubtenduntur duodecim cubi lateribus, poſteriora uero octo eiuſdem cubi octo angulis ſubſternuntur. Connectantur iam rectæ X C, X I, X K. Quoniam igitur latera X C, C I, trianguli X C I, æqualia ſunt lateribus X C, C K, trianguli 29.*primi.* X C K; & anguli contenti, recti, quod X C, parallela ſit ipſi 4.*primi.* A Y; Erunt & baſes X I, X K, æquales. Deinde quia linea L X, recta eſt ad planum A Z, per defin. 4. lib. 11. recta quoque erit ad lineas X I, X K; Ac propterea cum latera L X, X I, trianguli L X I, æqualia ſint lateribus L X, X K, trianguli I. X K, & anguli conten-



4.*primi* ti, recti; æquales erunt baſes L I, L K. Rurſus quoniam 47.*primi.* quadratum rectæ L I, æquale eſt quadratis rectarum L X, X I; Et quadratum rectæ L X, quadrato rectæ I Y; quadratum uero rectæ X I, quadratis rectarum X C, C I, eſt æquale: Aequale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis rectarum X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, quod eorum latera ſint dimidia cubi latera. *Igi*tur quadratum rectæ L I, æquale eſt tribus quadratis rectarum C Y, C I, I Y: Sed hæc tria quadrata quadrupla ſunt quadrati rectæ C I. (Cum enim quadrata rectarum C Y, 4.*tertijdec.* I Y, totius, & minoris ſegmenti, tripla ſint quadrati rectæ C I, maioris ſegmenti; Addito quadrato rectæ C I, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum C Y, C I, I Y; quadrupla eiuſdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergo rectę L I, quadruplum eſt quoque quadrati rectæ C I; Ac propterea, cum eiuſdem quadrati rectæ C I, quadruplum ſit quadratum rectæ K I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarum L I, I K, ideoque & rectę ipſę ęquales. Aequilaterum igitur eſt triangulum I K L, lateri cubi A G, ſubſtratum.

NON

NON aliter oſtendemus, reliqua undecim triangula, undecim reliquis lateribus cubi ſuppoſita, eſſe æquilatera; Atq; adeo inter ſe æqualia, cum eorum latera I K, L M, N O, P Q, R S, T V, æqualia ſint. Quoniam uero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi ſuppoſitorum, communia ſunt dictis duodecim triangulis; ut in triãgulo K T L, latus K L, commune eſt triangulo I K L; & latus K T, triãgulo T V K; & latus T L, triangulo L M T; perſpicuum eſt, ea quoque eſſe æqualia & inter ſe, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia uiginti huiuſmodi triangula Icoſaedrum component cubo inſcriptum, cum eius anguli omnes duodecim in ſex cubi baſibus conſiſtant, bini nimirum in ſingulis. Itaque in dato cubo Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

COLLIGEMVS ex hoc propoſitiones ſequentes.

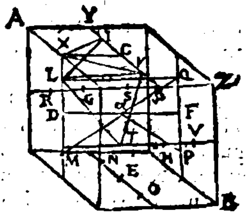
DIAMETER Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri, & cubi Icoſaedrum ambientis. I.

DVCTA enim recta L Q, quæ lateri cubi D F, paralle- 33. primi
la eſt, & æqualis, quod & D L, F Q, parallelæ ſint, & æqua-
les; manifeſtum eſt, quadratum diametri Q M, æquale eſſe qua 47. primi
dratis rectarum L M, lateris Icoſaedri, & L Q, lateris cubi,
in quo Icoſaedrum deſcriptum eſt, cum angulus M L Q, ſit re 29. primi
ctus, quod & L D F, rectus ſit, per coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13.

BIFARIÆ ſectiones ſex oppoſitorum laterũ Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus. II.

NAM huiuſmodi tres lineæ, nimirum D F, C E, G H, cum coniungant centra baſium cubi oppoſitarum, æquales ſunt lateribus cubi, ſeſeque per coroll. propoſ. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod ſit α, diuidunt. Quod qui-

dem & centrum eſſe Icoſaedri, ita oſtendetur, ducta recta α P.



Quoniam latera α F, F Q, trianguli α F Q, æqualia ſunt lateribus α F, F P, trianguli α F P, angulosque comprehendunt rectos; æquales erunt rectæ α Q, α P. 4. primi *Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icoſaedri prodeuntes. Igitur α, centrum eſt Icoſaedri.*

III. SI latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in dicto cubo deſcripti.

CVM enim C I, ſit maius ſegmentum rectæ C Υ; ſitque ut C I, ad C Υ, ita K I, dupla ipſius C I, ad β Υ, duplam ipſius C Υ; 15. quinti *erit quoque K I, latus Icoſaedri, ſegmentum maius lateris cubi β Υ.* 2. quartidc.

IIII. ICOSAEDRI tam latera, quam triangula oppoſita, inter ſe ſunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter ſe æqualia, angulosque alternos habentia æquales, ex 4. propoſ. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare qualibet latera oppoſita parallela erunt; Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe erunt parallela. 15. undec.

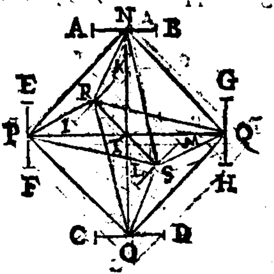
PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icoſaedro Octaedrũ deſcribere.

EXPONANTVR dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita, AB, CD; EF, GH; IK, LM, quorum biſarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, iugant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales ſe ſe in centro T, biſariam, & ad

angulos

angulos rectos ſecantes, per ea, quæ in ſcholio propoſ. præcedentis oſtenſa ſunt; ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; QR, QS, conſtituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Quoniam igitur latera TN, TS, triãguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, triãguli TNP; (cum ſint rectarum æqualium dimidia) angulosq; continent rectos, ut dictum eſt; Aequales erũt baſes NS, NP. 4. primi Eodemq; modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hiſce duabus, & inter ſe. Octo ergo dicta triangula æquilatera ſunt, & inter ſe æqualia; Ideoq; Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcriptum eſt, cum eius anguli reſideant in biſarijs ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaq; Icoſaedro Octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.



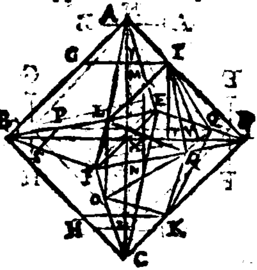
COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, idem eſſe centrum Icoſaedri, & Octaedri in ea deſcripti. Quoniam ſcilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrũ Icoſaedri incedentes, diametri ſunt Octaedri NPOQRS, ſibi inſcripti. Quare T, cẽtrũ Icoſaedri, ubi ſe interſecãt, cẽtrũ quoq; eſt Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icoſaedrũ deſcribere.

DATVM Octaedrum, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, ſit A B C D E F. Cum a quolibet angulo quatuor latera exeant, ſumantur a ſingulis bina non proxima, ſed ſibi e regione reſpondentia, hoc eſt, quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppoſitos cadunt, ſumendo ſemper bina iuxta angulos oppoſitos eiuſdem quadrati, qualia ſunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppoſitos B, D, quadrati A B C D; A F, A E; C E, C F, iuxta angulos oppoſitos A, C, quadrati A E C F: (Nam latera A B, A D; C B, C D, quadrati A B C D, juxta eoſdem angulos A, C, iam ſumpta fuere,) E B, E D; F D, F B, iuxta angulos oppoſitos E, F, quadrati E B F D; (Nam latera E A, E C; F C, F A, quadrati A E C F, juxta eoſdem angulos E, F, iam accepta ſunt,) quæ omnia ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, ut maiora ſegmenta ſint prope angulos a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a ſingulis ad quinque proximas ſectiones quinque lineæ rectæ ducantur, ut ex R, rectę R Q, R I, R L, R O, R K. Et ex I, rectę I Q, I R, I M, I L, I G, & ſic de cæteris, quamuis non omnes ductæ ſint in figura, ad euitandam linearum confuſionem. Poſt hæc, ductis tribus Octaedri diametris A C, B D, E F, ſe ſe in centro X, ſecantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14 lib 13. quarum A C, B D, ſecant rectas G I, R Q, in Y, & V; connectaturque recta I V, agaturque I T, parallela ipſi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I, æqualia ſunt lateribus D R, D I; (Sunt enim D Q, D R; minora ſegmenta rectarum ęqualium D E, D F,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri

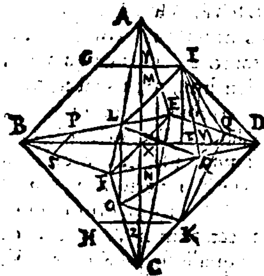


4. primi. A D E, A D F; Erunt baſes I Q, I R, æquales. Deinde cum
2. quarti de, ſit, ut B G, ad G A, ita D I, ad I A; erit G I, rectæ B D, pa-
2. ſexti. rallela. Eademque ratione Q R, ipſi E F, parallela; Ac
4. ſexti. proinde ut D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A, ſecta erit in Y, extrema ac media ratione. Ruſus quia eſt ut A X, ad X D, ita A Y, ad Y I, (quod triangulum A Y I, ſimile ſit triangulo A X D, per coroll. propoſ. 4. lib. 6.) Eſt autem A X, ipſi X D, æqualis; Erit & A Y, ipſi Y I, æqualis. Quare Y I, minus ſegmentum eſt rectæ X A. Non aliter oſtendemus A Y, ipſi Y G, eſſe æqualem; ideoque G I, rectam bifariam in Y; ſimiliterque Q R, in V, ſecari. Cum uero latera A G, A I, trianguli A G I, æqualia ſint lateribus D Q, D R, trianguli D Q R, (nimirum minora ſegmenta minori-

bus

bus ſegmentis æqualium rectarum) angulosque comprehendunt
rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF. Aequales
erunt baſes G I, Q R. Eadem ratione his æquales oſtendontur 4.primi.
rectæ H K, P S, M N, L O, quæ nimirum ſubtendũt
reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in
ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, complectunturque
duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia Y I,
minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, maius eſt ſegmentum
maioris ſegmenti X Y, diuiſi extrema ac media ratione,
ut demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. Eſt autem X Y, recta
XV, æqualis, (cum ambæ ſint maiora ſegmenta æqualiũ
rectarum X A, X D.) & Y I, rectæ X T; erit X T, maius 34.primi.
ſegmentum ipſius X V, & idcirco T V, ſegmentum minus
eiuſdem X V. Quare quadrata rectarum X V, totius, hoc
eſt, ipſius I T, (cum & recta I T, æqualis ſit ipſi XY) & TV, 34.primi.
minoris ſegmenti, tripla ſunt quadrati rectæ X T, maioris 4.tertijdec.
ſegmenti; Atque adeo quadratum rectæ I V, æquale exiſtens 47.primi.
quadratis rectarum IT, T V, triplum eſt eiuſdem quadrati
rectæ X T, hoc eſt, rectæ R V, quæ æqualis eſt ipſi
X T, ſeu ipſi Y I, ex demonſtratis, cum R Y, Y I, dimidia
ſint æqualium rectarum R Q, G I. Addito igitur quadrato
rectæ R V, ipſi quadrato rectæ I V; erunt quadrata rectarum
I V, V R, quadrupla quadrati rectę R V: At quadratis
rectarũ I V, V R. ęquale eſt quadratum rectæ I R, quod 47.primi.
anguli I V R, I V Q, comprehenſi lateribus æqualibus 8.primi.
I V, V R; IV, VQ, & ſubtenſi baſibus æqualibus I R, IQ,
æquales ſint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectę I R,
quadruplum eſt quadrati rectę V R; Ac propterea cũ eiuſdem
quadrati rectę V R, quadruplum quoque ſit, per ſcholium
propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectę Q R; Aequalia erũt
quadrata rectarum I R, Q R, ideoque & rectę ipſæ æquales
: Erat autem I Q, ipſi I R, æqualis. Triangulum igitur
ęquilaterum eſt I Q R. Non ſecus demonſtrabimus, ęquilatera
eſſe triangula ſimilem ſitum cum I Q R, habentia,
nempe K Q R; G I L, G I M; G P S, H P S; N H K, O H K;
R L O, S L O; P M N, Q M N; atq; adeo triangulo I Q R,
ęqualia, cum latera omnium ſint ęqualia inter ſe. Cum enim
in quolibet horum triangulorum unum latus ſubtendat angulum
rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis
minoribus

minoribus laterũ Octaedri; Duo uero reliqua ſubtendunt duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos ſingulos duobus ſegmentis laterũ Octaedri, maiore & minore: Erunt latera unius trianguli lateribus aliorũ æqualia; ac propterea & ipſa triangula æqualia, per coroll. propoſ. 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera KQ, GI, ſubtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorũ DEBF, ABCU, comprehenſos minoribus ſegmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia ſũt. Eodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cum ſubtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorum ille continetur ſegmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic uero ſegmentis AL, AI, maiore & minore quoque. Non ſecus latera IR, GL, æqualia erunt. Aequalia igitur ſunt triangula IQR, GIL, per coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atqui IQR, oſtenſum eſt eſſe æquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterum eſt. Eademque eſt ratio de cæteris habenda.



Atque hæc quidem duodecim triangula ſupponuntur ſex angulis Octaedri, bina uidelicet ſingulis. Ex his conſequitur reliqua octo triangula octo baſibus Octaedri impoſita, uidelicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ, in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque eſſe, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorũ lateribus communia ſint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in ſingulis ſectionibus laterum Octaedri conueniunt ad conſtitutionem anguli ſolidi, (ut uides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, ſolidum angulum R, componentibus.) Icoſaedrum componunt Octaedro inſcriptum, cum Icoſaedri duodecim anguli duodecim ſectiones laterum Octaedri poſſideant. In dato itaque Octaedro Icoſaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

COROL.

COROLLARIVM. I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita ut unius maius ſegmentum, alterius uero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſſe minoris ſegmenti. Cum enim in triangulo æquilatero A D E, maius ſegmentum lateris A D, ſit D I, & D Q, minus lateris D E; Sit autem recta I Q, oſtenſa æqualis rectæ G I, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti A I, cum quadratum rectæ G I, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, A I: 47. primi. Perſpicuum eſt, & rectam I Q, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris A I.

COROLLARIVM. II.

RVRSVS fit, cum octo Icoſaedri baſes collocatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſaedri. Suſcipiatur namque Octaedri ſuperioris, triangulum A E D, in quo collocatum eſt triangulum Icoſaedri I M Q, ſitque C, centrum trianguli A E D, ex quo rectæ educantur C A, C E, C D, C I, C M, C Q. Quoniam igitur latera C A, A M, trianguli C A M, æqualia ſunt lateribus C E, E Q, trianguli C E Q, (quod hæc latera ſint ex centro, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) angulosque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, ut in ſcholio propoſ. 2. lib. 13. oſtendimus; Erunt baſes C M, C Q, æquales. Non ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, C Q. Quare C, centrum erit trianguli I M Q.

COROLLARIVM. III.

NON difficile eſt denique ex dictis colligere, idem centrum eſſe Octaedri, atque ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoſcunque duos angulos Icoſaedri, nimirum rectis X G, X O, ad angulos G, & O; cum latera X A, A G, trianguli X A G, æqualia ſint lateribus X F, F O, trianguli X F O. (Nam X A, X F, ſemidiametri ſunt Octaedri, & AG, FO, ſegmenta minora laterum æqualium Octaedri ſectorum extrema ac media ratione.) angulosque complectantur æquales, ſemirectos uidelicet; (cum AC, EF, diametri ſint quadratorum A B C D, E A F C; ac proinde, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam ſecent.) Aequales erunt & baſes X G, X O. 4. primi. Eodemque argumento oſtendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icoſaedri æquales eſſe. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque eſt Icoſaedri.

PROBL.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

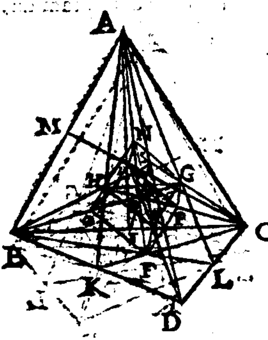
16.quintide INSCRIBATVR dato Octaedro Icoſaedrum; & in
5.quintide. hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri, quarũ octo concentricę ſunt baſibus Octaedri, ex coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. Manifeſtum eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem centris octo baſium Octaedri, reliquos autē duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binę ſingulis ſex angulis Octaedri ſupponuntur, reſidere; At propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur, quamquam non proprie, ut ex definitione 31. lib. 11. apparere poteſt. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubum deſcribere.

DETVR Pyramis A B C D, in qua cubus iubetur deſcribi, ſitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur A E F, B E G, C E H, D E I, quę
15. quarti- cadent in centra baſium oppoſitarum F, G, H, I, eruntque
decimi. perpendiculares ad eaſdem baſes BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectę ducantur A H K, A G L, A I T, B F L, B H S, C I M, C F X, CGS, ſecantes baſes oppoſitas B D, C D, A B, A D, BC, bifariã, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectę ex ſolidis angulis per centrum E, demiſſæ A F, B G, CH, D I, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium rectis lineis coniungantur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H.

Dico



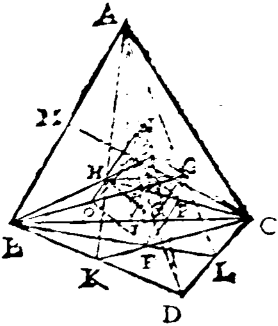
Dico ſolidum N F, contentum quadrilateris N O, N P, N Q, F G, F H, F I, cubum eſſe. Cum enim latera A F, F K, trianguli A F K, ęqualia ſint lateribus A F, F L, trianguli A F L, (quod F K, F L, cum perpendiculares ſint ad B D, C D, ex centro F ductę, oſtendãt ęquales diſtantias rectarum ęqualium B D, C D, a centro F) anguloſque cõtineãt rectos, ex 3. defin. lib. 11. Aequales erũt & baſes A K, A L & anguli K A F, L A F. Rurſus q̃a latera A N, A H, triãguli A N H, ęqualia ſunt lateribus A N, A G, trianguli A N G, (ſunt enim A H, A G, ſemidiametri triangulorum ęquilaterorum ęqualium A B D, A C D,) angulos item comprehendunt ęquales, ut demonſtrauimus; Aequales erunt baſes N H, N G. Haud ſecus oſtendentur ęquales rectę Q G, Q H, ſi rectę ducantur D G, D H, nec non & reliquę, cum omnes ſubtendant ęquales angulos ęqualibus lateribus comprehenſos; ut perſpicuum eſt. Si enim recta ducatur F T, cum latera A F, F T, ęqualia ſint lateribus A F, F K. (Sunt namque F T, F K, diſtantię rectarum ęqualium B C, B D, a centro) & anguli contenti recti; ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli T A F, K A F. Ac proinde cũ latera A N, A I, ęqualia ſint lateribus A N, A H; (Sunt enim A I, A H, ſemidiametri triangulorum ęquilaterorũ ęqualiũ A B C, A B D:) anguloſque contineant ęquales: Aequales erunt baſes N I, N H, &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera, ęquilatera: Oſtendamus iam, ipſa plana eſſe, atque rectangula, ut tandem quadrata eſſe concludamus, atque adeo componere cubum N F.

4. primi

4. primi.

4. primi.

ASSVMATVR quadrilaterũ N Q, ductis rectis G H, N Q. Quoniã in pyramide latera B C, A D, oppoſita ſunt, hoc eſt, non coeuntia in aliquo puncto; ſi eorum puncta media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter, Octaedri in pyramide deſcripti, ut conſtat ex figura propoſ. 2. huius [illegible] S, [illegible] figura reſpondet puncto [illegible] T, puncto T, cum [illegible] B C, A D. Q[illegible] pyramidis, & Octaedri [illegible], ut mox demonſtrabitur [illegible] ſit S T, per E, centrum Pyramidis, æquales que erunt E S, E T, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia B S, C S, perpendiculares ſunt ad A D, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. erunt H S, G S, 13. quartidecimi. ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium B S, C S. Quare latera B S, C S, trianguli B S C, proportionaliter ſecantur, atque idcirco 2. ſexti. H G, parallela eſt lateri B C, ſecatque latera T S, C S, trianguli T S C, (quod quidem pars eſt trianguli E S C,) proportionaliter; Ideoque & S R, tertia pars eſt ipſius S T; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ S E. 15. quartidecimi. Rurſus quia D I, perpendicularis eſt ad triangulum A B C; erit E I, tertia pars ſemidiametri D E, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponitur D E, talium 1. erit E I, ac proinde talium 4, recta D I, ideoque eius dimidium D Q, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua E Q, talium partium erit 1, atque idcirco E Q, tertia pars erit ipſius D E. Eadem ratione E N, tertia pars erit ipſius A E; Ac propterea, cum latera D E, A E, trianguli A E D, 2. ſexti. proportionaliter ſecentur, recta N Q, parallela erit lateri A D, ſecabitque latera E S, E D, trianguli D E S, (quod quidē pars eſt trianguli A E D,) proportionaliter, ideoque, cum E Q, ſit tertia pars ipſius D E; tertia pars erit E R, ipſius S E; Ac proinde S R, duæ tertiæ partes eiuſdem S E. Quoniam igitur utraque H G, N Q, ex S E, duas tertias partes abſtulit, in eodem puncto R; ſecabitur S E, a rectis H G, N Q; Ac idcirco & ipſæ H G, N Q, in eo- 2. undec. dem ſe ſe puncto interſecabunt. Quare in eodem ſunt plano, propterea que & rectæ, H Q, Q G, G N, N H, in eodem cum



cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum N Q. Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum, nunc demonſtremus.

Cvm oſtenſa ſit H G, ipſi B C, parallela, atque adeo triangulum S H G, ſimile triangulo S B C, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6 Erit ut S H, ad H G, ita S B, ad B C; & permutando, 4. ſexti. ut S H, ad S B, ita H G, ad B C: Eſt autem S H, tertia pars ipſius S B: Igitur & H G, tertia pars erit lateris B C. Haud ſecus oſtendemus N Q, tertiam eſſe partem lateris A D. Cum ergo latera B C, A D, ſint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes H G, N Q, æquales. Ac proinde cum ſubtendantur æqualibus lateribus H N, G N; G Q, H Q; N G, Q G; N H, Q H; Aequales erunt quatuor anguli H N G, N G Q, G Q H, Q H N. 8. primi. Quocirca cum ipſi ſint quatuor rectis æquales, ut oſtendimus ad propoſ. 32 lib. 1. recti erunt; ideoque quadratum erit N Q. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum conſtituent: qui ideo Pyramidi dicetur inſcriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor baſium pyramidis, quatuor uero reliqui N, O, P, Q, in biſarijs ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius baſes ductarum reſideant, ut conſtat. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM. I.

CONSTAT ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi N F, O G, P H, Q I, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum; per E, centrum pyramidis tranſeunt.

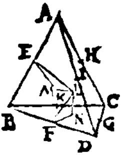
COROLLARIVM. II.

INFERTVR quoque, rectam, quæ coniungit biſarias ſectiones oppoſitorum laterũ pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamq; eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim E R, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis G N H Q, ducta dimidium ſit lateris cubi, ut conſtat; Recta R S, dupla ipſius

E R,

S R, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur R S, oſtenſa ſit tertia pars ipſius S T; perſpicuum eſt, rectam S T, coniungentem S, & T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis A D, B C, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi R S.

LEMMA.



IDEM autem eſſe centrum Pyramidis, & Octaedri in ea deſcripti, ita demonſtrabimus. Sit Pyramis A *B C* D, *cuius omnia ſex latera bifariam ſecentur in E, F, G, H, I, K; & ex* L, *centro Pyramidis in baſes* AB-D, *B C* D, *perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas baſes circunſcribentium cadent, ex coroll. lemmatis* 1. *propoſ.* 10. *lib.* 14. *Coniunctis autem rectis L E, EM, LF,* F *N; quoniam latera L M, M E, trianguli L M E, æqualia ſunt lateribus* L *N, N F, trianguli L N F. (cum enim circuli baſes* A B *D, B C D, circunſcribentes ſint æquales, æqualiter diſtabunt ipſi a centro* L, *per lemma* 2. *propoſ.* 10. *lib.* 14; *Ac propterea eorum diſtantiæ LM, L N, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt M E, N F, diſtantiæ rectarum æqualium A B, B* D, *a centris M, & N, circulorum æqualium) anguloſque comprehendunt rectos, per defin.* 3. *lib.* 11. Aequales erũt 4. *primi* *rectæ L* E, *LF. Eademque ratione hiſce æquales erunt, & inter ſe rectæ L G, L H, L* I, *L K. Quare cum anguli Octaedri in pyramide deſcripti conſtituantur in punctis E, F,* G, *H, I,* K, *ut ex* 2. *propoſ. huius lib. conſtat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos ſint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit cen-*

trum

trum pyramidis, & octaedri in ea deſcripti.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

DATAE Pyramidi ABCD, inſcribatur octaedrũ EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, ut bina ſumantur ex ſingulis angulis ſibi reſpondentia, hoc eſt, in angulos oppoſitos quadratorum octaedri cadentia, ut in propol. 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH; in in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam ſi quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, ut M, cum V, L, X, P, & Q, &c. deſcriptum erit Icoſaedrum in dicto octaedro, ut conſtat ex propoſ. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis ſectionibus duodecim laterum octaedri. Cum ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſium Pyramidis ſint ducta; manifeſtum eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſium pyramidis conſtitui, ternos ſcilicet in ſingulis, quod & terna latera octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nam in baſi A B C, exiſtunt latera FH, HK, KE; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor baſes MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, ut conſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

2. quintide.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum deſcribere.

19. quintide. Pyramidi datæ inſcribatur Icoſaedrum, & in hoc
5. quintide. Dodecaedrum habens uiginti ſuos angulos in centris uiginti baſium Icoſaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cum enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, ut in præcedenti propoſ. diximus; conſiſtent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icoſaedro inſcripti in quatuor baſibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, ut conſtat ex 2. coroll. propoſ. 16. huius lib. Deinde quia cubus Dodecaedro inſcri-
8. quintide. ptus octo ſuos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat; Item cubus pyramidi inſcriptus, quatuor angulos in
18. quintide centris baſium pyramidis, de quibus iam dictum eſt, quatuor autem reliquos in bifarijs ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eiſdem bifarijs ſectionibus perpendicularium dictarum: ſuperſunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum deſcriptum eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiamſi non proprie. Quamobrem in data Pyramide Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

13. PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

Ex centro ſphæræ datum ſolidum complectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum tum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt; quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiter a centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLION.

ITAQVE, *cum quodlibet quinque ſolidorum regularium in quatuor reliquis inſcribatur, ut ſint in uniuerſum viginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie deſcribitur in cubo, octaedro, atque Pyramide, ut perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter unus tantummodo cubus non proprie in Pyramide deſcribitur, ut ex propoſ. 18. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, ut proprie ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti conſtitui uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, ut defin. 31. lib. 11. expoſuimus. Quæ quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Piramide, non conuenit.*

CAETERVM *inter omnia quinque ſolida regularia, unum octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta. In octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens* 16. quintide. *duodecim ſuos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione ſecantur. Deinde Icoſaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro in-* 5. quintide. *ſcriptum eſt, ut conſtat ex propoſ. 17. huius lib. Poſt hæc in Dodecaedro deſcribitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angu-* 8. quintide. *lis Dodecaedri conuenientes, centra baſium octaedri poſſident; ac propterea & cubus ipſe in octaedro deſcriptus eſt. Deniq; in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicetur eſſe* 1. quintide. *deſcripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor baſium octaedri reſideant. Hoc autem priuilegium reliquis ſolidis regularibus denegari, perſpicuum eſt ex dictis.*

NEQVE *uero prætereundum eſt, Dodecaedrum, ſibiq;*

inſcriptum cubum, & huic cubo inſcriptam pyramidem, eadem ſphæra comprehendi. Cum enim quatuor anguli Pyramidis
1.quintide. *ex octo angulis cubi quatuor poſſideant, conueniantq; om-*
8.quintide. *nes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido conſtat, ſphæram Dodecaedro circunſcriptam complecti quoque cubum atque Pyramidem, cum ſphæræ illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat.*

PARI *ratione ex dictis manifeſtum eſt, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem ſimiliter inſcribi Icoſaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum baſium centris conſtituuntur, ut demonſtratum eſt: In centris quidem baſium Icoſaedri, propoſ. 5. 11. & 12. In centris uero baſium octaedri, propoſ. 17. 4. & 6. In centris denique baſium Pyramidis, propoſ. 20. & 18. huius lib.*

VIGINTI *porro prioribus huius lib. propoſitionibus omnes delineationes inſcriptioneſue quinque ſolidorum regularium, unius in alio, quotquot excogitari poſſunt, abſoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, atque Dodecaedrũ, propoſ.2. 18.19. 20: In octaedro uero, Pyramidem, cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum, propoſ.6 4.16.17. In cubo deinde, Pyramidem, Octaedrum, Icoſaedrum, ac Dodecaedrum, propoſ.1.3.14.13. In Icoſaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propoſ. 12.15.11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icoſaedrum, propoſ. 10.9.8.7. deſcripſimus. At uero poſteriori unica propoſitione, qua arte in quouis ſolido regulari ſphæra depingatur, docuimus.*

ELEMENTI DECIMIQVINTI FINIS.

ELEMENTVM

DECIMVMSEXTVM,

Quo uariæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, a Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinq; corporibus.

LIBER TERTIVS.

QVEMADMODVM *in lib. 14. tradita ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphara deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionē in lib. 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla in hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem in præcedenti lib. 15. tradidimus: Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; ut imperfecta quodammodo uideri poſſit tractatio hæc quinq; corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Do-

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

16. quintide
5. quintide.

INSCRIBATVR dato Octaedro Icoſaedrum; & in hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri, quarũ octo concentricę ſunt baſibus Octaedri, ex coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. Manifeſtum eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem centris octo baſium Octaedri, reliquos autẽ duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binę ſingulis ſex angulis Octaedri ſupponuntur, reſidere; At propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur, quamquam non proprie, ut ex definitione 31. lib. 11. apparere poteſt. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

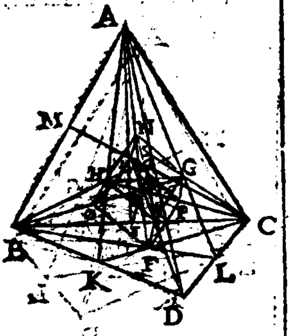
IN data Pyramide cubum deſcribere.

15. quartidecimi.

DETVR Pyramis A B C D, in qua cubus iubetur deſcribi, ſitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur A E F, B E G, C E H, D E I, quę cadent in centra baſium oppoſitarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad eaſdem baſes BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectę ducantur A H K, A G L, A I T, B F L, B H S, C I M, C F X, CGS, ſecantes baſes oppoſitas B D, C D, A B, A D, BC, bifariã, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectę ex ſolidis angulis per centrum E, demiſſæ A F, B G, CH, D I, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium rectis lineis coniungantur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H.

Dico

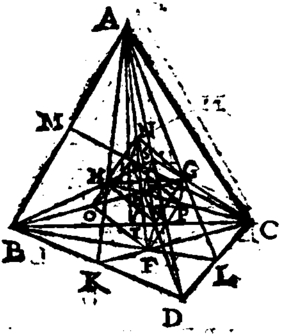
Dico ſolidum N F, contentum quadrilateris N O, N P, N Q,
F G, F H, F I, cubum eſſe. Cum enim latera A F, F K, trian-
guli A F K, ęqualia ſint lateribus A F, F L, trianguli A F L,
(quod F K, F L, cum perpen
diculares ſint ad B D, C D,
ex centro F ductę, oſtendãt
ęquales diſtantias rectarum
ęqualium B D, C D, a cen-
tro F) anguloſque cõtineãt
rectos, ex 3. defin. lib. 11.
Aequales erũt & baſes A K, 4. primi
A L & anguli K A F, L A F.
Rurſus qa latera A N, A H,
triãguli A N H, ęqualia ſunt
lateribus A N, A G, triangu-
li A N G, (ſunt enim A H,
A G, ſemidiametri triangu-



lorum ęquilaterorum ęqualium A B D, A C D,) angulos
item comprehendunt ęquales, ut demonſtrauimus; Aequa
les erunt baſes N H, N G. Haud ſecus oſtendentur ęquales 4. primi.
rectę Q G, Q H, ſi rectę ducantur D G, D H, nec non & re-
liquę, cum omnes ſubtendant ęquales angulos ęqualibus la-
teribus comprehenſos; ut perſpicuum eſt. Si enim recta
ducatur F T, cum latera A F, F T, ęqualia ſint lateribus A F,
F K. (Sunt namque F T, F K, diſtantię rectarum ęqualium
B C, B D, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib.
11. Aequales erunt anguli T A F, K A F. Ac proinde cũ
latera A N, A I, ęqualia ſint lateribus A N, A H; (Sunt enim
A I, A H, ſemidiametri triangulorum ęquilaterorũ ęqualiũ
A B C, A B D:) anguloſque contineant ęquales: Aequa-
les erunt baſes N I, N H, &c. Sunt igitur ſex dicta quadri- 4. primi.
latera, ęquilatera: Oſtendamus iam, ipſa plana eſſe, atque
rectangula, ut tandem quadrata eſſe concludamus, atque
adeo componere cubum N F.

ASSVMATVR quadrilaterũ N Q, ductis rectis G H,
N Q. Quoniã in pyramide latera B C, A D, oppoſita ſunt,
hoc eſt, non coeuntia in aliquo puncto; ſi eorum puncta
media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter, O-
ctaedri in pyramide deſcripti, ut conſtat ex figura propoſ. 2.
huius

huius lib. Nam punctum S, huius figuræ reſpondet puncto
H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa ſint latera
oppoſita, ſiue non coeuntia B C, A D. Quocirca cum
idem ſit centrum pyramidis, & Octaedri in ipſa deſcripti, ut
mox demonſtrabimus, tranſibit ST, per E, centrum Pyramidis, æqualesque erunt
ES, ET, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia
B S, C S, perpendiculares
ſunt ad AD, ꝑ ſcholiũ ꝓpoſ.
12. lib. 13. erunt H S, G S,
15. quartidecimi. ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium B S,
C S. Quare latera BS, C S,
trianguli BSC, proportionaliter ſecantur, atque idcirco
2. ſexti. HG, parallela eſt lateri B C,
ſecatque latera TS, C S, trianguli TSC, (quod quidem pars
eſt trianguli BSC,) proportionaliter; Ideoque & SR, tertia
pars eſt ipſius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidię SE.
15. quartidecimi. Rurſus quia D I, perpendicularis eſt ad triangulum A B C;
erit E I, tertia pars ſemidiametri D E, ex coroll. 2. propoſ. 13.
lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1.
erit E I, ac proinde talium 4, recta D I, ideoque eius dimidium D Q, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua
E Q, talium partium erit 1, atque idcirco E Q, tertia pars
erit ipſius D E. Eadem ratione E N, tertia pars erit ipſius
A E; Ac propterea, cum latera D E, A E, trianguli A E D,
2. ſexti. proportionaliter ſecentur, recta N Q, parallela erit lateri
A D, ſecabitque latera E S, E D, trianguli D E S, (quod
quidē pars eſt trianguli A E D,) proportionaliter, ideoque,
cum E Q, ſit tertia pars ipſius D E; tertia pars erit E R,
ipſius S E; Ac proinde S R, duæ tertiæ partes eiuſdem
S E. Quoniam igitur utraque H G, N Q, ex S E, duas
tertias partes abſtulit, in eodem puncto R; ſecabitur S E,
a rectis H G, N Q; Ac idcirco & ipſæ H G, N Q, in eodem
2. undec. ſe ſe puncto interſecabunt. Quare in eodem ſunt plano, propterea que & rectæ, HQ, Q G, G N, N H, in eodem
cum



cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum N Q. Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum, nunc demonſtremus.

Cvm oſtenſa ſit H G, ipſi B C, parallela, atque adeo triangulum S H G, ſimile triangulo S B C, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6 Erit ut S H, ad H G, ita S B, ad B C; 4. ſexti. & permutando, ut S H, ad S B, ita H G, ad B C: Eſt autem S H, tertia pars ipſius S B: Igitur & H G, tertia pars erit lateris B C. Haud ſecus oſtendemus N Q, tertiam eſſe partem lateris A D. Cum ergo latera B C, A D, ſint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes H G, N Q, æquales. Ac proinde cum ſubtendantur æqualibus lateribus H N, G N; G Q, H Q; N G, Q G; N H, Q H; Aequales erunt quatuor anguli H N G, N G Q, G Q H, Q H N. 8. primi. Quocirca cum ipſi ſint quatuor rectis æquales, ut oſtendimus ad propoſ. 32 lib. 1. recti erunt; ideoque quadratum erit N Q. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum conſtituent: qui ideo Pyramidi dicetur inſcriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor baſium pyramidis, quatuor uero reliqui N, O, P, Q, in bifarijs ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius baſes ductarum reſideant, ut conſtat. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM. I.

Constat ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi N F, O G, P H, Q I, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum; per E, centrum pyramidis tranſeunt.

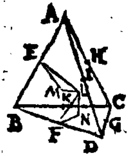
COROLLARIVM. II.

Infertvr quoque, rectam, quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorum laterũ pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamq; eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim E R, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis G N H Q, ducta dimidium ſit lateris cubi, ut conſtat; Recta R S, dupla ipſius

E R,

E R, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur R S, oſtenſa ſit tertia pars ipſius S T; perſpicuum eſt, rectam S T, coniungentem S, & T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis A D, B C, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi R S.

LEMMA.



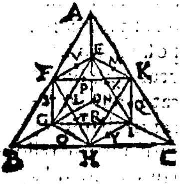
IDEM autem eſſe centrum Pyramidis, & Octaedri in ea deſcripti, ita demonſtrabimus. Sit Pyramis A *B C* D, *cuius omnia ſex latera bifariam ſecentur in E, F, G, H, I,* K; *&* *ex* L, *centro Pyramidis in baſes* AB-D, *B C* D, *perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas baſes circumſcribentium cadent, ex coroll. lemmatis* 1. *propoſ.* 10. *lib.* 14. *Coniunctis autem rectis L E, EM, LF,* F *N; quoniam latera L M, M E, trianguli L M E, æqualia ſunt lateribus* L N, *N F, trianguli L N F. (cum enim circuli baſes* A B *D, B C D, circumſcribentes ſint æquales, æqualiter diſtabunt ipſi a centro L, per lemma* 2. *propoſ.* 10. *lib.* 14; *Ac propterea eorum diſtantiæ LM, L N, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt M E, N F, diſtantiæ rectarum æqualium A B, B* D, *a centris M, & N, circulorum æqualium) anguloſque comprehendunt rectos, per defin.* 3. *lib.* 11. *Aequales erũt* 4. *primi* *rectæ L* E, *LF. Eademque ratione hiſce æquales erunt, & inter ſe rectæ L G, L H, L* I, *L* K. *Quare cum anguli Octaedri in pyramide deſcripti conſtituantur in punctis E, F,* G, *H, I,* K, *ut ex* 2. *propoſ. huius lib. conſtat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos ſint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum*

trum pyramidis, & octaedri in ea deſcripti.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

DATAE Pyramidi ABCD, inſcribatur octaedrũ EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, ut bina ſumantur ex ſingulis angulis ſibi reſpondentia, hoc eſt, in angulos oppoſitos quadratorum octaedri cadentia, ut in propol. 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH; in in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam ſi quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coiunxerimus lineis rectis, ut M, cum V, L, X P, & Q, &c. deſcriptum erit Icoſaedrum in dicto octaedro, ut conſtat ex propoſ. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis ſectionibus duodecim laterum octaedri. Cum ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſium Pyramidis ſint ducta; manifeſtum eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſium pyramidis conſtitui, ternos ſcilicet in ſingulis, quod & terna latera octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nam in baſi A B C, exiſtunt latera FH, HK, KE; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor baſes M X Q, R O Y, L S V, N P T, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, ut conſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



2. quinti de.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum deſcribere.

19.quintide PYRAMIDI datæ inſcribatur Icoſaedrum, & in hoc 5.quintide. Dodecaedrum habens uiginti ſuos angulos in centris uiginti baſium Icoſaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cum enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, ut in præcedenti propoſ. diximus; conſiſtent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icoſaedro inſcripti in quatuor baſibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, ut conſtat ex 2. coroll. propoſ. 16. huius lib. Deinde quia cubus Dodecaedro 8.quintide. inſcriptus octo ſuos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inſcriptus, quatuor angulos in 18.quintide centris baſium pyramidis, de quibus iam dictum eſt, quatuor autem reliquos in biſarijs ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eiſdem biſarijs ſectionibus perpendicularium dictarum: ſuperſunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum deſcriptum eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiamſi non proprie. Quamobrem in data Pyramide Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

13. PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

Ex centro ſphæræ datum ſolidum complectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1, propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum tium baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiter a centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLION.

ITAQVE, *cum quodlibet quinque ſolidorum regularium in quatuor reliquis inſcribatur, ut ſint in uniuerſum uiginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie deſcribitur in cubo, octaedro, atque Pyramide, ut perſpicuum eſt ex propoſ.* 13. 17. *&* 20. *huius lib. Similiter unus tantummodo cubus non proprie in Pyramide deſcribitur, ut ex propoſ.* 18. *huius lib. eſt manifeſtum. Nam, ut proprie ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti conſtitui uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, ut defin.* 31. *lib.* 11. *expoſuimus: Quæ quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Piramide, non conuenit.*

CAETERVM *inter omnia quinque ſolida regularia, unum octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta. In octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione ſecantur. Deinde Icoſaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro inſcriptum eſt, ut conſtat ex propoſ.* 17. *huius lib. Poſt hæc in Dodecaedro deſcribitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra baſium octaedri poſſident; ac propterea & cubus ipſe in octaedro deſcriptus eſt. Deniq; in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicetur eſſe deſcripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor baſium octaedri reſideant. Hoc autem priuilegium reliquis ſolidis regularibus denegari, perſpicuum eſt ex dictis.*

16. *quintide.*
5. *quintide.*
8. *quintide.*
1. *quintide.*

NEQVE *uero prætereundum eſt, Dodecaedrum, ſibiq;*

inſcriptum cubum, & huic cubo inſcriptam pyramidem, eadem ſphæra comprehendi. Cum enim quatuor anguli Pyramidis ex octo angulis cubi quatuor poſſideant, 1. quintide. *conueniantq; omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri;* 8. quintide. *liquido conſtat, ſphæram Dodecaedro circumſcriptam complecti quoque cubum atque Pyramidem, cum ſphæræ illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat.*

PARI *ratione ex dictis manifeſtum eſt, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem ſimiliter inſcribi Icoſaedro, Octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum baſium centris conſtituuntur, ut demonſtratum eſt: In centris quidem baſium Icoſaedri, propoſ. 5. 11. & 12. In centris uero baſium Octaedri, propoſ. 17. 4. & 6. In centris denique baſium Pyramidis, propoſ. 20. & 18. huius lib.*

VIGINTI *porro prioribus huius lib. propoſitionibus omnes delineationes inſcriptioneſue quinque ſolidorum regularium unius in alio, quotquot excogitari poſſunt, abſoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, atque Dodecaedrũ, propoſ. 2. 18. 19. 20: In octaedro uero, Pyramidem, cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum, propoſ. 5 4. 16. 17. In cubo deinde, Pyramidem, Octaedrum, Icoſaedrum, ac Dodecaedrum, propoſ. 1. 3. 14. 13. In Icoſaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propoſ. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icoſaedrum, propoſ. 10. 9. 8. 7. deſcripſimus. At uero poſteriori unica propoſitione, qua arte in quouis ſolido regulari ſphæra depingatur, docuimus.*

ELEMENTI DECIMIQVINTI FINIS.

◆

ELEMENTVM

DECIMVMSEXTVM,

Quo uariæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinq; corporibus.

LIBER TERTIVS.

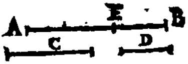
* * *

QVEMADMODVM in lib. 14. traditæ ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum eorundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionẽ in lib. 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla in hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem in præcedenti lib. 15. tradidimus: Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; ut imperfecta quodammodo uideri poſſit tractatio hæc quinq; corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris A B, deſcripti ſit D; diuidaturque A B, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet A E, maius ſegmentum ad E B, minus. Cum enim, ut in ſcholio ultimę propoſ. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubuſq; in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphæra; Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit E B, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit ut C, latus Dodecaedri cubo circumſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, ut A E, maius ſegmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedeum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris ſegmenti AE, ad minus ſegmentum E B. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis an

gulo

gulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur a recta illũ angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

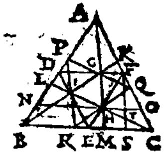
In pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppoſitum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, a recta BE, ſubtendente angulum A, ſecari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, que ſecet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD, per coroll. propoſ. 8. lib. 15. eſt parallela; ſecabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: Atqui AD, in H, ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentũ DH. Igitur & AF, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

2. ſexti.
8. tertijdec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita ut prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum unius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triãgulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM pyramidis ſit A B C, cuius latera ſecentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, conſtituentes G H I, triangulum Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, ut conſtat ex propoſ. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, A M. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſaedri GHI, hoc eſt, rectam BK, tranſire per puncta G, I; & rectam C L, per puncta H, I; & rectam A M, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta N O, ipſi B C, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FEC, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo ABC, per idem coroll. Quare H O, recta æqualis eſt rectæ F H, maiori ſegmento rectæ F E, ſeu D F, ipſi æqualis: (Eſt enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera ſubtendãt angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidijs ſcilicet æqualium laterum eiuſdem trianguli comprehen



4. primi. ſos; ideoque æqualia ſint.) Eſt autem & N H, æqualis toti
34. primi. DF, in parallelogrammo DH, propterea quod FH, DF, pa-
2. ſexti. rallelæ ſint rectis A B, BC, ſeu NO. Igitur recta NO, compo
3. tertijdec. ſita ex NH, tota, & HO, maiori ſegmento, ſecta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ BC, NO, DF, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem A M, ex ijs, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat, ipſam A M, tranſire per puncta G, H. Haud ſecus oſtendemus BK, per puncta G, I; & C L, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelę lateribus AC, AB; Atque idcirco rectę BK, CL, A M, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri G H I.

AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniã igit̃ A F, æqualis eſt rectæ DF, ſeu rectę FE, cuius maius ſegmentũ fuit FH, hoc eſt, FO, illi ęqualis; Erit quoq;
5. tertijdec. FO, maius ſegmẽtũ rectæ A F; ac proinde tota AO, ſecta in F, extre-

F, extrema ac media ratione: Eſt autem ut AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO; & ut AG, ad GH, ita AQ ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectę AH, AC, AL, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, ſuntque maiora ſegmenta AG, AQ, AP. Rectę ergo AQ, AL, ſegmenta maiora rectarum æqualiū AC, AB, æquales erunt. Quia uero eſt ut AQ, maius ſegmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius ſegmē tum; Et eſt AQ, recta rectę AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectę AP. Quare & recta AP, minus ſegmentū erit lateris AB, maiuſque reliqua AP; ac propterea recta PQ, ſecabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadē ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, ſecabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, ſecabit extrema ac media ratione, atque adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam uero ſingula latera trianguli PQR, cum ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos, æqualia inter ſe ſunt; erit triangulum PQR, ex ipſis compoſitum, æquilaterum cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri GHI: (Cum enim in triāgulo ACL, recta PQ, parallela ſit lateri CL, ſecabuntur PQ, LC, in eaſdem rationes, ex ijs, quæ ad propoſ. 4. lib. 6. demonſtrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela eſt lateri AL, ſecans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam ſecatur in G. Eademque eſt ratio de reliquis QR, RP.) Ac propterea triangulum Icoſaedri GHI, inſcriptum eſt triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera baſis pyramydis extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur in G, H, I, ab angulis baſis Icoſaedri GHI. Quapropter, ſi ab angulis trianguli *Pyramidis*, &c. Quod oſtendendum erat.

2. *ſexti.*

2. *quarti de.*

4. *primi.*

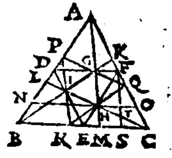
2. *ſexti.*

COROLLARIVM

Ex his facile colligi poteſt, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſſe ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab uno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema

quoque

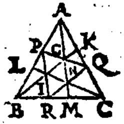
quoque ac media ratione. Cum enim, ut conſtat ex propoſ. 16. lib.15. GHI, triangulum ſit Icoſaedri in octaedro, cuius baſis DEF, deſcripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, eſt æquale, recta FS, parallela rectæ AM, ſecans BC, HO, in S, & T. 2. ſexti. Cum igitur MC, biſariam ſecetur in S, ob triangulum AMC; ſitque MS, ipſi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS; 34. primi. Erit & SC, æqualis eidem GF, minori ſegmento rectę DF; Ac propterea cum totę DF, EC, ęquales ſint; erit quoq; reliqua ES, reliquæ DG, maiori ſegmento æqualis: Ideoq; EC, in S, ſecta erit extrema ac media ratione. 2. ſexti. Deinde quia FE, FS, ſimiliter ſecantur; ſecatur autem FE, extrema ac media ratione; ſecabitur & FS, in T, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit FT, recta æqualis exiſtens lateri 34. primi. Icoſaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.



THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea pyramide deſcripti.

Basis Pyramidis ſit ABC, cuius latera extrema ac media ratione ſecentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, baſim Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcriptam triangulo æquilatero PQR, cuius anguli latera trianguli ABC, ſecent extrema ac media ratione ĩ P, Q, R, & ipſa latera PQ, QR, RP, biſariam diuidantur in G, H, I, ut in propoſ. præcedenti demonſtratũ eſt. Dico AP, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potẽtia lateris Icoſaedri HI. Cũ. n. PQ, dupla ſit potentia minoris ſegmenti AP, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 15. quadrupla uero potentia rectæ HI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. qđ PQ, recta dupla ſit rectæ PG, hoc eſt, ſibi æqualis HI, ob parallelogrammũ PH; Erit PQ, potentia 4. &



AP 2.

AP, 2. & HI, 1. Quãobrẽ AP, dupla erit potẽtia rectæ HI. Minus ergo ſegmentũ lateris, &c. Quod erat demonſtrãdũ.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his latus Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. Cum enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis; ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rõnale, cũ diametro potẽtia ſit cõmẽſurabile. Quare minus ſegmẽtũ lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti Apotome erit; Atq; adeo cũ minori ſegmẽto lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile; (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri.) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ. 104. lib. 10. Apotome.

13.tertijde.
6. decimi.
6.tertijdec.
6.decimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potẽtia dimidiũ eſt lateris Pyramidis ĩ eo deſcriptæ: Latus uero Pyramidis duplũ eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: latus deniq; cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo deſcriptę diameter ſit baſis cubi, ut cõſtat ex propoſ. 1. lib. 15. Sit aũt quadratũ huius diametri duplũ baſis cubi, hoc eſt, quadrati lateris cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Manifeſtum eſt, latus cubi dimidium eſſe potẽtia lateris Pyramidis in cubo illo deſcriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifariã ſectiones laterum Pyramidis conſtituunt octaedrum in pyramide deſcriptum, ut liquet ex propoſ. 2 lib. 15. Eſt autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifariãs eius ſectiones, cum ea recta æqualis ſit dimidio lateris trianguli, ut conſtat ex 4. propoſ. lib. 4. Perſpicuum eſt, ~~latus pyramidis~~ duplum eſſe longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti.

DENIQVE, quia diameter ſphæræ, ſeu octaedri potentia eſt dupla lateris octaedri; Eſt autem latus cubi æquale diametro octaedri ſibi inſcripti, cũ diameter octaedri coniũgat cẽtra baſiũ cubi oppoſitarũ, ut in coroll. propoſ. 3. lib. 15. diximus: patet, lat⁹ cubi potẽtia eſſe duplũ lateris octaedri in eo de-

14.tertijde.

eo deſcripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

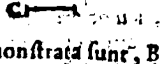
THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia eſt dimidia lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ.

Cvm enim Pyramis inſcripta cubo, deſcripta ſit quoq; in Dodecaedro, cui ille cubus inſcribitur, ut docuimus propoſ. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius ſegmentum, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo deſcribitur; exiſtat denique latus cubi dimidium potentia lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius eſſe ſegmentum rectæ, quæ potentia dimidia eſt lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ. Quod erat demonſtrandum. 5. ſextidec.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum; Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.



Sit latus cubi A, & latus Icoſaedri in eo deſcripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo deſcripti C. Dico B, latus Icoſaedri medio loco eſſe proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 15. demonſtrata ſunt, B, latus Icoſaedri maius ſegmentum ſit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 13. eiuſdem lib. oſtendimus, minus ſegmentum

ſit

ſit eiuſdem lateris cubi. Planum fit, ita eſſe A, totam ad B, maius ſegmentum, vt B, maius ſegmentum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti.

CVM enim per ea, quæ propoſ. 18. lib. 15. ſunt demon-
ſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri ba-
ſis cubi in ea deſcripti; (oſtenſum enim eſt ibi, GH, diame-
trum baſis cubi inſcripti tertiam eſſe partem lateris Pyrami-
dis BC,) Et quadrata proportionē habeant laterum dupli- 20. ſexti.
catam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum qua-
drati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cum noncupla pro-
portio ſit triplę duplicata, ut in his numeris 1. 3. 9. apparet.
Quare, cum quadratum diametri baſis cubi duplum ſit ip-
ſius baſis cubi; ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. fit, ut ſi ponatur
baſis cubi, hoc eſt, quadratum lateris cubi 1. quadratum
eiuſdem baſis diametri ſit 2. & quadratum lateris pyramidis
18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum
eſt lateris cubi in ea deſcripti. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro deſcriptus, inſcriptus
quoque ſit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inſcribitur, ut
docuimus in ſcholio ꝓpoſ. ultimę lib. 15. Erit latus Pyrami-
dis potentia octodecuplum lateris cubi ſibi & Dodecaedro 8. ſextidec.
inſcripti:

inſcripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentia duplum, minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi.

VT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta coniungens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentium prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi recta GI, ſubtendens angulum rectum GAI, minoribus ſegmentis AG, AI, comprehēſum;) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare, cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſſit duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit unius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

47. *primi.*

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

SIT una ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis quadratum ABCD, triangula uero ad E, uerticem, ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod ſi coniungantur rectæ

FG,

FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro deſcripti, ut demonſtrauimus propoſ. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, ſeſquialtera eſt rectæ EH, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit E H: Atqui ut EO, ad EH, ita eſt EB, ad EL. Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit EL, ſeu LM, ſibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri E B, partium erit 9. & quadratum rectæ L M, nimirum K L M N, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, uidelicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum L N, duplum ſit quadrati G I, ſibi inſcripti, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Eſt enim L N, quadratum ex diametro quadrati G I, deſcriptum; cum G I, diameter (ſi ducatur) æqualis ſit lateri L M. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum, &c. Quod erat demonſtrandum.

2. ſexti

33. primi.

COROLLARIVM.

QVIA uero latus cubi extrema ac media ratione diuiſum efficit maius ſegmentum latus Dodecaedri, cui inſcribitur, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 15. Inſcribunturque Dodecaedrum, & cubus ſibi inſcriptus, eidem octaedro, ut docuimus in ſcholio propoſ. ultimæ lib. 15. Perſpicuum fit, octaedri latus eſſe potentia quadruplum ſeſquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti: Eſt. n. eiuſmodi recta latus cubi eidem octaedro inſcripti, cuius quadruplum ſeſquialterum potentia eſſe oſtendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum, eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVO

QVONIAM Icoſaedri in cubo deſcripti ſex latera oppoſita in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum bifarias ſectiones coniungunt tres rectę lateri cubi æquales, ut conſtat ex propoſ. 14. lib. 15 eiuſque ſcholio. Et in bifarijs ſectionibus dictorum ſex laterum Icoſaedri reſident ſex anguli octaedri in Icoſaedro deſcripti, ex propoſ. 15. eiuſdem lib. 15 Fit, diametrum octaedri in dicto Icoſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo Icoſaedrum deſcribitur. Quare, cũ per ea, quæ ad propoſ. 14. lib. 15. oſtendimus, latus Icoſaedri ſit maius ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuiſi; Erit quoque idem latus Icoſaedri maius ſegmentum diametri octaedri in illo Icoſaedro deſcripti: Atqui diameter ſphæræ, ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. Igitur latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti: Quod oſtendendum erat.

14. tertij de.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione. Latus uero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ.

OSTENSVM eſt in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Minus ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione ſecti eſſe latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius ſegmentum, uel maioris ſegmenti ad minus, (quod

tota

tota linea, maius ſegmentum, atque minus, ſint tres rectæ continue proportionales:) liquido conſtat, proportionem lateris cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti eſſe quoque proportionis maioris ſegmenti ad minus duplicatam.

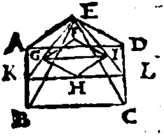
PRAETEREA, cum conſtet ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. maius ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuiſi latus eſſe Dodecaedri, cui cubus inſcribitur; manifeſtum eſt eſſe, ut latus Dodecaedri, hoc eſt, maius ſegmentum, ad latus cubi in ipſo deſcripti, hoc eſt, ad totam lineam extrema ac media ratione ſectam, ita minus ſegmentum ad maius. Cum enim ſit, ut tota linea ad maius ſegmentum, ita maius ſegmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, ut maius ſegmentum ad totam lineam, ita ſegmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis.

SIT una ſex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius baſis quadratum ABCD, triangula autem ad uerticem E, ſint ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro deſcripti conſtituentibus, ut docuimus in propoſ. 4. lib. 15. Quoniam uero Pyramis in cubo deſcripta, deſcribitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, ut in ſcholio propoſ ultimæ lib. 15. expoſuimus; Eſtque latus pyramidis in cubo deſcriptæ diameter baſis cubi, ut conſtat ex propoſ. 1. lib 15. Erit ducta diameter G I, latus Pyramidis in Octaedro dicto deſcriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, ſeſquialterum eſſe lateris Pyramidis G I. Ductis enim rectis E G K, E I L, diuidentur latera A B, C D, bifariam in K, L, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. ipſæque E K, E L, ſeſquialteræ erunt rectarū E G, E I, per coroll. propoſ. 18.

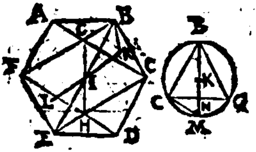
2. *ſexti.* lib. 14. Ac propterea GI, parallela erit rectæ *K* L, auferens, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum EGI, ſimile triangulo EKL. Quare erit, ut EK, ad KL ita EG, ad GI; & permutando, ut EK, ad EG, ita KL, ad GI; ideoque cum EK, ſeſquialtera ſit ipſius EG, erit & KL, ſeſquialtera ipſius GI. *33. primi* Cum ergo BC, æqualis ſit ipſi KL, quod & BK, CL, æquales ſint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri ſeſquialterum lateris Pyramidis GI, ſibi inſcriptæ. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertium quadrati lateris Icoſaedri.

Sit Icoſaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrum *I*; triangula uero oppoſita & parallela, per coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra KL. Ducatur ex centro I, ad planū BCG, perpendicularis IK, cadens. ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. in cētrū *K*. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per ſcholiū propoſ. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quā ob rem, cum cubus in Icoſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium Icoſaedri, ut conſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit KL, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per I, centrum Icoſaedri. Cum ergo eadē ratione reli-



quę-quæ diametri cubi per idem centrũ I, tranſeant, erit I, quoq; centrum cubi inſcripti, ideoque I K, I L, ſemidiametri ęquales: Coniuncta autem *K* B, ſemidiametro circuli triangulum B C G, circunſcribentis, erit angulus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum B K, K I. Igitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri B I, ut in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis, & *K* L. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris B K, K I, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi *K* L, (quod triplum eſt quadrati lateris cubi,) ex quadrato diametri Icoſaedri B E, remanet quadratum diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum B C G, circulus, extenſaque B K, uſque ad M, quæ ſecet C G, in N, ducatur quoque recta C M. Quoniam igitur B N, per centrum K, ducta perpendicularis eſt ad C G; per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. erit recta B C, potentia ſeſquitertia rectæ B N; Vt autem B C, ad BN, ita eſt B M, ad B C, quod BC, ſit media proportionalis inter B M, & BN, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. cum angulus B C M, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur B M, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ B C; Ac propterea quadratum diametri B M, ſeſquitertium eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

47. primi.

15. tertijdec.

12. quartidecimi.

31. tertij.

COROLLARIVM.

HINC fit diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis, oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri BE, ęquale eſſe quadratis diametri cubi K L, & diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcri-
17.tertÿdec. pti duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, ut manifeſtum eſt ex propoſ. 9. lib. 15. Eſt autem rectæ dictas ſectiones coniungentis diuiſæ extrema ac media ratione minus ſegmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus ſegmentum eſſe eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum huiuſmodi recta coniungat bifarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cuius quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

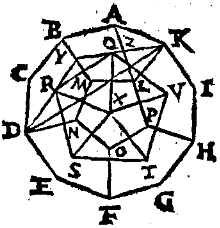
CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodem Icoſaedro deſcribantur, ut docuimus in ſcholio propoſ. ultimę lib. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphæræ pyramidem circundantis:
13.tertÿdec. poteſt autem diameter ſphæræ ſeſquialterum lateris pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris Pyramidis in ipſo cubo, & Icoſaedro deſcriptæ: Atqui diameter circuli baſim Icoſaedri circunſcribentis ſeſquitertium poteſt

lateris

lateris Icoſaedri, ut in demonſtratione propoſ. 15. huius lib: demonſtrauimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circundantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſim Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.

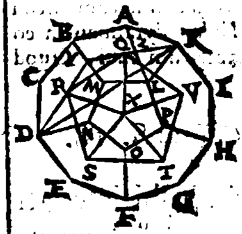
THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, ut minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſitæ.



Sit dimidium Dodecaedri contentum ſex pentagonis A B M L K, L K I H P, P H G F O, O F E D N, N D C B M, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet uidelicet duo proxima) iungantur rectis Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni L M N O P, ut oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſim B M, per centra R, Q, rectæ demittantur D Y, K Y, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus B M, per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 12. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta A L, angulo K; ſe-

2. ſextidec. cabitur perpendicularis K Y, in Z, extrema ac media ratio-
ne. Dico ita eſſe latus Dodecaedri L M, ad latus Icoſaedri
ſibi inſcripti Q R, ut K Z, minus ſegmentum perpendicu-
laris K Y, ad rectam Q Y, inter centrum Q, & latus B M,



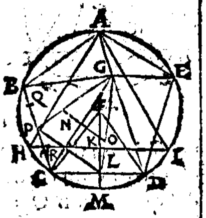
interceptam. Subtenſa enim recta
D K, quæ, per demonſtrata in
ſcholio propoſ.13. lib. 15. latus eſt
cubi, in quo Dodecaedrū propoſi-
tum deſcribitur; erit L M, latus
Dodecaedri, minus ſegmētum ip-
ſius D K, ſi extrema ac media ra-
tione ſecetur, ex eodē ſcholio pro-
poſ. 13. lib. 15. Quoniā uero late-
ra Y D, Y K, trianguli Y D K, pro-
portionaliter ſecantur in R, & Q; (ſunt enim R D, Q K, ſe-
midiametri circulorum æqualium æquales; necnon & Y R,
Y Q, diſtantiæ nimirū rectæ B M, a centris R, & Q, eorun-
2. ſexti. dem circulorū æqualium) parallela erit Q R, ipſi D K; Ideoq;
triangulū Y R Q, triangulo Y D K, ſimile, per coroll. pro-
4 ſexti. poſ.4. lib.6. Quā ob rē erit, ut D K, ad K Y, ita Q R, ad Q Y;
2. quartide. Vt autē D K, tota ad totā K Y, ita eſt L M, minus ſegmentū
ad minus K Z. Vt igitur L M, ad K Z, ita erit Q R, ad Q Y;
Et permutando, ut L M, latus Dodecaedri, ad Q R, latus Ico
ſaedri ſibi inſcripti, ita K Z, minus ſegmentum perpendicu-
laris K Y, ad Q Y, inter centrum Q, & latus B M, interpoſi-
tam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri la-
tus, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

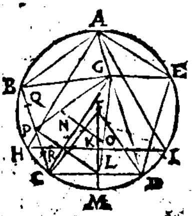
1. SI dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minusque eius ſegmentum a toto latere Icoſaedri ſublatum; A reliqua quoque recta pars rurſum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.

Circa pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circulus deſcribatur, cuius centrum F; & ſuper quinque latera pentagoni ~~quinque~~ triangula æquilatera excitentur conſtituentia angulum ſolidum Icoſaedri G, ex ijs, quæ in propoſ. 16. lib. 13. ſunt demonſtrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inſcribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales ſunt, cum quilibet duas quintas partes totius circunferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cum ſint tertiæ partes eiuſdem circunferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales, proptereaque rectæ HI, CD, parallelæ, per ſcholium propoſ. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, ſecans rectas HI, CD, biſariam in K, & L; coniuganturque rectæ FC, FD. Suſcipiantur inſuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. latera oppoſita BC, CD, biſariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuiſa eſt CD, biſariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, ut conſtat ex demonſtratis in propoſ. 5. lib. 15. latus erit Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Denique BP, dimidium lateris Icoſaedri ſecetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori ſegmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem eſſe lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere trianguli æquilateri HI, ſecetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione ſecta faciat maius ſegmentum æquale perpendiculari FK, per corollariũ propoſitionis 2. lib. 14.) ſit autem maiori ſegmento FK, æqualis recta KM, per corollariũ propoſ. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. maius ſegmentum KM, ſectum quoque in L, a minori ſegmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ ſuiplius

3. tertij.



ſegmento L M. Quoniam uero iuncta P L, eſt latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, deſcripti, idemque centrum F, habentis, ex ſcholio ultimo lib. 4. ideoque ſimilis illi; erunt triangula F C D, F P L, (ſi recta duceretur FP,) ſimilia, per ſcholium propoſ. 20 lib 6. 4. ſexti. Quare ut FC, ad CD, ita erit F L, ad L P; & permutando, ut F C, ad F L, ita C D, ad L P: Atqui F C, hoc eſt, ſibi æqualis F M, excedit rectam F L, minore ſegmento dimidij ipſius FM, nempe minore ſegmento rectæ KM, ut oſtendimus. Recta igitur C D, uel ſibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore ſegmento dimidij ipſius B C, nimirum minore ſegmento rectæ BP, quod fuit B Q; ideoque reliqua C Q, rectæ PL, æqualis erit. Rurſus quia G P, G L, proportionaliter ſecantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplæ ſint ipſarum N P, OL, 2. ſexti. per coroll. propoſ. 18. lib. 14.) parallelæ erunt P L, N O; ac proinde triangulum G N O, triangulo G P L, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Igitur erit ut GP, ad PL ita GN, ad NQ; & permutando, ut GP, ad GN, ita P L, ad NO: Eſt autem G P, ipſius G N, ſeſquialtera, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. Quare & PL hoc eſt, ſibi æqualis C Q, ſeſquialtera erit ipſius N O; Ac proinde, cum C Q, ſeſquialtera quoque ſit rectæ Q R. (Nam qualium partium 3. eſt CQ, talium 1. eſt C R, per conſtructionem; Ac propterea earundem 2. Q R,) æqualis erit Q R, ipſi N O, lateri Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Si dimidium itaque lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

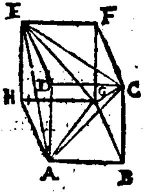


THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS ſibi inſcriptæ Pyramidis triplus eſt.

In cubo AF, deſcripta ſit pyramis ACEG. Dico cubum pyrami-

pyramidis triplum eſſe. Cum enim inſcriptam pyramidem æquilateram circumſtent quatuor pyramides fundatæ ſuper quatuor baſes ipſius, uertices uero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non reſident quatuor anguli pyramidis æquilateræ inſcriptę: (Nam ſuper baſin ACE, fundatur pyramis ACED; ſuper baſin AEG, pyramis AEGH; ſuper baſin CEG, pyramis CEGF; & ſuper baſin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales ſunt, ex 10. defin. lib. 11. cum contineantur planis ſimilibus æqualibusque & multitudine, & magnitudine. Quælibet enim conſtat tribus æqualibus, & ſimilibus triangulis, dimidijs ſcilicet quadratorum cubi, ut patet, & uno triangulo pyramidis æquilateræ inſcriptæ.) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum ſextuplus; (Nam exempli cauſa, pyramis ABCG, baſim habens ABC, dimidium baſis cubi BD, altitudinem uero eandem, quam cubus, rectam uidelicet BG, tertia pars eſt, per coroll. .propoſ.7.lib.12. priſmatis eandem baſin, & altitudinem habentis. Cum igitur cubus duplus ſit eiuſmodi priſmatis, quod & baſis cubi dupla ſit baſis priſmatis; manifeſtum eſt pyramidem ABCG, ſextam partem eſſe cubi, proptereaque cubum pyramidis illius eſſe ſextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circunſtantes quatuor eſſe ſextas partes, id eſt, duas tertias partes cubi; Atque proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inſcriptã, eiuſdem cubi tertiam eſſe partem. Cubus igitur ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. Quod erat demonſtrandum. 32. vndec.



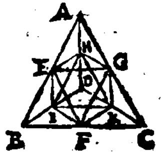
ALITER. Cum cubus, & in eo deſcripta pyramis eadem ſphæra comprehendantur, ut docuimus in ſcholio propoſ. ultimæ lib. 15. Cubus uero triplus ſit pyramidis in eadem ſphæra deſcriptæ, ut demonſtratum eſt; perſpicue colligitur, cubum triplum eſſe ſibi inſcriptæ pyramidis; quandoquidem hæc in eadem ſphæra, in qua cubus, continetur. 32. quartidecimi.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS ſibi inſcripti octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, deſcriptum ſit octaedrum E I K-G H F. Dico Pyramidem octaedri eſſe duplam. Cum enim octaedrum circunſtent quatuor pyramides pyramidi A B-C D, ſimiles, ut propoſ. 3. lib. 12. demonſtratum eſt fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri E G H, E F I, F G K, H I K; quales ſunt pyramides E G H A, E F I B, F G K C, H I K D: (quæ quidem ęquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis ſimilibus, ęqualibusque numero & magnitudine, quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propoſ. 4 lib. 6. lateraque habeant ęqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiuſdem pyramidis A B C D, ex conſtructione propoſ. 2. lib. 15.) Habeant autem pyramides ſimiles proportionem *8. duodec.* homologorum laterum triplicatã; Erit pyramis A B-C D, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum, (cum octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis A B C D, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, ut in his numeris 1.2.4.8. perſpicue apparet) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis A B-C D; Ac idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis A B C D, conficient. Quare & reliquum octaedrum E I K G H F; reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis A B C D. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.



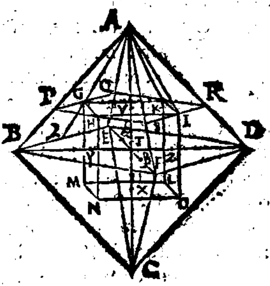
THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.

QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in py-
ramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inſcriptum
eſt, ut conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ.3. lib.15.
Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptę triplus, & pyra- 20. ſextide.
mis octaedri ſibi inſcripti dupla; Fit, ut qualium partium 21. ſextide.
6. ponatur cubus, talium 2. ſit pyramis, & earundem 1. conti
neat octaedrum; atque adeo cubus octaedri ſit ſextuplus.
Quare cubus ſibi inſcripti Octaedri ſextuplus eſt. Quod
erat oſtendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

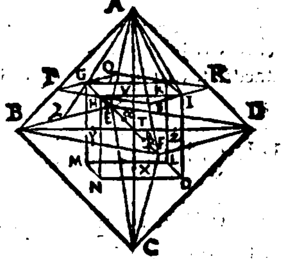
OCTAEDRVM ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.



IN octaedro ABCDEF, cubus deſcriptus ſit G H I K
L M N O, angulos ſuos ſtatuens in centris baſium octae-
dri. Dico octaedrum cubi eſſe quadruplum ſeſquialterum.
Aſſumpta enim pyrami-
de octaedri BEDFA, du-
cantur per G, K, I, H, cen
tra quatuor baſium octae
dri, rectæ PQ, QR, RS,
SP, lateribus BE, ED, DF,
FB, parallelæ, quadratum
cōſtituentes PQRS, ut in
propoſ.4. lib.15. eſt demō
ſtratum; quod quidem
parallelum erit quadrato
B E D F. Ducatur quoq; 15. undec.
octaedri diameter A C,
perpendicularis exiſtens ad quadratum B E D F, in centro
T, per ea, quæ oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13.
Ac proinde perpendicularis ad baſes cubi G I, MO, in pun-
ctis V, X, per ſcholion propoſ.14 lib.11. Eſt autem V, centrū
quadrati PQRS: (cum enim plana B E D F, P Q R S, pa-
rallela ſecent rectas æquales A B, A E, A D, A F, pro- 17. undec.
portionaliter; erunt & A P, A Q, A R, A S, æquales.

Intelli-

Intelligantur ductæ rectæ V P, V Q, V R, V S. Quoniam
47. primi. gitur æqualia quadrata rectarum æqualium A P, A Q, æqualia ſunt quadratis rectarum A V, V P; A V, V Q, quod anguli A V P, A V Q, recti ſint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ A V; æqualia erunt reliqua quadrata rectarũ V P, V Q, proptereaque & rectę ipſæ V P, V Q, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas V R, V S. Quare V, centrum eſt quadrati P Q R S.)



Igitur & centrum erit quadrati G H I K, in illo deſcripti, per ſcholium ultimum lib. 4. Secantur enim latera P Q, Q R, R S, S P, bifariam in G, K, I, H, ut conſtat ex demonſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum eſſe baſis L M N O; Nec non & alias diametros ductas B D, E F, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta iam recta A γ, per G, centrum trianguli æquilateri A B E; erit A G, dupla ipſius G γ, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. Cum ergo plana P R,
17. undec. B D, parallela ſecent rectas A γ, A T, proportionaliter; dupla quoque erit A V, ipſius V T. Eodem modo dupla probabitur C X, ipſius X T; Ac proinde cum æquales A T, C T, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt A V, C X; nec non V T, X T. Recta igitur V X, coniungens centra baſiũ cubi oppoſitarum bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum Y Z, α β, bifariam ſecentur in T; erit T, centrum cubi; cum, per coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. rectę centra baſium cubi oppoſitarum connectentes ſe ſe bifariam ſecent in centro. Iam uero; quoniam V X, ipſius V T, dupla eſt; dupla autem fuit & A V, eiuſdem V T; æqualis erit A V, ipſi V X, nempe altitudini cubi. Quare pyramis G H I K A, ductis rectis A I, A K, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis G O, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. cum utriuſque eadem ſit baſis G I, & altitudines æquales A V, V X: Eſt autem
6. duodec pyramis P Q R S A, pyramidis G H I K A, dupla, quod & baſis

baſis P Q R S, dupla ſit baſis GHIK, illi inſcriptæ. Igitur pyramis P Q R S A, duas tertias partes cubi G O, continet. Quia uero pyramides BEDFA, P Q R S A, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula huius ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4, lib. 6. triangulis illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Eſt autem latus A B, lateris A P, ſeſquialterum, quod & recta A γ, proportionaliter ſecta ipſi A B, ſeſquialtera ſit ipſius A G; Erit pyramis B E D F A, ad pyramidem P Q R S A, ut 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquialteræ 3. ad 2. ut in his numeris 8. 12. 18. 27. conſtat; Ac proinde totum octaedrum A B C D E F, duplum exiſtens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem P Q R S A, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. eſſe cubum G O, iam demonſtratum eſt. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc eſt, in minimis numeris, per 35. propoſ. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla ſeſquialtera eſt. Octaedrum itaque ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterũ eſt. Quod erat oſtendendum.

8. duodec.

2. ſexti.

COROLLARIVM. I.

Idem ergo centrum eſt octaedri, atque cubi ſibi inſcripti. oſtendimus enim T, utriuſque eſſe centrum.

COROLLARIVM. II.

Perſpicue etiam hinc inferemus, Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. Nam quadrata ipſorum laterum proportionem habent quadruplam ſeſquialteram, qualem uidelicet demonſtrauimus habere octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum.

11. ſextide.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM ſibi inſcriptæ Pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.

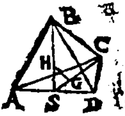
QVO-

QVONIAM ut oſtendimus ad finem lib. 15. cubus, ſibiq; inſcripta Pyramis in eodē octaedro deſcribuntur; Eſt
23. *ſextide.* autem octaedrum cubi in eo deſcripti quadruplum ſeſqui-
20. *ſextide.* alterum; Et cubus ſibi, ac proinde octaedro, inſcriptæ pyramidis triplus: Qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam ſeſquialteram, & 6. ad 2. triplam: Igitur octaedrum ad ſibi inſcriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc eſt tredecuplam ſeſquialteram. Ac propterea octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS ſibi inſcripti cubi noncupla eſt.

IN Pyramide A B D C, cubus intelligatur deſcriptus. Dico pyramidem cubi eſſe noncuplam. Aſſumantur enim G, H, centra duarum baſium A C D, A B D, commune latus A D, habentium; per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppoſitum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diuidentes latus A D, biſariam, & ad angulos rectos, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa uero recta G H; cum B H, C G, duplæ ſint rectarum H S, G S, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. ac proinde
2. *tertij.* proportionaliter ſecentur B S, C S, parallelæ erunt B C, H G, & per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum H G S, trian-
4. *ſexti.* gulo BCS, ſimile. Erit ergo ut BC, ad C S, ita H G, ad GS; & permutando, ut B C, ad H G, ita C S, ad G S: Eſt autem
18. *quarti-decimi.* C S, ipſius G S, tripla. Igitur & B C, tripla erit ipſius H G. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi, ut in propoſ. 1. lib. 15. demonſtratum eſt; Recta uero connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentium diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, ut perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ.



poſ 18. lib. 15. (ibi enim recta G H, iungens centra G, H, baſium A C D, A B D, commune latus A D, habentium diameter fuit baſis G N H Q; cubi deſcripti in pyramide.) Erit latus pyramidis B C, diameter baſis cubi pyramidem A B D C, circunſcribentis, G H, uero diameter baſis cubi in eadem pyramide deſcripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Eſt enim ut diameter unius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quod proportio utraque ſit potentia dupla: Permutando ergo, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem B C, diameter baſis cubi circumſcripti ad G H, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, ut oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At uero cubi, cum ſint parallelepipeda ſimilia, proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur 33. undec. circunſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi A B D C, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis, ut hic 1. 3. 9. 27. uidere licet. Quam ob rem, cum cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat, quam 27. ad 9. uidelicet triplam; 20. ſexti de. Habebit pyramis A B D C, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

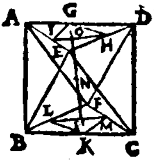
THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quã duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

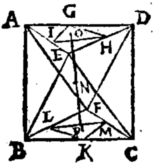
In octaedro A B C D E F, concipiatur deſcriptũ Icoſaedrum. Dico Octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, ut ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cum enim ut ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponãtur; Sint duę baſes Icoſaedri, G H I, K L M, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E,

B C F

B C F; Atque ex N, centro octaedri, nec non & Icoſaedri (idem enim utriuſque eſt centrum, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15.) ad baſim A D E, perpendicularis ducatur N O, cadẽs in centrum O, trianguli A D E, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propoſ. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque eſt trianguli G H I, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cũ ergo plana oppoſita A D E, B C F, parallela ſint, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13 Recta O N, producta perpendicularis quoque erit, per ſcholion propoſ. 14. lib. 11. ad planum BCF, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta altitudo eſt & octaedri, & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia uero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icoſaedrũ in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis N O: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, per coroll. 1 propoſ 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri; At uero priſma, cuius eadem baſis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem A D E, altitudo uero O N, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis A D E, & altitudo O P, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim A D E, & ſub altitudine O P, conſtituti; priſma uidelicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli A D E, altitudo uero eadem O P. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem A D E, & ſub altitudine O P; cum per ea, quę docuimus ad propoſ. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, ut baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis A D E, & altitudo O P, alterius autem baſis tertia pars baſis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia ſunt octaedro A B C D E F. Non ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis G H I, altitudo uero O P, ęquale eſſe



eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: proptereaque triplum huius priſmatis, nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis GHI, altitudo autem eadem OP, æquale eſſe 18. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiam partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem GHI, & ſub altitudine OP, conſtituti; priſma ſcilicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli GHI, altitudo uero eadem OP; Atque idcirco duo priſmata, quorum unius baſis tripla ſit trianguli GHI, altitudo autem OP, alterius uero baſis tertia pars baſis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icoſaedro in dicto octaedro deſcripto. Iam uero, cum duo illa priſmata, octaedro æqualia, ad duo hęc priſmata, Icoſaedro æqualia, ſint, per ea, quæ oſtendimus ad propoſ. 7. lib. 12. ut baſes priſmatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes, (cum unius baſis ſit ADE, nempe tres tertiæ partes ipſius ADE, complectens, alterius uero baſis tertia pars ipſius ADE, ad baſes priſmatum Icoſaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes; (cum unius baſis tripla ſit trianguli GHI, nimirũ nouem tertias partes ipſius GHI, continens, alterius uero baſis tertia pars ipſius GHI,) Sint autem, ut quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli GHI, ita duæ tertię partes ipſius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarũ, ad quinque tertias partes ipſius GHI, hoc eſt, ad dimidium decem tertiarum: Et ut duæ tertiæ partes ipſius ADE, ad quinque tertias partes ipſius GHI, ita quoque ſint, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 4. lib. 5. ſex tertię partes ipſius ADE, (hoc eſt, duę baſes octaedri triplum duarum tertiarum unius baſis conſtituentes, cum ſex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipſius GHI, (id eſt, ad quinque baſes Icoſaedri, triplum quinque tertiarum unius baſis complectentes, cum quindecim tertias cõplectantur; Erunt quoque duo illa priſmata, octaedro ęqualia, hoc eſt, ipſummet octaedrum, ad duo hęc priſmata Icoſaedro ęqualia, nempe ad ipſummet Icoſaedrum, ut



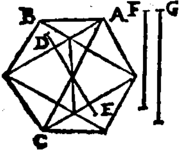
15. *quinti.*

duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quocirca octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptũ Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

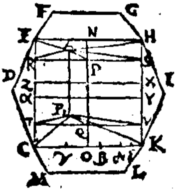
EXHIBEATVR Icoſaedrum A B C, in quo recta D E, coniungat centra baſium oppoſitarum, diameter autem eius ſit AC; & F, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionẽ Icoſaedri A B C, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri A C, ad rectam D E. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſium oppoſitarum; Erit DE, diameter dodecaedri in Icoſaedro ABC, deſcripti, cum copulet angulos ipſius oppoſitos in D, & E, centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidentes. Propoſitis iam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri A C, hoc eſt, in eadem ſphæra, in qua Icoſaedrum ABC, deſcripto, cum utriuſque eadem ſit diameter; & Dodecaedro diametri D E, intra Icoſaedrum uidelicet,



licet ABC, conſtructo; Proportio primæ magnitudinis, nẽpe Icoſaedri A B C, ad tertiam, uidelicet ad Dodecaedrum diametri D E, ſibi inſcriptum, componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri A B C, ad Dodecaedrum diametri, A C, in eadem ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrũ diametri D E, in Icoſaedro A B C, deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrũ A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, eadem ſphæra comprehenſum ſit, ut F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi. (Nam Dodecaedrum diametri A C, ad Icoſaedrum A B C, eiuſdem diametri eſt, ut G, latus cubi ad F, latus Icoſaedri. Conuertendo 11. *quarti* igitur erit Icoſaedrum A B C, ad Dodecaedrũ diametri A C, *decimi*. ut F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi.) At uero Dodecaedrum eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrũ diametri D E, in Icoſaedro uidelicet A B C, deſcriptum proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Manifeſtum eſt, proportionem Icoſaedri A B C, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrũ diametri D E, cõponi quoq; ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectã D E. Quare Icoſaedrũ ad ſibi inſcriptum Dodecaedrũ proportionem habet compoſitã, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

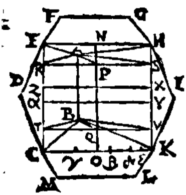
DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis a quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At uero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmẽto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.



QVONIAM ex demonſtratis propoſ. 8. lib. 13. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendunt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad unum latus conuenientium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His uero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circunſcribentis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtãs quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorũ duo CBK, *4. primi.* EAH, triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, ęqualia ſint lateribus pentagoni AE, AH, anguloſque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo uero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona ABCDE, ABKIH, per hypoteſin, & *4. primi.* triangula ex ipſis ablata CDE, HIK, ęqualia exiſtant; ęqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & ęqualia, per 10. defin. lib. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita ut Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circunſtantibus conflatum, æqualẽ eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit a CEHK, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK, tertiaq; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at uero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaq; recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, & in quã cadunt

cadunt perpendiculares A P, B Q, demiſſæ in planum EK, ut conſtat ex demonſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineę N O, A B, A P, B Q, huius figurę lineas L N, V X, V R, X S, figurę propoſ. 17. lib. 13.) Erit utraque recta A B, P Q, maius ſegmentum lateris cubi N O, uel H K, & utraque A P, B Q, ęqualis dimidio lateris pentagoni A B, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, ut liquet ex eadem propoſ. 17. lib. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ R S, T V, rectis E H, C K, parallelæ; erunt quoque R T, S V, maiora ſegmenta laterum EC, HK; atque adeo ER, C T, ſimul, & H S, K V, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis A R, A S, B T, B V, conſtituantur duæ pyramides E R S H A, C T V K B, quæ per coroll. propoſ. 6. lib. 12. æquales inter ſe erunt, cum & earum baſes E R S H, T C K V, & altitudines P A, Q B, ęquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum A B T V S R. Quoniam autem A S, ipſi B V, & A R, ipſi B T, ęqualis *33. primi.* eſt, & parallela; cum coniungant æquales rectas, & parallelas A B, S V, R T; parallela erunt plana triangulorum *15. undec.* ARS, BTV, atque adeo inter ſe æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. cum latera unius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum A B T V S R, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, B T V, & tribus parallelogrammis R V, A T, A V, priſma eſt, ex definitione.

Iam uero, cum oſtenſum ſit, rectas H S, K V, minus ſegmentum efficere lateris HK, fiat illis ęqualis V X, dupla nimirum utriuſque HS, & KV; & ipſius V X, minoris ſegmenti lateris H K, duas tertias partes contineat V Y, tertia uero pars ſit XY, ducanturque XZ, Y α, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, ęquales ſunt oſtenſæ; utriuſque uero earum dupla eſt pyramis *6. duodec.* ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, uel QB, conſtituta, quod & baſis T X, dupla ſit baſis C V, uel R H; *1. ſexti.* AEqualis erit pyramis TVXZB, utrique pyramidi E R S H A, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem T X, & altitudo eadem QB, uertex uero linea recta, pars uidelicet rectæ AB, quæ ęqualis ſit ipſi VX, ut demonſtrauimus in ſcholio



propoſ.7.lib.12. Item eiuſdem priſmatis,cuius baſis,TX, & altitudo Q B,uertex uero pars rectæ AB, æqualis ipſi V X, duas tertias partes continet priſma,cuius baſis TY,& altitudo eadem Q B, uertex uero pars rectæ AB,æqualis ipſi VY, ex ſcholio propoſ.25.lib.11. quod & baſis TY, duas partes
1. ſexti. tertias complectatur baſis TX. Igitur & priſma, cuius baſis TY,& altitudo Q B, uertex uero pars rectę AB, æqualis ipſi V Y, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc priſma appoſitum priſmati ABTVSR, efficiet priſma æquale ſolido CBKHAE, habens baſin rectangulum contentum ſub latere cubi TV, & ſub recta cōpoſita ex VY,duas tertias partes minoris ſegmenti V X, cōprehendente,& ex VS,maiore ſegmento,ideoque a baſe cubi deficientem rectangulo α X, contento ſub latere cubi α Y,& ſub XY, tertia parte minoris ſegmenti V X. Nō diſſimili ratione inueſtigabimus alia ſimilia quinque priſmata ęqualia & proxime dicto priſmati. & reliquis quinque ſolidis ſuper reliquas quinque cubi baſes conſtitutis. Sex igitur huiuſmodi priſmata æqualia erunt ſex illis ſolidis,exceſſui nimirum Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum. Quia autem duo quęlibet priſmata illiusmodi inter ſe aptata componunt parallelepipedum eiuſdem altitudinis; conſtruentur ex ſex illis priſmatis tria parallelepipeda ſub eadem altitudine Q B, quæ æqualis eſt dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi,& ſuper baſes a baſe cubi deficientes ſingulas rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter ſe compoſitis exurget parallelepipedum exceſſui eidem Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum æquale, cuius baſis a baſe cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi,& ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi,altitudo uero æqualis eſt tribus altitudinibus prædictorū trium parallelepipedorū,hoc eſt,altitudini Q B, quæ æqualis fuit dimidio maioris ſegmenti lateris cubi ter ſumptæ. Hanc igitur altitudinē dico ab altitudine, ſeu latere cubi deficere

ficere minore ſegmento eius lineę, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemq; Cβ, maius ſegmentum, & βK, minus bifariam in γ, δ; atq; ex βK, abſcindatur $\beta\varepsilon$, æqualis ipſi $\beta\gamma$, ſeu Cγ, ita ut Cγ, uel $\gamma\beta$, uel $\beta\varepsilon$, dimidia pars maioris ſegmenti Cβ, ęqualis ſit ipſi QB, & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Quoniam igitur eſt, ut tota CK, ad maius ſegmentum Cβ, ita maius ſegmentum Cβ, ad minus βK; erit quoque ut CO, dimidia ipſius CK, ad Cγ, uel $\beta\varepsilon$, dimidiam ipſius Cβ, ita Cγ, uel $\beta\varepsilon$, ad $\beta\delta$, dimidiam ipſius βK; Ac proinde ſi CO, ſecetur extrema ac media ratione, erit maius illius ſegmentum Cγ, uel $\beta\varepsilon$, & minus $\beta\delta$. Quare & $\beta\delta$, minus ſegmentum ſecabit $\beta\varepsilon$, maius ſegmentum extrema ac media ratione, ut demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. eritq; maius ſegmentum $\beta\delta$, minus autem $\delta\varepsilon$; Ac propterea rurſus $\delta\varepsilon$, minus ſegmentum ſecabit rectam δK, maiori ſegmento $\beta\delta$, æqualem, extrema ac media ratione, minuſque ſegmentum erit εK. Deficit igitur Cε, altitudo pręfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi CK, minore ſegmento εK, rectæ δK, uel ſibi æqualis rectæ $\beta\delta$, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmentum minus oſtenſa. Conſtat ergo baſem parallelepipedi, quo dodecaedrum excedit ſibi inſcriptum cubum a baſe cubi deficere rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaq; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; altitudinem uero ab altitudine cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonſtrandum. 15. *quinti.*

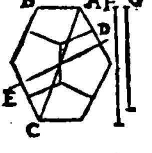
COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi ſibi inſcripti deficere duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit; Alterius uero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit, ita ut amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint ęquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum a Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſis nimirum eandem habens, quā cubus, altitudo vero a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidium lateris cubi maius eſt ſegmentum [illegible] hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi conſtituto iam parallelepipedo adiungatur poſterius parallelepipedum, compoſitū erit parallelepipedum prorſus æquale cubo intra Dodecaedrū deſcripto, ſiquidem & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, ut Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſuper cubum inſcriptū, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, immo vero alter cubus, ut demonſtratum eſt.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cū cubo deſcripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter ſit AC, & recta coniūgens centra baſium oppoſitarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaedri. Cum enim anguli Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti reponantur in centris baſium Dodecaedri, atque adeo anguli oppoſiti in centris baſium oppoſitarum; erit recta DE;



centra

centra baſium Dodecaedri oppoſitarum connectens, diameter Icoſaedri inſcripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter D E, in eadem ſphæra cum Icoſaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato deſcribetur, cum eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icoſaedro eiuſdẽ diametri D E, intra Dodecaedrũ uidelicet A B C, deſcripto; Proportio Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis ſunt demonſtrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, ſecundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, deſcripti ſecundæ magnitudinis ad Icoſaedrum in Dodecaedro A B C, deſcriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri D E, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Dodecaedrum uero diametri D E, ad Icoſaedrum eiuſdem diametri D E, quod nimirum in Dodecaedro A B C, deſcribitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icoſaedri; liquido conſtat proportionem Dodecaedri A B C, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, cuius ſcilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam uidelicet centra oppoſitarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi, ad G, latus Icoſaedri, in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dodecaedrum itaque ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

11. quarti decimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quo-

rum

rum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo uero tertiæ parti minoris ſegmẽti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique a latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo uero minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita ut amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales.

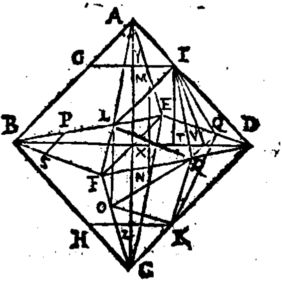
25. ſexti de.

QVONIAM ſi in Dodecaedro intra Pyramidem deſcripto cubus deſcribatur, hic idem cubus in eadem pyramide eſt deſcriptus, ut ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis in qua deſcribitur, nona pars eſt, cum pyramis cubi ſibi inſcripti ſit noncupla: Fit, ut magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, ſeu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi ſibi inſcripti duplum ſit, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta eſt in uerbis propoſitionis huius; non obſcure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inſcriptum duas nonas partes continere ipſius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo ut ſi dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

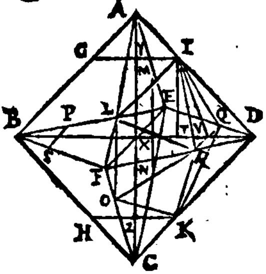
THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo uero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri extrema ac media ratione ſectæ.

OCTAEDRVM, cui inſcriptum eſt Icoſaedrum, ſit ABC D E F, repetita figura propoſ. 16. lib. 15. ubi demonſtratum eſt, uiginti triangula Icoſaedrum inſcriptum componentia eſſe IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo poſtrema octo baſibus octaedri ſunt impoſita, ſecantia uidelicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT, perpendicularem ad BD, æqualẽ eſſe maiori ſegmento XY, ſemidiametri AX. Dico octaedrũ ABCDEF, ſuperare Icoſaedrũ ſibi inſcriptũ parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri QR, altitudo uero IT, maius ſegmẽtum ſemidiametri AX. Cũ enim in quatuor baſibus octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulũ ſolidũ octaedri D, cõſtituẽtibus poſitæ ſint quatuor baſes Icoſaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum ſolidum D, in eiſdem quatuor baſibus octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus ſi accedant duo triangula Icoſaedri, IQR, KQR, & commune triangulum DQR, conſtituentur duæ pyramides ſuper communẽ baſem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter ſe æquale, per coroll. propoſ. 5. lib. 12. cum earum altitudo ſit recta eadem IT, maius uidelicet ſegmẽtum ſemidiametri octaedri. (Nam quemad-



quemadmodum A X, ſecta eſt a recta G I, in Y, extrema ac media ratione, ita quoque ſecta eſt C X, a recta H K, in Z. Quare ſi ex K, ad B D, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis K D-
34. primi. Q R; erit ea æqualis rectę Z X, maiori ſegmento ſemidiametri CX, hoc eſt ipſi I T.) Quæ quidem pyramides extra Icoſaedrum in octaedro deſcriptum cōſiſtunt. Simili modo prope ſingulos reliquos quinque angulos octaedri conſtituentur binæ pyramides & inter ſe & dictis duabus æquales, extra Icoſaedrum prædictum: Ita ut octaedrum ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum duodecim illis pyramidibus ęqualibus. Quia uero triangulum D Q R, dimidium eſt quadrati lateris D Q; (cum D Q, D R, rectæ æquales ſint, minora ſcilicet ſegmenta laterum octaedri, angulumq; contineant rectum.) erit recta Q R, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipſius Q R, duplum erit quadrati lateris D Q, ideoque quadruplum trianguli D Q R. Priſma igitur, ſiue parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoque erit priſmatis, cuius baſis triangulum D Q R, & altitudo eadē I T, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 7. lib. 12. Priſma autem, cuius baſis D Q R, & altitudo I T, triplum exiſtens, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. pyramidis I D Q R, æquale eſt tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icoſaedrum conſiſtere diximus. Priſma ergo, uel parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ Q R, & altitudo I T; quadruplum quoque eſt trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ ſint omnes duodecim pyramides ſimul Icoſaedrum ambientes; AEquale quoque erit priſma, ſeu parallelepipedū, cuius baſis quadratum rectæ Q R, lateris nimirum Icoſaedri, & altitudo I T, maius ſegmentum ſemidiametri A X, duodecim illis pyramidibus, hoc eſt, exceſſui octaedri ſupra



pra

pra Icoſaedrum ſibi inſcriptum; Ac proinde octaedrum ſuperabit Icoſaedrum dicto priſmate, uel parallelepipedo. Octaedrũ ergo excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo uero recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri coniungens. Cum enim ex demonſtratis propoſ. 19. lib. 15. conſtet, ſi Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icoſaedrum imponatur, Icoſaedrum eidem Pyramidi eſſe inſcriptum; octaedrum autem ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, nempe rectæ QR, altitudo uero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri, recta uidelicet I T, ſeu Y X: Fit, ut octaedrum bis ſumptum, nempe pyramis, cui inſcribitur, (quod Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti octaedri) ſuperet idem Icoſaedrum in octaedro, ideoque & in pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius baſis idem quadratum lateris Icoſaedri, altitudo uero recta Y Z, coniungens biſarias ſectiones laterum Icoſaedri oppoſitorum G I, H K. Hoc enim parallelepipedum illius duplum eſt, per demonſtrata a nobis in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo uero recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri copulans, Pyramis duplum Icoſaedri ſibi inſcripti excedit.

31. *ſextide.*

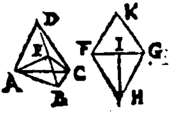
21. *ſextide.*

INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS DUARUM BASIUM CUIUSCUNQ; SOLIDI REGULARIS, UNIUS AD ALTERAM, EX ISIDORO HYPSICLIS PRÆCEPTORE.

1. ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis baſium, unius ad alteram, inuenire.

SIT

SIT Pyramis ABC*D*, *cuius latere* B*D*, *bifariam ſecto in E, ex angulis* A, *&* C, *lateri BD, oppoſitis rectæ ducantur A E*, CE; *quæ cum perpendiculares ſint ad BD, communem ſectionem planorum A*BD, C*BD, in quibus exiſtunt, ut oſtenſum eſt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. angulum inclinationis* AE*C, baſium* ABD, *C*BD, *continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur FGH, triangulum æquilaterum ſuper rectam FG, lateri pyramdis æqualem conſtructum, atque idcirco triangulo cuicunque pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum* ABD, *æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad FG, cōſtituatur ſuper FG, triangulú FG*K, *habés utrunq; latus* FK, *G*K, *æquale perpédiculari HI, hoc ē, utriq; perpédiculari* A*E*, *C*E, *cú perpendiculares HI, AE, CE, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulú F*KG, *æqualē eſſe angulo inclinationis AEC, baſiú ABD, C*BD. *Cú.n. latera* KF, K*G*, *æqualia ſint lateribus E*A, *EC; & baſis FG, baſi A*C: *Æquales erút* 8. primi. *anguli* FK*G*, A*EC*. *Dico inſuper angulum inclinationis A*EC, *acutú eſſe. Cum.n. latus* A*D*, *uel illi æquale A*C, 12. quarti decimi. *ſeſquitertium ſit potentia utriuſq; perpendicularis* A*E*, CE; *qualium partium 4. ponetur quadratú rectæ* AC, *talium 3. erit quadratú utriuſq; rectæ* A*E*, *CE; ideoq; earundē partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarú* A *E*, *CE. Quare cú in triangulo* ABC, *quadratum lateris* A *C*, *minus ſit quadratis ſimul laterum* A *E*, C E, *acutus erit angulus A E C, ut in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.*



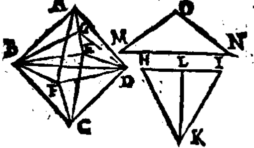
COROL-

COROLLARIVM.

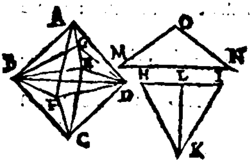
FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis ęquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt A E, C E, ſubtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit A C; omnes erunt inter ſe æquales 8. primi, quod & omnes illę perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia.

11. ANGVLVM inclinationis duarum octaedri baſium, unius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR *Octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus A E, triangulis ABE, ADE, commune, biſariamque ſectũ in G, recta ducantur BG, DG; quæ cũ perpendiculares ſint ad A E, communem ſectionem planorum A B E, A D E, in quibus exiſtunt (quod in triangulis B G A, B G E, anguli ad G, æquales ſint, &c.)* 8. primi *continebunt angulum B G D, inclinationis baſium A B E, A D E, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac uia. Sumatur H I K, triangulum æquilaterum ſuper rectam H I, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta K L, perpendiculari ad HI, conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri B D, hoc eſt, diametro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri deſcripti triãgulũ OMN, habẽs utrunq; latus MO, NO, perpẽdiculari K L,* æquale,



æquale, hoc eſt, utrique perpendiculari BG, DG, *cū*
perpendiculares KL, BG, DG, *in triangulis æqualibus*
æquales ſint. Dico *angulum MON, æqualem eſſe angulo*
inclinationis BGD, *baſium* ABE, ADE. Cum
enim latera OM, ON, æqualia ſunt lateribus GB,



GD; & *baſis MN, baſi*
BD; AEquales *erunt anguli MON*, BGD. Dico
8. *primi.* *præterea, angulum inclinationis* BGD, *eſſe obtuſum. Cum enim diameter*

14. *tertijde.* 12. *quarti decimi.* *octaedri* B D, *dupla ſit potentia lateris* A B; *latus*
uero A B, *potentia ſeſquitertium rectæ* BG: *qualium*
partium 8. *ponetur quadratum diametri* BD, *talium*
4. *erit quadratum lateris* AB, *earundemque* 3. *quadratum rectæ* B G; *ideoque ambo ſimul quadrata rectarum* B G, D G, *talium partium* 6. *erunt*. *Quare*
quadratum lateris B D, *in triangulo G B D, maius eſt*
quadratis ſimul laterum G B, *G* D; Ac *propterea angulus* B G D, *obtuſus erit, ut in ſcholio propoſ.* 12.
lib. 2. *oſtendimus.*

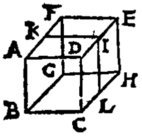
COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes baſium octaedri æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt BG, DG, ſubtendanturque ab octaedri diametris, cuiuſmodi
8. *primi.* eſt *B D*; omnes inter ſe æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & diametri octaedri eoſdem ſubtendentes.

III. ANGVLVM inclinationis duarum cubi baſium, unius ad alteram, inuenire.

SIT

Sit *cubus ABCDEFGH, in quo ſecetur latus DE, biſariam in I, nec non & latera illi oppoſita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; quæ cum æquales, ac parallelæ ſint lateribus EF, EH, (quod & KF, IE, inter ſe, nec non & IE, LH, inter ſe æquales exiſtant, et parallelæ) ideoq; angulos rectos ad latus DE, efficiant,* 33. primi. *continebunt KIL, angulum inclinationis baſium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam uero rectæ IK, IL, parallelæ exiſtentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, angulum KIL, æqualem continent angulo recto FEH;* 10. vndec. *Rectus erit angulus inclinationis baſium cubi. Quare ut angulo inclinationis baſium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, conſtituendus erit angulus rectus. Hic enim, ut modo demonſtrauimus, æqualis erit angulo inclinationis baſium cubi.*



COROLLARIVM.

Qvocirca, cum eodem argumento demonſtrari poſſit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum; perſpicue concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

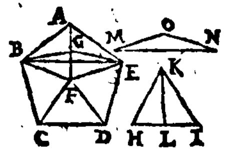
ANGVLVM inclinationis duarũ baſium Icoſaedri, unius ad alteram, inuenire. IIII.

Esto *pyramis ABCDEF, una ex 12. pyramidibus Icoſaedri, cuius baſis pentagonum ABCDE, ex quinque Icoſaedri lateribus cõpoſitum, uertex autem F. Diuiſo itaque latere AF, biſariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, commune ha* *bentium, angulis* B, *& E, lateri* A *F, oppoſitis recta* B *G, E G, quæ cum ex demonſtratis in problemate* 2. *huius ſcholij perpendiculares ſint ad AF, communem ſectionem planorum* ABF, *A*EF, *in quibus ducuntur, comprehendent* B *G E, angulum inclinationis baſium* A B *F*, AEF, *per* 6. *defin. lib.* 11. *Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterum HIK, ſuper rectam H I, lateri* I*coſaedri æqualem fabricatum, hoc eſt, cuius triangulo Icoſaedri, ipſi uidelicet A*BF, *æquale, in quo ducta recta* K*L, ad H I, perpendiculari, conſtruatur ſuper recta MN, quæ rectæ* B*E, angulum pentagoni A, ſubtendenti ſit æqualis, triangulum OMN, habens utrunque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc eſt, utrique perpendiculari* B *G, E G, cum perpendiculares* K*L*, B*G, EG, in triangulis æqualibus ſint æquales. Dico angulum MON, angulo B GE, ininclinationis baſium A*BF, *A* E *F, æqualem eſſe. Cum enim latera OM, ON, æqualia ſint lateribus G B, G E,*

8.primi. *& baſis MN, baſi BE; Aequales erūt anguli MON,* B *G E. Dico hunc etiam angulum inclinationis B G E, eſſe obtuſum.* Cum *enim* B *G, angulum rectum faciat*

19.primi. *A*GB *; erit recta A*B, *maior quam recta* B *G ; ad eundemque modum* A*E, maior erit quam E*G. *Quare rectæ* AB, A*E, maiores quoque erunt rectis O M, O N, cum hæ rectis* G*B*, G *E, poſitæ ſint æquales. Si itaque recta* B*E, ſuper rectam ſibi æqualem M N, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON,*

ita



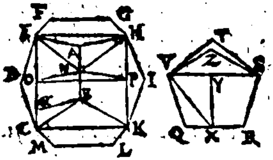
ita ut rectæ AB, AE, rectas OM, ON, prorſus includant. Angulus ergo O, maior erit angulo B A E: At 21. primi. *hic obtuſus eſt. (cum enim quinque anguli pentagoni ſex rectis ſint æquales, per ea, quæ a nobis ſunt demonſtrata in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum unum, ac inſuper unius recti partem quintam. obtuſus ergo erit, cum recto ſit maior) multo igitur magis obtuſus erit angulus MON, hoc eſt, ſibi æqualis BGE.*

COROLLARIVM.

NON obſcure quoque ex his conſequitur, omnes baſium Icoſaedri inclinationes inter ſe æquales eſſe. Nam cum ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt B G, E G, ſubtendanturque a rectis angulos pentagonorum ſubtendentibus, cuiuſmodi eſt B E; omnes inter ſe erunt æquales, quod & illæ omnes 8. primi. perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos ſubtendunt æquales æqualibus rectis comprehenſos, æquales exiſtant. 4. primi

V. ANGVLVM inclinationis duarum baſium Dodecaedri, unius ad alteram, reperire.

CVM *per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium* Dodecaedri *ad unum latus coeuntium; ſint huiuſmodi pentagona* ABCDE, *EFGHA*, AH*IKB*, *BKLM*C, *ad latus* AB, *conuenientia; duo quidem* ABCDE, *AHIKB*, *ſecundum idem latus commune* A*B; alia autem duo* A*EFGH*, BC*MLK*, *ſecundum angulos EAH*, *CBK. His porro pentagonis inſcriptum ſit* quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A.



Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, A B K I H, ad A B, perpendiculares N O, N P, ſecantes latera E C, H K, in O, & P ad angulos quoque rectos, cum rectæ E C, H K, ipſi A B, ſint parallelæ, per coroll. propoſ. 8. lib. 15. Comprehendunt igitur N O, N P, angulum O N P, inclinationis baſium A B C D E, A B K I H. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam Q R, lateri Dodecaedri AB, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum Q R S T V, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipſi A B C DE, æquale, cuius angulo T, recta ſubtendatur V S, æqualis 4.primi. exiſtens rectæ E C, cum & latera T V, T S, lateribus D C, D E, æqualia ſint, anguloſque contineant æquales. Diuiſa deinde recta Q R, bifariam in X, ducatur a puncto X, ad Q R, perpendicularis X Y: proptereaque perpendicularis ad V S, cum V S, ſit parallela ipſi Q R, per coroll. propoſ. 8. lib. 15. Ac poſtremo ſuper recta V S, triangulum ſabricetur V Z S, habens utrunque latus Z V, Z S, perpendiculari X Y, æquale. Dico angulum V Z S, æqualem eſſe angulo inclinationis O N P. Ductis enim rectis N E, N H, V X; cum latera E A, A N, æqualia ſint lateribus H A, A N; Item lateribus V Q, Q X, anguloſque comprehendant æquales; Aequales erunt & baſes N E, N H,

N H, V X, & anguli A N E, A N H, Q X V; 4. primi
ideoque & reſidui ex rectis, anguli uidelicet E N O,
H N P, V X Y, æquales erunt. Quoniam igitur anguli
E N O, E O N, trianguli E N O, æquales ſunt
angulis H N P, H P N, trianguli H N P; nec non
& angulis V X Y, V Y X, trianguli V X Y; (ſunt
enim E O N, H P N, V Y X, oſtenſi recti.) Et latus
N E, lateribus N H, V X, æquale demonſtratum;
Aequalia erunt reliqua latera N O, O E, reliquis lateribus 26. primi.
N P, P H; Item lateribus X Y, Y V. Quare
rectæ Z V, Z S, æquales exiſtentes ipſi X Y, rectis
N O, N P, æquales erunt. Iam uero, quia O E, P H,
æquales ſunt, ac parallelæ; erit quoque recta coniuncta
O P, æqualis & parallela ipſi E H, ideoque æqualis 33. primi.
ipſi E C, hoc eſt, rectæ V S. Quam ob rem, cum
latera Z V, Z S, lateribus N O, N P, æqualia ſint; baſis [illegible]
item V S, baſi O P; Aequalis erit angulus V Z S, angulo 8. primi.
inclinationis O N P. Dico etiam, angulum hunc
O N P, inclinationis, eſſe obtuſum. Nam ducta recta
Bα, ipſi N O, parallela; cum ſit quoque N B, ipſi
Oα, parallela, per coroll. propoſ. 8. lib. 15. Parallelogrammum
erit N O α B, ideoque recta Bα, ipſi N O, 34. primi.
æqualis. Quia uero B C, latus pentagoni oppoſitum
angulo C α B, qui rectus eſt, (æqualis nimirum interno 29. primi
C O N,) maius eſt latere B α, hoc eſt, recta N O, 19. primi
uel utraque Z V, Z S, quæ ipſi N O, oſtenſæ ſunt
æquales; Erunt duæ rectæ T V, T S, maiores duabus
rectis Z V, Z S. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum
T V S, ita ut rectæ T V, T S, rectas Z V, Z S,
includant omnino; Atque proinde angulus V Z S,
ideoque illi æqualis O N P, maior eſt angulo pentago 21. primi.

ni

ni T: Hic uero, cum ſit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione baſium Icoſaedri ageremus, demonſtratus eſt maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtuſus.

COROLLARIVM.

Patet igitur ex his, omnes inclinationes baſium Dodecaedri ęquales eſſe inter ſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro deſcripti ductis; quales ſunt N O, N P, ſubtendanturque a rectis, quæ cubi inſcripti lateribus ſunt æquales, uel certe, quæ rectis ſubtendentibus angulos pentagonorum ęquales ſunt, cuiuſmodi eſt, recta O P, lateri cubi inſcripti E H, quod angulum pentagoni E A H, ſubtendit, æqualis; Erunt omnes inter ſe æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ eoſdem ſubtendunt, latera uidelicet cubi, inter ſe etiã ſint æquales.

8.primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum.
M. D. LXXIIII.
Cum licentia Superiorum.