

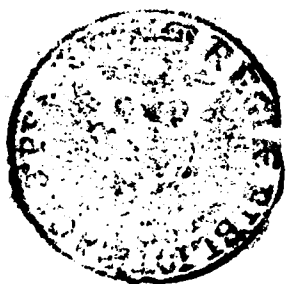
Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres





EVCLIDIS

ELEMENTVM X.



DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

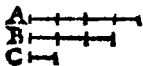


SOLVIT Euclides in antecedenti-
bus tribus libris ea, qua ad numeros spe-
ctant, quantū satis visum est ad res Geo-
metricas intelligendas: Nunc in hoc de-
cimo libro aggreitur ad disputationem
linearum commensurabilium, & incō-
mensurabilium, quarum causa numero-
rum tractationem ab eo susceptam esse

superius diximus. Nam sine cognitione harū linearū cōplures
magnitudines cū solida, tū plana, neq; pfecte intelligi possunt,
neq; cū res tuleris in opus atq; vsum cōferri; propterea quod
plerunq; latera earū incōmensurabilia sunt: Id quod & de pla-
nis ipsis atq; solidis dici potest, quippe cum & hac incōmensu-
rabilia saepe numero existant, vt ad finē huius libri demonstra-
bimus. Quoniā vero hic liber multis obstructus est difficultati-
bus, ob linearū, de quibus differis, obscuritatē, oēs nervos indu-
stria mea in eo cōtendā, vt ex his, que hactenus ab Euclide sunt
demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labo-
re a quouis, qui pracedentiū tamē librorū demonstrationes recte
intelllexerit, possit percipi. Neq; n. in corū possum sententiā ire,
qui putās ad eius intelligentiā esse necessariā eā partē Arith-

metices, quæ de radicibus numerorū, tam rationalibus quàm irrationalibus, ut vocat, sermone instituit; Immo cōtra persuasam mihi prorsus habeo, cognitionē pfectā illius partis Arithmetices p̄dēro ex hac 10. lib. ratiō abest, ut ex illimē tractationē illam radicem requiri, ut facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum qui rationem radicem atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturam, quā qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad usum potest reuocare, hic vero nullo modo. Hæc enim de causa & nos priora decem theoremata a secundi lib. numeris accommodauimus, ut oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem ut ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitrarēmur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dices aliquis) ut in eo libro, non perinde etiā in hoc exempla numerorum, quibus Algebra utitur, usurpasti, ut ea res & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebra ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras posui offusuri, quā lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quā his nostris commentariis afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationis ipsius perciperent: Id quod in lib. 2. accilere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ sole necesse ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante a Michaelē Stiffelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQUE, ut ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus utendum erit; declarat primo loco, quenam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metiuntur. Ut duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metiatur; (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem



dem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum quia eas linea tam unius palmi; quam dimidiati palmi, quam tertia partis unius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas una, & eadem superficies metitur; Necnon corpora, solidantur commensurabilia, quae metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSURABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusvis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, ut propositione ultima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurima alia linea incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq; quantum ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicuntur incommensurabiles, nec non, & solida, quae nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineae potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARUM rectarum quaedam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illae, quas in expositione defin. 1 commensurabiles simpliciter diximus: quaedam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quae sunt incommensurabiles longitudine, aliae sunt eiusmodi, ut earum quadrata sint commensurabilia; aliae vero ita se habent, ut & qua-

drata earum incommensurabilia sint . Lineæ ergo illa longi-
tudine incommensurabiles , quarum quadrata sunt commensura-
bilia , appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles ;
quia videlicet secundum earum potentias , hoc est secundum ea-
rum quadrata (est enim , ut ad propos. 47. lib. 1. diximus , po-
tentia cuiusq; lineæ , quadratum ab ea descriptum) commen-
surabiles sunt , licet ipsæ secundum longitudinem sint prorsus
incommensurabiles .

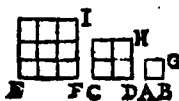
Q U O D si quis roget , cur Euclides definierit seorsum li-
neas potentia cõmensurabiles , nõ autẽ cõmensurabiles longitu-
dine ; respondendũ est , lineas longitudine cõmensurabiles satis
superq; esse explicatas in definitione cõmensurabiliũ magnitu-
dinũ , cũ huiusmodi lineas una cõmunis mensura metiatur , ut
dictũ est : At vero quoniã lineas potentia cõmensurabiles nulla
cõmunis mensura metiri potest , sed tantũmodo earum quadra-
ta idem spatium metitur , ideo necessarium omnino fuit , ut ea
propria definitione explicarentur .

I I I I .

I N C O M M E N S U R A B I L E S au-
tem , cum quadratis earum nullum spatium ,
quod sit communis eorum mensura , con-
tingit reperiri .

L I N E A S reliquas longitudine incommensurabiles , qua-
rum etiam quadrata incommensurabilia sunt , vocat incom-
mensurabiles potentia .

H A B E N T autem lineæ cõmensurabiles sã longitudine
quã potẽtia , hæc quasi convenienciã inter se , & connexionẽ ,
ut lineæ longitudine cõmensurabiles , sint etiã cõmensurabiles
potentia , ita ut nulla lineæ dari possint cõmensurabiles longitu-



dine , quin earũ quadrata cõmensura-
bilia quoq; sint ; quoniam quadratum
ex cõmuni earum mensura descriptum
metitur tanquã mensura cõmunis ea-
rũ quadrata , ut in subiecta figura ap-
paret :

paret: sicut enim recta AB , metitur rectas CD, EF , ita quoque quadratum AG , quadrata CH, EI , metitur: Non autem, ut omnes linea potentia cōmensurabiles, sint etiā cōmensurabiles longitudine; multa enim linea sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quae tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, ut in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incōmensurabiles tam longitudine quam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, ut omnes linea potentia incommensurabiles, sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, ut omnes linea longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multa linea reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quae quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propof. 9. huius libri.

V.

HIS positis, ostenditur, cuicunque rectae lineae propositae rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

S 1 proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erūt omnium aliarum, quae cum ipsa comparantur, quaedam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quaedam vero potentia tantum: Item quaedam illi incommensurabiles longitudine tantum; quaedam vero longitudine, & potentia, ut hoc decimo libro demonstrabitur varijs in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quamvis eius verba hoc sonare videantur) hac ita se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositae rectae lineae commensurabiles longitudine,

& potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, ut diximus.

L I N E A autem illa proposita, ratione cuius alie commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis *ῤατιονική*; Latinis vero Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, alie vero cum illa comparate non semper notæ sunt, quamvis singule seorsum sumptæ existant certæ quoque, ac notæ; cū quolibet in quocumque partes æquales possit dividi.

VI.

E T huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

D O C E T lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex positione, ut illa, sed quia cum illa comparata reperiantur ei commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum.

I T A Q U E ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, quamvis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui eam Irrationalem vocant, eo quod numero non possit exprimi.

VII.

H V I C vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

Q U O N I A M in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellavit Rationales.

les; liquido constat, eum hic esse dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tantum Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod a proposita recta fit, dicatur Rationale.

QUEMADMODUM lineæ illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeque illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilesve dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur, non quidem ex positione, ut illud, sed quia cum eo collata reperiuntur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocumque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QUONIAM vero lineæ poscentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3.

defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur .

NON aliter superficies plane quadrato a Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propofita prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita ut si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si vero non fuerint quadrata, sed alia quæcunq; figura rectilinea, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITUR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus, lineas quæ possunt spatia commensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles longitudine, ut ad defin. 4. diximus, demonstrabiturq; in coroll. propof. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas,

illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis linea, dici Irrationales.

PRAETEREYNDVM quoq; non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitu-line & potentia, atq; potentia tantum: apponere fere semper vocibus istis: commensurabiles, ac incommensurabiles: Vix autem, & rarissime his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; Item incommensurabiles longitu line & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animadvertit, occasionem multis præbuit, ut varie, & obscure in hoc 10 lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq; nec non Rationalibus, Irrationalibusq; sint locuti.

CÆTERVM hiis definitionibus adiungemus postulat-um vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vsus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, siue Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excédât.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor vero infinite possit augeri; perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem.

AXIOMATA, SIVE
Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quocunq; magnitudines metiens, compositam quoq; ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunq; magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totā magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquā.

HÆC axiomata, ut ad numeros pertinent, ostensa sunt a nobis in ultimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, praesertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce numeri in vocē magnitudinis.

CAETERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit a numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, ut ad propof. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus, ut docuimus ad initium primi libri; curauimus, ut duplex numerus in margine e regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstrat. Quod si vnus tantum numerus reperiat in margine, nullam tunc esse inter

Theonē

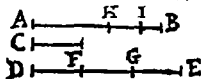
Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

THEOR. I. PROPOS. I.

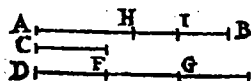
I

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quam dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITAE sint duæ magnitudines inæquales A B, & C, quarum A B, sit maior. Dico si ex A B, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinquetur tandem magnitudinem quædam, quæ minor sit quam C. Multiplicetur C, toties, donec magnitudo facta D E, maior sit quam A B, ita ut D E, sit multiplex ipsius C, proxime maior quam A B. Diuisa autem D E, in partes D F, F G, G E, ipsi C, æquales; detrahatur ex A B, maius quam dimidium A H, & ex reliqua H B, maius quam dimidium H I; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius A B, multitudinem æquales sint partibus ipsius D E. Sint ergo iam partes A H, H I, I B, tot, quot sunt ipsæ D F, F G, G E. Quia igitur D E, maior est quam A B; At ex D E, ablatum est D F, minus quam dimidium, vel certe dimidium, si D E, ipsius C, sit duplex; ex A B, vero maius quam dimidium A H: Erit reliquum F E, reliquo H B, maius. (Cum enim D E, maior sit quam A B; si ex D E, dimidium auferretur, nec non & ex A B, dimidium, esset quoque reliquum ex D E, maius reliquo ex A B. Si ergo ex D E, auferatur minus quàm dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium;



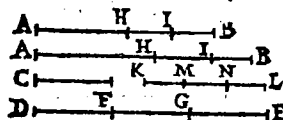
midium; erit reliquum ex D E, maius reliquo ex A B.) Rursus quoniam F E, maior est quàm H B, auferaturq; ex F E, dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, si F E, maior sit quam duplex ipsius C; at ex H B, maius quam dimidium H I; erit eodem modo reliquum G E, maius reliquo I B: atque ita procedendo ostendemus tandem, postremam partem ipsius D E, qualis hic est G E, maiorem esse postrema parte ipsius A B, qualis hic est I B. Cum ergo G E, postrema pars ipsius D E, æqualis sit ipsi C; erit quoq; C, maior quam I B, postrema pars ipsius A B. Relicta igitur est I B, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



Idem demonstrabitur, si ex A B, auferatur dimidium A H, & ex reliquo H B, rursus dimidium H I, &c. Næ ad eandem

erit reliquum F E, maius reliquo H B, nec non & reliquum G E, maius reliquo I B; Cû ex maiori D E, ablatum sit D F, minus quàm dimidium, vel certe dimidium; & ex minori A B, dimidium A H, &c.

A L I T E R. Facta constructione, ut prius, sumatur I L, ita multiplex ipsius I B, ut est multiplex D E, ipsius C. Divisa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipsi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam vero A H,



maior est quam H B, vel certe illi æqualis, si ablatum sit dimidium ex A B; & H B, maior est, quam I B; erit quoq; A H, maior quam I B, hoc est, quam

K M. Rursus quia H I, maior est quàm I B, vel certe illi æqualis; est autem I B, ipsi M N, æqualis: erit quoq; H I, maior quàm M N, vel illi æqualis; atq; adeo tota A I, maior, quàm tota K N. Additis ergo æqualibus I B, N L, erit tota A B, maior quàm tota K L: Est autem D E, maior adhuc, quàm A B. Multo ergo maior erit D E, quàm K L. Quare cû sit ut D E ad C, ita K L, ad I B; (Sumpta. n. fuit K L, ipsius I B, tam multiplex, quàm multiplex est D E, ipsius C,) erit quoq; C, maior quàm I B. Ac proinde relictæ est I B, minor quam C. Quod erat demonstrandum.

14. quinti.

S C H O.

SCHOLIION.

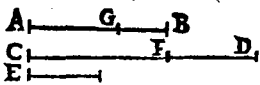
LVCB clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inaequales propositas debere esse tales, ut minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propof. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contra-
ctus contra Iacobum Pelesarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duabus magnitudinibus inaequalibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractiōe, & reliqua minime praecedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsae magnitudines.

DVABVS inaequalibus magnitudinibus propositis A B, C D, quarum minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B, & sic deinceps, alterna quadam detractiōe, auferatur semper minor de maiore, & nunquam metiatur praecedentē. Dico magnitudines A B, C D, incommensurabiles esse. Si. n. non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mēsurā cōmunis. Metiatur eas si fieri potest, magnitudo E, quae vel aequalis erit ipsi A B, vel



minor. Detracta autem A B, ex C D, quoties potest, relinquat F D, se minorem, ita ut A B, ipsam C F, metiatur. Rursus detracta F D, ex A B, relinquat se minorem G B, ita ut F D, metiatur ipsam A G; atque hoc semper fiat. Relinquetur ergo tandem ex C D, vel A B, magnitudo quaedam minor quam E. (Quia cum A B, ablata ex C D, relinquat F D, se minorem, erit C F, ablata maior, quam dimidia ipsius C D, alias si esset dimidia, vel minor quam dimidia, posset adhuc A B, detrahi ex C D. Eodem modo erit A G, ablata ex A B, maior quam dimidia ipsius A B: Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maior,

1. decimi.

quam

1. *id. e. i.*

quam dimidium . relinquetur tandem magnitudo quædā minor quam E.) Sic ergo iam relicta G B , minor quam E .

A ——— G ——— B

2. *pron.*

C ——— E ——— D
E ———

Quoniam igitur E , metitur AB; & AB, metitur CF; metietur quoque E, ipsam CF : Metitur autem E , &

3. *pron.*

2. *pron.*

3. *pron.*

totam C D . Igitur E , reliquam quoque F D, metietur . At F D, metitur A G : quare & E, ipsam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B : ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem . Quod est absurdum . Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur . Quare incommensurabiles sunt . Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis , &c. Quod erat ostendendum .

S C H O L I O N .

H o c Theorema conuertemus ad hunc modum .

Si duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis , detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractiōe: Nunquam reliqua præcedentem metietur .

SINT incommensurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturq; minor A B, ex D, & reliquæ sit E D. Item E D, ex A B, auferatur, relinquanturq; F B, & sic deinceps. Dico in hac

A ——— F ——— B

C ——— E ——— D

alterna detractiōe nunquā reliquam metiri præcedentiē . Si enim fieri potest, metiatur F B, præcedentem E D. Quo-

2. *pron.*

1. *pron.*

2. *pron.*

1. *pron.*

niam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur quoque F B, ipsam A F : Metitur autem & se ipsam : Igitur F B, & totam A B, metietur : Metitur autem A B, ipsam C E . Igitur & F B, ipsam C E, metietur . Ponitur autem & F B, metiri ipsam E D : Igitur & F B, totam C D, metietur . Oñensa est autem & F B, ipsam A B, metiri . Quare F B, utranq; A B, C D, metitur . quod est absurdum . ponuntur enim A B, C D, incommen-

incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractio: Metietur quædam reliqua præcedentem.

NAM si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines, incommensurabiles, ut demonstratis hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum, ponuntur enim commensurabiles.

ITAQUE facile ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ, sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractio, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem, erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur utramque magnitudinem propositam, ut constat ex demonstratione primi theorematis huius scholij: Ex eo enim, quod reliqua magnitudo FB , metiri dicebatur præcedentem ED , ostensum est, eandem reliquam FB , metiri utramque magnitudinem AB, CD . Si vero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonstravit.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

3.

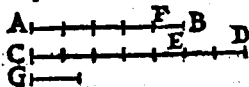
DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

DATÆ duæ magnitudines commensurabiles sint AB, CD , quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam AB, CD , commensurabiles sunt, fit ut si minor AB , ex maiore CD , detracta, quoties potest, relinquat $E D$;

B

& $E D$,

& E D, detracta ex A B, quoties potest, relinquat F B, & hoc semper fiat alterna quadam detractio; tandē reliqua quę-



piam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis (scholij. Metiatur iam F B, reliqua præcedenti

E D. Dico F B, esse maximam mensuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim utranque metiatur, ita ostendemus. Quoniam F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur quoque F B, ipsam A F. At metitur F B, & se ipsam: Igitur F B, totam A B, metietur; atque adeo & ipsam C E, quā A B, metitur. Cū ergo, & ipsam E D, metiatur; metietur quoque F B, totā C D, Metitur ergo F B, utranque A B, C D. Quare utriusque A B, C D, communis mensura est F B.

Q u o d autem F B, sit maxima earum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earum mensura, maior quam F B. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, maior quam F B. Quia igitur G, metitur utranque A B, C B; metitur autem & A B, ipsam C E; metietur quoque G, ipsam C E: At metitur quoque totam C D. Igitur G, reliquam quoque E D, metietur. Metitur autem E D, ipsam A F: Ergo & G, ipsam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam F B, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis mensura est ipsarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis mensura est.

Q u o d si minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita ut detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipsa A B, earum maxima mensura communis, cū & se ipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

E L I C I T U R hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est F B, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D.

Demon-

2. pron.

1. & 2. pron.

1. pron.

2. pron.

3. pron.

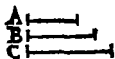
2. pron.

3. pron.

Demonstratum enim est ibi, magnitudinem G, si metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam mensuram F B. Eademque est ratio de ceteris.

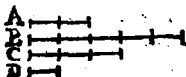
SCHOLIION.

Ex his, quae dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines proposita sint commensurabiles, necne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum expetior per ea, quae ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duae A, & B, commensurabiles sint, an non.



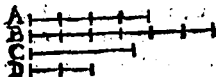
Quae si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

Si vero A, & B, fuerint commensurabiles; sit earum maxima communis mensura inuenta D; quae si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.

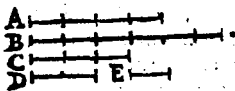


3. decimi.

Quod si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credatur esse commensurabiles, metietur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypotesin.



Si vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoque tres A, B, C, commensurabiles. Inuenta nam E, maxima mensura ipsarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipsas A, & B; metietur quoque



3. decimi.

2. pron.

B 2 E, ipsas

E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

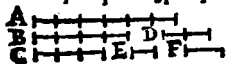
SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datae sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

4.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SIT datae tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam



si maior magnitudo quā D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si uero D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quaelibet earum mensura communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. praecedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, iam planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C.

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo

do

do confirmari potest. Si non est maxima, sit F , maior quā E , si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F , metitur A , & B ; metietur quoque D , earum maximam mensuram, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C : igitur F , metiens D , & C , metietur quoque E , earum mensuram maximam, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E , magnitudines A, B, C , metitur; Ac propterea E , maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

INSERTUR autem hoc ex ultima parte demonstrationis. Offensum enim est ibi, magnitudinem F , si metiatur ipsas A, B, C , metiri quoque E , maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua uero omnia absoluenda erunt, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMATA.

SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SI NT quotcunque magnitudines A, B, C, D , in eisdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H : Ut quidem A , ad B , ita E , ad F ; & ut B , ad C , ita F , ad

$B : G ; &$

G; & ut C, ad D, ita G, ad H. Dico ex aquo esse, ut A, ad D, ita E, ad H. Quoniam ex ijs, quæ ad de

A ———— E, 3.

B ———— F, 4.

C ———— G, 1.

D ———— H, 2.

fin. 3. lib. 6, a nobis demon-
strata sunt, sam propor-
tio A, ad D, componitur
ex proportionibus A, ad

B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex
proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspi-
cium est, cum proportionēs componentes proportio-
nem A, ad D, æquales, ponantur proportionibus, quæ
proportionem E, ad H, componunt, & compositas
proportionēs, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales es-
se, hoc est, esse ut A, ad D, ita E, ad H. Quod est pro-
positum.

I D E M sequitur, si magnitudinum, & numero-

A ———— E, 3.

B ———— F, 12.

C ———— G, 4.

D ———— H, 6.

rum proportio fuerit per-
turbata, ut in hoc exem-
plo apparet, in quo est, ut
A, ad B, ita G, ad H; &

ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita E, ad F. Ea-
de enim prorsus est demonstratio.

S C H O L I O N.

Q U O N T A M præcedenti lemmate & in propositione,
quæ sequitur, & in alijs multis, utendum nobis erit; placuit
illud hoc loco breviter demonstrare, cum non facile videatur
ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa
genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in
præcedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdē
generis; In numeris quidem lib. 7. Libro uero 5. in magnitudi-
nibus. quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiā ad hoc
lemma transferri possit, cū omnes demonstrationes illius libri
numeris quoque cōueniant. Vel certe demonstratio facta in 7.
lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B,
C, D,

C, D, quæ proportionem habent eandem, quæ numeri E, F, G, H, rationem inducunt numerorum.

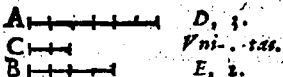
THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

COMMENSURABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metit A, toties unitas repetita metiatur numerum D: Et quoties ea

3. decimi.



dem C, repetita metitur B toties unitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & unitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinē C, atq; numerus D, unitatem. Quare erit ut A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Est autē & ut C, ad B, ita unitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atq; unitas numerum E, æque metiatur. Igitur plēma præcedēs, erit ex æquo, ut A, magnitudo ad B, magnitudinē, ita D, numerus ad E, numerum. Cōmensurabiles ergo magnitudines inter se rationē habent, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

CUM Euclides ad demonstrationem huius theorematiss affirmat maximā cōmunē mensurā propositarū magnitudinū cōmensurabilitū, qualis fuit C, ipsarū A, & B, perspicuū est, lineas debere esse longitudine, & ob id potētia quoq; cōmensurabiles, ut rationē habeāt inter se, quā numerus ad numerū. Hæc solæ cōmunē recipiūt mēsurā, atq; adeo in eis demonstratio locū habet.

QUOD si lineæ sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidē earū quadrata inter se rationē, quā numerus ad numerū, quia cōmensurabilia sunt, atq; idcirco mensurā habent cōmunē, ipsiq; demonstratio huius theorematiss cōuenit: At ipsæ lineæ nequaquā, quia lōgitudine incōmensurabiles cū sint,

communis mensura sunt expertes, ac propterea huius theorema-
tis demonstratio in ipsas convenire nullo modo potest.

Ex demonstratione porro eiusdem huius theoremat^{is} liqui-
do constat, commensurabilium magnitudinum proportionem
esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis men-
sura maxima ipsas metitur. Oñsum enim est, eam habere

A		D, 3.	proportionē magnitudines
C		Vni- -tas.	A, & B, quam habent nu-
B		E, 2.	meri D, & E; per quos sci-

liceo, earum mensura com-
munis maxima C, ipsas metitur.

K N D E se propositis duabus magnitudinibus commensura-
bilibus A, & B, libeat invenire quam proportionem habeant
in numeris; sumendi erant duo numeri D, & E, quos vnitas
eque, ac communis magnitudinum commensurabilium A, &
B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam ut
demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habet,
quam numeri D, & E.

Q U O D si loco maxime mensura C, sumamus aliam quā-
cunque communem earum mensuram, nihilo minus hoc theo-

A		D, 6.	rema demonstrabimus eodē
C		Vni- -tas.	argumento. Quāvis enim
B		E, 4.	numeri D, & E, maiores in-

ueniantur in hac posteriori

demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem propor-
tionem cum illis, ut ex appōsa figura apparet. Quoniam ut-
ro in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi om-
nium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea
forte Euclides in demonstratione maximam communem mensu-
ram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

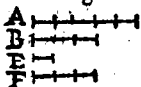
6

THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines inter se proportio-
nem habeant, quam numerus ad numerū:
commensurabiles erunt magnitudines.

H A B B A N T duæ magnitudines A, B, eam proportio-
nem

nem quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse cō
mensurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero
C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A,
quarum partium uni equa-
lis sit magnitudo E. Dein-
de quoties unitas repetita
metitur numerum D, to-
ties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandā
aliā F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, conti-
netur, quoties unitas in C; continebit æqualiter A, ipsam
E, & C, numerus unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad
unitatem: Est autem & ut E, ad F, ita unitas ad D, quod
E, ipsam F, & unitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per
lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, ut A ad F, ita C, ad
D: Erat autem etiam ut C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit ut
A, ad B, ita A, ad F; ac propterea B, & F, magnitudines
æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsam F, metia-
tur, metietur quoque eadem E, ipsam B: Metiebatur autem
& ipsam A. Igitur magnitudo E, utranque A, & B, meti-
tur; Ac proinde A, & B, commensurabiles sunt. Si igitur
duæ magnitudines inter se proportionē habeant, &c. Quod
erat demonstrandum.

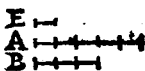


C, 5.
Unitas.
D, 3.

9. quinti.

1. definit.

ALITER. Quot sunt unitates in C, in tot partes equa-
les intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium uni
æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est ut E, ad A,
ita unitas ad C, quod E, ip-
sam A, & unitas ipsum C,
æque metiantur; poniturq;
ut A, ad B, ita C, ad D; erit
per idem lemma superius,
ex æquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metitur autem unitas
numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B,
metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, &
B, habentes eandem communem mensuram E, commensu-
rabiles sunt. Quod est propositum.

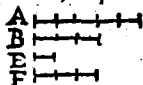


Unitas.
C, 5.
D, 3.

COROLLARIUM.

Ex priori autem demonstratione theorematum aperta est nobis
via qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quævis
alia

alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; diuidenda erit A, in tot æquales partes, quot unitates sunt in C; & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unitates sunt



C, 5.

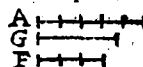
Unitates.

D, 3.

in tot æquales partes, quot unitates sunt in C; & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unitates sunt

in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, ut C, ad D, ut demonstratū est.

Hinc rursus apparet, quam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ,



C, 5.

D, 3.

ut numerus ad numerum. Si nanque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ A, ut numerus C, ad numerum D, inueniēda erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quā sic se habeat A, ut C, ad D: Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, ut C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, fiat continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut A, ad F, atque adeo ut numerus C, ad numerum D, (cum sit ut A, ad F, ita C, ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.

13. sexii.

S C H O L I O N.

IN hoc eiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habens, ut ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

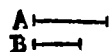
7.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

o.

INCOMMENSURABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

S I incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas



proportionē nō habere, quam habet numerus ad numerū. Si enim A, & B, proportionē dicantur habere, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, &

6. decimi

A, & B, proportionē habēt, quā numerus ad numerū. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIION.

QVOCVNQVE modo linea incōmensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus eas proportionem non habere, quam numerus ad numerū, ut vult theorema. Nam alius, ut demonstratum est, essent longitudine cōmensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI duæ magnitudines inter se proportionē nō habeant, quā numerus ad numerū: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quā numerus ad numerū. Dico eas incōmensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse cōmensurabiles, erit earū proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerū. Nō igitur cōmensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionē habeāt, &c. Quod erat ostēdendū.

SCHOLIION.

QVOD si linea proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsa necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles, alioquin proportionē haberēt, quam numerus ad numerum, ut ad propos. 5. huius lib. demonstravimus. quod est contra hypothesim. Non autē colligendū est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionē nō habent, quā numerus ad numerū, necessario & potentia incōmensurabiles esse, ut manifestū est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantū sint cōmensurabiles, eas proportionē habere, quā numerus ad numerum, ut in demonstratione theorematū assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, ut in scholio propos.

8.
o.

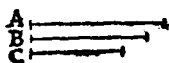
5. decimi

propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur inferatur ex huius theorematibus demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

Si sint tres quantitates continue proportionales, & alia tres continue quoque proportionales; sitque ut prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

Sint continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non; sitque ut A, ad



D, 35. C, ita D, ad F. Dico E, 28. quoque esse ut A, ad F, 21. B, ita D, ad E. Quo-

niam tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionibus D, ad E, duplicata est; ponunturque proportionibus A, ad C, & D, ad F, aequales; Erunt quoque proportionibus A, ad B, & D, ad E, aequales, quandoquidem earum proportionibus duplicatae aequales sunt.

Idem sequitur, si plures quantitates sint, quatuor; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatae, ad demonstrationem; & in quinque, quadruplicatam, &c.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

Quaeritur a rectis lineis longitudine commensu-

menfurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ uero a rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam rectæ AB,

CD, longitudine sunt commensurabiles; erit AB, ad CD, ut numerus ad numerum: Sit ut E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, ut E, numerus ad numerum F: ha-



E, 2. F, 3.
G, 4. H, 9.

5. decimi.

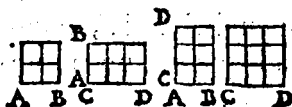
ber autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportionem, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.

20. sexti.

11. octavi.

ALITER.

ALITER. Posita eadem constructione, contineatur rectangulum B D, sub rectis A B, C D. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter

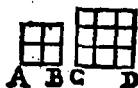


E, 2. F, 3.
G, 4. I, 6. H, 9.

quadratos G, H, ut constat ex demonstratione propos. 1. lib. 8. atq; adeo in proportionem lateris E, ad latus F, ut diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est A B, ad C D, ut E, ad F: Ut autem A B, ad C D,

1. *sexti.* ita est quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ob eandem altitudinem A B, si C D, ponatur basis rectanguli; Item ut E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ut quadratus numerus G, ad numerum I. Rursum quia est A B, ad C D, ut E, ad F: Ut autem A B, ad C D, ita est rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ob eandem altitudinem C D, si A B, ponatur basis rectanguli; Item ut E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ut I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum B D, & quadratum ex C D, in eadem ratione sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

S I T secundo quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas



E, 2. F, 3.
G, 4. H, 9.

A B, C D, esse longitudine cõmensurabiles. Sint numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, ut in priori figura.

Quoniam igitur est quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: Habet autem quadratum ex A B ad quadratum

20. *sexti.* ex C D, proportionem duplicatam lateris A B, ad latus C D; Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit proportio

portio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportionnes, æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant, quam numeri E, F, ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

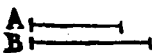
6. decimi

A L I T E R. Repetatur constructio figuræ posterioris. Quia igitur est ut A B, ad C D, ita quadratū ex A B, ad rectangulū B D; Itē ut A B, rursus ad C D, ita rectangulum B D, ad quadratū ex C D, ut supra diximus; erunt quadratū ex A B, rectangulū B D, & quadratū ex C D, continue proportionalia in ratione lineæ A B, ad lineā C D: Sunt autem & numeri G, I, H, continue proportionales in ratione numeri E, ad numerū F, ut supra ostendimus; poniturq; quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratū numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, ut G, ad I, hoc est, ut E, ad F; Ac propterea A B, C D, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, cōmensurabiles sunt longitudine. Quod est propositū.

1. sexti.

6. decimi.

S I N T tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earū quadrata proportionē non habere, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Si enim quadratū ex A, ad quadratū ex B, proportionē dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine cōmensurabiles, ut iam est demonstratū. Quod est absurdū. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionē habet, quam numerus quadratus ad numerū quadratum. Quod est propositum.



Q U A N T O, ac postremo quadratū ex A, ad quadratū ex B, nō habeat proportionē, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine cōmensurabiles credantur; habebūt earū quadrata, ut est demonstratū, proportionē quā quadratus numerus ad quadratū numerū. Quod est absurdū. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine cōmensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Quapropter quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus sunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROL

COROLLARIUM.

Ex his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ uero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ uero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

6. *decimi*
3. *defin.*

Q V O N I A M quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; ipsa commensurabilia erunt. Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existēt. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

3. *defin.*
6. *decimi.*

D I N D A quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamē quam numerus simpliciter ad numerum, potentia quidem commensurabiles sunt, cum earum quadrata commensurabilia sint; at longitudine nequaquam, ut in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim ex lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, ut constat ex secunda parte huius theoremat. R V A S V S quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidē sunt longitudine, at potentia commensurabiles, ut modo diximus; liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse. solum enim ex lineæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionē non habent, quam numerus ad numerum, potentia quoque incommensurabiles sunt, cum earum quadrata incommensurabilia sint.

4. *defin.*
8. *decimi.*

P O S T R E M O lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, ut patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdū. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

S C H O L I O N.

V T autem scopus priorum duarum partium huius theore-

matis

maris planius perfectiusque percipiatur, diligenter consideranda sunt hec, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematum, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt posite: (est enim recta AB , 2. & CD , 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferi, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde e contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, seu latera, ex secunda theorematum parte longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resolvitur, quot sunt unitates in numeris quadraticis; eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex AB , quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex CD , novem; quot nimirum unitates sunt in quadraticis numeris G , H .) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quæ sunt unitates in numeris illis quadraticis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sepe numero enim lineæ datæ sunt incommensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali lineæ proposita sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadraticis illis numeris unitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATUR lineæ Rationalis AB , expressa numero 4. cuius quadratum AC , continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D , E , plani similes non quadrati; habentes tamen proportionem, ut in Arithmetis est demonstratum, quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum G , nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum HI , constans ex sex quadraticis mensuris quadrati AC , quot nimirum unitates in D , numero continentur; atque ipsi HI , quadratum

C

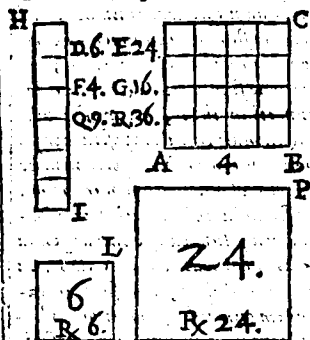
æquali

26. octavi

14. secundi

14. septimi.

aequale consti:tuatur KL , cuius latus KM . Postremo per ea, quae in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta NO , ad cuius quadratum NP ita se habeat KL , quadratum



rectae KM , ut numerus D , ad numerum E ; vel ut quadratus F , ad quadratum G . Quoniam igitur est ut quadratus numerus F , ad quadratum numerum G , vel ut numerus D , ad numerum E , videlicet 6. ad 24. ita quadratum KL , ad quadratum NP , per constructionem; Conueniet autem quadratum KL , 6. mensurari quadratis, quorum 16 continet quadratum Rationale AC : (con-

structum enim est quadratum KL , aequale rectangulo HI , constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris.) continebit quadratum NP , eandem mensuram quadratarum 24. ac praepierea M, NO , latera quadratorum KL, NP , erunt $6. 24.$ quae numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntque linea Rationali AB , longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum G . Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata KL, NP , proportionem habeant, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO ; sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum subdupla videlicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata est, ut hic apparet 1. 2. 4. Quare longitudines commensurabiles sunt rectae KM, NO , cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda sunt erga in hoc theoremate linea etiam illa longitudine commensurabiles, quae numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si considerentur eadem linea KM, NO , simpliciter, & absolute, nullatenus a ratione lineae Rationalis AB , numeris poterunt differre. Cum

6. decimi.

vi. Cum enim proportionem habeant subduplam, si $K M$, dividatur in duas partes aequales, dividetur $N O$, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 2. secabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales sūt partib⁹ lineæ Rationalis $A B$, immo illæ omnino sunt longitudine incommensurabiles.

$R v r s v s$, quia quadrata $K L, N P$, proportionem habentia quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum G , plures quadratas mensuras continent æquales illis, in quas $A C$, quadratum Rationalis lineæ $A B$, resolvitur, quam unitates sunt in dictis numeris quadratis F, G ; (Nam $K L$, æquale est sex huiusmodi mensuris, & $N P$, continet 24. At numerus quadratus F , componitur ex quatuor unitatibus, & G , ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportionem sumantur Q, R , pauciores tales mensuras complectantur quadrata $K L, N P$, quam sunt unitates in numeris quadratis Q, R , cum abster ex 9. alter vero ex 36. unitatibus constituantur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quæ numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quæ unitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cum quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadē quadrata $K L, N P$, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati $A C$, ex Rationali lineæ $A B$, descripsi, resolvi poteris in totidē mēsuras quadratas, quot unitates in quadratis numeris F, G , vel Q, R , continentur. Nā si recta $K M$, dividatur in duas partes, & $N O$, in quatuor, ut dictum est, continebit quadratū $K L$, quatuor mensuras quadratas, & quadratū $N P$, sexdecim, quot scilicet unitates reperiuntur in quadratis numeris F, G . Item, si eadē lineæ secantur in partes tres, & sex, habebunt earū quadrata mēsuras quadratas 9. & 36. quot nimirū unitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R , &c. At huiusmodi mēsuræ nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratū $A C$, Rationalis lineæ $A B$, resolvitur.

I D E M dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorū superficies nō exprimuntur numeris quadratis, dūmodo proportionem habeant inter se, quam numerus quadratus ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12, & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQUE theoremahoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamvis interdum Rationali linea incommensurabiles sint, ut sit sensus. Quadrata que describuntur a rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles linea Rationali proposita, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamvis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis linea conferantur, sepe numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis linea, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi linea Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, ut ad propof. 47. lib. 1. demonstravimus; Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, que quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, ut in scholio propof. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex ultima parte huius theorematism eorum latera, nempe diameter & latus in uno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstravimus in scholio propof. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclidem propof. ultima huius lib.

II.

10.

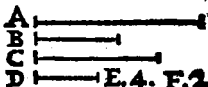
THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommen-

commensurabilis; & tertia quartæ incom-
mensurabilis erit .

S I N T proportionales quatuor magnitudines A, B, C,
D, sitq; A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & ter-
tiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam A,
& B, inter se commensurabi-

les sunt, habebit A, ad B, pro-
portionem quam numerus ad
numerus, nempe quam E,
ad F: Ponitur autē ut A, ad B,



5. decimi.

ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam
numerus E, ad numerū F. Quare C, & D, commensura-
biles inter se sunt.

6. decimi.

S I D sit iam A, ipsi B, incommensurabilis . Dico & C,
ipsi D, esse incommensurabilem . Quoniam A, & B, incom-
mensurabiles sunt, non habebit A, ad B, proportionē quā
numerus ad numerum : Ponitur autem ut A, ad B, ita C,
ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet quam nu-
merus ad numerum . Quare C, & D, incommensurabiles
sunt inter se: Si quatuor ergo magnitudines proportionales
fuerint, &c. Quod erat ostendendum .

7. decimi.

8. decimi.

SCHOLIUM. I.

Q U O D si quatuor proposita magnitudines fuerint linea,
prima autem secunda commensurabilis fueris longitudine,
erit & tertia quarta longitudine commensurabilis, ut ex de-
monstratione huius theorematism apparet . Eodem enim modo
ostendimus posteriores duas proportionē habere numeri ad nu-
merum. Quare, ut in scholio propof. 5. huius lib. diximus, lon-
gitudine commensurabiles sunt .

S I autem prima secunda fueris commensurabilis potentia
tantum, erit & tertia quarta potentia tantum commensurabi-
lis . Repetatur enim eadem figura . Quoniam igitur A, com-
mensurabilis est potentia ipsi B, erunt earum quadrata com-
mensurabilia; ac propterea proportionem habebunt, quam nu-
merus ad numerum . Est autem, ut quadratum ex A, ad qua-

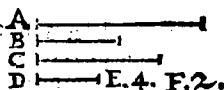
3. defn.
5. decimi.

22. sexti.

dratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D: (quod quatuor linee propositae A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figura similes similiterq; descripta) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem ha-

5. decimi.

3. defn.



bebunt, quam numerus ad numerum. Quare commensurabiles erunt; Ac propterea linea C, D, potentia cōmensurabiles.

Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectae A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt; non erit earum proportio, quae numeri ad numerum, ut in scholii proposit. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neq; C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio proposit. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, ut ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.

EADEM rōne, si prima secūda sit incōnēsurabilis longitudine tantū, erit & tertia quartae longitudine tantū incōnēsurabilis. Nā si A, & B, sint lōgitudine tantū incōmēsurabiles, erunt ipsarū potētia cōmensurabiles; ac propterea ipsae potētia tantū cōmēsurabiles erūt. Igitur, ut nūc ostēdimus, erunt quoq; rectae C, D, potētia tantū cōmensurabiles, Ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

R V K S V 2 si quatuor magnitudinum priores duae fuerint linea, duae vero reliquae superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si linea sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim linea longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quae numeri ad numerum, ex iis, quae in scholio proposit. 5. huius lib. docuimus. Cū ergo habeant reliquae duae magnitudines proportionem eandem, quam linea, erit quoque illarum proportio, quae numeri ad numerum; atq; adeo commensurabiles erunt. Si vero linea longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non, non erit earum proportio, quae numeri ad numerum, ut constat ex scholio proposit. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quae numeri ad numerum. Qua

6. decimi.

re incommensurabiles. erunt Quod est propositum.

8. decimi.

EODEM modo, si priores due magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero due, lineae, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, et neas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si autem plana, solidaue commensurabilia sint, habebunt ipsae proportionem quam numerus ad numerum. Igitur et lineae eandem cum ipsis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, ut diximus in scholio propositi 6 huius libri. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt eam proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineae eadem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, quae docuimus in scholio propositi 8. huius libri. Quod est propositum.

9. decimi.

L E M M A.

Duos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTUR duo plani numeri non similes, per ea, quae ad finem libri 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in scholio propositi 26. libri 8. demonstrauiamus. Quod est propositum.

QUOD si plures numeros inuenire uelimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quoscunque numeros primos, per ea, quae in A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. scholio propositi 20.

lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habet, ex scholio propositi 26. libri 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, ut ad finem libri 8. docuimus.

PORRO inuentionē numerorū planorū nō similitium, qui videlicet proportionē nō habent, quam quadratus numerus ad quadratū numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loca. Quod ut ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTUR quatuor numeri A, B, C, D, ita ut non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia nō sūt, qđ facere oportebat.

A, 2.	C, 1.	numerus E;
B, 6.	D, 16.	cuius igitur est E, F, numeros planos esse,
E, 12.	F, 48.	planos autem dissimiles; quoniam latera

HAEC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similitium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia saepe numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quā quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habet 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. ut cōstat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim est, ut duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnins proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, ut quacunque duo latera vnins proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio prop. 23. lib. 8.

IO.

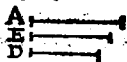
II.

PROBL. 3. PROPOS. II.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per

per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Deinde ex corollario propof. 6. huius lib. reperitur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, ut numerus B,



B, 10.

C, 6.

ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, ut numerus B, ad numerum C, non est autem proportio B ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

9. decimi.

6. decimi.

Sed iam eidem rectæ propositiæ A, invenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. Inveniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propof. 20. lib. 6. ut A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, ut iam est ostensum; erit & quadratum ex A, incommensurable quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propof. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propositiæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

13. sexti.

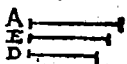
10. decimi.

SCHOLION

Sed igitur recta A, proposita statnatur Rationalis, ita ut ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per definitionem.

lin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis, ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM, ex demonstratione huius theorematiss liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse viriliter illarum incommensurabilem longitudine, & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo. n. quod



B, 10. recta A, D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel com-

mensurabiles potentia tantum, demonstramus recta E, inter illas media proportionalem, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine, & potentia: Eodemque argumento ostendimus eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum. n. recta D, E, A, sint continus proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad recta A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius libri.

IN codicibus vulgaris praenotatur hac undecima propositio a Theone propositioi decima praecedenti: quod errore librarium factum esse puto; cum secunda pars huius ex praecedenti propositioe decima demonstretur, ut ex dictis apparet.

10. decimi.

12.

8.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVAE eidem magnitudini sunt commensurabiles. & inter se sunt commensurabiles.

SIT utraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum. n. A, & C, sint commensurabiles, habeat A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habeat quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G. sumanturque tres numeri H, I, K, mini-

9. decimi.

4. octavi.

mi de-

mi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F,
ad G; sitq; H, ad I, ut A ——— D, 10. E, 8.
D, ad E, hoc est, ut A, C ——— F, 2. G, 3.
ad C; & I, ad K, ut B ——— H, 5. I, 4. K, 6.
ad G, hoc est, ut C, ad
B. Quoniam igitur est A, ad C, ut H, ad I; & C, ad B, ut I, ad
K; erit ex æquo A, ad B, ut H, ad K, numerus ad numerū.
Quare A, B, proportionē habētes, quam numeri H, K, inter
se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini cō
mensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

6. decimi.

SCHOLIUM.

QVON si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atq; A, & B,
ipsæ C, longitudine cōmensurabiles existant, erunt quoq; A, &
B, inter se longitudine commensurabiles, ut constat ex demon
stratione theorematiss, quia eodem modo ostendemus, lineas A,
& B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K:
Quare longitudine commensurabiles erunt, ut ad propof. 6. di
ximus. Si vero A, & B, fuerint ipsæ C, potentia commensurabi
les, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstra
buntur eodem modo, & A, B, inter se commensurabiles potētia.
Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, erit quadra
tum ex A, ad quadratum ex C, ut numerus ad numerum, nem
pe, ut D, ad E, cum quadrata ex A, C, per desin. sint commensu
rabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B,
ut numerus ad numerū, nimirū ut F, ad G. Sumptis ergo in eis
de rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, 4
I, K, deinceps proportionalibus erit rursus ex æquo quadratū
ex A, ad quadratum ex B, ut numerus H, ad numerū K. Quare
quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atq; adeo lineæ
A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur,
A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim
esse duæ lineæ longitudine inter se commensurabiles, licet utra
que cuiuspiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis;
quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensura
biles, potentia vero tantum Rationali expofita commensura
biles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propof. 19.
huius lib.

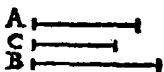
5. decimi.

4. octavi

6. decimi.

SED & conuersum quodammodo, huius theorematidis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuiuspiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.



SINT enim A, & B, commensurabiles, sitq; A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit

commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

QUOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis; erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, ut ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia utraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non utraq; B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine, at vero B, potentia tantum, ut ex hypothesi constat.

12.

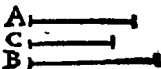
o.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis. Incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensurabilis ipsi



A; cum eidem A, commenturabilis ponatur C; erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

12. decimi.

SCHOLIUM.

S 2. magnitudines A, B, C, sunt lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine.) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.

12. decimi.

QVONIAM vero hac propositio 13. apud Theonem lemma est, sit, ut post hac in nostra editione numerus propositionis Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Relinquimus, n. dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

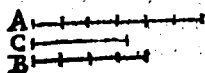
13.
8.

THEOR. II. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini
a cuipim

cuius incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

S I N T duę magnitudines cõmensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuius C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse



commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; erunt & A, C, inter se cõmensurabiles.

12. decimi.

Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duę magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

H I C quoque, si magnitudines A, B, C, sint lineę, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantum, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (Cum hoc posito, utraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum: ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, commensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles; & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

12. decimi.

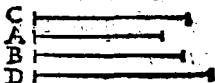
12. de cõmi.

COLLIGUNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quę in hoc lib. demonstrantur, perutile.

Q U A E incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

S I N T duę magnitudines incommensurabiles A, B, quibus

bus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis.



Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ipsi C, incommensurabilis, erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.

Si autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsi A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si vero A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantum commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles & perspicuum est.

LEMMA.

DY ABVS datis rectis lineis, inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QUAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propof. 47. lib. 1. tamē quia hic breuius ex ijs, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C,

quarū AB, maior. oporteatque inuenire, quo AB, plus possit quā C. Diuisa AB, bisaria in D, describatur ex centro D, & inter-



uallo DA, uel DB, semicirculus AEB, in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ EB. Cum enim angulus E, in semicirculo

rectus

4. decimi.

4. decimi.

1. 1.
2. 1.

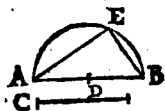
1. quarti.

1. tertii.

47. primi. rectus sit; erit quadratum ex AB , æquale quadratis ex AE , EB ; atq; idcirco AB , plus poterit quam AE , hoc est, quam C , quadrato rectæ EB . Quod est propositum. Similiter

DUABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt.

HOC etiam aliter tradidimus ad propos. 47.



lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ AE , EB , quæ si coniungantur ad angulum rectum E , poterit eas recta ducta AB , quippe cū

47. primi. quadratum ex AB , æquale sit quadratis ex AE , EB .

14.
12.

THEOR. 15. PROPOS. 12.

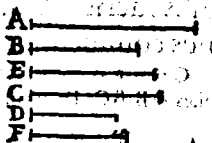
SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum

, rectæ

rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D possitque A, prima plus quam B, secunda, quadrato rectæ E & C, tertia plus possit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A, & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C: Si uero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A, & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse.

Quoniam est ut A, ad B, ita C, ad D; erit quoque ut quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesin; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, ut quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, ut quadratum ex B, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; Ac propterea erit etiam ut recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque ut B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est ut A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad E, ita D, ad F. Fieri quoque ex æquo, ut A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



25. sexti.

22. sexti.

SCHOLIUM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantum commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantum ipsi C, esse commensurabilem, ut constet ex his, quæ in scholio propos. 10. huius lib. scripsimus.

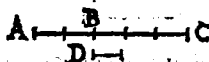
15.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

9.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo utriusque ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

COMPONENTUR duæ magnitudines commensurabiles AB, BC . Dico totam quoque magnitudinem AC , utriusque ipsarum AB, BC , commensurabilem esse. Sit enim ipsarum AB, BC , communis mensura D . Quonia



3. decimi

1. prom.

ritur igitur D , ipsas AB, BC , metitur, metietur quoque D , totam AC , ex ipsis cõpositam. Cum ergo D , metiatur AC , & AB , erunt AC, AB , commensurabiles. Similiter cum D , metiatur AC , & BC , erunt & AC, BC , cõmensurabiles; AC propterea A , utrique ipsarum AB, BC , cõmensurabilis erit.

3. decimi

3. prom.

Si d iam tota AC , ex AB, BC , composita commensurabilis sit alteri ipsarum AB, BC , nempe ipsi AB . Dico & AB, BC , inter se commensurabiles esse. Sit enim D , communis mensura ipsarum AC, AB . Quoniam igitur D , metitur totam AC , & ablata AB ; metietur quoque D , reliquam BC . Quare cum D , metiatur AB, BC , cõmensurabiles erunt AB, BC , inter se. Eodem argumento ostendemus AB, BC , esse commensurabiles, si AC , ipsi BC , fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Hi nec sequitur, si tota magnitudo ex duabus cõposita, cõmensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ cõmensurabile esse. Vt si AC , ipsi AB , sit cõmensurabilis, esse quoque eandem AC , reliquæ BC , cõmensurabile. Nam ut in posteriori parte theoremati ostensum est, semper D , communis mensura totius AC , & ablata AB , cum metiatur totam AC , & ablata AB , metietur quoque reliquam BC , ex 3. pronuntiato. Quare cõmensurabiles sunt AC, BC . Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

I 6.

9.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur; & tota magnitudo utriusque ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPOSITUR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinem AC, utriusque ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est utriusque incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi AB, sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur utramque AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum, ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB; Eademque ratione neque ipsi BC, commensurabilis erit. Quare utriusque ipsarum AB, BC, incommensurabilis est.

SED iam tota AC, composita ex AB, BC, incommensurabilis sit uni ipsarum componentium, nempe ipsi AB. Dico quoque AB, BC, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, erit quoque tota AC, utriusque ipsarum AB, BC, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarum, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reli-

D 2 quæ

3. decimi
3. prop.

16. decimi.

quæ incommensurabilem esse . Nempe si $A C$, incommensurabilis sit ipsi $A B$, esse quoque eandem $A C$, reliquæ BC , incommensurabilem . Si enim $A C$, ipsi BC , foret communis mensura, esset quoque $A C$, ex coroll. præcedentis propositionis, etiam ipsi BC , communis mensura . Quod est absurdum . ponitur enim incommensurabilis . Non est ergo $A C$, ipsi BC , communis mensura, sed incommensurabilis . Quod est propositum .

S C H O L I O N . I .

P E R S P I C U U M est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollariis, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles . Assumitur enim ad utriusque propositionis demonstrationem communis mensura D , &c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, ut ex defin. apparet.

L E M M A . I .

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

Ad rectam $A B$, applicetur parallelogrammum $A D$, deficiens figura quadrata $B D$. Dico parallelogrammum $A D$, æquale esse rectangulo sub segmentis $A C$, $C B$, comprehenso. Cum enim $B D$, quadratum sit, erit angulus ACD , rectus . Parallelogrammum igitur rectangulum est $A D$, conten-



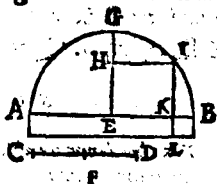
tum sub $A C$, $C D$, rectis . Quare cum $C D$, æqualis sit rectæ $C B$, ob quadratum $B D$; continebitur idem parallelogrammum rectangulum $A D$, sub segmentis $A C$,

AC, CB ; ac proinde parallelogrammum AD , applicationem aequale est reſtanguſo ſub ſegmentis AC, CB , quæ ex applicatione in recta AB , ſunt facta, comprehenſo. Quod eſt propoſitum.

LEMMA II.

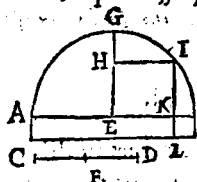
$DVABVS$ datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.

$QVAMVIS$ id, quod in hoc lemmate proponitur, facile abſolui poſſit ex propoſ. 28. lib. 6. libet tamen idipſum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur data rectæ inæquales AB, CD , quarum AB , maior ſit, oporteatque ad AB , applicare parallelogrammum deſiciens figura quadrata, quod autem parallelogrammum æquale ſit quartæ parti quadrati



ex recta CD , deſcripti. Sectis rectis AB, CD , bisectionem in E, F , deſcribatur ex centro E , & intervallo EA , uel EB , ſemicirculus AGB ; & ex E , perpendicularis ad AB , ducatur EG . Et quia tota AB , maior ponitur quam tota CD , erit quoque AE , dimidia ipsius AB , hoc eſt EG , ipſi AE , æqualis, maior quam CF , dimidia ipsius CD . Poſita igitur EH , æquali ipſi CF , agatur per H , ipſi AB , parallela HI , demittaturque IKL , ad AB , perpendicularis, & ſit KL , ipſi KB , æqualis; Ac tandem perficiantur reſtanguſum AL , & quadratum BL . Dico parallelogrammum AL ,

applicatum ad rectam AB , deficiens figura quadrata BL , æquale esse quartæ parti quadrati rectæ CD .



17. sexti.
34. primi

Quoniam KI media proportionalis est inter AK, KB , ut in scholio propos. 13. lib. 6. tra didimus; erit rectangulum sub AK, KB , hoc est, rectangulum AL , æquale quadrato ex KI , hoc est, quadrato ex EH ; (est enim KI , ipsi EH , æqualis, ob parallelogrammum EL .) hoc est, quadrato ex CF . Est autem quadratum ex CF , quarta pars quadrati ex CD ; quod quadratum ex CD , per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex CF . Igitur parallelogrammum AL , ad rectam AB , applicatum deficiensque quadrato BL , æquale est quartæ parti quadrati ex CD , descripti. Quod est propositum.

SCHOLIUM.

Ex hoc lemmate absolventur & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM, rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

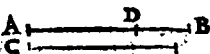
SIT enim recta data AB , & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex CF , nō maius quam quadratum ex dimidia AE , ita ut latus CF , non maius sit latere AE . Educa ergo ad AB , perpendiculari EG , sit EH , æqualis ipsi CF . Deinde acta HI , parallela ipsi AB , demittatur IK , perpendicularis ad AB . Quibus peractis ostendemus, ut prius, rectangulum sub partibus AK, KB , æquale esse quadrato ex IK .

hac est, quadrato ex CF , atque adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF . Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF , maior quam recta EG . Quare ex EG , abscindi non posset recta ipsi CF , æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, ut ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erūt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

Sint duæ rectæ inæquales AB , & C ; & ad maiorem AB , applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C , descripti, ita ut DB , latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmen-



ta AD , DB , inæqualia esse. Si enim AD , DB , segmenta dicantur esse æqualia; cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB , deficiensque figura quadrata ex DB , descripta, æquale sit rectangulo sub AD , DB ; sit autem quod sub æqualibus AD , DB , quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD , dimidio ipsius AB , descriptum; atq; adeo ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB , quadruplum erit ipsius parallelogrammi. Est autem & quadratum ex C , per hypothesim, quadruplū eiusdē parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C . Igitur quadrata rectarū ex AB , et C , æqualia sunt, atq; rectæ AB , et C , æquales.

D 4 quod

Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB , maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD , DB . Quod est propositum.

Hoc facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem, EH , æqualis dimidiatæ parti ipsius CD , nempe ipsi CF , ductaque HI , parallela ipsi AB , & tandem demissa perpendicularis IK , ut partes factæ ex applicatione sint AK , KB ; manifestum est AK , KB , segmenta esse inæqualia, cum AB , in E , secta sit bisariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

17.

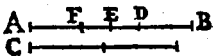
THEOR. 15. PROPOS. 18.

13.

SI fuerint duæ rectæ linæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ linæ sibi longitudinæ commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ linæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale pa-
rallelo-

rallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINTE duæ rectæ inæquales AB , & C , quarum maior AB ; quartæ autem parti quadrati ex minori C , descriptu. per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad AB , parallelogrammum deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD , DB , longitudine commensurabilia. Dico AB , plus posse quam C , quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis.



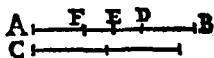
Quoniam per 3. lemma præcedentis propos. AD , maior est, quam DB : diuidatur AB , bisariam in E , & ipsi ED , æqualis sumatur EF . Quo facto, cum totæ $E A$, EB , æquales sint, & ablatae quoque EF , ED , erunt & reliquæ AF , BD , æquales. Et quia recta AB , diuisa est bisariam in E , & non bisariam in D ; erit rectangulum sub AD , DB , una cum quadrato ex ED , æquale quadrato ex EB ; Ac propterea quadruplum rectanguli sub AD , DB , & quadrati ex ED , æquale erit quadruplo quadrati ex EB : Est autem quadruplo rectanguli sub AD , DB , æquale quadratum ex C ; (Ponitur enim rectangulum sub AD , DB , æquale quartæ parti quadrati ex C ,) & quadruplo quadrati ex ED , æquale est quadratum ex FD ; (quadratum enim ex FD , quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex ED , cum FD , dupla sit ipsius ED ,) & quadruplo quadrati ex EB , æquale est quadratum ex AB . (quod quadratum ex AB , quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex EB , dimidiata parte ipsius AB .) Igitur & quadrata ex C , & FD , æqualia sunt quadrato ex AB ; Ac proinde recta AB , plus potest quam recta C , quadrato rectæ FD . Hanc igitur FD , demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi AB . Quoniam rectæ AD , DB , longitudine ponuntur commensurabiles; erit quoque tota AB , parti DB , commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB , composita ex DB , AF , longitudine commensurabilis: (quod composita ex DB , AF , dupla sit ipsius DB .) Igitur cum utraque AB , & composita ex DB , AF , longitudine

5. secundi

16. decimi.

12. decimi.

dine sit commensurabilis ipsi DB; erunt quoque AB, & cōposita ex DB, AF, longitudine inter se commensurabiles;



Ac propterea cum AB, composita ex AF, DB, tanquam una, & ex FD, commensurabilis sit longitudi-

dine compositæ ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. cōmensurabilis longitudine reliquæ FD. Ergo AB, plus potest quam C, quadrato rectæ FD, longitudo sibi commensurabilis.

SED iam AB, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, longitudine commensurabilis. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam una, cōmensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine cōmensurabilis reliquæ compositæ ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autē & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cum utraque AB, DB, longitudine sit commensurabilis compositæ ex AF, DB; erunt quoque AB, DB, longitudine inter se commensurabiles: Atque adeo cū tota AB, composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine ipsi DB; erunt ipsæ AD, DB, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

12. decimi.

16. decimi.

18.

THEOR. 16. PROPOS. 19.

14.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod sit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, &

in

in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tanto plus poterit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod sit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficient figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex C, minori descripti applicetur ad A B, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficienti figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommensurabiles. Di-



co A B, plus posse quam C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus A B, plus posse quam C, quadrato rectæ A D. Haec igitur demonstrare oportet ipsi B, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles, erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est composita ex D B, A F, cum hæc illius sit dupla. Igitur cum quarum linearum commensurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F; ipsa D B, longitudine sit incommensurabilis rectæ A B: erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommensurabilis. Ac propterea cum A B, composita ex A F, D B, tanquam una, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine composita ex A F, D B, erit eadem A B, per coroll. propos. & huius lib. & reliquæ F D, longitudi-

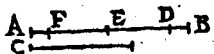
7. decimi.

4. decimi.

ne

ne incommensurabilis. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi incommensurabilis.

I A M uero A B, plus possit quam C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B,



partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus ut prius, rectam A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; erit A B, ipsi F D incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam una, longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cum illa huius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur, & D B, ipsa composita ex A F, D B, longitudine incommensurabilis sit rectæ A B; erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommensurabilis; Ac proinde cum tota A B, composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, longitudine; erunt & ipsæ A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

14. decimi

17. decimi

S C H O L I O N. I.

E G I T hæcenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transiit in sequentibus.

L E M M A. I.

Q U O N I A M demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles

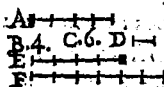
rabiles esse, potentia uero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si exposita Rationali aliqua linea cōmensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem uocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si uero exposita Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si exposita Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

LEMM A. II.

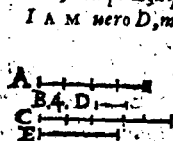
EX PROCLO. Rationales uocat eas lineas, quæ exposita Rationali uel longitudine & potentia commensurabiles sunt, uel potentia solum. Sunt autem & alia lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atq; ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se uel longitudine & potentia, uel potentia solum. Et si quidē longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se cōmensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si uero potentia inter se solum sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

SCHOLIUM. II.

ITAQUE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium; altera equalis est exposita Rationali; ac proinde utraque Rationali commensurabilis. quaque longitudine tamen ei utraque est commensurabilis. Aut denique utraque exposita Rationali commensurabilis est solum potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit exposita Rationalis A , diuisa in quatuor partes, quot nimirum unitates sunt in numero B . Sumpto deinde quolibet alio numero C , sit D , recta una partium rectæ A ; & quoties D metiatur lineam A , toties metiatur quandam aliam E . Item quoties unitas est in C , toties eadem D , metiatur quampiam aliam lineam F . Quoniam igitur A , & E , componuntur ex partibus multitudine equalibus, quæ quidem magnitudine æquales sunt ipsi D ; ipse æquales erunt. Rursus quia D , metitur omnes tres A , E , & F , erunt omnes tres A , E , & F , longitudine commensurabiles. Quare E , & F , Rationali A , commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensæ longitudine inter se commensurabiles, cum habeant D , communem mensuram. Inueniæ ergo sunt due Rationales E , F , longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A , & quarum una, nempe E , equalis est Rationali expositæ A .



I A M vero D , metiatur duas lineas quasdam C , E , per duos numeros F , G , quorum neuter idem sit, qui B ; ita ut utraque linea C , & E , inequalis sit ipsi A . Erunt igitur ut prius, tres rectæ A , C , E , mensuram habentes communem D , longitudine commensurabiles. Quare C , E , Rationali A , longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles, iuxta erunt due Rationales C , E , longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A ,

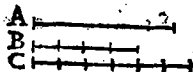


F , 5. G , 3. commensurabiles. Quare C , E , Rationali A , longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles, iuxta erunt due Rationales C , E , longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A ,

li *A*, quarum neutra aequalis est Rationali exposita *A*.

POSTREMO exposita Rationali *A*, inueniatur recta *B*, longitudine tantum incommensurabilis, qua secetur in quot
11. decimi.

cunque partes aequales, & sumatur *C*, composita ex alijs quocunque partibus, qua magnitudine aequales sint partibus rectae *B*. Quo facto, erunt *B*, & *C*, longitudine



commensurabiles. Dico easdem exposita Rationali *A*, potentia solum esse commensurabiles. Quoniam *A*, *B*, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex *A*, quadrato ex *B*, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex *B*, commensurabile quadratum ex *C*, quod *B*, *C*, longitudine sint commensurabiles, atque adeo, & potentia; Igitur quadrata rectarum

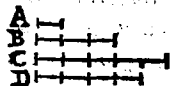
A, & *C*, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare *C*, ipsi *A*, potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum *B*, *C*, longitudine commensurabilium *B*, est ipsi *A*, longi-
12. decimi.

tudine incommensurabilis; erit quoque reliqua *C*, eidem *A*, longitudine incommensurabilis. Est ergo *C*, solum potentia ipsi *A*, commensurabilis. Et quia *B*, & *C*, Rationali expositae *A*, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuenta
14. decimi.

erunt duae Rationales *B*, *C*, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia vero tantum commensurabiles expositae Rationali *A*. Quod est propositum.

QUOD si quis optet inuenire quocunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sum

pta mensura quavis *A*, componantur quotlibet linea *B*, *C*, *D*, ex tot partibus ipsi *A*, aequalibus, quos
sunt unitates in totidem numeris



E, 3.
F, 4.
G, 6.

inaequalibus *E*, *F*, *G*. Nam linea *B*, *C*, *D*, habentes communem mensuram *A*, longitudine commensurabiles erunt.

CAETERVM & omnes lineas Rationales, non solum exposita Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles, facile hoc modo demonstrabimus. Quoniam Rationales lineae sunt, quae exposita Rationali sunt commensurabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum; qua autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est,
6. defin.
12. decimi.

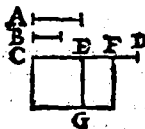
Ratio-

Rationales lineas quasunque inter se commensurabiles esse.

LEMMA. III.

Si sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod sit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratū ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse ut A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque lineâ rectâ CD, abscindatur CE, ipsi A, equalis, & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum sub CE, & EF, hoc est, sub A, & B. Quo-



1. sexti.

niâ igitur est ut CE, ad EF, hoc est, ut A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, ut quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.

EODEM modo erit, ut B, ad A, ita rectangulū FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA IIII.

SPATIUM Rationali spatio commensurable, & ipsum Rationale est.

SIT spatium A, commensurable Rationali spatio

tio B. Dico & A. Rationale esse. Sit C, quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicantur, uel Irrationalia, quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam igitur B, Rationale est; erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cum commensurabilia sint ipsi B, inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea exposita descripto commensurabile; Rationale est. Quod erat demonstrandum.



2. defn.

12. decimi

9. defn.

19.

15.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.

SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulum B D, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus B C, C D, secundum aliquem prædictorum modorum (hoc est, secundum aliquem trium modorum, quos in scholio 1. antecedentis propos. explicuimus; ita ut vel altera ipsarum B C, C D, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei utraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantum.) Dico B D, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solum; erit quoque quadratum B E, ex B C, descriptum quadrato ex A, commensurabile. Est autem quadra-



3. defn.

E tum

8. defin.

9. defin.

1. senti.

10. decimi.

tum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. Igitur & B E, illi communisurabile, Rationale est. Quia vero B C, hoc est, E C, & C D, longitudine communisurabiles sunt, (ponuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine communisurabiles.) & est ut E C, ad C D, ita E B, ad B D; erunt quoque E B, B D, communisurabilia. Quare ex lemma 4. antecedentis propos. B D, Rationali B E, communisurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine communisurabilibus rebus, &c. Quod erat demonstrandum.

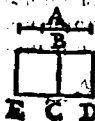
20.

16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine communisurabilem.

S. i. r. rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propos. precedentis exposuimus, hoc est, siue B C, equalis sit Rationali exposita A, siue non, communisurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, communisurabilem longitudine. Describatur ex B C, quadratum B E, quod similiter, ut in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationales sunt, ipsa communisurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; Ac propterea & communisurabilia inter se erunt. Est autem ut B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur, & B C, C D, communisurabiles sunt longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi B C, communisurabilis longitudine: sed & Rationalis, quippe quae Rationali B C, atque idcirco Rationali exposita A, communisurabilem.



9. defin.

12. decimi.

1. senti.

6. defin.

communisurabilis longitudine: sed & Rationalis, quippe quae Rationali B C, atque idcirco Rationali exposita A, communisurabilem.

mensurabilis sit, ut in scholio propof. 12. huius lib. demon-
strauimus. Quare latitudo CD , Rationalis est, & longi-
tudine commensurabilis ipsi BC . Si igitur Rationale ad
Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat
demonstrandum.

LEMMA.

RECTA linea potens spatium Irrationale,
Irrationalis est.

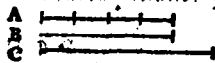
POSSIT recta A , spatium Irrationale, hoc est,
quadratum ex A , aequale sit spatio cuipiam Irrationa-
li. Dico A , Irrationalem esse. Si e-
nim dicatur Rationalis, erit eius quz A —
dratum Rationale quoqz, ut in demonstratione pro-
pof. 20. huius lib. ostensum est. quod est absurdum.
ponitur enim Irrationale. Non ergo A , Rationalis
est. Igitur Irrationalis.

HOC idem constat ex definitione 11. huius lib.
Vbi linea potentes spatia Irrationalia, uocantur Ir-
rationales.

LEMMA. II.

DVAS rectas Rationales potentia. solum
commensurabiles inuenite.

DVO genera sunt linearum Rationalium poten-
tia tantum inter se commen-
surabilium. Aut enim altera
earum est equalis expositæ

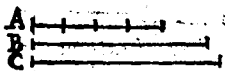


Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita
inueniemus. Sit exposita Rationalis A , cui æqua-
lis sumatur B . Deinde ipsi B , inueniatur C , longitu-
dine tantum incommensurabilis, seu (quod idem est)

potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt; (B, quidem, quod et sit equalis; at C, ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum commensurabilis ipsi B, atque adeo ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuenta ergo sunt dua Rationales B, C, potentia tantum commensurabiles, quarum altera, nempe B, exposita Rationali A, equalis est.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus exposita Rationalis A, cui longitudine tantum incommensurabilis inueniatur B, & huic rursus longitudine

11. decimi.



tantum incommensurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, ut in scholio propof. 12. huius lib. demonstravimus. Quare cum utraque B, C, exposita Rationali A, sit potentia commensurabilis; erunt B, C, Rationales. inuenta ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles.

6. defin.

SCHOLIUM.

QUOD si inveniendae sint quaecunque lineae Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

SUMANTUR per ea, quae in scholio propof. 20. lib. 9. dicimus, tres numeri primi, quos lineae Rationales quæran-

tur;

ur, nempe, A, B, C, D . Deinde sumpta linea Rationali E ,
 fiat ut A , ad B , ita quadratum ex E , ad quadratum ex F , ut in
 coroll. propof. 6. huius lib. ostendimus. Item ut B , ad C , ita
 quadratum ex F , ad qua- $A, 4.$ E
 dratum ex G ; & deniq; $B, 7.$ F
 ut C , ad D , ita quadra- $C, 3.$ G
 tum ex G , ad quadratum $D, 2.$ H

ex H . Dico rectas E, F, G, H , Rationales esse, & potentia tan-
 tum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint,
 manifestum est. Cum omnes earum quadrata proportionem ha-
 beant, quam numeri A, B, C, D , (nempe quadratum ex E , ad
 quadratum ex F , ut numerus A , ad numerum B , ex constru-
 ctione; similiterq; quadratum ex F , ad quadratum ex G , ut B ,
 ad C ; & quadratum ex G , ad quadratum ex H , ut C , ad D . At
 vero ex æquo quadratum ex E , ad quadratum ex G , ut A , ad
 C ; similiterque quadratum ex E , ad quadratum ex H , ut
 A , ad D ; & denique quadratum ex F , ad quadratum ex
 H , ut B , ad D .) erunt ipsa inter se commensurabilia; ac pro-
 pterea & rectæ ipsæ potentia saltem commensurabiles. Existen-
 te ergo E , Rationali, erunt & reliquæ F, G, H , Rationales.
 Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita osten-
 demus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt nume-
 ris primis A, B, C, D : numeri autem primi proportionem non
 habent, quam quadrati numeri, ut ad finem lib. 8. docuimus;
 non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H , proportio-
 nem, quam numeri quadrati. Quare rectæ E, F, G, H , longitu-
 dine incommensurabiles sunt. Offensa sunt autem Rationales,
 & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & poten-
 tia tantum commensurabiles. Quod est propositum.

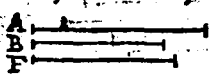
6. decimi

9. decimi.

QVOD si propositum quocunque Rationalibus potentia so-
 lum commensurabilibus, invenienda sit adhuc alia, qua om-
 nibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc mo-
 do. Sint proposita due Ra- A $C, 10.$
 tionales potentia tantum B $D, 6.$
 commensurabiles A, B , F $E, 7.$

quarum quadrata propor-
 tionem habent, quam numerus C , ad numerum D : Sumpto
 autem alio numero, qui ad quemlibet ipsorum C, D primus sit;
 (Invenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur pri-

ma, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur.) fit ut D, ad E, ita quadratum linea B, ad quadratum linea F, per coroll. propos. 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit,



C, 10. ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, B, 7. satem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, commensurabilia sint.

6. decimi.

Cum ergo proportio D, ad E, non sit, quae numeri quadrati ad numerum quadratum, ut ad finem lib. 8. ostendimus, quod D, & E, sint inter se primi; erunt rectae B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia solum commensurabiles. Nam ex equo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, ut C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.

9. decimi.

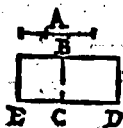
21.

19.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

Q V O D sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

S i t exposita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum sub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modum, quos in lemmate 2. praecedentis propos. diximus (hoc est, siue altera illarum aequalis sit Rationali expositae A, siue non.)



Dico rectangulum B D, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi B D, aequale est, Irrationalem quoque, quae vocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, ut ex B C, quadratum B E, quod

quod erit Rationale, ut in demonstratione propos. 10. diximus. Et quoniam est ut EC, hoc est, BC, ad CD, ut BE, ad BD: Est autem BC, ipsi CD, longitudine incommensurabilis, ex hypothesis; erit ex iis, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipsi BD, incommensurabile. Quare cum BE, commenturabile sit quadrato ex Rationali exposita A: Sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile; erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationale est, ex 1. lemmae propos. antecedentis.

VOCATUR autem hæc linea potens ipsum BD, Media; propterea quod media proportionalis sit inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

ITAQUE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub salibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se incommensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus cõsentiri. Nã sola hæc linea Media hoc loco appellatur.

UT autem recte hoc loco moner Campanus, nõ solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus cõsentiri, Irrationalis est, vocaturq; Media: Verũ etiã quadratum ipsius, vel rectangulum illud Mediũ dici, quia medio loco proportionale est inter quadrata

1. sexti.

9. definiti.

14. decimi.

10. definiti.

17. sexti.

17. sexti.

illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si recte lineae sint continue proportionales, quales sunt BC , & recta Irrationalis, quae Media dicitur, & CD erunt quoque rectilinea similia, similisque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, ut in scholio propof. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum proportionale est inter quadrata rectarum BC , CD , idcirco Medium appellari potest. Hoc enim non ita intelligas, ut putes omne rectangulum Medium contineri sub duobus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD . Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duobus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, ut ex propof. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non recipiuntur rectangulum sub duobus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, ut ostendimus: At non omne spatium Medium sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuersae tamen omne spatium Medium aequale est alteri cuiuspiam Medio sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

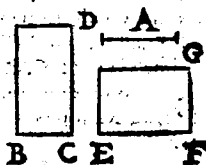
Vnde Medium describi sic poterit, ut dicamus, illud esse rectangulum sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuiuspiam rectangulo sub duobus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso aequale est, ita ut ipsum possit linea recta, quae Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duobus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duae lineae Rationales potentia tantum commensurabiles, ut in scholio sequentis theorematibus ostendimus.

THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

Si t linea Media A, & Rationalis B C, siue ea sit exposita, siue exposita commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; appliceturq; ad B C, rectangulū B D, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulū, quod huic quadrato æquale est, faciatq; latitudinem C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, longitudine incommensurabilem. Quoniam A, Media est, ipsa poterit rectangulum sub duabus rebus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus inter se contentum; alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulū E G, sub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et



quia A, ex hypothese, potest etiam ipsum B D; æqualia erunt B D, & E G, lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit ut B C, ad E F, ita F G, ad ad C D; Ac propterea quoque ut quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratum ex B C, commensurabile est quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F. ponantur Rationales; atq; adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D; proptereaq; & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum F G, Rationalis exposita Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoq; C D, exposita Rationali commensurabilis, ut ostendimus in scholio propof. 12. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quoniam

22.

20.

45. primi

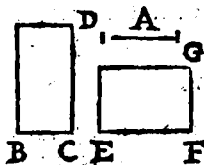
14. sexti.

22. sexti.

10. decimi.

niam $E F$, $F G$. Rationales sunt potentia tantum commen-
surabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt
 $E F$, ad $F G$, ita quadratum ex $E F$ ad rectangulum $E G$, sub
 $E F$, $F B$, contentum, ex lemmate 3. propof. 19. huius lib. erit

10. decimi.



quadratum ex $E F$, incommensu-
rabile rectangulo $E G$, atq; adeo
rectangulo $B D$, quod huic æqua-
le est. Atqui quadratum ex $E F$,
commensurabile est quadrato ex
 $C D$. (quod $E F$, $C D$, Rationales
sint, atq; idcirco saltem potentia
commensurabiles.) Igitur cum

13. decimi.

10. decimi.

quadratum ex $C D$, commensurabile sit quadrato ex
 $E F$, at rectangulum $B D$, eidem quadrato ex $E F$, in-
commensurabile; incommensurabilia erunt quadratū ex $C D$,
& rectangulum $B D$. Est autem ex lemmate 3. propof. 19.
huius lib. quadratum ex $C D$, ad rectangulum $B D$, vt re-
cta $C D$, ad rectam $B C$. Incommensurabiles ergo sunt lon-
gitudine $C D$, & $B C$. Rationalis ergo est $C D$, & Rationali
 $B C$, longitudine incōmensurabilis. Quamobrē, quod a Me-
dia fit, ad Rationale applicatū, &c. Quod demonstrandū
erat.

SCHOLIUM.

11. sexti.

17. sexti.

FACILIS quam ex propof. 45. lib. 1. applicabimus
ad $B C$, rectangulum quadrato ex A , æquale, si ipsis $B C$, & A ,
sumatur tersia proportionalis pro latere $C D$. Cum enim $B C$, A ,
& $C D$, proportionales sint; erit rectangulū $B D$, sub extremis
 $B C$, $C D$, contentum æquale quadrato media proportionalis A .

HAC arte utendum erit & in sequentibus, quando ad ali-
quam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadra-
to cuiuspiam linea recta.

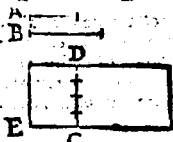
PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Mediū,
hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuiā-
aliteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia
tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationale
lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theo-
rema, alterum latus Rationale, longitudine linea Rationa-
li incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Me-
dio

dis aequale, Medium erit sub duobus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum, Atque hoc modo quodcunque Medium reduci poteris ad Medium contentum sub duobus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIAE cōmensurabilis, Media est.

SIT Mediae A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis CD, ad quam applicetur rectangulum DE, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur DE, Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit CE, latitudinē; erit CE, Rationalis ipsi CD, longitudine incommensurabilis. Rursus ad CD, Rationalem, applicetur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia rectae A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, DE, DF, commensurabilia. Est autem ut DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF. Igitur EC, CF longitudine sunt commensurabiles: Sed E, C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi CD, incommensurabilis. Igitur & CF, longitudine eidem CD, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali exposita CD, sit commensurabilis; (Nam tum EC, CF, sint longitudine ostensa commensurabiles, & EC, ipsi CD, cōmensurabilis sunt potentia, quod Rationalis sit; erit & CF, eidem CD, commensurabilis potentia, ex ijs, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac. proinde recta B, potens rectangulum DF, sub Rationalibus potentia tantum cōmensurabilibus CD, CF, Media est. Mediae igitur cōmensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.



23.
21.

45. primi.

23. decimi.

45. primi.

1. seci.
10. decimi.

14. decimi.

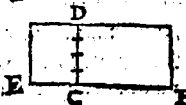
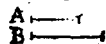
21. decimi.

COROL.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D B, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium. Eademque ratio est in ceteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

Si r spatium, D F, spatio Medio D B, commensurabile. Dico



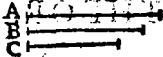
& D F, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam qd D F, Medium sit, poterit ipsum recta, quae Media dicitur, ut in scholio propos. 12. huius lib. tradidimus.) & B, ipsum D F. Quoniam D B, D F, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis aequalia, commensurabilia. Quare A, B, rectae potentia saltem sunt commensurabiles; Ac idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, ut in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, ut in scholio propos. 12. huius lib. docuimus.

LEMMA.

QUEMADMODUM autem in lemma 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Media longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; Vniuersae enim quae longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si uero recta quaedam linea Media potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicitur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Media rursus aliqua linea commensurabilis existeret potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicitur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA. II.

Duas rectas Medias longitudine commen-
surabiles; Item duas potentia tantum commen-
surabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur dua
recta commensurabiles B, C; illa quidem longitudine,
hæc æro potentia tantum; erit: 
utraque B, C, Media A, com-
mensurabilis; Media. Cum ergo A, B, sint longitu-
dine commensurabiles; & A, C, potentia tantum;
erunt inuenta A, B, Media longitudine commensura-
biles; & A, C, Media potentia solum commensura-
biles. Quod est propositum.

24. Secim

SCHOLIUM.

QUADAM omnis linea recta Media commensurabilis,
Media sit; non tamē omnis Media cuilibet Media est com-
mensurabilis; cum dæ Media dari possint prorsus incommen-
surabiles, longitudine videlicet, & potentia, ut ex Propos. 36.
huius lib. apparebit. Vbi etiam docuimus, quā nam r̄sa in-
uenienda sint dua Media longitudine & potentia incommensu-
rabiles.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

24.

23.

QUOD sub Medijs longitudine com-
mensurabilibus rectis lineis continetur re-
ctangulum, Medium est.

CONTINEATUR rectangulum A D, sub Medijs
A C, C D, longitudine commensurabilibus. Dico A D, Me-
dium

1. scilicet

10. decimi

25.

23.

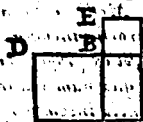
dium esse. Describat ex CD Media Quadratū BD , quod
erit Mediū Et quoniam est ut AC , ad CB , ita AD , ad DB .
Sunt autem AC , CB , hoc est, AC , CD ,
longitudine cōmensurabiles; erunt AD ,
 DB , cōmensurabilia. Quare spatium AD ,
Medio DB , cōmensurabile. Mediū est;
ex coroll. præcedentis propos. Quod er
go sub Medijs longitudine cōmensurabilibus, &c. Quod
erat ostendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Medijs potentia tantum
cōmensurabilibus rectis lineis cōtinetur re
ctangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC , comprehensum sub Medijs
 AB , BC , potentia tantum cōmensurabilibus. Dico AC ,
esse vel Rationale, vel Medium. Describatur ex AB , BC ,
quadrata AD , CE , quæ Media sunt. Ut in scholio pro
pos. 22. huius lib. docuimus; cum rectæ AB , BC , Mediæ
ponantur. Exponatur Rationale FG , ad quod applicetur

45. primi.



34. primi.

23. decimi.

rectangulum FH , quadrato AD ,
ex AB , descripto æquale; & ad HI ,
rectangulum IK , rectangulo AC ,
æquale; & denique ad KL , rectan
gulum LM , æquale quadrato CE ,
ex BC , descripto; eritque totum
 FM , vnum rectangulum, quem
ad modum propos. 45. lib. 1. est ostē
sum. Quia vero AD , CE , Media
sunt, erunt & FH , LM , illis æqua
lia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG , KL ,
(est enim & KL , Rationali FG , æqualis, ob parallelo
grammum FK , Rationalis.) faciantque latitudines GH ,
 KM , erunt rectæ GH , KM , Rationales, ipsi FG , seu KL ,
longitudinis, in cōmensurabiles. Et quia rectæ AB , BC ,
potentia inter se sunt cōmensurabiles, erunt & eorū qua
dra

drata A D, C E, atque adeo ipsiſ equalia rectangula F H, L M, commensurabilia : Vt autem F H, ad L M, ita eſt recta G H, ad K M. Igitur G H, K M, longitudine inter ſe commensurabiles ſunt. Quare G H, K M Rationales oſtenſæ ſunt longitudine inter ſe commensurabiles, Rationali uero F G, ſolum commensurabiles potentia, cum ei oſtenſæ ſint longitudine incommensurabiles ; Ac propterea rectangulum ſub ipſiſ G H, K M, Rationale eſt. Et quoniã eſt, ut D B, ad B C, ita A B, ad B E; (quod D B, B C, ipſiſ A B, B E, ſint æquales, utraq; utrique.) & ut D B, ad B C, ita A D, ad A C; & ut A B, ad B E, ita A C, ad C E; erit quoq; ut A D, ad A C, ita A C, ad C E; atq; adeo A D, A C, C E, proportionalia ſunt. Igitur & illiſ æqualia F H, H L, L M, proportionalia erunt : Habent autem rectæ G H, H K, K M, eadem proportionem, quas rectangula F H, H L, L M. Igitur & rectæ G H, H K, K M, proportionales ſunt, proptereaq; rectangulum ſub G H, K M, quadrato ex H K, æquale eſt. Eſt autem rectangulum ſub G H, K M, oſtenſum Rationale. Igitur & quadratũ ex H K, Rationale eſt; ideoq; & recta H K, Rationalis erit; & ob hoc ipſi F G, Rationali expoſitæ, hoc eſt, ipſi H I, cõmeſurabilis uel lõgitudine, uel ſolũ potetia. Et ſi qui dẽ H K, ipſi H I, lõgitudine ſit cõmeſurabilis; rectagulũ H L, ſub Rationalibus H I, H K, lõgitudine cõmeſurabilibus cõtẽtũ, hoc eſt, A C, illi æquale, erit Rõnale. Si uero H K, ipſi H I, potetia ſolũ cõmeſurabilis ſit; erit rectagulũ H L, ſub Rationalibus H I, H K, potetia tãtũ cõmeſurabilibus cõtẽtũ, hoc eſt, A C, illi æquale, Mediũ. Eſt ergo A C, rectagulũ ſub Medijs A B, B C, potetia tãtũ cõmeſurabilibus cõtẽtũ, uel Rationale, uel Medium. Quocirca, quod ſub Medijs potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

S C H O L I O N.

FACILIVS quã ex 45. propoſ. lib. 1. applicabim⁹ ad H I, rectagulũ ipſi A C, æquale, ſi tribus rectis H I, A B, B C, quarta proportionalis ſumatur pro latere H K. Nã rectagulũ ſub extremis H I, H K, æquale erit rectagulũ ſub medijs A B, B C.

HAC eadẽ arte viemur in ſequẽtib⁹, quãdõ ad aliquã rectã applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

Q V O.

1. ſexti
10. decimi.

20. decimi.

1. ſexti

1. ſexti

17. ſexti

6. deſin.

20. decimi.

22. decimi.

12. ſexti

16. ſexti

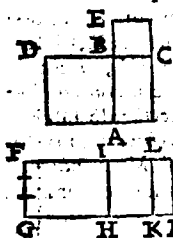
QUONIAM vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Medijs potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium; docebit Euclides propof. 28 quam ratione inveniendā sunt duae Mediae potentia tantum commensurabiles, quae Rationale comprehendant: Propof. vero 29. duas Mediae potentia solum commensurabiles inquiret, quae spatium Medium contineant.

- ITAQUE habemus ex his, rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationales; Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellariq; Medium, & rectam, quae ipsum potest, Medium. Rursus ex demonstratis constat, rectangulum comprehensum sub duabus Medijs longitudine commensurabilibus esse Medium; Rectangulum autem sub duabus Medijs potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale, vel Medium.
20. decimi. duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationales;
22. decimi. Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellariq; Medium, & rectam, quae ipsum potest, Medium.
25. decimi. Medijs longitudine commensurabilibus esse Medium;
26. decimi. Rectangulum autem sub duabus Medijs potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale, vel Medium.

QUOD si quis roget, qualem rectangulum sit illud, quod sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere; nempe aequale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quae Media appellatur.

SIT enim rectangulum AC , comprehensum sub duabus Medijs AB, BC , longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico AC , neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis eisdem, ut in theoremate, ostendimus similiter, rectas GH, KM , Rationales esse, & ipsae FG , longitudine incommensurabiles. Et quia recta AB, BC , ponuntur incommensurabiles

longitudine & potentia; erunt & earum quadrata AD, CE , atque adeo ipsi equalia rectangula FH, LM , incommensurabilia: Ut autem FH , ad LM , ita est recta GH , ad rectam KM . Igitur recta GH, KM , longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare GH, KM , ostense Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles; Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM , Irrationale est;



1. sexta

10. decimi.

22. decimi.

est;

est, quod Medium appellatur, & recta ipsum potens, Irrationalis
 est, qua dicitur Media. Potest autem rectangulum sub ipsis
 G H, K Media H K. (Nam ut prius ostendimus tres G H,
 H K, & M, esse proportionales.) Igitur H K, Irrationalis
 est, & Media. Quare I K, Rationale non est, si enim Rati-
 onale esset, faceret ipsum ad Rationalem H I, applicatum latus
 dinem H K, Rationalem, & ipsi H I, longitudine commen-
 surabilem. Quod est absurdum, ostensa enim est H K, Irrationalis,
 & Media. Eodem modo neque I K, Medium est; Si enim esset
 Medium, faceret ipsum applicatum ad Rationalem H I, latus
 dinem H K, Rationalem, & ipsi H I, longitudine incommen-
 surabilem, quod est absurdum, ostensa enim est H K, Irrati-
 onalis, & Media. Itaque cum I K, neque Rationale sit, neque
 Medium; necessaria neque A, O, illi aequale, Rationale erit,
 neque Medium, sed tertium quoddam genus constipat, nempe
 aequale erit ipsi I K, quod sub Rationali, & Media consistit, neque
 cum H I, Rationalis sit, & H K, ostensa Media. Ex quibus ef-
 ficitur, rectam qua potest spectari sub duobus Medijs longi-
 tudine & potentia incommensurabilibus (quod & primum A B,
 B C, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali,
 & Irrationali, qua Media vocatur, consistere. Quod est
 propositum.

22. decimi.

17. sexti.

21. decimi.

23. decimi.

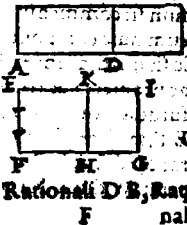
THEOR. 24. PROPOS. 27.

26.

MEDIUM non superat Medium Ra-
 tionali.

22.

SUPERET Medium A B; Medium A C, rectangulo
 D B. Dico D B, non esse Rationale.
 Sit enim, si fieri potest, D B, Ration-
 ale. Exposita ergo Rationali linea E F;
 ad ipsam applicetur rectangulu EG,
 medio A B; æquale; & Medio A C,
 rectangulum E H, æquale, ut sit reli-
 quum H I, Rationali D B, æquale.
 Erunt igitur E G, E H, æqualia Me-
 dijs A B, A C, Media; & H I, æquale Rationali D B, Rati-
 onale.



45. primi

F nald.

23. decimi.

34. primi

21. decimi.

14. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

17. decimi.

4. secunda

10. defm.

11. defm.

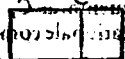
Nale. Quoniam ergo Media E. G. E. H. ad Rationalem E. F. sunt applicata, erunt recte F. G., F. H. Rationales, & ipsi E. F., incommensurabiles longitudine. Rursus, quia C. B. Rationale H. I., applicatum est ad Rationalem H. K., (est enim recta H. K. Rationali E. F. æquale) erit recta H. G., Rationalis, & ipsi E. F., longitudine incommensurabiles. Quare cum H. G., E. F. longitudine sint commensurabiles, & E. F. ipsi F. H., longitudine incommensurabiles, ut est ostensum, erit & H. G., eidem F. H. longitudine incommensurabilis. Est autem ut F. H., ad H. G., ita quadratum ex F. H., ad rectangulum sub F. H., H. G., ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. Iterum quadratum ex F. H., incommensurabile est rectangulo sub F. H., H. G.: Sed quadratum ex F. H., commensurabile est quadrato ex H. G.; (quod sunt ambo, ex lineis Rationalibus E. H., H. G., descripta) atque adeo & duo quadrata ex F. H., H. G., simul, quadrato ex F. H., commensurabilia sunt: Est rectangulo sub F. H., H. G., commensurabile est id, quod bis continetur sub F. H., H. G., (quia hoc aliis est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex F. H., H. G., simul incommensurabilia sunt rectangulo sub F. H., H. G., bis. Quare & compositum ex quadratis rectarum F. H., H. G., & ex rectangulo bis sub F. H., H. G., incommensurabile est composito ex quadratis rectarum F. H., H. G.: At quadratis ex F. H., H. G., una cum rectangulo bis sub F. H., H. G., æquale est quadratum ex F. G. Igitur & quadratum F. G., incommensurabile est composito ex quadratis rectarum F. H., H. G.: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex F. H. Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex F. G., erit quadratum ex F. G., Irrationale, ac propterea & recta F. G., Irrationalis existet. Quod est absurdum. ostensa enim est F. G., Rationalis longitudine ipsi E. F., incommensurabilis. Non ergo D. B., quo Mediū A. B., superat Mediū A. C., Rationale est. Quam ob rem Mediū non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.

SCHO.

Ex dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALIS superat Rationalem

RATIONALIS enim AB superet **Rationale** AC . **Pro** DB dico DB quoque esse **Rationale**. Quonia AB & AC **Rationales** sunt, erit AB, AC commensurabilia quadrato **Rationalis** exposita, atq; adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum AB compositum ex AC, DB , commensurabile sit ipsi AC , erit quoq; idem AB , reliquo DB , commensurabile, & conoll. propt. 10. huius lib. AB , **Rationale**. Igitur & DB ex lemma 1. propt. 10. huius lib. **Rationale** est. Quod est propositum.



PROBL. 2. PROPOS. 27.

MEDIA superare potentia tantum commensurabiles, quæ **Rationale** comprehendant.

EXPONENTUR per lemma 1. proposit. 1. huius lib. duæ **Rationales** A, B , potentia tantum commensurabiles, inter quas media proportionalis sumatur C ; fiatque ut A ad B , ita C ad D . Dico C, D esse **Medias** potentia tantum commensurabiles, quæ **Rationale** comprehendant. Quoniam A, B , **Rationales** ponuntur potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Mediū uocatur; atq; adeo eū ipsū possit recta C , erit C , **Media**. Et quoniam est ut A , ad B , ita C ad D ; suntq; A, B , potentia tantum commensurabiles; erunt quoq; C, D , solum commensurabiles potentia, ut in theorema 10. huius lib. ostendimus. Est ergo & D , **Media**, commensurabilis, **Media**. Quare inuenta sunt **Media** C, D , potentia tantum commensurabiles. Quid iam

1129. 17.

9. defin. 12. decimi

0

27.

1129. 17.

12. 17.

22. decimi 17. 17.

24. decimi.

fas continere Rationale. Quoniam est ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita est C, ad B, erit quoque ut C, ad B, ita B, ad D; ideoque B, media proportionalis inter C, & D, poterit rectangulum sub ipsis C, D comprehensum.

Est autem quadratum ex B, linea Rationale, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est: Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

17. sexti.

28.

O.

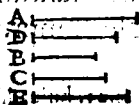
PROBL. 5. PROPOS. 29.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineat.

EXPONANTUR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstratum est, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles; & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. Deinde fiat ut B, ad

13. sexti.

15. sexti.



C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quoniam A, B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; erit rectangulum sub A, B, atque adeo & quadratum ex D, quod illi æquale est,

17. sexti.

22. decimi.

Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta, D, Media. Equia est ut B, ad C, ita D, ad E; sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit, erit & E, illi potentia solum commensurabilis, Media; Ac propterea D, E, Medie sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam est ut B, ad C, ita D, ad E; & permutando ut B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque ut D, ad A, ita C, ad E. Rectangulum igitur sub D, E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationalibus po-

24. decimi.

16. sexti.

centa solum commensurabilibus, Irrationales, & Medium. p. 2. decimi.
 Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo
 inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ
 Medium continent. Quod faciendum erat.

SCHOLIUM. I.

In ijs quæ sequuntur, indigebimus hoc problemate.

Duos numeros planos similes inuenire.

SYMANTYR quatuor quicumque numeri proportionales
 les A, B, C, D, ut quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplican-
 tes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se mul-
 tiplicantes faciant F. Erunt ergo E, &
 F, numeri plani similes, quandoquidem
 latera habens proportionalia, ut ex con-
 structione est manifestum.

QVONIAM autem in lib. 9. osten-
 sum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari
 numerum parem; Imparem uero, si impar multiplicet im-
 parem; perspicuum est, quoniam modo inueniri possint duo pla-
 ni similes, quorum uterque par sit, vel impar; Vel unus qui-
 dem par, aliter uero impar. Si enim latera sumpta, sint nume-
 ri pares, erunt eorum plani pares etiam: si autem numeri sint
 impares, erunt & plani eorum impares. Quod si mixta latera
 sint impares numeri, aliterius autem pares, erit illorum quidam
 planus, impar; horum uero par. Similiter pares erunt plani,
 si quilibet habeat unum latus numerum parem, aliterius uero
 imparem, &c.

LEMMA I.

Duos numeros quadratos inuenire, ita
 ut compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTUR per ea, quæ in scholio pro-
 ximo dicta sunt, duo plani similes A B, & C, quorum

24 & 26.
noni.

1. noni.

2. noni.

utrumque uel par sit, uel impar. Et quoniam, siue a pari
par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est
detrahitur B D, ex A B, qui
A E D B equalis sit ipsi C, erit reli
C quus A D, par. Quo diui
so bisariam in E; Dico
numerum factum ex A B, in B D, qui quidem qua
dratus est, compositum cum quadrato numeri E D,
facere quadratum. Quoniam numerus A D, bifa
riam est diuisus in E, & et additus D B, erit ex 6.
theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demon
strauimus, numerus qui fit ex A B, in B D, una cum
quadrato numeri D E, equalis quadrato numeri E B.
Quare duo quadrati, nempe qui fit ex A B, in B D,
& quadratus numeri D E, compositi faciunt qua
dratum, cum uidelicet, qui ex B E. gignitur. quod
est propositum.

COROLLARIUM.

Ex his manifestum est, quando A B, & C, similes sunt, inuen
tos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum B E, E D,
quorum excessus, nimirum numerus ex A B, in B D, factus, etiam
numerus quadratus sit.

Quod si numeri sumantur A B, & C, non similes, uterque tamē
par, uel impar, inuenti erūt eodē modo duo quadrati numerorum B E,
E D, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex A B, in B D, non est
quadratus. Si. n. quadratus esset, numeri A B, B D, hoc est, A B, & C,
plani similes essent. Quod est absurdū. ponuntur enim non similes.

SCHOLIUM. II.

ITAQUE si iubeamur inuenire duos quadratos nume
ros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sume
mus ut prius, duos planos similes, quorum uterque par, uel
impar sit, nempe A B, & C, & reliqua perficimus; ut in
proximo lemma est dictum. Nam quadrati numeri ex B E,
E D,

E D, descripti sunt illi, quos inquirimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratum ex E D, numero, qui prodatur ex A B, in B D, quod etiam quadratus est.

Si vero inveniendi sint duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non similes, quorum uterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, ut prius. Quod similiter ostendimus, quadratum ex B E, aequale esse quadrato ex D E, una cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare excessus quadratorum ex B E, E D, est numerus factus ex A B, in B D, qui cum non sit quadratus (Si enim esset quadratus, essent A B, B D, plani similes, quod non ponitur) constat propositum.

Hoc posterius facilius absoluemus, si quemcumque quadratum numerum dividamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vera non. Ut si quadratus 36, dividatur in quadratum 16, & non quadratum 20, excedit quadratus 36, quadratum 16, numero 20, non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36, dividatur in quadratum 25, & non quadratum 11, superabit quadratus 36, quadratum 25, numero non quadrato 11, & sic de ceteris.

LEMMA II.

Duos numeros quadratos invenire, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

Sint duo numeri plani similes A B, & C, pares, vel impares, ut in lemma A. H. I. E. F. G. D. C. ti, fiatque ea-

dem constructio, ita ut rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum A B, D B, inter se,

una cum quadrato ex DE , equalis sit quadrato ex
 BE . Auferatur deinde ex DE , unitas EF . Erit ergo
 quadratus ex
 $A..H..I..E..F..G...D.....B$ DF , minor
 C..... quadrato ex
 DE , quod &
 latus DF , latere DE , minus sit. Dicq. quadratos nu-
 meros, quorum alter ex AB , in BD , alter vero ex
 DF , in se fit; compositos non efficere numerum qua-
 dratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus,
 erit is uel maior quadrato ex BF , uel equalis, uel mi-
 nor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstra-
 bimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex
 BF ; ac propterea latus ipsius maius latere BF . Erit
 ergo latus ipsius uel aequale numero BE , uel maius.
 (minus enim non erit, quoniam inter numeros BE ,
 BF , sola unitate inter se distantes nullus medius est
 numerus, ne unitas ipsa secetur; Eset autem dictum
 latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam
 BF , minus uero quam BE .) Si dicatur aequale, ita
 ut quadrato ex BE , equalis sit quadratus numerus
 compositus ex quadrato, qui fit ex AB , in BD , &
 ex quadrato numeri DF cum eodem quadrato ex
 BE , sit ostensus in precedenti lemma equalis nume-
 rus, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex
 DE ; erit, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato
 ex DE , equalis ei, qui fit ex AB , in BD , una cum
 quadrato ex DE . Ablato ergo communi, eo scilicet
 qui fit ex AB , in BD ; erit reliquus quadratus ex
 DF , equalis reliquo quadrato ex DE ; Ideoque &
 latus DE , latere DE , aequale, pars tota. Quod est
 absur-

absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex AB , in BD , alter vero ex DE , in se fit, aequale est numero BE . Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius aequale numero BI , qui maior sit, quam BE , ita ut quadrato ex BI , aequalis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex BI , latera maiora, maior est quadrato ex BE , latere minori; erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex AB , in BD , alter vero ex BE , in se fit, (cum hic compositus, aequalis ponatur quadrato ex BI ,) maior quadrato ex BE . Est autem quadrato ex BE , ostensus in lemmae precedenti aequalis numerus, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DE . Ablato ergo communi, qui fit ex AB , in BD ; erit reliquus quadratus ex DE , reliquo quadrato ex DE , maior; ac proinde latus DE , latere DE , minus, pars toto. Quid est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex AB , in BD , alter vero ex DE , in se, maius est latere BE . Sed neque aequale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus, maior est quadrato ex BE .

S I T iam, si fieri potest, numerus qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DE , aequalis quadrato ex BE ; & ponatur numerus AH , duplus unitatis EF . Quia igitur totus AD , totius ED , duplus est, (divisus enim est AD , in E , bisariam) & ablatas AH , ablata unitatis EF ; erit & reliquus HD , reliqui FD , duplus, ex his, quae ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD , in F , bisariam dividitur. Quare ex 6. theorema. eorum, quae ad propos. 14. lib.

lib. 9. demonstramus, erit numerus qui fit ex HB , in BD , una cum quadrato ex DF , aequalis quadrato ex BF . Sed eidem $A \dots H \dots I \dots E \dots F \dots G \dots D \dots B \dots C \dots$ quadrato ex BF , aequalis ponitur numerus, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato DF . Igitur qui fit ex HB , in BD , una cum quadrato ex DF , aequalis est ei, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF ; & detracto communi quadrato ex DF , relinquetur, qui fit ex HB , in BD , ei qui fit ex AB , in BD , aequalis. Quare cum HB , AB , multiplicantes eundem BD , producant aequales numeros; habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB , ipsi AB , aequalis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , quadrato ex BF , aequalis.

18. septimi

Si tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , minor quadrato ex BF , ac propterea & latus eius latere BF , minus, quod sit BG , ita ut qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , aequalis sit quadrato ex BG . Sumatur autem ipsius EG , duplus AI . Quoniam igitur totus AD , totius ED , duplus est, & ablati AI , ablati EG ; erit rursus & reliquus ID , reliqui GD , duplus; ad propterea ID , in G , diuidetur bifariam. Quare ex eodem theor. 6. eorum, quae ad proposit. 4. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus qui fit ex IB , in BD , una cum quadrato ex DG , aequalis quadrato ex BG ; ponitur autem eidem quadrato ex BG , aequalis

æqualis, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Igitur qui fit ex IB , in BD , una cum quadrato ex DG , æqualis est ei, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Ablatis igitur quadratis ex DG , & DF , quorum qui ex DG , minor est, remanebit, qui ex IB , in BD , maior eo, qui ex AB , in BD , pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , minor quadrato ex BF . Sed neque maior est ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Quod est propositum.

SCHOLION. III.

Ex hoc facile inueniemus duos numeros, ita ut ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus, habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quã quadratus ad quadratũ.

Idem obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

29.

17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPO-

EXPONATUR linea Rationalis AB , & inveniatur
ex ijs, quæ in scholio. propos. præcedentis tradidimus, duo
numeri quadrati CD , CE , quorum excessus DE , non sit
quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat ut



CD , numerus ad numerum DE , ita
quadratum ex AB , ad aliud quadra-
tum; nempe ad id, quod ex AF ; ac-
commodeturque AF , in semicirculo
 ABF , circa diametrum AB , descri-
pto: ac denique connectatur recta FB .

31. versy.

$C \dots E \dots D$ Quoniam ergo angulus F , rectus est
in semicirculo; erit quadratum ex AB ,

47. primi

æquale duobus quadratis ex AF , & FB ; hoc est, rectæ AB ,
plus poterit quam AF , quadrato rectæ FB . Et quia est
quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , ut numerus CD ,

6. de. imi.

ad numerum DE ; erunt quadrata ex AB , AF , commen-
surabilia; atque adeo cum quadratum ex AB , sit Rationa-
le, nempe ex linea Rationali AB , descriptum; erit & quadra-
tum ex AF , Rationale, proptereaque & recta AF , ipsum
describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB , AF ;
atque adeo commensurabiles saltem potentia. Quia verò
quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , proportionem
non habet, quam quadratus numerus ad quadratum nume-
rum; (cum neque quadratus numerus CD , ad non qua-
dratum DE , proportionem habeat quam quadratus ad qua-
dratum; alias & DE , quadratus esset, ut in Arithmetis est
demonstratum. quod non ponitur) erunt rectæ AB , AF ,

24. off. uni

9. decimi.

longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensura-
biles potentia, ut ostensum est. Igitur AB , AF , Rationales
sunt potentia tantum commensurabiles.

22

23

9. decimi.

IAM vero, quoniam est ut CD , ad DE , ita quadra-
tum ex AB , ad quadratum ex AF , erit per conversionem ra-
tionis, ut quadratus numerus CD , ad quadratum numerum
 CE , ita quadratum ex AB , ad quadratum ex FB . (sic
enim CD , superat DE , quadrato CE , ita etiam quadratum
ex AB , superat quadratum ex AF , quadrato ex FB .) Qua-
re, rectæ AB , FB , longitudine commensurabiles sunt. Inve-
nimus ergo duas Rationales AB , AF , potentia tantum com-
mensurabiles, ita ut maior AB , plus possit, quam minor

AF .

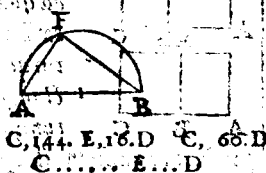
A F, quadrato lineæ FB, sibi longitudine commensurabilis.
Quod faciendum erat.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

30.
18.

INVENIRE duas Rationales poten-
tia tantum commensurabiles, ita ut ma-
ior, quam minor, plus possit quadrato re-
ctæ lineæ sibi longitudine incommensura-
bilis.

EXPONAT V. R. Rationalis lineæ A B, inveniaturque
per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati
CE, E D, ita ut ex illis compositus C D, non sit quadratus,
vel certe numerus aliquis quadratus C D, secetur in duos
numeros non quadratos C E, E D. Vtrumvis enim horum
fiat, totus C D, ad neutrum
ipforum C E, E D, propor-
tionem habebit, quam qua-
dratus ad quadratum, alias
secundum priorem modum,
erit totus C D, etiam qua-
dratus: iuxta posteriorem
vero, quilibet ipforum C E,



E D, quadratus quoque, ut in Arithmetis ostensum est.
quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius
lib. ut C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadra-
tum, ut ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in
semicirculo A F B, circa A B, descripto. Denique connotatur
recta F B. Poterit igitur, ut in præcedenti, A B, plus quam
A F, quadrato rectæ F B; Eruntque A B, A F, Rationales
potencia solum commensurabiles: Eadem enim hic est de-
monstratio, quæ in præcedenti propos. Quoniam vero
rursus, ut prius, est per conversionem rationis, ut C D, ad
C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B: Non ha-
bet autem C D, ad C E, proportionem quam quadratus ad
quadratum; Non habebit quoque quadratum ex A B, ad
qua-

24. ostendit

9. decimi.

.07

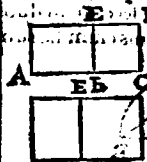
.81

quadratum ex FB , proportionem, quā quadratum numerus
ad numerum quadratum. Quare rectae AB , FB , longitudi-
ne incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationa-
les AB , AF , potentia tantum commensurabiles, ita ut maior
 AB , plus possit quam minor AF , quadrato lineae FB , sibi
longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

LEMMA.

Si sint duae rectae lineae inaequales, erit ut
maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis
contentum, ad quadratum minoris.

Si sint duae rectae inaequales AB , BC , in rectum
constituta, quarum AB maior sit. Dico esse, ut AB ,



ad BC , ita rectangulum sub AB , BC ,
ad quadratum ex BC . Describatur
ex BC , quadratum BD , complea-
turque rectangulum AE . Eritque re-
ctangulum AE , sub AB , BC , contē-
tum, quod BE , ipsi BC , sit, equalis.

1. sexti.

perspicuum autem est, esse ut AB , ad BC , ita AE ,
ad BD .

Eodem modo erit, ut minor ad maiorem, ita re-
ctangulum sub ipsis contentum, ad quadratum ma-
ioris, ut in secunda figura est manifestum, in qua AB ,
minor est, quam BC .

3. 1.

24. 25.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia
tantum commensurabiles, quae Rationale
contineant, ita ut maior plus possit quam
minor,

minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudi-
ne commensurabilis.

REPERTA sunt duæ Rationales A, B, potentia tan-
tum commensurabiles, ita ut A, maior plus possit quam B,
quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis;
sitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat ut A,
ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, sunt Rationa-
les, potentia solum commensurabiles;
erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & A
recta C, ipsum potens, linea Media. Et
quia est ut A, ad B, ita C, ad D; sunt au-

tem A, & B, potentia tantum commensurabiles; erunt
quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, ut in
scholio propos. 10. huius libri ostendimus. Quare D,
Media C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ
ergo sunt duæ Medie C, D, potentia tantum commensura-
biles. Dico eas Rationales, comprehendens. Quia semper
ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad
D; sit autem ut A, ad C, ita C, ad B; erit quoque ut C, ad
B, ita B, ad D; Ac propterea rectangulum sub C, & D,
æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadra-
tum ex B, Rationale Rationale sit; erit & rectangulum sub
C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Medie C,
D, potentia tantum commensurabiles, Rationale. Quo-
niam uero est ut A, ad B, ita C, ad D; potest autem A, plus
quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex
constructione; poterit quoque C, plus quam D, quadrato
lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur
duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, que
Rationale continent; ita ut maior C, plus possit quam mi-
nor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensura-
bilis. Quod faciendum erat.

Q. V. O D si repertæ sint A, B, Rationales potentia
tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam
B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis;
reliqua autem fiant, ut prius, ostendemus eodem mo-
do, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum
commen-

30. decimi.

22. decimi.

24. decimi.

17. sexti.

15. decimi.

11. 2.

58

52

EVLID. GEOM.

commensurabiles, quæ Rationale continent, ita ut maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis ..

P R O B L E M A .

Ad 2. et 3. hoc problema demonstratum pro commensurabilitate. Nos autem brevius ab facilius idem sive opus ostendimus, qui facile indicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram consulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potius solum commensurabiles, quæ Rationale continent, non aliter. Sic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

L E M M A .

Si sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

Si sint tres rectæ AB, BC, CD , in rectum constitutæ. Dico esse ut AB , ad CD , ita rectangulum sub AB, BC , ad rectangulum sub BC, CD . Describatur ex BC , quadratum $ABED$, perficiaturque rectangulum $AECF$. Eritque AE , contentum sub AB, BC ; & CF , sub BC, CD ; quod BE, CD , ipsi BC , æquales sint. Perspicuum autem est esse AB , ad CD , ut AE , ad CF . Quod est propositum.

1. sexti.

32.

26.

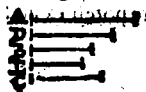
PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia solum commensurabiles, quæ Medium continent

tineant

tineant, ita ut maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inuenta tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. Reperto duobus Rationalibus A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, inueniatur alia B, utrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus. Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; fiatque ut D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est ut A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: Est autem rectangulum sub A, B, æquale quadratum ex D, & rectangulum sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque ut A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed ut quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma. 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit ut A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, ut in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. Quia uero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuenta ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectangulo sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique quia ostendimus esse ut A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Mediæ D, E, potentia solum



30. decimi.

13. sexti.

12. sexti.

17. sexti.

16. sexti.

22. decimi.

24. decimi.

22. decimi.

15. decimi.

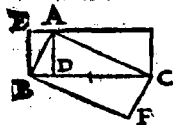
lum commensurabiles, quæ Medium continent, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

Quod si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, ut prius, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile appareat potest ex adducta demonstratione.

L E M M A. I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, a quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum sub CB, BD, æquale esse quadrato ex AB: contentum autem sub BC, CD, æquale quadrato ex AC: & contentum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum denique sub BC, AD, æquale contento sub AB, AC.

Quoniam ex coroll. propof. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis est inter CB, BD; erit rectangulum sub CB, BD, quadrato ex AB, æquale.



Eadem ratione erit rectangulum sub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniam per idem coroll. AC, media proportionalis est inter BC, CD.

Rursus quia ex eodem coroll. AD, inter BD, DC, media est proportionalis, erit eodem modo re-

16. sexti.

do re-

do rectangulū sub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

POSTREMO, quia triangula ABC, ABD, similia sunt; erit ut BC, ad AC, ita AB, ad AD, Quare rectangulum sub BC, AD, æquale est rectangulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulū CE, contentum sub BC, AD: Item rectangulum AF, sub AB, AC, contentum. Quoniam igitur rectangulum CE, duplum est trianguli ABC, necnon & rectangulum AF, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula CE, AF, quod est propositum.

8. sexii.

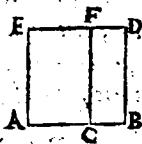
17. sexii.

41. primi.

LEMMA. II.

Si recta linea secetur in duas partes inæquales, erit ut maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.

SECETUR recta AB, non bisariam in C, sitq; maior pars AC. Dico esse ut AC, ad CB, ita rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub AB, CB. Describatur enim ipsius AB, quadratum ABDE, ducaturq; CF, ipsi AE, parallela; eritq; AF, contentum sub AB, AC; & CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, æquales sint. Quoniam igitur est ut AC, ad CB, ita AF, ad CD; cōstat propositū.



17. sexii.

17. sexii.

EADEM ratione erit, ut minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales , minor autem secetur bisariam ; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli , quod sub maiori lineâ & dimidia parte minoris continetur .

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC , angulum rectum constituentes ABC , seceturq; minor BC ,



bisariam in D . Dico rectangulum sub AB, BC , duplum esse rectangulum sub AB, BD . Compleatur rectangulum AC , sub AB, BC ; ducaturq; DE , ipsi AB , parallæla; eritq; BE , contentum sub AB , &

1. sexi.

BD , dimidia minoris . Quoniam igitur AC , ipsius BE , duplum est, quod & basis BC , dupla sit basis BD ; constat propositum .

EODEM modo, si BC , secta bisariam, sit maior, erit quod sub AB, BC , continetur, duplum eius, quod continetur sub AB , minore & BD , dimidia maioris, ut ex secunda figura apparet .

33.
27.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium .

REPERIANTUR duæ Rationales $A B, C D$, potentia solum commensurabiles, ita ut maior $A B$, plus possit, quam minor $C D$, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; feceruntque $C D$ bisariam in E . Deinde per lemmam 1. propos. 17 huius lib. ad $A B$, applicetur quadrato ex $C E$, hoc est, quartæ parti quadrati ex $C D$, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sic illud, quod sub $A F, F B$, continetur. Postremo descripto semicirculo $A G B$, circa $A B$, terigatur $F G$, ad $A B$, perpendicularis, connectanturque rectæ $A G, G B$. Quoniam namque igitur $A B$, plus potest, quam $C D$, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad $A B$, rectangulum sub $A F, F B$, æquale quartæ parti quadrati ex $C D$, deficiens figura quadrata; erit $A F$ ipsi $F B$, longitudine incommensurabilis. Est autem ut $A F$, ad $F B$, ita per lemmam 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub $A B, A F$, ad rectangulum sub $A B, F B$; Rectangulum vero sub $A B, A F$, quadrato ex $A G$, & rectangulum sub $A B, F B$, quadrato ex $G B$, est æquale, per lemmam 1. eiusdem antecedentis propositionis; quod angulus $A G B$, rectus sit in semicirculo $A G B$. Igitur quoque erit ut $A F$, ad $F B$, ita quadratum ex $A G$, ad quadratum ex $G B$; ac propterea cum $A F, F B$, longitudine sine incommensurabiles, erunt quadrata ex $A G, G B$, incommensurabilia. Igitur rectæ $A G, G B$, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali $A B$, Rationale est, æqualeque quadratis ex $A G, G B$; erit etiam compositum ex quadratis rectarum $A G, G B$, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmae propositionis præcedentis, rectangulum sub $A F, F B$, quod quadrato ex $C E$, æquale est factum, æquale est quadrato ex $F G$; (propterea quod angulus $A G B$, rectus est, & $F G$ ad $A B$, perpendicularis) erunt quadrata ex $F G, C E$, æqualia; ac proinde & rectæ $F G, C E$, æquales. Quare $C D$, dupla existens ipsius $C E$, dupla etiam erit ipsius $F G$. Igitur per lemmam 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub $A B, C D$, duplum erit rectanguli sub $A B, F G$ (cum $F G$, dimidia sit minor $C D$).



11. decimi.

19. decimi.

31. tertij.

10. decimi.

4. defin.

47. primi.

2. decimi. Sed rectangulum sub $A B, C D$, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur, & rectangulum sub $A B, F G$, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub $A B, F G$, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub $A G, G B$. Consecutum igitur sub $A G, G B$, Medium quoque est. Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Invenit ergo sunt, duæ rectæ $A G, G B$, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis consecutum, Medium. Quod faciendum erat.



SCHOLIUM

DEMONSTRATUR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, ut duo spatia irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATUR Rationalis linea $A B$, & duo numeri C, D , quorum C , maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum, & fiat; ut C , ad D , ita quadratum ex $A B$, ad quadratum ex $A F$, & tandem descripto quadrato ex $A B$, educatur $E F$, ad $A B$, perpendicularis. Quoniam igitur est, ut C , ad D , ita quadratum ex $A B$, ad quadratum ex $A E$: Non habet autem C , ad D , proportionem quam quadratus ad quadratum, erunt latera $A B, A E$, differentium quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cum $A B$ tota longitudine sit, incommensurabilis parti $A E$, erit eadem $A B$, & reliqua $E B$, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17 huius lib. Ut autem $A B$, ad $A E$, ita est quadratum ex $A B$, ad $A F$. Igitur cum $A B, A E$, incommensurabiles sint longitudine, erunt quadratum ex $A B$, & rectangulum $A F$, incommensurabilia. Quare quadrato ex $A B$, & rectangulo $A F$, li,



9. decimi.

1. sexti.

10. decimi.

li, quod & $A B$, Rationalis ponatur, erit $A F$, dicta quadrato incommensurable; Irrationale. Eodemq; argumento ostendimus $B F$, Irrationale esse. Quia vero $A F$, $B F$, componunt quadratum Rationale ex $A B$; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus conscribi posse Rationale. Quod est propositum.

At vero si $A F$, $B F$, Rationalia sing, ostendimus, & totum $A B$, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim utrumq; $A F$, $B F$, Rationale sit, erunt ipsa inter se commensurabilia. Igitur & totum $A B$, ex ipsis compositum utriq; eorum commensurable erit. Quare $A B$, totum commensurable utriusque Rationali $A F$, $B F$, Rationale quoque est. Quod est propositum.

6. decimi.

9. defin.

34.

28.

PROBL. II. PROPOS. 35.

INVENIRE duas rectas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

REPERIANTUR duæ Mediæ $A B$, $C D$, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior $A B$, plus possit quam minor $C D$, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; sistantque reliquæ, ut in præcedenti propos. Ostendimus igitur similiter, ut in propos. antecedenti, rectas $A G$, $G B$, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media $A B$, æquale existens quadratis rectarum

32. decimi.

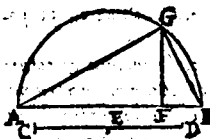


47. primi.

$A G$, $G B$, Medium est; erit quoque compositum ex quadratis rectarum $A G$, $G B$, Medium. Rursus ut in antecedenti propositione, ostendimus rectangulum sub $A B$, $C D$, duplum esse rectanguli sub $A B$, $F G$; atq; adeo

G 4 illud

illud esse huic commensurabile. Quare cum rectangulum sub $A B, C D$, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub $A B, F G$, illi commensurabile. Rationale:



Sed per 1. lemma propof. 33. huius lib. rectangulo sub $A B, F G$, æquale est rectangulum sub $A G, G B$. Igitur & rectangulum sub $A G, G B$, Rationale est. O stentium autem est, recompositum ex quadratis ipsarum $A G, G B$, esse Medium. Invenitur ergo sunt duæ

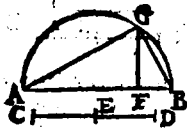
rectæ $A G, G B$, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.

35.
29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis.

3. decimi. REPETANTUR duæ Mediæ $A B, C D$, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent, ita ut maior $A B$, plus possit quam minor $C D$, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis;



fiantq; reliqua, ut i propof. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas $A G, G B$, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Mediâ $A B$, Medium est; & quadratis rectarum $A G, G B$, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum $A G, G B$, Medium. Rursum, ut in 34. demonstrabimus,

47. primi.

Et quia quadratum ex Mediâ $A B$, Medium est; & quadratis rectarum $A G, G B$, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum $A G, G B$, Medium. Rursum, ut in 34. demonstrabimus,

bimus, rectangulum sub $A B, C D$, duplum esse rectangu-
li sub $A B, F G$; atq; adeo illud esse huic commensurabile.
Quare cum ex constructione, rectangulum sub $A B, C D$,
Medium sit; erit quoque rectangulum sub $A B, F G$, hoc
est, sub $A G, G B$, qd illi per lemma propof. 33. huius lib.
æquale est, Medium, ex coroll. propof. 24. huius lib. Quoniã
vero $A B$, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi $C D$;
Est autem eidẽ $C D$, ipsa $C E$, longitudine commensurabi-
lis, quod illa huius sit dupla; erunt $A B, C E$, longitudine
incommensurabiles: Sed ut $A B$, ad $C E$, ita est per lemma 3.
propof. 19. huius lib. quadratum ex $A B$. ad rectangulum
sub $A B, C E$, hoc est, ad rectangulum sub $A B, F G$, hoc
est, sub $A G, G B$. (sunt enim rectangula sub $A B, F G$, &
sub $A G, G B$, per lemma propof. 33. huius lib. æqualia.)
Igitur quadratum ex $A B$, hoc est, compositum ex quadra-
tis rectarum $A G, G B$, incommensurabile est rectangulo
sub $A G, G B$. Invenitæ sunt ergo duæ rectæ lineæ $A G$,
 $G B$ potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compo-
situm ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub
ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito
ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

13. decimi.

10. decimi

SCHOLIUM.

Ex hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad
propof. 24. huius lib. nos demonstraburos recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, &
potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadra-
tis rectarum $A G, G B$, quam rectangulum sub ipsis, esse Me-
dium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque
lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum
Medium, Medias, incommensurabiles tam longitudine, quam
potentia. Si enim potentes essent commensurabiles, essent &
earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum
 $A G, G B$, & rectangulum sub $A G, G B$, commensurabilia.
quod

quod non ponitur. Quocirca si sumatur $A B$, potens, compo-
situm ex quadratis rectarum $A G$, $G B$, & alia recta potens
rectangulum sub $A C$, $G B$, id est, media proportionab inter
 $A G$, $G B$; inuenta erunt duæ Mediæ & longitudine, & po-
tentia incommensurabiles. Quod est propositum.

PRINCIPIVM SENARIORVM
per compositionem.

36.
30.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantum cõ-
mensurabiles componantur; tota Irratio-
nalis erit. Vocetur autem ex binis nomi-
nibus.

COMPONANTVR duæ Rationales $A B$, $B C$, po-
tentia solum cõmmensurabiles; inuentæ per 2. lemma pro-
pos. 21. huius lib. Dico totam $A C$, Irrationalem esse.

A ————— B ————— C

Quoniam $A B$, longitudine in-
commensurabilis est ipsi $B C$;
& ut $A B$, ad $B C$, ita est rectan-
gulum sub $A B$, $B C$, ad quadratum ex $B C$, per lemma
propos. 31. huius lib. erit rectangulum sub $A B$, $B C$, qua-
drato ex $B C$, incommensurable. Sed rectangulo sub $A B$,
 $B C$, cõmmensurable est eius duplum, nempe quod bis
sub $A B$, $B C$, continetur; & quadrato ex $B C$, cõmmensu-
rabilia sunt quadrata rectarum $A B$, $B C$; (omnia enim
sunt Rationalia) atque adeo & cõpositum ex quadratis
rectarum $A B$, $B C$, eidem quadrato ex $B C$, cõmmensura-
bile est. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib.
ostendimus, & quod bis sub $A B$, $B C$, continetur, incom-
mensurable est cõpositum ex quadratis rectarum $A B$, $B C$.
Quamobrem & cõpositum ex eo; quod bis sub $A B$, $B C$,
& ex cõposito quadratorum rectarum $A B$, $B C$, hoc est,
quadratum ex tota $A C$; (Est enim hoc quadratum æqua-
le qua-

10. decimi.

16. decimi.

le qua-

le quadratis rectarum AB, BC , una cum rectangulo sub AB, BC , bis) composito ex quadratis rectarum AB, BC , incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, BC , Rationale, quod commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex BC , Rationali. Igitur quadratum ex AC , quadrato Rationali ex BC , incommensurabile, Irrationale est; atque adeo & recta ipsa AC , Irrationalis erit: Vocetur autem ex binis nominibus, seu ut alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC , potentia solum commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commensurabiles, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

ITAQUE ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, Irrationalis est, quæ Media vocatur. At vero composita ex ipsis, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contingant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTUR duæ Mediæ superius inuente AB, BC , potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contingant. Dico totam AC , Irrationalem esse. Quia AB , est ad BC , ut rectangulum sub AB, BC , ad quadratum ex BC , ut in lemmate propos. 1. huius lib. est ostensum; sunt autem AB, BC , longitudine incommensurabiles; erunt rectangulum sub AB, BC , & quadratum ex BC , incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, BC , com-



commensurable est, quod sub AB, BC , bis, & quadrato ex BC , commensurable est compositum ex quadratis rectorum AB, BC : (Nam cum AB, BC , potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC , commensurable erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC , bis,

& compositum ex quadratis rectorum AB, BC , incommensurabilia inter se sunt, per ea, quae in scholio propo. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectorum AB, BC , una cum rectangulo bis sub AB, BC ,

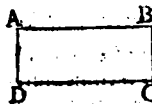
hoc est, quod fratum ex AC , quod huic composito aequale est, incommensurable quoque est rectangulo sub AB, BC , bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC , commensurable rectangulum semel sub AB, BC , cum hoc sit illud dimidiū. Igitur quadratum ex AC , incommensurable est rectangulo sub AB, BC :

Ponitur autem rectangulum sub AB, BC , Rationale. Irrationale ergo est quadratum ex AC ; & ob id recta quoque AC , Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, uel ut alij loquuntur, Binmediale prius. Si duae ergo Mediae potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendū.

L E M M A.

Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATUR rectangulum $ABCD$, sub Rationali AB , & Irrationali BC . Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, faciet ipsum ad Rationalem AB , applicatum latitudinem BC , Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim BC , Irrationalis. Non ergo AC ,

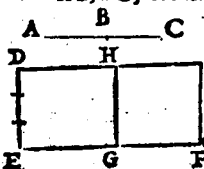


AC, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.

THEOR. 27. PROPOS. 39.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.

COMPONENTUR duæ Mediæ superius inuentæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; & composito ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, æquale est duobus quadratis ex AB, BC, una cum rectangulo bis sub AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC, continetur. Quoniam uero, ex hypothesi, rectangulum sub AB, BC, Medium est; erit & rectangulum bis sub AB, BC, ei commensurabile, hoc est, HF, Medium, ex coroll. propof. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum DG, utriusque ipsorum commensurabile: Sed utrumque quadratorum ex Medijs AB, BC, Medium est. Igitur & DG, ex coroll. propof. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE, (est enim GH, Rationali DE, æqualis.) erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipsæ DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia AB, BC, longitudine incommensurabiles.



38.
32.

29. decimi.

45. primi.

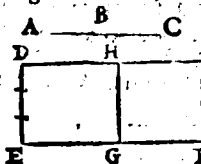
4. secundi.

16. decimi.

34. primi
23. decimi

mentu-

mensurabiles sunt; & est ut $A B$, ad $B C$, ita quadratum ex $A B$, ad rectangulum sub $A B, B C$, ex lemmate 3. propof. 19. huius lib. erit quadratum ex $A B$, incommensurable re-
crangulo sub $A B, B C$, ut in scholio propof. 14. huius lib. ostē-
sum est: Atqui quadrato ex $A B$, ostensum est commensu-
rabile compositum ex quadratis rectarum $A B, B C$; & re-
ctangulo sub $A B, B C$, commensurable est, quod continē-



tur bis sub $A B, B C$, eum hoc il-
lius sit duplum. Igitur per ea, quæ
in scholio propof. 14. huius lib.
diximus, erit & compositum ex
quadratis rectarum $A B, B C$, hoc
est, rectangulum $D G$, incommē-
surabile rectangulo bis sub $A B,$

1. fecit.
10. decimi.

37. decimi.

$B C$, hoc est, rectangulo $H F$. Cum ergo sit ut $D G$, ad $H F$,
ita $E G$, ad $G F$; erit $E G$, ipsi $G F$, longitudine incommen-
surabilis: ostensum autem iam fuit $E G, G F$, esse Rationa-
les. Rationales igitur sunt $E G, G F$, potentia tantū cōmē-
surabiles; ac propterea, & tota $E F$, cōposita, Irrationalis est.
Quare, per lēma antecedens, $D F$, cōtentū sub Rōnali $D E$,
& Irrationali $E F$, Irrationale est; Ac propterea & quadratū
ex $A C$, ipsi $D F$, æquale, Irrationale est. Quare & recta $A C$,
Irrationalis est. Vocetur aut ex binis Medijs secunda, seu ut
alijs placet, Bimediale secundū. Si duæ ergo Mediæ potentia
tantum commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandū.

SCHOLIION.

VOCAVIT Euclides in præcedēti propositione lineā Ir-
rationalē $A C$, quæ cōponitur ex duabus Medijs potētia tantū
cōmēsurabilibus, quæ Rationale cōtineāt, ex binis Medijs pri-
mā: Hic vero lineā Irrationalē $A C$, quæ cōponitur ex duabus
Medijs potētia tantū cōmēsurabilibus, quæ Mediū cōtineāt, ex
binis Medijs secundā, quoniā Rationale & natura, & cognitio-
ne prius est Medio, quod Irrationale est, ex propof. 22. huius lib.

LEMM A.

Si recta linea non bifariam secetur, erit cō-
positum ex quadratis partium maius, quàm re-
ctangulū

Rectangulū sub partibus his cōprehensum, quadrato eius lineę, qua maior pars minorem superat.

SECTVR recta AD , in B , non bisariam, sitq; maior pars AB ; in qua sumatur BC , minori parti BD , equalis, ut sit AC , excessus, quo AB , superat BD , hoc est, BC , ipsi BD , equalem. Dico quadrata rectarū AB , BD , simul maiora esse rectangulo bis sub AB , BD , quadrato recte AC . Qua



ma quadrata ex AB , BC , equalia sunt rectangulo bis sub AB , BC , una cum quadrato ex AC ; estq; BC , ipsi BD , equalis: erunt quoq; quadrata ex AB , BD , equalia rectangulo bis sub AB , BD una cū quadrato ex AC . Quare quadrata ex AB , BD , maiora sunt, quā rectangulum bis sub AB , BD quadrato recte AC . quod est propositum.

COROLLARIUM.

Ex hoc sequitur, quadrata partū inæqualiū simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectę lineę potētia incōmēsurabiles cōponātur, quę faciāt cōpositū quidē ex ipsarū quadratis Rōnale; quod autē sub ipsis cōtinētur, Mediū: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONENTVR duæ rectę superius inuētę AB , BC , potētia incōmēsurabiles, faciētes quidē cōpositū ex ipsarū quadratis Rōnale; rectangulū vero sub ipsis cōtētū, Mediū. Dico totā AC , esse Irrationālē. Qm rectangulū sub AB , BC , Mediū ponitur, erit & rectangulū bis sub AB , BC , illi cōmēsurabile, Mediū, ex coroll. propos. 24. huius lib. atq; adeo Irrationale.

Ponitur

7. secundi.

39.

33.

34. decimi.

10. *defin.* Ponitur autē cōpositū ex quadratis rectarū AB, BC, Rōnale Incōmēsurabile ergo ēst rectāgūlū bis sub AB, BC, cōposito ex quadratis rectarū AB, BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, BC, una cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex A C, incommensurabile est cōposito ex quadratis rectarū AB, BC. Cum ergo hoc cōpositum ponatur
11. *defin.* Rationale; erit quadratum ex A C, illi incommensurabile, Irrationale; Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia cum possit duo quadrata ex A B,
4. *secundi* BC, & rectangulū bis sub AB, BC, cōpositum ex quadratis rectarū AB, BC, per lemma antecedēs, maius est rectangulo bis sub AB, BC. Quare cum cōpositum ex quadratis rectarū AB, BC, Rationale sit, rectangulum vero bis sub AB, BC, Medium; recte uocabitur AC, Maior, siquidem a Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.



ius est rectangulo bis sub AB, BC. Quare cum cōpositum ex quadratis rectarū AB, BC, Rationale sit, rectangulum vero bis sub AB, BC, Medium; recte uocabitur AC, Maior, siquidem a Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

40.

34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant cōpositum quidem ex ipsarū quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

35. *decimi.* COMPONANTUR duæ rectæ superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes cōpositum quidem ex quadratis ipsarū, Medium; rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam cōpositum ex quadratis rectarū AB, BC, Medium est; quod uero continetur bis sub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub AB, BC, semel continetur, Rationale ponatur;



ponatur; erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, una cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, ut diximus, sit Rationale; erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandū erat.

10. defin.

17. decimi.

10. defin.

11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

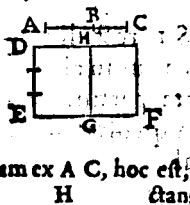
41.

35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTUR duæ rectæ superius inuenta AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum bis contentum sub AB, BC, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. Dico totam AC, Irrationale esse. Exponatur enim Rationalis DE, ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et composito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, re-

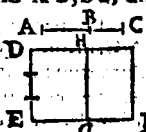
6. decimi.



45. primi.

4. secundi.

Angulum D F, æquale est composito ex quadratis rectarum A B, B C, una cum rectangulo bis sub A B, B C, erit reliquum H F, æquale rectangulo bis sub A B, B C.



Quoniam uero tam compositum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc est, rectangulum D G, quam rectangulum sub A B, B C, at-

que adeo ex coroll. propos. 24. huius libri, quod bis sub A B, B C, nempe ipsum H F, (cum illi sit, communisurabile) Me-

23. decimi.

diū ponitur, facient D G, H F, ad Rationalem D E, applicata latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudi-

1. 1.

1. 2.

13. decimi.

1. sexti.

10. decimi.

ne incommensurabiles. Rursus, quia compositum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc est, rectangulum D G, incommensurabile ponitur rectangulo sub A B, B C: Eidem autem rectangulo sub A B, B C, communisurabile est ipsius duplum, nempe quod bis continetur sub A B, B C, hoc est, ipsum H F; erunt & D G, H F, incommensurabilia.

Quare cum sit ut D G, ad H F, ita E G, ad G F; erunt E G, G F, longitudine incommensurabiles. Atqui B G, G F, ostensa sunt Rationales. Igitur E G, G F, Rationales sunt potentia solum communisurabiles; Ac propterea tota E F, ex ipsis composita Irrationalis est.

37. decimi.

Quare D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex A C, illi æquale, Irrationale est, ideoque & recta ipsa A C, Irrationalis.

11. defin.

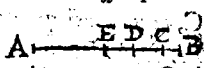
Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, & rectangulum bis sub A B, B C. Si, duæ, ergo rectæ, lineæ, potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat demonstrandum.

am. n. l. c.

L E M M A.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

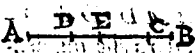
S E C E.

SECEVR recta AB , inaequaliter in C , & rursus inaequaliter in D , sintque priores partes AC , CB , magis inaequales, quam posteriores AD , DB . Dico quadrata ex AC , CB , simul maiora esse quadratis ex AD , DB , simul. Dimi-
sa enim AB , bisariam in E ,  cadet punctum D , uel inter E , C , uel inter A , E . Cadat primum inter E , C . Quoniam igitur rectangulum sub AC , CB , una cum quadrato ex EC , aequale est quadrato ex EB : Item rectangulum sub AD , DB , una cum quadrato ex ED , aequale est eidem quadrato ex EB : erit rectangulum sub AC , CB , una cum quadrato ex EC , aequale rectangulo sub AD , DB , una cum quadrato ex ED . Ablatis igitur quadratis inaequalibus rectangulum inaequalium EC , ED , cum quadrato ex EC , maius sit quadrato ex ED : erit reliquum rectangulum sub AC , CB , minus reliquo rectangulo sub AD , DB ; ac propterea & rectangulum bis sub AC , CB , minus erit rectangulo bis sub AD , DB . Quoniam uero quadratum ex AB , aequale est tam rectangulo bis sub AC , CB , una cum quadrato ex AC , CB , quam rectangulo bis sub AD , DB , una cum quadrato ex AD , DB : erit rectangulum bis sub AC , CB , una cum quadrato ex AC , CB , aequale rectangulo bis sub AD , DB , una cum quadrato ex AD , DB . Quare cum rectangulum bis sub AC , CB , ostensum sit minus rectangulo bis sub AD , DB : erunt reliqua quadrata ex AC , CB , maiora reliquis quadratis ex AD , DB . Quod est propositum.

SEDE cadat iam D , inter A , E . Quoniam igitur partes AC , CB , magis inaequales ponuntur, quam partes AD , DB : erit AD : (qua minor est posteriori) maior quam

CB; (quæ priorū minor est) ac prōinde cū AE, EB, æ-
quales sint, erit reliqua EC, maior quā reliqua DE.

5. secundi

Itaque quia rectangulum sub
A.  B AC, CB, una cum quadrato ex
EC, æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum
sub A D, DB, una cum quadrato ex DE, æquale est
quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB;
erit rectangulum sub AC, CB, una cum quadrato ex
EC, æquale rectangulo sub A D, DB, una cum qua-
drato ex DE. Igitur ut prius, demonstrabimus qua-
drata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD,
DB. Quid est propositum.

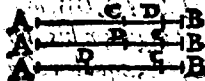
42.

36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QV AE. ex binis nominibus, ad unum
duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Si 7 ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in
sua nomina, ita ut AC, CB, sint Rationales potentia tantū
commensurabiles, ut uult propositio 37. huius libri. Dico



AB, ad aliud punctū diuidi non pos-
se in alia nomina, quæ scilicet sint etiā
Rationales lineæ potentia tantum
commensurabiles. Si enim fieri po-
tesset, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo

AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur,
essent AC, CB, longitudinē commensurabiles, quod
est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum
commensurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam seca-
bitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantū
commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad
D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, uel minus
inæquales sunt, quam partes AD, DB, uel magis inæqua-
les; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC,
CB,

C B, uel minora sunt quadratis ex A D, D B, uel maiora. (Neque enim partes A D, D B, ubicunque punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, utraque utrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia uero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, ut in pronuntiato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, una cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, una cum rectangulo bis sub A D, D B, quod tam illa, quam hæc, æqualia sunt quadrato ex A B; sit, ut qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis Rationale, ex ijs, quæ in scholio propos. 34. huius libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, ut in scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est. Quoniam uero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi commensurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. Quare cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

4. secundi

22. decimi.

27. decimi

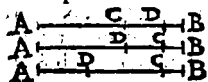
43.

THE OR. 32. PROPOS. 44.

37.

QVAE ex binis Medijs prima, ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, divisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut A C, C B, sint Mediae potentia solum commensurabiles, quae Rationale contineant, ut vult propositio 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum dividi non posse in alia nomina, quae scilicet sint etiam Mediae lineae potentia tantum commensurabiles, continentesque



Rationale. Dividatur enim, si fieri potest, in alia nomina A D, D B. Igitur ubicunque punctum D, existat, similiter probabimus,

ut in praecedenti propositione, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B: Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. (Cum enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis sub A C, C B, ei, quod continetur semel sub A C, C B, commensurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis sub A D, D B. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, ut in scholio propos. 27. huius libri ostendimus; perspicuum est, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C D, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. Quia vero rectae A C, C B, Mediae sunt, & potentia commensurabiles; erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. Quare & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum utrumque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus compositum ex quadratis rectarum A D, D B. Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum

A C,

16. decimi.

27. decimi.

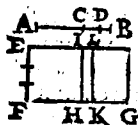
A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale. Ostendimus autē & Rationale esse Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quā ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44.
38.

Q V AE ex binis Medijs secunda, ad unū duntaxat punctū diuiditur in nomina.

S i r ex binis Medijs secunda A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut A C, C B, Mediæ sint potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ut vult propos. 39. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantū commensurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur ubi cunque punctum D, existat, similiter ostendemas, ut in propositione 43. quadrata ex A C, C B, uel maiora esse quadratis ex A D, D B, uel minora. Exponatur Rationalis E F, ad quam applicetur rectangulū E G, æquale quadrato ex A B. Item E H, æquale quadratis ex A C, C B. Erat igitur reliquum I G, æquale ei, quod continetur bis sub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B, æquale est quadratis ex A C, C B, & rectangulo bis sub A C, C B. Eodem modo si ad E F, applicetur E K, quadratis ex A D, D B, æquale; erit reliquum L G, æquale rectangulo bis sub A D, D B, comprehenso. Et quia quadrata ex A C, C B, inæqualia sunt quadratis ex A D, D B, erunt quoque rectangula E H, E K, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ F H, F K, inæquales erūt. Rursus quia quadrata ex A C, C B, maiora sunt, per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub A C, C B; erit & E H, maius quā I G, ac propterea E H, maius quā dimidium ipsius E G, ideoq; & recta F H, maior quā dimidiū ipsius F G. Eadē ratione osten-

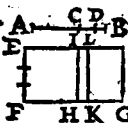


45. primi

4. secundi.

H 4 demus

demus FK , maiorem esse dimidio ipsius FG . Inaequales ergo sunt partes FH , HG , partibus FK , KG , singulae singulis. Quoniam uero AC , CB , Mediae sunt, & potentia



commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utriusque ipsorum commensurabile erit. Cum ergo utrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, EH , per coroll.

propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit FK . Quare EH , EK , ad Rationalem EF , applicata faciunt latitudines FH , FK , Rationales ipsi EF , longitudine incommensurabiles.

Eodem modo cum rectangulum sub AC , CB , ponatur Medium, erit & quod bis sub AC , CB , hoc est, IG , illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI , erit HG , Rationalis ipsi HI , longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus LG , Medium esse, & KG , Rationalem ipsi KL , longitudine incommensurabile.

Rursus quia AC , CB , longitudine sunt incommensurabiles; & est ut AC , ad CB , ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC , ad rectangulum sub AC , CB , erit quadratum ex AC , rectangulo sub AC , CB , incommensurabile. Sed quadrato ex AC , commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC , CB : (cum enim AC , CB , potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; erit & compositum ex ipsis utriuslibet ipsorum, nimirum quadrato ex AC , commensurabile.) Rectangulo uero sub AC , CB , commensurabile est, quod bis sub AC , CB . Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC , CB , hoc est, rectangulum EH , incommensurabile est, per scholion propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub AC , CB , hoc est, ipsi IG . Quocirca cum sit ut EH , ad IG , ita FH , ad HG ; erunt FH , HG , longitudine incommensurabiles. Ostense sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt FH , HG , potentia solum commensurabiles. Igitur FG , tota Irrationalis est, quae ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H . Eodem modo ostendemus & FG , ex binis nominibus, diuisam

16. decimi.

23. decimi.

23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

8. sexti.

10. decimi.

37. decimi.

fam

sam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, ut demonstratum est in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendū.

43. decimi.

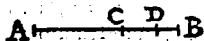
THEOR. 34. PROPOS. 46.

45.

39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

S I T Maior A B, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita ut A C, C B, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale; rectangulum uero sub ipsis Mediū, ut uult propositio 40. huius libri.



Dico A B, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ scilicet lineæ incommensurabiles quoque sint potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Medium. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbiunque ergo punctum D, extiterit, demonstrabimus similiter, ut in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, eum esse, qui rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale: (quia cum utrumque compositum ex hypothese sit Rationale, erit quoque eorum excessus spatium Rationale, ut in scholio propo. 17. huius libri ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. Quoniam uero rectangulum sub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub A C, C B, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurable. Atque eodem modo Medium erit rectangulū bis sub A D, D B. Igitur cum Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, spatium

27. decimi.

spatium Rationale: Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

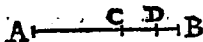
46.

40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

S i t linea Rationale ac Medium potens A B, diuisa in sua nomina in puncto C, ita ut A C, C B, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum uero sub ipsis Rationale, ut uult propos. 41. huius libri.



Dico A B, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quae nimirum sint lineae quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbiunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 42 huius libri, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B. Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est; quod ostendemus, ut in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale. Quia uero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: Medium autem non superat Medium Rationale; non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum

27. decimi.

Cum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

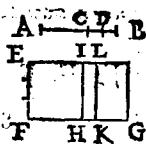
THEOR. 36. PROPOS. 48.

47.

41.

BINA Media potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Si r linea potens bina Media A B, diuisa in sua nomina ad C, ita ut A C, C B, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, ut uult propos. 42. huius libri. Dico A B, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ uidelicet sint etiam incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctum D, exstat. Constructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. ostendemusque ut ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæquales esse singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi incommensurabile est. Igitur Media E H, I G, applicata ad Rationalem E F, (est enim I H, ipsi E F, æqualis) faciunt latitudines F H, H G, Rationales, longitudine ipsi E F, incommensurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas F K, K G, Rationales esse, longitudine incommensurabiles ipsi E F. Quia uero compositum ex quadratis rectarum A C, C B, descriptis, hoc est, rectangulum E H, incommensurabile est, ex hypothesi, rectangulo bis sub A C, C B, æmpe rectangulo I G, estque ut B H, ad

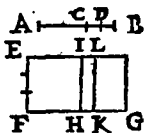


23. decimi.

1. *sexsi.*

ad I G, ita FH, ad H G; erunt FH, H G, longitudine incommensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius libri ostendimus: Sed & ostensæ sunt Rationales.

37. *decimi.*



Rationales ergo sunt FH, H G, potentia solum commensurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisæque in nomina ad punctum H. Non secus demonstra-

43. *decimi.*

bimus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, iam ante demonstratum est. Igitur AB, binæ Media potens non diuiditur ad aliud punctum quàm ad C, in sua nomina. Quocirca ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

DEFINITIONES

SECUNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomē plus possit quam minus, quadrato rectæ linæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI uero minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali ; Vocetur ex binis nominibus tertia .

RVRSVS si maius nomen plus possit , quam minus , quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis ,

IIII.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali cōmensurabile sit longitudine ; Vocetur ex binis nominibus quarta .

V.

SI uero minus nomen ; Vocetur quinta .

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum ; Vocetur sexta .

SCHOLION.

NUMERVS dictarum sex linearum , quæ ex binis nominibus appellantur ; colligitur hac ratione . Quoniam nomina lineæ , quæ ex binis nominibus dicitur , sunt linea potentia tantum commensurabiles , non poterit utrunque nomen exposita Rationali commensurabile esse longitudine ; (alias enim nomi-

na ipsa essent linea longitudine inter se commensurabiles, ut in scholio propot. 12. huius libri docuimus. quod non ponitur. Sed vel unum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum. Atque ita tria genera consurgunt linearum, quae ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inaequalia sunt; (alias enim essent linea inter se longitudine commensurabiles: quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato linea sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato linea longitudine sibi commensurabilis, constituentur una cum tribus dictis generibus, tres diuersae lineae ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato linea longitudine sibi incommensurabilis, efficiuntur una cum eisdem tribus generibus aliae tres diuersae lineae ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, ut ex definitionibus hinc ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersae lineae ex binis nominibus appellatae.

P V L C H R E. autem Euclides primas ordinis facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato recta linea sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato recta linea sibi incommensurabilis longitudine; propterea, quod commensurabile, antecedit incommensurabile.

R V R S V S recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine exposita lineae Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineae exposita longitudine est commensurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum exposita Rationali longitudine est commensurabile:

Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

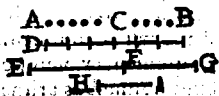
INVENIRE ex binis nominibus

primam.

48.

42.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ex
ijs, quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri descriptis, quo-
rum excessus A C, non sit quadratus, ita ut A B, C B, propor-
tionem quidem habeant, quam
quadratus ad quadratum; at A B,
A C, proportionem non habeant,
quam quadratus ad quadratum:
Exponatur Rationalis quæpiam



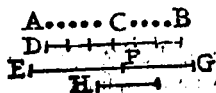
D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F, Erit er-
go & E F, Rationalis, D, commensurabilis, Rationalis. Fiat
deinde ut numerus A B, ad A C, ita per coroll. propos. 6.
huius libri, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. Dico
E G, esse ex binis nominibus primam. Quoniam quadra-
ta ex E F, F G, cum proportionem habeant, quam numeri
A B, A C, commensurabilia sunt; erunt & rectæ E F, F G,
commensurabiles, saltem potentia; Oportet autem ut E F,
Rationalis. Igitur & F G, Rationalis est. Quæ uero A B,
ad A C, proportionem non habet, quam quadratus ad qua-
dratum, non habebunt quoque quadrata ex E F, F G, pro-
portionem, quam numerus quadratus ad quadratum. In-
commensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, F G. Sunt
igitur E F, F G, Rationales potentia, solum commensurabi-
les; Ac, idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis no-
minibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit
ut numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex
E F, ad quadratum ex F G; sit autem A B, maior, quam
A C; erit quoque quadratum ex E F, maius quam qua-
dratum ex F G. Sit maius, ex lemma propos. 14. hu-
ius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est ut A B,
numerus ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex
F G; erit quoque, per conversionem rationis, ut A B, ad
C B, uidelicet ad excessum quo antecedens A B, super-
rat consequentem A C, ita quadratum ex E F, ad quadra-
tum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens qua-
dratum

6. decimi.

9. decimi.

37. decimi.

dratum ex E F, superat consequens quadratum ex F G. Habet autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionē



habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; ac proinde rectæ E F, H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen E H, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen E F, expositæ

Rationali D, commensurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus prima. Invenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

9. decimi.

49.

43.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

R E P A R T I S duobus numeris quadratis A B, C B, ut in præcedenti propositione, expositæque Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A C, ad numerum A B, ita, per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; erunt & rectæ F G, E F, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis est. Quia uero A C, A B, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantum commensurabiles; Atque ideo tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit ut numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex E F:

6. decimi.

9. decimi.

37. decimi.

Et

Et conuertendo ut $A B$, ad $A C$, ita quadratum ex $E F$, ad quadratum ex $F G$; sit autem $A B$ maior quam $A C$ erit & quadratum ex $E F$, maius, quam quadratum ex $F G$. Sit, per lemma propof. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H . Ostendemus item, ut in præcedenti propof. H , ipsi $E F$, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen $E F$, plus poreit, quam quous $F G$, quadrato rectæ H , sibi longitudine commensurabilis rectis; minus nomen $F G$, expositæ Rationali D , commensurabile longitudine; erit $E G$, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus ter-

tiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis $A B$, $C B$, ut in propof. 49. Sumatur alius numerus I , qui ad neutrum ipsorum $A B$, $A C$, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: quod quidem fiet, si sumatur I non quadratus numerus proxime maior quam $A C$. Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum $A B$, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rursum cum sit non quadratus proxime maior, quā $A C$, differet uel sola unitate ab $A C$, uel binario.

(Unitate quidem, quando $A C$, numerus fuerit, cui addita unitas non facit quadratum: binario vero, quando unitas addita ad $A C$, quadratum facit. Ut si $A C$, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia unitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si $A C$, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. Unitate, quia unitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare ut in scholio propof. 8. lib. 8. ostendimus, non caderet inter I , & $A C$, medius proportionalis. Igitur non

6. decimi.

9. decimi.

6. decimi

9. decimi.

37. decimi.

9. decimi.

erunt similes plani; ac propterea, neq; proportionem habebunt, quoniam numeri quadrati. Exposita ita Rationali quapam D, fit per coroll. propos. 6. huius lib. ut I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. Erunt ergo quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commensurabiles atq; adeo & linee D, EF, commensurabiles, saltem potentia. Exstat igitur D, Rationalis, erit & EF, Rationalis. Quia uero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, erunt D, & EF, rectae inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll. fit ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & linee EF, FG, commensurabiles saltem potentia. Igitur cum EF, ostensa sit Rationalis, erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, erunt EF, FG, longitudine incommensurabiles. Sunt ergo EF, FG, Rationales, potentia tantum commensurabiles; Atq; idcirco recta EG, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & recta esse. Quoniam est ut I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex aequalitate ut I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG. Non habet autem I, ad AC, proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt; quam quadratus numerus ad numerum quadratum; ac propterea rectae D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est, ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG: Est autem AB, maior, quam AC, erit & quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectae H. Ostendemus similiter, ut in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabile esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectae H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra ipsarum EF, FG, longitudine commensurabilis est expositae Ratio

Rationali D, ut demonstratum est; Erit EG, per definitio-
nem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis no-
minibus tertiam. Quod erat faciendum.

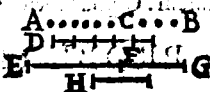
PROBL. 16. PROPOS. 52.

51.

INVENIRE ex binis nominibus quartā.

45.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita ut compositus
ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionē habeat, quā qua-
dratus ad quadratū, ex his, quæ in scholio 3. propos. 19. huius
libri tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longi-
tudine commensurabilis sumatur BF. Erit ergo & EF, Rationa-
lis, cū Rationali D, commensurabilis
sit. Quod si reliqua contruantur,



ut in propos. 49. ostendimus simili-
ter, ut ibi, totā EG, ex binis nomi-
nibus esse. Dico & quartā esse. Erit
enim rursus, ut in 49. propos. quadratū ex EF, maius quam
quadratū ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quo-
niā igitur eodē modo, ut in 49. propos. per conversionē rōnis,
est ut AB, ad CB, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex H:
Nō est, aut AB, ad CB, ut quadratus ad quadratū; neq; qua-
dratū ex EF, ad quadratū ex H, erit ut numerus quadratus
ad numerū quadratū. Lōgitudine ergo incommensurabiles sūt
rectæ EF, & H. Itaq; cū maius nomē EF, plus possit, quā mi-
nus FG, quadrato rectæ H, sibi lōgitudine incommensurabilis,
& maius rursus nomē EF, lōgitudine commensurabile exposi-
tū Rationali D, erit EG, p. defin. ex binis nominibus quarta. Inue-
nimus ergo ex binis nominibus quartā. Quod faciendū erat,

9. decimi.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

52.

INVENIRE ex binis nominibus quintā.

46.

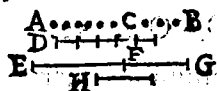
REPERTIS duobus numeris AC, CB, ut in præ-
cedenti propos. fiat constructio, ut in propos. 49. ostē-
datur FG, longitudine commensurabilis exposita Rationali
D, &c. Ostendamus ergo ut in propos. 50. EG, esse ex binis
nominibus. Dico, & quintā esse. Demonstrabimus enim
eodem modo, ut in 50. propos. quadratū ex EF, maius
esse,

I 2.

esse, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato
rectæ H. Quoniam uero, ut in propof. 49. ostensum est,
per conuersionem rationis, est ut A B ad C B, ita quadra-

.17

.74



tum ex E F, ad quadratum ex H. Ostendimus, ut in propo-
sitione antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensura-

biles esse. Quare cum maius notum sit E F, plus possit, quā
minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommen-
surabilis, & minus nomen F G, longitudine commensura-
bile expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex bi-
nis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus
quintam. Quod faciendum erat.

53.

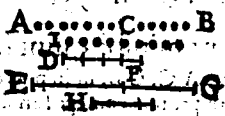
47.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus
sextam.

REPERITIS duobus numeris A C, C B, planis non
similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex
ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ip-
sorum proportionem, quam quadratus numerus ad qua-
dratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quili-
bet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se pri-
mos: Nam hac ratione & totus ad utrumque ipsorum pri-
mus erit; atq; idcirco proportionem ad illos non habebit,
quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8.
demonstrauimus.) Sumatur alius quicunque I,

30. septimi



quinet ad A B, nec ad A C, ha-
beat proportionem, quam qua-
dratus ad quadratum, qualis est
quius numerus quadratus. Hic
enim ad A B, & A C, non qua-

dratos proportionem non habebit, quam quadratus ad
quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & ut
I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F;
per coroll. propof. 6. huius lib. & reliqua fiant, ut in pro-

pos. 51.

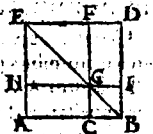
pos. 51. ostendemusq; ut ibi, rectas D. & E F, esse longitudine incommensurabiles, atq; totam E G, ex binis esse nominibus. Dico. & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, ut in 51. propos. D, & F G, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoque ut in propos. 49. per conuersionem rationes, esse ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum igitur A B, ad C B, atque adeo quadratum ex E F, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum, erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius nomen E F, plus possit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum E F, F G, longitudine sit commensurable expositæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextā. Quod faciendum erat.

9. decimi.

L E M M A.

Si recta linea secta sit utcumque, erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA sit recta A B, utemq; in C. Describatur ex A B, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta C F, ipsi B D, parallela, quæ diametrum secet in G, agatur per G, ipsi A B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium A C, C B; utrumq; autem rectangulorum



lorum DG, GA , comprehensam sub eisdem partibus: At vero rectangula CD, AI , sub tota AB , & parte CB , contenta. Dico DG , medium proportionale esse inter quadrata FH, CI : At CD , medium esse proportionale inter quadrata AD, CI . Quoniam ut HG , ad GI , ita est tum FH , ad DG , quam AG , ad CI ; erit ut FH , ad DG , ita AG , ad CI : Est autem AG , ipsi DG , aequale. Igitur erit quoque ut FH , ad DG , ita DG , ad CI : Atque adeo DG , medium proportionale est inter quadrata FH, CI .



1. sexti.
43. primi

1. sexti.

$RVRSV$ quia est ut AB , ad CB , ita tA ad CD , quam AI , ad CI ; erit ut AD , ad CD , ita AI , ad CI : Est autem AI , ipsi CD , aequale. Igitur erit ut AD , ad CD , ita quoque CD , ad CI : Quare CD , medium proportionale est inter quadrata AD, CI . Eodem modo erit AF , medium proportionale inter quadrata AD, FH .

54.
48.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATUR spatium AC , sub Rationali AB , & ex binis nominibus prima AD . Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC , Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit ipsius AD , maius nomen AE . Erunt igitur ex defin. AE, ED , Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE , plus poterit, quam ED , quadrato

drato

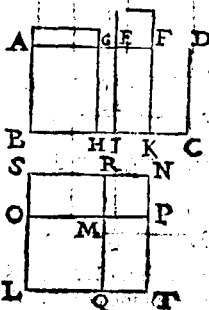
drato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique
A E. expositæ Rationali A B. longitudine commensurabi-
lis erit. Secetur E D, bisariam in F. Quia igitur A B, plus
potest quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis, si quartæ parti quadrati ex E D, hoc est, qua-
drato ex E F, æquale parallelogrammum sub A G, G E,
contentum, per 2. lemma propos

17. huius lib. applicetur deficiens fi-
gura quadrata; in partes longitu-
dine commensurabiles ipsam diui-
det. Quare A G, G E, partes inter
se longitudine commensurabiles sunt.

Ducantur iam per puncta G, E, F;
ipsis A B, D C, parallelæ G H, E I;
F K. Et parallelogrammo A H;
æquale quadratum fiat L M: At
parallelogrammo G I, æquale fiat
quadratum M N; coniunganturq;
quadrata L M, M N, ita ad angulū
M, ut latera M O, M P, unam rectam lineam constituent

O P. Facient ergo & latera M Q, M R, unam rectam
Q R, ut demonstratum est a nobis ex Proclo ad propos.
15. lib. 1. propterea quod anguli O M Q, P M R, ad verti-
cem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem re-
ctangulo L N, cum rectæ O M, M P, rectis Q M, M R,
æquales sint, ideoq; & tota O P, toti Q R; sit autem O P,
ipsis S N, L T; & Q R, ipsis L S, T N, æqualis; æquila-
terum erit rectangulum L N; ideoq; quadratum:

Quoniam uero rectangulum sub A G, G E, æqua-
le est, per constructionem, quadrato ex E F; erit ut
A G, ad E F, ita E F, ad G E; Ad propterea & ut A H,
ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium propor-
tionale est inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M,
M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N,
medium proportionale est T M, ex antecedenti lemmate.
Æquale igitur est T M, ipsi E K. Cum ergo ipsi T M,
æquale sit M S; & ipsi E K, æquale sit F C; erit & M S, ip-
si F C, æquale. Quocirca totū quadratū L N, toti rectangulo
A C, æquale est; atq; adeo recta O P, potest ipsatū A C, con-



18. decimi.

14. secunda

34. primi.

17. sexti.

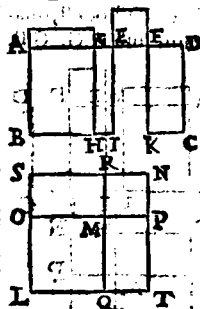
1. sexti.

43. & 36.
primi.

teneatur sub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico, O P, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

Q V O N I A M A G, G E, ostensæ sunt longitudine

16. decimi.



20. decimi.

commensurabiles; erit & tota A E, utrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem A E, cum sit maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex scholio propos. 12. huius lib. longitudine commensurabiles sunt; Atque adeo cum A B, sit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. Quare re æangula A H, G I, sub Rationalibus cõtectæ Rationalia sunt; Ideoque & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

1. sexti

10. decimi.

10. decimi.

1. sexti

37. decimi.

Et quoniam A E, ipsi E D, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis A G; & ipsi E D, commensurabilis est longitudine E F, eius dimidia, erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & A G, E F, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & A H, E K, eandem proportionem habentia, quam A G, E F, incommensurabilia sunt; ac proinde & L M, M T, illis æqualia, sunt incommensurabilia. Igitur & rectæ O M, M P, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T: Sunt autem & O M, M P, Rationales ostensæ. Igitur O M, M P, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quapropter tota O P, potens spatium A C, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur: Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

55.

49.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

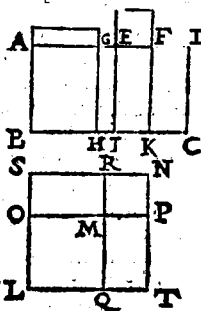
SI spatium contineatur sub Rationali,

&c.

& ex binis nominibus secunda; Recta linea a spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINENTUR spatium A C, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse; quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit ipsius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defn. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit quam E D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique E D, Rationali exposita A B, longitudine commensurabilis. Secetur E D, bifariam in F; & reliqua construantur, ut in antecedenti propositione. Quo facto, demonstrabimus similiter, ut ibi, rectam O P, posse spatium A C, contentum sub Rationali A B, & ex binis nominibus secunda A D. Dico iam O P, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QUONIAM A E, longitudine incommensurabilis est ipsi E D; & E D, minus nomen existens ipsius A D, ex binis nominibus secunda, longitudine commensurabilis est Rationali A B; erunt A E, A B, longitudine incommensurabiles. Et quia A G, G E, ostense sunt in antecedenti propositione longitudine commensurabiles; erit quoque tota A E, utriusque ipsarum commensurabilis. Quare cum A E, maius nomen existens ipsius A D, ex binis nominibus secunda, linea sit Rationalis; erunt & A G, G E, Rationales; quod cum utraque A G, G E, ipsi A E, sit longitudine commensurabilis; at vero A E, Rationali A B, longitudine incommensurabilis; erit utraque A G, G E, eidem A B, incommensurabilis longitudine. Ac proinde tam A B, A G, quam A B, G E, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Igitur rectangula A H, G I, Media sunt, pro-



13. decimi.

16. decimi.

14. decimi.

22. decimi

ptereaque

pterea q; & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Mediae sunt. Ergo & rectæ O M, M P, sunt Mediae.

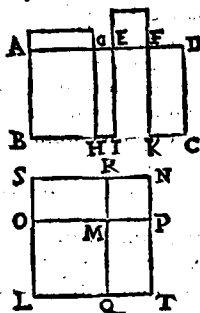
10. decimi.

Quia uero A G, G E, longitudine sunt commensurabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia, commensurabilia; atq; idcirco & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ O M, M P, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam A E, E D, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi uero A E, ostensa est longitudine commensurabilis A G; & ipsi E D, longitudine commensurabilis est E F, eius dimi-

10. decimi.

10. decimi.

1. sexti.



diazērūt per scholiū propof. 14. huius lib. A G, E F, longitudine incommensurabiles; Ac proinde A H, E K, eandem habentia proportionem cū ipsis, incommensurabilia sunt. Igitur & L M, M T, ipsis A H, & E K, æqualia, incommensurabilia sunt. Ideoq; & rectæ O M, M P, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T. Cum ergo ostensum sit O M, M P, Mediae esse, & commensurabiles; erunt O M, M P, Mediae

potentia solum commensurabiles. Quoniā deniq; E D, minus nomē ipsius A D, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi A B, hoc est, ipsi E I: Est autem E F, ipsi E D, quoque longitudine commensurabilis; Erunt etiam E I, E F, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum E I, Rationalis sit, erit & E F, Rationalis. Quare E K, rectangulum, Rationale est: Est autem M T, sub O M, M P, contentum ipsi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale est. Quapropter O M, M P, Mediae sunt potentia tantum commensurabiles, Rationalesq; continentes; atq; adeo

38. decimi.

O P, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur Si ergo spatium contineatur

sub Rationali, & ex binis nomi-

nibus secunda, &c. Quod

ostendendum

erat.

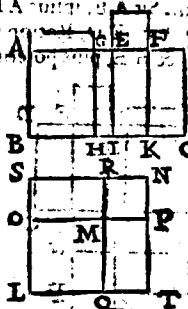
THEOR. 39. PROPOS. 57.

.56.

.57.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia A D. Dico rectam, quæ p[ro]p[ri]a spatii AC, Irrationalis esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda. Sit ip[su]s A D, maius nomen A B. Erunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantu[m] co[m]mensurabiles; & A E, plus poterit, quàm E D, quadrare rectæ sibi longitudo co[m]mensurabilis; Et denique nemera ipsarum A E, E D, Ratio tripli expositæ A B, longitudine co[m]mensurabilis est. Secta E D, bisatiam in F, reliqua o[mn]ia s[un]t, ut in proposi. 55. Similiter ergo, ut sibi ostendimus rectam O P, possit spatium AC: Et ut iam antecedenti proposi. 56. rectas O M, M P, esse Medias potentia tantu[m] co[m]mensurabiles, propterea quod A E, Rationali A B, ponatur longitudine inco[m]mensurabilis, quæ admodu[m] & in ead[em] A E, ipsi A B, longitudine erat inco[m]mensurabilis. Quonia[m] uero E B, E F, sunt co[m]mensurabiles longitudines; estq[ue] E D, ipsi A B, Rationali, hoc est, ipsi E I, longitudine inco[m]mensurabilis; erit quoq[ue] E F, eid[em] E I, longitudine inco[m]mensurabilis: S[un]t aut[em] E F, E I, Rationales, q[uod] E F, dimidia sit ipsius E D, Rationalis; & E I, expositæ Rationali A B, æqualis. Igitur E F, E I, Rationales sunt potentia tantu[m] co[m]mensurabiles; Ac propterea E K, Mediu[m] est; ideoq[ue] & M T, æquale ipsi E K, Mediu[m] est, q[uod] sub Medijs O M, M P, co[n]iungitur. Itaq[ue] cu[m] O P, M P, Medie s[un]t potentia solum co[m]mensurabiles, co[n]tineantq[ue] spatium Medijs erit O P, Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur. Si igitur, spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonstrandum.



14. decimi.

22. decimi.

39. decimi.

THEO.

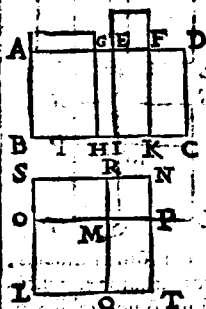
37.

51.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est; quæ vocatur Maior.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit A E, ipsius A D, maius nomen. Erant ergo ex definit. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ



19. decimi.

longitudine sibi incommensurabilis; & denique A E, ipsi A B, commensurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in E; hanc reliqua omnia, ut in propos. 55. Ecutit ergo A G, G E, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus ita eodem modo, ut ibi, O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam A G, G E, longitudine incommensurabiles sunt; erunt & rectangula A H, G I, eadem cum illis ha-

10. decimi.

bentia proportionem; incommensurabilia; atque adeo & quadrata L M, M N, ipsi A H, G I, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quarta, linea est longitudine commensurabilis Rationali A B, erit & A E, Rationalis; & rectangulum A I, sub ipsi contentum, Rationale. Est autem A I, æquale compositum ex quadratis L M, M N; Compositum ergo ex quadratis L M, M N, Rationale est.

20. decimi.

Et quoniam E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quarta, linea est longitudine incommensurabilis Ra-

lis Rationali A B, erit & E F, ipſus dimidia eidem A B, lon-
gitudine incommenſurabilis; Et eſt E F, Rationalis, cum
ſit Rationali E D, commenſurabilis. Igitur E F, & A B,
Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare
E K, Medium eſt; ſub ipſis contentum; adeoque & M T,
illi æquale; contentumq; ſub O M, M P, Medium eſt.
Quocirca cum O M, M P, ſint potentia incommenſurabi-
les, faciantq; compoſitum quidem ex ipſarum, quadratis
L M, M N, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis M T,
Medium; Irrationalis erit tota O P, quæ maior nominatur.
Si ſpatium ergo continetur ſub Rationali; & ex binis no-
minibus quarta, &c. Quod erat oſtendendum.

22. decimi

40. decimi

THEOR. 41. PROPOS. 59.

58.

52.

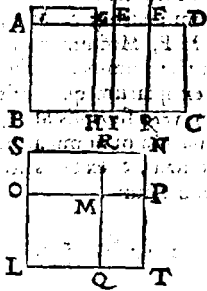
SI ſpatium contineatur ſub Rationali;
& ex binis nominibus quinta; Recta linea
ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Ratio-
nale & Medium potens appellatur.

CONTINEATUR ſpatium A C, ſub Rationali A B,
& ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam,
quæ poteſt ſpatium A C, eſſe Irrationalem, quæ dicitur po-
tens Rationale & Medium. Sit ipſius A D, maius nomen
A E. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia
tantum commenſurabiles; & A E, plus poteſt, quam E D,
quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & de-
nique E D, longitudine commenſurabilis eſt expoſita Ra-
tionali A B. Secta E D, biſariam, ſiant reliqua eadem, quæ
in propoſ. 55. Erunt igitur rursus A G, G E, longitudine
incommenſurabiles. Simili autem modo, ut in propoſ. 55.
conſtat rectam O P, poſſe ſpatium A C. Dico O P, Ir-
rationalem eſſe, quæ potens Rationale & Medium appella-
tur. Erunt enim, ut in propoſ. antecedenti, rectæ O M,
M P, potentia incommenſurabiles. Et quia A E, maius no-
men ipſius A D, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Ra-
tionalis & longitudine incommenſurabilis Rationali A B;
erunt;

19. decimi

22. decimi.

erunt AE, AB, Rationales potētia tantū commensurabiles. Quare rectangulū AL, sub ipsis contentū, Mediū est. Est autē AL, æquale cōposito ex quadratis LM, MN. Igitur & cōpositū hoc, Mediū erit. Rursus quia



ED, Rōnalis ponitur lōgitudine cōmensurabilis Rōnali AB, cū sit minus nomē ipsius AD, ex binis nominibus quinta; erit & EF, ipsius dimidia, eidē AB, cōmensurabilis lōgitudine, & Rōnalis. Quare EK, sub Rōnālibus EL, EF, lōgitudine cōmensurabilibus, Rationale est; atq; idcirco & MT, sub OM, MP, contentū Rōnale erit, cū ipsi EK, sit æquale. Quōbrē cū rectæ OM, MP, potētia incōmensurabiles sint,

20. decimi.

faciantq; cōpositū quidē ex ipsarū quadratis LM, MN, Mediū; Rectangulū verō MT, sub ipsis contentū, Rōnale; Irrationalis erit tota OP, quę dicitur potēs Rationale & Mediū. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

41. decimi.

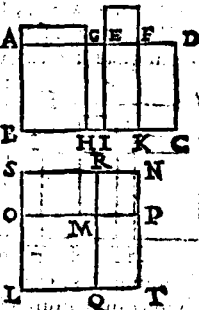
59.
53.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectā, quæ spatium AC, potest, Irrationalem esse, quę dicitur potens bina Media. Sit ipsius AD, maius nomen AE. Exunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantū commensurabiles; & AE, plus potent, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & deniq; neutra ipsarū AE, ED, longitudine erit cōmensurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quę in su-

in superioribus, eruntq; AG, GE, longitudine incommensurabiles. Iam uero ostendemus similiter, ut in propos. 55 recta O P, posse spatium AC. Item, ut in propos. 58 rectas OM, MP, potentia esse incommensurabiles. Rursus, ut in antecedenti propos. erit compositum ex quadratis LM, MN, Medium. Ut autem in propos. 58, erit quoq; MT, sub OM, MP, comprehensum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommensurabilis est longitudine ipsi E D, hæc uero eidem commensurabilis, erunt AE, EF, longitudine incommensurabiles. Igitur & AI, EK, incommensurabilia sunt, cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compositum ex quadratis LM, MN, quod ipsi AI, æquale est, & rectangulum MT, quod ipsi EK, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter, cum rectæ OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantq; & compositum ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis, erit rota OP. Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta, &c. Quod ostendendum erat.



19. decimi

13. decimi.
10. decimi.
1. sexti.

42. decimi

THEOR. 43. PROPOS. 61.

QUADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

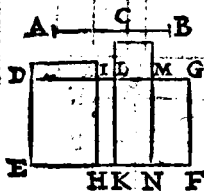
Si r ex binis nominib⁹ A B, cuius maius nomē AC, & ad Rōnālē expōitā DE, applicetur rectangulū DF, æquale quadrato ex A B, latitudinē faciēs D G. Dico D G, ex binis

60.
54.

45 p. m.

nom -

nominibus esse primam. Applicetur ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A G; & ad H I, aliud I K æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis sub A C, C B, continetur; cum quadrata ex A C, C B, una cum rectangulo bis sub A G, C B, æqualia sint quadrato ex A B, quicquidmodum & eidem quadrato ex A B, æquale est, per constructionem, rectangulum D F. Secetur L G, bifariam in M. puncto, per quod ipsi



sis L K, G F, parallela agatur M N: eritq. utrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur. Et quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles quod tota A B, sit ex

binis nominibus; erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commensurabilia; quorum utrumque cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit, quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine commensurabilem.

R V T S V S quia A C, C B, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis, Medium, atq; adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Rationalem, facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudine. Igitur D L, L G, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commensurabiles, At propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

Q U O N I A M ex lemmate propos. 54. huius lib. rectangulum sub A C, C B, medium proportionale est inter quadrata ex A C, C B; erit quoque L N, medium proportionale inter D H, I K; atque adeo cum rectæ D I, L M, I L, eandem

4. secundi.

37. decimi.

16. decimi.

21. decimi.

22. decimi.

23. decimi.

13. decimi.

37. decimi.

eandem rationem habeant, quam DH , LN , IK ; erit quoque recta LM , media proportionalis inter DI , IL . Quare rectangulum sub DI , IL , æquale est quadrato ex LM . Et quia quadrata ex rectis AC , CB , commensurabilia sunt, quod AC , CB , ponuntur potentia commensurabiles; erunt & DH , IK , ipsis æqualia, commensurabilia. Igitur & rectæ DI , IL , eandem cum illis habentes rationem longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem DK , maius est, quam LF , quod & quadrata ex AC , CB , maiora sint, per lemma propos. 39 huius libri, quam rectangulum bis sub AC , CB ; erit & recta DL , maior quam LG , cum DL , LG , eandem rationem habeant, quam DK , LF . Itaque quoniam DL , maior est, quam LG ; & ad DL , applicetur rectangulum sub DI , IL , deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM , hoc est, quartæ parti quadrati ex minore LG , descripti; (ostensum enim est rectangulum sub DI , IL , æquale quadrato ex LM .) diuiditurque DL , ad I , in partes DI , IL , longitudine commensurabiles, ut est demonstratum; poterit DL , maior plus quam LG , minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum DG , ostensa sit ex binis nominibus, & DL , maius nomen plus posse, quam LG , minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen DL , longitudine commensurabile Rationali exposita DE ; erit ex defin. DG , ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis Medijs prima AB , cuius maius nomen AC ; & ad Rationalem DE , applicetur rectangulum DF ,

K

æquale

1. sexti.

17. sexti.

10. decimi.

1. sexti.

18. decimi.

61.

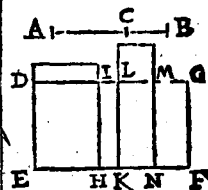
55.

45. primi

æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse secundam. Construantur eadem, quæ in propos. præcedenti, ita ut rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, C B, & utrumque ipsorum L N, M F, ei quod sub A C, C B, continetur. Quoniam igitur A C, C B, ex binis Medijs primam A B, componentes, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex A C, C B, atque adeo rectangula ipsis æqualia D H, I K, commensurabilia, atque Media. Cum ergo propterea & totum D K, utrique ipsorum D H, I K, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. D K, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E; erit eius latitudo D L, Rationalis

38. decimi.

16. decimi.



23. decimi.

21. decimi.

13. decimi.

87. decimi.

lis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est; erit & eius duplum, nempe L F, Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem L K; erit eius latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis; erunt D L, L G, longitudine incommensurabiles. Quod cum D L, L G, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam vero ut in antecedenti propos. demonstrabimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Medijs prima, &c. Quod erat ostendendum.

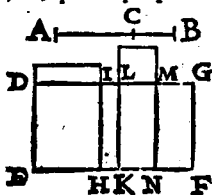
THEOR.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalē applicatū, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Medijs secunda AB, cuius maius nomen AC; & ad Rationalē DE, applicetur rectangulū DF, æquale quadrato ex AB, latitudinē faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis iisdē, quæ in propos. 61.

quoniā AC, CB, ex binis Medijs secundā AB, cōponētes, Mediæ sunt potentia solū cōmensurabiles, quæ Mediū cōtinent; Erūt quadrata ex AC, CB, atq; adeo rectangula ipsius æqualia DH, IK, cōmensurabilia, & Media. Cum ergo propterea & totum DK, utriq; ipsorū DH, IK, sit cōmensurable; erit & ex



coroll. propos. 24. huius libri DK, Mediū; quod cum applicatū sit ad Rationalē DE; erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incōmensurabilis. Rursus quia rectangulū sub AC, CB, Mediū est; erit & eius duplū LF, Mediū; quod cū applicatū sit ad Rationalē LK; erit latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incōmensurabilis. Et quia AC, ipsi CB, lōgitudine est incōmensurabilis; estq; ut AC, ad CB, ita per lēma 3. propos. 19. huius libri, quadratū ex AC, ad rectangulū sub AC, CB; erit quoque quadratū ex AC, rectangulo sub AC, CB, incōmensurabile. Est autē quadrato ex AC, cōmensurable cōpositum ex quadratis rectarum AC, CB, quod quadrata ex AC, CB, cōmensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia ponantur cōmensurabiles; & rectangulo sub AC, CB, cōmensurable est eius duplum, nimirū rectangulum bis sub AC, CB. Igitur cōpositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectagulū DK, incōmensurable est rectāgulo bis sub AC, CB, hoc est, rectāgulo LF, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius libri conscripsimus. Quare rectæ DL, LG, eandem

K 2 rationem

62.

56.

45. primi

39. decimi.

16. decimi.

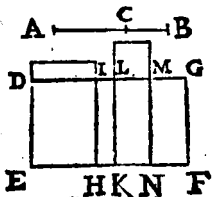
23. decimi.

23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

10. *decimi.* rationem cum D K, L F, habentes, longitudine sunt incommensurabiles: sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; ac
37. *decimi.* propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in

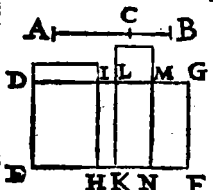


propos. 61. ostendemus DL, esse maius nomen, posseque plus, quā minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quā ob rem cum D L, maius nomen plus possit, quā L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, L G, Rationali exposita DE,

sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defini. G. ex binis nominibus tertia. Quadrarum ergo eius, quæ ex binis Medijs secunda, &c. Quod erat demonstrandum.

63. THEOR. 46. PROPOS. 64.
57. QVADRATVM Maioris ad Ratio

nalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



Si T Maior A B, cuius maius nomen AC; & ad Rationale D E, applicetur rectangulū D F. æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartā. Construantur eadē prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentēs potentia

45. *primi*

40. *decimi.*

21. *decimi.*

incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum uero sub ipsis, Medium; erit quoque D K, composito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale existens, Rationale; At uero L F, duplum eius, quod sub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem D E, est applicatum; erit DL, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cum L F, Medium sit

applu-

applicatum ad Rationale L K ; erit L G, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipsi D E, cōmensurabilis sit longitudine ; hæc uero eidem D E, longitudine incommensurabilis ; incommensurabiles erunt longitudine D L, L G : ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L G, Rationales potentia tantum commensurabiles ; ideoque D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in propof. 61. demonstrabimus rectangulū sub D I, I L, æquale esse quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommensurabilia sunt, quod rectæ A C, C B, potentia incommensurabiles sunt ; Erunt etiam illis æqualia D H, H K, incommensurabilia ; atque adeo & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam uero ut in propof. 61. ostendimus, D L, maior est, quam L G, & ad D L, applicatum est rectangulū sub D I, I L, quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam D L, ad I, in partes longitudine incommensurabiles ; poterit D L, plus quam L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa D L, (maius nomen ipsius D G, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali D E ; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratū ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

23. decimi

3. decimi.

37. decimi.

10. decimi.

19. decimi.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

64.

58.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

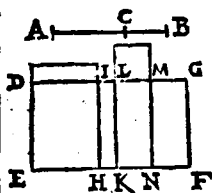
SIT recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomen A C ; & ad Rationalem D E, rectangulum D F, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinē faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam esse. Fiant eadem

15. primi

K 3 omnino

41. decimi.

omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, cōponentes AB, potentem Rationale ac Medium, potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis contentum, Rationale; erit DK, æquale cōposito ex quadratis rectarum AC, CB, Mediū; & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudinem Rationalem DE, incommensurabile: At uero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, facit latitudinem LG, Rationalem longitudinem ipsi LK, hoc est, ipsi DE, cōmensurabilem.



23. decimi.

21. decimi.

13. decimi.

37. decimi.

Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine cōmensurabilis est Rationalem DE, illa uero longitudine incommensurabilis; erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; Ac propterea DG, est ex binis nominibus, iam uero, ut in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & ut in antecedenti propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cum & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationalem DE, longitudine cōmensurabile; erit ex definit. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

65.

59.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

45. primi.

SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC; & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale

æquale quadrato. ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus sextam. Constructis iisdem quæ in propos. 61. quoniam rectæ A C, C B, componen-
tes ipsam A B, potentem bina Media, potentia incommen-
surabiles sunt, faciuntq; & cõpo-
situm ex ipsarum quadratis Me-
dium, & quod sub ipsis cõtinetur,
Medium, & in õmensurabile cõ-
posito ex quadratis ipsarum; erit
tam D K, illi composito æquale,
quam L F, rectangulo bis sub A C,
C B, æquale, Medium. Et quia
Media D K, L F, applicata sunt ad
Rationalem D E; erunt eorum latitudines D L, L G, Ratio-
nales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Quoniã ue-
ro cõpositum ex quadratis rectarum A C, C B, incommensu-
rabile est rectangulo sub A C. C B; eidem uero rectangulo
sub A C, C B, õmensurabile est rectangulũ bis sub A C, C B,
cum hoc illius sit duplum; Erit cõpositum ex dictis quadra-
tis hoc est D K, incommensurabile rectangulo bis sub A C, C B,
hoc est, ipsi L F; Ac propterea rectæ D L, L G, eandẽ rationẽ
habentes cum D L, L G, longitudine incommensurabiles sunt.
Rationales ergo sunt D L, L G, potentia solum õmensura-
biles; Ac proinde D G, est ex binis nominibus. Iam uero, ut
in præcedenti propo. demonstrabimus D L, esse maius no-
men, posseq; plus quam minus L G, quadrato rectæ sibi lon-
gitudine incommensurabilis. Cum ergo ostensum sit, neutrã
ipsarum D L, L G, longitudine commensurabilem esse expo-
sitæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus
sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, &c.
Quod erat ostendendum.

42. decimi.

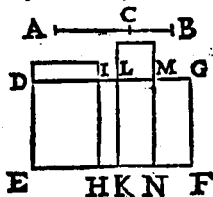
23. decimi.

42. decimi.

13. decimi.

10. decimi.

37. decimi.



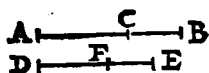
THEOR. 49. PROPOS. 67.

66.

60.

E I, quæ est ex binis nominibus, longitu-
dine commensurabilis, & ipsa ex binis no-
minibus est, atque ordine eadem.

Si ex binis nominibus quæcunque A B, diui a in sua nomina, quorum maius A C, & C B, minus, sitque recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B.



Fiat ut tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F; erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, ut tota A B, ad totam D E.

Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E; erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis: sunt autem A C, C B, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt & D F, F E, potentia solum commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; A C propterea D E, ex binis nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quam C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem A C, plus potest quam C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita ut A B, sit ex binis nominibus prima; erit & D F, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum utraque, & Rationalis & D F, eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si uero C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, ut A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita ut A B, sit ex binis nominibus tertia; erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

A T si A C, plus possit, quam C B, quadrato rectæ sibi

longi.

longitudine incommensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendimus D E, ex binis nominibus quartam esse, uel quintam, uel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, uel quinta, uel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

5. decimi.

S C H O L I O N.

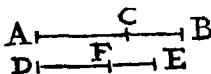
Q U O D si recta D F, potentia tantum commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendimus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus ubique: commensurabilis potentia tantum:) & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordinis eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile exposita Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quod non utraque, nempe exposita Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem, commensurabilis longitudine; At uero D F, potentiatur tantum, ex hypothesi. Immo uero, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, fieri nulla ratione potest, ut D E, illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

S I T enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, diuisa in sua nomina ad C; sitque ei commensurabilis potentia tantum D E, quam quidem, ut in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, ut D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit utraque ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumque maius nomen A C, D F, ex defn. Rationali exposita commensurabilis longitudine. Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est ut A C, ad D F, ita A B, ad D F; erunt propterea & A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D E, ipsi A B, potentia

12. decimi

10. decimi

potentia solum commensurabilis. Non ergo utraque AB , DE , ex binis nominibus prima est. Eodem modo neque utraque ex binis nominibus quarta erit. Sed neque secunda, vel quinta. Effet enim utrunque nomen minus CB , FE , ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atque adro & inter se. Igitur & totæ AB , DE , longitudine, forent commensurabiles, quod non ponitur.



15. decimi. S E M P E R tamen verum est, si AB , est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE , ipsi AB , potentia solum commensurabilem, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC , plus quam CB , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit ut AC , ad CB , ita DF , ad FE ; poterit quoque DF , plus quam FE , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit DE , ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB , est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut AC , plus possit, quam CB , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit quoque DF , plus quam FE , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit ut AC , ad CB , ita DF , ad FE . Igitur ex defin. erit DE , ex binis nominibus etiâ quarta, vel quinta, vel sexta, licet nō eadē ordine ipsi AB .
15. decimi. I N sequentibus autem quinque propositionibus necessario erit DE , eadem ordine ipsi AB , quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

67.
61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Medijs, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Medijs est, atque ordine eadem.

S I T ex binis Medijs $A B$, quæcunque diuisa in sua nomina, quorum AC , maius, & CB , minus, sitque ei recta DE , longitudine commensurabilis. Dico DE , quoque ex binis Medijs esse, & ipsi AB , ordine eandem. Fiat ut tota AB ,
ad

ad totā D E, ita ablata A C, ad ablaram D F. Erit ergo & re
liqua C B, ad reliquā F E, ut tota A B, ad totam D E. Et quo
niam ipsi A B, ponitur longitudine commensurabilis D E;
erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B,
longitudine commensurabilis.
$$\begin{array}{c} \text{A} \text{---} \text{C} \text{---} \text{B} \\ \text{D} \text{---} \text{F} \text{---} \text{E} \end{array}$$

Sunt autem A C, C B, Mediæ. Igi
tur & D F, F E, illis commensura
biles, Mediæ sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B,
ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sūt
autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt
& D F, F E, solum commensurabiles potentia. Cum ergo
& ostensæ sint Mediæ; erunt D F, F E, Medæ potentia tan
tum commensurabiles; Atque ideo D E, erit ex binis Me
dijs. Dico & ipsi A B, eandem esse ordine. Quoniam est
ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Est autem ut A C, ad C B,
ita, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, & ut
D F, ad F E ita quadratū ex D F, ad rectangulum sub D F,
F E, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque ut
quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, ita quadra
tum ex D F, ad rectangulum sub D F, F E; & permutando
ut quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulū
sub A C, C B, ad rectangulum sub D F, F E. Commensura
bile est, autem quadratum ex A C, quadrato ex D F; quod
rectæ A C, D F, commensurabiles ostensæ sint longitudine.
Igitur & rectangulum sub A C, C B, rectangulo sub D F,
F E, commensurabile est. Quare si rectangulum sub A C,
C B, fuerit Rationale, ita ut A B, sit ex binis Medijs pri
ma; erit & rectangulum sub D F, F E, Rationale, cum illi
sit commensurabile; atque adeo & D E, ex binis Medijs pri
ma erit. Si uero rectangulum sub A C, C B, fuerit Me
dium, ita ut A B, sit ex binis Medijs secunda; erit & rectan
gulum sub D F, F E, ei commensurabile, Medium, ex coroll.
propos. 24. huius lib. Ac propterea & D E, erit ex binis Me
dijs secunda. Quare ei, quæ ex binis Medijs, longitudine com
mensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam
D E,

D E, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi A E, quæ est ex binis Medijs, ex binis Medijs esse, atque ordinæ eandem ipsi A B, cui commensurabilis est; si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus ubique: commensurabilis potentia tantum, &c. ut manifestum est.

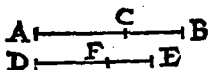
68.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

62.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E,



Maiorem esse. Fiant enim eadẽ, quæ superius; ita ut partes A C, C B, ad partes D F, F E, eandem

habeant rationem, quam tota A B ad totam D E. Quoniam igitur A B, D E, commensurabiles sunt uel longitudine & potentia, uel potentia tantum, erunt quoque tam A C, D F, quam C B, F E, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; erit ut quadratum ex A C, ad quadratum ex C B, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex F E; & componendo ut compositum ex quadratis rectorum A C, C B, ad quadratum ex C B, ita compositum ex quadratis rectorum D F, F E, ad quadratum ex F E; Et conuertendo ut quadratum ex C B, ad compositum ex quadratis rectorum A C, C B, ita quadratum ex F E, ad compositum ex quadratis rectorum D F, F E; Et permutando ut quadratum ex C B, ad quadratum ex F E, ita compositum ex quadratis rectorum A C, C B, ad compositum ex quadratis rectorum D F, F E. Commensurabile est autẽ quadratum ex C B, quadrato ex F E, quod rectæ C B, F E, ostensæ sint commenturabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum. Igitur & compositum ex quadratis

10. decimi.

22. sexti.

10. decimi.

40. decimi

rektorũ A C, C B, cõmenturabile est com osito ex quadratis rectorum D F, F E. Est autem compositum illud Rationale, cum rectæ A C, C B, componant Maiorem A B. Igitur

itur

tur & hoc Rationale est, ex 9. defin.

R V R S V S quia est ut A C, ad C B, ita D F, ad F E;
Vt autem A C, ad C B, ita est quadratum ex A C, ad rectan-
gulum sub A C, C B, & ut D F, ad F E, ita quadratum ex
D F, ad rectangulum sub D F, F E, ex lemmate 3. propos. 19.
huiuslibri; Erunt quoque ut quadratum ex A C, ad rectan-
gulum sub A C, C B, ita quadratum ex D F, ad rectan-
gulum sub D F, F E: et permutando ut quadratum ex A C,
ad quadratum ex D F, ita rectangulum sub A C, C B, ad re-
ctangulum sub D F, F E. Est autem quadratum ex A C,
quadrato ex D F, commensurabile, quod rectæ A C, D F,
ostensæ sint commensurabiles uel longitudine & potentia,
uel potentia tantum. Igitur & rectangulum sub A C, C B,
rectangulo sub D F, F E, commensurabile est. Est autem re-
ctangulum sub A C, C B, Medium. Igitur & rectangulum
sub D F, F E, illi commensurabile, Medium est, ex coroll.
propos. 24. huius libri. Quoniam uero est ut A C, ad C B,
ita D F, ad F E; suntque A C, C B, potentia incommensura-
biles, cum componant Maiorem A B; Erunt quoque D F,
F E. potentia incommensurabiles. Itaque cum D F, F E,
sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum
quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub
ipsis continetur, Medium, ut ostensum est; erit tota D E,
Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est.
Quod demonstrandum erat.

10. decimi.

40. decimi.

40. decimi.

10. decimi.

40. decimi.

THEOR. 52. PROPOS. 70.

69.

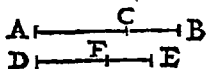
63.

RATIONALE ac Medium poten-
ti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Me-
dium potens est.

S I T recta A B, potens Rationale ac Medium, diuisa in
sua nomina ad C, eique commensurabilis D E, siue longi-
tudine & potentia, siue potentia tantum Dico & D E, esse po-
tentem Rationale ac Medium. Constructis iisdem, quæ su-
pra, ostendemus, ut in præcedenti propos. compositum ex
quadratis rectarum A C, C B, commensurabile esse compo-
sito

41. de imi.

sito ex quadratis rectarum DF FE. Est autem illud compositum Medium, cum recta AC, CB, componant ipsam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. pro



pos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo, ut in eadem propos. antecedenti, erit rectan-

41. decimi.

gulum sub AC, CB, quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub DF, FE; atque adeo & rectangulum sub DF, FE, Rationale est, ex 9. defin. Denique ut in eadem superiori propos. erunt DF, FE, potentia incommensurabiles. Quare cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale, ut demonstratum est; erit tota DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

41. decimi.

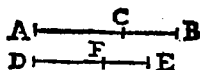
70.

64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse bina Media potentē. Construas istdem, quæ supra, ostendemus, ut in propos.



69. compositum ex quadratis rectarum AC, CB, composito ex quadratis rectarum DF, FE, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub

42. de cimi.

AC, CB, esse commensurabile rectangulo sub DF, FE. Cum ergo tam compositum ex quadratis rectarum AC, CB, quam rectangulum sub AC, CB, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 2. huius libri, tam compositum ex quadratis rectarum DF, FE, quam rectangulum sub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommensurabiles sunt ut prius. Postremo quia compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum sub

AC,

A C, C B. incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod A B, bina Media potest: Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum D F, F E; & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cum rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Mediū; & quod sub ipsis continetur; Mediū; incommensurabileq; compositum ex quadratis ipsarum; erit D E, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti comensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendēdū.

42. decimi.

42. decimi.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

71.

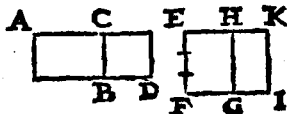
65.

SI Rationale & Medium componatur, quatuor Irrationales fiunt, uel ea, quæ ex binis nominibus, uel quæ ex binis Medijs prima, uel Maior, uel Rationale ac Mediū potens.

SI Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse uel ex binis nominibus, uel ex binis Medijs primam, uel Maiorem, uel Rationale ac Medium potentem.

Erit enim A B, uel maius quam C D, uel minus:

Æquale siquidem non erit; alias cum A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo

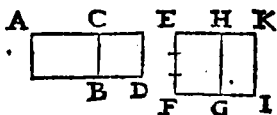


maius, & exposita Rationali E F, applicetur ad eā rectangulū E G, æquale ipsi A B; & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, ut totum E I, totum A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium; erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium: quæ cum applicentur ad

4. primi

Ratio.

21. *decimi.* Rationalem E F; erit E H, Rationalis, & ipsi E F longitudo
 23. *decimi.* dunc commensurabilis; At uero H K, Rationalis, & eadem



E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia F G, H I, incommensurabilia sunt, ut constat ex definitionibus; quod E G, Rationalis sit, at H I, Irrationale, nempe Mediū; erunt E H,

10. *decimi.* H K, eandem cum illis habentes rationem incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia

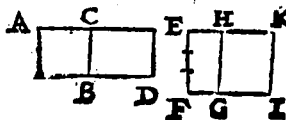
37. *decimi.* solum commensurabiles; Ac propterea E H, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur A B, quam C D, hoc est, E G, quam H I; erit quoque E H, maior quam

1. *sexti.* H K, cum E H, H K, eandem rationem habeant, quā E G, H I. Iam uero maius nomen E H, plus poterit quam minus H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeo & spatium A D, compositum ex Rationali A B, & Medio C D, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

55. *decimi.* Si uero E H, plus possit quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit E K, ex binis nominibus quarta; ex defin. cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quarta E K, atque adeo & spatium A D, Irrationalis est, quæ uocatur Maior.

58. *decimi.* Si r secundo A B, minus quam C D; & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, ut prius, E K, ex binis nominibus, & E H, ipsi E F, longitudine commensurabilis. Et quia A B, minus est, quam C D, hoc est, E G, quam H I; erit quoque recta E H, minor quam H K. Poterit igitur rursus H K, maius nomen ipsius E K, quæ est ex binis nominibus, plus quam E H, minus nomen, quadrato rectæ longitudine

rudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit $H K$, quam $F H$, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit $E K$, ex binis nominibus secunda, cum



$E H$, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali $E F$, ut ostensum est. Quare recta potens spatium $E I$, contentum sub Rationali $E F$, & ex binis

nominibus secunda $E K$, atq; adeo & spatium $A D$, ex Rationali $A B$, & Medio $C D$, compositum, Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Medijs prima.

56. decimi.

Si vero $H K$, plus possit quam $E H$, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; erit $E K$, ex binis nominibus quinta, cum $E H$, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali $E F$. Quare recta potens spatium $E I$, contentum sub Rationali $E F$, & ex binis nominibus quinta $E K$ atq; adeo & spatium $A D$, Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

59. decimi.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

72.
66.

SI duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs secunda, vel bina Media potens.

COMPONENTUR duo Media incommensurabilia $A B, C D$. Dico rectam, quæ potest totum spatium $A D$, esse vel ex binis Medijs secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus $A B$, vel maius, quam $C D$, vel minus: A Equale siquidem non erit; alias essent $A B, C D$, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia $A B, C D$, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt

L &

10. decimi.

23. decimi.

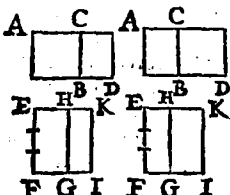
37. decimi.

57. decimi.

60. decimi.

23. decimi.

& spatia E G, H I, Media & incōmensurabilia; cum illis sint æqualia. Igitur rectæ E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtræq; (cum E G, H I, Media sint, applicenturq; ad Rationalem



E F.) Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solum commensurabiles; ac propterea E K, ex binis nominibus est. Quoniam vero A B, maius ponitur quam C D, erit ut in antecedenti propos. E H, maius nomen ipsius E K. Poterit ergo plus quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum vtrunq; nomē E H, H K, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali E F; erit E K, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus tertia E K, atque adeo & spatium A D, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

Si vero E H, plus possit quam H K, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum utrunq; nomen E H, H K, longitudine sit incommensurabile Rationali E F; erit E K, ex binis nominibus sexta, ut constat ex defin. Recta igitur potens spatium E I, siue spatium A D, Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

Quod si A B, minus sit, quam C D; non aliter propositum concludemus, ut ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se incōmensurabilia componantur, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Ex his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquis ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediz, neque inter se easdem esse.

Nam quadratum Mediz ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

Ad quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

61. decimi.

Et quadratum eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

62. decimi.

Quadratum deinde eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

63. primi.

At vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

64. decimi.

Quadratum autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

65. decimi.

Postremo quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

66. decimi.

Itaque cum hæc latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eadem ex binis nominibus; perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hæcenus est dictum, inter se differenter esse.

SCHOLIUM.

Hæcenus egit Euclides de septem senariis.

In primo, qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

In secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum divisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis dimidi posse.

In tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, uidelicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta.

In quarto, quem absolunt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæc sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quamam lineæ Irrationalis sit illa, quæ potest spatium consentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex hi-

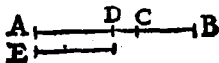
nis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

IN quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absolvitur, demonstravit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus, nempe 72. & 73. explicavit rursus differentiam aliam sex praedictarum Irrationalium.

REPERITUR autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quae quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusvis lineae Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit.



SIT enim quaecunque Irrationalia, nempe ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; & dividatur A B, bisariam in D; & eius dimidia A D, vel D B, aequalis sumatur E. Dico E, mediam esse, secundum Analogiam Arithmeticam, inter A C, C B; & E, esse quoque ex binis nominibus. Quoniam A C, superat dimidiam A D, recta D C; & dimidia D B, superat ipsam C B, eadem recta D C; perspicuum est, dimidiam ipsius A B, nempe E, esse mediam proportionalem inter A C, C B, in Analogia Arithmetica.

UTRSVS quia E, commensurabilis est longitudine totius A B, cum hac illius sit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipsi A B, ut in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in ceteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQUUNTUR iam septem alij senarii, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex alijs lineis Irrationalibus, quae per subtractionem generantur, quae in praecedentibus septem senarijs de Irrationalibus, quae per compositionem sunt, eam ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM

per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

73.
68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATUR a Rationali A B, Rationalis A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B. Dico reliquam B C, Irrationalem esse. Quoniam per lemma 3. propos. 9. huius lib. est ut A B, ad A C, ita quadratum ex A B, ad rectangulū sub A B, A C: Et sunt



A B, A C, longitudine incommensurabiles; erunt incommensurabilia quadratum ex A B, & rectangulum sub A B, A C. Sed quadrato ex A B, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum A B, A C; (Cum enim A B, A C, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex A C,) rectangulo vero sub A B, A C, commensurabile est rectangulum sub A B, A C, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulum sub A B, A C, bis contentum, incommensurabilia sunt, ut in scholio propos. 14. huius libri demonstraui. Est autem compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale rectangulo bis sub A B, A C, una cum quadrato ex B C. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A B, A C, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex B C, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum A B, A C, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex A C, linea Rationali descripto;) erit quadratum ex B C, Irrationale; atq; adeo & recta ipsa B C, Irratio-

10. decimi.

16. decimi.

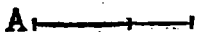
7. secundi.

rationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

37. decimi. NAM cum AB, AC , sint Rationales potentia tantum commensurabiles; erit composita ex A  B ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB , & minus AC . Aufertur igitur AC , minus nomen ex maiori nomine AB , ut relinquatur Apotome BC .

74.
69.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

16. decimi. DETRAHATUR a Media AB , Media AC , potentia solum commensurabilis ipsi AB , sitq; rectangulum sub AB, AC , Rationale. Dico reliquam BC , esse Irrationalem. Quoniam AB, AC , potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC , commensurabilia; atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit.

erit quadrato ex AC . Est autem quadratum ex AC , Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. prop. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB , AC , Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB , AC , ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB , AC , Rationale. Igitur incommensurable est compositum ex quadratis rectarum AB , AC , rectangulo bis sub AB , AC . Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale sit rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC ; erit quoque rectangulum bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC , incommensurable rectangulo bis sub AB , AC . Quare & rectangulum bis sub AB , AC , & quadratum ex BC , incommensurabilia sunt. Existent ergo rectangulo bis sub AB , AC , Rationali; erit quadratum ex BC , Irrationale; ideoq; & recta BC , Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia uidelicet relinquitur post subtractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori nomine, ut in scholio sequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.



7. secundi.

17. decimi.

SCHOLIUM.

POTUISSET hac propositio proponi hoc modo.

Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CUM enim AB , AC , sint Media potentia solum com-

38. decimi.

mensurabiles, contineantq; Rationale, erit composita ex ipsis Irrationalis, qua ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomen $A B$, & minus $A C$. Auferatur igitur $A C$, minus nomen ex maiori $A B$, ut relinquantur $B C$, Media Apotome prima.



75.

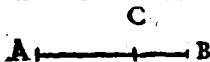
70.

THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATUR a Media $A B$, Media $A C$, potentia solum commensurabilis ipsi $A B$, sitq; rectangulum sub $A B$, $A C$, Medium. Dico reliquam $B C$, esse Irrationalem. Quoniam quadrata ex $A B$, $A C$, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; erit & compositum ex ipsis

16. decimi.



utrique ipsorum commensurabile: Est autem utrumque ipsorum Medium, quod & rectæ $A B$, $A C$, Me-

diæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, utrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propof. 24. huius lib. Rursus quia rectangulum sub $A B$, $A C$, Medium ponitur; erit & eius duplum, rectangulum uidelicet bis sub $A B$, $A C$, ex coroll. propof. 24. huius lib. Medium. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum $A B$, $A C$, æquale sit rectangulo bis sub $A B$, $A C$, una cum quadrato ex $B C$; superabit compositum ex quadratis rectarum $A B$, $A C$, quod Medium est, rectangulum bis sub $A B$, $A C$, quod etiam Medium est, quadrato ex $B C$. Medium autem non superat

7. secundi.

27. decimi.

Medium Rationali. Non ergo quadratum ex $B C$, Rationale est. ergo Irrationale, & ipsa recta $B C$, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post deductionem minoris nominis eius, quæ ex binis

nis

nis Medijs secunda, a maiori nomine, ut ex scholio sequenti apparebit. Si igitur a Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Hoc etiam theorema ita potuisset proponi.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

QUONIAM AB, AC , Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, continensq; Medium; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius nomen AB , & minus AC . Aufertur igitur AC , minus nomen ex maiori AB , ut reliquatur BC , Mediæ Apotome secunda.

39. decimi.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

76.

71.

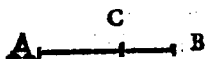
SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATUR a recta AB , recta AC , potentia ipsi AB , incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC , Rationale; rectangulum vero sub AB, AC , Medium. Dico reliquam BC , Irrationalem esse. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AB, AC , Rationale est; rectangulum uero sub AB, AC , atq;

adeo,

10. defn.
7. secundi.

10. defn.



adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei cōmenfurabile, hoc est, rectangulū bis sub AB, AC, Mediū, hoc est, Irrationale; erit cōpositū ex quadratis rectarū AB, AC, incōmenfurabile rectangulo bis sub AB, AC. Est autē cōpositū ex quadratis rectarū AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, una cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC; per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris, a maiori nomine, ut in scholio sequenti dicemus. Si igitur a recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Si c etiam theorema hoc poterat proponi.

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

40. decimi. NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusq; maius nomen AB, minus autem AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, ut relinquatur Minor BC.

77.
72.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum
tota

tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATUR ex recta AB , recta AC , potentia ipsi AB , incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC , esse Irrationalem. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AB , AC , Medium est,



hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB , AC , atque adeo & eius duplum, semper quod bis sub AB , AC , Rationale; erit compositum ex quadratis rectarum AB , AC , incommensurable rectangulo bis sub AB , AC . Est autem compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC . Igitur & rectangulum bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC , incommensurable est rectangulo bis sub AB , AC . Sunt ergo & rectangulum bis sub AB , AC , & quadratum ex BC , incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB , AC , Rationale sit; erit quadratum ex BC , Irrationale, & recta BC , Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB , AC , quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB , AC , quod Medium existit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua, &c. Quod ostendendum erat.

10. defin.

7. secundi.

7. decimi.

10. defin.

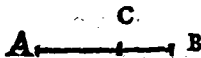
SCHOLION.

Hoc etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

Si

SI a maiori nomine eius , quæ Rationale ac Medium potest , minus nomen auferatur ; Reliqua Irrationalis est . Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens .

CUM enim AB , AC , sint potentia incommensurabiles , quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis . Medium ; quod autem sub ipsis continetur , Rationale ; erit composita ex ipsis Irrationalis , quæ nominatur Rationale ac Medium potens , cuius maius nomen est AB , minus autem AC . Auferatur igitur minus nomen AC , a maiori AB , ut BC , cum Rationali Medium totum efficiens relinquitur .



41. decimi.

78.

73.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti , quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium ; & quod sub ipsis continetur , Medium , incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum : Reliqua Irrationalis est . Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens .

DETRAHATUR ex recta AB , recta AC , potentia ipsi AB , incommensurabilis ; Sitq; tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis, Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis . Dico reliquam BC , esse Irrationalem . Quoniam compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale est rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC ; superabit compositum ex quadratis rectarum AB , AC , quod



7. secundi

quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC , quod ex coroll. propof. 24 huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub $A B, A C$, continetur, sit commensurable) quadrato ex $B C$. Medium autem non superat Medium Rationali Non ergo quadratum ex $B C$, Rationale est. ergo Irrationale, & recta ipsa $B C$, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub $A B, A C$, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum $A B, A C$, quod Medium etiam est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

27. decimi.

SCHOLIUM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

Si a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QUONIAM cum AB, AC , sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medio, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB , & minus AC . Aufertur igitur minus nomen AC , ex maiori AB , ut relinquatur BC , cum Medio Medium totum efficiens.

42. decimi.

LEMMA.

Si idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui

qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH , sitq; IB , excessus inter AB, CD , aequalis excessui KF , inter EF, GH . Dico eundem esse excessum inter AB, EF , qui inter CD, GH . Quoniam IB , excessus est inter $AB, \& CD$; erit AI , ipsi CD , aequalis. Eodem modo aequalis erit EK , ipsi GH . Idem igitur excessus erit inter $AI, \& EK$, qui inter $CD, \& GH$; cum haec magnitudines illis sint aequales, singulae singulis. Est autem totorum AB, EF , ex pronunciato 15. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK ; quod IB, KE , aequales ponuntur. Igitur idem quoque excessus erit inter $AB, \& EF$, qui inter $CD, \& GH$. quod est propositum.



sum inter AB, EF , qui inter CD, GH . Quoniam IB , excessus est inter $AB, \& CD$; erit AI , ipsi CD , aequalis. Eodem modo aequalis erit

EK , ipsi GH . Idem igitur excessus erit inter $AI, \& EK$, qui inter $CD, \& GH$; cum haec magnitudines illis sint aequales, singulae singulis. Est autem totorum AB, EF , ex pronunciato 15. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK ; quod IB, KE , aequales ponuntur. Igitur idem quoque excessus erit inter $AB, \& EF$, qui inter $CD, \& GH$. quod est propositum.

COROLLARIUM.

Ex his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

79.

74.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

APOTOMAE una tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SET Apotome AB ; congruens autem ei Rationalis BC .

B C, potentia solum toti A C, commensurabilis. Dico ipsi A B, aliam Rationalem non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis B D, ita ut B D, ipsi A D, sit potentia solum commensurabilis. Et quia B C, $\frac{A}{B} \frac{B}{C} \frac{C}{D}$ Rationalis est; erit & A C, illi solû potētia cōmēsurabilis, Rōnalis. Rōnales ergo sunt A C, B C, potētia tantum commensurabiles. Eodem modo erunt & A D, B D, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectorum A C, B C, & rectangulum bis sub A C, B C, qui inter compositum ex quadratis rectorum A D, B D, & rectangulum bis sub A D, B D; (superat enim compositum ex quadratis rectorum A C, B C, rectangulum bis sub A C, B C, quadrato ex A B; quod compositum ex quadratis rectorum A C, B C, æquale sit rectangulo bis sub A C, B C, vna cum quadrato ex A B. Et eodem modo compositum ex quadratis rectorum A D, B D, superat rectangulum bis sub A D, B D, quadrato eodem ex A B; cum & compositum ex quadratis rectorum A D, B D, æquale sit rectangulo bis sub A D, B D, vna cum quadrato ex A B.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectorum A C, B C, & compositum ex quadratis rectorum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. quod utrunque Rationale sit. (Nam cum A C, B C, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utriusque illorum commensurabile est, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectorum A D, B D.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium Rationale est. Et quia rectangulum sub A C, B C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe

7. secundi.

7. secundi.

16. decimi.

22. decimi.

27. *decimi.*

nampe rectangulum bis sub $A C$, $B C$. Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis sub $A D$, $B D$. Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub $A C$, $B C$, & rectangulum bis sub $A D$, $B D$, Rationale spatium non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi $A B$, alia Rationalis non congruit, præter $B C$, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apotomæ igitur una tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

80.

75.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIAE Apotomæ primæ una tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

S I T Mediæ Apotome prima $A B$; & ipsi congruat $B C$, Media toti $A C$, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub $A C$, $B C$, sit Rationale. Dico ipsi $A B$, aliam Mediā non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia $B D$, Media toti $A D$, potentia tantum commensurabilis, sitq; rectangulū sub $A D$, $B D$, Rationale. Et quia $B C$,

24. *decimi*

Media est potentia solum ipsi $A C$, commensurabilis; erit & $A C$, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt $A C$, $B C$, potentia tantum commensurabiles. Similiter & $A D$, $B D$; Mediæ erunt potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum $A C$, $B C$, & compositum ex quadratis rectarum $A D$, $B D$, qui inter rectangulum bis sub $A C$, $B C$, & rectangulum bis sub $A D$, $B D$, ut in propos. præcedenti ostensum est. Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propos. 27. huius lib. spatium Rationale; quod utrunq; sit Rationale. (cum enim rectangulum sub

sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub A D, B D. Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ A C, B C, Mediæ sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Mediæ, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis uniusque ipsorum commensurabile est, atque adeo & Medium, ex coroll. propos. 24. hujus lib. Non aliter quoque Medium erit compositum ex quadratis rectarum A D, B D. Medium autem non superat Medium Rationale. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Mediæ non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

16. decimi.

27. decimi.

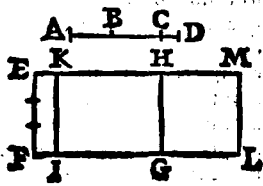
THEOR. 64. PROPOS. 82.

81.

76.

MEDIAE Apotomæ secundæ una tantum congruit recta lineæ Mediæ potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

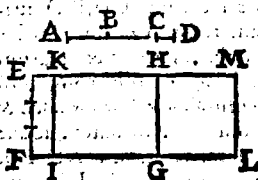
SIT Mediæ Apotome secundæ A B, cui congruat Mediæ B C, toti A C, potentia tantum commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliam Mediæ non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia B D, Mediæ toti A D,



M potentia

45. primi

potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub A D, B D, Medium. Exponatur Rationalis E F, ad quam applicetur rectangulum E G, æquale composito ex quadratis rectarum A C, B C; & ad eandem E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex A B. Et denique aliud



7. secundi.

E L, æquale composito ex quadratis rectarum A D, B D. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, una cum

24. decimi.

16. decimi.

23. decimi.

21. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis continetur sub A C, B C. Eodemque modo erit K L, æquale ei, quod bis continetur sub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cum enim B C, Media ponatur, erit & A C, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est, utrique eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Igitur & E G, quod illi composito æquale est, Medium est; quod cum applicetur ad Rationalem E F, erit E H, Rationalis ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus, quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium: quod cum applicetur ad Rationalem K I, erit K H, Rationalis ipsi K I, hoc est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommensurabiles sunt, estque ut A C, ad B C, ita quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, ut ostendimus lemma 3. ad propos. 9. huius lib. erit quadratum ex A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, rectangulum E G. (cum enim rectæ A C, B C, ponantur potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est utrique ipsorum, nempe quadrato ex A C.) & rectangulo sub A C, B C, commensurabile est eius duplum, videlicet K G. Igitur & E G, ipsi K G, incom-

incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. Rectæ igitur EH , KH , eandem habentes rationē cū EG , KG , longitudine incōmensurabiles sunt; Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles. Quapropter cū ex Rationali $E H$, auferatur Rationalis $K H$, potentia solum commensurabilis restat $E K$, & erit $E K$, Apotome, & illi congruens $K H$. Similiter demonstrabimus $E K$, Apotomenesse, & illi congruentem $K M$. Non igitur Apotomæ una tantum congruit recta linea Rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantū congruere, demonstratum est. Igitur Mediæ Apotomæ secundæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

10. decimi.

74. decimi.

80. decimi.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

82.

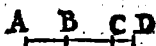
77.

MINORI una tantum congruit recta linea potentia incōmensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quiddē ex ipsarum quadratis Rationale; quod autē sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor AB , & illi congruens BC , toti AC , potentia incōmensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum AC , BC , Rationale, & rectangulum sub AC , BC , Medium. Dico. ipsi AB , aliam non congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens BD , toti AD , potentia incōmensurabilis, faciensque compositū quiddē ex quadratis rectarū AD , BD , Rationale, at rectangulū sub AD , BD , Mediū. Quoniā igitur, ut in propos. 80. demonstratū est, idē excessus est inter compositū ex quadratis rectarū AC , BC , & compositum ex quadratis rectarum AD , BD , qui inter rectangulū bis sub AC , BC , & rectangulum bis sub AD , BD : Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri;

M. 2 quod

quod utrunque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter
rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D,
B D, spatium est Rationale. sed & non Rationale est (Cū



enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. Quare unum non superabit alterum Rationali.) Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

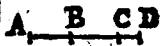
27. decimi.

83.
78.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

E I, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantum cōgruit rectæ lineæ potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

S I T recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum uero sub A C, B C, Rationale. Dico ipsi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium,



rectangulum uero sub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur, ut in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus

excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, ut in propo-
s. 81 demonstraui. Igitur & excessus inter illa com-
posita, spatium Rationale est: sed & non Rationale est, cu-
utrumque sit Medium. Medium enim Medium non supe-
rat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi A B,
alia recta, quam B C, congruet potentia toti incommensu-
rabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum
facit, una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandū.

27. decimi.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

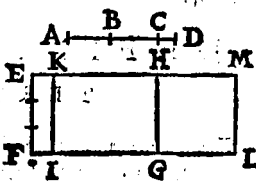
84.

79.

EI, quæ cum Medio Medium totum
facit, una tantum congruit recta linea po-
tentia incommensurabilis existens toti, &
cum tota faciens & compositum ex ipsarū
quadratis Medium, & quod sub ipsis con-
tinetur Medium, incommensurabileq; cō-
posito ex ipsarum quadratis.

SIT recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipsi
uero congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis,
faciensque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C,
Medium, & rectangulum sub A C, B C, Medium, incom-
mensurabileque composito
ex quadratis rectarum A C,
B C. Dico ipsi A B, aliam

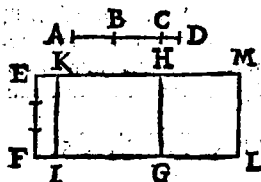
non congruere, quæ eadē
hæc faciat. Si enim fieri po-
test, congruat ipsi recta alia
B D, toti A D, potentia inco-
mensurabilis, ita ut & com-
positum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium sit, & re-
ctangulum sub A D, B D, Medium quoque, ac incommensu-
rabile composito ex quadratis rectarum A D, B D. Constru-
ctis autem iisdem, quæ in propos. 81. quoniam compositū
ex quadratis rectarum A C, B C, Medium est; erit etiam E G,



M 3 illi

23. decimi.

23. decimi.



14. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

80. decimi.

illius æquale, Medium. Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & eius duplum KG, Medium. Igitur & recta KH, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniam KG, commensurable est rectangulo sub AC, BC, cum illud huius sit duplum, at rectangulum sub AC, BC, incommensurable ponitur compositum ex quadratis re-

ctarum AC, BC; erit quoque KG, eidem composito, hoc est, ipsi EG, incommensurable; Ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensurabilis ipsi EH; erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter ostendimus EK, esse Apotomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ una tantum recta congruit, &c. Quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

DEFINITIONES

TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem tota, expositæ Rationali sit longi-

longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI uero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota; neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RURSUS si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI uero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

QVOD si neque tota, neque congruens exposita Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

SCHOLION.

Non aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotome, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post subtractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, ut ex definitiõibus est perspicuum.

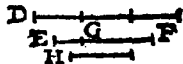
85.
80.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPORTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus AC, non sit quadratus; ita ut AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum, at AB, AC, non: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit

A C B



EF. Eritq; EF, cū commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde ut numerus AB, ad numerū AC, ita per coroll. propos. 6, huius lib. quadratum ex EF, ad

quadratū ex GF. Dico EG, esse primam Apotomen. Quoniam quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ EE, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia uero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeris,

6. decimi.

numeri; neque quadrata ex E F, G F, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, G F. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia tantum commensurabiles; atque idcirco reliqua E G, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta E F, plus quam recta G F, quadrato rectæ H. Et quia est ut numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conuersionem rationis, ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; Ac propterea rectæ E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, ubi longitudine commensurabilis, estque tota eadem E F, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

9. decimi.

74. decimi.

9. decimi.

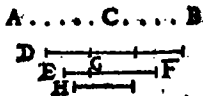
PROBL. 20. PROPOS. 87.

86.

81.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut in propos. præcedenti; expositæque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis G F; eritque G F, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico E G, esse secundam Apotomen. Quoniam quadrata ex G F, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ G F, E F, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo G F, sit ostensa Rationalis; erit quoque E F, Rationalis. Quia vero numeri A C, A B, atque adeo & quadrata ex G F, E F, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt G F, E F, longitudine incommensurabiles.



6. decimi.

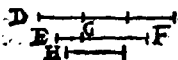
9. decimi.

les.

74. decimi.

les. Rationales ergo sunt GF , EF , potentia solum commensurabiles; Ideoque EG , reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta EF , plus quam GF , quadrato ex H . Quoniam ergo est ut AC , ad AB , ita quadratum ex GF , ad quadratum ex EF ; & conuertendo, ut AB , ad AC , ita quadratum ex EF , ad quadratum ex GF : Ostendemus iam, ut in antecedenti propos. rectam H , ipsi EF , longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota EF , plus possit, quam congruus GF , quadrato rectae H , sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF , expositae Rationali D , longitudine commensurabilis; erit EG , ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

A C B



87.

82.

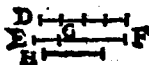
PROBL. 21. PROPOS. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB , CB , ut in propof. 86. sumatur alius numerus I , ut in propof. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB , AC , proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D , fiat ut I , ad AB , ita quadratum ex D , ad quadratum ex EF , per coroll. propof. 6. huius lib. Eruntque quadrata ex D ,

A C B

I



6. decimi.

& EF , proportionem habentia, quam numeri I , & AB , commensurabilia; atque adeo & rectae D , & EF , commensurabiles, saltim potentia. Existente ergo D , Rationali, erit & EF , Rationalis. Et quia numeri I , & AB , ac propterea quia

quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat ut A B, ad A C, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario propos. 6. huius libri. Dico EG, esse tertiam Apotomen. Quoniam quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cum illi hæc sit commensurabilis, ut demonstrauimus. Et quia A B, A C, atque adeo & quadrata ex EF, GF, proportionem non habent, quam numeri quadrati, erunt rectæ EF, GF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia solum commensurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi solum commensurabilis; reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam est ut I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & ut AB, ad A C, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo ut I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF. Non habent autem numeri I, & A C, proportionem quam numeri quadrati; Neque igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & D, EF, longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H: Ostendemusque, ut in propos. 86. rectam H, esse ipsi EF, longitudine commensurabilem. Quapropter cum tota EF, plus possit quam congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ; erit ex definit. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen Quod faciendum erat.

9. decimi.

6. decimi.

9. decimi.

74. decimi.

9. decimi.

PROBL.

88.

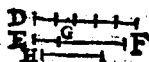
PROBL. 22. PROPOS. 89.

83.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B; ita ut A B, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis

A C . . . B



lis D, cui longitudine commensurabilis sit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quod si reliqua frant, quæ in propos. 86. ostendimus, ut ibi, E G, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit n. EF, plus

quam G F, quadrato rectæ H. Et quia est ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conversionem rationis, ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum ergo A B, & C B, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota E F, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

9. decimi.

89.

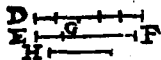
THEOR. 23. PROPOS. 90.

84.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ut in propos. præcedenti, fiat constructio, ut in propos. 87. hoc est, sumatur G F, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo ut in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & secundam esse.

A C . . . B



Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, ut in propos. 86. ostendimus

demus, per conuersionem rationis, esse ut AB , ad CB , ita quadratum ex $E F$, ad quadratum ex H ; erunt rursus, ut in propos. antecedenti, rectæ $E F$, & H , longitudine incommensurabiles. Quia ergo tota $B F$, plus potest, quam congruens $G F$, quadrato rectæ H , sibi longitudine incommensurabilis; estque congruens $G F$, Rationali D , commensurabilis longitudine; erit ex defin. $E G$, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

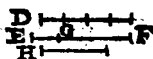
PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris $A C$, CB , & I , ut in propos. 54. ita ut $A B$, ad neutrum ipsorum $A C$, CB ; & I , ad neutrum ipsorum $A B$, $A C$, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D , & reliqua fiant,

$A \dots\dots C \dots\dots B$

$I \dots\dots\dots$



ut in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, ut ibi, D , & $E F$, longitudine incommensurabiles esse; &

$E G$, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam ut in propos. 88. erunt D , & $G F$, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeo neutra ipsarum $E F$, $G F$, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D . Possit iam $E F$, plus quam $G F$, quadrato rectæ H , quam ostendemus, ut in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi $E F$. Igitur cum tota $E F$, plus possit, quam congruens $G F$, quadrato rectæ H , sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum $E F$, $G F$, longitudine sit commensurabilis Rationali D ; erit ex defin. $E G$, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

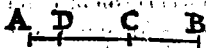
SED & expeditius sex dictas Apotomas inuenimus hac ratione, ut Theon docet hoc loco.

SIT

90.
85.

49. decimi.

Si t. inveniendæ exempli gratia, prima Apotome. Repetitur princeps ex binis nominibus prima A B, cuius maius nomen A C, & minus C B. Abstrahitur igitur ex A C, recta C D, quæ æqualis sit ipsi C B. Dico A D, esse primam Apotomen. Quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erant etiam A C, D C, Rationales potentia tantum commensurabiles. Est ergo A D, Apotoma. Et



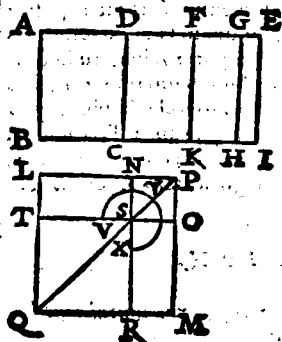
74 decimi.

quia A C, plus potest, quam C B, hoc est, quam D C, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cõmensurabilis: & est A C, Rationali expõsitæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius quæ ex binis nominibus prima dicitur, erit ex definitione Apotomæ primæ; A D, prima Apotome, Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomæ inveniuntur, ut ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, & minora nomina ex maioribus auferamus.

91.
86.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.



CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotomæ primæ A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Apotomen esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt igitur A E, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solum commensurabiles; & tota A E, longitudine cõmensurabilis Rationali A B; & denique eadem A E, tota plus poterit, quam

quam congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE,
hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, re-
ctangulum æquale sub AG, GE, deficiens figura quadra-
ta, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia AE, plus
potest, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis; erunt rectæ AG, GE, longitudine commen-
surabiles; Ac propterea & utraque toti AE, longitudine
commensurabilis erit. Est autem AE, Rationali AB,
longitudine commensurabilis. Igitur & utraque AG, GE,
ipsi AB, longitudine est commensurabilis; atque ex defini-
tione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipsi AB, paral-
leli, quæ ipsi BC, productæ occurrant in H, I; erit utrumque
rectangulum AH, GI, contentum sub duabus Rationalibus
longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia
utraque DF, FE, longitudine commensurabilis est ipsi DE;
& DE, longitudine incommensurabilis est Rationali AB;
(Nam si commensurabilis esset longitudine, cum & AE, sit
eisdem AB, longitudine commensurabilis; essent AE, DE, longi-
tudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum) po-
nuntur, non solum potentia commensurabiles; erit etiam utraque
ipsarum DF, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quo-
niã utraq; DF, FE, Rationali DE, commensurabilis, Rationa-
lis est; Erunt propterea tam AB, DF, quàm AB, FE, Rationa-
les potentia tantum commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB,
parallela, erit utrumque rectangulum DK, FI, contentum sub Ra-
tionalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

Iam uero ipsi AH, fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI,
æquale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, an-
gulum LPM. Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem
diametrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem figura, ut uides.
Quoniã igitur rectangulum sub AG, GE, per constructionem,
æquale est quadrato ex FE; erunt tres rectæ AG, FE, GE,
proportionales; Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipsis
habeant rationem; erit FI, medium proportionale inter AH,
GI, hoc est, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem
inter eadem LM, NO, per lemma propos. 14. huius lib. me-
dium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO,
æqualia sunt: Sed ipsi FI, æquale est DK; & ipsi LO,
æquale

18. decimi.

16. decimi.

12. decimi.

20. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

14. secundi.

25. sexti.

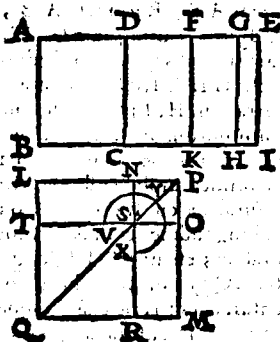
17. sexti.

8. sexti.

6. primi.

æquale est $M N$. Est ergo totum $D I$, toti gnomini $Y Y X$, cum quadrato $N O$, æquale. Est autem & totum $A I$, per constructionem, æquale quadratis $L M, N O$. Igitur & reliquum $A C$, reliquo quadrato $T R$, est æquale; Ac propterea recta $T S$, potest spatium $A C$. Dico $T S$, Apotomen esse.

Q U O N I A M spatia $A H, G I$, ostensa sunt Rationalia; & eis æqualia sunt $L M, N O$, erunt quoque quadrata $L M, N O$, Rationalia; atq; adeo & rectæ $T O, S O$, Rationales. Rursus quia $F I$, Medium est ostensum; erit & $L O$, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt $L O$, & $N O$, cum unum sit Irrationale, alterum uero Rationale. Igitur rectæ $T O, S O$, eandem rationem habentes cum $L O, N O$, longitudine incommensurabiles sunt; Ac idcirco reliqua



r. sexti.
10. decimi.

74. decimi.

$T S$, Apotome est. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

92.
87.

THEOR. 69. PROPOS. 93.

S I spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

C O N T I N E A T U R spatium $A C$, sub Rationali $A B$, & Apotoma secunda $A D$. Dico rectam, quæ spatium $A C$, potest, Mediæ Apotomen esse primam. Sit ipsi $A D$, congruens recta $D E$. Erunt ergo $A E, D E$, ex definitione Apotomæ secundæ, Rationales potentia tantum commensurabiles, & congruens $D E$, longitudine commensurabilis Rationali

tionali A B; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua omnia construantur, ut in propositione præcedenti. Eruntq; rursus, ut in antecedenti propositione, A G, G E, longitudine commensurabiles; Ac

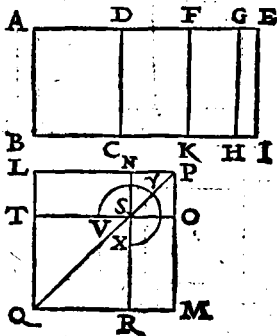
propterea & utraq; toti A E, longitudine commensurabilis. Est autem A E, Rationali A B, longitudine incommensurabilis: (Si enim commensurabilis esset ipsi A B, longitudine, cum D E, eadem A B, ponatur longitudine commensurabilis; essent A E, D E, inter se quoque commensurabiles longitudine. Quod est absurdum. ponuntur enim potentia tantum commensurabiles.) Igitur &

utraq; ipsarum A G, G E, longitudine incommensurabilis est eidem A B. Est autem utraq; A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt ram A B, A G. quam A B, G E, potentia solum commensurabiles; Atq; idcirco rectangulum utrunq; A H, G I, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium est. Rursus quia utraq; D F, F E, ipsi D E, longitudine commensurabilis est; & ponitur D E, Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit quoque, ut in scholio propof. 12. huius lib. ostendimus, eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis utraq; D F, F E; atq; adeo & Rationalis. Vtrunq; ergo rectangulum D K, F L, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam uero ut in præcedenti propof. demonstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, Mediæ Apotomen esse primam.

Q U O N I A M A G, G E, longitudine sunt commensurabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atque adeo & L M, N O, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & late-

N

ra co-



18. decimi.

16. decimi.

12. decimi.

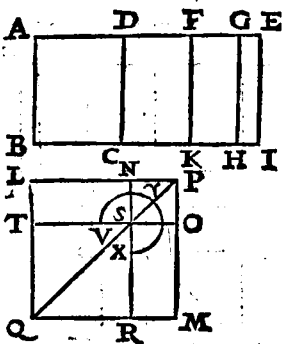
14. decimi.

22. decimi.

20. decimi.

10. decimi.

ra eorum, nempe rectæ TO , SO , saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM , NO , Medijs AH , GI , æqualia, (ostensa enim sunt



10. decimi.

76. decimi.

AH , GI , Mediæ esse.) Mediæ sint. Et quoniam FI , atque adeo sibi æquale LO , Rationale est, proptereaque Medio NO , incommensurabile; erunt rectæ TO , SO , eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cum ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt TO , SO , Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant LO , quod Rationale est ostensum;

erit TS , Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub Rationali; & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.

93.
88.

THEOR. 70. PROPOS. 94.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATUR spatium AC , sub Rationali AB , & Apotoma tertia AD . Dico rectam, quæ spatium AC , potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit ipsi AD , congruens DE . Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE , DE , Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE , DE , longitudine commensurabilis Rationali AB ; Et denique AE , plus poterit, quam DE , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE , bifariam in F , & cætera fiant, ut in propof. 92. eruntq; rursus, ut ibi, AG , GE , longitudinæ inter se commensu-

mensurabiles; Ac propterea & utraq; toti A E, longitudi-
ne commenfurabilis erit. Est autem A E, posita incommen-
surabilis longitudine Rationali A B. Igitur & utraque A G,
G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cum
ergo utraque A G, G E, Ra-
tionali A E, commenfurabi-
lis, Rationalis sit; erunt tã
A B, A G, quam A B, G E,
Rationales potentia solum
commensurabiles; Ac pro-
pterea utrunque rectangu-
lum A H, G I, Medium erit.
Rursus quia D E, longitu-
dine ponitur incommensu-
rabilis Rationali A B; erit
quoque utraque D F, F E,
ipsi D E, longitudine com-
mensurabilis existens, eidẽ
A B, longitudine incommensurabilis. Cum ergo utraque
D F, F E, Rationali D E, commenfurabilis, sit Rational-
is; erunt tam A B, D F, quam A B, F E, Rationales poten-
tia tantum commensurabiles; atq; propterea utrunq; rectũ
gulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonstrabi-
mus, ut in propof. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico
T S, esse Medię Apotomen secundam.

Q U O N I A M A H, G I, Media sunt ostensa; erunt &
quadrata L M, N O, illis æqualia; Media; Ac propterea &
rectæ T O, S O, Medię. Et quia A H, G I, eandem haben-
tia rationem, quam A G, G E, quas ostendimus commen-
surabiles esse, commenfurabilia sunt; Erunt & quadrata
L M, N O, commenfurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, cõ-
mensurabiles, saltem potentia. At uero quia A E, D E, po-
tentia solum sunt commenfurabiles, hoc est, longitudine in-
commensurabiles, estq; ipsi A E, longitudine ostensa com-
mẽsurabilis G E, ipsi uero D E, cõmensurabilis est longitudi-
ne F E; erũt ex scholio propof. 14. huius lib. & G E, F E, longi-
tudine incõmensurabiles; ac propterea G I, F I, eandem ratio-
nem habentia, quam G E, F E, hoc est, illis æqualia N O, L O, incõ-
mensurabilia. Quare T O, S O, eandẽ rationem habentes

16. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

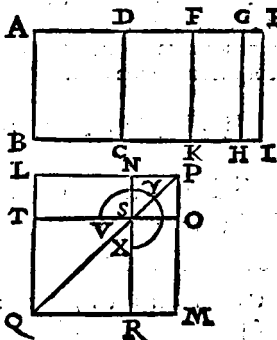
14. decimi.

22. decimi.

10. decimi.

10. decimi.

■ N 2 quam



76. decimi.

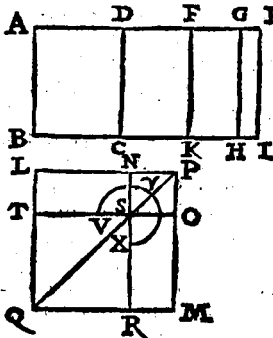
94.
89.

quam LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Ex quoniam continent LO Medium; (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, ut constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus; erit & LO, Medium.) erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; Recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Minorem esse Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Rationales potentia solum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine cōmensurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, ut prius. Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine in-



19. decimi.

20. decimi.

commensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulum sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensq; figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine cōmensurabilis; erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Ratio

nali

nali AB , longitudine incommensurabilis; erit DI , atque adeo & eius dimidium FI , Medium. Amplius cum AG , GE , sint longitudine incommensurabiles; incommensurabilia erunt AH , GI , eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero similiter demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam TS , posse spatium AC . Dico TS , esse Minorem.

QUONIAM ex constructione, rectangulo AI , æquale est compositum ex quadratis LM , NO , rectarum TO , SO : Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum TO , SO , Rationale. Item quia FI , Medium est ostensum; erit & LO , contentum sub TO , SO , illi æquale, Medium. Denique quoniam AH , GI , incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata LM , NO , illis æqualia, incommensurabilia; Atque adeo rectæ TO , SO , potentia incommensurabiles. Quapropter cum TO , SO , potentia sint incommensurabiles, sitque compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum uero sub ipsis, Medium; erit reliqua TS , Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

22. decimi.

10. decimi.

77. decimi.

95.

90.

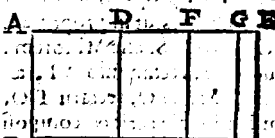
THEOR. 72. PROPOS. 96.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

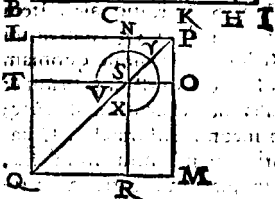
CONTINEATUR spatium AC , sub Rationali AB , & Apotoma quinta AD . Dico rectam lineam quæ spatium AC , potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi AD , congruens DE . Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE , DE , Rationales potentia tantum commensurabiles, & DE , Rationali AB , commensurabilis longitudine; Et denique AE , plus poterit, quam DE , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE , bifariam in F , & reliqua con-

struantur, ut prius. Erunt ergo rursus, ut in antecedenti propof. A G, G E, longitudine incommensurabiles. Et quia A E, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali A B, ut in propof. 93. diximus; erit rectangulum A I, Medium. Item

12. decimi.



20. decimi.



quia D E, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit D I, atq; ideo & eius dimidiū F I, Rationale. Rursus erunt, ut in præcedenti propof. A H, G I, incommensurabilia; poteritq; ut ostēsum est in propof. 92. recta T S, spatium A C. Dico T S, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

Q U O N I A M ostensum est A I, Medium esse; erit & compositum ex quadratis L M, N O, rectangulum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia demonstraui F I, Rationale esse; erit & L O, rectangulum sub T O, S O, contentum, cum illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & T O, S O, potentia incommensurabiles, ut in propof. antecedenti est demonstratum. Igitur cum T O, S O, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum uero sub ipsis, Rationale; erit reliqua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

78. decimi.

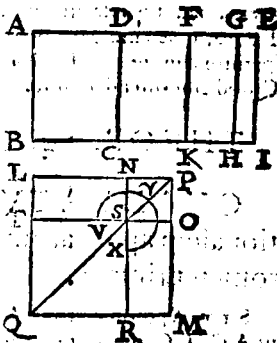
96.

91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sic ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construuntur, ut supra. Erunt ergo rursus ut in propof. 95.



AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque ut in propof. 95. AH, GI, incommensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles; Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commensurabilia sunt, erit FI, ipsi AI, incommensurable. Iam uero demonstrabimus, ut in propof. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

Quoniam AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumque sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incommensurable, ut ostendimus; erit quoque LO, sub TO, SO, contentum, incommensurable composito ex quadratis rectarum TO, SO; propterea quod LO, ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, sit æquale. Denique TO, SO, potentia incommensurabile.

22. decimi.

10. decimi.

14. decimi.

mensurabiles sunt, ut in propof. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO , SO , sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile; erit reliqua TS , ex, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quid erat ostendendum.

79. decimi.

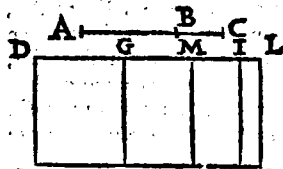
97.
92.

THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinē facit Apotomen primam.

45. primi.

Si r . Apotome prima AB , & ipsi congruens BC , ita ut AC , BC , sint Rationales potentia solum commensurabiles: & ad Rationalem DE , applicetur rectangulum DF , æquale quadrato ex AB , latitudinem faciens DG . Dico DG , esse Apotomen primam. Ad eandem DE , applicetur rectangulum DH , æquale quadrato ex AC ; & ad IH ,



7. secundi.

aliud IK , æquale quadrato ex BC , ita ut totum DK , æquale sit composito ex quadratis rectarum AC , BC . Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC , BC , æquale est rectangulo bis sub AC , BC , una cum quadrato ex AB ; si auferatur quadratum ex AB , & rectangulum DF ; relinquetur GK , rectangulo bis sub AC , BC , æquale; atque adeo diuisa GL , bifariam in M , ductaq; MN , ipsi DE , parallela, erit MK , æquale rectangulo sub AC , BC . Et quoniam AC , BC , Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex AC , BC , Rationalia; ideoq; commenturabilia. Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC , BC , utrique ipsorum sit commenturabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK ,

6. decimi.

Ratio-

Rationale Quod cum applicetur ad Rationalem D E, erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. 21. decimi.
 Rursus quia A C, B C, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atq; adeo & eius duplum G K, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem G F, erit G L, Rationalis ipsi G F, hoc est, ipsi D E, 23. decimi.
 longitudine incommensurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem, quam D K, longitudine incommensurabiles. 10. decimi.
 Quare cum & Rationales sint demonstrata; erunt D L, G L, Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam 74. decimi.
 esse.

Q U O N I A M per lemma propof. 34. huius lib. rectangulum sub A C, B C, hoc est, M K, medium est proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc est, inter D H, I K; erunt D H, M K, I K, continue proportionalia; atq; adeo & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex M L, hoc est, 17. sexti.
 quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc est, illis æqualia, D H, I K, commensurabilia sunt; erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum 10. decimi.
 duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiensq; figura quadrata; atq; sit ostensa D I, ipsi I L, longitudine commensurabilis; poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. 18. decimi.
 Quare cum sit ostensum D G, esse Apotomen, & totam D L, plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atq; eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

98.

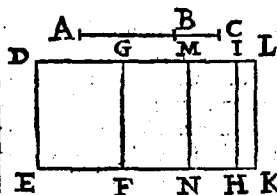
THEOR. 75. PROPOS. 99.

93.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

45. primi.

SIT Mediæ Apotome prima AB , & ipsi congruens BC , ita ut AC , BC , sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantq; Rationale: Et ad Rationalem DE , quadrato ex AB , æquale applicetur rectangulum DF , latitudinem faciens DG . Dico DG , Apotomen secundam esse. Construantur eadem, quæ in antecedenti propos. ita



16. decimi.

23. decimi.

21. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

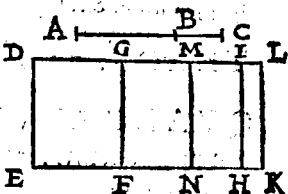
ut rursus DH , IK , æqualia sint quadratis ex AC , BC ; & GK , æquale ei, quod sub AC , BC , bis continetur; ac proinde MK , ei, quod sub AC , BC , continetur semel. Quoniam igitur AC , BC , Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est; illis æqualia; DH , IK , Mediæ, & commensurabilia; ac proinde & totum DK , utrique illorum commensurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lit. Cum ergo DK , applicetur ad Rationalem DE , erit DL , Rationalis ipsi DE , longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC , BC , Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK , Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE , erit GL , Rationalis longitudine commensurabilis ipsi DE . Quia uero DK , Medium, id est, Irrationale, & GK , Rationale, incommensurabilia sunt; erunt rectæ DL , GL , eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL , GL , Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua DG , Apotome est: Dico & secundam esse. Nam similiter, ut in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL , plus posse, quam congruentem GL , quadrato rectæ sibi longitudine

tudine commensurabilis. Quare cum congruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, & ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, sint Mediæ potentie tantum commensurabiles, contineantq; Medium: Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostendemus iam, ut in propos. præcedenti, DK, Medium esse, atque adeo rectam DL, Rationalem ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub AC, BC, Medium est, atque ob id, & eius duplum GK, erit quoque GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quia uero AC, BC, longitudine sunt incommensurabiles, estq; ut AC, ad BC, ita per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC; erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex AC, BC, ex rectis AC, BC, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo vero sub AC, BC, commensurabile est rectangulum bis sub



99.
94.

45. primi.

23. decimi.

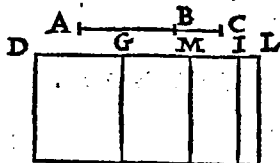
23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

sub A C, B C. Igitur ex scholio, propof. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectorum A C, B C, hoc est, D K, incommensurable est rectangulo bis sub A C, B C, hoc est, ipsi G K; Atque adeo rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles; Ac proinde reliqua D G, Apotome est. Dico esse &

10. decimi.



74. decimi.

tertiam. Similiter enim, ut in propof. 98. demonstrabimus D L, totam plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum D L, G L, Rationali D E, longitudine sit commensurabilis, ut demonstratum est; erit ex defin. D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

100.

95.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

45. decimi.

SIT Minor A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C, potentia incommensurabiles sint, facientesque compositum quidem ex quadratis rectorum A C, B C, Rationale; rectangulum vero sub A C, B C, Medium: Et ad Rationalem D E, applicetur spatium D F, quadrato ex A B, æquale, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, ut in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectorum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, Rationale est; erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est; erit G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis.

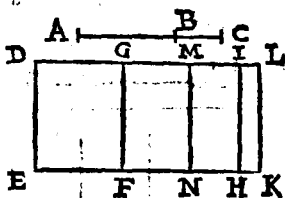
21. decimi.

23. decimi.

bilis. Rurſus quoniam DK , Rationale, & GK , Irrationale, nempe Medium, incommenſurabilia ſunt; erunt DL , GL , eandem cum iſiſ habentes rationem, longitudine in-

10. decimi.

commenſurabiles. oſtenſe ſunt autem Rationales. Rationales ergo ſunt DL , GL , potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea reliqua DG , Apotome eſt. Dico & quartam eſſe. Quoniam AC , BC , potentia ſunt incommenſurabiles;



74. decimi.

Erunt etiam quadrata, hoc eſt, iſiſ æqualia, DH , IK , incommenſurabilia; Ac propterea rectæ DI , IL , longitudine incommenſurabiles. Cum ergo rectangulum ſub DI , IL , æquale ſit quadrato ex ML , id eſt, quartæ parti quadrati ex GL , ut in propoſ. 98. eſt demonſtratum; poterit DL , plus quam GL , quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quandoquidem ad DL , maiorem applicatum eſt rectangulum ſub DI , IL , æquale quartæ parti quadrati ex GL , minore, deficiens figura quadrata, diuidenſq; maiorem DL , in partes DI , IL , longitudine incommenſurabiles. Itaque cum tota DL , plus poſſit, quam congruens GL , quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſitq; eadem tota DL , Rationali DE , longitudine oſtenſa commenſurabilis; Erit ex defin. DG , Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

10. decimi

19. decimi.

101.

96.

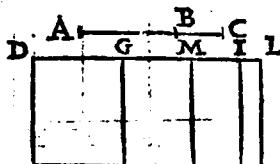
THEOR. 78. PROPOS. 102.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

S I T recta cum Rationali Medium totum efficiens AB , & iſiſ

45. primi.

& ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum uero sub iisdem AC, BC, Rationale: Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atq; adeo & illi æquale DK, Medium est; erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia re-



23. decimi.

21. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

ctangulum sub AC, BC, atq; adeo & eius duplum GK, Rationale est; erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse, Eodem enim modo, ut in antecedenti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

102.

97.

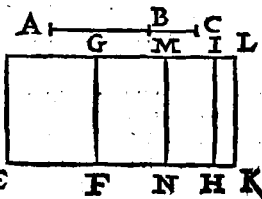
THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens BC, ita ut A C, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; & compositum ex quadratis rectarum A C, BC, Medium, & rectangulum sub ipsidem A C, BC, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato ex A B, spatium

45. primi.

æquale D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem D



enim fiant, quæ supra. Quoniam tam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, quæ

rectangulum sub A C, B C, atq; adeo & eius duplū G K,

Medium est; Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub

23. decimi.

A C, B C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, B C; Et sunt rectangulum sub A C, B C, & eius duplum G K, commensurabilia; Erit & G K, eidem cō-

14. decimi.

posito, hoc est, ipsi D K, incommensurabile; proptereaq; rectæ D L, G L, eandē habentes rationē, quā D K, G K, longitu-

10. decimi.

dine incommensurabiles. Ostensū sunt autē & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potētia solū cōmensurabiles; Atq;

74. decimi.

idcirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextā. Ostēdemus .n. similiter ut in propos. 101. totam D L, plus posse,

quā congruentē G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cū igitur neutra ipsarum D L, G L, cōmensu-

rabilis sit longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio

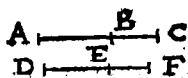
Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

103.
98.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi A B, longitudine commensurabilis D E. Dico &



D E, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi A B. Fiet ut A B, ad D E, ita B C, ad E F. Erit ergo tota A C, ad

12. sexsi.

12. quinsi. totam D F, ut A B, ad D E, uel ut B C, ad E F. Quoniam

10. decimi.

igitur A B, D E, longitudine ponuntur commensurabiles; Erunt quoque A C, D F, necnon & B C, E F, commensurabiles longitudine. Et quia A C, B C, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles D F, E F, Rationales. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; & sunt A C, B C, potentia solum commensurabiles; erunt quoque ex ijs, quæ ad propof. 1. huius lib. demonstrauimus, D F, E F, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sit

74. decimi.

ostensæ, reliqua D E, Apotome est. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Possit enim primum A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

15. decimi.

Quo posito, poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur A C, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, ut A B, sit

12. decimi.

Apotome prima; erit quoque D F, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis expostita, quam D F, eidem A C, sit longitudine commensurabilis.

Igitur ex defin. erit quoque D E, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi A B. Si uero B C, sit longitudine commensurabilis Rationali; erit eodem modo E F, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo utraque A B, D E, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum A C, B C, commensurabilis sit longitudine expostitæ Rationali; erit quoque neutra ipsarum D F, E F, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare utraque A B, D E, ex defin. erit Apotome tertia.

14. decimi

PROSSIT Iam A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, esse Apotomen

15. decimi,

tomen

tomen quartam, quintam, uel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

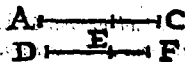
IDE M hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. *Euclius lib. de lineis ex binis nominibus scripturum*: Nimirum, si recta DE , commensurabilis sit ipsi AB , potentia tantum, eodem modo demonstrari possit, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: utamur voce: potentia tantum commensurabilis:) & DE , Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eadem ipsi AB . Non enim sequitur, si tota AC , longitudine sit commensurabilis Rationali exposita, & DE , eidem esse commensurabilem longitudine; propterea quod non utraque, nempe Rationalis exposita, & DE ; eidem AC , longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero DE , potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si AB , sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, ut DE , illi potentia tantum commensurabilis sit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB , prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eique congruens BC ; & sit DE , ipsi AB , potentia tantum commensurabilis, quam quidem, ut in theoremate, ostendimus Apotomen esse, eique congruentem EF ; & partēs AB , BC , ad partes DE , EF , eandem proportionem habere cum totis AC , DF . Dico nulla ratione DE , Apotomen esse ordine eadem ipsi AB . Nam si fieri potest, sit utraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC , tota, quā tota DF , ex definitione Apotome primæ, Rationali exposita commensurabilis longitudine; atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt AC , et DF . Quare cum sit ut AC , ad DF , ita AB , ad DE ; erunt quoque AB , DE , longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim DE , ipsi AB , potentia solum commensurabilis, Non ergo utraque AB , DE , Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim utraque congruens BC , EF , ex defin. longitudine commensurabilis Rationali exposita, atque adeo & ipsæ inter se. Quocirca & AB , DE , inter se longitudine forent commensurabiles. Quod non ponitur.

12. decimi.

10. decimi.

S E M P E R tamen verum est, si AB , est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE , quæ ipsi AB , potentia solâ est commensurabilis, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordi-



ne non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC , plus quam BC , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit

15. decimi.

ut AC , ad BC , ita DE , ad EF , poterit quoque DE , plus quàm EF , quadrato rectæ longitudine sibi cõmensurabilis. Quare ex defin. erit DE , Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB , est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut AC , plus possit, quàm BC , quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis; Erit quoque DE , Apotome quarta, uel quinta, vel sexta, quamvis ordine non eadem ipsi AB : quia rursus, cum sit ut AC , ad BC , ita DE , ad EF , poterit quoque DE , plus quam EF , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit AB , Apotome quarta, uel quinta, uel sexta.

15. decimi.

I N sequentibus autem quinque propositionibus necessario erit DE , eadem ordine ipsi AB , licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

104.
99.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

R E C T A linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

12. sexti.

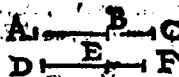
12. quinsi

10. decimi.

S I T Mediæ Apotome quæcunque AB , eique congruës BC , ita ut AC , BC , sint Mediæ potentia solum commensurabiles: Sit autem ipsi AB , commensurabilis DE , siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE , Apotomen esse, & ipsi AB , ordine eadem. Fiat ut AB , ad DE , ita BC , ad EF . Erit ergo tota AC , ad totam DE , ut AB , ad DE , & ut BC , ad EF . Quoniam igitur AB , DE , cõmensurabiles ponuntur uel longitudine & potentia, uel potentia tantum; erunt quoque BC , EF , & AC , DE , eodem modo commensurabiles. Et quia AC , BC , Mediæ sunt, erunt quoque

quoque DE, EF, illis commensurabiles, Mediarum. Rursus 24. decimi.
quia est ut AC, ad DE, ita BC, ad EF; & permutando ut
AC, ad BC, ita DE, ad EF;

Sunt autem AC, BC, potentia
solum commensurabiles, erunt
etiam, ex scholio. propos. 10.



huius lib. DE, EF, solum potentia commensurabiles. Qua-

recum DE, EF, Mediarum, sunt ostense; erit reliqua DE, Medie 75. vel 76.
decimi.

Apotome. Dico, & eandem esse ordine, ipsi AB. Quoniam est
ut AC, ad BC, ita DE, ad EF; & ut AC, ad BC, ita est qua-

dratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. pro-
pos. 19. huius lib. & ut DE, ad EF, ita quadratum ex DE, ad re-

ctangulum sub DE, EF; Erit, quoque ut quadratum ex AC, ad re-
ctangulum sub AC, BC, ita quadratum ex DE, ad rectangulum sub

DE, EF; Et permutando ut quadratum ex AC, ad quadra-
tum ex DE, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum

sub DE, EF. Igitur cum quadratum ex AC, commensurabile
sit quadrato ex DE, quod recta AC, DE, ostense sint com-

mensurabiles; erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo
sub DE, EF, commensurabile. Quare si rectangulum sub AC,
BC, sit Rationale, ita ut AB, sit Medie Apotome prima; Erit
etiam rectangulum sub DE, EF, Rationale, cum illi sit com-

mensurabile; atque adeo & DE, Medie Apotome prima
erit. Si uero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita ut
AB, sit Medie Apotome secunda; erit quoque rectangulum
sub DE, EF, ei commensurabile, Medium, ex coroll. propos.

24. huius lib. Ac propterea & DE, Medie Apotome se-
cunda erit. Recta ergo linea Medie Apotome commensu-
rabilis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

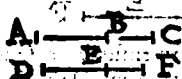
RECTA linea Minori commensura-
bilis; & ipsa Minor est,

SIT Minor AB, ipsiq; congruens BC, ita ut AC, BC, po-
tentia sint incommensurabiles, facientesq; compositum quiddam ex
quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum uero sub
ipsidem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, com-

O 2 mensu-

105. 116.
100.

incommensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Minorem esse. Fiant eadem, quæ supra, ita ut rursus A B, B C, ad D E, E F, eandem habeant rationem quam A C, ad D F.



Erunt ergo rursus, ut in antecedenti propos. D F, E F, ipsiis A C, B C, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam

est ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; erit ut quadratum ex A C, ad quadratum ex B C, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F; Et componendo ut compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ad quadratum ex B C, ita compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ad quadratum ex E F; Et permutando ut compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ad compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ita quadratum ex B C, ad quadratum ex E F. Est autem quadratum ex B C, commensurable quadrato ex E F; quod rectas B C, E F, ostendimus commensurabiles esse. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, compositum ex quadratis rectarum D F, E F, commensurable est. Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ex hypothesi, Rationale. Igitur & compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam ut in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub A C, B C, rectangulo sub D F, E F, esse commensurable: Ponitur autem rectangulum sub A C, B C, Medium; Erat, quoque rectangulum sub D F, E F, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; suntque A C, B C, potentia incommensurabiles; erunt etiam D F, E F, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum D F, E F,

Rationale, rectangulum uero sub ipsidem D F, E F, Medium; erit D E, Minor.

Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

22. sexii.

20. decimi.

16. decimi.

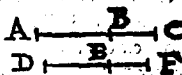
77. decimi.

THEOR. 83. PROPOS. 107. 106. 117.

101.

RECTA linea commensurabilis ei,
quæ cum Rationali Medium totum efficit;
& ipsa cum Rationali Medium totum effi-
ciens est.

SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens,
& ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, sint potentia incommen-
surabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis res-
tarum AC, BC, Medium; at rectangulum sub AC, B C,
Rationale: Sit autem DE, ipsi



AB, commensurabilis quo-
cunque modo. Dico & DE,
esse, quæ cum Rationali Me-
dium totum efficit.

Constructis enim iisdem, quæ supra,
ostendemus ut in antecedenti propos. compositum ex qua-
dratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito
ex quadratis rectarum DE, EF. Cum ergo illud ponatur
Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 14. huius lib. Me-
dium. Rursus ut in propos. 105. demonstrabimus rectan-
gulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub
DE, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc
Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, ut in
præcedenti propos. est probatum, rectæ DE, EF, potentia
incommensurabiles. Igitur cum DE, EF, incommensura-
biles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ip-
sarum quadratis Medium, rectangulum uero sub ipsis, Ra-
tionale; erit DE, quæ cum Rationali Medium totum effi-
cit. Quocirca recta linea commensurabilis ei, quæ cum Ra-
tionali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.

78. decimi.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

107.

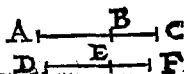
102.

RECTA linea commensurabilis ei,
quæ cum Medio Medium totum efficit; &

o 3 ipsa

ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

S I T recta A'B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita ut A C, B C, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem D E, ipsi A B, quomolibet commensurabilis. Dico & D E, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, ut in propof. 106. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc, ex coroll. propof. 24. huius lib. Medium. Rursum ut in propof. 105. ostendemus rectangulum sub A C, B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item ut in propof. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommensurabiles: Postremo quia composito ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ut dictum est, & rectangulo sub A C, B C, commensurabile est rectangulum sub D F, E F: Sunt autem compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum sub A C, B C, per hypothesein; incommensurabilia; Erunt quoque ex scholio propof. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, E F, & rectangulum sub D F, E F, incommensurabilia. Quocirca cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis; erit D E, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.



79. decimi.

T H E O R .

THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO a Rationali detracto; Recta
linea, quæ reliquum spatium potest, una
ex duabus Irrationalibus fit, uel Apotome,
uel Minor.

DETRAHATUR a Rationali AD, Medium CD.
Dico rectam, quæ potest spatium reliquum AB, esse uel
Apotomen, uel Minorem. Exponatur Rationalis EF, ad
quæ applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH,
aliud HI, æquale ipsi CD, ita ut totum EI, totum AD, sit
æquale. Quoniam igitur

EI, æquale Rationali AD,

Rationale est; erit EK, Ra-

tionalis, Rationali EF, longi-

tudine commensurabilis:

Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est; erit HK,

Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaque

cum EK, quidem sit longitudine cōmensurabilis ipsi EF. Fiat

HK, eidem EF, longitudine incōmensurabilis; erunt EK,

HK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales,

Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles;

proptereaque reliqua EH, Apotome est, & ei congruens

HK. Aut igitur EK, plus potest quam HK, quadrato

rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensu-

rabilis. Si plus pōt EK, q̄ HK, quadrato rectæ linæ cōmen-

surabilis sibi longitudine, cum tota EK, ostensa quoque sit

longitudine cōmensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH,

Apotome prima. Quare recta potēs spatiū EG, cōtēntū sub

Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc est, spatiū AB;

sibi æquale, Apotome est. Si uero EK, plus potest, quā HK,

quadrato rectæ sibi lōgitudine incōmēsurabilis, cū tota EK,

sit ostensa cōmensurabilis longitudine Rationali EF, erit ex

defin. EH, Apotome quarta. Quapropter recta potēs spa-

tiū EG, cōtēntū sub Rationali EF, & Apotoma quarta EH,

hoc est, spatiū AB, illi æquale, Minor est. Medio ergo a Ra-

tionali detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

108,

103,

45 primi.

21. decimi.

13. decimi.

13. decimi.

74. decimi.

92. decimi.

95. quinti.

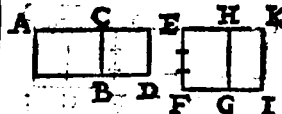
THEOR. 86. PROPOS. 110.

109.

104.

RATIONALI a Medio detracto ;
aliæ duæ Irrationales fiunt ; uel Mediæ Apo-
tome prima, uel cum Rationale Medium to-
tum efficiens.

DETRAHATUR a Medio AD , Rationale CD . Di-
co rectam, quæ reliquum spatium AB , potest, esse uel Mediæ
Apotomen primam, uel eam, quæ cum Rationale Medium
totum efficit. Eadem construatur, quæ supra. Et quia



EL , Medio AD , æquale,
Medium est ; erit EK , Ra-
tionalis ipsi EF , longitudi-
ne incommensurabilis. Itē
quia HL , æquale Rationa-

23. decimi.

21. decimi.

13. decimi.

74. decimi.

93. decimi.

96. decimi.

li CD , Rationale est ; erit HK , Rationalis ipsi EF , longi-
tudine commensurabilis. Itaque cum HK , quidem ipsi
 EF , sit commensurabilis longitudine ; at EK , eidem EF ,
longitudine incommensurabilis ; Erunt HK , EK , longitudi-
ne incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo
sunt potentia solum commensurabiles ; Ac proinde reliqua
 EH , Apotome est, & ei congruens HK . Aut igitur EK ,
plus potest, quam HK , quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis, aut incommensurabilis. Si EK , plus potest,
quam HK , quadrato rectæ sibi longitudine commensura-
bilis, cum congruens HK , ostensa sit longitudine commen-
surabilis Rationali EF ; erit ex defin. EH , Apotome secun-
da. Recta igitur potens spatium EG , contentum sub Ra-
tionali EF , & Apotoma secunda EH , hoc est, spatium AB ,
illi æquale, Mediæ est Apotome prima. Si uero EK , plus
potest, quam HK , quadrato rectæ sibi longitudine incom-
mensurabilis, cum congruens HK , sit ostensa commensura-
bilis longitudine Rationali EF ; erit EH , Apotome quinta,
ex defin. Recta igitur potens spatium EG , contentum sub
Rationali EF , & Apotoma quinta EH , hoc est, spatium
illi æquale AB , est ea, quæ cum Rationale Medium totum
efficit.

efficit . Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c.
Quod ostendendum erat.

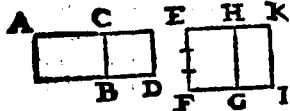
110.

105.

THEOR. 87. PROPOS. III.

MEDIO a Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; Reliquæ duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apotome secunda, uel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATUR a Medio A D, Medium C D, quod incommensurabile sit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum spatium A B, potest, esse uel Mediæ Apotomen secundam, uel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra; quoniam E I, H I, Medijs A D, C D, æqualia, Media sunt; erunt E K, H K, Rationales ipsi E F,



longitudine incommensurabiles. Et quia A D, C D, hoc est, E I, H I, ponuntur incommensurabilia; erunt E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest E K, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum neutra ipsarum E K, H K, Rationali E F, longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex definit. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, Mediæ Apotome est secunda. Si uero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum E K, H K,

23. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

94. decimi.

Rationa.

bilium, ipsa BE, longitudine incommensurabilis est ipsi DE; (quod BE, DE, Rationales sint potentia solum commensurabiles) erit quoque altera FE, eidem DE, incommensurabilis longitudine. Sed & utraque FE, DE, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt FE, DE, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua FD, Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quid demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Medias, neque inter se esse easdem.

QUADRATUM enim Mediz ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen primam.

ET quadratum Mediz Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen secundam.

QUADRATUM vero Mediz Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

QUADRATUM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quartam.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quintam.

QUADRATUM deniq; eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen sextam.

ITAQUE cum hæc latitudines differant & a latitudine. Mediz, & inter se; a latitudine quidē Mediz, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eadem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & a Media, & inter se se differre.

QUONIAM vero in hoc theoremate demonstravimus Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam, liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium,

quæ

14. decimi.

74. decimi.

23. decimi.

98. decimi.

99. decimi.

100. decimi.

101. decimi.

102. decimi.

103. decimi.

quæ post ipsam, eadẽm non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quæpiam exposita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hæcenus disputauius; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.
4. Ex binis Medijs secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

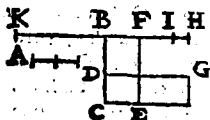
THEOR. 89. PROPOS. 113.

112.

O.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportionem; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

S i t Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D; & ad B C, applicetur rectangulū B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportionem; & adhuc Apotomē B F, esse ordine eandem ipsi B C, ex binis nominibus. Applicetur enim rursus ad D C, minus no-



men, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; atque adeo rectangulo B E, latitudinem faciens D G; sitque ipsi D G, æqualis B H. Et quoniam æquahæ sunt B E, C G; erit ut B C, ad D C, ita D G, hoc est, sibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo ut B D, ad D C, ita H F, ad F B: Est autem B D, maior, quam D C. Igitur & H F, maior est, quam F B. Ponatur F I, ipsi F B, æqualis; & fiat ut H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo ut H F, ad I F, hoc est, ad sibi æqualem B F, ita F K, ad B K. ostensum est autem esse ut H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quæque ut B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cum sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. Igitur & F K, B K, potentia solum commensurabiles sunt.

45. primi

45. primi

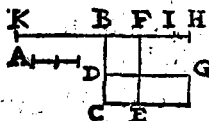
14. uel 16. sexsi.

12. semi.

10. decimi.

12. quinti.

R V R S V S quia est ut H F, ad B F ita F K, ad B K, erit quoque H F, F K, antecedentes simul, nempe tota H K, ad B F, & B K, consequentes simul, hoc est, ad totam F K, ut F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis est inter H K, B K. Quare ut H K, pri-



ma ad B K, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, secunda. Quia uero C G, cum Rationale sit, (est enim quadrato Rationale A, æquale) ad Ra-

21. decimi.

tionalē D C, applicatum facit D G, latitudinem Rationale, ipsi D C, longitudine cōmensurabilem; Erit quoque H B, ipsi D G, æqualis, Rationalis & longitudine cōmensurabilis ipsi D C. Et quoniam ostensum est, esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K: Ut autē F K, ad B K, ita H K, ad F K, erit, quoque ut B D, ad D C, ita H K, ad F K. Igitur ut quadratum ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, cōmensurable est quadrato ex D C, (quod rectæ B D, D C, sint Rationales potentia cōmensurabiles; cum sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus.) Cōmensurable igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit ut quadratum ex H K, ad quadratum ex F K, ita recta H K, ad B K. Igitur longi-

22. sexti.

10. decimi.

tudine cōmensurabilis est H K, ipsi B K; atque adeo & reliquæ B H, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem B H, Rationalis; Igitur & H K, illi cōmensurabilis, Rationalis est; ac propterea & B K, ipsi H K, cōmensurabilis, Rationalis existit. Cum ergo ostensa sit F K, ipsi B K, potentia solum cōmensurabilis; erit quoque F K, Rationalis. Quare cum F K, B K, Rationales sint, & potentia tantum

10. decimi.

74. decimi.

ostensæ cōmensurabiles; erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod est primum.

16. decimi.

Q V O N I A M uero ostensum est, esse rectam H K, totam parti B K, longitudine cōmensurabilem; erunt propterea & B K, B H, longitudine inter se cōmensurabiles. Cum ergo B H, ostensa sit longitudine cōmensurabilis ipsi D C; erit quoque B K, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem D C, longitudine cōmensurabilis. Rursus quia demon-

stratum

stratum est esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K ; & permu-
tando ut B D, ad F K, ita D C, ad B K : Sunt autem modo
D C, B K, ostensæ, longitudine commensurabiles ; Erunt
quoque B D, F K, commensurabiles longitudine. Itaque
cum F K, ipsi B D, & B K, ipsi D C, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.

10. decimi.

ITEM quia demonstrauius esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K ; erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, in eadem ratione cum B D, D C, nominibus ipsius B C, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO uel B D, plus potest, quam D C, quadra-
to rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensu-
rabilis. Si plus potest B D, quam D C, quadrato rectæ sibi
longitudine commensurabilis ; cum sit ut B D, ad D C, ita
F K, ad B K ; poterit quoque F K, plus quam B K, quadra-
to rectæ sibi longitudine commensurabilis : Et si B D, plus
potest quam D C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis ; poterit & F K, plus quam B K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem B D, expositæ Rationali fuerit longitudine, commensurabilis ; erit & F K, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi B D, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauius. Si uero D C, sit Rationali commensurabilis longitudine ; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali, longitudine commensurabilis. Si denique neutra ipsarum B D, D C, sit Rationali longitudine commensurabilis ; erit quoque neutra ipsarum F K, B K, com-

15. decimi.

14. decimi.

mensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem
ordine est Apotome B F, ipsi B C, ex binis no-
minibus, ut constat ex definitionibus se-
cundis, atque tertijs. Quod est quar-
tum. Quadratum ergo Ratio-
nalis ad eam, quæ ex binis
nominibus, &c. Quod
demonstran-
dū erat.

THEOR.

113.

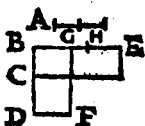
THEOR. 90. PROPOS. 114.

o.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cōmensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

45. primi.

S i t Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD, & ad BC, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cuius nomina cōmensurabilia sunt nominibus B D,



45. primi.

CD, Apotomæ BC, & in eadem proportionione; & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eandem. Applicetur enim rursus ad BD, totam, rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinem

14. vel 16. sexti.

faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia sunt; erit ut BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conversionem rationis, ut BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundum proportionem BE, ad GE, ex ijs, quæ in scholio propos. 10. lib. 6. conscripsimus; ut sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est, ut BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablata; erit quoque BH, reliqua ipsius BE, ad HE, reliquam ipsius GE, ut tota BE, ad totam GE: Erat autem ut BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoque ut BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BH, GH. Quare erit ut BH, prima ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia uero fuit ut BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantū com-

commensurabiles. Erunt quoque BH , HE , potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex BH , HE , commensurabilia. Igitur rectæ BH , GH , eandem habentes rationem cum quadratis ex BH , HE , ut demonstraui-mus, longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota BH , longitudine commensurabilis existens parti GH , cōmensurabilis quoque longitudine erit pars reliqua BG , ex coroll. propof. 16. huius lib. At uero cum BD , Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ BC ; & rectangulum BF , quadrato ex Rationali linea A , æquale, Rationale; erit latitudo BG , Rationalis commensurabilis longitudine ipsi BD . Igitur ex scholio propof. 12. huius lib. & BH , eidem BD , Rationali commensurabilis est longitudine, atq; adeo Rationalis existit; quandoquidem BH , BG , longitudine commensurabiles sunt ostense. Quia vero BH , HE , ostense sunt commensurabiles potentia tantum, & BH , Rationalis; erit quoque HE , illi commensurabilis; Rationalis: Rationales ergo sunt BH , HE , potentia solum cōmensurabiles; Ac propterea BE , ex binis nominibus est. Quod est primum.

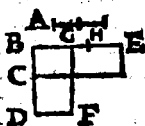
QUONIAM vero ostendimus esse BH , ad HE , ut BD , ad CD ; atque adeo permutando BH , ad BD , ut HE , ad CD ; Ostensa est autem BH , ipsi BD , longitudine commensurabilis; erit quoque HE , ipsi CD , commensurabilis longitudine. Quare BH , HE , nomina ipsius BE , ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus BD , CD , Apotomæ BC . Quod est secundum.

IMMO & in eadem proportionem, cum demonstratum sit esse BH , ad HE , ut BD , ad CD . Quod est tertium.

POSTREMO uel BD , plus potest quam CD , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; poterit quoq; BH , plus quam HE , quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: Et si BD , plus potest, quam CD , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH , plus quam HE , quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD , Rationali expolitæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH , commensurabilis existens longitudine ipsi

P sibi

si B D, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propof. 12. huius lib. Si uero C D, longitudine fit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione H E, ei-



14. decimi.

dem Rationali longitudine commensurabilis. Si uero neutra ipsarum B D, C D, commensurabilis sit longitudine Rationali exposita; erit quoque neutra ipsarum B H, H E, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atq; ter-

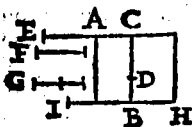
tij definitionibus, ipsa B E, ex binis nominibus, ordine eadē est ipsi Apotomæ B C. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionē, &c. Quod erat demonstrandum.

114.
o.

THE OR. 91. PROPOS. 115.

SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportionē; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

CONTINEATUR spatium AB, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus; cuius nomina C D, D B, commensurabilia sunt nominibus C E, A E, Apotomæ AC;



& in eadem ratione, nempe C D, ad D B, ut C E, ad A E. Possit autem recta F, spatium A B. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum

45. primi.
113. decimi

C H, æquale quadrato ex G. Erit ergo latitudo B H, Apotome, cuius nomina H I, B I, longitudine commensurabilia sunt nominibus C D, D B; & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, ut C D, ad D B; atque adeo ut C E, ad A E;

& per-

& permutando, ut tota HI , ad totam CE , ita ablata BI ,
ad ablata AE . Erit ergo & reliqua BH , ad reliquam AC , 19. quinti.
ut tota HI , ad totam CE : Commensurabilis autem est lon- 12. decimi.
gitudine HI , ipsi CE , quod utraque HI , CE . commensu-
rabilis fuit longitudine ipsi CD . Igitur & BH , ipsi AC , 10. decimi.
longitudine est commensurabilis; Atque idcirco HC , ipsi 1. sexti.
 BA , commensurabile erit, cum sit ut HB , ad AC , ita
 HC , ad BA : Sed HC , quadrato Rationalis G , æquale,
Rationale est. Igitur & BA , illi commensurabile, Ratio-
nale erit, proptereaq; & recta F , ipsum BA , potens, Ratio-
nalis erit. Quapropter si spatium conneatur sub Apoto-
ma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina com-
mensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem pro-
portionione; Recta linea spatium potens, est Rationalis.
Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, fieri posse, ut spatium Rationale con-
tineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium $A B$, con-
tentum sub AC , CB , Apotoma, & ex binis nominibus, quæ
rationales sunt, ostensum est Rationale esse.

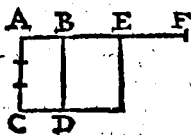
SCHOLIUM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda
sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nomi-
nibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim
duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia. In
posteriori uero, nempe in hac 115, nihil colligatur, si nomina
 CD , DB , nominibus CE , AE , potentia tantum commensu-
rabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus hæc
trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116.

A MEDIA infinitæ Irrationales sunt,
& nulla alicui antecedentium est eadem.

S I T Media A B . Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali A C, contineatur sub A B, Media, & Rationali A C, spatium A D. Est ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta B E,



quæ ex defin. xi. Irrationalis erit. Dico B E, non esse eandem alicui tredecim illarum; quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediz ad Rationalem A C, applicatum, latitudinem faciat

23. decimi.

Rationalem ipsi A C, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines uel ex binis nominibus, uel Apotomas, ut constet ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At uero quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem a latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

Q u o d si compleatur rectangulum D E, erit & hoc cōtinentum sub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta E F, quæ ex defin. xi. Irrationalis erit. Dico rursus E F, non esse eandem alicui illarum tredecim, uel etiam ipsi B E. Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius B E, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes a B E, ut demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

118.

7.

PROPOSITVM sit nobis ostende
re, in quadratis figuris diametrum lateri in-
commensurabilem esse longitudine.

S I T quadratum A B C D, in quo diameter A C. Dico
diametrum A C, longitudinem incommensurabilem esse la-
teri A B. Si enim non est incommensurabilis, commensura-
bilis erit longitudine; ac propterea A C, A B, proportionē
habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat A C, ad
A B, proportionem, quam numerus E F, ad numerum G;
sintque numeri E F, & G, minimi omnium eandem pro-
portionem habentium. Quoniam ergo est ut A C, ad A B,
ita numerus E F, ad numerum G; Erit quoque A C, ad A B,

5. decimi.



20. *sexti.* &

II. octani.

co quod impar imparem multiplicans imparem procreet. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia vero E F, & G, in sua proportionem minimi, inter se primi sunt; & E F, ostensus est par, erit G, impar. (Si enim par etiam esset, metiretur utrumque E F, & G, binarius, atq; adeo non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Dividatur iam par numerus E F, bifariam in H. Quia igitur numerus E F, duplus est numeri E H; & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex E F, quadruplus

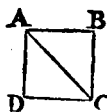
29. noni.

24. septimi.

г. 1. 08. 1911.

quadrati ex E H. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex E F, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex E H; qualium partium 4. est quadratus ex E F, talium 2. erit quadratus ex G, & talium 1. quadratus ex E H. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, ut supra de numero E F, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter A C, lateri A B. Igitur incommensurabilis longitudine.

A L I T E R. Sit si potest fieri, diameter A C, commensurabilis longitudine lateri A B; habeantq; A C, A B, proportionem, quam numeri E F, & G, qui minimi sunt in sua proportione, atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, unitas. (Cum enim quadratum ex A C, duplum sit quadrati ex A B; sit autem ut quadratum ex A C, ad quadratū ex A B, ita quadrat' numerus ex E F, ad quadratū numerū ex G, ut in priori demonstratione diximus; erit quoq; quadratus ex E F, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est unitas, atq; adeo & quadrat' ex ea, unitas; erit quadratus ex E F, binarius. Quod est absurdū.) ergo numerus. Et quia, ut iam est demonstratum, quadratus ex E F duplus est quadrati ex G; metietur quadratus ex



G, quadratū ex E F; ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri E F, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdū. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudine lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

S E D & affirmative hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propof. 47. lib. 3. demonstrata

14. ostendi.

monstrata a nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. uel 4. ad 2. uel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportionem dupla quotcumque numeris ab unitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. solum tertius ab unitate quadratus est, & ceteri omnes unum intermittentes; quod 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. primus ab unitate, nempe 2. quadratus non fit, erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui uero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

10. nono.

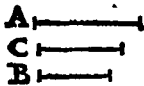
24. octavi.

9. decimi

Hoc etiā theorema aliter demonstrauimus in scholio proposit. 8. lib. 8. & in scholio proposit. 9. huius libri.

CETERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quedam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometria libris pendet, ut merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilis aū omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinet; uisum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriae, quæ ad demonstrationem eorū, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inueniuntur & alia quam plurima magnitudines, plane scilicet, atque solide incommensurabiles inter se. Sint enim recta A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. proposit. 20. lib. 6. ut A, ad B, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterq; posita super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; erunt rectilinea illa figura super A, & C, incommensurabiles.



RURSUS quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta:

10. decimi.

2. duodecimi.

P 4

Qua

11. quinti. Quadrata autem hac, cum sint figura rectilinea similes, simili-
10. decimi. terq; posita, proportionem habent, quam recta A, & B, ex
coroll. propof. 20. lib. 6. Habebunt quoque circuli diametro-
rum A, C, eandem proportionem, quam recta A, B: Sed re-
cta A, B, incommensurabiles sunt longitudine. Igitur & cir-
culi diametrorum A, C, incommensurabiles sunt.

5. 6. vel 7. I AM uero si constituantur solida, nempe pyramides, vel
duodecimi. prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figura recti-
linea similes, similiterq; descripta super A, C habebunt py-
ramides, atq; prismata eandem proportionem, quam bases,
hoc est, quam rectilinea ille figura. Quare cum rectilinea il-
la figura incommensurabiles sint, ut modo est demonstratum;
10. decimi. Incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyrami-
des, & prismata.

Q U O D si coni, uel cylindri aque alti fabricentur, quo-
rum bases circuli sint diametrorum A, C; habebunt huiusmo-
di coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc
est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommen-
surabiles; Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cy-
lindri. Inuentæ sunt igitur non solum lineæ, & superficies in-
commensurabiles, uerum etiam & corpora, siue solida incommen-
surabilia; Quod est propositum.

10. decimi. E A D E M autem ratione, si recta A, & B, longitudine
5. 6. 7. & commensurabiles sint, ostēdemus earū figuras rectilineas similes,
11. duode- similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensu-
rabilis esse; atq; adeo & earundem pyramides, & prismata;
ac deniq; conos, & cylindros; si modo eandem habeant alti-
tudinem, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI DECIMI.



EVCLIDIS

ELEMENTVM XI.

Et Solidorum primum.



DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinē, latitudinem, & crassitudinem habet.



OSTQVAM Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometria parte disernuit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometria, tanquam proprium, usurpauit; In subsequētib; vero tribus diligēter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinā

linearum commensurabilium, ac incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, ut constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime differitur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometria, quæ corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur, eam quantitatem,

quæ

que præter longitudinem & latitudinemq; sortita est crassitudinem, seu profunditatem; ita ut tres dimensiones possideas, & nam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemue, appellari solidum, siue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; qua vero longitudini latitudinem adiicit, superficies vocatur, ut in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, præcipiunt, ut imaginemur punctum aliquod e loco in locum moveri; hoc enim describit uestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quod punctum omnis sit magnitudinis expers; ut autem percipiamus superficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri; hæc enim describet uestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in transversum est factus; Carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem tria dimensionibus præditum, consulunt, ut concipiamus superficiem aliquam æqualiter elevari, siue in transversum moveri; hæc enim ratione describeretur uestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum vero seu crassum, propter elevationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta distincta a lineæ, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantum dimensio possit assignari, ut perspicue in commentarijs, quos in spheram Ioannis de sacro bosco conscripsimus, a nobis fuit demonstratum ex Ptolemao in libello de Analemmase.

II.

SOLIDI autem extremum, est superficies.

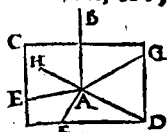
QUINIAMODVM linea finita in extremitatibus puncta,

puncta, superficies vero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit; ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficies; perfectum est extremas partes illius esse superficies.

III.

LINEA recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

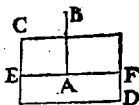
UT linea recta AB , plano CD , insitens, ita ut B , punctum sit in sublimi extra planum CD , at punctum A , in ipso plano, cum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum CD , cum rectos effecerit angulos cum lineis AE , AF , AD , AG , & cum omnibus alijs, quæ in eodem existentes in plano ipsam tangunt in puncto A . Hac enim ratione fiet, ut AB , æqualiter insitit plano CD , & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet.



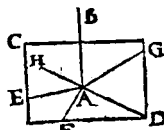
Nam producta recta DA , ad H , cum angulus BAD , ponatur rectus, erit quoque ei deinceps BAH , rectus ideoque illi æqualis. Eademque ratione protracta qualibet linea in plano CD , faciet AB , cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æqualiter ipsi plano insitit. Quod si fieri posset, ut AB , cum una linea ex A , in plano CD ,educta non efficeret angulum rectum, etiam si cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB , recta ad planum CD . Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et e contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum datam rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos consicere.

UT autem recta quampiam plano cuicumque insitens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamque

ipsamq; tangentibus, satis est, ut cum duabus non efficien-
tibus lineam unam, sed se mutuo secantibus, si producantur,
rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum
omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, ut perspicuum
fiet ex propof. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficien-
tibus lineam unam: quia si duæ lineæ componant unam rectam
lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis re-
ctos angulos constituit, cum omnibus alijs rectos conficere an-
gulos. Recta enim AB , insit in plano CD , efficiatq; rectos



angulos cum duabus in eodem plano ductis
 AE , AF , quæ rectam unam lineam compo-
nant. Dico AB , non propterea cum omnibus
alijs rectos angulos constituisse; ac idcirco
non esse rectam ad planum CD . Hoc autem
perspicuum est, cum AB , circa EF , veluti axem, circum-
nervi queat, ita ut punctum B , modo sit plano propinquius, mo-
do ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum EF , sem-
per eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si ea-



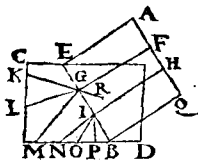
dem AB , cum duabus angulum componen-
tibus, quales sunt AG , AD , in priori
figura, rectos constituat angulos, tunc
demum cum omnibus alijs rectos angulos
efficiet, ut diximus. Id quod dilucide de-
monstrabitur propof. 4. huius lib.

IIII.

PLANVM ad planum rectum est,
cum rectæ lineæ, quæ communi planorum
sectioni ad rectos angulos in vno planorum
ducuntur, alteri plano ad rectos sunt an-
gulos.

INSISTAT planum AB , plano CD ; ita ut linea
 AQ , sit in sublimi, hoc est, extra planum CD ; at EB , in
plano: Sit autem horum planorum communis sectio EB , quæ,
ut demonstrabitur propof. 3. huius lib. recta erit linea. In hac
autem

autem sumptis quoruncq; punctis G, I, ex ipsis in plano A B, ducatur G F, I H, perpendiculares ad communem sectionem E B. Si igitur lineæ F G, H I, ad planum alterum C D, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis G K, G L, G M; I N, I O, I P, & cum alijs omnibus in plano C D, a punctis G, & I, ductis; dicitur planum A B, ad planum C D, rectum;



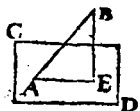
quia hoc modo non magis in unam partem inclinabis, quam in alteram, sed æquabiliter illi insisteret. Si enim K G, producatetur ad R, cum angulus F G K, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps F G R, rectus; ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano C D, fient utrobique a lineis F G, H I, anguli æquales. Quare planum A B, æquabiliter plano C D, insisteret. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendū quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atq; a puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus ipsa insistente linea, & adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta AB , plano CD , non ad angulos re-
ctos, sed inclinata, ita ut punctum B , sit extra planum in su-
blimi, punctum uero A , in plano. Deinde ex
 B , termino sublimi recte AB , intelligatur
ad idem planum deducta perpendicularis BE ,
faciens in plano punctum E ; atque ab E , ad A ,
adiungatur recta EA ; verisq; necessario an-
gulus BAE acutus, cum in triangulo ABE ; duo anguli
 BAE , BEA , duobus sint rectis minores, & angulus BEA ,
rectus. Angulus igitur acutus BAE , comprehensus linea in-
sistente AB , & adiuncta EA , dicitur inclinatio recte AB ,
ad dictum planum CD ; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio li-
nea AB , ad planum CD , quantum est dictus angulus acutus BAE .

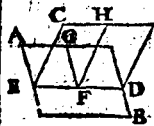
17. primi.



VI.

PLANI ad planum inclinatio, est an-
gulus acutus rectis lineis contentus, quæ in
utroque planorum ad idem communis sec-
tionis punctum ductæ, rectos cum sec-
tione angulos efficiunt.

PLANO AB , insitat planum CD , ita ut pars ad C , sit
in sublimi extra planum AB , & pars ad D , in ipso plano AB ,
sive CD , inclinatum ad AB ; & communis eorum sectio sit
 DE . Si igitur ad D ex communem sectionem ex eius puncto F ,
duæ perpendiculares ducantur, FG , qui-
dem in plano AB , at FH , in plano CD ; di-
cetur angulus acutus GFH , dictis rectis
comprehensus, inclinatio plani CD , ad pla-
num AB : Ita ut tanta esse dicatur incli-
natio plani ad planum, quantum est dictus
angulus acutus.



IN TERTIO Geometra angulum GFH , dicitur an-
gulum inclinationis plani CD , ad planum AB , siue is acutus sit
siue rectus, obtususue; quanquam proprie solum angulus acu-
sus inclinationem unius plani ad alterum ostendat, ut Eucli-
des do-

des docet hoc loco: Rectus enim indicat potius equabilem elevationē unius plani supra aliud, quā inclinationē unius ad alterū; obusus vero recessum quodāmodo unius ab altero. Verū tamen quia quilibet horū angulorū cōmōstrat fitū, seu elevationē unius plani supra alterū, generaliter dicti cōsuevit a plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui cōprehēditur duabus rectis lineis, qua in utroque plano ad aliquē unū punctū cōis illorū sectiones ducuntur perpendiculares; cuiusmodi est angulus $G F H$, siue is rectus sit, siue acutus, siue obusus.

VII.

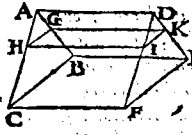
PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON obscura est hæc definitio, præcedēti bene intellecta. Vnde planū ad planū magis inclinatum esse dicet, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo a recto magis recesserit.

VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partē, etiā infinite, producantur; hoc est, siue ad dexterā, siue ad sinistrā, & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt. n. quædā plana, quæ nec ad dexterā, nec ad sinistrā producta conueniunt, nec eam ob id parallela sunt dicenda; quia nimirū vel sursum, vel deorsum protracta, tandē coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum; remanentis duo plana non conueniunt, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio; idcirco non dicuntur parallela.

SIT enim rectum quodpiam $ABCDEF$, consentum duobus planis $ABED$, $ACFD$, cuius basis $BCFE$; aufera-


turq; fastigium $AGHDKI$. Quo facio, perspicuum est, reliqua plana $GBEK$, $HCFI$, non convenire inter se, si ad partes GB , HC , vel ad partes KE , IF , producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes GH , KI , conveniant in fastigio AD . Ut igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, ut in nullam partem producta inter se conveniant. Sicut autem lineae in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes produci possunt: scilicet prorsus, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atq; deorsum. Itaque duo plana quaecunq;, nec sunt parallela, nec ad aliquam partem producta coeunt; lineae vero rectae, nec sunt parallelae, nec ad alteram partem prorsus conveniunt, si nimirum in eodem existunt plano, vel tandem nec sunt parallelae, nec inquam conveniunt, si videlicet in diversis sunt planis, & in transuersum posita. Unde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quae cum in eodem sint plano. Hic autem simpliciter dicitur: quae nunquam conveniunt.

IX.

SIMILES solidae figurae sunt, quae similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

POTUISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos aequales, & proportionalitatem laterum circa aequales angulos, uti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satis tamen esse indicavit, ut brevitas consulens eas ex similibus planis multitudine aequalibus describeret; praesertim quod ex similitudine planorum statim consequatur, & angulorum solidorum aequalitas, ut ex defin. 11. patebit, cum illos constituent anguli plani, & multitudine, & magnitudine aequales;

æquales; & proportionalitas laterum cir cum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

ÆQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continetur.

Q V O D si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figura solida non solum similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum inferitur angulorum solidorum æqualitas, ut in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, ut in lemma se propof. 22. lib. 6. demonstravimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent; ac propterea inter sese existunt æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo cōtingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

D V A E lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad unum punctum conveniunt, efficiunt angulum planum ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC , contentus duabus lineis AB, AC , in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quadam linea AD , quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D , sit in sublimi extra illarum

larum planum, efficietur ad punctum A , angulus solidus, sine corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel deniq; plures adiungeretur, licet anguli quãtitas uariaretur.



Dixit autem Euclides, lineas angulũ solidũ constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniã videlicet, si tres lineæ AB , AC , AD , in eadẽ consistere superficies, nõ efficeretur angulus solidus ad punctum A , sed planus duarum ex duobus planis BAD , DAC , compositus. Quod si AD , sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB , AC , iam non componetur angulus planus totus ex BAD , DAC ; immo circa punctum A , tres plani consistent anguli BAD , DAC , CAB , qui usq; mox dicetur, solidum constituent angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

A L I T E R .

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

HAE definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti recte intellecta. Cũ enim saltem tres lineæ in eodẽ non existentes plano necessariae sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, ut angulus solidus efficiatur, ut ex superiori figura apparet. Angulus enim BAD , in plano est, in quo rectæ AB , AD ; & angulus DAC , in plano, in quo rectæ AD , AC ; angulus deniq; CAB , in plano, in quo rectæ AC , AB ; atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A , constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad unum punctum consistent, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus, sed totus quidam angulus planus, ut supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiam si in diuersis sint planis. Hiabitis enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, ut tertia saltem superficies accedat, in qua, reversus angulus planus consi-

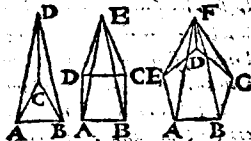
constit. at. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pavimento domus, uel laqueari, ad unum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si una earum superficierum tollatur, destrui apogulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

Ex his vero perspicuum cuius eris, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine equalibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus solidis eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ, quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac definitio angulus coni, qui unica superficie curua continetur, neque is, qui continetur duabus superficiebus, una quidem plana, altera uero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum constituta.

VIDELICET figura solida a planis ABC , $ABCD$, $ABCDE$, ad puncta D , E , F , constituta appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad unum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominatione sumit; ut uidelicet dicatur pyramis triangularis, quadrangularis, pentagona, hexagona, &c. Totæ autem angulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera

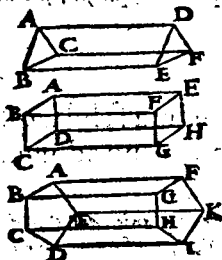


planum dictum continet. Vnde & basis pyramidis nuncupari solet planum huiusmodi. Vt pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD : Quadrangula uero ABE, ADE, BCE, CDE : Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF .

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia uero parallelogramma.

FIGURAE scilicet solide, quarum plana aduersa & æqualia, & similia & parallela sunt triangula ABC, DEF : vel quadrangula $ABCD, EFGH$: vel pentagona $ABCDE, FGHIK$, &c. Parallelogramma uero $ACFD, ABED, CBEF$, vel $ABFE, ADHE, CDHG, CBFG$: vel $ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG$; dicuntur prismata. Itaq; prisma nil aliud erit, quam columna quædã latera æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallele, siue hæc sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quos latera, siue anguli in unoquoque oppositorum planorum reperiuntur, ut figurae indicant.



Ex his manifestum est, quantum hallucinantur q. inter quos est & Campanus, qui prismata intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua uero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serrati. Cum omnis hæc figura sit solummodo species prismatis, de-

finis

finis autem in ad infinitum alia genera prismatis complectantur, ut constat; præsertim quod plurima demonstrationes in hoc libro & 12. sequenti, ex aquo omnibus prismatibus conveniunt, perspicuum est eos hallucinari, qui unum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumptimus autem forte hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propof. ultimas lib. 12. & in 3. 4. & 5. propof. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduertunt, septimam propositionem lib. 12. aliter aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangularum oppositorum, eo quod eadē prismatis facta demonstratio illa conveniat. Quod si sola ea figura, ut ipsi voluit, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Opone prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Immo in corollario dictæ propositionis septimæ inferit Theon, Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem etiam illa basin habentis, & altitudinem æqualem; licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quavis rectilinea, æqualia tamen & similia, vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communem omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptas, sine Euclidis. Accedit etiam, quod a Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIII.

S P H A E R A est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, unde moueri cæperat, circumassumpta figura.

S I C V T linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum; ita & semicirculus circa al-

terum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit; quam Geometre sphaeram appellant. Unde: quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, a quo omnes linea recta in peripheriam cadentes sunt aequales; propterea quod omnes aequales existant illi linea circumuoluta: Ita quoque in sphaera punctum reperitur, nempe medium diametri quiescens, hoc est, centrum semicirculi circumducti, a quo omnes rectae cadentes in peripheriam sunt aequales; eo quod omnes sint semidiametra illi semicirculi aequales. Quapropter ad similitudinem definiti semicirculi, sphaera definitur poterit etiam hoc modo.

S P H A E R A est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam ab uno puncto eorum, quae intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectae lineae inter se sunt aequales.

CICERO in lib. de vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod *σφαίριος* Graeci vocant, cuius omnis extremitas aequibus a medio radijs attingitur.

XV.

A X I S autem sphaerae, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRUM sphaerae est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphaerae, est re-

ita quædam linea per centrū ducta, & vtrin-
que a sphaeræ superficie terminata.

HAB tres definitiones non egent expositione; dummodo
hoc solum necetur, omnem diametrum sphaera posse esse axem,
si nimirum circum eam sphaera reuoluatur. Vnde quia in de-
scriptione sphaera circa diametrum semicirculi factus est motus
ipsum sphaera; propterea eam solum Euclides axem sphaera
nominavit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli
trianguli manente uno latere eorum, quæ
circa rectum angulum, circumductum trian-
gulum in se ipsum rursus reuoluitur, un-
de moueri ceperat, circumassumpta fi-
gura.

ATQVE si quiescens recta linea æqua-
lis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum
conuertitur, Orthogonius erit conus: Si
uero minor, Amblygonius: Si uero ma-
ior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulum ABC , circa latus quie-
scens AB , quod est circum rectum angulum, circumducatur,
donec integram reuolutionē expleat, describetur solida quæda
figura, qua continetur

duabus superfi-
ciebus, circulari
una, ac plana, quæ
 BC , latus alterum



circa angulum rectum, suo motu describit; & curva alia, eaq;
conuexa, quam latus AC , recto angulo oppositum delineat.
Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campatus autem
pyramidem rotundam appellat.

Q U O D si latus quiescens AB , aequale fuerit circumducto BC , ut in prima figura, dicitur conus descriptus orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope uerticem A , rectus est. Cum enim

5. primi



latus AB , BC , ponatur equalis; erunt et anguli BAC , BCA , aequales; qui cum aequivalent uni

recto, eo quod ABC , sit rectus; erit BAC , semirectus. Eodemque modo angulus BAD , ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD , rectus erit. Si vero quiescens latus AB , minus fuerit circumducto BC , ut in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad uerticem A , obtusus existit. Cum enim BC , latus latere AB , sit maior; erit angulus BAC , maior angulo BCA . Quare cum hi duo aequivalent uni recto, propterea quod angulus ABC , ponatur rectus, erit BAC , semirectus maior. Similiter BAD , maior erit semirecto; atque adeo totus CAD , recto maior erit. Si denique quiescens latus AB , maius fuerit circumducto BC , ut in tertia figura, appellabitur conus descriptus oxygenius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad uerticem A , acutus est. Cum

8. primi

in latus AB , maius sit latere BC , erit et angulus BCA , angulo BAC , maior. Quapropter cum hi duo uni recto aequivalent, eo quod angulus ABC , rectus ponatur, erit BCA , semirectus maior, ideoque reliquus BAC , semirectus minor. Non secus ostendetur angulus BAD , minor esse semirecto. Igitur totus CAD , recto erit minor.

8. primi

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circum quam triangulum uertitur.

¶ In quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB .

XX.

BASIS uero conī est circulus, qui a circumducta lineā recta describitur.

NIMIRUM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est *B C.* in superioribus conis. Ita quoque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definitis conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basin rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem conī descriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat, propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, ut ibi docebimus. Ita igitur scribis Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in utramque partem producat; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, a quo capit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiibus ad uerticem inter se se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, uoco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem uoco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter uerticē,

& cir-

& circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM conij, punctum, quod & superficiem conicæ vertex est.

AXEM, rectam lineam, quæ a vertice ad circuli centrum perducitur.

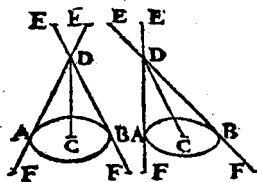
BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem uoco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS uero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HAEC autem omnia ita explicat Eutocias in commentarijs, quas in Apollonium scripsit.

SIT circulus AB , cuius centrum C , & punctum aliquod sublime D , iunctaque DB , in infinitum ex utraque parte producat ad puncta E, F . Si igitur recta linea DB , feratur eoque in circuli AB , circumferentia, quousque punctum B , rursus in eum locum restitatur, a quo capis moueri: describet superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D , punctum



se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB , ipsam describens in infinitum producit. Verticem superficiei dicis punctum D . Axem, rectam DC . Conum vero appellat figuram contentam circulo AB , & ea superficie, quam DB sola describit. Coni verticem, punctum D . Axem DC . Basim AB , circulum. Quod si DC , ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB , ipsam describens in infinitum producit. Verticem superficiei dicis punctum D . Axem, rectam DC . Conum vero appellat figuram contentam circulo AB , & ea superficie, quam DB sola describit. Coni verticem, punctum D . Axem DC . Basim AB , circulum. Quod si DC , ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

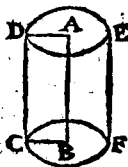
XXI.

CYLINDRVS est, quando rectan

guli

guli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus reuoluitur, unde cæperat moueri, circumassumpta figura.

VELUT si rectangulum parallelogrammum $ABCD$, circa latus quiescens AB , circumuoluatur, donec integram expleas reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficieribus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD , BC , describunt; et altera curua, eaque conuexa, quam latus CD , describit, inflat columnæ alicuius rotunda. Vnde factum est, ut Campanus cylindrum appellaueris columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB , in superiori figura, dicitur axis cylindri.

XXIII.

BASES uero cylindri sunt circuli a duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

QVALES sunt circuli a lateribus AD , BC , oppositis descripti.

E V C L I D E S *vero solum cylindrum rectū hoc loco definit, cuius uidelicet axis rectus est ad utramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fore theorema, ex alijs Geometris finis proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstravit, uisum est prius ex Serena Ansinensi definire cylindrum uniuersæ, ut complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribis Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.*

S I duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eū locum restituatur, a quo moueri cepit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies uocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describens in infinitum producta.

C Y L I N D R U S est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

C Y L I N D R I bases sunt circuli ipsi.

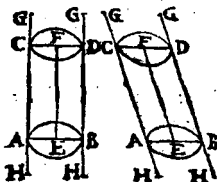
A X I S, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

L A T U S autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases utrasque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

C Y L I N D R O R U M, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

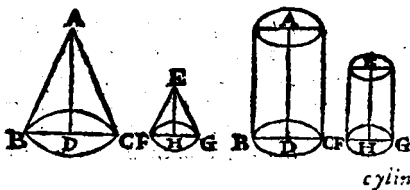
SINT duo circuli aequales, & aequidistantes AB, CD , quorum centra E, F , & diametri aequidistantes quoque AB, CD : Iunctaque recta AC , in infinitum ex utraque parte producat ad puncta G, H . Si igitur diametri AB, CD , circa centra E, F , in planis circulorum semper aequidistantes, una cum recta AC , circumducantur, donec ad eum locum restituantur, unde moveri coeperunt, describetur a linea AC , superficies quaedam rotunda, quam *Sevener* cylindricam vocat; qua & augetur in infinitum, cum recta AC , ipsam describens in infinitum produciatur. Cylindrum vero appellat figuram $ABDC$, circulis AB, CD , & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC , describit, comprehensam. Bases cylindri dicis esse circulos AB, CD . Axem, rectam EF , quae circulorum centra coniungit. Latius cylindri, rectam AC . Quod si axis EF , perpendicularis fueris ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, *Scalenum*.



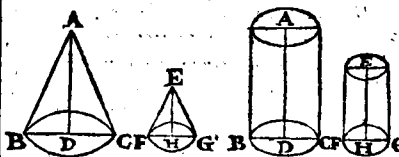
XXIII.

SIMILES conici & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, et basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos &



cylindros secundū duas dimensiones esse similes, longitudinē scilicet ac latitudinē; Axes uero eosdē secundū profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni



ABC, EEG ; Itē duo cylindri; in conis autem axes AD, EH , & basium diametri BC, FG ; simili

ter. & in cylindris: Itaque si fuerit, ut axis AD , ad axem EH , ita BC , diameter basis ad FG , diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se; quia uidelicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, ut diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt; Vel etiam, quia triangula ADB, EHF , ex quorum revolutione descripti sunt coni, nec non rectangula AB, EF , quorum conuersiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit ut AD , ad EH , ita BC , ad FG ; Sit autem ut BC , ad FG , ita dimidia BD , ad dimidiam FH ; erit quoque ut AD , ad EH , ita DB , ad HF ; & permutando ut AD , ad DB , ita EH , ad HF . Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera circum aequales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula similia inter se erunt, & rectangula: Triangula quidem, propterea quod triangula unū angulum uniangulo habentia aequalem, & circum aequales angulos latera proportionalia, equiangula sunt; ideoque latera omnia circa angulos aequales habeant proportionalia, atque adeo inter se similia existant: Rectangula uero, eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB , sint aequalia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habeant.

Quod si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de re-
Etis enim duntaxat Euclides uerba fecit) dicentur & tam de-
mum similes, quando eorum axes, & diametri basium aequant
proportionales, anguliue inclinationum, quos axes efficiunt,
equales: qui quidem anguli accipiendi sunt, ut in definitio-
ne quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter &
cylindri

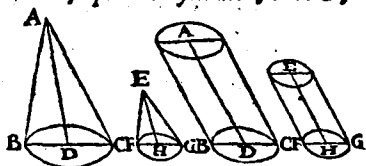
15. quinti

6. sexti.

4. sexti.

34. primi.

cylindri ABC , EFG : In conis autem axes sint AD , EH , & basium diametri BC , FG ; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, ut AD , ad EH , ita BC , ad FG , extiterintque anguli inclinationū ADB , EHF , tam in conis, quam in cylindris, aequales inter se; dicētur & conī iter se, & cylindri quoq; inter se se similes; quoniā nimirū hac ratione & tres eorū dimensiones sunt proportionales, ut supra diximas, & rursus tam triangula ADB , EHF , quam rectangula AB , EF , quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB , EHF , ponantur aequales, licet non sint recti.



XXV.

$CVBVS$ est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

$TETRAE DRVM$ est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

$OCTAE DRVM$ est figura solida sub octo triāgulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub uiginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

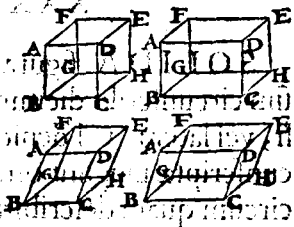
H A B C sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, eo quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, ut ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ simplicia a philosophis nuncupantur, nempe Cælum, Ignem, Aerem, Aquam, atq; Terram. quinque dictis corporibus assimilet, ut in sphaera Ioannis a sacro bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propof. 11. Tetraedri vero propof. 13. Octaedri deinde propof. 14. Dodecaedri autem propof. 17. Icosaedri denique propof. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, ut ueram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxer admodum faciles, quibus ea quilibet secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque uero aliud corpus regulare præter quinque prædicta dari potest, ut demonstrabimus ad finem lib. 13.

Q V O N I A M uero in hoc lib. 11. frequens sit mentio *Parallelepipedum*, & in lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium, necessarium esse diximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit *Parallelepipedum*, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDYM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso parallelæ sunt, contenta.

VELUT solida comprehensa sex quadrilateris figuris $ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG$, quarum oppositæ AC, FH ; Item DF, CG ; Item AG, DH , sunt parallelæ, nominantur parallelepipedum, quasi parallelis planis comprehensa. quæ quidem plana parallelæ oppositæ, sunt & equalia, & similia, & parallelogramma, ut demonstrabitur propof. 24. huius lib.



SUNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicitur parallelepipedum illud, cubus, respondetq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamvis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamvis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus: Si deniq; sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamvis duo sint rectangula & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, equalia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Ceterum quodcumq; parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, ut ex definitione prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

NON est necesse, ut anguli interioris figuræ constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior; Sed satis est, ut omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita ut nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figuræ exterioris.

VERUM duæ hæc postrema definitiones planius percipiuntur ex lib. 13. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusq; mutuis corporum regularium copiose agitur.

I.

THEOR. I. PROPOS. I.

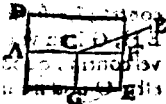
RECTAE linæ pars quædam non est in su-

in subiecto plano, quedam vero in sublimi.

Sic enim, si fieri potest, rectæ lineæ AB , pars quidem AC , in subiecto plano DE , pars vero CB , in sublimi, ita ut omnia puncta partium A & C , in plano DE , iacent, puncta uero omnia partium CB , supra planum DE , existant, uicissim. Et igitur in plano DE , ipsi A & C , rectæ lineæ continuæ quedam recta linea in directum posita, nempe CF . Quamobrem duæ rectæ AB , AF commune habent segmentum AC , quod est absurdum, ut in pronunciato 13. lib. 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quedam non est in subiecto plano, quedam uero in sublimi. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM

$HABET$ est communis demonstratio interpretum. Sed forte dicit aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe ut ostendatur, rectæ AC , esse aliquam rectam in plano DE , in directum, & continuum positam. Qui enim concedit, rectæ AB , partem quidem AC , esse in plano DE , partem uero CB , in sublimi, utique negabit, rectæ AC , in plano DE , dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB , in rectam & continuum positam esse facietur ipsi AC . Verum tamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem ulterius produci in rectam & continuum, cum plana superficies sit illa, quæ ex equali suas interiacet lineas, hoc est, quæ recte, & equaliter semper extenditur, ut & linea recta. Quamobrem si AC , in plano DE , producatursque ad F , erit CF , recta rectæ AC , in continuum & directum posita. Verum demonstramus: iam id ipsum Geometrice, in plano uidelicet DE , ipsi AC , dari posse aliam rectam, quæ cum ipsa unam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat, AB , esse quoque rectam, eiusque partem AC , in plano DE , partem uero CB , in sublimi esse positam. Ducatur, in plano DE , ipsi AC , perpendicularis CG , & in



14. primi.

in eodem plano ipse CG , perpendicularis CF . Dico CF , esse ipse AC , posita in continuum & rectum. Cum enim AC , & FC , in eodem plano DE , tum recta CG , duorum rectos angulos constituant ACG , FCG , ex constructione; erunt AC , & FC , in directum & continuum posita. Quamobrem atque si quis addat, AB , esse rectam, cuius quidem pars AF , in plano DE , subiecta, pars autem CB , in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE , erit alia recta, nempe CF , quae cum AC , unam rectam constituat lineam; atque adeo duo rectae AB , AF , segmentum commune habebunt AC . Quod est absurdum.

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duae rectae lineae se mutuo secant, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.

Rectae lineae AB , CD , se mutuo secant in E , & in E B , ED ; sumptis punctis F , & G , vicunque, ducatur rectae FG , ut fiat triangulum EFG . Dico triangulum EFG , in vno esse plano; Item rectas AB , CD , in vno quoque plano exister.



Si enim trianguli EFG , pars quaedam, nimirum EHI , in plano vno existat, & pars quaedam, nempe reliqua FHI , in sublimi, vel

contra; Existem quoque rectarum E F , G F , partes quidem E H , G I , in vno plano, partes vero H F , I F , in sublimi, vel contra. quod fieri non posse, iam supra demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem E F I K , in vno plano credatur esse; pars autem G I K , in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum E G , F G , partes quidem E K , F I , in vno plano, partes vero K G , I G , in sublimi, vel contra. Si denique eiusdem trianguli pars quidem F H K G , in vno concedatur esse plano, pars vero E H K , in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum F E , G E , partes quidem F H , G K , in vno plano, partes autem H E , K E ,

1. undeci.

K^{is}, in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, ut est demonstratum. Quare triangulum EFG, in uno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

Q^UIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG, in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Et sunt propterea rectæ AB, CD, in uno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demonstravimus. Quo circa si duæ rectæ lineæ se mutuo secant, in uno sunt plano. Atque triangulum omne in uno est plano. Quod erat demonstrandum.

1. undec.

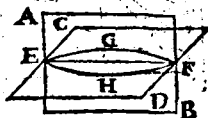
1. undec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI duo plana se mutuo secant, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB, CD, sitq; communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EG, & in plano CD, recta EH. Rectæ igitur EG, EH, cum eisdem habeant terminos B, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, ut in



12. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secant, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

A L I T E R. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in utroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EG, concludent rursus duæ rectæ EF, EG, superficiem, cum eisdem habeant terminos B, & F. Si deniq; recta EF, in altero tantum plano

R 3 esse

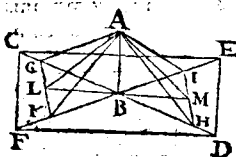
esse credatur, tunc si in altero ducatur recta $E G F$; includent iterum duæ rectæ $E F$, $E G F$; superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta $E F$, in utroque plano $A B$, $C D$; atque adeo communis eorum sectio est.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea $A B$, insistat duabus rectis $C D$, $E F$, ad rectos angulos in communi earum sectione B . Dico rectam $A B$, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secant in B ; erunt ipsæ in uno plano, quod sit $C E D F$. Sumantur inter se æquales rectæ



$B G$, $B H$; Item rectæ $B I$, $B K$; ducanturq; rectæ $G K$, $I H$; & in eodem plano per B , ducatur recta $L M$, secans rectas $G K$, $I H$, in punctis L , & M . Demittantur quoque ex A , puncto in sublimi ad idem planum rectæ $A G$, $A L$, $A K$, $A H$, $A M$, $A I$. Quotiam igitur latera $B G$, $B K$, trianguli $B G K$, lateribus $B H$, $B I$, trianguli $B H I$, ex constructione sunt æqualia; & anguli quoque ipsis contenti $G B K$, $H B I$, cum sint ad verticem B , oppositi, æquales: Erunt bases $G K$, $I H$, inter se, & anguli $B K G$, $B I H$, inter se quoque æquales.

RURSUS cum anguli $K B L$, $I B M$, ad verticem B , oppositi sint æquales, erunt duo anguli $K B L$, $B K L$, trianguli $B K L$, duobus angulis $I B M$, $B I M$, trianguli $B I M$, æquales; Sunt autem & latera $B K$, $B I$, quibus adjacent, æqualia; ex constructione. Igitur & reliqua latera $A L$, $L B$, reliquis lateribus $I M$, $M B$, æqualia erunt.

PRÆTEREA cum latera $A B$, $B G$, trianguli $A B G$, æqualia

2. undec.

15. primi.

4. primi.

15. primi.

16. primi.

æqualia sint lateribus AB, BH , trianguli ABH , ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH , æquales, nempe recti, ex hypothesi; erunt & bases AG, AH , æquales. Simili argumento æquales erunt rectaliter AI, AK . 4. *primi.*

Amplius quia latera AI, IH , trianguli AIH , lateribus AK, KG , trianguli AKG , æqualia sunt; & basis AH , basi AG , ex hactenus demonstratis; erunt etiam anguli AIH, AKG , dictis lateribus comprehensi, æquales. 5. *primi.*

Itaque cum latera AK, KL , trianguli AKL , æqualia sint lateribus AI, IM , trianguli AIM ; & anguli ipsis contenti AKL, AIM , æquales etiam, ut hactenus demonstravimus; erunt quoque bases AL, AM , æquales. 4. *primi.*

Quoniam denique latera AB, BL , trianguli ABL , æqualia sunt lateribus AB, BM , trianguli ABM ; & basis AL , basi AM , ex demonstratis; erunt quoque anguli ABL, ABM , dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. Quare recta AB , rectos angulos efficit cum recta LM , quæ in plano subiecto ipsam tangit in B : Eademque ratione ostendetur, rectam AB , cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangunt in B , angulos rectos constituere; Ac proinde recta AB , plano $CEDF$, quod per rectas CD, EF , ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit. Quod demonstrandum erat. 8. *primi.*

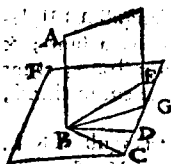
THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

2. undec. **IN** SI STA $\star$ recta linea A B, tribus rectis lineis B C, B D, B E, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas B C, B D, B E, in uno plano esse. Cum enim quilibet duæ in vno sint

2. undec.



3. undec.

4. undec.

plano, propterea quod productæ ad partes E, se mutuo secant in B; sint B C, B D, in plano F C; Et si fieri potest, recta B E, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. Quoniam vero duæ rectæ A B, B E, in vno sunt plano, cum se mutuo secant in B; Sint ambæ in plano A E. Et quia plana F C, A E, sibi mutuo occurrunt in B; necessario productæ se mutuo secabunt. Sit ergo eorum communis sectio recta B G. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis B C, B D, erit propterea & plano F C, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ B G, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli A B E, A B G, existentes in plano A G, per rectas A B, B E, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in uno plano F C, existentibus; non erit B E, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

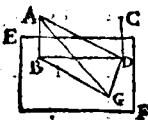
SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

S I N T duæ rectæ lineæ A B, C D, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta B D, in plano E F, erunt anguli A B D, C D B, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodẽ plano E F, ducatur D G, ad B D, perpendicularis, ponanturq; æquales A B, D G. Connectantur deinde rectæ B G, G A, A D. Quoniam igitur latera A B, B' D, trianguli A B D, æqua-

lia

lia sunt lateribus $G D, D B$, trianguli $G D B$, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti $A B D, G D B$, æquales, nempe recti: Erunt bases æquales $A D, G B$. Rursus quia latera $A B, B G$, trianguli $A B G$, æqualia sunt lateribus $G D, D A$, trianguli $G D A$; Est autem & basis communis $A G$; Erunt anguli $A B G, G D A$, æquales: Est autem $A B G$, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & $G D A$, rectus erit. Quoniam vero, ex eadem defin. angulus quoque $G D C$, rectus est; erit recta $G D$, tribus rectis $D B, D A, D C$, ad angulos rectos. Quare rectæ $D B, D A, D C$, in uno erunt plano: Est autem $A B$, in eodem plano, in quo $D B, D A$: Recta igitur $C D$, in eodem erit cum $A B$, plano: Quocirca cum anguli intercepti $A B D, C D B$, sint recti, erunt rectæ $A B, C D$, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eodem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

4. primi.



3. primi.

5. undec.

2. undec.

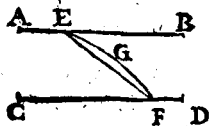
28. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa lineæ, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis $A B, C D$, sumantur utcumque duo puncta $E, & F$, quæ recta connectantur $E F$. Dico rectam $E F$, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ $A B, C D$. Si enim recta $E F$, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra: faciet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta $E, & F$, sitq; communis sectio horum planorum $E G F$, quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ $E F, E G F$, cum habeant eisdem terminos $E, & F$, superficiem claudent: Quod est absurdum. Non ergo extra planum



3. undec.

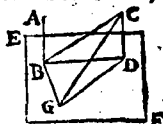
planum parallelarum AB, CD , erit recta EF . Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodẽ est cum parallelis plano. Quod erat demonstradũ.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ AB, CD ; sitque CD , plano EF , ad angulos rectos. Dico & AB , eidem plano EF , esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD , in plano EF , erit per def. 3. huius lib. angulus CDB , rectus: Sunt autem duo CDB, ABD , duobus rectis æquales. Igitur & ABD , rectus erit. Iam in plano EF , ducatur BG , perpendicularis ad BD ; ponanturque æquales BG, CD . Coniungantur deinde rectæ DG, GC, CB . Quoniam igitur latera CD, DB , trian-



guli CDB , æqualia sunt lateribus GB, BD , trianguli GBD , ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti CDB, GBD , æquales, nimirum recti; Erunt bases CB, GD , æquales. Rursus quia latera CD, DG , trianguli CDG , æqualia sunt lateribus GB, BC , trianguli GBG ; & basis est communis CG ; Erunt anguli CDG, GBC , dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG , rectus, ex def. 3. huius lib. Igitur & GBC , rectus erit. Quare recta GB , duabus rectis BD, BC , se mutuo tangentibus in B , ad rectos angulos existit; ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC , ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB , propterea quod rectæ BD, BC , in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD ; cum puncta B, C, D , existant in parallelis AB, CD . Igitur & GB , recta rectæ BA , ad rectos erit angulos ex def. 3. huius lib.

Quare cum

29. primi.

4. septimi.

8. primi.

4. undec.

7. undec.

re rum A B, recta sit ad rectas B G, B D, erit quoque A B, recta ad planum per B G, B D, ductum, hoc est, ad planum E F. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

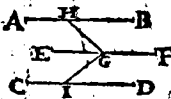
4. undec.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QV AE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

S I N T rectæ lineæ A B, C D, ipsæ E F, parallelæ; non sint autem in eodem cum E F, plano. Dico A B, C D, parallelas quoque esse. Nam a quolibet puncto G, rectæ E F, ad ipsam E F, ducantur duæ perpendiculares; G H, quidem in plano parallelarum A B, E F; at G I, in plano parallelarum C D, E F.



E F. Quoniam igitur E G, recta est ad duas rectas G H, G I, se tangentibus mutuo in G; erit recta quoque ad planum per ipsas G H, G I, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ A B, E F; & E F, sit recta ad planum per G H, G I, ductum; erit quoque A B, ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ C D, E F; Sit autem E F, recta ad planum per G H, G I, ductum; erit etiam C D, recta ad idem planum; Atque proinde rectæ A B, C D, cum rectæ sint ad idem planum per G H, G I, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

4. undec.

8. undec.

8. undec.

6. undec.

SCHOLIUM.

D A T A opera Euclidis voluit, duas rectas A B, C D, non esse in eodẽ plano cū recta E F, cui sunt parallelæ. Nā si foret in eodẽ plano cū ipsa E F, essent A B, C D, inter se parallelæ.

ex 30.

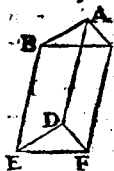
ex 30. propos. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB, AC , se tangentes in A , parallelæ rectis DE, DF , se tangentibus in D ; non sint autem AB, AC , in eodem plano, in quo DE, DF . Dico angulos BAC, EDF , ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim AB, DE , inter se æquales, & AC, DF , inter se; ducanturq; rectæ BC, EF, BE, AD, CF . Quoniam igitur AB, DE , parallelæ sunt & æquales; erunt quoque & BE, AD , parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD . Quare cū BE, CF , parallelæ & æquales sint eidem AD ; erunt etiā BE, CF , inter se parallelæ, & æquales: Ac, propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF . Quia ergo latera AB, AC , trianguli ABC , æqualia sunt laterib; DE, DF , trianguli DEF , ex cōstructione; & basis BC , basi EF , æqualis, ut modo demonstrauimus; Erunt & anguli BAC, EDF , dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes; &c. Quod erat ostendendum.



33. primi.

9. undec.

33. primi.

8. primi.

SCHEMATA.

CONCLUSIO huius theorematidis vera etiam est, quā do priores duæ lineæ in eodem sunt plano cū duabus posterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF , in eodem plano, sitq; AB , ipsi DE , & AC , ipsi DF , parallelæ. Dico angulos BAC, EDF , esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE , & AC, DF ; ducanturq; rectæ BC, EF , quæ aut

in

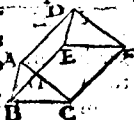
in una recta linea erunt confistite, aut non. Sint prius in una recta BF . Quoniam igitur parallelae sunt AB, DE ; aequales erunt anguli ABC, DEF ; internus & externus. Similiter aequales erunt anguli ACB, DFE ; Sunt enim AC, DF , parallelae. Quare duo anguli ABC, ACB , trianguli ABC , aequales sunt duobus angulis DEF, DFE , trianguli DEF . Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF , aequales erunt, Quod est propositum.



29. primi.

32. primi.

NON sint tam BC, EF , in una recta linea confistite. Ductis rectis AD, BE, CF , cum AB, DE , sint parallelae & aequales; erunt & AD, BE , parallelae & aequales. Eidem ratione AD, CF , parallelae erunt & aequales; eo quod AC, DF , parallelae ponantur & aequales. Quare & BE, CF , eide AD , parallelae existentes & aequales, inter se parallelae erunt & aequales. Ac proinde parallelae & aequales quoque erunt BC, EF . Itaque cum duo latera AB, AC , trianguli ABC , & aequalia sint lateribus DE, DF , trianguli DEF ; & bases BC, EF fuerint anguli BAC, EDF , contenti dictis lateribus, aequales. Quod est propositum.



33. primi.

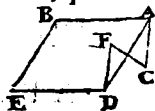
30. primi.

33. primi.

8. primi.

C A E T E R U M ut conclusio huius theorematiss recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (sive omnes sint in eodem plano, sive non;) ut tres rectae AD, BE, CF , nulla ratione se mutuo secant; ut ex prima, & ultima figura apparet. Nam alias conclusio vera non erit.

S V N T enim rectae AB, AC , rectis DE, DF , parallelae in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF , quos comprehendunt, non sunt aequales, cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo evenit, quod AD, CF , se mutuo secant.



Vnde quatinus AC, DF , sint parallelae & aequales, non tamen propterea AD, CF , quae eas coniungunt, parallelae sunt & aequales, propterea quod eas non coniungunt ad easdem partes, ut vult propof. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematiss locum non habet, deficiente hac condicione; quae tamen in superioribus figuris servatur.

P R O.

11.

PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

12. primi.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta ut-
cunque D E; ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F:



12. primi.

12. primi.

31. primi.

4. undec.

8. undec.

2. undec.

4. undec.

Quæ si fuerit perpendicularis ad pla-
num B C, factum erit, quod pro-
ponitur: Si uero non fuerit A F, ad
planum B C, perpendicularis, ducatur
in plano B C, per F, ad D E, per

perpendicularis G H; ad quam ex A, perpendicularis demittatur
A I. Dico A I, esse perpendicularem ad planum subiec-
tum B C. Ducta enim in plano B C, per I, ipsi D E, paral-
lela K L; cum D F, ad rectos angulos sit duabus F A, F H,
ex constructione, ac proinde recta ad planum per F A, F H,
ductum; erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H,
ductum recta. Quoniam uero A I, in eodem est cum rectis
F A, F H, plano, tangitq; rectam K I, in I; erit per de-
finitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atq; adeo
A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. Igitur A I, ad
planum per K I, I F, ductum, hoc est, ad planum B C, re-
cta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum pla-
num perpendicularem rectam lineam duximus. Quod fa-
ciendum erat.

12.

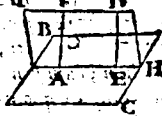
PROBL. 2. PROPOS. 12.

DATO plano, a puncto, quod in illo
datum est, ad rectos angulos rectam lineam
excitare.

12. undec.

SIT a dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendi-
cularis ad datum planum B C. Ex quouis puncto D, in su-
blimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E: quæ
si ceci-

si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E, extensa recta per E, & A, ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, BA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datum BC. Cum enim DE, AF, parallele sint, & DE, recta ad planum BC, ex constructione, erit quoque AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat



31. primi.

3. undec.

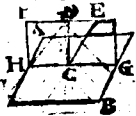
THEOR. II. PROPOS. 13.

13.

41

DATO plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

Si a dato planum AB. Dico a dato eius puncto C, ad easdem partes, non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB; & per CD, CE, quæ in uno eodemque plano sunt, ducatur planum EG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB, erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.



2. undec.

6. undec.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB, erunt ipsæ inter se parallele, cum tamē conveniant in puncto C. Quod est absurdum.

SCHOLIUM.

EODEM modo, a puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum BC,

BC,

2. undec.

B C, si fieri possit, dua perpendicularas A D, A E, Ducantur per A D, A E, quæ in uno plano sunt, planum B C, secans planum B C, per rectam G H. Cum igitur A D, A E, rectæ sint ad planum B C, erunt per def. 3. huius lib. duo anguli A D H, A E D, recti, interni in triangulo A D E. Quod est absurdum; cum sint duobus rectis minores, quilibet duo anguli in triangulo quoniam assumpti.



17. primi.

Si A D, A E, rectæ sint ad planum B C, ipsa erunt inter se parallelæ, cum tamen conveniant in puncto A. Quod est absurdum.

6. undec.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallelæ.

3. undec.

Si recta A B, ad plana C D, E F, recta: Dico parallelæ esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallelæ, producta inter se conveniant. Conveniant ad partes C, E; & faciant communem sectionem rectam lineam G H: In qua sumpto puncto utroque I, ducantur rectæ I A, I B, in planis G C D, G E F. Quia igitur A B, recta ponitur ad plana G C D, G E F, erunt per def. 3. huius lib. duo anguli A B I, I B A, recti, in triangulo A B I.

Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana C D, E F, producta nunquam inter se conveniunt. Parallelæ ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadẽ recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



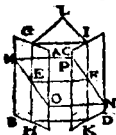
17. primi.

S C H O L I O N.

FACILE etiã demonstrari poterit cõversum huius, videlicet. Si fuerint duo plana parallelæ, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

S I N T

SINT duo plana parallela AB, CD , ad quorum alterum AB , recta sit linea recta EF . Dico EF , rectam quoque esse ad planum reliquum CD . Secet enim planum aliquod, nempe GK , plana AB, CD , per lineam rectam EF , incidens, faciatque communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK : eruntque anguli GEF, HEF , recti, per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE . (Si enim alter eorum, nempe IFE , dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE , duobus rectis minores. Quare recta EG, FI , ad partes G, I , conueniens, nimirum in puncto L ; atque adeo & plana AB, CD , in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L ; cum tota recta HGL , sit in uno plano, nempe in AB , producta; Item tota recta KIL , in vno quoque plano, nimirum in CD , protracta. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE .) Eodem modo si aliud planum videlicet MN , eadem plana secet per EF , faciens alias rectas, communes sectiones cum ipsis, MO, PN ; erunt anguli PFE, NFE , recti. Itaque cum EF , sit recta ad duas rectas IK, PN , recta quoque erit EF , ad planum CD , per ipsas ductum. Quod est propositum.



1. undec.

4. undec.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelae, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illas ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC , se tangentes in A , duabus rectis lineis DE, DF , se tangentibus in D , existentibusque in alio cum illis plano parallelae. Dico & plana BC, EF , per ipsas ducta, esse parallela: Ex A , enim deducatur ad planum EF , perpendicularis AG , occurrens plano EF , in puncto G . Deinde in plano EF , per G , ducantur GH, GI ,

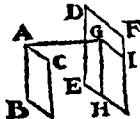
11. undec.

31. primi.

S ipsis

9. undec.
29. primi.

ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE: erunt & AB, GH, inter se parallelæ: Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit



4. undec.

14. undec.

& angulus BAG. Simili argumento concludetur, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC; recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. Igitur parallelæ sunt plana BC, DE. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N .

Ex hoc theoremate non difficile erit problema subsequens. Videlicet.

D A T O plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

31. primi



15. undec.

D A T U M planum sit AB, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vicunque duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, agatur CE, ipsi DB, parallela; Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CF, CE, ductum, parallelum esse plano dato AB: Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF se tangensibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallela sint; parallela erant plana AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.

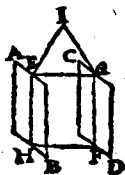
16.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam secentur

secentur : communes illorum sectiones sunt parallelæ .

SECENTUR plana AB, CD , plano EF , per rectas EH, GF . Dico communes sectiones eorum EH, GF , esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient. Cõueniant igitur in puncto I . Quia ergo tota recta HEI , in uno est plano, nimirum in $A B$, producta; Item tota recta FGI , in uno quoque est plano, uidelicet in CD , producta; conuenient etiã plana $A B, CD$, producta ad I . Quod est absurdum, cū ponantur parallelæ. Sunt igitur rectæ EH, GF , parallelæ. Quare si duo plana parallelæ plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandũ.



I. undec.

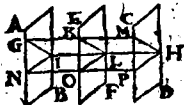
SCHOLION.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum factæ ab alio plano secante sint parallelæ, ut hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum cõmunes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallelæ sunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantum sunt parallelæ, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1. nimirum.

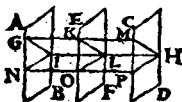
QUAE eidem plano parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT duo plana AB, CD , plano EF , parallelæ. Dico & $A B, CD$, parallelæ esse. Secetur enim oĩa tria plana plano GH , sintq; cõmunes eorũ sectiones rectæ GI, KI, MH . Secetur rursus alio plano NH , sintq; communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH , hac tamen lege, ut duo plana secantia GH, NH ,



S 2 fe

30. primi



P H. Itaque cum I G, I N, se mutuo tangentes in I, parallela sint rectis H M, H P, se tangentes in H, existentibusq; in alio plano; erunt plana AB, CD, per ipsas ducta, parallela. Quod est propositum.

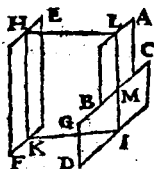
15. mndec.

linea recta perpendicularis, occurrens plano AB , in puncto H , & plano CD , in puncto I . Quoniam igitur linea HG , recta est ad planum EF , recta quoque erit ad planum AB , scilicet parallelum, per ea, quae in scholio propo-

14. under.

14. huius lib. demonstramus. Eadem ratione GI , recta eris ad planum CD . Quamobrem cum recta HI , sit recta ad plana AB, CD ; parallela inter se erunt plana AB, CD . Quod est propositum.

QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficiunt planum, quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri recte sunt parallele, si conueniant, vnâ rectam constituunt lineam, veluti ad prop. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD ,



piano EF, parallela, conueniantque produ-
cta secundum rectam CG. Dico plana
AB, CD. vnum planum constituere. Se-
cet enim planum quodpiam HI, omnia
tria plana per lineas rectas HK, LM,
MI. Quoniam igitur parallela sunt pla-
na AB, EF; erunt & communes sectio-

nes $L M, H K$, parallela. Eadem ratione parallela erunt $I M, H K$. Quamobrem cum recta $L M, I M$, parallela sint ipsi $H K$, existantque in eodem plano secantē $H I$, & conveniant in M ; ipse erunt in rectum & continuum posita, per ea, quae ad 30. propos. 1. lib. offendimus. Ac proinde plana $A B, C D$,

16. under.

30. *propos. 1. lib. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD;*
vnum

unum planum efficiens ; propterea quod recta LI , in uno iaceat plano . Quod est propositum .

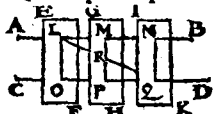
ITAQUE duo plana , quæ parallela sint alteri plano , vel inter se parallela erunt , vel certe , si producta conveniam , unum planum efficiens .

THEOR. 15. PROPOS. 17.

17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur ; In easdem rationes secabuntur .

RECTÆ lineæ AB , CD , (siue eæ parallelæ sint , siue non , existentes tamen in eodem plano ; siue in transversum positæ , in diuersis existentes planis) secantur planis parallelis EF , GH , IK , in punctis L , M , N , O , P , Q . Dico eas secari proportionaliter , hoc est , segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia , ut quidem LM , ad MN , ita esse OP , ad PQ . Ducantur enim rectæ LO , NQ , in planis EF , IK , & coniungatur recta LQ , occurrens plano GH , in R , puncto , a quo ad puncta M , P , rectæ ducantur RM , RP , in eodem plano GH . Eritque triangulum LNQ , in uno plano : similiter triangulum LOQ , in uno plano . Quoniam uero plana parallela GH , IK , secantur plano trianguli LNQ , erunt communes sectiones eorum MR , NQ , parallelæ . Pari ratione parallelæ erunt RP , LO . Quam ob rem erit ut LR , ad RQ , ita LM , ad MN ; Item ut LR , ad RQ , ita OP , ad PQ ; Ac proinde ut LM , ad MN , ita OP , ad PQ . Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur , &c. Quod erat demonstrandum .



2. undec.

16. undec.

2. sexti.

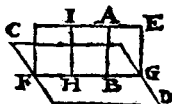
THEOR. 16. PROPOS. 18.

18.

SI recta linea plano cuiuspiam ad rectos sit angulos : Et omnia , quæ per ipsam , pla-

na eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD,



per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, utcumque in recta FG, ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur anguli ABH, IHB, duobus rectis sunt æqua-

les: Est autem ABH, rectus, per 3. defin huius lib. erit & angulus IHB, rectus. Rursus quia AB, ponitur recta ad planum CD; erit quoque IH, ad idem planum CD, recta. Eadem ratione erunt omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, ad planum CD, rectæ: Quæ cum ducantur in plano EF, ad communem sectionem FG, perpendiculares; rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius lib. Similique argumento ostenduntur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuiuspiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

31. primi

29. primi

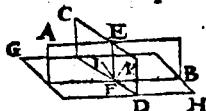
8. undec.

19.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta.



Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, recta quoque erit ad planum GH,

4. undec.

GH, quod per ipsas ducitur. Si uero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum; Sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum CD, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano CD, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

11. primi

13. undec.

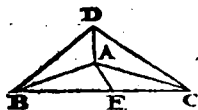
THEOR. 18. PROPOS. 20.

20.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet utut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATUR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB.

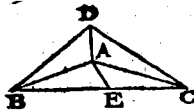
Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si uero



duo tantum sint æquales, & tertius utrovis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si unus, uidelicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum

S 4 cum

cum maximo illo BAC , reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC , maiores quoque esse angulos duos BAD , DAC . In plano enim per AB, AC , ducto



fiat angulus BAE , angulo BAD , æqualis; & recta AE , æqualis rectæ AD . Deinde in eodem plano per E , extendatur recta BC , secans rectas AB, AC , in B , & C ;

coniunganturque rectæ BD, DC . Quoniam igitur latera AD, AB trianguli BAE , æqualia sunt lateribus AE, AB , trianguli BAE ; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; erunt bases BD, BE , æquales.

Quia uero latera DB, DC , maiora sunt latere BC ; si demantur æquales rectæ BD, BE , relinquetur recta CD , maior quam CE . Cum igitur latera AD, AC , trianguli DAC , æqualia sint lateribus AE, AC , trianguli EAC ; & basis CD , maior basi CE ; erit angulus CAD , angulo CAE , maior.

Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE , erunt duo anguli CAD, BAD , maiores duobus angulis CAE, BAE , hoc est, toto angulo BAC , qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde quilibet duo multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendū.

23. primi.

4. primi.
20. primi.

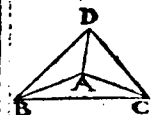
25. primi.

21.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis, continetur.

Si r angulus solidus A , contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB . Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis



BC, CD, DB , erunt constituti tres anguli solidi B, C, D , quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B , sub CBA, ABD, DBC . At C , sub BCA, ACD, DCB ; D , uero sub CDA, ADB, BDC .

B D C. Quoniam uero duo anguli C B A, A B D, maiores sunt angulo C B D; similiterque duo anguli B C A, A C D, maiores angulo B C D; & duo anguli C D A, A D B, maiores angulo C D B: erunt sex anguli C B A, A B D, B C A, A C D, C D A, A D B, tribus angulis C B D, B C D, C D B, maiores: Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi una cum tribus ad A, æquales sint sex rectis, propter triangula tria B A C, C A D, D A B, (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) Si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

20. vndec.

32. primi.

32. primi.

SCHOLIUM.

Q U O N I A M hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituent: idcirco nos eam ad omnes angulos solidos exiendemus hoc modo.

S I T angulus solidus quicumque contentus quocumque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoque minores. Nam si omnibus angulis planis rectæ subtrahantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumque, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambiens. Vnde omnes anguli horum triangulorum

(cum anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis; Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, & horum



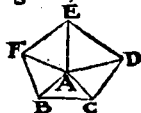
32. primi

horum

20. vnder.

horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores; superabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorundem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

V B R V M ut res melius percipiat, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis B A C,



CAD, D A E, E A F, F A B, quibus subtrahantur ordine rectæ B C, C D, D E, E F, F B, ita ut constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet,

32. primi

quot anguli plani componunt angulum solidum A. Quia vero omnes anguli quinque triangulorum B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis B C D E F, æquales sunt sex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis A B C, A B F, C B F, continueatur; erunt duo C B A, A B F, qui sunt in triangulis, maiores angulo C B F, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, ut dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in alijs omnibus angulis solidis.

30. vnder.

22.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, ut ex lineis æquales illas

rectas

rectas cōnectentibus triangulū cōstituatur.

Si nō tres anguli plāni A, B, C, contenti rectis æqualibus A D, A E, B F, B G, C H, C I, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis D E, F G, H I, quæ rectas illas æquales cōnectunt, triangulū pos-



se constitui; hoc est, trium rectarū D E, F G, H I, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, ex ipsis triangulum facile conficitur. Quod enim duæ D E, F G, maiores sint, quam H I, ita ostēdetur. Fiat angulus D A K, angulo B, æqualis, cadatq; primo A K, ad partes A D, ita ut fiat totus quidā angulus E A K, ex duobus E A D, D A K, compositus; quod quidē cōtinget, quādo duo anguli D A E, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur autē A K, ipsi A D, æqualis, cōnectanturq; rectæ K D, K E. Quoniam igitur latera A K, A D, triāguli A K D, æqualia sunt lateribus B F, B G, triāguli B F G, & anguli ipsis cōtenti D A K, & B, æquales; erūt & bases K D, F G, æquales. Rursus quia latera A K, A E, triāguli A K E, æqualia sunt lateribus C H, C I; & angulus E A K, maior angulo C, propterea quod duo anguli D A E, & B, maiores ponuntur angulo C; erit & basis E K, maior base H I: Sunt autē rectæ E D, D K, maiores recta E K. Igitur multo maiores erūt E D, D K, quā H I. Cū ergo D K, ostēsa sit æqualis rectæ F G; erūt quoq; D E, F G, maiores quā H I. quod est, ppositū.

CADAT secundo A K, in rectum & cōtinuum ipsi A E; quod quidē accidet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturq; A K, ipsi A D, æqualis rursū, & connectatur recta K D. Erit igitur, ut prius, K D, ipsi F G, æqualis. Quoniam uero rectæ E D, D K, maiores sunt recta K E; & K B, æqualis est rectis C H, C I, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque E D, D K, maiores duabus C H, C I: Hæ autem maiores sunt, quam H I. Igitur multo maiores erunt E D, D K, quam H I. Cum ergo D K, ostēsa sit æqualis ipsi

22. primi.

23. primi.

4. primi.

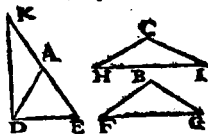
24. primi.

20. primi.

4. primi.

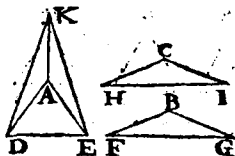
20. primi.

20. primi.



ipsi FG ; erunt quoque DE , FG , maiores quam HI .
Quod est propositum.

CADAT postremo AK , ad partes AE , ita ut necan-
gulus totus componatur ex angulis EAD , DAK , nec
recta sit EAK ; quod demum
eueniet, quando duo anguli
 DAE , & B , duobus rectis sunt
maiores. Ponaturque rursum
 AK , ipsi AD , æqualis, & ducā-
tur rectæ KD , KE . Erit igitur,
ut prius KD , ipsi FG , æ-



4. primi.

21. primi.

20. primi.

22. primi.

4. primi.

4. primi.

24. primi.

24. primi.

23. primi.

qualis. Quoniam uero duæ DE , DK , maiores sunt dua-
bus AE , AK , & AE , AK , æquales duabus CH , CI , ex
hypothesi, & constructione; erunt quoque DE , DK , ma-
iores quam CH , CI : Hæ autem maiores sunt, quam HI .
Igitur multo erunt maiores DE , DK , quam HI . Cum
ergo DK , ostensa sit æqualis ipsi FG ; erunt quoque DE ,
 FG , maiores quam HI . quod est propositum. Eodem
modo concludemus DE , HI , maiores esse, quam FG ,
si angulus DAK , angulo C , fiat æqualis; Item FG , HI ,
maiores, quam DE , si angulo C , ad FG , constituatur an-
gulus æqualis, &c. Quare ex tribus rectis DE , FG , HI ,
triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli pla-
ni, &c. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Si tres anguli A , B , C , sunt æquales; erūt
quoque bases DE , FG , HI , æquales; Ac proinde quæli-
bet duæ reliqua maiores. Si uero duo tantum anguli sunt
æquales, & tertius minor;



erunt quoque duæ illorum ba-
ses æquales, & basis tertij utra-
que minor: Quare rursus
quælibet duæ maiores erunt
reliqua. Quod si unus eorum, nempe A , sit maximus,
siue reliqui B , & C , sint inter se æquales, siue inæquales;
erit quoque basis DE , omnium maxima: Quare DE ,
 FG , maiores erunt quam HI : Item DE , HI , maiores,
quam FG . Dico iam & rectas FG , HI , maiores esse recta
 DE . Fiat enim angulus DAK , æqualis angulo B , ponat-
urque AK , ipsi AD , æqualis. Cadet ergo punctum K ,
infra

infra

infra D E ; propterea quod per puncta D , K , E , transeat
circumferentia circuli ex A , ad interuallum A D , descripta ,
ob æqualitatem rectarum A D , A K , A E . Connectantur
deinde rectæ D K , K E . Quoniam igitur duo anguli B , &
C , maiores ponuntur angulo D A E ; & B , æqualis est an-
gulo D A K , per constructionem ; erit angulus C , maior re-
liquo angulo K A E . Et quia latera A D , A K , trianguli
A D K , æqualia sunt lateribus B F , B G ; trianguli B F G ;
& anguli ipsis contenti D A K , & B , æquales ; erit basis
D K , basi F G , æqualis . Rursus quia latera C H , C I ,
trianguli C H I , æqualia sunt lateribus A K , A E , trianguli
A K E ; & angulus C , ostensus maior angulo K A E ; erit
& basis H I , maior base K E . Quare cum D K , ostensa sit
æqualis ipsi F G ; erunt F G , H I , maiores quam D K , K E :
Sed D K , K E , maiores sunt , quam D E . Igitur multo
maiores erunt F G , H I , quam D E . Quod est propositum.

4. primi.

24. primi.

20. primi.

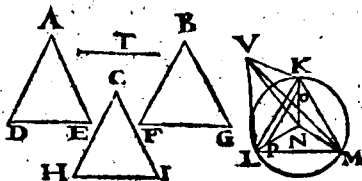
PROBL. 3. PROPOS. 23.

23.

EX tribus angulis planis , quorum duo
quomodocunque assumpti reliquo sunt
maiores , solidum angulum constituere .
Oportet autem illos tres angulos quatuor
rectis minores esse .

S I N T tres anguli A , B , C , quatuor rectis minores ,
hac cōditione , ut quilibet duo sint maiores reliquo . Oportet
iam ex tribus angulis A , B , C , angulum solidum conficere ,

qui nimirum con-
tineatur tribus an-
gulis planis , qui di-
ctis tribus angulis
sint æquales . Pon-
antur sex lineæ
angulos dictos cō-
prehendentes , nē-
pe A D , A E , B F ,



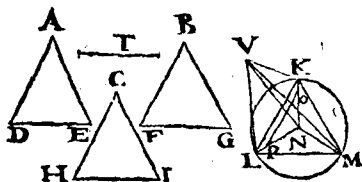
B G , C H , C I , æquales ; substanturque bases D E , F G ,
H I . Fieri ergo potest , ut ex D E , F G , H I , triangulum con-

stituatur.

2. un. lec.

5. quart.

fituatur. Conſtituatur ex iſſis igitur triangulū KLM, ſitq; latus K L, rectæ D E; latus LM, rectæ F G; & latus K M, rectæ H I, æquale. Deſcribatur circa triangulum K L M, cir-



culus, cuius centrū N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritq; quælibet rectarum angulos planos comprehendentiū, nempe AD, AE, &c. maior qualibet du-

8. primi.

arum ex centro N Quod ita oſtendetur. Cadat primo centrū N, intra triangulū KLM; quod quidem fiet, quando triangulū eſt oxygonium. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quā NK, NL, erūt uel æquales, uel minores. Sint ergo æquales. Quoniā igitur latera AD, AE, triāguli ADE, æqualia ſunt lateribus NK, NL, triāguli NKL; & baſis DE, baſi KL, æqualis: erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodē argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis, ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erūt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt absurdum. ponuntur n. quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt AD, AE, iſſis NK, NL. Dico quod neq; minores. Si. n. minores ſint AD, AE, quā NK, NL; abſcīdantur NO, NP, iſſis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniā igitur eſt ut NK, ad NO, ita NL, ad NP, cū & antecedētra inter ſe, & cōſequentia ſint inter ſe æqualia; erunt latera NK, NL, triāguli NKL, ſecta proportionaliter; ac proinde OP, iſſi KL, parallela erit. Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triāgulo NKL, æquiangulum. Igitur erit ut NK, ad KL ita NO, ad OP. Eſt autē NK, maior quā N O. Igitur & KL, hoc eſt, DE, quæ æqualis eſt iſſi KL, maior erit, quā OP. Quocirca cū latera AD, AE, triāguli ADE, ſint æqualia lateribus NO, NP, triāguli NOP; & baſis DE, maior baſe OP; erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadē ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior

2. ſexti.

29. primi.

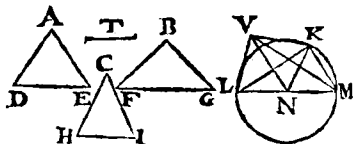
4. ſexti.

14. quinti.

25. primi.

ior esse ostenderetur. Cum igitur tres anguli ad N , quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propof. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C , maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE , quā NK, NL ; sed neq; æquales: Igitur maiores.

CADAT secundo centrum N , in latus LM ; quod tum continget, quando triangulum KLM , angulum LKM , habuerit rectum. Si igitur AD, AE , dicantur esse æquales ipsis NK, NL ; erūt quoque BF, BG , æquales eisdē NK, NL . Cum ergo NK , æqualis sit ipsi NM ; æquales erunt BF, BG , rectæ LM : Po-



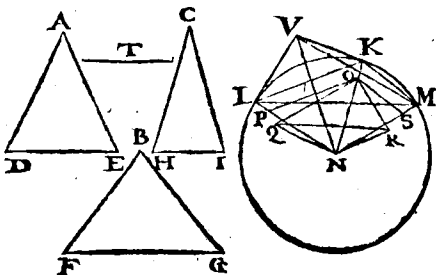
lita autē fuit LM , æqualis ipsi FG . Igitur BF, BG , æquales quoq; sunt rectæ FG . Sunt autē & maiores BF, BG , quā FG . Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE , ipsis NK, NL . Quod si AD, AE , minores credantur, quam NK, NL ; erunt quoq; BF, BG , minores quā NK, NL . Cū ergo NK , æqualis sit ipsi NM ; minores erunt BF, BG , quā recta LM : Posita autem fuit LM , ipsi FG , æqualis. Igitur BF, BG , minores quoq; sunt recta FG . Quod est absurdum, cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE , quam NK, NL ; sed neque æquales: Igitur maiores.

10. primi.

20. primi.

CADAT postremo centrū N , extra triāgulum KLM , infra latus LM ; quod demum ac-

cidet, quādo angulus LKM , fuerit obtusus. Si igitur dicatur AD, AE , esse æquales ipsis

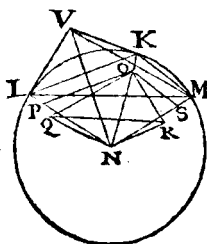
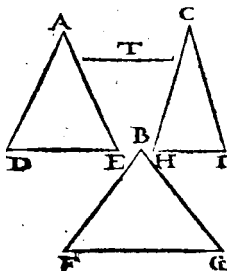


NK, NL ; cū & basi DE , basi KL , ponatur æqualis, erit angulus A , angulo KNL , æqualis. Eadē ratione angulus C , angulo

8. primi.

lo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit: Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & basis LM, basi FG, æqualis; erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed &

8. primi.



maiorē ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL, quod si AD, AE,

credantur esse minores, quam NK, NL; Si absceendantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP, demonstrabitur, ut in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadē ratione angulus C, maior angulo KNM.

23. primi

Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis: ponanturque NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetq; OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transeat circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. Quare cum

29. primi

angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam uero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem; erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR. cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR;

4. primi

& angulus

& angulus LKM , maior angulo QOR , ut ostendimus: erit basis LM , hoc est FG , maior base QR . Quoniam igitur latera BF , BG , trianguli BFG , æqualia sunt lateribus NQ , NR , trianguli NQR ; & basis FG , maior base QR ; erit angulus B , maior angulo QNR . Rursus quia angulus ONQ , angulo A ; & angulus ONR , angulo C , factus est æqualis, erit angulus totus QNR , duobus A , & C , æqualis: Sed A , & C , maiores ponuntur angulo B . Igitur & angulus QNR , maior erit angulo B . Quod est absurdum, cum B , ostensus sit maior angulo QNR . Non ergo minores sunt AD , AE , quam NK , NL ; sed neque æquales: Igitur maiores.

24. primi.

25. primi.

IAM uero, cum rectæ AD , AE , maiores sint rectis NK , NL , ubicunque centrum N , existat; possit recta AD , plus quam recta NK , quadrato lineæ T , per lemma propof. 14. lib. 10. ita ut quadratum rectæ AD , æquale sit quadratis rectarum NK , & T . Ex centro N , excutetur ad planum circuli KLM , perpendicularis NV , rectæ T , æqualis; connectanturq; rectæ KV , LV , MV . Quoniam igitur NV , recta est ad planum circuli KLM , recta quoque eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK , NL , NM ; ac proinde quadratum rectæ VK , quadratis rectarum KN , NV , æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD , æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN , NV ; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK , & AD . Ac propterea æquales erunt rectæ VK , AD . Rursus quia latera VN , NK , trianguli VNK , æqualia sunt lateribus VN , NL , trianguli VNL ; & anguli ipsis contenti VNR , VNL , recti; erit basis VK , æqualis basi VL ; Atq; eadem ratione rectæ VM . Quare tres rectæ VK , VL , VM , æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK , æqualis rectæ AD . Tres ergo rectæ VK , VL , VM , æquales sunt rectæ AD , & ob id, rectis AE , BF , BG , CH , CI . Quamobrem, cum latera VK , VL , trianguli VKL , æqualia sint lateribus AD , AE , trianguli ADE ; & basis KL , basi DE ; erit angulus KVL , angulo A , æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum LVM , angulo B ; & angulum KVM , angulo C , esse æqualem. Quare angulus solidus V , continetur tribus angulis planis KVL , LVM , MVK ,
T qui

12. undec.

47. primi.

4. primi.

8. undec.

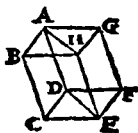
qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

24.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligēda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarū aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC; erunt communes sectiones AB, DC, parallelæ. Similiter cum plana



parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; AC proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam

opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemq; argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC;

& BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit ut AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea ut BH, ad HG, ita CE, ad EF, &c. eadē de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis ita diametris AH, DE; cū latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, ut ostensum est; erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. Quare cū triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabim⁹, similia & æqualia esse parallelogram-

16. undec.

10. undec.

34. primi.

34. primi.

10. undec.

4. primi.

34. primi.

lelogrāma opposita AC, GE, & AF, BE. Si solidū ergo paral-
lelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogram-
ma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

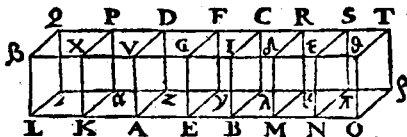
THEOR. 22. PROPOS. 25.

25.

SI solidum parallelepipedum plano se-
cetur aduersis planis parallelo: Erit quem-
admodū basis ad basim, ita solidū ad solidū.

SECEVR parallelepipedū ABCD, plano EF, paral-
lelo oppositis planis AD, BC. Dico ut est basis AG, ad basim
BG, ita esse solidū AEFD, ad solidū BEFC. Intelligat enim
parallelepipedū ABCD, productū in utramq; partē quan-
tumlibet, sumaturq; in AB, protracta quocunq; rectæ AK,
KL, ipsi AE; & quocunq; rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, &

qua $\frac{a}{b}$. Dein-
de per pūcta
K, L, M, N,
O, ducantur
plana KP,
LQ, MR,



NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, p. scholion ppos. 15.
huius lib. Quoniā igitur solidū AEFD, cōtinetur planis pa-
rallelis ex hypothesi, ipsum erit parallelepipedū, ex definitio-
ne, habebitq; plana opposita, parallelogrāma, similia, & æqua-
lia. Eodē mō erūt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF,
BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebūtq; plana
opposita, parallelogrāma, similia, & æqualia. Quoniam uero
parallelogrāma AG, KV, LX, cū sint sup. æquales bases AE,
AK, KL, æqualia sunt; & similia quoq; cū anguli unius sint
æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æ-
qualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportio-
nalia. Eademque ratione æqualia, & similia sunt parallelo-
grāma AY, KZ, LA. Cū ipi æqualia quoq; sint, & similia pa-
rallelogrāma AD, KP, LQ; Erūt tria plana AG, AY, AD,
solidi AEFD, æqualia, & similia tribus planis KV,
KZ, KP, solidi AKPD; & tribus planis LX, LA,
LQ, solidi KLQP: Sunt autem tria in unoquo-

24. undec.

36. primi.

29. primi.

21. undec.

que solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe A G, ipsi Z F; & A Y, ipsi V F; & A D, ipsi E F, &c. Igitur per defin. 10. huius libri, æqualia sunt solida A E F D, A K P D, K L Q P. Eodem argumento æqualia ostendentur solida E B C F, B M R C, M N S R,



NOT S.

Quare quam multiplex est basis L G, basis A G, tam multiplex erit

solidum L E F Q, solidi A E F D; Et quam multiplex est basis O G, basis B G, tam multiplex erit solidum O E F T, solidi B E F C. Quoniam uero si basis L G, (multiplex basis A G, primæ magnitudinis,) æqualis est basi O G, (multiplici basis B G, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum L E F Q, (multiplex solidi A E F D, tertie magnitudinis) solido O E F T, (multiplici solidi B E F C, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus L G, O G, æqualibus existentibus, æqualia quoque sint & similia sex parallelogramma solidi L E F Q, sex parallelogrammis solidi O E F T: Si autem basis maior est base, solidum quoque solido maius est; & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut basis A G, prima magnitudo, ad basin B G, secundam magnitudinem, ita solidum A E F D, tertia magnitudo, ad solidum B E F C, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis D Y, ad basin C Y; & ut basis A Y, ad basin B Y; & ut basis D G, ad basin C G. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

H A E C propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo, eris quemadmodum basis ad basin, ita solidum ad solidum. Sit enim primo prisma A B C D E F, cuius plana aduersa sint trianguula A B C, D E F; seceturq; plano G H I, aduersis

uerfis planis parallelo. Dico ut est basis AI , ad basin FI , ita esse solidum $ABCIHG$, ad solidum $FEDIHG$. Intelli-
gatur prisma $ABCDE F$, in utramque partem quantumlibet productum,

et ex AF , pro-
tracta utrinq;
capiantur quot
cūq; recta AK ,
 KL , ipsi AG ;



et quotcunque recta FM , MN , NO , ipsi FG , equales. Deinde per puncta K , L , M , N , O , ducantur plana KPQ , $LR S$, MTV , NXY , $OZα$, parallela planis ABC , GHI , FED , per scholion propof. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC , GHI , secantur plano AI ; erunt communes sectiones AC , GI , parallelae: Sunt autem et AG , CI , parallela ex hypothesi, ob parallelogrammum AD . Igitur parallelogrammum est AI . Rursus quia plana parallela ABC , GHI , secantur plano AH ; erunt communes sectiones AB , GH , parallelae: Sunt autem et AG , BH , parallelae, ob parallelogrammum AE . Igitur parallelogrammum est AH . Eodem modo parallelogrammum ostendetur CH . Quoniam uero latera AC , AB , trianguli ABC , aequalia sunt lateribus GI , GH , trianguli GHI ; cum AC , ipsi GI , et AB , ipsi GH , sit aequale; et anguli CAB , IGH , sunt quoque aequales, eo quod rectae CA , AB , parallelae sint rectis IG , GH , et non in eodem plano: Erunt triangula ABC , GHI , aequalia inter se, et equiangula. Quare latera circum aequales angulos proportionalia habebunt; Ac idcirco similia erunt. Igitur solidum $ABCIHG$, contentum duobus planis oppositis ABC , GHI , aequalibus et similibus, atque parallelogrammis AI , IB , BG , prisma est. Eadem arte prismata erunt $ABCQPK$, $KPQ SRL$; $FEDIHG$, $FEDVTM$, $MTVYXN$, $NXYαZO$, $LR SIHG$, $OZαIHG$. Quoniam uero parallelogramma AI , KC , LQ , aequalia sunt et similia; necnon AH , KB , LP ; et CH , QB , SP ; Erunt omnia plana prismatis $ABCIHG$, aequalia et similia omnibus planis prismatum $ABCQPK$, $KPQ SRL$. Quare, per defin. 10. huius lib. aequalia erunt prismata $ABCIHG$, $ABCQPK$, $KPQ SRL$. Eadem ratione aequalia erunt

16. undec.

16. undec.

34. primi.

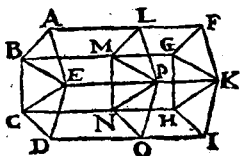
10. undec.

4. primi.

4. sexti.

prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVTXN, NXYaZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; Et quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma OZaIHG, prismatis FEDIHG. Quia uero si basis LI, (multiplex basis AI, prima magnitudinis) equalis est basi OI, (multiplici basis FI, secunde magnitudinis;) equalis quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertia magnitudinis,) prismati OZaIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quarte magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus equalibus, equalia quoque sint & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZaIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin 6.lib. 5. ut basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, ut est basis AH, ad basin FH: & ut basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT secundo prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygoni, nēpe pentagona, seceturq; plano LMNOP. Dico rursus, ut est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK: Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in eodē prismate, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, que demonstrata sunt. Eodem modo erit ut basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPNQ, ad prisma NOPKHI. Ut autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, ut CN, ad NH; Et ut CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNQ, ad prismata



1. fixi.

L M-

$LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI$, eandem habent proportionem ei, quam habet CM , ad NG ; ac proinde eandem inter se. *Ut autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia.* Igitur erit ut prisma $BCEPMN$, ad prisma $MNPKGH$, hoc est, ut basis CM , ad basin NG ; ita prisma $ABCDEL MNOP$, ex tribus compositum ad prisma $LMNOPFGHIK$, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus eris demonstratio in quocunque alio prismate.

12. quinti.

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua usi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem sit constructio, produeto prismate in utranque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se aequalia, & similia; propterea quod latera eorum sint parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum; ac proinde angulos aequales comprehendant, &c. Unde, ut prius, ostenduntur prismata ex una parte inter se aequalia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

16. undec.

10. undec.

COROLLARIUM.

Ex his inferitur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante; Sectionem esse figuram æqualem, & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est, in priori prismate, triangulum GHI , æquale esse & simile triangulo ABC , atque adeo triangulo DEF . Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

PROBL. 4. PROPOS. 26.

26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A , in data recta AB , constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C , cõtõto tribus angulis planis DCE, DCF, FCE , non in eodẽ plano existentibus. Ducat ex F , ad planũ p CD, CE , ductũ perpendicularis FG ;

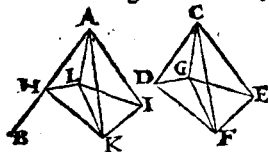
11. undec.

T

conne-

13. primi.

connectanturq; rectæ D F, D G, E F, E G, C G. Deinde abscondatur A H, æqualis ipsi C D, fiatq; angulus H A I, angulo D C E, æqualis; & recta A I, rectæ C E, æqualis. Rursum in plano per A H, A I, ductum constitutatur angulus H A L, angulo D C G, qui in plano per C D, C E, ducto existit; & recta A L, rectæ C G, æqualis. Ex L, vero ad planum, in quo sunt tres A H, A L, A I, erigatur perpendicularis L K, quæ ipsi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta K A. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis H A I, H A K, K A I, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis H K, H I, I K, I L; cum latera A H, A L, trianguli A H L, æqualia sint lateribus C D, C G, trianguli C D G; & anguli H A L, D C G, æquales, per constructionem; Erunt bases H L, D G, æquales. Rursus quia ablati anguli æqualibus H A L, D C G, ab æqualibus H A I, D C E, reliqui æquales sunt L A I, G C E: Cum igitur & latera A L, A I, trianguli A L I, æqualia sint lateribus C G, C E, trianguli C G E, per constructionem; æquales quoque erunt bases L I, G E. Quia igitur latera L H, L K, æqualia sunt lateribus G D, G F; & anguli H L K, D G F, recti, ex defin. 3. huius lib. erunt & bases H K, D F, æquales. Quare cum & latera A H, A K, trianguli A H K, sint æqualia lateribus C D, C F, ex constructione; Erunt quoque anguli H A K, D C F, æquales. Denique quia latera L I, L K, sunt æqualia lateribus G E, G F; & anguli I L K, E G F, recti, ex defin. 3. huius lib. Erunt bases I K, E F, æquales: Cum igitur & latera A I, A K, trianguli A I K, lateribus C E, C F, trianguli C E F, sint æqualia, ex constructione; Erunt quoque anguli I A K, E C F, æquales. Sunt ergo tres anguli plani H A I, H A K, K A I, solidum angulum A, componentibus, æquales tribus angulis planis D C E, D C F, F C E, angulum solidum C, componentibus; Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad daram itaq; rectam lineam, eiusq; punctum, angulum solidum constitutum solidulo angulo dato, æqualem. Quod erat faciendū.



12. undec.

4. primi.

4. primi.

4. primi.

8. primi.

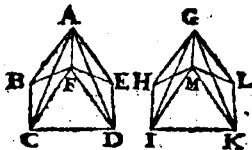
4. primi.

8. primi.

SCHOLION.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subrendende erunt omnibus angulis planis recta in uno eodemq; existentes plano, (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita ut figuram planam polygonam constituent, pyramisq; quaedam multilatera efficiatur. Si enim figura polygonam in triangula resoluatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quot triangula in figura polygonam continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium aequales solidi anguli constituentur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur; cōstitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido aequalis.

Vt si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus aequalis, subrendende sunt angulis planis recta BC, CD, DE, EF, FB, ut fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula resoluatur BCF,



FCD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus aequalis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, aequalis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, aequalis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, aequalis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido aequalis angulus solidus constitueretur.

PROBL. 5. PROPOS. 27.

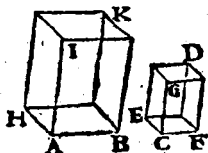
27.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT

26. undec.

12. sexvi.



§ : T a data recta A B, describendum parallelepipedum simile, similiterq; positum parallelepipedo C D. Fiat ad, re-
ctam A B, eiusq; punctum A, angulus solidus æqualis an-
gulo solido C, ita ut tres anguli
plani H A I, I A B, B A H, æqua-
les sint tribus angulis planis E C G,
G C F, F C E. Deinde ut est C F,
ad C G, sic fiat A B, ad A I, & ut
C G, ad C E, ita A I, ad A H;
eritq; ex æquo, ut C F, ad C E,
ita A B, ad A H. Post hæc, perficiatur parallelepipedum A K,
complevis nimirum parallelogrammis B H, H I, I B, & per
I, B, H, ductis planis I K, B K, H K, quæ parallela sint paral-
logrammis B H, H I, I B. Dico parallelepipedum A K, pa-
rallelepipedo C D, simile esse similiterq; positum. Cum enim
anguli B A H, F C E, sint æquales, & latera circa ipsos pro-
portionalia, nempe ut B A, ad A H, ita F C, ad C E, ex
constructione; erunt parallelogramma H B, E F, similia,
similiterq; posita. Eadem ratione similia erunt, similiterq;
posita parallelogramma H I, E G; & I B, G F. Tria igitur
plana B H, H I, I B, solidi A K, similia sunt, similiterq; po-
sita tribus planis F E, E G, G F, solidi C D. Sunt autem
tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis.
Quare sex plana solidi A K, similia sunt, similiterq; posi-
ta sex planis solidi C D; Ac proinde, ex defin. 9. huius lib.
similia sunt, similiterq; posita, solida A K, C D. A data
ergo recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & simi-
liter positum solidum parallelepipedum descripsimus.
Quod erat faciendum.

28.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano se-
cetur per diagonios aduersorum plano-
rum: Bifariam secabitur solidum ab ipso
plano.

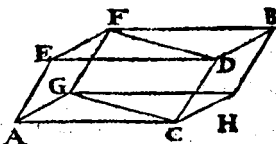
§ : T parallelepipedum A B, in quo plana opposita sint
A H,

A H, E B, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ C G, D F. Quoniam igitur utraque C D, G F, parallela est, & æqualis ipsi A B, cum sint parallelogramma C E, G E; erunt & inter se parallelæ, & æquales C D, G F. Ac proinde, quæ ipsas coniungunt C G, D F, parallelæ erunt, & æquales, ideoq; in uno plano. Dico planū quod per C G, D F, ducitur, secare bifariam parallelepipedum A B. Cum enim plana A H, E B, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula A G C, G C H; E F D, F D B, æqualia inter se: Sunt autem & latera circa angulos æquales G A C, C H G; F E D, D B F, proportionalia; Igitur similia quoque erunt dicta triangula. Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale sit & simile parallelogrammo C B; & A D, ipsi G B; & C F, commune: Erunt duo triangula A G C, E F D, & parallelogramma A F, A D, C F, prismatis A C G F B D, æqualia & similia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrammis C B, B G, C F, prismatis H G C D B F; proptereaque prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum component parallelepipedum A B, sectum erit parallelepipedum A B, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

34. primi.

9. undec.

33. primi.



24. undec.

6. sexti.

24. undec.

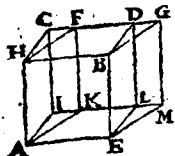
THEOR. 24. PROPOS. 29.

29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SUPRA basin A B, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem

eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda $A C D E$, $A F G E$, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeunt in iisdem collocentur lineis, nempe



35. primi.

$A I$, $A K$, $E L$, $E M$, in recta $I M$; & $H C$, $H F$, $B D$, $B G$, in recta $C G$. Dico parallelepipeda $A C D E$, $A F G E$, esse inter se equalia. Cum enim equalia sint parallelogramma $A L$, $A M$, super eadem basi $A E$, & inter eadem parallelis constituta; erunt, ablato commu-

ni trapezio $A E L K$, equalia quæque triangula $A I K$, $E L M$.

34. primi.

Quoniam uero omnia latera trianguli $A I K$, equalia sunt omnibus lateribus trianguli $H C F$; erit triangulum $A I K$, triangulo $H C F$, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; Ac propterea latera circa æ-

4. sexsi.

quales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum $E L M$, triangulo $B D G$, æquale erit & simile. Rursus quia parallelogrammum $A C$, æquale est, & simile parallelogrammo $E D$; & eadem ratione parallelogrammum $A F$, parallelogrammo $E G$; Sed

24. undec.

36. primi.

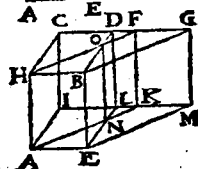
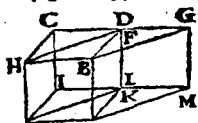
34. primi.

& $I F$, ipsi $L G$, cum bases $I K$, $E M$; sint æquales, (Nam cum rectæ $I L$, $K M$, æquales sint ipsi $A E$, erunt quoque inter se æquales; quare communi dempta $K L$, æquales erunt $I K$, $L M$.) Erunt omnia plana prismatis $A I K F C H$, æqualia & similia omnibus planis prismatis $E L M G D B$. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido $A H F K L D B E$, æqualia fient parallelepipeda $A C D E$, $A F G E$. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat de monstrandum.

SCHOLIUM

$H A E C$ propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere medijs, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, ut ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K , in punctum L , cadit, vel ultra L , eodem modo demonstrabuntur, ut in his si-

his figuris apparet. Nam in secundo casu si ex parallelogram-



mis aequalibus AL, AM , auferatur triangulum commune ALE , erunt reliqua triangula AIK, ELM , equalia. Vnde, ut prius, equalia erunt prismata $AIKFCH, ELMGDB$. Ad idio ergo prismata cōi $AKEBHD$, equalia sūt parallelepipeda $ACDE, AFGE$.

IN tertio uero casu, si ex parallelogrammis aequalibus AL, AM , dematur triangulum commune ANE , erunt reliqua trapezia $AILN, NKME$, equalia; qui bus si addatur triangulum commune KLN , tota triangula AIK, ELM , equalia sient. Vnde, ut prius, equalia erunt prismata $AIKFCH, ELMGDB$; a quibus si auferatur prisma commune $KLNO DF$; (Nam communis sectio planorum AF, DE , est recta NO .) remanebit solidum comprehensum planis $AILN, NOHA, AICH, HCD O, CDLI, DLNO$, aequale solido contento planis $ENKM, MKFG, GFOB, FKN O, BGME, EBO N$. Si igitur addatur utrique prisma cōmune $AENOBH$; sient parallelepipeda $ACDE, AFGE$, inter se equalia.

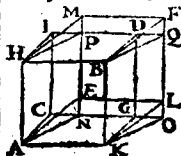
THEOR. 25. PROPOS. 30.

30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ nō ī iisdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SUPER basin AB , in eadem altitudine, hoc est, inter eadē plana parallela, sint constituta parallelepipeda $AIDK, AMFK$, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes $AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF$, non sint in iisdem rectis, hoc est, neque CI, GD , protractæ transcant per puncta M, E, F, L , neque CG, ID , productæ,

æt, &c. Dico parallelepipedæ A I D K, A M F K, esse æqualia. Cum enim plana C D, E F, opposita basi A B, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ C G, I D, quarum C G, secet E M, L F, protractas in punctis N, O; Et I D, eadem in punctis P, Q; adiunganturque rectæ A N, K O, H P, B Q.



34. primi.

Quia igitur rectæ P Q, M F, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo F P; & M F, ipsi H B, est æqualis; erunt & P Q, H B, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter

33. primi.

parallelogrammum H I D B. Igitur & H P, B Q, parallelæ sunt & æquales, ideoq; parallelogrammum est H P Q B. Eadem ratione parallelogramma erunt H P N A, A N O K, K O Q B: Est autem & parallelogrammum N O Q P.

29. undec.

Igitur parallelepipedum est A P Q K. Quamobrem parallelepipedum A I D K, æquale est parallelepipedo A P Q K, cum utriusque eadem sit basis A B, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem C O, I Q. Eodem modo eadem parallelepipedo A P Q K, æquale erit parallelepipedum A M F K, cū utriusque eadem sit basis A B, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem N M, O F. Quare parallelepipedæ A I D K, A M F K, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipedæ super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

CONVERTETUR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

S O L I D A parallelepipedæ æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

N A M si unum dicatur aliud; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum,

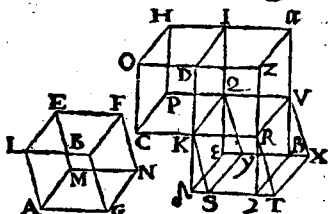
abscissum, & reliquum. Cum igitur & totum huic reliquo po- 29. vel 30.
natur aequale, & aequale erit abscissum toti. Quod est absurdum. undec.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

31. 32.

SOLIDA parallelepipeda super æ-
quales bases constituta, & in eadem altitu-
dine: æqualia sunt inter se.

SUPER æquales bases AB, CD, in eadē altitudine sint
constituta parallelepipeda A EFG, CHIK. Dico hæc paralle-
lepipeda esse æqualia inter se. Sint. n. primū insistentes lineæ
AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH,
DI, ad basin CD, per-
pendicularares. Quo po-
sito, erunt omnes di-
ctæ perpendiculares in-
ter se æquales, propter
eandem parallelepipe-
dorum altitudinem.
Producatur CK, in
rectum, sitq; KR, æ-

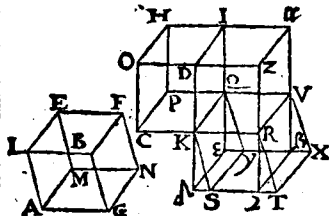


qualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, exten-
sio angulo BLA, ponaturq; KS, æqualis ipsi LA, & per-
ficiatur parallelogrammum KT, super quod, ad altitudinē
perpendicularis KQ, construatur parallelepipedū QSTV.
Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LP,
LA, & anguli RKS, BLA, æquales, erunt parallelogramma
KT, LG, æqualia & similia. Rursus quia latera KQ, KS, æ-
qualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti,
per defin. 3. huius lib. eo quod & LE, rectæ ponantur ad
plana KT, LG; erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia
& similia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia sint
lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem de-
fin. 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æ-
qualia & similia. Quare cū tria plana KT, QS, KV, paralle-
lepipedū QSTV, æqualia sint & similia tribus planis LG, EA,
LF, parallelepipedū A EFG; Tā autē illa, quæ hæc æqualia sunt
& simi-

a 4. undec.

24. undec. & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huiuslib. parallelepipeda $QSTV$, $EAGF$, inter se æqualia.

CONVENIANT rectæ DK , TS , productæ in δ ;



& IQ , XY , in ϵ , compleaturq; parallelepipedum $Q\delta\gamma V$. Itē $H\lambda$, βV , protractæ conveniant in α ; & OD , γR , in Z , perficiaturq; parallelepipedum $IKRa$. Quoniam igitur parallele-

pipeda $QSTV$, $Q\delta\gamma V$, eandē habent basin KV , suntq; in eadē altitudine, nempe inter eadē plana parallela KV , δX , & insistentes ipsorum linæ KS , $K\delta$, RT , $R\gamma$, QY , $Q\epsilon$, VX , $V\beta$, collocantur in eisdem rectis δT , ϵX ; ipsa inter se æqualia erunt. Est autē parallelepipedum $QSTV$, parallelepipedo $EAGF$, æquale: Igitur eidem parallelepipedo $EAGF$, æquale erit parallelepipedum $Q\delta\gamma V$.

29. undec.

35. primi.

7. quinti.

25. undec.

9. quinti.

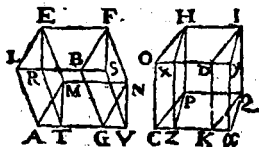
QVONIAM vero parallelogramma KT , $K\gamma$, æqualia sunt inter se; & KT , æquale est ipsi LG , erit & $K\gamma$, ipsi LG , hoc est, ipsi CD , æquale; cum bases LG , CD , ponantur æquales. Quare erit, ut CD , ad DR , ita $K\gamma$, ad DR : Vt autē CD , basis ad basin DR , ita est solidū $CHIK$, ad solidum $KIaR$; cum parallelepipedum $CHaR$, secetur plano IK , planis oppositis CH , aR , parallelo: Et eadem ratione ut $K\gamma$, ad DR , ita est solidum $Q\delta\gamma V$, ad solidum $IKRa$; cum & parallelepipedū $I\delta\gamma a$, secetur plano KV , oppositis planis $D\alpha$, $\delta\beta$, parallelo. Igitur æqualia erunt parallelepipeda $CHIK$, $Q\delta\gamma V$; cum eandē habeant proportionem ad idem solidum $IKRa$. Quare cum parallelepipedum $Q\delta\gamma V$, sit ostensum æquale parallelepipedo $A EFG$; æqualia quoque erunt parallelepipeda $A EFG$, $CHIK$. Quod est propositum.

21. undec.

SINT iam neque insistentes linæ AM , GN , LE , BF , ad basin AB ; neque CP , KQ , OH , DI , ad basin CD , perpendiculares: Et a punctis E , F , M , N , demittantur ER , FS , MT , NV , ad planum, in quo basis AB , perpendiculares; Item a punctis H , I , P , Q , ad planum, in quo basis

CD ,

CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Q α . Erunt autem omnes h α perpendiculares inter se α quales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum α quales. Ducantur rect α RS, SV, VT, TR: Item rect α XY, Y α , α Z, Z χ , ut fiat parallelepipedum ET-VF, HZ α I, qu α c α sunt ei α sd α e altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se α qualia, ut ostensum est. Sed parallelepipedum ET-VF, α quale est parallelepipedo AEF χ G, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZ α I, α quale est eadem ratione parallelepipedo CHI χ K, cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se α qualia sunt parallelepipeda AEF χ G, CHI χ K. Idemque ostendetur, si unius parallelepipedi insistentes line α sint perpendiculares ad basin, alterius uero non. Quocirca solida parallelepipeda super α quales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat,



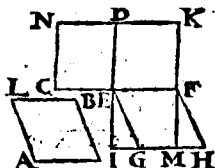
29. vel 30.
undecimi.

SCHOLION.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super α quales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes line α ad bases sunt perpendiculares, inter se esse α qualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamvis eadem sit demonstratio illius, qu α nostra. Sint enim due bases α quales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes line α ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse α qualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, α qualis angulo L; Erigatur EF, recta LB; & recta EG, recta LA, ponatur α qualis, perficiaturque



seiaturque parallelogrammum $E H$, quod æquale erit, & simile parallelogrammo $A B$. Conveniat autem $H G$, producta cum $D E$, producta in I , & compleatur parallelogrammum $I K$. Iam vero intelligantur super bases $E H$, $I F$, $E K$, consti-



stunt a parallelepipedis eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super $A B$, $C D$, constructis 3 sintq; insistentes linea perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super $E H$, æquale esse ac simile solido super $A B$, ex defn. 10.

29. undec.

huius lib. cum plana illius æqualia sint et similia planis huius, per constructionem: Sunt autem & æqualia parallelepipeda super $E H$, $I F$, cum habeant basin eandem, cuius infimum latus $E F$, erectam super planum $I K$; Item plana basi opposita, quorum latera infima $G H$, $I M$, in eodem plano, cuius infimum latus $I H$; atque insistentes lineas $E G$, $F H$, $E I$, $F M$, &c. in eisdem rectis lineis $I H$, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum super $I F$, parallelepipedo super $A B$.

35. primi

7. quinti.

25. undec.

Quoniam vero parallelogramma $E H$, $I F$, æqualia sunt; & $E H$, æquale est ipsi $C D$: æqualia erunt $I F$, $C D$. Erit igitur, ut $I F$, ad $E K$, ita $C D$, ad $E K$: Est autem ut $I F$, ad $E K$, ita solidum super $I F$, ad solidum super $E K$, quod solidum super $I K$, secetur plano super $E F$, erecto parallelo planis super $D K$, $I M$, erectis. Et eadem ratione, ut $C D$, ad $E K$, ita solidum super $C D$, ad solidum super $E K$, cum solidum super $C K$, secetur plano super $D E$, erecto parallelo planis super $C N$, $F K$, erectis. Quare erit ut solidum super $I F$, ad solidum super $E K$, ita solidum super $C D$, ad solidum super $E K$; Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super $I F$, & $C D$. Offensum est autem parallelepipedum super $I F$, æquale parallelepipedo super $A B$. Æqualia ergo erunt et parallelepipeda super $A B$, $C D$. Quod est propositum.

9. quinti.

CONVERTITVR quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia, super æquales bases, in eadē sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadē altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin:

Si enim unum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, fient equalia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri, æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum. Quid si in eadem sint altitudine, & basi unus credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis equalis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo, partem toti esse æqualem. Quod est absurdum.

31. undec.

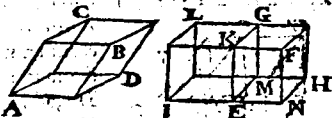
THEOR. 27. PROPOS. 32.

33.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, ut bases.

Sint duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidum, ut est basis ad basin. Super rectam enim EK, construatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, q. sit equalis angulo ENF. Constituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum unum FI, ut in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum unum parallelepipedum IFLH, erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, equalia, cum habeant æquales bases, per constructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex hypothese. Quare erit ut solidum IKLM, ad solidum EFGH, ita solidum ABCD, ad solidum EFGH: Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, ut basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, ut basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

45. primi.



31. undec.

7. quinti.

25. undec.

32. undec.
9. quinsi.

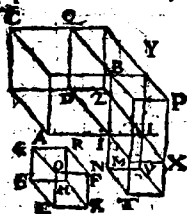
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, ut bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori equalis, & ducatur planum basi parallelum; erisque in basi ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque eras ad totum. Abcissum ergo equalis est toti. Quod est absurdum.

36.

THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda $ABCD, EFGH^1$, super bases similes AB, EF , in quibus latera homologa sint AI, EK . Dico proportionem parallelepipedum $ABCD$, ad parallelepipedum $EFGH$, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK . Producatur enim AI , ad L , & sit IL , equalis ipsi EK , uel GR ; Item DI , ad M , & sit IM , equalis ipsi HK , uel GO ; Item BI , ad N , & sit IN , equalis ipsi KF , uel GS . Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT , perficiatur parallelepipedum $TXIV$. Quoniam uero latera IL, IM , equalia sunt lateribus GR, GO & anguli contenti aequales, cum angulus $LI M$, sit equalis angulo AID , qui ob similitudinem parallelepipedorum equalis est angulo EKH , seu RGO : Erunt parallelogramma IX, GF , similia & equalia. Eadem ratione similia erunt & equalia LN, RS ; Item IT, GE . Quare tria plana IX, LN, IT , parallelepipedum $TXIV$, similia sunt & equalia tribus planis GF, RS, GE , parallelepipedum $EFGH$: Sunt autem tria cuiusque similia & equalia tribus reliquis oppo-



15. primi.

24. undec.

oppo-

oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipedum $T X I V$, $E F G H$, ex defin. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis $M B$, $B L$, $L M$, perficiatur parallelepipedum $M P B L$; Item completis parallelogrammis $I Y$, $D L$, $I Q$, perficiatur parallelepipedum $I Y Q Z$. Quoniam igitur, ob similitudinem parallelepipedorum $A B C D$, $E F G H$, est ut $A I$, ad $E K$, hoc est, ad $I L$, ita $D I$, ad $H K$, hoc est, ad $I M$; & $B I$, ad $F K$, hoc est, ad $I N$. Vt autem $A I$, ad $I L$, ita est parallelogrammum $A D$, ad $D L$; Et ut $D I$, ad $I M$, ita parallelogrammum $D L$, ad $L M$; & ut $B I$, ad $I N$, ita parallelogrammum $B L$, ad $L N$. Igitur erit ut $A D$, ad $D L$, ita $D L$, ad $L M$; & $B L$, ad $L N$. Sed ut $A D$, basis ad $D L$, basin, ita est parallelepipedum $A D C B$, ad parallelepipedum $D L Y Q$; & ut basis $D L$, ad basin $L M$, ita parallelepipedum $D L Y Q$, ad parallelepipedum $L M B P$; Et ut basis $B L$, ad basin $L N$, ita parallelepipedum $L M B P$, ad parallelepipedum $L N T X$. Quare erit, ut parallelepipedum $A D C B$, ad parallelepipedum $D L Y Q$, ita parallelepipedum $D L Y Q$, ad parallelepipedum $L M B P$, & parallelepipedum $L M B P$, ad parallelepipedum $L N T X$. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales $A D C B$, $D L Y Q$, $L M B P$, $L N T X$, idcircoque proportio primæ $A D C B$, ad quartam $L N T X$, hoc est, ad $E F G H$, erit triplicata proportionis primæ $A D C B$, ad secundam $D L Y Q$, ex definitione 10. lib. 5. Vt autem $A D C B$, ad $D L Y Q$, ita est basis $A D$, ad basin $D L$; Et ut $A D$, ad $D L$, ita est recta $A I$, ad $I L$, hoc est, ad $E K$. Igitur proportio parallelepipedum $A D C B$, ad parallelepipedum $E F G H$, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum $A I$, ad $E K$. Quapropter similia solida parallelepipedum, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonstrandum.

1. sexti.

32. undec.

32. undec.

1. sexti.

COROLLARIUM.

Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, ut est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonstratum est, quam prima linea ad quar-

tam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

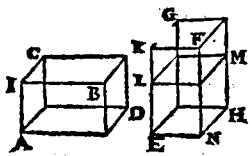
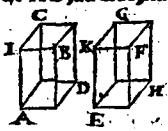
34. 35.

THEOR. 29. PROPOS. 34.

ÆQUALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur : Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur ; Illa sunt æqualia .

S I N T æqualia parallelepipeda $A D C B, E H G F$, super bases $A D, E H$. Dico bases $A D, E H$, & altitudines parallelepipedorum $A D C B, E H G F$, esse reciprocas, hoc est, esse ut $A D$, ad $E H$, ita altitudinem solidi $E H G F$, ad altitudinem solidi $A D C B$. Sint enim primo insistentes lineæ $A I, E K$, perpendiculares ad bases $A D, E H$, ita, ut $A I, E K$, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines $A I, E K$, sunt æquales ; cum & parallelepipeda æqualia ponantur ; erunt & bases $A D, E H$, æquales, per ea, quæ ad finem propof. 31. huius lib. ostendimus. Quare erit, ut basis $A D$, ad basin $E H$, ita altitudo $E K$, ad altitudinem $A I$. Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.

Q U O D si altitudines $A I, E K$, inæquales fuerint ; sit $E K$, maior, ex qua abscindatur $E L$, ipsi $A I$, æqualis ; & per L , ducatur planum $L M$, parallelum basi $E H$, per scholion propof. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida $A D C B, E H G F$; erit ut $A D C B$, ad solidum $E H M L$, ita $E H G F$, ad idem solidum $E H M L$: Vt autem solidum $A D C B$, ad solidum



7. quinsi.

32. undec.

$E H M L$, ita est basis $A D$, ad basin $E H$, cum æquales ponantur altitudines $A I, E L$; Et ut solidum $E H G F$, ad solidum $E H M L$.

EHML, ita est, eadem ratione, basis KN, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; Erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit ut basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: Sed ut KN, ad LN, ita est recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciproce sunt bases, & altitudines.

1. sexti.

SINT iam bases & altitudines reciproce. Dico parallelepipedum esse æquale. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, ut altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. Quare parallelepipedum ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se equalia erunt.

31. undec.

Quod si altitudo EK, maior fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur ex hypothesi est, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad EL, ipsi AI, æqualem; Vt autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur; Et ut EK, ad EL, ita est KN, ad LN; Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum DHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; Erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH: Erit ut solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML; ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

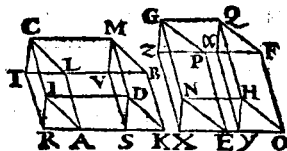
32. undec.

1. sexti.

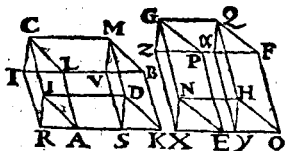
32. undec.

SEDPROponantur iam parallelepida ABCD, EFGH, æqualia, quorum insistentes lineæ AI, KD, BM, LC, EN, OH, FQ, PG, nō sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem a punctis I, D, M, C, ad planum basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item a punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares

9. quinti.



diculares $NX, HY, Q\alpha, GZ$; connectunturque rectæ $RS, TV, RT, SV; XY, Z\alpha, XZ, Y\alpha$: Eruntque perpendicularares RI, XN , parallelepipedorum altitudines, ex



defin. 4. lib 6. Dico rursus, ut basis AB , ad basin EF , ita esse altitudinē XN , ad altitudinem RI . Cum enim æqualia sint solida $ABCD, EFGH$, ex hypothesi, sit autem

29. vel 30. undecimi.

$A'BCD$, æquale solido $RVCD$, eo quod habeant eandem basin CD , eandemque altitudinem RI ; & $EFGH$, eadē ratione, æquale solido $X\alpha GH$: Erunt & parallelepieda $RVCD, X\alpha GH$, æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendicularares ad bases CD, GH ; erit, ut iam demonstratum est, ut basis CD , ad basin GH , hoc est, ut basis AB , ad basin EF , ita altitudo XN , ad altitudinem RI . Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.

24. undec.

SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepieda esse æqualia. Cōstruēta enim figura, ut prius; Cum sit ut basis AB , ad basin EF , ita altitudo XN , ad altitudinem RI ; Sit autē AB , ipsi CD , & EF , ipsi GH , æqualis; Erit quoque ut basis CD , solidi $RVCD$, ad basin GH , solidi $X\alpha GH$, ita altitudo XN , ad altitudinem RI . Quare, cum XN, RI , sint insistentes lineæ, perpendicularares ad bases CD, GH ; erunt, ut iam ostensum est, æqualia parallelepieda $RVCD, X\alpha GH$: Sunt autem hæc parallelepieda parallelepipedis $ABCD, EFGH$, æqualia. Igitur æqualia quoque erunt parallelepieda $ABCD, EFGH$: Idemque ostendetur, si insistentes lineæ unius parallelepipedī fuerint perpendicularares ad basin, alterius uero non. Quam ob rem, Æqualium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.

29. vel 30. undecimi.

SCHOLION

OMNIA hæc, qua demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conveniunt quoque

quoque prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædictæ hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficiuntur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases existentia. Quare æqualia erunt huiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.

29. 30. vel
31. undec.

R V R S V S, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis, adiciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficiuntur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, ut basis ad basin; Atque adeo prisma ad prisma, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad dimidium alterius, ut eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe ut triangulum ad triangulum, dimidium scilicet unius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangularia.

32. undec.
35. quinti

P R A E T E R E A, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituuntur duo parallelepipeda similia, quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.

33. undec.
35. quinti

D E N I Q U E si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componuntur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum prismatis. Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciproca; & bases prismatum eadem sint, vel certe triangularia earum dimidia eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciproca.

34. undec.
35. quinti

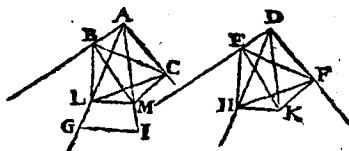
THEOR. 30. PROPOS. 35.

37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum uerticibus sublimes rectæ lineæ insistant,

sistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis uero, quæ in planis a perpendicularibus sunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC , EDF , quorum uerticibus A , & D , insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG , DH , ita ut angulus BAG , angulo EDH , & angulus CAG , angulo FDH , sit equalis. A sumptis autem punctis G , H , in rectis AG , DH , demittantur ad plana, in quibus anguli BAC , EDF , existunt, perpendiculares GI , HK , incidentes in puncta I , K , & adiungantur rectæ IA , KD . Dico



angulos GAI , HDK , esse æquales inter se. Nā si AG , DH , sunt inæquales, auferatur a maiori AG , ipsi DH , æqualis linea AL ; & ex L , ad planum anguli BAC , perpendicularis demittatur LM . Quoniam igitur GI , LM , rectæ sunt ad planum anguli BAC , ipsæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli AGI . Quare LM , cadet in rectam AI . Ducantur iam ex punctis M , K , ad rectas AB , AC , DE , DF , perpendiculares MB , MC , KE , KF ; & connectantur rectæ BC , BL , LC , EF , EH , HF . Et quia LM , recta est ad planum anguli BAC , ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM , in eodem plano ducta, per defin. 3. huius lib. Quare quadratum rectæ

6. undec.

rectæ AL , æquale erat quadratis rectarum AM , ML :
 Est autem quadratum rectæ AM , æquale quadratis rectarum
 AC , CM , cum & angulus ACM , rectus sit, ex con-
 structione. Quadratum ergo rectæ AL , æquale est qua-
 dratis rectarum AC , CM , ML : At quadratis rectarum CM ,
 ML , æquale est quadratum rectæ CL , cum angulus CML ,
 rectus sit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ
 AL , æquale est quadratis rectarum AC , CL ; Ac proinde
 angulus ACL , rectus erit. Rursus quia quadratum
 rectæ AL , æquale est quadratis rectarum AM , ML :
 Est autem quadratum rectæ AM , æquale quadratis re-
 ctarum AB , BM , cum angulus ABM , per construc-
 tionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL , æquale
 est quadratis rectarum AB , BM , ML : At quadratis re-
 ctarum BM , ML , æquale est quadratum rectæ BL , quod
 & angulus BML , sit rectus ex defin. 3. huius lib. Qua-
 dratum ergo rectæ AL , æquale est quadratis rectarum
 AB , BL ; proptereaque angulus ABL , erit rectus. Non
 aliter ostenduntur recti, anguli DFH , DEH . Quo-
 niam igitur anguli ABL , $L'AB$, trianguli ABL , æqua-
 les sunt angulis DEH , HDE , trianguli DEH ; suntque
 latera AL , DH , æqualia; Erunt & reliqua latera AB , BL ,
 reliquis lateribus DE , EH , æqualia. Eodem argumen-
 to æquales erunt rectæ AC , CL , rectis DF , FH . Qua-
 re cum latera AB , AC , trianguli ABC , æqualia sint late-
 ribus DE , DF , trianguli DEF ; & anguli cōtinenti BAC ,
 EDF , æquales, ex hypoth si; erunt & bases BC , EF , inter
 se, & anguli ABC , ACB , angulis DEF , $D FE$, æqua-
 les: Sunt autem & toti anguli ABM , ACM , totis angulis
 DEK , DFK , æquales, cum omnes sint recti. Igitur & re-
 liqui anguli MBC , MCB , reliquis angulis $K EF$, $K FE$,
 æquales erunt: Ac propterea cum & latera BC , EF , sint
 ostensa æqualia; erunt latera BM , CM , lateribus EK , FK ,
 æqualia. Quia igitur latera AC , CM , trianguli ACM ,
 æqualia sunt ostensa lateribus DF , FK , trianguli DFK ; &
 anguli ACM , DFK , sunt recti; erunt & bases AM , DK ,
 inter se æquales. Cum autem æquales sint ostense re-
 ctæ BL , EH , erunt etiam earum quadrata æqualia:
 Quia uero quadratum rectæ BL , æquale est qua-
 dratis

47. primi.

47. primi.

47. primi.

48. primi.

47. primi.

47. primi.

47. primi.

48. primi.

26. primi.

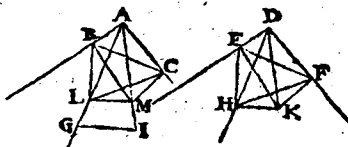
4. primi.

26. primi.

4. primi.

47. primi.

dratis rectarum $B M, M L$; & quadratum rectæ $E H$, quæ
dratis rectarum $E K, K H$, quod anguli $B M L, E K H$, re-
cti sint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum



$B M, M L$, æqualia
quadratis rectarum
 $E K, K H$. Ablatis
ergo quadratis recta-
rum $B M, E K$, quæ
æqualia sunt, quod
rectæ $B M, E K$ ostē-

se sint æquales; reliqua quadrata rectarum $L M, H K$, æqua-
lia erunt, ac proinde rectæ $L M, H K$, æquales. Quam ob-
rem, cum latera $A L, A M$, trianguli $A L M$, æqualia sint late-
ribus $D H, D K$, trianguli $D H K$, & basi $L M$, basi $H K$,
æqualis; erunt & anguli $L A M, H D K$, æquales. Si igitur
fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus subli-
mes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.

3. primi.

COROLLARIUM.

ITAQUE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum ver-
ticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis pri-
mo positis angulos contineant æquales, utrumque utriusque. Erunt
a punctis extremis linearum sublimium ad plana angularum pri-
mo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam pro-
pterea quod anguli plani $B A C, E D F$, ponuntur æquales, & subli-
mes æquales $A L, D H$, constituunt angulos æquales $L A B, H D E$;
Item $L A C, H D F$; demonstratum fuit, demissas perpendicu-
las $L M, H K$, esse æquales.

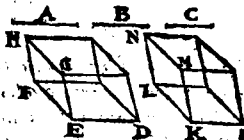
38.

THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fue-
rint; Quod ex his tribus fit solidum paral-
lelepipedum, æquale est descripto a me-
dia lineâ solido parallelepipedo, quod æqui-
laterum quidem sit, æquiangulum uero
prædicto.

SINT

SINT continue proportionales tres rectæ A, B, C. Constituaturnque angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunque DEF, DEG, FEG, ita ut recta DE, ipsi A, & EF, ipsi B; & EG, ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. Deinde ad rectam IK, eiusque punctum K, fiat solidus angulus K, æqualis solidulo angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales sint tribus DEF, DEG, FEG; ita ut rectæ IK, KL, KM, æquales sint mediæ lineæ B.



25. undec.

Completis uero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN; quod contineri dicitur sub linea B, seu ex ipsa describi. Dico solidum DH, æquale esse solidulo IN. Cum enim sit ut DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam uero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorum uerticibus insistant sublimines lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales, per coroll. propos. præcedentis. Quare parallelepipeda DH, IN, cū habeant bases DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

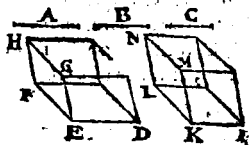
14. sexti.

31 undec.

SCHOLIUM

VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a media linea descripto: Erunt tres rectæ continue proportionales.

portiones. Sit enim parallelepipedum DH , descriptum ex rectis A, B, C , ut dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo IK , descripto a media B . Dico res A, B, C , esse continuas proportionales. Nam,



veluti prius, ostenduntur eorum altitudines ex F, L , demissa esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia, erunt eorum bases DE, IM , æquales, per ea, qua

ad finem propof. 31. huius lib. demonstravimus. Quia bases cum angulos habeant æquales DEG, IKM , ex constructione; habebunt latera circa illos angulos reciproca; hoc est, erit DE , ad IK , ita KM , ad EG . Quapropter cum DE , ipsi A ; & IK , KM , ipsi B ; & EG , ipsi C , sumpta sit æqualis; Eris quoque ut A , ad B , ita B , ad C . Quod est propositum.

14. sexsi.

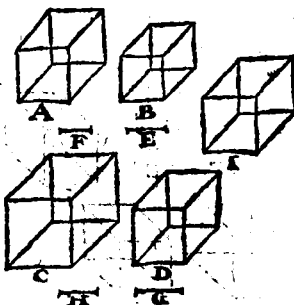
39.

THEOR. 32. PROPOS. 37.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

S I N T quatuor rectæ proportionales A, B, C, D ; Ut quidem A , ad B , ita C , ad D ; constituenturque super A , & B , duo parallelepipeda A , & B , similia similiterque descripta; Item super C , & D , alia duo C , & D , similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida A, B, C, D , proportionalia: Ut quidem solidum A , ad solidum B , ita solidum C , ad solidum D : Inveniantur enim per scholion propof. 1. lib. 6. duabus rectis A, B , alia duæ continue proportionales E, F . Item duabus

duabus C, D, alię duę G, H. Quoniam igitur sunt quatuor li-
neę A, B, E, F, & qua-
tuor lineę alię C, D, G,
H, quę binę in eadem
ratione sumuntur; erit
ex æquo, ut A, ad F,
ita C, ad H. Vt au-
tem A, ad F, ita est so-
lidum A, ad solidum
B; Et ut C, ad H, ita
solidum C, ad solidum
D, ex coroll. propos.
33. huius lib. igitur erit
ut solidum A, ad soli-
dum B, ita solidum C,
ad solidum D. Quod est propositum.



SINT iame contrario solida A, B, C, D, proportiona-
lia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales. Tri-
bus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I,
super quam describatur parallelepipedum ipsi D, uel C, simi-
le similiterque positum. Quoniam igitur est, ut recta A, ad
rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, ut iam est
ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad
solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita poni-
tur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit ut soli-
dum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D
Ac idcirco equalia erunt solida I, & D. Quę cū sint similia,
similiterq; descripta, continebuntur planis equalibus & simi-
libus, per defin. 10. huius lib. Sed plana equalia & similia
habent latera homologa equalia, per lemma propos. 22. lib.
6. Igitur rectę I, & D, equalēs sunt, Ac propterea erit,
ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Po-
sita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut
recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si
quatuor rectę lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat
demonstrandum.

12. sexti.

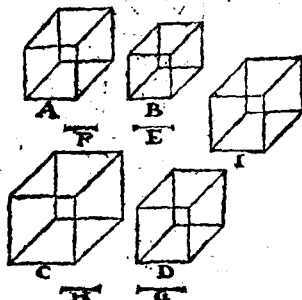
27. undec.

9. quinti.

BREVIVS tota hęc propositio demonstrabitur cum
Theone, hoc modo. Ponatur primo ut recta A, ad rectam B,
ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A,

ad

ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Cum enim sit
33. undec. proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis re-
ctę A, ad rectam B; item proportio solidi C, ad solidum



D, triplicata proportio-
nis rectę C, ad rectam
D: Erunt proportio-
nes solidi A, ad solidū
B, & solidi C, ad soli-
dum D, equales; quā-
doquidē triplicatę sunt
proportionum equa-
lium, nempe rectę A,
ad rectam B; & rectę
C, ad rectam D. Quod
est primum. Rursum
ponatur secundo esse,

ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D.
Dico esse quoque, ut recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad
rectam D. Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B,
33. undec. triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; item propor-
tio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectę C,
ad rectam D: erunt proportionēs rectarum A, ad B, & C,
ad D, equales; quandoquidem earum proportionēs tripli-
catę, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidū
D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

SCHOLIUM.

EODem modo, si fuerint tres rectę proportionales, erunt
& parallelepipeda similia similiterque descripta ex eis, propor-
tionalia, &c. Si enim media linea, eiusque solidi sumatur
bis, habebuntur quatuor rectę proportionales. Igitur & qua-
tuor solida proportionalia, ut demonstratum est. Cum igitur
solidum secundę lineę aequale sit solido tercię lineę; & lineę
secundę aequalis tercię lineę; perspicuum est, quod pro-
ponitur.

TOTA vero hac propositio convenit etiam prismatis, quo-
rum duo plana adversa aequalia, sunt vel triangula, vel paral-
lelogramma, ut Campanus ait. Nam additis prismati, qua
singula

ſingula ſingulis ſunt equalia, exurgens parallelepipedum, quæ ut hic eſt demonſtratum, proportionalia erunt. Cum igitur priſmaſa, eorum dimidia, eandem habeant cum iſſis proportionem; perſpicuum eſt, quod proponitur.

15. quinti.

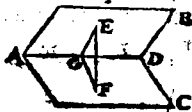
THEOR. 33. PROPOS. 38.

13.

SI^o planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

PLANVM AB, rectum ſit ad planum AC, ſitque eorum communis ſectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem ſectionem AD. Nam ſi fieri poteſt, cadat extra ad punctum F; & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG, connectaturq; recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis eſt ad communem ſectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Eſt autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti ſunt, quod eſt abſurdum; cum duobus rectis ſint minores. Perpendicularis ergo ex E, demiſſa ad planum AC, non extra communem ſectionem AD, cadet ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

12. primi.



17. primi.

SCHOLIUM.

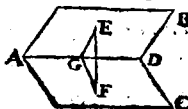
HATC eſt demonſtratio Theoris. Nos tamen idem demonſtrabimus breuiter, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AB,

X

AB,

12. primi.

AB, demissa perpendicularis ad planum A C, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem; ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defn. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E. extra planum AC, ductæ sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, EG. Quod fieri nequit, ut in scholio propos. 13. huius lib. demonstravimus.

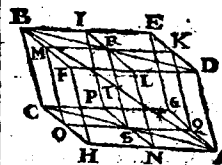


40.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI solidi parallelepipedum eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedum diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedum AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB.



Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS,

trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH; & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS.) & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus

34. primi.

29. primi.

4. primi.

13. primi.

duobus sunt rectis æquales; Ac propterea AS, CS, vnā rectā
lineam constituent. Eodem modo ostenduntur esse æquales
BR, DR, & vnā ex eis componi lineam rectā. Rursus quia
vtraq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob paralle
logramma AF, FC; ipsæ quoq; inter se parallele erunt, &
æquales. Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniun
gentes, parallele sunt, & æquales; Ac proinde ipsarum dimi
diæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallele
sunt; erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoq;
se mutuo secabunt, in puncto uidelicet T. Cum autem duo
anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus an
gulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR:
Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR,
æqualia; Ac propterea AB, RS se mutuo secant bifariam in
T. Si igitur solidi parallelepipedo eorū, quæ ex aduerso, &c.
Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se
mutuo bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in
quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est, rectam RS.

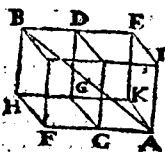
SCHOLIUM.

Hic theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod
ad propof. 34. primi lib. demonstrauimus, uidelicet.

Si solidum parallelepipedum plano secetur
per centrum: bifariam secabitur solidum ab ip
so plano. Et si solidum parallelepipedum plano
secetur bifariam: per centrum transibit ipsum
planum.

SECETUR parallelepipedum AB, plano CD, per cen
trum, hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G.
Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo planū
CD, oppositis planis AE, BF, parallelū. Et quia plana parallela
BF, DC, EA, secant rectas quascūq; proportionaliter, secatur aut

25. undec.

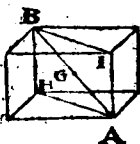


BA, bifariam in G; secabuntur quoque latera aduersorum planorum AH, BI, atque adeo & bases AH, BI, bifaria. Cuius igitur sit ut basis KC, ad basin CH, ita solidum AD, ad solidum CB; erit parallelepipedum AB, sectum bifariam, plano CD, per centrum G, ducto.

TRANSIAT secundo planum secans AIBH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G; immo per totam diametrum AB; cum AB, in plano sit parallelarum AH, BI. Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.

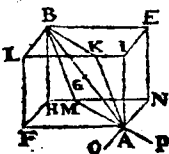
7. undec.

28. undec.



TERTIO planum secans AKBM, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM; erunt communes sectiones AM, BK, parallelae. Similiter parallela, erunt AK, BM, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AL, BN, factae a plano AKBM. Quare parallelogrammum est AKBM; ideoque tam recta AK, BM, quam re-

16. undec.



cta AM, BK, inter se erunt aequales. Quia ergo latera BK, BL, trianguli BKL, aequalia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, aequalis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectae BL, BK, parallelae; ac proinde aequales anguli erunt OAP, LBK. Cum igitur OAP, aequalis sit angulo MAN; aequales quoque erunt anguli KBL, MAN.)

34. primi.

10. undec.

13. primi

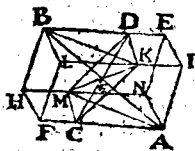
4. primi.

4. sexsi.

Erunt bases KL, MN, inter se, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, aequales; & triangulum triangulo aequale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN, cum latera habeant circa equos angulos proportionalia. Quoniam uero recta KL, recta MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBL, angulo MAN, est aequalis, ut ostendi-

ostendimus; erit & reliqua IK , reliqua HM ; & reliqua $gulus$ BKI , reliqua AMH ; & reliqua KBE , reliqua AMF ,
 aequalis. (Est .n. tota LI , tota NH , aequalis, & ita anguli BKE ,
 BKI , quam anguli AMN , AMH , duobus rectis aequales;
 & totus angulus LBE , tota angulo NAF , aequalis, ob simi-
 litudinem parallelogrammorum LE, FN .) Sunt autem &
 latera BE, EI , lateribus AF, FH , aequalia; & anguli BEI ,
 EIK , angulis AFH, FHM , ob parallelogramma LE, FN .
 Igitur quadrilaterum $BKIE$, & equilaterum, & equian-
 gulum est quadrilatero $AMHF$; Ad propterea aequale & si-
 mile, cum singula singulis conveniant, latera nimirum late-
 ribus, & anguli angulis. Eodem modo aequalia erunt & simi-
 lia triangula BHM, AIK ; & quadrilatera $AKLF$,
 $BMNE$; cum inter se sint & aequilatera & equiangula.
 Quapropter solidum contentum planis $AKLF, FHMA$,
 $AKBM, MHB, BKL, LBHF$, aequale erit solido conten-
 to planis $BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN$,
 $NAIE$, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint si-
 milia & aequalia, ut demonstratum est. Parallelepipedum er-
 go AB , sectum est plano $AKBM$, per centrum G , bi-
 fariam.

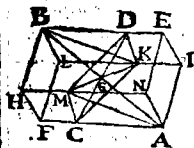
POSTREMO planum secans CD , neque ut ante pla-
 nis parallelum sit, neque per diametros planorum opposito-
 rum, neque per alios angulos eorum ductum, sed utcumque secus
 plana opposita $AHBI$. Ostendemus autem, ut prius, planum
 secans CD , esse parallelogrammum,
 & tam rectas CK, DM , quam rectas
 CM, DK , esse aequales. Ducantur in
 parallelogrammo CD , diametri CD ,
 KM ; connectanturque rectae AM ,
 BK , quae parallelae erunt, cum sint
 communes sectiones planorum paralle-
 lorum AH, BI , factae a plano per rectas AB, KM , ducto.
 Quoniam igitur AF, BE , parallelae ipsi LI , ob parallelogram-
 ma AL, LE , inter se sunt parallelae; Erunt AB, CD , in eo-
 dem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro
 G ; In solo enim centro G , recta AB , per hypothesein, secas pla-
 num CD , in quo existit recta CD . Simili argumento, cum AM ,
 BK , sint ostensa parallelae; erunt AB, MK , in eodem cum



16. undec.
 9. undec.
 7. undec.

15. primi.
4. primi

illis plano, seq; mutuo secabunt in centro G. Quare diametri
CD, KM, per centrum G, transibunt, itiq; se mutuo secabunt;
atq; adeo bisariā, per ea, quæ ad propof. 34. lib. 1. ostendimus.
Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, equalia sūt laterib;
AG, GC, trianguli AGC; & angulus BGD, æqualis angulo
AGC; Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodem argumen
to æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera
ED, DK, KB, trianguli BDK, equalia sint tribus lateribus



AC, CM, MA, trianguli ACM;
Erunt, per ea, quæ ad propof. 8. lib. 1.
docuimus, anguli illius angulis huius.
æquales: Est autem totus DBL, toti
CAN, æqualis, ob similitudinem pa
rallelogrammorum BI, AH. Igitur
& reliquæ KBI, reliquæ MAN,

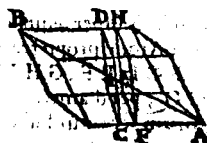
4. primi.

erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL,
æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angu
lus KBL, angulo MAN, æqualis; Erit & basis KL, basi
MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur
æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli
BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare
quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterū
est, & equiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum sin
gula conveniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli
angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit &
reliqua IK, reliqua HM, æqualis; Eademque ratione reli
qua DE, reliqua CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilate
rum DEIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed
& equiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint an
gulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogram
morum BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM,
HMC, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alter
ni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrila
tera DEIK, CFHM, equalia sunt & similia. Non aliter
ostendemus, equalia esse & similia quadrilatera ACKI,
BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateri
bus, & anguli angulis conveniant, ut perspicuum est. Quam
obrem solidum contentum planis CKLF, FHM C, CKD M,
MHBD, DKLB, BHFL, per 10. def. huius lib. æquale est so
lido

Ido cōtēto planis $DMNE$, $EIKD$, $DMCK$, $KIAC$, $CMNA$, $AIEN$; cum hisce illa sint demonstrata & equalia & similia. Parallelepipedum igitur AB , sectum est per centrum G , plano CD , bisariam.

SED secetur iam parallelepipedum AB , plano CD , bisariam. Dico planum CD , per centrum parallelepipedi transire, hoc est, p̄st̄um G , in quo planum CD , secat diametrum AB , dividere diametrum AB , bisariam. Si enim diameter AB , in G , non dividitur bisariam, dividatur

bisariam in E , ut sit E , centrum parallelepipedi. Si igitur per E , ducatur planum FH , plano CD , parallelum, secabitur parallelepipedum AB , bisariam plano FH , ut demonstratum est.



Ponitur autē & bisariam secari plano CD ; Igitur solida CB , FB , cum sint dimidia parallelepipedi AB , inter se equalia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Nō ergo aliud p̄st̄ū, prāter G , dividens diametrum AB , bisariam; Ac p̄inde G , cētrū erit parallelepipedi. Qd̄ demonstrandū erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

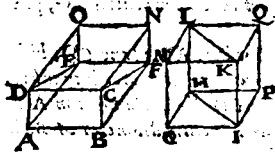
41.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basim, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: AEqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis $AB C D E F$, $G H I K L M$, quorū illud basim habeat parallelogrammū $AB C D$, hoc uero, triāgulū $G H I$, sitq; parallelogrammū $A C$, triāguli $G H I$, duplū. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur. n. parallelepipeda $A N$, $G Q$; Quod quidē fiet, si plana triangulorū extendātur, perficianturq; parallelograma $B N$, $A O$; $G P$, $M Q$. Si enim connectantur rectæ $N O$, $P Q$, constituta erūt duo parallelepipeda $A N$, $G Q$, eiusdē altitudinis cū prismatis. Nam plana horum solidorū opposita esse

34. primi.

parallela; facile colligitur ex propof. 14. huius lib. Quoniam igitur parallelogrammum GP , duplum est trianguli GHI ; Ponitur autem & parallelogrammum AC , eiusdem trianguli GHI , duplum: æqualia erunt parallelogramma AC , GP . Quare parallelepipedum AN , GQ , eiusdem al-



31. undec.

titudinis super æquales bases AC , GP , inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata $ABCDEF$, $GHIKLM$; (Nam parallelepipedum AN , GQ , per diametros CF , LE , HI , LK , planorum aduersum secantur bisariam, inbina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

28. undec.

SCHOLIUM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipedum compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum $ABCD$, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE , BCF . Efferet enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.



EVCLIDIS

ELEMENTVM XII.

Et Solidorum secundum.



THEOR. I. PROPOS. I.

I.

QV AE in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata.

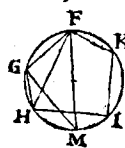
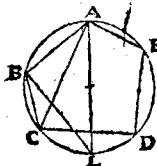


IN T duo polygona similia A B C D E, F G H I K, descripta in circulis, quorum diametri A L, F M. Dico ita esse polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K, ut quadratum diametri A L, ad quadratum diametri F M. Subtendantur enim angulis æqualibus A B C, F G H, rectæ A C, F H, & connectantur rectæ B L, G M. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est ut A B, ad B C, ita F G, ad G H; erunt triangu-

A B C, F G H, æquiangula, cum circa angulos æquales A B C, F G H, habeant latera proportionalia: Est autem angulus A L B, angulo

A C B; & angulus F M G, angulo F H G, æqualis. Igitur & anguli A L B, F M G, æquales erunt. Cum ergo & anguli A B L, F G M, æquales sint, nempe recti in semicirculis existentes, erunt & reliqui B A L, G F M, æquales. Quare erit ut A L, ad A B, ita F M, ad F G; & permutand., vt

A L, ad



6. sexti.

21. terti.

31. terti.

32. primi.

4. sexti.

22. sexti.

A L, ad F M, ita A B, ad F G. Igitur est ut quadratum ex A L, ad quadratum ex F M, ita polygonum A B C D E, super A B, ad polygonum F G H I K, super F G; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia inter se sunt, ut a diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

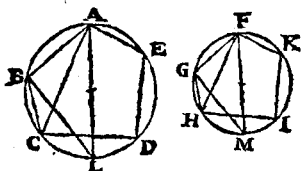
2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata.

S I N T duo circuli A B C D, E F G H, quorum diametri A C, E G. Dico esse, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circum A B C D, ad circum E F G H. Si enim res non ita se habet; Sit ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ uel minor erit, uel maior circulo E F G H. Si .n. esset æqualis, haberet circulus A B C D, ad circum E F G H, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus A B C D, ad circum E F G H, ut quadratum diametri

7. quinti.



A C, ad quadratum diametri E G, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor quam circulus E F G H, magnitudine scilicet I, ita ut circulus E F G H, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo E F G H quadratū E F G H; qd̄ quia dimidiū est quadrati circa eundē circulū descripti, ut ad ppos. 9 lib. 4. ostēdimus, maius erit, q̄ dimidiū circuli E F G H. Secentur bifariam peripheriæ E F, F G, G H, H E, in punctis L, M, N, O, adiunganturq; rectæ L E, L F, M F, M G, N G, N H, O H, O E. Ducatur per L, recta T V, tangens circulū in L, quæ parallela erit ipsi E F, ut ad ppos. 27. lib. 3. ostēdimus, occurratq; rectis H E, G F, productis in T, & V. Quia ergo triangulū E L F, dimidiū est parallelogrammi T E F V; maius erit triangulū E L F, quā dimidiū segmēti circuli E L F. Eadē ratione erunt reliqua triangu-

41. primi.

la maiora, quam dimidia segmentorū, in quibus sunt. Omnia
igitur triangula simul maiora sunt, quā dimidium omnium
segmentorū simul. Quod si rursus peripheriæ $EL, LF, \& c.$
secentur bisarā, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur
eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quā dimi-
dium omnium segmentorū simul, in quibus sunt; & sic de-
inceps. Quoniam uero, si a circulo $EFGH$, auferatur plus
quam dimidium, nempe quadratum $EFGH$; & a reliquis
segmentis plus quā dimidiū, nempe triagula $ELF, FMG, \& c.$
atque in hūc modum semper fiat detractio; relinquatur tan-
dem minor magnitudo, quam K , excessus inter circulum
 $EFGH$, & magnitudinem I . Sint iam circuli segmenta reli-
cta $EL, LF, FM, \& c.$ simul supra minora, quam magnitudo
 K . Cum igitur circulus $EFGH$, æqualis ponatur magnitudi-
nibus $I, \& K$, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmen-
ta, & ex $I, \& K$, ipsa magnitudo K , quæ maior est præfatis
circuli segmentis; erit reliquum poly. onū $ELFMGNHO$,
maius reliqua magnitudine I . Inscrubatur in circulo $ABCD$,
polygonum $APBQCRDS$, simile polygono $ELFMGN-$
 HO . Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC , bi-
sariā secentur in $B, \& D$; & rursus circunferentiæ $AB, BC,$
 CD, DA , bisariā in P, Q, R, S ; sic deinceps, donec in tot
partes æquales diuisa sit circunferētia $ABCD$, in quor distri-
buita ē circunferētia $EFGH$. Nā iūctis rectis $AP, PB, BQ, \& c.$
erit figura inscripta similis figuræ $ELFMGNHO$, ut patet.
Quoniam igitur est polygonū $APBQCRDS$, ad polygonū
 $ELFMGNHO$, ut quadratū diametri AC , ad quadratū
diametri EG , hoc est, per hypothesin, ut circulus $ABCD$,
ad I : Est aut polygonum $APBQCRDS$, minus circulo
 $ABCD$. Igitur & polygonum $ELFMGNHO$, minus erit
quam I . Ostensum aut est & maius. Quod est absurdum.
Non igitur minor est magnitudo I , circulo $EFGH$.

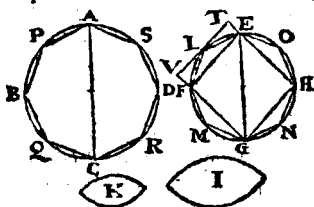
Si r secundo magnitudo I , maior circulo $EFGH$. Cum
ergo ponatur circulus $ABCD$, ad I , esse ut quadratū dia-
metri AC , ad quadratū diametri EG ; erit & conuertēdo
 I , ad circulum $ABCD$, ut quadratū diametri EG , ad
quadratū diametri AC . Ponatur ut I , ad circulum $AB-$
 CD , ita circulus $EFGH$, ad magnitudinē aliquā, nempe ad K .
Et quia I , maior ponitur circulo $EFGH$, maior quoque erit
circulus

1. decimi.

1. duodec.

14. quinti.

circulus A B C D, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C, ita circulus E F G H, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo A B C D. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H. Sed neq; minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G,



ita circulus A B C D, ad I, sit autem ut circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque ut quadratum diametri A C, ad qua-

dratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc fit, ita esse circulum ad circulum, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descripto. Quoniam tã circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.

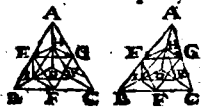
3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

S I T

SIT PYRAMIS, cuius basis triangulum ABC, uertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides A E G H, H I K D, quarum bases triangula A E G, H I K, & uertices H, D; nec non in duo solida E B F G H I K, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum E B F G, & triangula opposita E H G, B I F; huius uero basis est triangulum C F G, cui opponitur triangulum K I H, habentq; hæc prismata terminum communem, parallelogrammum F G H I; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, ut constet, si recte contemplantur pyramidis uertex D, in sublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera A D, B D, trianguli A D B, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter, erunt H I, A B, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt I K, B C; & H K, A C; & E G, B C; & E F, A C; & F G, A B; & E H, B D; & E I, A D; & I F, D C; & H G, D C. Sunt autem & rectæ F G, H I, cum parallelæ sint ipsi A B, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt G H, F I, cum sint parallelæ ipsi D C. Quare parallelogramma sunt A E I H, H E B I, I D H E, E B F G, G H K C, C K I F, F G H I. Quoniam uero rectæ H E, H G, rectis D B, D C, sunt parallelæ erunt anguli E H G, B D C, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli H E G, D B C; & H G E, D C B. Proportionalia igitur sunt latera trianguli H E G, lateribus trianguli D B C, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum H E G, triangulo D B C. Sunt autem & triangula H A E, H A G, A E G, triangulis D A B, D A C, A B C, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo A E G H, pyramidi A B C D, similis est, per def. 9. huius lib. Rursus quia rectæ H I, H K, rectis A B, A C, sunt parallelæ, erunt anguli I H K, B A C, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli H I K, A B C; & H K I, A C B. Quare latera trian-



2. sexti.

9. undec.

10. undec.

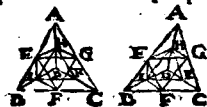
4. sexti.

20. undec.

guli

4. *sexti.*

guli $H I K$, lateribus trianguli $A B C$, circa æquales angulos sunt propoportionalia; ac propterea triangulum $H I K$, triangulo $A B C$, simile est: Sunt autem & triangula $D H I$, $D I K$, $D K H$, triangulis $D A B$, $D B C$, $D C A$, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo $H I K D$,



similis est quoque eadem pyramidi $A B C D$, per defin. 9. huius lib. Quoniam autem triangula $A H E$, $H D I$, similia sunt trian-

23. *sexti.*

gulo $A D B$, ut ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6: ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales $A H$, $H D$, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula $A H G$, $H D K$, cum similia sint ostensa triangulo $A D C$, & constituta super æquales rectas $A H$, $H D$. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula $A E G$, $H I K$, cum similia sint ostensa triangulo $A B C$, & super rectas posita $A E$, $H I$, quæ æquales sunt, ob parallelogrammum $A E I H$. Non secus æqualia erunt & similia triangula $E H G$, $I D K$, cum sint ostensa similia triangulo $B D C$, & habeant rectas $H E$, $D I$, quæ æquales sunt, ob parallelogrammum $H E I D$. Pyramides igitur $A E G H$, $H I K D$, æquales sunt & similes, per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia triangula unus æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, ut demonstratum est.

34. *primi.*

$R V R S V S$, quia rectæ $E H$, $H G$, $G E$, æquales sunt, & parallelæ rectis $B I$, $I F$, $F B$, ob parallelogramma $E H I B$, $F G H I$, $B F G E$; erunt triangula $E H G$, $B I F$, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1.

15. *undec.*

Ac propterea & similia: Sunt autem & parallelæ; cum $E H$, $H G$, per quas ducitur planum $E H G$, parallelæ sint rectis $B I$, $I F$, per quas planum $B I F$, ducitur. Igitur solidum $B I F G H E$, contentum duobus triangulis $E H G$, $B I F$, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis $E G F B$, $B E H I$, $I F G H$, prisma est, ex definitione. Eodem modo prisma ostenditur solidum $C F G H I K$. Cum enim rectæ $F C$, $C G$, $G F$,

34. *primi.*

æquales sint, & parallelæ rectis $I H$, $H K$, $K I$, ob parallelogram-

logramma $CFIK$, $CGHK$, $FGHI$; erunt triangula CFG , HIK , æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: Sunt autem & parallela, quod rectæ CF , CG , per quas ducitur planum CFG , parallela sint rectis KI , KH , per quas planum KIH , ducitur. Igitur solidum $CFGHIK$, contentum duobus triangulis CFG , KIH , ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis $CFIK$, $KHGC$, $IFGH$, prisma est. Quoniam uero prismata $EBFGHI$, $CFGHIK$, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCE , HIK , & parallelogrammum $EBFG$, basis illius, duplum est trianguli CFG , basis huius, per scholion prop. 4. lib. 1. Ipsa inter se æqualia erunt.

15. undec.

DEINQUE quia prisma $EBFGHI$, maius est pyramide $EBFI$, totum parte; Est autem pyramis $EBFI$, æqualis & similis pyramidi $AEGH$, necnon pyramidi HIK , ut perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata $EBFGHI$, $CFGHIK$, pyramidibus $AEGH$, $HIKD$. Ac proinde illa quidē dimidiū pyramidis $ABCD$, excedent, hæ uero a dimidio eiusdē deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor uero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

40. undec.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autē illarū utraq; diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes totis; & in duo prismata æqualia; Ac eodē modo diuisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis

basis,

basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

S I N T duæ pyramides $ABCD, EFGH$, eiusdem altitudinis, quarum latera bitariam diuidantur in punctis $I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V$, connectanturque rectæ $IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS$ SP , ita ut pyramis utraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in $A I L M, M N O D; E P R S, S T V H$; & in



bina prismata æqualia $IBKLMN, CKLMNO, PFQRST, GQRSTV$, ut vult propositio præcedens: Eodemque modo intelligantur esse diuise pyramides factæ $A I L M, M N O D; E P R S, S T V H$; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide $ABCD$, ad omnia prismata generata in pyramide $EFGH$, illis multitudine æqualia, ut est basis ABC , ad basin EFG . Cum enim sit ut BC , ad CK , ita FG , ad GQ , eo quod utraque linea sit diuisa bitariam; sint autem triangula ABC, LKC , similia similiterque posita; Item triangula EFG, RQG , ex coroll. propos. 4. lib. 6. Erit quoque ut triangulum ABC , ad triangulum LKC , ita triangulum EFG , ad triangulum RQG : Et permutando, ut ABC , ad EFG , ita LKC , ad RQG . Ut autem LKC , ad RQG , ita est prisma $CKLMNO$, ad prisma $GQRSTV$, ut mox ostendemus, atque adeo ita prisma $IBKLMN$, ad prisma $PFQRST$, cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prisma, uidelicet $IBKLMN$, ad unum prisma $PFQRST$, ita sunt duo prismata $IBKLMN, CKLMNO$, ad duo prismata $PFQRST, GQRSTV$. Igitur erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EFG ; ita duo prismata in pyramide $ABCD$, ad duo prismata in pyramide $EFGH$. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus $A I L M, M N O D$, factis in pyramide $ABCD$, ad bina prismata in pyramidibus $E P R S, S T V H$, factis in pyramide $EFGH$, ut sunt bases $A I L, M N O$, illatum pyramidum ad bases

12. sexti.

12. quinti.

ad bases EPR , STV , harum pyramidum; & sic deinceps, eadem semper facta diuisione. Sed, ut illæ bases ad has, ita est LKC , basis, quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQS , quæ his est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC , ad basin EFG . Igitur erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EFG , ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide $ABCD$, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide $EFGH$: Ac propterea erunt quoque, ut prismata pyramidis $ABCD$, ad prismata pyramidis $EFGH$, ita prismata tam pyramidis $AILM$, ad prismata pyramidis $EPRS$, quam prismata pyramidis $MNOD$, ad prismata pyramidis $STVH$; & ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis $ABCD$, ad duo prismata pyramidis $EFGH$, ita omnia prismata in pyramidibus $ABCD$, $AILM$, $MNOD$, &c. simul, ad omnia prismata in pyramidibus $EFGH$, $EPRS$, $STVH$, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EFG , ita omnia prismata in pyramide $ABCD$, ad omnia prismata in pyramide $EFGH$. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

12. quinsi

L E M M A.

Quod autem sit LKC , ad RQG , ita prismata $CKLMNO$, ad prismata $GQRSTV$, ita ostendemus. Intelligantur ex uerticibus D, H , ad bases ABC , EFG , demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum $ABCD$, $EFGH$. Quoniam igitur plana parallela ABC , MNO , secant duas rectas, nempe DC , & perpendicularem ex D , demissam proportionaliter; secatur autem DC , bisariam in O ; secabitur quoque perpendicularis ex D , demissa bisariam in puncto, cui planum MNO , occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H , demissa bisariam secabitur a plano STV . Quare cum totæ perpendi-

17. undec.

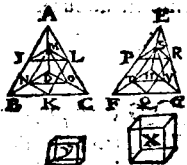
lares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata $CKLMNO, GQRSTV$, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases LKC, RQG , per ea, quæ ad propof. 34. lib. 1. i. demonstrauimus.

5.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt; ut bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis $ABCD, EFGH$, quarum bases triangula ABC, EFG , Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis ABC , ad basin EFG , ita pyramis



$ABCD$, ad solidum X , quod uel minus erit, uel maius pyramide $EFGH$. Sit primo minus, magnitudinis Y . Diuidatur pyramis $EFGH$, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propof. 3. huius lib. Rursus eodem modo facit pyramides in pyramide

$EFGH$, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide $EFGH$, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata $PFQ, RST, GQRSTV$, quæ maiora sunt dimidio pyramidis $EFGH$: Item a reliquis pyramidibus $EPRS, STVH$, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y , excessus pyramidis $EFGH$, supra solidum X . Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis $EFGH$, æqualis ponatur solidis X, Y ; erunt reliqua prismata in pyramide $EFGH$, maiora solido X . Diuidatur pyramis $ABCD$, in duas pyramides æquales, & duo pris-

mata

3. duodecim.

1. decimi

mata æqualia; & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat; quoties id factum fuit in pyramide EFGH. Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, ut basis ABC, ad basin EFG, hoc est, ut pyramis ABCD, ad solidū X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quā tota pyramis ABCD; Erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora, quam solidum X. Ostensa uero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.

4. duodec.

Sic secundo solidū X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, ut basis ABC, ad basin EFG; Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, ut basis EFG, ad basin ABC. Ponatur ut solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide EFGH; erit & pyramis ABCD, maior solidō Y. Quare erit, ut basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, ut est basis, ab basin, ita pyramidem ad solidū, pyramide minus. Non ergo maius est solidum pyramide EFGH; sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidū X. Sic autem pyramis ABCD, ut ad solidum X, ita ad pyramidem EFGH, solidō X, æquale; Erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub ea enim ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

14. quinti

14. quinti

7. quinti.

SCHOLIION.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares interfuerint, ut basis; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim unius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abscissionis ad oēs angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritq; ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutā: Sed sic quoq; erat ad totā pyramidem. Pyramis ergo constituta

9. quinti. *Aequalis erit toti pyramidi, pars tota. Quod est absurdum.*

COROLLARIUM.

HINC fit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel aequales bases triangulares constitutas, esse inter se aequales; propterea quod eandem proportionem habeant cum basibus, quoniam aequales ponuntur, vel certe una & eadem.

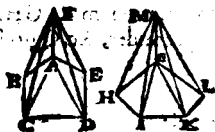
Ita per sequitur, e converso pyramides triangulares aequales super eandem, vel aequales bases, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares aequales eandemque habentes altitudinem, bases habere aequales, si non eandem habuerint. Quia quidem duo ex prima parte corollarii eodem argumento ostendemus, quo in converso propos. 10. & 11. lib. 11. demonstrando, uti sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa, constitutatur alia pyramis, &c.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides ABCDEF, GHI KLM, quarum bases polygonae ABCDE, GHIKL, latera multitudine aequa habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resolvamus enim basibus in triangula numero aequa, erit quilibet pyramis in totidem pyramides triangulares divisa. Quia vero



est, ut basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACD F; Et ita componendo ut basis ABCD, ad basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACD F: Sed rursus est ut basis

ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACD F, ad pyramidem ADE F. Igitur ex aequo ut basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADE F. Componendo ergo erit ut basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADE F. Simili argumento erit ut basis GHIKL, ad basin GKL, ita pyramis GHI KLM,

KLM,

5. duodec.

5. duodec.

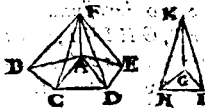
K L M, ad pyramidem G K L M; Et conuertendo ut basis G K L ad basin G H I K L, ita pyramis G K L M, ad pyramidem G H I K L M. Rursus quoniam est, ut basis A D E, ad basin G K L, ita pyramis A D E F, ad pyramidem G K L M; Erunt quatuor bases A B C D E, A D E, G K L, G H I K L, in eisdem proportionibus cum quatuor pyramidibus A B C D E F, A D E F, G K L M, G H I K L M, ut in hac formula uides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex aequo, erit ut basis A B C D E, ad basin G H I K L, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M; Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

AB CDE	AB CDEF
ADE	ADEF
G K L	G K L M
G H I K L	G H I K L M

5. duodec.

SCHOLION.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygoni latera habent multitudine equalia; facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum unius basis plura continet latera, quam basis alterius. Sint enim primum dua pyramides eiusdem altitudinis A B C D E F, G H I K, quarum illius basis sit polygoni, nempe pentagoni, huius uero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin.



Resolutio enim pentagoni in triangula, erit & pyramis in pyramides numero aequales diuisa. Quoniam uero est, ut basis A B C, prima quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; Et eodem modo, ut basis A C D, quinta quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A C D F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; Erit ut basis A B C D, prima quantitas cum quinta, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis A B C D, prima quanti-

5. duodec.

24. quinq.

5. duodec.

24. quinti

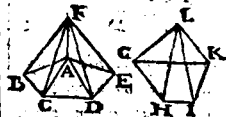
isi, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $AB-
CDE$, tertia quantitas, ad pyramidem $GHIK$, quartam quanti-
tatem, ut modo est. offenditur: & ut basi, ADE , quinta quan-
titas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $AD-$



EF , sexta quantitas, ad pyramidem
 $GHIK$, quartam quantitatem;
Erit etiam ut basi $ABCDE$, pri-
ma quantitas cum quinta, ad basin
 GHI , secundam quantitatem, ita

pyramis $ABCEDE$, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem
 $GHIK$, quartam quantitatem. Quod est propositum. En-
dem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula
in basi polygoni. Cum autem, ut demonstratum est, si ut ba-
sis polygoni $ABCDE$, ad basin triangularem GHI , ita pyra-
mis $ABCEDE$, ad pyramidem $GHIK$; Erit quoque con-
uerfendo, ut basi GHI , ad basin $ABCDE$, ita pyramis $GH-
IK$, ad pyramidem $ABCEDE$. Quam ob rem due pyramides
qualibet, quarum unus basis est polygoni, alterius triangula-
ris, suis basibus sunt proportionales, undeunque incipias.
Quantitas enim demonstratio incipiat a polygono, eiusque pyra-
mide, ut ex demonstratione constat, tamen conuerfendo licebit
initium quoque sumere a triangulo, eiusque pyramide, ut di-
ctum est.

SBD iam sint dua pyramides eiusdem altitudinis $ABC-
DEF$, $GHIKL$, quarum bases sint polygoni, sintque plura
latera in una base, quam in altera. Dico rursus esse pyramidem



ad pyramidem, ut est basis ad ba-
sin. Resoluto enim polygono $ABC-
DEF$, in triangula ABC , ACD ,
 ADF , erit pyramis eius in totide-
dinisa pyramides. Quia vero, ut

iam est demonstratum, est ut basi ABC , triangularis prima
quantitas, ad basin $GHIK$, polygonam, secundam quantitatem;
ita pyramis $ABEF$, tertia quantitas ad pyramidem $GHIKL$,
quarta quantitas; & ut basi ACD , quinta quantitas, ad
basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ACDF$, sex-
ta quantitas, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem;
Erit etiam ut basi $ABCD$, prima quantitas cum quinta, ad ba-
sin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ABCE$, ter-
tia

24. quinti

ita

ita quantitas cum sexta, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis $ABCD$, prima quantitas, ad basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ABCD$, tertia quantitas, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem, ut proxime demonstratum est; Et est quoque ut basis ADE , quinta quantitas, ad basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ADEF$, sexta quantitas, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem, ut ante est ostensum; Erit etiam ut basis $ABCD$, prima quantitas cum quinta, ad basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ABCD$ 24. quinti DEF , tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi $ABCD$.

HANC autem propositionem 6. & ea, quae in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quae inter se sunt, ut bases; eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quae in scholio proposit. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIUM.

PERSPICUUM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super aequales bases multangulas, uel eandem constitutas, esse inter se aequales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quae aequales ponuntur, uel certe una & eadem.

RURSUS contra fit, pyramides multangulas aequales, & super aequales bases, uel super eandem constitutas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas aequales, eandemque habentes altitudinem, aequales habere bases, si non habuerint eandem. Haec autem duo dem ostenduntur, ut in coroll. proposit. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

6.

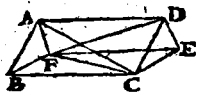
OMNE prisina triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides

Y 4 aequales

æquales inter se, triangulares bases habentes.

34. primi

5. duodec.



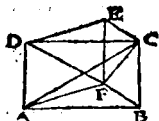
SIT prisma $ABCDEF$, cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia ABF, DCE . Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur in tribus paralelogramis tres diametri, nempe AC , in $ABCD$; CE , in BCE ; FD , in $ADEF$. Quoniam igitur triangula ABC, ADC , æqualia sunt; estque ut basis ABC , ad basin ADC , ita pyramis $ABCF$, ad pyramidem $ADCF$, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F , uertice ad planum $ABCD$, demissam; Erunt & pyramides $ABCF, ADCF$, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides $ADFC, EFDC$, super æquales bases ADF, EFD , constituta, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari a uertice C , ad planum $ADEF$, demissa. Est autem pyramis $ADCF$, eadem pyramidi $ADFC$, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC , & triangulis ADF, ACF, DCF ; hæc uero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF , & triangulis ADC, ACF, DCF . Igitur tres pyramides $ABCF, ADCF, EFDC$, seu $CDEF$, (quæ eadem est pyramidi $EFDC$, cum tam $EFDC$, quam $CDEF$, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE , totum prisma componentes, ut perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma $ABCDEF$, in tres pyramides est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basim, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM. I.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim, & altitudinem.

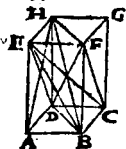
SIT enim primum pyramis $ABFC$, triangularem habens basim ABF ; & prisma $ABCDEF$, sub eadem altitudine eandem habens basim triangularem ABF . Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis.

prismatis. Nam si ducatur recta DF , erit prismata diuisum in tres pyramides aequales $ABCF$, $ADCF$, $CDEF$; ut demonstratum est; Ac propterea pyramis $ABCF$, hoc est, pyramis $A B F C$, (cum hæc illi sit æqualis, immo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF , FCA , ABC , CBF), tertia pars erit prismatis $ABCDEF$. Cum igitur pyramis $ABFC$, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF , constituta, ex coroll. propof. 5. huius lib. manifestum est quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma e contrario esse pyramidis triplum.



7. duodec.

Si t. secundo pyramis $ABCDE$, cuius basis rectilineum quodcunque $A B C D$, quolibet laterum; & prisma $ABCDEFGH$, sub eadem altitudine eandem habens basin. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi $ABCD$, & plano opposito $EFGH$, in triangula numero æqualia ADB , BCD ; EHF , FGH ; erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ducis ergo rectis AH , BH ; DF , CF ; erit, ut demonstratum est, pyramis $ADBH$, tertia pars prismatis $ABFEHD$; Item pyramis $BCDF$, tertia pars prismatis $CDHGFB$. Quare erit, ut pyramis $ADBH$, ad prisma $ABFEHD$, ita pyramis $BCD F$, ad prisma $CDHGFB$; Ac propterea ut una pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma $ABCDEFGH$. Igitur pyramides $ADBH$, $BCDF$, simul tertia partem constituent prismatis $ABCDEFGH$. Sunt autem pyramides $ADBH$, $BCDF$, æquales pyramidi $ABCD E$; propterea quod pyramides $ADBH$, $ADBE$, super eandem basin, & sub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. propof. 5. huius lib. Eademque ratione æquales sunt pyramides $B C D F$, $BCDE$, super eandem basin, & sub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides $ADBE$, $BCDE$, componant totam pyramidem $ABCDE$; erit & pyramis $ABCDE$, tertia pars prismatis $AB C D E F G H$. Cum igitur pyramis $ABCDE$, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin $AB C D$, constituta, per coroll. propof. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin multilateram, eandemque altitudinem.



12. quinti

Quod si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singulae pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiae partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæc pyramides æquales sint pyramidi basi habenti polygonum prismatis propositi, constat propofitum.

B o d e m modo pyramis tertia pars est prismatis habentis ba-

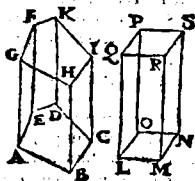
sem basi, & altitudinem altitudini pyramidis equalem. Nam eiusmodi pyramis æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propof. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIUM. I.

EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

SVB eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases; inter se sunt, ut bases.

QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. II. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, & vertices vero lineæ rectæ; nec nõ de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen id ipsum demonstrabimus uniuersè de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygonæ, quamuis plura latera seu anguli in vnius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis



AB C D E F G H I K, L M N O P Q R S, quorum bases sint figura multilatera. Dico, ut est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis utriusque ba-

sis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cùm prismatis, habentes easdem bases: Ac proinde, per coroll. prædictum, qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. Quam ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, ut basis ad basim, ut ostensum est propof. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque ut basis ad basim, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.

15. Quinti

CONVERSO modo, si prismata quorumcunque basium inter se sint, ut bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendimus, quo scholion propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIUM. II.

VND α prismata eiusdem altitudinis super eandem, uel aequales bases quascunque, inter se sunt aequalia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quae aequales ponuntur, uel certe una & eadem.

CONTRARIO, Prismata aequalia super aequales bases, uel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata aequalia eiusdem altitudinis, bases habent aequales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. II. fuit demonstratum.

SCHOLION. II.

CARTERVM tam ea, quae in priori corollario, quam illa, quae in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quae in vertice habent plana basi parallela, aequalia, & similia. Quod dixerim, ne hallucinor, in prismate constanter duobus triangulis parallelis, aequalibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod uidelicet Campanus cum alijs putat tantummodo prismata dici ab Euclide, ut in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis unum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, ut in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basim, ut in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis concipiatur unum parallelogrammorum, ita ut in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed dua tertia partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam uidelicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud aequale & simile, ut parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedum, ex corollario

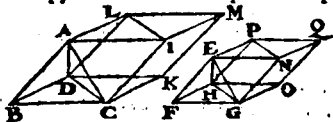
lario predicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebis, quam 3. ad 2. nimirum sesqui alteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prisma habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cum ita sint, non habebis tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ sunt, & bases parallelogramma, vel ceræ, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, equalia atque similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, dua tertia partes prismatum, ut modo demonstravimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

S I N T pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita ut bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula unius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homolo-



ga, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur

cantur

cantur L M, I M, rectis A I, A L, parallelæ & æquales, convenientes in M, connectaturque recta K M. Erit igitur cōpletum parallelepipedum B M, eiusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi B M, sint parallela, ut facile colligitur ex propof. 15. lib. 11. Rurfus eodem modo perficiatur parallelepipedum F Q. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani A B C, E F G, sunt æquales, estque ut A B, ad B C, ita E F, ad F G; erunt parallelogramma B I, F N, similia. Eodem modo cū anguli A B D, E F H, sint æquales, sitque ut A B, ad B D, ita E F, ad F H; Item anguli D B C, H F G, æquales, & sit D B, ad B C, ita H F, ad F G; erunt & parallelogramma B L, B K, parallelogrammis F P, F O, similia. Sed tam tria B I, B K, B L, parallelepipedum B M, reliquis tribus oppositis D M, A M, C M; quam tria F N, F O, F P, parallelepipedum F Q, reliquis oppositis tribus H Q, E Q, G Q, sunt æqualia & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum B M, similia sunt sex planis solidum F Q, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda B M, F Q. Quoniā uero ductis rectis L I, P N, prismata D B C I L A, H F G N P E, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda B M, F Q, eorum dupla; & pyramides A B C D, E F G H, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; habebūt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. Cum igitur proportio parallelepipedum B M, ad parallelepipedum F Q, sit triplicata proportionis homologorum laterū B C, F G; erit quoque proportio pyramidis A B C D, ad pyramidem E F G H, proportionis B C, ad F G, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

S I N T pyramides similes, quarum bases rectilineæ similia plurium laterum A B C D E, G H I K L. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera, homologa A B,

G H.

24. undec.

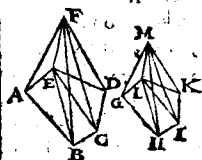
15. quinti

11. quinti

33. undec.

20. sexti.

G H. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ E B, B C; L H, L I, diuise: erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula ABE, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit ut FE, ad EA, ita M L, ad L G: Vt autem EA, ad EB, ita L G, ad LH, propter similitudinem triangulorum ABE, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita M L, ad L H. Rursus quia est ut EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; et ut B A, ad BF, ita HG, ad H M, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula



ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita L H, ad H M; Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita M L, ad LH; & ut EB, ad BF, ita L H, ad H M; erit etiam ex æquo, ut FE, ad FB, ita M L, ad M H. Quare æquiangularæ, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH: Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulus MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defn. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Itæ CDEF, IKLM. Quapropter, ut demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singule ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum A B, B C, C D, ad G H, H I, I K, singulorum ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; Atque ideo erit, ut una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita oēs pyramides nempe pyramis ABCDEF, ad oēs pyramides; nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

5. sexti.

8. duodec.

12. quinti.

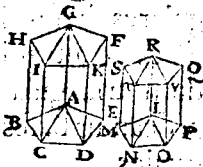
8. duodec.

S C H O L I O N

EAD E M ratione, prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S T V. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ A C, A D; L N, L O, erunt, & de pyramidibus dictum est, triangula A B C, C A D, D E A, triangulis L M N, N L O, O P L, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ

20. sexti.

recta GL, GK, RT, RH , sunt triangula GHI, IGR, KFG , & triangulis RST, TRV, VQR , & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam uero, ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS , similia sunt; erit ut IC , ad CB , ita TN , ad NM . Ut autem CB , ad CA , ita quoque est NM , ad NL , ob similitudinem triangulorum BCA, MNL . Ignitur ex aequo erit ut IC , ad CA , ita TN , ad NL .



Rursus quoniam angulus solidus N , æquatus est solido angulo C , ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se convenient, nimirum angulus MNO , angulo BCD , & angulus PNM , angulo ICB , & angulus TNO , angulo ICD : Conueniunt autem & recta NL , recta CA , eo quod anguli MNL, BCA , sunt æquales; igitur anguli ICA, TNL , æquales sunt; Ac, propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma CG, NR , similia. Atqui & parallelogramma CH, HA , parallelogrammis NS, ST ; & triangula ABC, GHI , triangulis LMN, RST , similia sunt. Igitur prismata $ABCIGH, LMNTRS$, similia sunt, ex definitione solidorum similitum. Non aliter ostenduntur esse similia prismata $CDAGIK, NOIRTV$; nec non prismata $AEDKGF, LPOVRQ$. Quapropter prismata $ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF$, ad prismata $LMNTRS, NOIRTV, LPOVRQ$, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 3. 4. lib. 11. triplicatam habet proportionem, singula ad singula, laterum homologorum BC, CD, DE , ad MN, NO, OP , singulorum ad singula. Ac, propterea eodem modo demonstrabimus, prismata $ABCDEFGH, LMNOPQRSTV$, proportionem habere homologorum laterum BC, MN , triplicatam, quo paulo ante res sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

Ex quibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, et numero æquales, et homologas totis. Hoc non manifestum est ex demonstratione prædictæ coroll.

Eodem modo inferri, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, et homologa totis. Ut apparet ex huius scholii demonstratione.

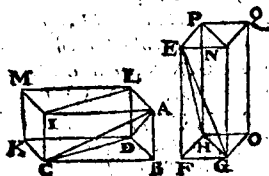
THEOR.

7.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

AEQUALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim per-



ficiantur, ut in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se

æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit ut basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: Vt autem basis BI, ad basin FN, ita est triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eadem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

SINT iam bases & altitudines reciprocae. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, ut prius, cum sit ut A B C, ad E F G, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eadem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum

34. undec.

15. quinti

15. quinti

pipedorū & altitudines eorundem reciprocæ; Ac propterea inter se equalia erunt parallelepipeda B M, F Q. Quare & prismata DBCLLA. HFGNPE, eorum dimidia, equalia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. A Equalium igitur pyramidū, & triangulares bases habentium. &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

E A D E M ratione A Equalium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illa sunt equalia. Sint enim primum dua pyramides equalia, quarum quidem A B C D, basin habeat triangularem; at uero E F G H I, non triangularem. Fiat basi non triangulari E F G H, æquale triangulū K L M.

Quod quidem fiet, si basi multilatera renocetur ad parallelogrammum, per propof. 43. lib. 1. Nam hoc parallelogrammū facile ad triangulum reducitur, per ea, que demonstrauimus ad propof. 42. lib. 1. Deinde super K L M, fiat pyramis K L M N, eiusdem altitudinis cum pyramide E F G H I. Quoniam ergo pyramides E F G H I, K L M N, equalia habent bases, & eandem altitudinem, ipse erunt equalia, per ea, qua in scholio propof. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis E F G H I, equalis pyramidi A B C D. Igitur & pyramis K L M N, pyramidi A B C D, equalis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides A B C D, K L M N, bases triangulares; erit ut basis A B C, ad basin K L M, hoc est, ad huc æqualem basin E F G H, ita altitudo pyramidis K L M N, hoc est, altitudo pyramidis E F G H, (ponantur enim he altitudines equalia.) ad altitudinem pyramidis A B C D. Ac proinde pyramidum A B C D, E F G H I, equalium bases & altitudines reciprocantur.



Super K L M, fiat pyramis K L M N, eiusdem altitudinis cum pyramide E F G H I. Quoniam ergo pyramides E F G H I, K L M N, equalia habent bases, & eandem altitudinem, ipse erunt equalia, per ea, qua in scholio propof. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis E F G H I, equalis pyramidi A B C D. Igitur & pyramis K L M N, pyramidi A B C D, equalis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides A B C D, K L M N, bases triangulares; erit ut basis A B C, ad basin K L M, hoc est, ad huc æqualem basin E F G H, ita altitudo pyramidis K L M N, hoc est, altitudo pyramidis E F G H, (ponantur enim he altitudines equalia.) ad altitudinem pyramidis A B C D. Ac proinde pyramidum A B C D, E F G H I, equalium bases & altitudines reciprocantur.

S B D reciprocantur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse equalia. Constructa enim, figura eodem modo; cum basis K L M, equalis sit basi E F G H, & alti-

Z

endo

34. undec.

9. duodec.

9. duodec.

undo pyramidis $KLMN$, eadem que pyramidis $EFGHI$; ponatur autem esse ut ABC , ad $EFGH$, ita altitudo pyramidis $EFGHI$, ad pyramidis $ABCD$, altitudinem; erit quoque ut basis



ABC , ad basin KLM ; ita altitudo pyramidis $KLMN$, ad altitudinem pyramidis $ABCD$. Quamobrem aequales sunt pyramides $ABCD$, $KLMN$. Cum er

go pyramis $KLMN$, aequalis sit pyramidi $EFGHI$, per ea, quae ostensa sunt in scholio propof. 6. huius lib. Erit & pyramis $ABCD$, pyramidi $EFGHI$, aequalis. Quod est proposuim.

S I N T secundo pyramides aequales $ABCDE$, $FGHIKL$, quarum bases sint multangula. Fias rursus triangulum MNO , aequale basi $ABCD$, & pyramis $MNOP$, eiusdem altitudinis



cum pyramide $ABCDE$: Eritque ex scholio propof. 6. huius lib. pyramis $MNOP$, aequalis pyramidi $ABCD$. Sed hac a-

qualis ponit pyramidi $FGHIKL$. Igitur & pyramis $MNOP$, aequalis est pyramidi $FGHIKL$. Quare, ut nunc demonstramus, erit ut basis MNO , hoc est, basis $ABCD$, sibi aequalis, ad basin $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinem pyramidis $MNOP$, hoc est, ad altitudinem pyramidis $ABCDE$; (ponuntur enim haec altitudines aequales.) Ac propterea pyramidem aequalium $ABCDE$, $FGHIKL$, bases & altitudines reciprocantur.

S I D reciprocetur iam bases harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse aequales. Constituta enim eodem modo figura, cum basis MNO , aequalis sit basi $ABCD$, & altitudo pyramidis $MNOP$, eadem que pyramidis $ABCDE$; ponatur autem ut $ABCD$, ad $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinem pyramidis $ABCDE$; Erit quoque ut MNO , ad $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinem pyramidis $MNOP$. Quare ut ante ostendimus, aequales erunt pyramides $MNOP$, $FGHIKL$: Est autem pyramis $MNOP$, pyramidi $ABCDE$, aequalis, ex scholio propof. 6. huius lib. Igitur & pyramis $ABCDE$, pyramidi $FGHIKL$, aequalis erit. Quod est proposuim.

OMNIA haec facile quoque demonstrabitur convenire prismatibus quibuscunque. Nam si prisma fuerint aequalia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinis cum ipsis, & super easdem bases, aequales;

æquales; cū sint eorū tertia partes, ex coroll. propof. 7. huius lib. Vel certe dua tertia, si nimirū prismatū bases fuerint parallelograma, & eorū uertices, linea recta, ut in scholio eiusdē propof. ostensum est. Quare, ut modo demonstrauimus, bases harū pyramidū atq; altitudines reciprocantur. Cū ergo hæ bases & altitudines eadem sint qua prismatū reciprocantur quoque bases prismatum atque altitudines.

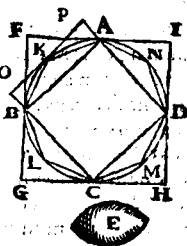
R V R S V S, si prismatū bases, & altitudines reciprocatæ reciprocabuntur quoq; bases, & altitudines pyramidū easdē bases & altitudines cum prismatis habentium. Quare, ut demonstratū est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint tripla, uel cerse sesquialtera, æqualia quoq; sunt. Quod est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

9.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus basin eandē circulū ABCD, & altitudinē eandē. Dico conū cylindri esse tertiā partē. Si n. conus nō credatur esse tertia pars cylindri, nō erit cylindrus conī triplus, sed uel maior, uel minor triplo conī. Sit primū maior quā triplū conī, magnitudine E, ita ut cylindrus sit æqualis triplo conī & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratū ABCD, & circa eūdē, quadratū FGHI; intelligaturq; super hæc quadrata sub altitudine conī, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratū ABCD, dimidiū est quadrati FGHI, ut ad propof. 9.



lib. 4. ostēdimus; estq; ut basis ad basin, ita parallelepipedū ad parallelepipedū eiusdē altitudinis; Erit & parallelepipedū basis ABCD, dimidiū parallelepipedi basis FGHI; Ac proinde parallelepipedū basis ABCD, mai⁹ erit, q̃ dimidiū cylindri, cuius

32. undec.

cuius basis circulus ABCD. Secetur bifaria peripheria A B, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallelæ erit ipsi AB, ut ad propos. 27. lib. 1. ostendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, A-BOP, intelligentur prismata sub altitudine co-

ligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulū AKB , dimidium est parallelogrammi $ABOP$; erit quoque prisma basis AKB , dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis $ABOP$: cum sit prisma ad prisma, ut basis ad basin, quemadmodum ad propof. 7. huius lib. demonstrauimus; Ac propterea prisma basis AKB , maius erit, quam dimidium segmenti cylindri, cuius

basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases, reliqua trian- gula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cy- lindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quo- rum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata si- mul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cy- lindri simul. Quod si rursus peripheriæ A K, K B, &c. sec- centur bisariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omniū segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmen- ta, & sic deinceps. Quoniam uero si a cylindro, cuius ba- sis circulus ABCD, auferatur plus, quam dimidium, nem- pe parallelepipedum basis A B C D; & a reliquis segmentis plus, quam dimidium, nimirum prismata basium A K E, B L C, &c. atque in hunc modum semper fiat subtractio; re- linquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cy- lindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri reli- cta basium A K, K B, B L, &c. (quæ quidem bases sunt cir- culi segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini B, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex tri- plo

41. primi.

x. decimi.

plc

plio conii una cum magnitudine B, ipsa magnitudo B, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prismæ basium triangulorum AKB, ECD, eandem habens altitudinem cono, & cylindro, maior quam reliquum triplum conii; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramidis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propof. 7. huius lib. Erat conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplum conii.

Sic secundo cylindrus minor triplum conii, ac proinde totus maior quam tertia pars cylindri. Si ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine B, ita & conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini B, similis. Inscribatur rursus in circulo quadratum A B C D, & circa eundem, quadratus F G H I; intelliganturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine conii & cylindri. Quoniam inscribitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati F G H I, ut ad propof. 9. lib. 4. demonstravimus; itaq; ut basis ad basin; ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis. Erat quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basia F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio conii, cuius basis circulus A B C D. Secentur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bisectantur in A, L; M, N, adiungantq; rectæ A K; K B, B L, L C; C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, ut ad propof. 29. lib. 3. demonstravimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A K B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine conii & cylindri. Quia ergo triangulum A K B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoque pyramis super basin A K B, dimidium pyramidis super basin A B O P, cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin A K B, maior erit dimidio segmenti conii, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum conii, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæc pyramides simul maiores sunt, quam di-

6. duodec.

41. primi.

6. duodec.

1. decimi.

media omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheria $A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A$, secetur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cono, cuius basis circulus $A B C D$, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basim $A B C D$, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus $A B C D$; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium $A K B, B L C, C M D, D N A$, atque ita hunc modum semper fiat, detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E , excessus coni supra tertiam partem cylindri. Sint iam segmenta coni relicta basium $A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A$, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minoræ, quam E . Cum igitur conus æqualis ponatur tertie parti cylindri, & magnitudini E , simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine E , ipsa magnitudo E , quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum $A K B L C M D N$, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in corollario propositionis septimæ huius libri a nobis est demonstratum; erit huiusmodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni. Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, proptereaque conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem.

Quod erat demonstrandum.

SCHO.

SCHOLION.

QUAMVIS propositio hac solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis conuenit, ut perspicuum est eius demonstratione diligenter intuenti. Itaque propositio uniuersæ ita proponi poterit.

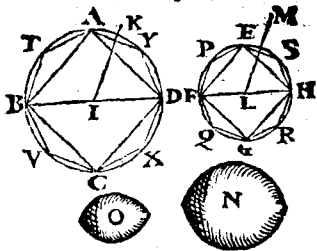
OMNIS conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis conici & cylindri.

THEOR. II. PROPOS. II.

II.

SUB eadem altitudine existentes conici & cylindri, inter se sunt, ut bases.

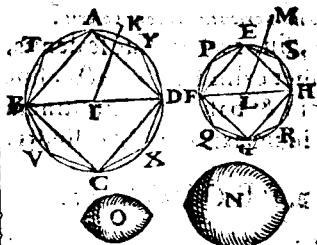
SINT sub eadē altitudine conici & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, altitudines uero æquales IK, LM. Dico ut est basis ad basim, ita esse conū ad conū, & cylindrū ad cylindrū. Si. n. hoc non credatur, sit ut basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquā magnitudinē, nempe ad N, quæ uel maior



erit, uel minor cono EFGHM. Si. n. esset æqualis, haberet conus ABCDK, ad conū EFGHM, & ad N, proportionē eandē; ac propterea esset conus ad conū, ut basis ad basim: quod non conceditur. Sit ergo primū N, minor quā conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribebat in circulo EFGH, quadratū EFGH, diuidaturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariā in P, Q, R, S, & adiungant rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basim EFGH,

7. quinti.

1. decimi.



quam O. excessus con-
ni EFGHM, super N.
Sint ergo ista segmen-
ta con: relecta basium
EP, PF, FQ, &c.
(quæ quidem bases
sunt circuli segmenta)
simul sumpta, mino-
ra quam O. Cum igitur
conus EFGHM,

ponatur æqualis ma-
gnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta
con: segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ præ-
dicti con: segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius
basis polygonum EPFQGRHS, eiusdem altitudinis cum
cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in
circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygo-
no EPFQGRHS, ut in propof. 2. huius lib. docuimus, du-
canturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur,
per coroll. propof. 2. huius lib. est ut circulus ABCD, ad
circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad poly-
gonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad cir-
culum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudi-
nem N; & ut polygonum ad polygonum, ita est pyramis
ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque
ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQ-
GRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis
ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, erit
& pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Ostensa au-
tem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor
est magnitudo N, cono EFGHM.

6. duodec.

Si T secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur
ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus
ABCDK, ad N; Erit & conuertendo ut circulus EFGH,
ad c

ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM; Sed neque minor est ostensa; Aequalis igitur est. Quapropter cum ponatur, ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Sit autem, ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

14. quinti.

7. quinti.

Q U O N I A M autem, ut conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni EFGHM) Erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo usi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

15. quinti.

S C H O L I O N.

P E R S P I C I V M quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis testis proposuit, ob rationem superius tractatam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, ut eius demonstratio manifeste indicat, ita ut propositio uniuerse proponatur in hunc modum.

S V B eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

CON.

CONVERTETUR. hæc propositio quinq; hoc modo.

SI coni & cylindri inter se sint, ut bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum propof. 32. lib. 11. ostendimus.

COROLLARIUM.

HINC fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, uel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, uel scaleni, siue unus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habeant, quam bases, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

ITEM sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, uel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter ac conuersum propof. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

10. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorū, quæ in basib⁹.

SINT similes coni, & cylindri, quorum bases circuli A B C D, E F G H, axes uero I K, L M, & diametri basium B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus A B C D K, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H: Eratque N, uel minor, uel maior cono E F G H M. Si enim esset æqualis, haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni A B C D K, ad conum E F G H M, esset quoque triplicata proportionis diametri B D, ad diametrum F H; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor, quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatq; eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita ut rursus pyramis E P F Q G R H S M, maior ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ K B, K T; M F, M P, ut habeantur duo trian-

7. quini.

gula

gula B K T, F M P, pyramidum A T B V C X D Y K,

E P F Q G R H S M,

& cōnectantur re-

ctæ T I, P L. Quo-

niam igitur coni

A B C D K, E F

G H M, similes

ponuntur; erit,

ex 24. defin. lib. 11.

ut diameter B D,

ad diametru F H,

ac propterea ut se-

midiameter B I, ad semidiametrum F L, ita axis I K, ad axem

L M; Ac permutatio ut B I, ad I K, ita F L, ad L M. Cū igitur

anguli B I K, F L M, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quod

coni recti ponantur, propterea q; axes recti ad eorum bases;

erunt triacula B I K, F L M, æquiangula; Ac propterea

ut K B, ad B I, ita M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita

F L, ad F P, ob similitudinem triangulorum B I T, F L P.

(Cum enim anguli B I T, F L P, insistentes similibus ar-

cubus B T, F P, sint æquales, ut in scholio propos. 3. lib. 6.

ostensum est; sitq; ut B I, ad I T, ita F L, ad L P, ob æ-

qualitatē tā linearū B I, I T, quam F L, L P; erunt triacula

B I T, F L P, similia.) Igitur ex æquo, ut K B, ad B T, ita M F,

ad F P. Rursus, quia latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia sūt

lateralibus K I, I T, trianguli K I T, & anguli dictis lateralibus cō-

prehēsi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cū axis I K, rectus ponatur ad

circulū A B C D, erunt bases K B, K T, & quales. Eodem modo

æquales erunt rectæ M F, M P; Ac propterea rectæ K B, K T,

rectis M F, M P, proportionales erūt, cū utrobq; sit propor-

tio æqualitatis. Quoniā uero, ut K B, ad B T, ita K T, ad can-

dē B T, itē ut M F, ad F P, ita M P, ad eandē F P: Erat autē ut

K B, ad B T, ita M F, ad F P; Erit quoque ut K T, ad B T, ita

M P, ad F P; Et cōuertēdo ut B T, ad T K, ita F P, ad P M. Qua

re cū sit ut T K, ad K B, ita P M, ad M F; & ut K B, ad B T, ita

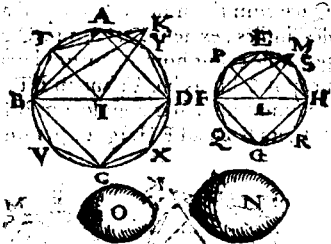
M F, ad E P; Et ut B T, ad T K, ita F P, ad P M, ueluti ostēsū

est; habebūt triacula B K T, F M P, latera pportionalia, ideo-

que æquiāgula erūt; Ac pinde similia, ex definitione. Non

aliter ostendentur reliqua triacula ambientia pyramides

A T-



15. quinti.

6. sexti.

4. sexti.

6. sexti.

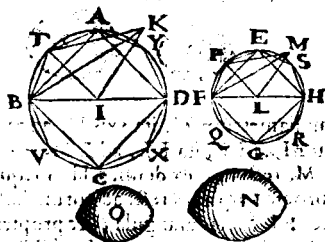
4. primi.

7. quinti.

5. sexti.

ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quae cum sint multitudine aequalia, erunt dictae pyramides similes, ex defina. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportionē erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propof. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL. ob similitudinem triangulorum B¹IT, FL¹P; Et ut BI, ad

15. quinti. FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habe-



bit quoque proportionem triplicatā diametrorū BD, FH. Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Erunt ergo ut pyramis ATBV-

CXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. ostensa autē est & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

14. quinti.

Sic secundo N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habeat proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime offendimus: Erunt ut conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo ut N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc est, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoque N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O,

propor-

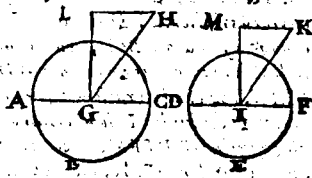
proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum B D. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM, serie quoque conus ABCDK, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum B D. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono EFGHM. Sed neque minor est ostensa. Aequalis igitur est; ac proinde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad conum EFGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportionem diametrorum B D, & F H; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in eandem diametrorum proportionem triplicatam.

Quoniam autem, uero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum, proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quae in basibus. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

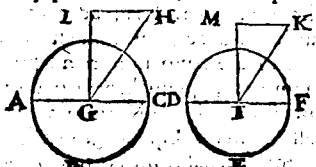
HABET propositio, quamvis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes recti ad bases.

Quocirca eam hac ratione ostendimus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli



ABC, DEF, axes uero GH, IK, & diametri basium AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere

habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur super eisdem bases duo coni, & cylindri, recti eandem cum scalenis altitudinum, quorum axes GL, IM . Ducanturq; per rectas GH, GL . Item per IK, IM , planas secantia bases lineis rectis AC, DF . Quoniam igitur axes GL, IM , recti sunt basibus ABC, DEF , erunt & plana per GH, GL ; & per IK, IM , ad eandem recta, ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K , ad bases demissa cadent in AC, DF , communes sectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIK , anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM , æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. reliqui igitur HGL, KIM , æquales quoq; erunt. Quoniam vero coni $ABCH, ABCL$, ponantur esse eiusdem altitudinis, erit recta HL , per axium uerices ducta ipsa AC , parallela, ideoq; angulus L , rectus: Eodemq; argumento rectus erit angulus M , cum & anguli CGL, FIM , recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K , æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK . Triangula igitur GHL, IKM , æquiangula sunt; atq; idcirco erit ut $GH, ad GL$, ita $IK, ad IM$; & permutando, ut $GH, ad IK$, ita $GL, ad IM$. Ut autem axis GH , ad axem IK , ita est AC , diameter ad DF , diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & GL , axis ad IM , axem erit, ut diameter AC , ad DF , diametrum; Et proinde coni & cylindri recti $ABCL, DEFM$, similes erunt, ex definitione. Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatâ. Quia vero ita conus & cylindrus $ABCL$, cono & cylindro $ABCH$, (cum eandem habent basim, & altitudinē,) quam conus & cylindrus $DEFM$, cono & cylindro $DEFK$, (ob eandem rationem,) est æqualis, ut constat ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit ut conus & cylindrus $ABCL$, ad conum & cylindrum $DEFM$, ita conus & cylindrus $ABCH$, ad conum & cylindrum $DEFK$; ideoq; proportio coni & cylindri $ABCH$, ad conum & cylindrum $DEFK$, triplicata quoq; erit diametri AC , ad diametrum DF . Quod est propositum.



12. undec.

32. undec.

32. primi.

29. primi.

4. sexti.

12. duodec.

7. quinti.

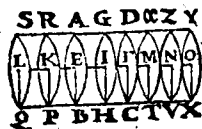
THEOR. 13. PROPOS. 13.

II.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrū, ita axis ad axem.

SECE TUR cylindrus ABCD, plano GH parallelo ad uersis planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico ut est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in utramq; partem, una cum eius axe, & rectangulo EC, ad cuius reuolutionē descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet; Sumaturq; in axe producto quocūq; rectæ E K, KL, æquales ipsi EI; Itē quocūq; rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallele, & æquales rectis EB, FC; quæ quidē ad reuolutionē rectanguli EC, describent circulos GH, PR, QS, TZ, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur.

Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componentes totum cylindrum SQXY. Quoniam uero tam cylindri SP, PA, AH, super



bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, TZ, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex corollario propof. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudi-

gnitudinis) æqualis quodquid est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplex cylindri C G, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propos. 11. huius lib. liquet. Si vero

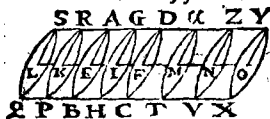


axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per defn. 6. lib. 5. ita axis I E, primâ magnitudo ad axem I F, se-

cundam magnitudinem, ut cylindrus A H, tertiâ magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ET SI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri



scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta sunt cylindri recti descriptio; ita ut quemadmodum in conis rectis rectangulus circa quies-

cen latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, E A, &c. semper æquidistantes circa centra L, K, E, &c. una cum recta S Y, semidiametris coniungente; hac enim ratione semper cylindri describentur, ut constat ex his, quæ scribis Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

II.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt, ut altitudines.

SINT

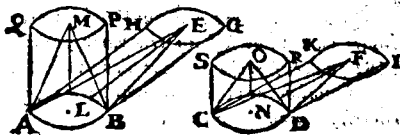
SINT super bases æquales AB, CD , duo conī ABE , CDF , & duo cylindri $ABGH, CDIK$, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipsi sunt altitudines) LE, MF . Dico esse conum ABE , ad conū CDF , & cylindrum $ABGH$, ad cylindrum $CDIK$, ut est altitudo LE , ad altitudinem MF . Extendatur enim cylindrus $ABGH$, ad partes GH , una cum eius axe LE , & rectangulo AE ; abscindaturque axis EN , æqualis axi MF , & circa centrum N , intelligatur circulus OP , æqualis & parallelus circulo GH , ut fiat cylindrus $GHOP$, eiusdem altitudinis cum cylindro $CDIK$. Quoniam igitur cylindri HP, CI , cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propof. 11. huius lib. propterea que cylindrus AG , ad ipsos eandem habet proportionem: Est autem cylindrus AG , ad cylindrum HP , ut axis, seu altitudo LE , ad axem seu altitudinem EN , hoc est, ad altitudinem MF , sibi æqualem. Igitur & cylindrus AG , ad cylindrum CI , erit quoque, ut altitudo LE , ad altitudinem MF .

Quia vero conī ABE, CDF , sunt tertie partes cylindrorum AG, CI ; ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE , ad conum CDF , ut altitudo LE , ad altitudinem MF . Super æqualibus igitur basibus existentes conī & cylindri, inter se sunt, ut altitudines. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

Hoc idem convenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint

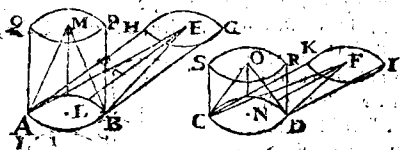
super bases æquales AB, CD , conī ABE, CDF , & cylindri $ABGH, CDIK$,



scaleni, quorum altitudines LM, NO . Dico conum ABE , ad conum CDF , ut altitudo LM , ad altitudinem NO .

7. quinti.
13. duodec.
10. duodec.
15. quinti

conum C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, esse, ut est altitudo L M, ad altitudinem N O. Super basin A B,



construatur cylindrus rectus ABPQ, sub altitudine L M; Item super basin C D, cylindrus re-

ctus C D R S, sub altitudine N O. Quoniam igitur, est cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum C D R S, ut altitudo L M, ad altitudinem N O: Est autem cylindrus ABPQ, cylindrus ABGH; Item cylindrus C D R S, cylindrus C D I K, equalis, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum C D I K, ut altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod est propositum.

Quoniam autem conus, cum sint tertiae partes cylindrorum, eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus ABE, ad conum C D F, ut altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod tamen eodem argumento, quo usi sumus in cylindris, confirmari potest, ut perspicuum est, si super bases A B, C D, fiant conus recti ABM, CDQ, earundem altitudinum cum cylindris ABPQ, C D R S.

Idem concludetur, quamvis unus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus, aliter vero, nimirum conus C D F, et cylindrus C D R S, rectus. Nam cum cylindrus scalenus ABGH, equalis sit cylindro recto ABPQ; sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum C D R S, ut altitudo L M, ad altitudinem N O, ut Euclides demonstravit: Erit quoque cylindrus scalenus ABGH, ad cylindrum rectum C D R S, ut altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod est propositum.

Quoniam vero conus eandem habent proportionem, quam cylindri, cum illi horum sint tertiae partes; Erit etiam conus scalenus ABE, ad conum rectum C D F, ut altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua usi sumus in cylindris, ut manifestum est.

Eadem quoque haec propositio convenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super aequales bases constitutis. Sicut enim super

14. duodec.

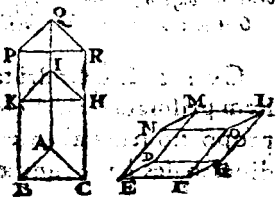
10. duodec.

15. quinti

15. quinti

10. duodec.

super bases aequales $ABC, DEFG$, prismata $ABCHIK, DEFG-$
 $LMNO$, & pyramides super eisdem altitudinibus. Dico esse pris-
 ma ad prisma, & pyramidem ad
 pyramidem, ut est altitudo ad
 altitudinem. Sint namque in-
 sistentes lineae AI, CH, BK ,
 prismatis $ABCHIK$, ad basin
 ABC , perpendiculares, ita ut
 EK sit altitudo prismatis $AB-$
 $CHIK$; Productis autem rectis
 AI, CH, BK , sumantur $IQ,$



HK, KP , aequales altitudinis prismatis $E L$, & ductis rectis
 PQ, QR, RP , compleatur prisma $HIKPPQR$, eiusdem al-
 titudinis cum prisma $E L$. Eruntq; prismata $HIKPPQR, EL$,
 cum habeant & bases, & altitudines aequales, inter se equalia,
 ex coroll. 2. propof. 7. huius lib. Ac propterea prismata $ABC-$
 $H I K$, ad utrunq; eandem habebit proportionem. Quia vero, ex
 scholii propof. 25. lib. 11. prisma $ABCHIK$, ad prisma $AIK-$
 PQR , est ut planum BI , ad planum KQ ; Et ut planum BI , ad
 planum KQ , ita est recta BK , ad KP ; Erit prisma $ABC-$
 $H I K$, ad prisma $HIKPPQR$, hoc est, ad prisma $E L$, ut BK ,
 altitudo prismatis $ABCHIK$, ad KP , altitudinem prisma-
 tis $HIKPPQR$, hoc est, prismatis $E L$. Quod est propofiti.

QVOD si insistentes lineae AI, CH, BK , non sint perpendicularia
 res ad basin ABC , consistendum erit super basin ABC , aliud prisma,
 cuius insistentes sint perpendicularares ad basin, et aequales alti-
 dini prismatis $ABCHIK$. Nam cum ex 2. coroll. propof. 7. huius
 lib. haec duo prismata eandem habeant altitudinem, & bases
 sint equalia, sitq; prisma constructum ad prisma $E L$, ut illius al-
 titudo ad huius altitudinem, erit & prisma $ABCHIK$, ad pris-
 ma $E L$, ut altitudo illius, ad altitudinem huius.

QVONIAM vero pyramides eandem habent proportionem
 cum prismatis, quod illa sint horum tertiae partes. Perspi-
 cuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, ut est al-
 titudo ad altitudinem.

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis,
 cum parallelepipedis comprehendantur etiam nomine prismat-
 um, ut dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit
 accommodari.

Hæc omnia eodem sermone demonstrantur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

OMNIA quoque hæc facile converteri possunt hoc modo.

CONI & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

NAM alias pari equalis foret toti, ut in converso, propos. 12. lib. 1. ostensum est.

12.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

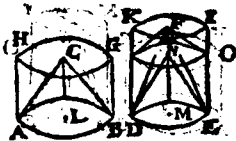
ÆQUALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

SINT æquales conus ABC , DEF , & æquales cylindri $ABGH$, $DEIK$, quorum bases AB , DE ; axes, altitudinesve LC , MF . Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut AB , ad DE , ita MF , ad LC . In cylindris quidem sic propositum ostenderetur. Si altitudines LC , MF , sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales, erunt & bases æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare erit ut basis AB , ad basin æquam DE , ita altitudo MF , ad altitudinem æquam LC . Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocae.

QVOD si altitudines LC , MF , inæquales fuerint, sit MF , maior, ex qua abscindatur MN , ipsi LC , æqualis; & per N , ducatur planum ON , basi DE , parallelum, ut in scholio propos. 15. lib. 11. docuimus, ut fiant duo cylindri DO , OK . Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri $ABGH$,

DE.

DEIK, erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum D O. Ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum D O. Est autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum D O, ita basis A B ad basin D E, cum æquales sint altitudines: Itē ut cylindrus DEIK, ad cylindrum D O, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, cum bases sint æquales, immo una & eadem D E. Igitur erit quoque ut basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, hoc est, ad hanc æqualem L C; Ac propterea reciproci sunt bases & altitudines.



7. quinti.

11. duodec.

14. duodec.

10. duodec.

In conis uero ita concludimus, propositum. Si conus ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, cum conus sint cylindrorum tertiæ partes; Quare ut ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate eorum etiam consequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo usi sumus, in cylindris, si modo sub altitudinibus M N, N F, constituantur duo coni, ut in figura.

Si uero iam bases, atque altitudines reciprocentur, Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur, hac ratione. Si altitudines L C, M F, sint æquales, cum sit ut basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem L C, erunt & bases A B, D E, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases A B, D E, & sub altitudinibus æqualibus L C, M F, æquales erunt, ex coroll. propof. 11. huius lib.

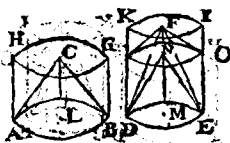
Quod si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, ut prima. Quia igitur ponitur, ut basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem L C, hoc est, ad hanc æqualem M N; Est autem, ut basis A B, ad basin D E, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum D O, cum altitudines sint æquales: Item ut altitudo M F, ad altitudinem M N, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum D O, cum bases sint æquales; erit, ut cylindrus ABGH, ad cylindrum D O, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum D O; Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

11. duodec.

14. duodec.

9. quinti.

At quoniam in conis hæc erit demonstratio. Si conorum



ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, recipiuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cuius eadem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut ostensum fuit, cylindri, ideoque con-

ni, eorum tertie partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo, conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Non difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint conus & cylindri scalenus, erunt quoque rectæ easdem cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare ut ostensum est, bases & altitudines reciprocantur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocantur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, ut demonstratum est, conus & cylindri recti, æquales erunt; At propterea conus & cylindri scalenus, tam si recti æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inter se quoque erunt æquales.

Idem facile concludetur, licet unus conorum & cylindrorum sit rectus, & alius scalenus, ut perspicuum est ex his, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

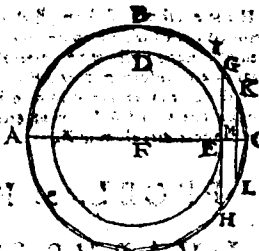
PROBL. I. PROPOS. 16.

DVOBUS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum

incri-

inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrū F, oporteatq; in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari cōtinentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tãget circulum DE, in E, ex coroll. propositi. 6. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu CG, sicut AGC, auferatur dimidiū AB, & ex residuo BC, dimidiū BI, & ex residuo IC, dimidiū IK, & sic deinceps; relinquetur tandē minor



arcus, quā CG. Si igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectā CK, esse unum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI, & quadrās AB, in totidē partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans BC; nec nō semicirculus AHC, in totidē partes, quot cōtinet semicirculus ABC; deinde omnibus arcibus rectæ linæ subtendantur, quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant. Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostenderetur. Ex K, ad A C, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GBM, KME, recti sunt, erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cū recta GH, tangat circulum DE, in solo puncto E, recta KL, erit tota extra dictum circulū, nec unquam ipsum cōtinget, quod nunquam cum recta GH, cōueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, ideoque æqualiter cum CK, a cen-

decimi.

29. tertij.

28. primi.

4. tertij.

tro F , discent, circulum DE , contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, si ab extremitate lateris polygoui inscripti, quæ in diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hæc nullo modo circuli minorem posse contingere, sed totam extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL , quæ cum ducatur ab extremo puncto K , lateris CK , cum diametro AC , conuenientis, ad AC , diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DB .

14.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS sphaeris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaera solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphaeræ superficiem.

SINT duæ sphaeræ $ABCD, EFGH$, circa idem centrum I , oporteatque in maiori $ABCD$, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphaeram $EFGH$. Secentur ambæ sphaeræ plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphaeris plana $ABCD, EFGH$, quæ circuli erunt, ex descriptione sphaeræ, habentes idem centrum sphaerarum I . Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphaeræ describuntur, circumducti congruent sectionibus $ABCD, EFGH$. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I , ad peripherias sectionum sunt æquales, cum ducantur ex centro sphaerarum ad earum superficiem, erunt ipsæ sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD , se se in centro I , secantes ad angulos rectos, ut sint quadrantes AB, BC, CD, DA , &c. Deinde in maiori circulo $ABCD$, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum $EFGH$. Quod quidem, ut facilius

16. duodec.

facilis omnia demonstrentur, in hunc modum efficiantur:
 Ex G, ad B G, ducatur perpendicularis G γ , ad circumferentiam usque circuli ABCD, quæ circumulum EFGH, tanget in G, ex coroll. propof. 6. lib. 3. Et rectæ G γ , applicetur in circulo ABCD, recta æqualis A ϵ . Quia uero, si arcui C γ , intelligatur subtendi recta, ut fiat triangulum G C γ , latus C γ , oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est latere G γ , quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta C γ , maior recta A ϵ ; ac proinde arcus C γ , arcu A ϵ , maior erit, ut constat ex scholio propof. 28. lib. 3. Abicindatur ergo arcus C δ , arcui A ϵ , æqualis. Quod si ex quadrante C D, dimidium auferatur D L, & ex reliquo C L, dimidium L K, & sic deinceps; relinquetur tandem arcus minor arcu C δ , seu arcu A ϵ . Sit ergo iam arcus C K, minor; Eritque recta C K, subtensa minor quam recta A ϵ , hoc est, quam G γ , ex scholio propof. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam C K, esse unum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum C δ , minorem arcu C γ , non tangat circumulum EFGH, ut ex demonstratione præcedentis propof. patet, multo minus recta C K, subtendens arcum minorem arcu C δ , eundem circumulum tanget, Rursus ducta diametro K N, erigatur ex centro I, ad plana circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis I O, occurrens superficiæ sphaeræ maioris in O; Et per rectas O I, A C, & O I, K N, plana ducantur, quæ ad circumulum ABCD, recta erunt, efficientque communes sectiones, circulos, ut iam dictum est, quorum semicirculi sint AOC, NOK. Quia uero anguli O I C, O I K, recti sunt, ex defin. 3. lib. 1, quadrantes erunt O C, O K; atque adeo, cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphaeræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes C D, O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus C L; Et quadrantes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis C D; Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum C K, K L, L M, M D, C P, P Q, Q R, R O, K S, S T, T V, V O, æquales, Coniungatis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares P X, S Y, quæ in commu-

1. quarsi

19. primi 8

1. detimi.

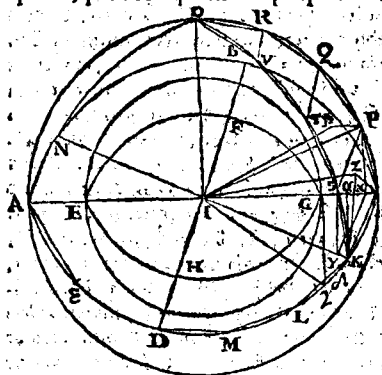
12. undec.

12. undec.

29. terrij.

8. & 6
undec.
7. tertij.

cōmunes sectiones AC, NK, cadēt; eruntq; inter se parallelę.
QVONIAM igitur triagulorū PCX, SKY, anguli PXC,
SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. & anguli PCX, SKY,
ęquales, quod & ęquales sint peripharię AOP, NOS, quib-



bus insistūt;
(Nam si ex
semicirculis
AOC, NO-
K, ęqualibus
demantur ar-
cus ęquales
CP, KS, reli-
qui arcus A-
OP, NOS,
ęquales quo-
que erunt.)
Erūt duo an-
guli PCX,
PXC, triagu-

26. primi.

3. primi
2. sexti

li PCX, ęquales duobus angulis SKY, SYK, triaguli SKY:
Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, ęqua-
lia. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK,
ęqualia erunt. Quare cum rectę PX, SY, ęquales sint & pa-
rallęlę; si connectatur recta XY; ęquales quoque erunt &
pallęlę PS, XY. At quia & rectę CK, XY, pallęlę sunt,
quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex
semidiametris IC, IK, ęqualibus demantur ęquales rectę
CX, KY, relinquentur & IX, IY, ęquales; Ac proinde erit, ut
IX, ad XC, ita IY, ad YK.) Erunt pallęlę quoq; PS, CK,
inter se, cum utraq; pallęla sit ipsi XY; ideoque eas coniun-
gentes rectę CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent.
Totū igitur quadrilaterū CKSP, in uno erit plano. Quod
si ex Q, & T, demittantur ad planū circuli ABCD, per-
pendiculares, & connectantur rectę QC, TK, ostendemus
similiter CK, QT, esse pallęlas; atq; adeo ipsas PS, QT,
inter se pallęlas esse, cū eidē CK, sint pallęlę; totumque
quadrilaterum PSTQ, in uno esse plano. Eadem ratione
in uno erit plano quadrilaterū QTVR: Est autē & trian-
gulum RVO, in uno plano. Si igitur eadem cōstructio exhi-

9. undec.

7. undec.

2. undec.

beatur

beatis super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis; ac reliquo hemisphærio; ut tota sphaera maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes Q, OK, super latus CK, constructis; inscriptum erit in sphaera maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris, atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphaeram minorem EFGH.

Ducti autem ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK, Quoniam igitur, ex desin. 3. lib. 1. anguli IZC, IZK, recti sunt; erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint; erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, equalia; Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, equalia erunt, idcirco, & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad P, S, ducuntur, æquales esse & inter se; & rectis ZC, ZK; Quare circulus ex Z, ad intervallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse; demonstrabimus. Quoniam vero, ut postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est; erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

Ducti autem ex K, ad rectam AC, perpendicularis Ka. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI, & Aa, maior sit, quàm Aa, erit AC, minor duplo ipsius Aa. Quam ob rem cum sit, ut AC, ad Aa, ita rectangulum sub AC, aC, ad rectangulum sub Aa, aC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aa, & eadem altitudo aC; erit quoque rectangulum sub AC, aC, minus duplo rectanguli sub Aa, aC. Est autem rectangulum sub AC, aC, æquale quadrato rectæ CK; & rectangulum sub Aa, aC, æquale quadrato rectæ Ka; quod rectæ CK, inter AC, aC, sit media proportionalis; & recta Ka, inter Aa, aC, ex coroll. propof. 8. lib. 6. (Si enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum

47. primi.

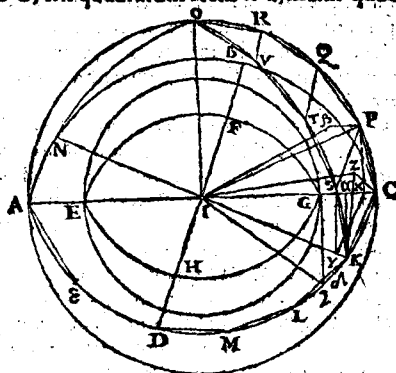
12. secundi.

1. sexti.

17. sexti.

gulum $A K C$.) Igitur & quadratum rectę CK , minus erit duplo quadrati rectę $K \alpha$. Ac propterea cum quadratum rectę CK , ostensum sit maius esse duplo quadrati rectę $Z C$; erit quadratum rectę $K \alpha$, maius quadrato rectę $Z C$.

17. primi.



Quoniam uero quadratū rectę IC , & quale est quadratis rectarū IZ , ZC , & quadratū rectę IK , quadratis rectarū $I \alpha$, & K : Suntq; equalia quadrata rectarū equaliū IC , IK ; Brunt

& quadrata rectarū IZ , ZC , equalia quadratis rectarū $I \alpha$, & K . Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectę αK ; & ex illis minus, uidelicet rectę $Z C$, erit reliquum quadratum rectę IZ , maius quadrato reliquo rectę $I \alpha$; ideoque recta IZ , maior quam recta $I \alpha$. Quapropter cum punctum α , non tangat spheram minorem $EFGH$, quod per coroll. propos. præcedentis recta $K \alpha$, tota sit extra dictam spheram; multo minus punctum Z , longius distans, eandem spheram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani $CKSP$, longius ab sint a sphaera $EFGH$, quam punctum Z , ut mox ostendemus. non tanget planum $CKSP$, spheram $EFGH$.

19. primi.

Sed & expeditius ex ipsa fere cōstructione figurę ostendemus, planum $CKSP$, non tangere spheram minorem $EFGH$, si prius ducatur recta $I \gamma$, hoc modo. Quoniam ex cōstructione ostensum fuit, rectam CK , minorem esse recta $G \gamma$: Est autem CK , maior, quam ZC , quod angulus CZK , obtusus sit, ut mox demonstrabitur; Multo maior erit $G \gamma$, quam ZC ; Ac proinde quadratum rectę $G \gamma$, maius quadrato rectę ZC . Quia uero quadratum rectę

17,

$I\gamma$, æquale est quadratis rectarum $I G, G\gamma$; & quadratum rectæ $I C$, quadratis rectarum $I Z, Z C$; sunt autem quadrata rectarum $I\gamma, I C$, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum $I G, G\gamma$, quadratis rectarum $I Z, Z C$, æqualia. Dempto ergo illic quadrato rectæ $G\gamma$, & hinc quadrato rectæ $Z C$, relinquetur quadratum rectæ $I G$, minus quadrato rectæ $I Z$; Ac propterea recta $I G$, minor, quam $I Z$. Quam ob rem, cum $I G$, sit sphaeræ minoris $E F G H$, semidiameter; existet punctum Z , extra eandem sphaeram; Et proinde, ut prius, planum $C K S P$, sphaeram $E F G H$, nequaquam continget.

47. primi

Ducatur rursus ex I , ad planum $P S T Q$, perpendicularis $I\beta$, eritque β , centrum circuli circa $P S T Q$, descripti, ut demonstratum est: Connexis autem rectis $\beta P, \beta P$, cum angulus $I\beta P$, rectus sit, ex 3. defin. lib. 1. erit quadratum rectæ $I P$, æquale quadratis rectarum $I\beta, \beta P$. Quia vero & quadratum rectæ $I C$, (quod æquale est quadrato rectæ $I P$, ob æqualitatem rectarum $I C, I P$) æquale est quadratis rectarum $I Z, Z C$, erunt quadrata rectarum $I\beta, \beta P$, quadratis rectarum $I Z, Z C$, æqualia: est vero quadratum rectæ $Z C$, maius quadrato rectæ βP , quod & linea $Z C$, maior sit; quâ linea βP , ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ $I\beta$, reliquo quadrato rectæ $I Z$, maius erit; adeoque & linea $I\beta$, maior quam linea $I Z$: Ac proinde multo magis punctum β , extra sphaeram $E F G H$, existet, quam punctum Z ; proptereaque multo minus planum $P S T Q$, quam $C K S P$, tanget sphaeram minorem $E F G H$. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphaeram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphaeris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaera solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphaeræ superficiem. Quod erat faciendum.

47. primi.

COROLLARIUM.

Ex ijs, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in una sphaera ad polyedrum in altera sphaera esse triplicatam eius, quam habent sphaerarum diametri. Nam si ex centris sphaerarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, dissiabuntur polyedra in

in

in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphaerarum; ut constat, si intelligatur harum sphaerarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ a centrīs ad basium angulos, ob similitudinem basium; Ac propterea pyramides efficiuntur similes. Quare cum singulæ pyramides in una sphaera ad singulas pyramides illis similes in altera sphaera habeant proportionē triplicatā laterū homologorum, hoc est, semidiametrorū sphaerarū, ut cōstat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem, ita omnes pyramides, id est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, hoc est, ad solidū polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum unius sphaeræ ad polyedrum alterius sphaeræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphaerarum, cum semidia-

12. quinti

15. quinti

SCHOLIUM.

QUONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, ut vera, quæ antea nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breviter a nobis serunt demonstranda.

PRIMO itaque ostendendum est, angulum CZK , in quadrilatero $CKSP$, esse obtusum. Quod ut commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z , circulus. Quomodo



14. quinti

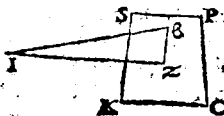
28. tertij.

igitur in figura superiori, est ut IK , ad KC , ita IY , ad YX , (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK , IXY , similia sunt.) Est autem IK , maior quam IY ; erit & KC , maior quam YX . Cum igitur YX , equalis sit ostensa ipsi SP , eritque KC , maior quam SP . Ac propterea arcus CK , maior erit arcu SP , ex scholio propos. 28. lib.

13. Quare cum arcus CP , KS , arcui CK , sint æquales, quod & lineæ CP , KS , ipsi KC , lineæ sint æquales demonstrata; (subtenduntur enim arcubus circularum æqualibus, ut ex constructione figure superioris constat) erunt quoque arcus CP , KS , arcui PS , maiores; Ac idcirco quilibet arcuum CK , CP , KS , quadrantem circuli $CKSP$, excedet; atque adeo angulus CZK , obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, ut perspicuum est ex coroll. 2. ultima propos. lib. 6.

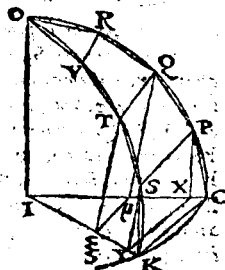
SECUNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadri-

quadrilateri $CKSP$, longius a centro I , abesse, quam punctum Z . Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ , in quadrilatero $CKSP$, & adiungantur rectæ $I\theta$, $Z\theta$. Quoniam ergo angulus $I\theta Z$, rectus est ex defn. 3. lib. 11. Erit latus illi oppositum $I\theta$, maius latere $I\theta$, quod minori angulo $I\theta Z$, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ , longius a centro I , distat, quam punctum Z . Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.



19. primi.

TERTIO, ac ultimo probandum est, rectam ZC , maiorem esse recta βP . Quod ut aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS , maiorem esse recta QT . Describatur igitur pars superioris figure, ea videlicet, quæ continetur semidiametris IC , IO , & quadransibus OC , OK , &c. Demittantur deinde ex Q , & T , ad planum circuli $ABCD$, in quo est triangulum ICK , perpendiculares $Q\mu$, $T\xi$, quæ in communes sectiones IC , IK , cadent, eruntque inter se se parallelæ, ut de rectis PX , SY , dictum est. Quod si adiungatur recta $\mu\xi$, erunt QT , $\mu\xi$, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & æquales PS , XY . Quia vero $\mu\xi$, ipsi CK , parallelæ est, quod latera IC , IK , proportionaliter sint secta in μ , & ξ , veluti diximus de recta XY ; erunt quoque $\mu\xi$, XY , parallelæ. Quare erit, ex coroll. propof. 4. lib. 6. ut IT , ad YX , ita $I\xi$, ad $\xi\mu$: est autem IT , maior quam $I\xi$. Igitur & YX , maior erit quam $\xi\mu$; Ac proinde & PS , quæ æqualis est ipsi XY , maior erit quam QT , quæ æqualis est ipsi $\xi\mu$.



38. undec.
6. undec.

2. sexti.

29. primi.

Hoc ergo demonstrato, describantur ex centris Z , β , circa quadrilatera $CKSP$, $PSTQ$, circuli, egredianturque e centris rectæ ZC , ZK , ZS , ZP ; βP , βS , βT , βQ . Si igitur ZC , non credatur maior, quæ βP , erit vel æqualis, vel minor. Si

25. primi.

8. primi.

2. sexti.

14. quinti.

primum equalis. Quia ergo latera ZK, ZC , equalia ponantur lateribus $\beta S, \beta P$; & basis KC , maior est base PS ; erit angulus KZC , maior angulo $S\beta P$: Eadem ratione maior erit angulus SZP , angulo $T\beta Q$. At quoniam bases KS, CP , basibus ST, PQ , sunt aequales; erunt anguli KZS, CZP , angulis $S\beta T, P\beta Q$, aequales. Igitur quatuor anguli ad Z , maiores erunt quatuor angulis ad β : Sunt autem & aequales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint aequales; ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur equalis est recta ZC , recta βP .

S & T secundo ZC , minor, quam βP . Et abscindantur $\beta \pi$,



$\beta p, \beta \omega, \beta \phi$, ipsi ZC, ZK, ZS, ZP , aequales, connectanturq; rectae $\pi p, \pi \omega, \pi \phi$, quae parallela erunt rectis PS, ST, TQ, QP ; eo quod rectae ex eisdem secta sint proportionaliter;

Ac proinde, ex coroll. propof. 4. lib. 6. erit ut βS , ad $S\beta$, ita βp , ad $p\pi$. Cum ergo βS , maior sit, quam βp , erit & $S\beta$, maior quam $p\pi$. Eademq; ratione maiores erunt ST, TQ, QP , rectis $p\omega, \omega\phi, \phi\pi$; At propterea cum PS , minor sit quàm CK , & ST, PQ , aequales rectis KS, CP ; & TQ , minor quàm PS , erunt rectae $\pi p, p\omega, \omega\phi, \phi\pi$, minores rectis CK, KS, SP, PC . Quare cum recta $\beta \pi, \beta p, \beta \omega, \beta \phi$, rectis ZC, ZK, ZS, ZP , sint aequales; erunt anguli ad Z , maiores angulis ad β : Sunt autem & aequales, quod tam illi, quam hi sunt quatuor rectis aequales ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC , quam βP : Sed neque equalis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.

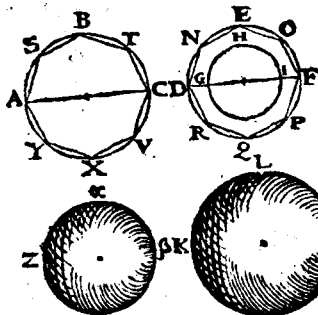
15.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

$SPHAERAE$ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

S & T duae sphaerae ABC, DEF , quarum diametri AC, DF . Dico sphaeram ABC , ad sphaeram DEF , habere proportionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF . Si enim hoc non concedatur, habebit sphaera ABC , ad aliam

aliam sphaeram GHI , minorem, vel KLM , maiorem quam DEF , triplicatam proportionem diametri AC , ad diametrum DF . Habeat primum sphaera ABC , ad sphaeram GHI , minorem sphaera DEF , proportionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF ; intelligaturq; sphaera GHI , concentrica sphaerae DEF . Inscribeatur in sphaera maiori DEF , polyedrum $DNEOFPQR$, non tangens minorem sphaeram GHI ; Atq; huic



17. duodec.

simile polyedrum $ASBTCVXY$, inscribatur in sphaera ABC . Quoniam igitur ponitur proportio sphaerae ABC , ad sphaeram GHI , triplicata proportionis diametri AC , ad diametrum DF : Est autem, per coroll. praecedentis proposit. & proportio polyedri $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFPQR$, triplicata proportionis diametri AC , ad diametrum DF ; Erit ut sphaera ABC , ad sphaeram GHI , ita polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFPQR$. Quare cum sphaera ABC , maior sit polyedro $ASBTCVXY$; erit & sphaera GHI , maior polyedro $DNEOFPQR$, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphaera ABC , ad sphaeram GHI , minorem sphaera DEF , proportionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF .

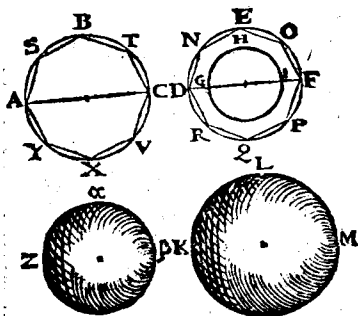
14. quinti.

HABEAT secundo sphaera ABC , ad sphaeram KLM , maiorem sphaera DEF , proportionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF . Cum igitur, ex coroll. praecedentis proposit. & polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFPQR$, habeat proportionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF ; Erit ut sphaera ABC , ad sphaeram KLM , ita polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFPQR$: Et conuertendo, ut sphaera KLM , ad sphaeram ABC , ita polyedrum $DNEOFPQR$, ad polyedrum $ASBTCVXY$:

Bb

BTCVXY:

BT CVXY: Est autem ex dicto coroll. præcedentis propol. polyedrum DNEOPQ R, ad polyedrum A S B T C VXY, in triplicata proportionẽ diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & sphæra KLM, ad sphæram ABC, erit in tripli-



cata proportionẽ diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut sphæra KLM, ad sphæram ABC, ita sphæra DEF, ad aliam sphæram $Z\alpha\beta$. Habebit igitur & sphæra DEF, ad sphæram $Z\alpha\beta$, proportionem triplicatã diametri DF, ad diametrum AC.

Et quia sphæra KLM, maior ponitur, quam sphæra DEF, erit quoq; sphæra ABC, maior, quam sphæra $Z\alpha\beta$. Quapropter sphæra DEF, ad sphæram $Z\alpha\beta$, minorem sphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod est absurdum. Ostensum enim est nõ posse sphæram ad sphæram alia sphaera minorem, proportionem habere triplicatam diametrorũ. Non ergo habebit sphæra ABC, ad sphæram KLM, maiorem sphæra DEF, proportionem triplicatã diametri AC, ad diametrum DF; Sed neq; ad minorem habet, ut demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæra itaq; inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendũ.

COROLLARIUM.

Hinc fit, ita esse sphæram ad sphæram, ut polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tã sphæra ad sphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS

E V C L I D I S

ELEMENTVM XIII.

Et Solidorum tertium.



THEOR. I. PROPOS. I.

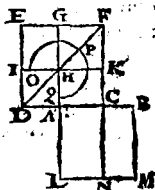
I.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmen- tum assumens dimidiam totius, quintuplū potest eius, quod a dimidia totius describi- tur, quadrati.



SECUTUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmen- tū AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratū rectæ CD, quintuplum esse quadrati re- ctæ AD. Describatur. n. super CD, qua- dratū CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans

diametrū in H, pūcto, p qd ducatur I K, parallela ipsi CD. Producta deinde GA, pficiatur quadra- tū AM, protrahaturq; FC, ad N. eruntq; ex coroll. propof. 4. lib. 2. AI, KG, qua- drata rectarū AD, AC. Quia ergo est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangu- lū CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, qua- drato rectæ AC. Deinde cū ponatur AB, dupla ipsi AD, sitq; AL, ipsi AB; & AH ipsi AD, æqualis; erit quoq; AL, ipsius AH, dupla: Est au- tem ut



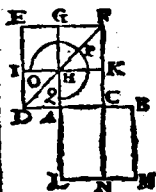
3. defin. sex.
17. sexti.

Bb 2

tem ut

1. sexti.

43. primi.



tem ut A L, ad A H, ita rectangulum AN, ad A K, rectan-
gulum. Duplum igitur est AN, ipsius A K. Quoniam au-
tem A K, ipsi I G, est æquale; erit A N,
æquale duobus A K, I G. Additis igitur
æqualibus CM, K G; erit quadratū AM,
gnomoni O P Q, æquale. Quare cum
quadratum AM, quadruplum sit quadra-
ti A I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod li-
nea AB, dupla ponatur lineæ A D; erit
& gnomon O P Q, eiusdem quadrati
A I, quadruplus; Ac propterea, signo-
moni O P Q, addatur ipsum quadratum A I, quintuplum
efficietur quadratum C E, quadrati A I.

ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum re-
ctæ A B, quadruplum est quadrati rectæ A D, quod linea
A B, dupla lineæ A D, ponatur; Est autem quadratū rectæ
A B, æquale rectangulis sub A B, A C, & sub A B, B C,
comprehensis; Et rursus, quod sub A B, A C, æquale est
ei, quod sub A D, A C, bis; (sicut enim A B, ipsius A D, est

dupla, ita quoq; erit rectangu-
lum sub A B, A C, rectanguli
sub A D, A C, duplum, cum

utriusque rectanguli eadem sit altitudo A C. Ac propte-
rea rectangulum sub A D, A C, bis sumptum æquale
erit rectangulo sub A B, A C.) Quod uero sub A B,
B C, æquale est quadrato rectæ A C, cum sit ut A B,
ad A C, ita A C, ad C B. Igitur quadratum rectæ A C,
una cum rectangulo sub A D, A C, bis, quadruplum quoq;
erit quadrati rectæ A D; Ac proinde quadrata rectarū A C,
A D, una cum rectangulo sub A D, A C, bis, quintupla
erunt quadrati eiusdem rectæ A D. Quo circa cum quadra-
tum rectæ C D, æquale sit quadratis rectarum A C, A D,
una cum rectangulo sub A D, A C, bis; Erit & qua-
dratum rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintu-
plum. Si recta igitur linea secundum ex-
tremam & mediam rationem secetur,

&c. Quod erat de-
monstran-
dum.

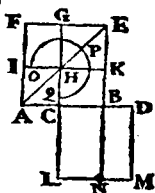
THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Duplae praedicti segmenti extrema ac media ratione sectae, maius segmentum reliqua pars est eius, quae a principio, rectae.

DIVISA sit recta AB , in C , possitque quintuplum segmenti AC ; sumatur autem ipsius AC , dupla CD , quae, ut post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC . Dico si CD , secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB , reliquam partem prioris lineae. Describatur super AB , quadratum BF , in quo ducta diametro AE , ex C , ducatur ipsi AF , parallela CG , secans diametrum in puncto H , per quod agatur IK , parallela ipsi AB . Producta deinde GC , perficiatur quadratum CM , protrahaturque EB , ad N . Eruntque ex coroll. propof. 4. lib. 2. CI , KG , quadrata rectarum AC , CB . Quia igitur quadratum BF , quintuplum ponitur quadrati CI ; Si tollatur quadratum CI , relinquetur gnomon OPQ , eiusdem quadrati CI , quadruplus: Est autem & quadratum CM , quadruplum quadrati CI , ex scholio propof. 4. lib. 2. quod recta CD , dupla sit rectae AC . Igitur gnomon OPQ , quadrato CM , aequalis erit. Rursus quoniam CD , ponitur ipsius AC , dupla; estque LC , ipsi CD ; & CH , ipsi AC , aequalis; erit & LC , ipsius CH , dupla. Cum igitur sit ut LC , ad CH , ita rectangulum LB , ad rectangulum CH ; erit quoque illud huius duplum: Est autem CK , ipsi HF , aequale. Aequale igitur est LB , ipsis CK , HF ; Ac proinde & reliquum quadratum KG , reliquo rectangulo BM . Quoniam ergo sunt tres rectae CD , CB , BD ; estque rectangulum BM , sub CD , BD , comprehensum aequale ipsi KG , quadrato rectae CB ; Erit ut CD , ad CB , ita CB , ad BD . Quamobrem, ex definitione, recta CD , secta est in

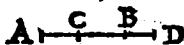


1. sexti.
43. primi.

17. sexti.

B, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum CB.

4. *secundi.* **ALITER.** Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum pōnitur quadrati rectæ AC; estq; quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, una cum rectangulo sub AC, CB, bis; Erunt & quadrata rectarum CB, AC, una cum rectangulo sub AC, CB, bis, quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur



quadrato rectæ AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadruplum eiusdem quadrati rectæ AC: Est autem & quadratum rectæ CD, eiusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. A Equale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum sub AC, CB, bis æquale sit rectangulo sub CD, CB; (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC, ita quoque

1. *sexti.*

2. *secundi.*

17. *sexti.*

duplum erit rectangulum sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB; cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo CB; Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: At quadratum rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo sub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD; ideoque erit ut CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estq; segmentum maius CB. Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior sit necessario, quam CB, ita ostendemus ex hypothese. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato

rectæ

rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod est propositum.

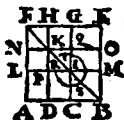
4. secundi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECTUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quintuplum esse quadrati rectæ CD. Describatur super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsi AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipsi AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit ut AB, ad AC ita



17. sexti.

ita A C, ad C B, erit rectangulum sub A B, C B, nempe C E, æquale quadrato rectæ A C, nimirum ipsi L G,) Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia uero æ-



34. primi.

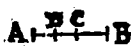
36. primi.

43. primi.

qualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum A D, C D; erunt earum latera H K, I Q, æqualia; ac proinde rectæ E O, O M, ipsis oppositæ æquales erunt. Quare rectangula I O, Q E, æqualia erunt: Est autem I O, ipsi I D, æquale. Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi C O; gnomon R S T, rectangulo C E, erit æqualis. Cum igitur C E, ostensum sit quadruplum quadrati P Q, erit etiam gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus; Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta B D, quintuplum quadrati P Q, ex recta C D.

6. secundi.

A L I T E R. Cum A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; erit rectangulum sub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulū sub A B, B C, quadruplum est quadrati rectæ C D; (Nam cum sit, ut



17. sexti.

A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C: quod cum, ex scholio propof. 4 lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ C D; erit & rectangulum sub A B, B C, quadruplum eiusdem quadrati rectæ C D.) Ac propterea rectangulum sub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratū rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

CONVERSUM huius theorematidis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

S i recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmen-
ti quin-

ti quintuplum possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AB , diuisa inaequaliter in C , cuius maius segmentum AC , bisariam sectum sit in D , sitque quadratum rectae BD , quintuplum quadrati rectae CD . Dico rectam AB , diuisam esse in C , extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum LG , rectae AC , quadruplum quadrati PQ , rectae CD , ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST , eiusdem quadrati PQ , quadruplus. (cum enim quadratum DO , rectae BD , quintuplum ponatur quadrati PQ , ex recta CD ; dempto quadrato PQ , relinquetur gnomon RST , eiusdem quadrati PQ , quadruplus.) Igitur gnomon RST , aequalis erit quadrato LG : At gnomoni RST , aequale est rectangulum CE , ut supra ostensum est. Ergo & quadrato LG , recta AC , aequale erit idem rectangulum CE , sub AB , BC , comprehensum: Ac proinde erit, ut AB , ad AC , ita AC , ad CB . Quocirca, ex definitione, secta erit AB , in C , extrema ac media ratione. Quod est propositum.

ALITER. Cum AC , diuisa sit bisariam in D , & ei addita CB ; erit rectangulum sub AB , BC , una cum quadrato rectae CD , aequale quadrato rectae BD ; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD , descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD , descriptis erit & rectangulum sub rectis lineis AB , BC , descriptum, una cum quadrato rectae CD , quintuplum eiusdem quadrati rectae CD . Quare ablato quadrato rectae CD ; rectangulum sub AB , BC , quadruplum erit quadrati rectae CD : Est autem eiusdem quadrati rectae CD , quadruplum quadratum rectae AC , ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectae AC , aequale est rectangulum sub AB , BC . Quamobrem erit, ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; Ac proinde secta AB , in C , extrema ac media ratione, ex definitione.

5.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur ; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur, quadrati.

SECTUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratum AD, in quo



ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propof. 4.

lib. 2. Quoniam igitur est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD; erit gnomon KLM, una cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, una cum quadrato CH, rectæ BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

17. sexti.

ALITER. Quoniam est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum sub AB, BC, bis, una cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC.

17. sexti.

7. secundæ

Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC, una cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur ; Quod a tota, quodque a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

SCHO.

SCHOLION.

CONVERSUM etiam huius verum est, videlicet.

Si recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB , inæqualiter in C , ita ut quadratum totius AB , & quadratum minoris segmenti BC , utraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC . Dico rectam AB , sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, ut prius; cum quadrata AD , CH , tripla sint quadrati IF ; Dempto quadrato IF , erit gnomon KLM , una cum quadrato CH , duplus eiusdem quadrati IF : Est autem gnomon KLM , una cum quadrato CH , æqualis duobus reſtanguſis AH , CD . Igitur & reſtanguſa AH , CD , dupla sunt quadrati IF ; Ac propterea cum æqualia sint AH , & CD , erit AH , ipſe IF , æquale. Quapropter cum reſtangelum AH , sub AB , BC , æquale ſit quadrato IF , recta AC ; erit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; Ac proinde AB , diuifa erit in C , extrema & media ratione.

ALITER. Cum quadrata reſtarum AB , BC , tripla ſint quadrati recte AC ; Sint uero quadrata reſtarum AB , BC , æqualia quadrato recte AC , & reſtangelulo sub AB , BC , bis

erit & quadratum recte AC , una cum reſtangelulo sub AB , BC , bis, triplum quadrati recte AC .

Dempto ergo quadrato recte AC , relinquetur reſtangelulum sub AB , BC , bis duplum quadrati recte AC ; Et proinde reſtangelulum sub AB , BC , ſemel, æquale quadrato recte AC . Quare ut prius, erit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; i deoque AB , in C , ſecta erit extrema ac media ratione.



THEOR.

4.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturq; ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ a principio, recta linea.

SECETUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC, & adiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, esseq; maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in



quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi IK, productæ in L. Eruntq;

17. sexti.
36. primi.

17. sexti.

ex coroll. propof. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB, erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC: Est autem CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL; additoq; communi BK, erit rectangulum BL, contentum sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB; Ac proinde erit ut BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum AB.

ALITER. Quoniam est ut AB, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo ut DA, ad AB, ita BC, ad CA; & componendo ut DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea

secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturq;

naturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea, &c.
Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detraharutque ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea BD , extrema ac media ratione secetur in A , cuius maius segmentum AB , minus autem segmentum AD ; & ex maiori segmento AB , detrahatur recta AC , æqualis minori segmento AD . Dico maius segmentum AB , dimisum esse in C , extrema ac media ratione, & maius segmentum esse rectam AC , quæ æqualis est minori segmento AD . Facta enim prioris figura constructione, cum sit ut BD , ad AB , ita AB , ad AD ; erit rectangulum BL , contentum sub BD , AD , æquale quadrato BF , rectæ AB ; & ablato communi BK , erit AL , æquale ipsi IF : Est autem AL , ipsi CK , æquale. AE quale igitur est IF , cōsensus sub AB , CB , quadrato CK , rectæ AC ; Ac proinde erit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB . Quare AB , secta est in C , extrema ac media ratione, cuius segmentum maius est AC , minus vero segmentum rectæ CB . Quod est propositum.

17. sexti.
36. primi.

17. sexti.

19. quinsi.

ALITER. Quoniam est ut tota BD , ad totam AB , ita AB , detracta ex BD , ad AD , hoc est, ad AC , detractam ex AB ; erit quoque ita AD , reliqua ipsius BD , hoc est, AC , ad CB , reliquam ipsius AB , ut tota BD , ad totam AB , hoc est, ut AB , ad AC ; Ac propterea dimisa erit AB , in C , extrema & media ratione.

RURSUS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidium maioris segmenti; Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATUR enim AB , extrema ac media ratione in C , sitq; DE , dimidium totius, & DF , dimidium maioris segmenti AC . Dico DE , in F , secari extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse DF . Cum enim sit ut AB , tota ad DE , totam, ita AC , ablata ad DF , ablatam, cum utrobique sit proportio du-



19. quinti.

15. quinti.

plaz erit quoque reliqua CB , ad reliquam FE , ut tota ad totam; Ac proinde & CB , dupla erit ipsius FE . Quoniam uero est ut AB , ad AC , ita DE , dimidia illius ad DF , dimidium huius: Item ut AC , ad CB , ita DF , dimidia illius ad FE , dimidium huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB , ad AC , ut AC , ad CB : Erit quoq; DE , ad DF , ut DF , ad FE ; Ac proinde ex eadē defin. DE , secta erit in F , extrema ac media ratione. Quod est propositum.

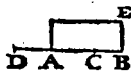
6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrunque segmentorum Irrationalis linea est, quæ uocatur Apotome.

SECTUR recta Rationalis AB , in C , extrema & media ratione. Dico utrunque segmentum AC , CB , esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur .n. maiori segmento AC , recta AD , æqualis dimidiæ totius AB . Quoniam igitur quadratū rectæ CD , quintuplū est quadrati

drati recte AD, habebit quadratum recte CD, ad quadratū recte AD, proportionem, quā numerus ad numerū. Quare commensurabilia erunt quadrata rectarū CD, AD; propterea; ipsae rectae CD, AD, commensurabiles quoque; existēt, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineae Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia uero quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent. n.



6. decimi.

9. decimi.

74. decimi.

proportionem quam 5. ad 1. uel 25. ad 5.) erunt rectae CD, AD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; erit reliqua AC, Irrationalis, quae appellatur Apotome.

Rursus applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum AE, æquale quadrato recte AC. Quamobrem quadratum Apotomae AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

17. sexti.

98. decimi.

SCHOLIUM.

SED & hoc theorema cum Campano offendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione divisa in C, sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Divisa. n. AC, bisariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis.

3. tertijdec. commensurabilis. Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est. quæ ad rectam CD; habebunt quadrata re-

A. $\overline{DC}$ B

6. decimi.

stant. Quare & ipsæ rectæ BD, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit Rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex BD, Rationali detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.

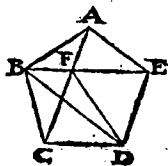
74. decimi.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis



angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, ubi se intersectant rectæ BE, AC, recta ducatur FD. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothese; Erunt & bases BE,

4. primi.
5. primi.

BD, & anguli AEB, CDB, æquales: Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE, BD;

B D, Toti igitur anguli **A B D**, **C D E**, æquales erunt. Rur-
sus quia latera **A B**, **A E**, trianguli **A B E**, æqualia sunt lateri-
bus **B A**, **B C**; trianguli **B A C**; & anguli quoque ipsi con-
tenti æquales, ex hypothesi: Erit & basis **B E**, basi **A C**, æqua-
lis, & anguli **A B E**, **A E B**, angulis **B A C**, **B C A**, æquales. Cum
ergo æquales sint anguli **A B E**, **B A C**, trianguli **A B E**; erunt
quoque latera **B E**, **A F**, æqualia; Ac propterea si ipsa de-
māturæ rectis æqualibus **B E**, **A C**, erunt reliquæ lineæ **F E**,
F C, æquales. Itaque cum latera **F E**, **E D**, trianguli **F E D**,
æqualia sint lateribus **F C**, **C D**, trianguli **F C D**; & basis com-
munis **F D**; erunt & anguli dictis lateribus contenti **F E D**,
F C D, æquales: Sunt autem & anguli **A E B**, **B C A**, ostensi
æquales. Acquales igitur sunt toti anguli **A E D**, **B C D**;
Ac proinde cum angulo **A E D**, ostensus sit æqualis angulus
C D E, & angulo **B C D**, æquales ponantur anguli **A B C**,
B A E; erunt omnes anguli pentagoni æquales, adeoque æqui-
angulum erit ipsum pentagonum.

4. primi.

6. primi.

8. primi.

S I N T secundo tres anguli non deinceps æquales **A**, **C**,
D. Quoniam igitur latera **A B**, **A E**, trianguli **A B E**, æqua-
lia sunt lateribus **C B**, **C D**, trianguli **C B D**; & anguli quo-
que ipsi contenti æquales, ex hypothesi; Erit & bases **B E**,
B D, & anguli **A E B**, **C D B**, æquales; Sunt autem & anguli
B E D, **B D E**, æquales: quod æqualia ostensa sint latera **B E**,
B D. Igitur toti anguli **A E D**, **C D E**, æquales erunt. Quare
cum æquales ponantur anguli **B A E**, **C D E**, erunt tres anguli
deinceps æquales **A**, **E**, **D**; Ac proinde, ut iam demonstra-
tum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur
æquilateri, tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

4. primi.

5. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

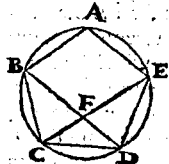
II.

S I pentagoni æquilateri, & æquiangu-
li duos angulos, qui deinceps sint, subten-
dant rectæ lineæ: hæ extrema & medla ra-
tione se mutuo secant, & maiora ipsarum
segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

Cc

SvB-

SVB TENDANTVR in pētagono æquilatēro & æqui angulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, & D, idē d B, C E, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari



extrema & media ratione, maioraque earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuiuslibet pentagoni. Descripto enim circulo circa pētagonum, erūt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia uero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus

DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: Est autem & angulus BCE, eiusdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt; Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD; Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. Quare erit ut BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DG, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, ut ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.

9.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur-
Tota recta linea extrema ac media ratione
secatur,

14. quarti.

28. terti.

4. primi.

32. primi.

33. sexti.

6. primi.

27. terti.

32. primi.

4. sexti.

secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC , sit latus decagoni AB , cui in rectum addatur BE , æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eodem circulo inscripti. Dico EA , rectam sectam esse in B , extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse EB , latus hexagoni. Ducatur enim ex A , per centrum D , diameter AC , coniunganturque recta DB , DE . Quoniam igitur AB , arcus, est decima pars totius periphæriæ circuli; continebit arcus semicirculi arcum AB , quinques; Ac proinde arcus BC , quadruplus erit arcus AB . Quare & angulus BDC , anguli ADB , quadruplus erit. Rursus quia latera BD , BE , sunt æqualia, nempe latera hexagoni, (est enim BE , latus hexagoni semidiametro BD , æquale, ex coroll. propof. 15. lib. 4.) erunt & anguli BDE , BED , æquales: quibus cum æqualis sit externus ABD ; erit angulus ABD , duplus anguli BED : Est autem angulo ABD , æqualis angulus BAD , ob æqualitatem laterum DA , DB . Igitur & angulus BAD , duplus erit anguli BED : Ac proinde duo anguli DAB , DBA , simul quadrupli erunt anguli BED . Cum ergo angulis DAB , DBA , æqualis sit externus BDC ; erit angulus BDC , quadruplus eiusdem anguli BED : Atqui idem angulus BDC , ostensus fuit quadruplus anguli ADB . Igitur æquales sunt anguli AED , ADB . Quocirca cum duo anguli AED , DAE , trianguli ADE , æquales sint duobus angulis ADB , BAD , trianguli ABD ; erunt triangula ADE , ABD , æquiangulara. Igitur erit ut EA , ad AD , hoc est, ad EB , ipsi AD , æqualem, ita AD , hoc est, EB , sibi æqualis, ad BA ; Ac idcirco recta EA , secta est in B , extrema & media ratione, estque maius segmentum EB , latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.



33. sexti.

9. primi

32. primi.

5. primi

32. undec.

32. primi.

4. sexti.

lib. 2

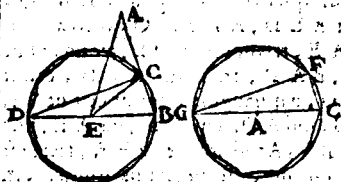
SCHOLIUM.

QVIA vero demonstravimus ad propof. 5. huius lib. si minus segmentum linea diuifa extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur; maius segmentum fecari quoque extrema ac media ratione, eiusque segmentum maius esse minus segmentum detractum; Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni, fecari extrema ac media ratione: Erit, si latus hexagoni fecatur extrema ac media ratione; maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, residuum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, ut ad propof. 5. huius lib. ostendimus. Hoc etiam aliter demonstrabimus lib. 13. propof. 4.

CONVERSUM quoque huius theoremat is facile cum Campano demonstrabimus. Videlicet.

Si linea diuifa extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

SIT enim AB , diuifa in C , extrema ac media ratione, sique primo AC ; latus hexagoni circuli BCD . Dico minus segmentum CB , esse eiusdem circuli latus decagoni.



Comprimere eum BC , in circulo, ita ut CA , extra circuli cadat. Et ducta ex B , per centrum F , diametro BED , conedam

circuli EA , EC . Quia ergo est ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; et est AC , latus hexagoni aequale semidiametro BE , ex coroll. propof. 15. lib. 4. Erit quoque ut AB , ad BE , ita EB , ad BC ; ideoque triangula ABE , EBG ; angula erunt, cum habeant latera

latera circa communem angulum B , proportionalia; eritque angulus A , angulo BEC , equalis. Rursus quia latera CA , CF , equalia sunt, nempe latera hexagoni; erunt anguli CAE , CEA , aequales; quibus cum equalis sit externus BCE , erit BCE , duplus anguli A ; Est autem angulo BCE , angulus CBE , ob equalitatem laterum EB , EC , equalis. Igitur $\angle CBE$, duplus erit anguli A ; Ac proinde duo anguli BCE , CBE , simul quadrupli erunt eiusdem anguli. Cum ergo angulis BCE , CBE , equalis sit externus CED ; erit quoque angulus CED , eiusdem anguli A , & propterea anguli BEC , qui equalis ostensus est angulo A , quadruplus erit. Quare & arcus CD , quadruplus erit arcus B . & Ac proinde arcus semicirculi BCD , eiusdem arcus BC , quintuplus existet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus BC . Quapropter recta BC , latus est decagoni.

SIT secundo CB , minus segmentum, latus decagoni circuli BCD . Dico maius segmentum AC , esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coapsetur enim rursus BC , in circulo BCD , ducaturque diameter BE . Deinde intervallo AC , describatur circulus CFG , cuius diameter CG ; eritque ex coroll. propos. 15. lib. 4. AC , latus hexagoni circuli CFG . Quoniam igitur AB , secunda est in C , extrema ac media ratione, estque maius segmentum AC , latus hexagoni circuli CFG ; erit, ut iam ostensum est, minus segmentum CB , latus decagoni eiusdem circuli CFG . Describatur ergo in circulo CFG , decagonum equilaterum & equiangulum CFG ; Item in circulo BCD , decagonum equilaterum, & equiangulum BCD ; eruntque latera BC , CF , inter se equalia. Quoniam vero, si connectantur recta CD , FG , anguli CDB , FGC , sunt aequales, ut in scholio propos. 33. lib. 6. ostendimus, quod insistant arcibus similibus BC , CF , nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoque anguli BCD , CFG , in semicirculis aequales, nimirum recti; Erunt quoque latera BD , CG , inter se equalia. Quam ob rem cum diametri BD , CG , sint aequales, aequales quoque erunt circuli BCD , CFG . Ac proinde, cum recta AC , sit latus hexagoni circuli CFG ,

erit quoque eadem recta AC , latus hexagoni circuli BCD .

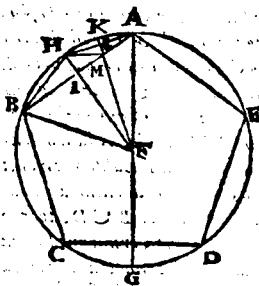
Quod est propositum.

10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

IN circulo $A B C D E$, cuius centrum F , descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris $A B$, æquale esse quadrato lateris hexagoni, una cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter $A F G$, & connectatur recta $F B$. Diuiso deinde arcu $A B$, bisariam in H , connectantur rectæ $A H$, $B H$, & $F H$, secans rectam $A B$, in I :



eritque recta $A H$, latus decagoni, & $B F$, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu $A H$, bisariam in K , adiungatur recta $F K$, secans rectam $A H$, in L , & rectam $A B$, in M , puncto, ad quod recta ducatur $H M$. Quoniam igitur arcus $A H$, $B H$, æquales sunt; erunt & anguli ipsis insistentes $A F H$, $B F H$, æquales. Quare cum latera $A F$, $F I$, trianguli $A F I$, æqualia sint lateribus $B F$, $F I$, trianguli $B F I$; & anguli ipsis contenti, æquales quoque; erunt & bases $A I$, $B I$, æquales, & anguli $A I F$, $B I F$, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ $A L$, $H L$, & anguli $A L F$, $H L F$, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus $A B C G$, $A E D G$, demantur æquales arcus $A B C$, $A E D$; relinquentur arcus $C G$, $D G$, inter sese æquales, ideoque erit arcus $C G$, dimidium arcus $C D$: Est autem & arcus $A H$, dimidium arcus $A B$. Igitur cum arcus $A B$, $C D$, æquales sint;

27. tersij.

4. primi.

anguli $A F I$, æqualia sint lateribus $B F$, $F I$, trianguli $B F I$; & anguli ipsis contenti, æquales quoque; erunt & bases $A I$, $B I$, æquales, & anguli $A I F$, $B I F$, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ $A L$, $H L$, & anguli $A L F$, $H L F$, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus $A B C G$, $A E D G$, demantur æquales arcus $A B C$, $A E D$; relinquentur arcus $C G$, $D G$, inter sese æquales, ideoque erit arcus $C G$, dimidium arcus $C D$: Est autem & arcus $A H$, dimidium arcus $A B$. Igitur cum arcus $A B$, $C D$, æquales sint;

sint; erunt quoque eorum dimidij arcus CG , AH , æqua-
les; Ac propinde cum arcus AH , duplus sit arcus HK , erit
& arcus CG , duplus eiusdem arcus HK . Eodem modo,
quia arcus AB , BC , æquales sunt; & est arcus AB , du-
plus arcus BH , erit etiam arcus BC , eiusdem arcus BH ,
duplus. Quare arcus CG , BC , æquemultiplices sunt, nem-
pe dupli, arcuum HK , BH ; Ac propterea totus arcus
 BG , duplus quoque erit totius arcus BK ; & idcirco angu-
lus quoque BFG , duplus anguli BFK : Sed quia (cum an-
guli FAB , FBA , ob æqualitatem laterum FA , FB , æqua-
les sint, ipsisque æqualis externus BFG ;) idem angulus
 BFG , duplus est quoque anguli FAB ; erunt idcirco
anguli BFM , FAB , æquales; Ac propterea triangu-
la ABF , FBM , cum habeant angulos FAB , MBF , æqua-
les, & angulum ABF , communem, æquiangula erunt.
Quocirca erit ut AB , ad BF , ita BF , ad BM ; ideoque
rectangulum sub AB , BM , æquale erit quadrato rectæ
 BF . Rursus quia latera AL , LM , trianguli ALM , æqua-
lia sunt lateribus HL , LM , trianguli HLM , & anguli quo-
que ipsis contenti æquales, nempe recti: erunt & bases AM ,
 HM , & anguli LAM , LHM , æquales: Est autem angu-
lus LAM , angulo HBA , æqualis, quod & latera HA ,
 HB , æqualia sint. Igitur & angulus LHM , eidem angu-
lo HBA , æqualis erit; Ac propterea triangu-
la ABH , AHM , cum habeant angulos ABH , AHM , æquales,
& angulum HAM , communem, æquiangula erunt.
Quam ob rem erit ut AB , ad AH , ita AH , ad AM ;
ideoque rectangulum sub AB , AM , æquale erit quadrato
rectæ AH : ostensum est autem & rectangulum sub AB ,
 BM , æquale quadrato rectæ BF . Igitur rectangula sub
 AB , BM , & sub AB , AM , simul æqualia sunt quadratis
rectarum BF , AH : At utro rectangula sub AB , BM , &
sub AB , AM , æqualia sunt quadrato rectæ AB . Quadra-
tum ergo rectæ AB , nempe lateris pentagoni, æquale est
quadratis rectarum BF , AH , lateris uidelicet hexagoni, &
lateris decagoni. Si igitur in circulo pentago-
num æquilaterum describatur, &c.

Quod erat demon-
strandum.

1. quinti.
3. sexti.
5. primi.
2. primi.

3. 2. primi.
4. sexti.
1. 7. sexti.

4. primi
5. primi.

3. 2. primi.
4. sexti.
1. 7. sexti.

2. secundi

COROLLARIUM. I.

Hinc sequitur, lineam rectam, quæ ex centro ducta dividit arcum quempiam bifariam, dividere quoque rectam illi Arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, præposita quod arcum A B, dividit bifariam, dividere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

COROLLARIUM. II.

PERSPICUUM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam dividere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, per latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos. Demonstratum enim est diametrum A G, ex puncto A, ductam dividere arcum C D, quem latus oppositum C D, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoque latus C D, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatere in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, ut constat.

SCHOLIUM.

QUONIAM ad finem lib. II. præsum quendam ex Problemis addidimus, quæ una eademque est per a in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilatrum, describitur, eiusque demonstrationem in hunc locum diffinitionis præmissis, nunc à nobis ea demonstranda est. Sit quidem datus circulus A B C, cuius centrum D. Ducta autem diametrum B C erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semicirculo C D, bifaria in E, ducta sit recta E A, quæ æqualis abscondatur E F, adlongaturque recta A F. Dico rectam A F, esse latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cum enim C D, secta sit bifariam in E, & que addita



D F, erit rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ B E, æquale quadrato rectæ E A, idcirco quadrato rectæ E A, quæ ipsæ B F, est æqualis: Est autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale est quadratis rectarum A D, D E, Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E,

6. secundi
47. primi.

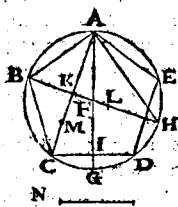
D E,

D F, reliquetur rectangulum sub C F, D F, æquale quadrato rectæ A D, hoc est, quadrato rectæ C D. Quam obrem erit ut C F, ad C D, ita C D, ad D F; proptereaque recta C F, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius segmentum C D, sit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll. propos. 15. lib. 4. erit minus segmentum D F, latus decagoni eiusdem circuli; ut demonstrauimus ad propos. 9. huius lib. Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni A D, una cum quadrato lateris decagoni D F, æquale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli; Est autem eisdem quadratis rectarum A D, D F, æquale quadratum rectæ A F; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; ac propterea recta A F, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.

THEOR. II. PROPOS. II.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.

IN circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E. Di-co eius latus A B, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, secetque A G, latus C D, in I, connectanturque rectæ A C, A H. quarum A C, secet diametrum B H, in K. Abscindatur quoque ex semidiametro F H, quarta ei⁹ pars F L; Itē ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, ponitur Rationalis; erunt quoque F L, B F, illi commensurabiles, cum sint eius partes aliquotæ, Rationales, Atque ideo & tota B L, composita, cum sit commensurabilis utrique F L, B F, Rationalis erit. Rursus quoniam recta F B, ex centro ducta fecat arcum A C, bisariam in B; secabit quoque recta A C, bisariam



17. sexti.

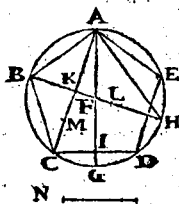
10. tertij de c.

47. primi.

12.

16. decimi.

bisariam in K , & ad angulos rectos, ex coroll. 1. precedentis propos. Secat autem & recta AG , rectam CD , in I , bisariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo ACI , AFK , cum habeant angulos AIC ,



AKF , rectos, & angulum CAI , communem, æquiangula inter se erunt. Quam ob rem erit, ut CI , ad CA , ita FK , ad FA ; & permutando ut CI , ad FK , ita CA , ad FA : Ut autem CA , ad AF , ita est CM , quarta pars ipsius CA , ad FL , quartā partem ipsius FA . Erit igitur ut CI , ad FK , ita CM , ad FL ; & permu-

tando, ut CI , ad CM , hoc est, ut CD , dupla ipsius CI , ad CK , duplam ipsius CM , ita FK , ad EL ; Atque componendo, ut CD , CK . simul ad CK , ita FK , FL , simul, nimirum recta KL , ad FL ; Ac propterea erit, ut quadratum rectæ compositæ ex CD , CK , ad quadratum rectæ CK , ita quadratum rectæ KL , ad quadratum rectæ FL . Quia uero si AC , secetur extrema ac media ratione, (ducta uidelicet recta BD ,) maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD ; Erit quadratum rectæ compositæ ex CD , maiori segmento, & CK , dimidia totius, quintuplū quadrati rectæ CK , dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL , quintuplum erit quadrati rectæ FL , ideoque quadratum rectæ KL , commensurabile erit quadrato rectæ FL ; Ac proinde rectæ KL , FL , commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autē FL , ostensa Rationalis. Igitur & KL , Rationalis erit. Deinde quia qualium partium 4. est BF , talium 1. est FL ; ac propterea qualium 5. est BL , talium 1. est FL ; erit quadratum rectæ BL , talium partium 25. qualium 1. est quadratum rectæ FL , (uicin his numeris patet 1. 5. 25. habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. est quadratum rectæ FL , talium 5. ostensum est quadratum rectæ KL . Qualium igitur 25. est quadratum rectæ BL , talium 5. est quadratum rectæ KL ; ac proinde quadratum rectæ BL , quintuplum erit quadrati rectæ KL . Quia ergo quadrata rectarum BL ,

AL ,

32. primi
4. sexti.

5. quinti

22. sexti.

8. tertijdec.

1. tertijdec.

6. decimi.

20. sexti.

$K L$, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut patet ex coroll. propof. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. uel 5. ad 1.) Erunt rectæ $B L$, $K L$, longitudine incommensurabiles; ideoque cum ostense sint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali $B L$, dematur Rationalis $K L$, potentia tantum commensurabilis, erit reliqua $B K$, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei uero congruens erit $K L$.

9. decimi.

74. decimi

Iam uero recta $B L$, possit plus, quam recta $K L$, quadrato rectæ N . Quoniam igitur quadratum rectæ $B L$, æquale est quadratis rectarum $K L$, & N ; Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ $B L$, talium 1. fuit quadratum rectæ $K L$; Erit reliquum quadratum rectæ N , talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ $B L$; Ac propterea quadrata rectarum $B L$, & N , proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Quare commensurabilia erunt, proptereaque rectæ ipsæ $B L$, & N , commensurabiles, saltem potentia: Est autem $B L$, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N . Quia uero quadrata rectarum $B L$, & N , proportionem non habent, quâ numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut perspicuum est ex coroll. propof. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) Erunt rectæ $B L$, & N , longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta $B L$, Rationalis, longitudine sit commensurabilis Rationali $B H$; (Qualium enim partium 8. est $B H$, talium 5. est $B L$.) possitque plus, quam congruens $K L$, quadrato rectæ N , sibi longitudine incommensurabilis, ut ostensum est; Erit $B K$, Apotome quarta, ex definitione.

6. decimi.

9. decimi.

POSTERMO quia recta $A B$, est media proportionalis inter $B H$, $B K$, ex coroll. propof. 8. lib. 6. (quod triangulum $A B H$, habeat angulum $B A H$, rectum, a quo ducta est $A K$, ad basin, perpendicularis) erit quadratum rectæ $A B$, æquale rectangulo sub $B H$, $B K$. Quocirca cum superficiem contentam sub Rationali $B H$, & Apotoma quarta $B K$, possit recta linea $A B$; Erit $A B$, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

31. tercij.

17. sexti.

99. decimi.

THEOR.

8.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

In circulo ABC , cuius centrum D , triangulum æquilaterum inscribitur ABC . Dico quadratum lateris AB , triplum esse quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro



AE , quæ scdet, ex coroll. propos. 10. huius lib. arcum BC , bisariam in E , & rectâ BC , bisariam quoque & ad angulos rectos in puncto F ; cum arcus BC , sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE , eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoque cõmuncta recta BE , latus erit hexagoni, & equalis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4.

Quoniam igitur quadratum rectæ AE , equalis est quadratis rectarum AB , BE , quod angulus ABE , in semicirculo rectus sit: est autem quadratum rectæ AE , quadruplum quadrati rectæ BE , ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AE , dupla sit lineæ BE , erunt quadrata rectarum AB , BE , simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ BE ; Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum AB , BE , talium partium 1. erit quadratum rectæ BE ; & idcirco talium partium 2. erit quadratum rectæ AB . Quare quadratum rectæ AB , triplum est quadrati rectæ BE , quæ equalis est semidiametro. Siquitur in circulo triangulum æquilaterum describitur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc est facile colligi potest, semidiametrum DE , bisariam secari in F , a latere trianguli BC . Cum enim quadratum rectæ AB , triplum sit quadrati rectæ BE ; & ponatur quadratum rectæ AB , partium 12. erit quadratum rectæ BE , talium partium 4. Est autem quadratum rectæ BE , æquale quadratis rectarum BF , FE . Igitur

& talium

47. primi.

31. senty.

47. primi.

5. primi

26. primi

13.

PROBL. 4. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphaera complecti; & demonstrare, quod sphaerae diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

Si igitur datae sphaerae diameter AB , circa quam semicirculus describatur ACB ; & ex A, B , auferatur tertia pars B, D , ut sit A, D , ipsius D, B , dupla; at uero A, B , eiusdem D, B , tripla; & ipsius A, D , sesquialtera. Deinde ducta DC , perpendiculari ad A, B , connectantur rectae A, C , B, C . Ad interual



lum rectae HE , quae equalis sit ipsi DC , describatur circulus EGK , cuius centrum H , in quo triangulum equilaterum inscribatur EFG , adiunganturque rectae HF , HG , quae singulae equalis erunt ipsi DC , cum equalis sint ipsi HE , ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H , ad planum circuli perpendicularis HI , quae equalis ponatur rectae AD , & ex I , demittantur rectae IE , IF , IG . Dico solidum contentum quatuor triangulis FEI , IEF , IFG , IEG , esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam latera DA , DC , trianguli ADC , equalia sunt lateribus HI , HE , trianguli IHE , & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defn. lib. 1. erit basis AC , basi IE , equalis. Non aliter ostendemus eandem rectam AC , equalis esse rectis IF , IG . Rursus quia tres lineae AD , DC , DB , proportionales sunt

4. primi.

26. primi

fun

sunt, ex coroll. propof. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propof. 10. lib. 6. ut AD , ad DB , ita quadratū rectę AD , ad quadratū rectę DC ; & cōponēdo, ut AB , ad DB , ita quadrata rectarū AD , DC , simul ad quadratū rectę DC : Sunt autē quadrata rectarū AD , DC , æqualia quadrato rectę AC . Igitur erit quoq; ut AB , ad DB , ita quadratū rectę AC , ad quadratum rectę DC ; Ac proinde cū AB , sit ipsius DB , tripla, erit quoq; quadratū rectę AC , triplum quadrati rectę HE , cū HE , æqualis sit ipsi DC : Atqui & quadratum rectę EF , triplum quoque est eiusdem quadrati rectę HE . Quadratū ergo rectę AC , quadrato rectę EF , æquale erit; & propterea rectę AC , rectę EF . Quare cū recta AC , ostensa quoque sit æqualis rectis IE , IF , IG ; erunt quatuor triangula EFG , EFI , FGI , GEI , æquilatera & æqualia inter se. Constituunt igitur iam est pyramis, seu Tetraedrum, cuius basis EFG , uertex uero I . Dico pyramidem hanc comprehendi sphaera data, cuius diameter AB ; & diamestrum sphaerę AB , potentia sesquialteram esse latetis BF , uel AC .

47. primi.

12. tertijdec.

EXTENDATUR perpendicularis IH , usque ad K , ut sit HK , ipsi DB , & tota IK , toti AB , æqualis. Quia ergo tres rectę AD , DC , DB , proportionales sunt, quibus æquales existunt tres IH , HE , HK ; erunt quoq; IH , HE , HK , proportionales. Quare cū HE , sit ad IK , perpendicularis, & media proportionalis inter IH , HK , semicirculus circa IK , descriptus in plano rectarū IK , HE , transibit per E , ut mox ostentur; Eodemq; argumento tam semicirculus circa eandem rectam IK , descriptus in plano rectarum IK , HF , transibit per F , quā semicirculus circa eandem IK , descriptus in plano rectarum IK , HG , per G . Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro, sphaeram describet, quę constitutum Tetraedrum completitur, cum per omnes illius angulos E , F , G , I , incedat. Cum ergo hæc sphaera descripta æqualis sit sphaerę data, quod diameter IK , æqualis ponatur diametro AB , comprehenderur idem Tetraedrum sphaera data.

QUONIAM vero tres rectę AB , AC , AD , proportionales sunt, ex coroll. ppos. 8. lib. 6. erit ut AB , ad AD , ita quadratū rectę AB , ad quadratū rectę AC , ex coroll. ppos. 10. lib. 6. Est autē recta AB , & squaltera rectę AD , qd. qualium partiu 3

est

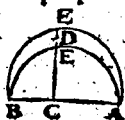
est AB, taliū 2, sit A D. Igitur & quadratū rectę AB, sesqui-
alterū erit quadrati rectę AC; Ac propterea cum AB, sit
diameter sphęrę, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqua-
lis, perspicuum est, diametrum sphęrę potentia sesquialte-
ram esse lateris Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem er-
go constituimus; & data sphęra cõplexi sumus, &c. Quod
erat faciendum.

L E M M A.

Q U O D autem semicirculus circa I K, in plano
rectarum I K, H E, descriptus, transeat per E, facile
demonstrabitur hoc proposito theoremate.

S I ad lineam rectam perpendicularis duca-
tur, quę sit media propotionalis inter segmen-
ta lineę; semicirculus circa illam lineam rectam
descriptus transibit per extremum punctum li-
neę perpendicularis.

S I T enim ad A B, perpendicularis C D, & me-
dia propotionalis inter A C, & C B. Dico semicir-
culum circa A B, descriptum transire



per D. Nam si transeat citra D,
vel ultra, nimirum per punctum E;
erit quoque C E, media propotiona-
lis inter A C, & C B, ex coroll. propof. 13, lib. 6.

17. sexti.

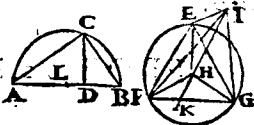
Quare iam quadratum rectę C D, quam quadratum
rectę C E, æquale erit rectangulo sub A C, C B; Ac
proinde quadrata rectarum C D, C E, inter se æqualia,
& ipsę rectę C D, C E, æquales erunt, pars & to-
tum. Quod est absurdum. Transibit ergo semicir-
culus per D.

H I N C manifestum est, semicirculam in superiori
figura

figura descriptum circa IK , in plano rectarum IK ,
 HE transire per E , cum HE , sit ad IK , perpendi-
 cularis, & media proportionalis inter IH , HK .

COROLLARIUM I.

Hinc facile colligemus, diametrum sphaerae esse quadruplam
 sesquialteram semidiametri circuli circa basim pyramidis descri-
 pti. Cum enim diameter sphaerae AB , ostensa sit sesquialtera la-
 teris pyramidis BF ; erit quadratum rectae BF , talium partium 6.
 qualium 9. est quadratum rectae
 AB : At quatum partium 6. est
 quadratum rectae BF , talium
 partium 2. est quadratum rectae
 HE , quod quadratum rectae BF ,
 tripulum sit quadrati rectae HE .
 Qualium igitur partium 9. est
 quadratum rectae AB , talium
 partium 2. erit quadratum rectae HE ; Ac propterea diameter sphae-
 ra AB , potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri HE , cum
 proportio quadratorum sit, quae 9. ad 2.



12. terijde

COROLLARIUM II.

Reversus perpendicularis ex centro sphaerae ad planum basis
 pyramidis descripta, sexta pars erit diametri sphaerae, & tertia pars
 semidiametri. Sit enim L , centrum semicirculi ACB , eritque L ,
 centrum quoque sphaerae. Dico rectam LD , (quae nimirum ex cen-
 tro sphaerae ad basin $BEFG$, ducitur perpendicularis; cum AD ,
 equalis sit ipsi IH , & ideo punctum D , idem quod H , quemad-
 modum & L , idem est quod centrum sphaerae) esse sextam partem
 diametri sphaerae, nempe rectae AB . & tertiam partem semidiamet-
 ri AL . Quoniam AD , dupla est ipsius DB ; Qualium partium 4.
 est AD , talium 2. erit DB ; ac proinde talium 6. tota AB , & semi-
 diameter AL , talium 3. Quare si AD , est 4. & AL , 3. erit LD , 1.
 & idcirco LD , sexta pars erit rectae AB , quae fuit partem eam-
 dem 6. & tertia pars rectae AL , quae fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis HI , duas tertias partes
 continebit ipsius diametri. Est enim HI , eadem, quae AD , conti-
 nens duas tertias diametri, ex constructione.

Reversus, qualium partium 9. ponetur quadratum dia-
 metri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyra-
 midis. Nam proportio 9. ad 4. est du-
 plicata proportionis 3. ad 2.
 ut hic apparet 9.

64.

Dd

SCHO.

Q U O D si ex materia aliqua conficiantur quatuor trian-
gula aequaliter aequalia, disponanturque, ut hac figura indi-
cat, facile ex ipsis rite inter se compli-
catis componetur Tetraedrum, secun-
dum totam soliditatem. Hanc uero pra-
xim, & sequentes quatuor, quibus re-
liqua quatuor solida regularia in materia quavis sensibili con-
ficiuntur, desumpsimus ex Alberio Dureri non ignobili scri-
ptore.

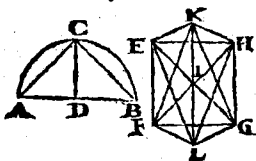


15.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere ; &
sphæra complecti, qua & pyramidem ; &
demonstrare, quod sphæræ diameter poten-
tia sit dupla lateris ipsius octaedri.

4. primi. S I r sphæræ, quæ constitutam pyramidem comprehen-
dit, diameter A B, circa quam semicirculus describatur
ACB, & ex centro D, ad A B, perpendicularis ducatur D C,
connectanturq; rectæ A C, B C, quæ æquales inter se erunt.
Sumpta iam recta E F, quæ æqualis sit ipsi A C, uel B C, de-
scribat ut super eam quadra-
tum E F G H, in quo ducan-
tur diametri E G, F H, se mu-
tuo secantes in I: eruntque re-
ctæ I E, I F, I G, I H, æquales,
cum sint semidiametri circuli
circa quadratum descripti, ut
in 4. lib. demonstratum est.



Deinde ex I, in utranque partem ad planum quadrati
erigatur perpendicularis K L, ponanturque I K, I L,
æquales ipsi I E : Et denique ex K, & L, deducantur
ad angulos quadrati rectæ K E, K F, K G, K H ;
L F,

LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum, quod queritur. Quoniam latera EI, IK, trianguli EIK, equalia sunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defn. 3. lib. 11. At uero EIH, eo quod sit equalis angulo GIH, sibi deinceps, ob equalitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) Erit & basis EK, basi EH, equalis: Eodemq; modo eidem EH, equalis erit KH; ideoque triangulum equilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triagula esse equalitera; atque adeo equalia triangulo KEH, cum illorum latera equalia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis aequaliteris & equalibus. Quod octaedrum dico comprehendere sphaera diametri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphaerae AB, potentia duplicem esse lateris EF, uel AC.

8. primi.

4. primi.

Q U O N I A M IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defn. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL; (quod tres rectae KI, IE, IL, equalia sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per punctum E, ex lemmate praecedentis propof. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphaeram, quae complectitur octaedrum constitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hoc sphaera equalis sit datae sphaerae, cuius diameter AB; (Nam cum rectae AC, EF, equalia sint, ideoque ipsarum quadrata equalia; Sit autem tam quadratum rectae AC, duplum quadrati rectae AD, quam quadratum rectae EF, quadrati rectae EI; Brunt & rectae AD, EI, hoc est, KI, semidiametri equalia. Quare & totae diametri AB, KL, equalia erunt; ac proinde sphaerae ipsarum equalia existent.) comprehendetur idem octaedrum data sphaera.

47. primi.

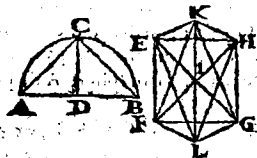
Quia vero quadratum rectæ AB, æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplum esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituitur, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM. I.

Ex dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti.

4. undec.

18. undec.



Atque proinde, cum KI, recta sit ad lineas EG, HF; recta quoque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum; Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, ut paucis repleatur, tria plana BFGH, KFLH, ELGK, se mutuo ad angu-

los rectos secabunt; Quæ quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, ut ostendimus,) quadratum diametri EF, æquale existat quadratis laterum octaedri FK, KH. Ita enim efficitur, ut angulus, FKH, rectus sit, Eademque est ratio de cæteris angulis.

48. primi.

COROLLARIUM. II.

OCTAEDRUM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, uertices uero K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana unius sunt similia & æqualia planis alterius, ut constat; cum sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, ut est demonstratum.

COROLLARIUM. III.

Si tetraedrum, & octaedrum in eodem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitercium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. Quocumque igitur diameter sphæræ est potentia sesquialtera lateris tetra-

13. scrijds

edri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4, qualium 6. est quadratum diametri sphaeræ. Rursus quia diameter sphaeræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3, qualium 6, est quadratum diametri sphaeræ. Igitur cum talium partium 4, sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3, est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia seque tertium esse lateris octaedri.

14. terdec.

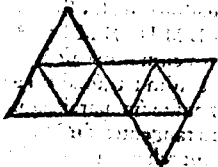
COROLLARIUM. IIII.

DEINQUE, quia in quadrato $BFGH$, recta EH , parallela est rectæ FG ; & in quadrato $HLGK$, recta EK , rectæ GL : Sit planum BHK , per EH , & EK , ductum plano FGL , per FG , GL , ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficiuntur bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

15. undec.

SCHOLIUM.

QVOD si ex materia aliqua conscribantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, ut hac figura indicat, facile ex ipsis rite inter se complicatis componetur octaedrum secundum totam soliditatem, ut ait Albertus Durerus.



PROBL. 3. PROPOS. 15.

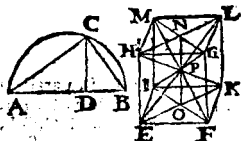
14.

CVBVM constituere; & sphaera complecti, qua & priores figuras; & demonstrare, quod sphaeræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIT sphaera, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB , circa quam semicirculus describatur ACB : & ex AB , auferatur tertia pars BD , ut sit AB , ipsius BD , tripla. Deinde ducta DC , perpendiculari ad AB , connectantur rectæ AC , BC . Super rectam EF , quæ rectæ BC , sit æqualis, quadratum constituatur $EFGH$, super quod erigantur

Dd 3 perpen-

perpendicularares $E I, F K, G L, H M$, æquales quoque ipsi $B C$, quarum extrema coniungantur rectis $I K, K L, L M, M I$. Quoniam ergo anguli $I E F, K F E$, recti sunt, ex



defin. 3. lib. 11. erunt rectæ $E I, F K$, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque æqualis posita sit ipsi $B C$, hoc est, ipsi $E F$. Igitur & $E F, I K$, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est $E F K I$; In quo, cum lineæ $E I, I K, K F$, æquales sint ip-

si $E F$, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum $E I K, F K I$, æquales sint oppositis rectis $K F E, I E F$. Igitur $E F K I$, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt $F K L G, G L M H, H M I E$; Atque idcirco & $I K L M$, quadratum erit, cum simile sit & æquale quadrato opposito $E F G H$. Est enim EL , solidum parallelepipedum, quod eius plana opposita sint parallelæ, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ductæ. Quare cubus erit EL . Quem dico comprehendi sphaera diametri $A B$. Sint enim planorum oppositorum $E F K I, G H M L$, diametri $E K, F I, G M, H L$, per quæ ducantur plana $E K L H, F I M G$. Quia igitur tam planum $E K L H$, quam $F I M G$, cubum bifariam secant, utrumque per centrum cubi transibit, ex scholio propof. 39. lib. 11. per punctum uidelicet P , in quo, ex coroll. eiusdem propof. se mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum sectio, recta scilicet $N O$, per idem punctum P , incedet. Quia uero plana $E K L H, F I M G$, rectangula sunt, (Cum enim $H E$, perpendicularis sit duabus rectis $E I, E F$, ob quadrata $E M, E K$; perpendicularis quoque erit ad planum $E K$, ideoq; ad rectam $E K$, ex defin. 3. lib. 1. Rectus ergo angulus est $H E K$. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano $E K L H$, nec nõ & anguli in plano $F I M G$. Rectangula ergo sunt plana $E K L H, F I M G$, & æqualia, quod latera unius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri $E L, H K, F M, G I$, æquales, ut constat ex scholio propof. 34. lib. 1.

Ac

6. undec.

13. primi.

34. primi.

24. undec.

15. undec.

28. undec.

4. undec.

Ac proinde & semidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quart semicirculus circa EL, ex centro P describitur, & circumductus, fixa manente diametro EL, sphaeram describet per omnes cubi angulos transeuntem: quam quidem æqualem esse sphaeræ diametri AB, ita demonstrabitur.

Cum quadratum rectæ EK, æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL: Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL: Est autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc est, quadrati rectæ BC: At uero eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipsius BD, sit tripla, erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt; Ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphaerarum, ideoque & ipsarum sphaeræ, æquales existunt.

47. primi.

47. primi.

Quia uero ostensum est quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL; manifestum est, diametrum sphaeræ potentia triplum esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphaera complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM. I.

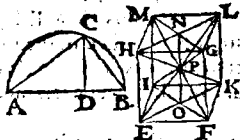
Ex demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bifariam in centro sphaeræ secare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseque mutuo bifariam secare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML, EFKL, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OPP, OPP, trianguli OPP, æquales sunt duobus angulis

Dd 4

NMP,

19. primi.
16. undec.

NMP, NPM, trianguli NMP; (Nam angulus OFP, æqualis est al-



15. primi.

æqualia erunt; ac proinde recta NO, bisariam secabitur in P. Eademque est ratio de cæteris lineis coniungendis centra aliorum quadratorum oppositorum.

COROLLARIUM. II.

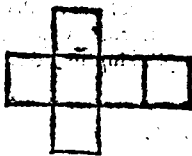
13. tersijde.

15. tersijde.

47. primi.

RURSUS potentia diametri sphaeræ, seu cubi, æqualis est potentia laterum tetraedri & cubi simul sumptis. Nam qualium partium 9. est quadratum diametri; talium 6. est quadratum lateris tetraedri; Qualium uero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quæ admodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis duorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphaeræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi uero BC. Perspicuum autem est, diametrum sphaeræ AB, posse & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, sit rectus.

SCHOLIUM.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur sex quadrata inter se æqualia, disponanturque, ut hæc figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicantur inter se. Efficietur enim

ex illis figura quadam solida octo angulos solidos continens instar tessera cuiuspiam, ut constet.

16.

PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM constituere; &
sphaera

Sphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosædri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

S i 7 sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diametros AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, ut AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta; At vero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad intervallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcibus FG, GH, HI, IK, KF, bisectantur in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ EL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculariter erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntq; omnes inter se æquales; sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe EL, QR, EM, QS, EN, QT, EO, QV, EP, QX, (quas tamen omnes, ut intærimus confusionem, non ducimus.) binæ inter se æquales erunt; Ac proinde, cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoq; erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. Quia uero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: Eademq; ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto: conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in rectâ QS. Igitur efficiunt hæc duo plana unum planum, per ea, quæ ad propos. 6. lib. 1. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere unum planum; nec non planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad intervallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritq; æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta

11. quarti.

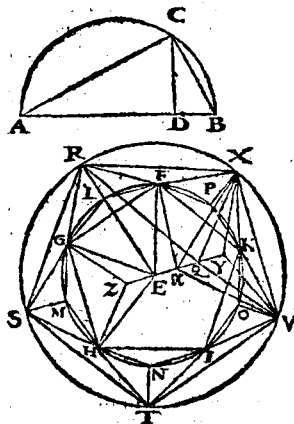
6. undec.

33. primi.

15. undec.

6. undec.
33. primi.
28. tertijde.

puncta R, S, T, V, X, rectis RS, ST, TV, VX, XR. Quia igitur LR, PX, æquales sunt & parallelæ; si concipiatur duci recta LP, erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FI, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumento con-



cludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera equalia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendiculara-

ris LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK; & est LF, latus decagoni; erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR, quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus utriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem tria- gula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia, cum eorum omnia latera equalia sint lateribus pentagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in utramque partem extendatur,

10. tertijde
47. primi.

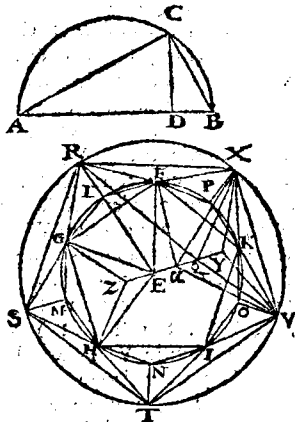
redatur, sineq; rectæ QY , EZ æquales singule, lateri decagoni circuli $FGHIK$, uel $RSTVX$; & connectantur rectæ VQ , VY , XQ , XY , GE , GZ , HE , HZ . Quoniā ergo QX , semidiameter est circuli $RSTVX$, hoc est, latus hexagoni; & QY , latus est decagoni eiusdem circuli; erit quadratum lateris pentagoni, XV , æquale quadratis rectarum QX , QY : Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY , quod angulus XQY , rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum $FGHIK$, $RSTVX$, parallela sint ostensa, sitque EQ , ad illius planum recta, ex constructione; erit quoque EQ , ad huius planum recta, ex scholio propof. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX , in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY , æquale est quadrato rectæ XV , proptereaue recta XY , rectæ XV , æqualis. Eodemque modo eisdem XV , æqualis ostenditur VY ; Ac proinde triangulum VYX , æquilaterum, est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY , SY , TY , (quas tamen, ut uitaremus confusionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX , $RY S$, SYT , TYV , æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX , hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH , (cum EG , sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ , latus decagoni, angulusque GEZ , rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI , IZK , KZE , FZG , (quorum tamen lineas, ne parceremus confusionem, non duximus) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula uiginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturq; singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosædron. Quod dico comprehendi sphaera diametri AB .

D I V I S I O. recta EQ , bisariam in α , ducantur rectæ αF , αX , αV . Quoniam igitur latera αQ , QV , trianguli αQV , æqualia sunt lateribus αQ , QX , trianguli αQX , cum QY , QX , sint semidiametri circuli $RSTVX$;

10. verside.
47. primi.

4. primi.

VX : Sunt autem & anguli αQV , αQX , æquales, nempe recti, ex defin. 5. lib. 1. t. Erunt & bases αV , αX , æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α , Q, ad R, S, T, ostenduntur rectæ αR , αS , αT , æquales & inter se, & ipsis αV , αX . Rursus quia latera αQ , αQX , trianguli αQX , æqualia sunt lateribus αE , αF , trianguli $\alpha E F$, cum QX , EF , sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ , divi-



fa. sit bifariam in α :
Sunt autem & anguli
 αQX , αEF , æqua-
les, nimirum recti, ex
defin. 3. lib. 1. Erunt
quoq; bases αX , αF ,
æquales : Eodemque
modo si ex α , E , ad G ,
 H , L , K , rectæ ducan-
tur, ostendentur αG ,
 αH , αI , αK , æqua-
les ipsi αX ; Ac proin-
de decem lineæ ductæ
ad decem angulos F ,
 G , H , I , K ; R , S ,
 T , V , X , æquales sunt.
Quoniam uero QE ,
semidiameter est, hoc

9. tørt i dec.

3.tertjdec.

est, latus hexagoni circuli $F G H I K$; & $E Z$, latus decagoni eiusdem circuli, erit $Q Z$, diuisa in E , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit $Q E$. Quare minus segmentum $Z E$, assumens $E \alpha$, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta αZ , quintuplum potest eius, quod ex $E \alpha$, describitur, quadrati: Potest autem & recta αF , quintuplum eiusdem quadrati rectæ $E \alpha$. (Nam cum quadratum rectæ $E F$, quadruplum sit quadrati rectæ αE , ex scholio propof. 4. lib. 2. quod recta $E F$, dupla sit ipsius $E \alpha$; erunt quadrata rectarū $E F$, $E \alpha$, simul quadrata quadrati rectæ $E \alpha$. Cū ergo quadratis rectarū $E F$, $E \alpha$, æquale sit quadratū rectæ αF ; erit quoque quadratū rectæ αF , quintuplū quadrati rectæ $E \alpha$.) Igitur æqualia sūt quadrata rectarū αZ , αF , ac proinde rectæ ipsæ αZ , αF , æquales erūt. Cū igitur $Z Y$, bifariā secet in α , (propterea quod

47. primi.

quod

quod si æqualibus τ B, α Q, æquales rectæ addantur E Z, Q Y, totæ Z α , Y α , æquales hiant.) Brunt omnes rectæ duæ ex α , ad omnes angulos Icosædri æquales. Quo circa sphaera descripta circa diametrum ZY, ex centro α , per omnes angulos Icoinedri constituti transibit. Hanc ergo sphaeram dico æqualem esse sphaeræ diametri AB.

Cum sit ut α Z, ad τ E, ita Y Z, dupla ipsius α Z, ad Q B, duplam ipsius α E; Ac propterea ut quadratum rectæ τ Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ Y Z, ad quadratum rectæ Q E; sit autem quadratum rectæ α Z, ostensum, quintuplum quadrati rectæ α E: Erit quoque quadratum rectæ Y Z, quintuplum quadrati rectæ Q E, hoc est, quadrati rectæ B C; quod recta Q E, æqualis sit posita semidiametro E F, hoc est, rectæ B C: Est autem & eiusdem quadrati rectæ B C, quintuplum quadratum rectæ AB. (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit ut A B, ad B C, ita B C, ad B D; erit ut A B, ad B D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B C, ex coroll. propos. 10. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius B D, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ B C.) Quadratur igitur rectarum Y Z, AB, equalia sunt, adeoq; & rectæ Y Z, A B; Ac propterea & sphaeræ circa ipsas, æquales erunt.

Quoniam autem denique diameter sphaeræ AB, Rationalis ponitur; (Nam cõmparatione ipsius ostendendum est, latus Icosædri esse lineam Irrationalem, quæ Minor uocatur.) potestque quintuplum quadrati rectæ B C, hoc est, rectæ illi æqualis E F; erit quoque semidiameter E F, circuli FGHK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum A B, E F, cum habeat proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. uel 10. ad 2. erunt cõmensurabilia; Ac propterea & rectæ A B, E F, cõmensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & E F, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHK, Rationalis erit; Ac propterea F G, latus pentagoni, hoc est, latus Icosædri, Irrationalis erit linea, quæ uocatur Minor. Icosædru igitur constituimus, & sphaera sumus complexi, qua & ante dictas figuras; & demonstrauimus, quod Icosædri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor. quod erat faciendum.

COROLLARIUM. I.

Ex dictis inferitur, sphaerae diametrum esse potentia quinquupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quaque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est, quadratum diametri AB , quantuplum esse quadrati rectae BC , hoc est, semidiametri EF .

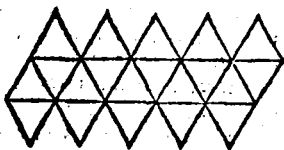
COROLLARIUM. II.

Item manifestum est, sphaerae diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli. Nam YZ , diameter sphaerae componitur ex BQ , latere hexagoni, & ex QY , EZ , lateribus decagoni circuli $FGHIK$.

COROLLARIUM. III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI , esse parallela. Nam recta RX , ostensa est parallela rectae, quae ex L , in P , duceretur. Cum igitur eidem rectae $L P$, sit quoque parallela recta HI , ut in scholio propos. 17. lib. 3. demonstravimus; (eo quod aequales sint arcus HL, IP ; continet enim uterque tres decimas partes totius circumferentiae,) perspicuum est, rectas RX, HI , esse parallelas. Badèq; est ratio de cæteris lateribus oppositis.

SCHOLIUM.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatæ inter se æqualia, disponanturque, ut hac figura indicat, componitur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

cundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

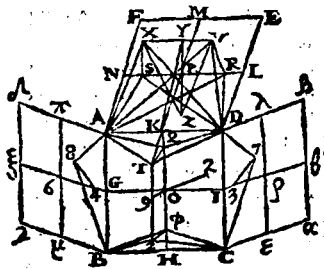
17.

PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphaera complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, qd Dodecaedri latus Ir rationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT una basis cubi data sphaera comprehensi, quadratum ABCD, cui insitit aliud æquale ad rectos angulos ADEF, ut sit communis horum sectio recta AD. (Insitit enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, ut cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipsi basi EFGH perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin EFGH.)

Divisis itaque cunctis lateribus bifariā in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis connectantur secantibus sese in O, P, cætris quadratorum, ut constat ex demonstratione octavi problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione



in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, æquales segmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX, dico ATDVX, esse unum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Qd enim pentagonum ATDVX, sit in uno plano, ita ostendetur. Cum RV, SX, sint ad quadratum ADEF, rectæ, ipsæ erunt parallelæ; Ac, pinde, cum sint æquales, (quia segmenta maiora PR, PS, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cum & lineæ sectæ PL, PN, æquales sint.) erunt quoque coniungentes rectæ RS, VX, æquales & parallelæ: Est autem & AD, eide in RS, siue LN, parallela, eo quod AN, DL, parallelæ sint & æquales. Igitur & AD, VX, parallelæ sunt; Ac, propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipsis erunt plano; ideoque trapezium ADVX, in uno existet plano: Est autem & triangulum ATD, in uno plano. Dico quod & in eodem plano cum trapezio ADVX. Ex P, ducat PY, parallela ipsi RV, quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta sit RV: Et connectant rectæ KT, KY, Qm igitur est ut OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob sectionem

18. undec.

6. undec.

33. primi.

33. primi.

9. undec.

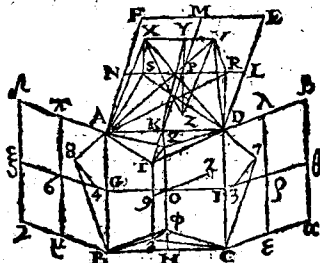
7. undec.

8. undec.

rectæ

rectæ OK : Est autem KP , ipsi OK , æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & PY , ipsi OQ , (cum æqualis sit ipsi RV , quæ posita fuit æqualis ipsi OQ maiori segmentis;) Erunt quoque ut KP , ad PY , ita OQ , hoc est, QT , illi æqualis, ad QK . Quare cum triangula PKY , QTK , duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad unum angulum K , composita, ita ut homologa latera sint par allela, nempe PK , & QT , inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum $ABCD$; & PY , QK , inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum $ADEF$: Erunt reliqua latera KY , KT , in rectam lineam collocata; Ac propterea recta TY , in uno erit plano, ideoque planum ATD , & planum $ADVX$, unum planum constituent, per rectas TY , AD , ductum. Quocirca pentagonum $ATDVX$, in uno existit plano.

Quod vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN , NS , trianguli ANS , æqualia sint lateribus AK , KQ , trianguli AKQ ; (Sunt enim AN , AK , dimidia latera cubi, & NS , KQ , segmenta minora rectarum æqualium sectarum.) & anguli ANS , AKQ , recti; si ducatur recta AQ , erunt bases AS , AQ , æquales. Rursus cum latera AS , SX , trianguli ASX , sint æqualia lateribus AQ , QT ; tri-



ulig AQT ; (Nam rectæ AS , AQ , ostensæ sunt æquales, & SX , QT , sunt segmenta maiora rectarum æqualium sectarum) & anguli ASX , AQT , recti, ex defin. 3. lib. 1. Erunt quoque bases AX , AT , æquales. Quod si ducatur recta DQ , ostendemus eodem argumento, rectam DT , rectæ AT ; si uero ducatur recta DR , rectam DV , rectæ DT , esse æquale. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA , AT , TD , DV , æqualia; quibus etiam æquale ostendemus reliquum VX , hac ratione. Quadrata rectarum PN , NS , simul tripla sunt quadrati rectæ PS , hoc est, quadrati rectæ SX : Est autem quadrato rectæ PN , æquale quadratum rectæ NN . Igitur & quadra-

6. undec.

33. sexti.

1. undec.

4. primi.

4. primi.

4. tertijdec.

quadrata rectorum AN, NS, simul tripla sunt quadrati rectorum SX. Cum ergo quadratis rectorum AN, NS, æquale sit quadratum rectorum AS; erit quoque quadratum rectorum AS, triplum quadrati rectorum SX; Ac proinde quadrata rectorum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectorum SX. Est autem quadratis rectorum AS, SX, æquale quadratum rectorum AX. Quadratum ergo rectorum AX, quadruplum quoque erit quadrati rectorum SX, hoc est, quadrati rectorum PS, hoc est, quadrati rectorum XY; Sunt enim rectorum PS, XY, æquales. Cum igitur & quadratum rectorum VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectorum XY, ex scholio propof. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectorum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, ostense sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.

Quod autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, æqualis maiori segmento PS; erit quoque NR, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NR. Quadrata igitur rectorum NR, RP, simul tripla sunt quadrati rectorum NP, hoc est, quadrati rectorum AN; Est autem quadratum rectorum RV, æquale quadrato rectorum RP. Ergo & quadrata rectorum NR, RV, tripla sunt quadrati rectorum AN; Ac proinde quadrata rectorum NR, RV, AN, quadrupla sunt eiusdem quadrati rectorum AN; Sunt autem quadrata rectorum NR, AN, æqualia quadrato rectorum AR. Igitur & quadrata rectorum RV, AR, quadrupla sunt quadrati rectorum AN. Cum ergo quadratis rectorum AR, RV, æquale sit quadratum rectorum AV; Erit quoque quadratum rectorum AV, eiusdem quadrati rectorum AN, quadruplum. At vero eiusdem quadrati rectorum AN, quadruplum est quadratum rectorum AD, ex scholio propof. 4. lib. 2. quod AD, dupla sit ipsius AN. Acqualia igitur sunt quadrata rectorum AV, AD, ideoque & rectæ AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX, ostendemus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres rectæ AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & bases AD, DX, æquales quoque: Erunt & anguli ATD, E c D V X,

47. primi.

47. primi.

4. primi.

5. tertijdec.

4. tertijdec.

47. primi.

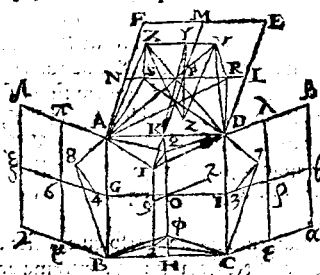
47. primi.

8. primi.

DVX, æquales Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV; Ac proinde, cum in pentagono æquilatere ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, ipsum erit æquiangulum.

7. scrib. dec.

Q u o b si fumantur alia duo cubi quadrata CαβD, BγδA, recta ad quadratum ABCD, in cōmunibus sectio-



nibus CD, AB, quorū singula latera bifariam secantur in ε, θ, λ, I, α, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ, σ, Secentur deinde OH, O K, p. l. σ G, extrema ac mediacione in pūctis q, Q, 3, 4, ex quibus

ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares θ 2, Q T, 57, 48, æquales segmentis maioribus φ O, O Q, 3 ρ, 4 σ, coniunganturq; rectæ T 2, 2 C, C 7, 7 D, DT, TA, A 8, 8 B, B 2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T 2 C 7 D, T Z B 8 A, æquilatera esse & equiangulara, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo coherencia lateribus cōmunibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia novem similia pentagona tangētia reliqua novē cubi latera; constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphaera comprehendit, quæ & cubum, & præcedentes figuras, hac arte demonstrabimus.

INTELLIGANTUR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorū latera bifariam secantes ducuntur, nempe planū ADEF, & eius oppositū, planis ductis per rectas KM, LN; Itē planū ABCD, & eius oppositū, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniā igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basib⁹ cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD: Erunt & communes eorū sectiones ad eadē cubi plana rectæ. Quare cū YP, recta sit ad planū ADEF, ipsa producta uerius Z, erit communis sectio plano-

19. undec.

planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodē pacto, si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9 OZ; erit ipsa, communis sectio planorum quę per rectas G I, HK, ducuntur. Quia uero dictę cōmunes sectiones, & diametri cubi se mutuo bisariam secant, secant se mutuo bisariam in Z: Sectant autem sese diametri cubi bisariam in centro sphaerę cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 1. huius lib. Punctū igitur Z, centrum erit sphaerę, circa cubum descriptę. Ac proinde omnes rectę ex Z, ad omnes angulos cubi ductę, inter se, quales erunt: Quibus omnibus equales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. Quoniam parallele sunt KP, OZ, quod utraque recta sit ad planum ABCD; Item parallele sunt QK, ZP, quod utraque recta sit ad planum ADE; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrammum, ac propterea PZ, equalis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autem & PY, ipsi PR, equalis. Tota ergo ZY, toti NR, equalis erit. Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectę NP, quod NR, in P, secta sit extrema & media, ratione; erunt quoque quadrata rectarum ZY, PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectę PZ: (Est enim YX, equalis ipsi PS, hoc est, ipsi PY.) Est autem quadratis rectarum ZY, YX, equalis quadratum rectę ZX. Igitur & quadratū rectę ZX, triplum erit quadrati rectę ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoque quadratum semidiametri sphaerę cubum cōprehendētis. (Nam ut diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; Ac proinde ut quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratū semidiametri ad quadratum dimidij lateris. Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Aequale igitur est quadratum rectę ZX, quadrato semidiametri sphaerę, seu cubi; Ac propterea ZX, equalis semidiametro. Eadē ratione erit ducta recta ZV, semidiametro equalis. Vel certe, quia cum latera ZY, YX, trianguli ZYX, equalia sint lateribus ZY, YV, trianguli ZYV, & anguli cōtenti recti. (cum n. PY, sit perpen-

39. undec.

6. undec.

34. primi

4. tertijdec.

47. primi.

15. primi

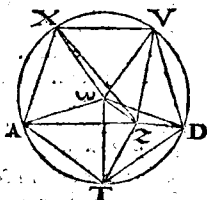
22. sexti.

15. tertijdec.

4. primi.

dicularis ad $L N$, erit quoque eadem ad sibi parallelam $V X$, perpendicularis.) Erunt bases $Z X, Z V$, æquales : Eademq; ratione semidiametro sphæræ æquales erunt rectæ ductæ $Z A, Z D$. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z , centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X , æquales semidiametro sphæræ. Ut autem ostendatur & recta ducta $Z T$, ad quantum angulum T , semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus $A T D V X$, & in planum ipsius ex Z , centro sphæræ

47. primi.



perpendicularis demittatur $Z \omega$, connectanturque rectæ $\omega A, \omega T, \omega D, \omega V, \omega X$. Quoniam igitur quadratū rectæ $Z A$, æquale est quadratis rectarum $Z \omega, \omega A$; & quadratū rectæ $Z X$, quadratis rectarum $Z \omega, \omega X$: Sunt autem quadrata rectarum $Z A, Z X$, æqualia, quod rectæ $Z A, Z X$, ostensæ

sint æquales; Igitur & quadrata rectarum $Z \omega, \omega A$, quadratis rectarum $Z \omega, \omega X$, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ $Z \omega$, æqualia relinquentur quadrata rectarum $\omega A, \omega X$, idcirco rectæ ipsæ $\omega A, \omega X$, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ $\omega V, \omega D$, & inter se, & ipsis $\omega A, \omega X$, æquales, quod & rectæ $Z V, Z D$, æquales sint ostensæ rectis $Z A, Z X$. Quare cum ex ω , cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quam duæ; punctum ω , centrum erit circuli; Ac proinde ωT , reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarum $Z \omega, \omega A$, æqualia erunt quadratis rectarum $Z \omega, \omega T$. Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ $Z A$; his uero quadratum rectæ $Z T$; Erunt æqualia quadrata rectarum $Z A, Z T$; proptereaq; & rectæ $Z A, Z T$, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z , descripta comprehendet pentagonum quoque $A T D V X$; Eodemq; modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem sphæra comprehendetur, Dodecaedrum, qua cubus.

9. tertij.

47. primi

15. quinti.

P O S T R E M O cum sit ut $N P$, ad $P S$, ita $P S$, ad $S N$: erit quoque ut $N L$, dupla ipsius $N P$, ad $R S$ duplam ipsius $P S$, ita $R S$, dupla ipsius $P S$, ad rectam compositam ex $S N, R L$,

RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR: Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commenfurabile est quadrato diametri sphaerae, quae Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius.) Igitur maius segmentum SR, hoc est, dodecaedri latus XV, illi aequale, Irrationalis est linea, quae uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphaera complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

6. tertijdec.

COROLLARIUM I.

Cum ergo demonstratum sit; recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam RS: Sit autem LN, aequalis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti.

COROLLARIUM II.

Si c quoque latus cubi aequale est lineae rectae subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum aequale rectis A V, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni. Quoniam uero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum latus pentagoni; ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphaerae.

8. tertijdec.

5. tertijdec.

COROLLARIUM III.

Constat etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis aequalibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VX, TZ, quae uidelicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB; aliaeque quatuor reperiuntur super reliquis quatuor bases cubi, quorum, quae super bases cubi oppositas exsunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos, a lineis

Ec 3 rectis,

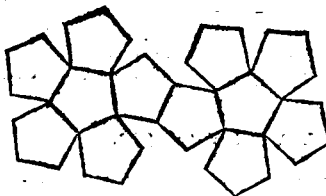
rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ , $9Z$, &c. quæ ut demonstratum est, se mutuo intersecant in centro Z . Dico se mutuo secare bisariam & ad angulos rectos: bisariam quidem, quoniam cum rectæ PZ , OZ , æquales sint dimidio lateri cubi; & YP , $9O$, æquales maioribus segmentis æqualibus PS , OQ ; erunt totæ YZ , $9Z$, æquales; Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z , ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bisariam in centro Z , mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo $KOPZ$, angulus OZP , rectus est, cum opponatur recto OKP . Non aliter ostenduntur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficiere angulos rectos. Omnes enim parallele sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, ut perspicuum est.

C O R O L L A R I U M . I I I I .

DE N I Q U E constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bisariam, & ad angulos rectos, ut dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Cum enim quadrata rectarum ZY , YP , tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ ; erit ZY , secta in P , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit PZ , ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit ut ZY , ad ZP , ita ZP , ad PY ; ideoque ut dupla ipsius ZY , nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bisariam, ad duplâ ipsius ZP , nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP , ad duplam ipsius PY , hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bisariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eiusdem sphaera.

15. quinti.

S C H O L I O N



tem, si rite inter se complacentur.

QUOD si ex aliqua materia cõficiantur duodecim pentagona æquilaterra, & equiangula, inter se equalia, disponanturq; ut hæc figura indicat, cõponetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem.

18.

P R O B L . 6 . P R O P O S . 18 .

L A T E R A quinque figurarum exponere,

nere, & inter se comparare.

SIT spherę diameter AB , quę in C , secetur bifariam; In D , uero ita, ut BD , sit ipsius pars tertia; In E , denique ita, ut BE sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB , semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E , ipsi AB , perpendiculares CF, DG, EH ; connectanturque rectę AF, BF, AG, BG, AH, BH . Post hæc ex HA , abscindatur HI , equalis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH ; connectaturque recta BI . Postremo B, G , secetur extrema ac media ratione in K , sitque maius segmentum BK .

QUOD igitur attinet ad expositionem laterũ prædictarũ figurarum, dico AG , esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF , latus Octaedri; BG , latus cubi; BI , latus Icosædri; BK , denique latus Dodecaedri. Quoniam AG , media proportionalis est inter BA, AD , ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdẽ lib. ut BA , ad AD , ita quadratũ rectę BA , ad quadratũ rectę AG : Est autem BA , ipsius AD , sesquialtera; cum talium partium 2 sit AD , qualium 3 est BA . Igitur & quadratum rectę BA , sesquialterum est quadrati rectę AG ; Ac proinde cum diameter spherę sit potentia sesqui-

13. tertijdec.

RURSUS quoniã AF , est media proportionalis inter BA, AC , ex eodẽ coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ut BA , ad AC , ita quadratũ rectę BA , ad quadratũ rectę AF ; ex adducto coroll. propos. 20. lib. 6. Est autẽ BA , ipsius AC , dupla: Erit quadratũ rectę BA , duplũ quadrati rectę AF . Quare cum diameter spherę potentia sit dupla lateris Octaedri; Erit AF , latus Octaedri. Eodem modo erit BF , latus Octaedri.

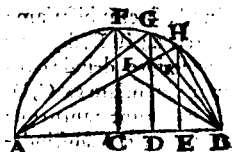
14. tertijdec.

DEINDE cũ BG , sit media proportionalis inter AB, BD , ideoque ut AB , ad BD , ita quadratũ rectę AB , ad quadratum rectę BG , ex præfatis duobus corollarijs lib. 6. Sit autem AB , ipsius BD , tripla, ex constructione: Erit quadratum rectę AB , triplum quadrati rectę BG . Quocirca cum spherę diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG , latus cubi.

15. tertijdec.

PRÆTEREA quia, ex eadem corollarijs, BH , est media proportionalis inter AB, BE , atque idcirco ut AB , ad BE ,

ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Est autem, ex constructione A B, ipsius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter spheræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex coroll. 1. propof. 16. huius lib. Erit B H, semi-



diameter, hoc est, latus hexagoni, dicti circuli: Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. Igitur latus pentagoni poterit & B H, & H I, simul: Ac proinde cum quadratum rectæ B I, quale sit quadratis rectarum B H, H I, erit B I, latus pentagoni circuli eiusdem. Quam obrem B I, latus est Icosaedri.

D E N I Q U E, cum B G, latus cubi, secum sit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius segmentum, latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti, ex coroll. 1. propof. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphaera descriptarum.

Q U O D uero ad comparisonem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit, diametrum spheræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia uero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi,

	perspicuum est, qualium partium 6.
Diamet.	6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse
Tetraed.	4. quadratum lateris Tetraedri; talium uero 3. quadratum lateris Octaedri; & de-
Octaed.	3.
Cub.	2. nique quadratum lateris cubi, talium 2.

Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitercium lateris Octaedri, potentia uero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex spheræ diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum; Ac propterea diameter spheræ, & latera dictarum figurarum lineæ sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter spheræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia.

10. tertijdec.

47. primi.

16. tertijdec.

6. decimi.

tionalia: Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Erunt huiusmodi lineę, nimirum diameter spherę, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

A. T. uero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor; hoc uero, Apotome, ut demonstratum est; nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum sint diameter spherę, & commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum. ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

S E D neque inter se ullo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo, quod latus Icosaedri Minor sit. Quod est absurdum. Nā ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineę Irrationales prorsus inter se differentes, ita ut neutra sit eadem alteri.

I T A Q U E quamvis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro spherę, ideoque Rationalia existant; duo uero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, ut latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; Hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quę forte causa fuit, cur Euclides non eodem

9. decimi.

104. decimi

106. decimi

106. decimi

eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

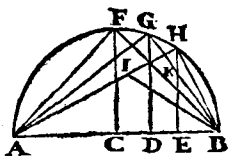
NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri

BI, hac arte demonstrabimus.

Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD, & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectę AB, noncuplum quadrati rectę BD, cum nōcupla propor-



tio sit duplicata proportionis triplę. ut hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectę AB, talium 1. erit quadratum rectę BD. Qualium autem partium 9 est quadratum rectę AB, taliū 3. est quadratum rectę BG, quod illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cū equalia sint quadrato rectę BG. Igitur si auferatur quadratum rectę BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectę GD. Quoniam uero quadratum rectę AB, quintuplum est quadrati rectę BH, erit quadratum rectę BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratū rectę GD, maius est quadrato rectę BH, ideoque recta GD, maior, quam recta BH. Rursus quia diameter f. hęrę AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni HI, minus esse tertia parte rectę AB, hoc est minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertię parti rectę AB; erit dupla illius, æqualis duabus

10. sexti.

15. tertijdec.

8. quinti.

10. quinti

duabus tertijs partibus, nempe ipsi AD ; Ac propterea BH , reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD ; Atque adeo, cum quadratum rectæ AB , noncuplum sit ostensum quadrati rectæ BD , erit idem quadratum rectæ AB , noncuplum quadrati rectæ BH . Quod est absurdum: quintuplū enim est demonstratū. Non ergo HI , tertia pars est ipsius AB : Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI , dicatur maior tertia parte rectæ AB , & proinde dupla ipsius HI , maior quam dux tertiæ, hoc est, quam AD ; erit BH , minor quam tertia pars BD . Quare quadratum rectæ AB , maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BD . Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI , tertia parte ipsius AB : Sed neque æqualis tertiæ parti, ut ostendimus. Minor ergo est quam tertia pars, hoc est, quam BD . Itaque cum rectæ GD , DB , maiores sint rectis BH , HI , ut demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: Est autem quadratum rectæ BG , æquale quadratis rectarum GD , DB ; & quadratum rectæ BI , quadratis rectarum BH , HI . Quadratum ergo rectæ BG , maius quoque erit quadrato rectæ BI ; Ac proinde recta BG , nempe latus cubi, maior erit quam recta BI , latus scilicet Icosædri.

M A I V S denique esse latus Icosædri BI , latere Dodecaedri BK , hac ratione patebit. Cum rectæ BG , diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK , & minus GK ; erit rectangulum sub BG , BK , maius rectangulo sub BG , GK ; atque adeo rectangula sub BG , BK , & sub BG , GK , simul maiora duplo rectanguli sub BG , GK : Est autem rectangulis sub BG , BK , & sub BG , GK , æquale quadratum rectæ BG ; Et duobus rectangulis sub BG , GK , æqualia sunt duo quadrata rectæ BK . (Nā cū sit, ut BG , ad BK , ita BK , ad GK ; erit quadratū rectæ BK , æquale rectangulo sub BG , GK ; ideoque duo quadrata rectæ BK , æqualia duobus rectangulis sub BG , GK .) Maius igitur quoque est quadratū rectæ BG , duobus quadratis rectæ BK ; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG , sex quadratis rectæ BK : Atqui tribus quadratis rectæ BG , æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH . (Cum enim quadratum rectæ AB , triplum sit quadrati rectæ BG ,

47. primi

2. secundi

17. sexti.

& quin-

& quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quam quinque quadrata rectæ B H, equalia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa his quinque equalia.) Igitur & quinque quadrata rectæ B H, maiora erunt sex quadratis rectæ B K; Ac proinde unum quadratum rectæ B H, maius erit uno quadrato rectæ B K. (si namque equale esset quadratum rectæ B H, quadrato rectæ B K, uel minus, forent quinque quadrata rectæ B H, minora sex quadratis rectæ B K. quod est absurdū, cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quam recta B K; Ac propterea cum B I, maior sit quā B H, multo maior erit B I, latus videlicet Icosaedri, quam B K; latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis cōsineatur, inter se æqualibus; hac fere ratione.

Ex duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

Ex tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus;

Ex quatuor, Octaedri angulus;

Ex quinque angulus Icosaedri;

Ex sex autem huiusmodi triangulis ad idē punctum eorundem fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3. propo. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertia partes unius recti, hoc est, quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. Nam solidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

Ex tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor

quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quā quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & equiangularis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, ut ostendimus ad propof. 32. lib. 1. Ac proinde unus angulus contineat unū rectum, ac propterea quintam partem unius recti, continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes unius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus constitueretur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cum enim unus, ut dictum est, maior sit recto, eo quod contineat unum rectum, & insuper recti quintam partem, erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituitur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex alijs figuris æquilateris, & equiangularis constitui poterit angulus solidus. Nam cum sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, ut ad propof. 32. lib. 1. est demonstratum; Ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac propterea duas partes sextas unius recti, continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus eiusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & equiangularis inter se æqualibus contineatur.

Nam si tria triangula æquilatera & æqualia coeam in unum punctum ad constitutionem anguli solidi, constitueretur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

Si vero quatuor eiusmodi triangula conueiant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

Si denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosædru mignis triangu-
lis eiusmodi contentum.

QVOD si tria quadrata equalia coeant in vnum punctū, ut constituent angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona aequaliter, & equiangula, inter se equalia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsiclae Alexandrinae, quae expatit numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figurae regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnus basis latera, ut habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnus lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, ut numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnus trianguli, ut in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnus quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnus trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnus trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnus pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidi quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnus basis angulos, ut habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnus anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt angulum solidum constituendum, ut numerus

numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLUM. Si quatuor triangula Pyramidis multi-
plicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, sunt 12.
anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt
vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos
Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. nu-
merum angulorum unius quadrati, sunt 24. anguli, qui diuisi
in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum angulum solidum cubi)
faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triagula Octae-
dri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius triaguli,
sunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt
solidum angulum Octaedri.) constituunt 6. angulos solidos Octae-
dri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. nu-
merum angulorum unius trianguli, sunt 60. anguli, qui diui-
si in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosae-
dri.) producant 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12.
pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum
unius pentagoni, sunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim
anguli constituunt angulum solidum Dode-
caedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

ELEMENTI DECIMITERTII FINIS.



EVCLIDIS

ELEMENTVM XIII.

ET SOLIDORVM QVARTVM,

Vt quidam arbitrantur : vt alij uero,

Hypsiclis Alexandrini de quin-
que corporibus.

LIBER PRIMVS.



PROOEMIUM HYPsiclis ALE-
xandrini ad Protarchum.



BASTILIDES Tyrinus, Protar-
che, Alexandriam profectus, pa-
trique nostro ob disciplinae societa-
tem commendatus, longissimo pere-
grinationis tempore cum eo uersa-
tus est. Cumq; differerent aliquan-
do de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri
& Icosaedri eidem sphaerae inscriptorum, quam hac in-
ter se habeant rationem, censuerunt ea non recte tra-
didisse Apollonium; quae a se emendata, ut pater meus
dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi
in alterum librum ab Apollonio editum, qui demon-
strationem accurate complectebatur de re proposita,
ex eiusque problematis indagatione magnam equidem

capit

capere voluptatem. Illud certe ab omnibus percipere potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum congere licet, studio nos postea scripsisse uideamur, id monimentis consignatum tibi deducendum duximus; ut qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum uel maxime in Geometria uersatus, scite ac prudenter iudices ea, quae dicturi sumus; Ob eam uero, quae tibi cum patre fuit, uita consuetudinem, quaque nos complecteris, beneuolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, ut prooemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

T. R. E. D. C. I. M. libri haec omnia expositi ab omnibus Euclidis ascribuntur: Duo uero subsequentes a plerisque Hippolyti Alexandrino recte, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrum, tam secundum superficies, quam soliditates: In posteriori uero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium uel intra aliam, uel hi duo libri sunt instar appendicis eiusdem elementorum Euclidis. Verum quia plurima emittuntur ab Hippolyte scitu non iniucunda, quae spectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones natus in alio; quarum enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque uero problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, ut aliquam locum huius tractatus efficeremus, paulo uberius de dictis figuris regularibus in unum sum, disserere proponendo uaria theorematia, atque problemata, quibus & praedicta corpora regularia inter se comparantur; & sibi mutuo inscribuntur. Quia in re maximo nobis admodum uisum fuisse Campanum, & Paucissimum Fluffatem Candellam, qui diligenter optatum, & sedulatur in hac negotio collocant, uelut uerum hic animi salum insequentes duos libros quatuor plurimis theorematibus, problematibus quae locupletant; uelut uerum hic animi salum qui de cunctis fatus est ordinem adiungit, in quo praedicta corpora

breve distans temporibus proponit. Ceterum precipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hac lib. 1. 4. disputare de comparatione mutua Icosaedri & Dodecaedri, facile intelligi potest ex ex eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

QVONIAM vero in hisce duobus libris Hypsiclis, & Campani tam in numero propositionum, quam in eadem ordine, & inter se. & a Francisco Flussio, ideoque a nobis discrepant; annotauimus in margine ordinem utriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior uero Campani seriem indicat. Quando autem in margine indicatus numerus reperitur, nulli esse rariū differentiam inter Campani & Hypsicli, significatur. Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hac nota O, intelligendum est, in Hypsicli dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intelligi, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsicli, quam apud Campani, illam propositionem deesse.

I.

THEOR. I. PROPOS. I.

QVAE ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

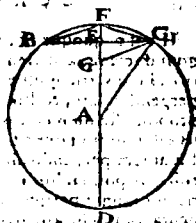
Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse lineæ compositæ ex latere hexagoni, & decagoni eiusdem circuli. Extensa enim AE, in utramque partem, ut perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, equali ipsi BF, connectantur rectæ AC, CG, CF, BF. Quoniam igitur perpendicularis AE, secat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti sint æquales, nempe recti, erunt bases GF, BF, æquales; ideoque & arcus CF,

1. tersij.

4. primi.

C F, B F, æquales, Ac proinde existeret arcus B C, quinta pars totius circumferentiæ, erit C F, eiusdem pars decima; atq; adeo recta CF, lateris erit decagoni. Rursus quia latera C E, E F, trianguli C E F, equalia sunt, lateribus C E, E G; trianguli C E G, suntque anguli contenti, recti; erunt & bases C F, C G, & anguli C F G, C G F, æquales. Quia uero arcus C F, quinta pars totius circumferentiæ D C F, cum sit totus circumferentiæ decimæ pars;

Erat talem partium 1. arcus CF, qualium 4. est arcus DC, hoc est, arcus DC, quadruplus erit arcus CF. Quare & angulus DAC, quadruplus erit angulus CAF: Est autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem sit basis DCI. Ergo erit angulus CFD, atque adeoque equalis ostensus CGF, duplus erit anguli CAF: Atque angulus CGF, externus, equalis est internis GAC, GCA, inter quos GAC. Cum igitur GAC, sit dimidium anguli CGF, ut ostensum est, erit GCA, reliquum dimidium eiusdem anguli CGF, ideoque equaliterunt anguli GAC, GCA, ac proinde & latera AG, CG, equalia: Est autem CG, recta ostensa equalis recte CF: Igitur & AG, recta equalis erit eidem CF: Quare additis aequalibus GE, EF, fiet AE, aequalis duabus EF, FC, simul: Ac proinde tres simul AE, EF, FC, hoc est, duæ simul AE, FC, duplæ erunt ipsius AE, atque ideo ~~con~~trario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum simul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.



COROLLARIUM I.

Ex his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo apertam, ferre arcum quem, dicta, hæc linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum, enim est rectam, A E, quæ ex centro perpendi-

F f 2

cularis effat B C, dividere arcum B C, bifariam in F.

COROLLARIUM. II

Hinc quoque fit, perpendiculararem ex centro ad latus pentagoni ductam, æqualem esse utrique linearum simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eadem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam ut in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni, æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; Est autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. æqualis dimidiæ semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendiculararem ad latus pentagoni, esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

4.
2.

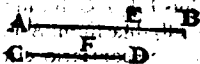
THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI binæ rectæ linearum extrema ac media ratione secantur; ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportionibus.

SECENTUR binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportionibus secari, hoc est, esse ut A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item ut A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cum enim sit ut A B, ad A E, ita A E, ad E B; & ut C D, ad C F, ita C F, ad F D; erit rectangulum sub A B, E B, æquale quadrato rectæ A E; & rectangulum sub C D, F D, æquale quadrato rectæ C F.

Quamobrem erit ut rectangulum sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F; (est enim utrobique Aequalitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstravimus in scholio propos. 4. lib. 5. ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: Et componendo, ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ C F:

17. sexti.



C F:

CF: Sed quod quater continetur sub A B, E B, una cum quadrato rectæ A E, æquale est quadrato lineæ compositæ ex A B, E B; Et quod quater continetur sub C D, F D, una cum quadrato rectæ C F, æquale est quadrato lineæ compositæ ex C D, F D. Igitur erit quoque, ut quadratum lineæ compositæ ex A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadratum lineæ compositæ ex C D, F D, ad quadratum rectæ C F; Ac proinde, ut recta composita ex A B, E B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, ad rectam C F: Et componendo, ut composita rectæ ex A B, E B, & rectæ A E, hoc est, dupla ipsius A B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, & recta C F, id est, dupla ipsius C D, ad rectam C F. Et permutando, ut dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A E, ad C F: Vt autem dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita est A B, ad C D. Erit ergo ut A B, ad C D, ita A E, ad C F; Ac propterea, cum sit ut tota A B, ad totam C D, ita A E, ablata ad C F ablatam, erit quoque reliqua E B, ad reliquam F D, ut tota ad totam. Quare ut A E, ad C F, ita erit E B, ad F D, cum utraq; p[ro]p[or]tio eadem sit p[ro]portioni A B, ad C D: Et permutando, erit ut A E, ad E B, sic C F, ad F D; & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secantur, &c. Quod erat ostendendum.

8. secundi.

22. sexti.

15. quinti.

19. quinti.

COROLLARIUM

Ex hac propositione & præcedenti inferemus hoc theorema.

S. 1. linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus uero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscripti.

Ex centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli

Ff 3 ductæ

9. *terrydec.*

1. *quartide.*

ducta; minus uero segmentum BD , æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Iuxta namque recta AD , ad F , & connexa recta FC ; erit FC , latus decagoni, cum ex coroll. 1. propof. huius lib. latus FC , nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam fecerit in F ; & proinde recta composita ex AF , latere hexagoni, & FC , latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AF , latus hexagoni, minus uero segmentum FC , latus decagoni. Quare dicitur in hac propof. ostensum est, esse ut tota AD , diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF , FC , similiter diuisam, ita A , E , maius segmentum ad A , F , maius segmentum; & ED , minus segmentum ad F , C , minus segmentum: Est autem tota AD , dimidium totius compositæ ex AF , FC . Igitur & A , E , ipsius A , F , semidiametri, & BD , ipsius FC , lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per coroll. propof. 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, equalis sit dimidio semidiametri, perspicuum est, maius segmentum A , E , æquale esse ductæ perpendiculari, minus uero ED , dimidio lateris decagoni.

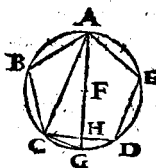
2.

4.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilaterū describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, utraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATUR in circulo $ABCDE$, cuius centrum F , pentagonum $ABCDE$, subtendatque recta AC , bina latera AB , BC . Dico quadrata rectarum CD , AC , simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A , per centrum recta AFG , quæ per coroll. propof. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD , & latus CD , bifariam in G , & H ; erit arcus CG , decima pars totius circumferentiæ,



rentis, ideoque recta subtrahens CG , latus decagoni. Quam
igitur recta AG , dupla est recte FG ; erit ex scholio propo-
lib. 2. quadratum recte AG , quadruplum quadrati recte FG .
Sunt autem quadrato recte AG , equalia quadrata rectarum
 AC , CG . Igitur & quadrata rectarum AC , CG ; quadrupla
sunt quadrati recte FG ; Atque addo tria quadrata rectarum
 AC , CG , FG , quintuplum quadrati eiusdem recte FG . Cum
ergo quadratis rectarum FG , CG ; nempe lateris hexagoni,
& lateris decagoni, equalis sit quadratum recte CD , lateris
videlicet pentagoni. Erunt quoque quadrata rectarum
 AC , CD , quintupla quadrati recte FG , minimum semi-
diametri. Si in circulo igitur pentagonum aequilaterum de-
scribatur; quod ex latere pentagoni; & quod ex ea, &c.
Quod erat demonstrandum.

47. primi

10. terside.

COROLLARIUM.

INFERVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphaera eadem cubus, & dodecaedrus inscriban-
tur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dode-
caedri, utraque simul, quintupla sunt quadrati semidiamet-
ri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulos $ABCEB$, pentagonum
unum Dodecaedri in quapiam sphaera descripti; eritque ex coroll.
2. propo 17. lib. 13. recta AC , subtendens pentagoni angulum B , la-
tus cubi in eadem sphaera descripti. Perspicuum est autem, quadra-
ta rectarum AC , CD , lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quin-
cupla esse quadrati semidiametri FG , &c.

3. quartside.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli sece-
tur extrema ac media ratione; maius illius
segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECE TVR A B latus hexagoni alicuius circuli extre-
ma ac media ratione in C ; sitque maius segmentum AC .
Dico AC , esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim AD ,

9. serij dec.

2. quartide.

2. quartide.

latus decagoni eiusdem circuli, adungaturq; in rectum ipsi A B, eritque tota composita B D, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum B A. Ponitur autem & A B, secta in C, similiter, Igitur erit ut B D, tota ad maius sui segmentum A B, ita A B, tota ad maius sui segmentum A C. Sed est quoque ut B D, tota ad maius sui segmentum A B, ita A B, maius segmentum ad A D, segmentum minus, per definitio- nem lineae sectae extrema ac media ratione. Igitur erit ut A B ad A C, ut eadem A B ad A D, Ac propterea A C, A D, aequalis erit. Cum ergo A D, ponatur latus decagoni il- lius circuli, cuius latus hexagoni est A B, erit & A C, cuiusq; circuli latus decagoni.

5. serij dec.

A L I T E R. Adungatur ipsi A B, in rectum recta A D, aequalis maiori segmento A C; eritq; tota recta B D, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur A B, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli; erit, per ea, quae demonstrauimus ad propos. 9. lib. 1. 3, A D, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac pro- pterea & A C, aequalis i; si A D, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius A B, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, & c. Quod erat ostenden- dum.

2.

5.

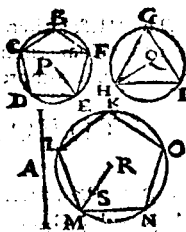
THEOR. 5. PROPOS. 5.

I D E M circulus comprehendit & Do- decaedri pentagonum, & Icosaedri triangu- lum, eidem sphaerae inscriptorum.

In sphaera, cuius diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius unum pentagonum B C D E F, & Icosaedrum, cuius unum triangulum G H I. Dico eundē circulum circumscribere & pentagonum B C D E F, & trian- gulum G H I, hoc est, circulos B C D E F, G H I, ipsa circum- scribere necesse & aequales. Circumscribat enim circulus K L M

N O,

N O, pentagonum KLMNO, ex quo Icosaedrum sphaerae
 inscribitur, ita ut quinque latera huius pentagoni sint late-
 ra Icosaedri; idroque quodlibet ipsorum æquale cuius late-
 ri trianguli GHI. Deinde ex centeris P, Q, R, ducantur rectæ
 PE, QH, RM; Seceturq; RM, extrema ac media ratione in
 S; eritque maius segmentum RS, latus decagoni in circulo
 KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni. Subtendat quo-
 que recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit,
 per coroll. 2. propos. 17. lib. 13, latus cubi in eadem sphaera
 descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos.
 B P, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris cubi
 CF, scilicet extrema ac media ratione; erit ut tota CF, ad tota
 RM, ita BF, maius segmentum ad RS, maius segmentum; Ac
 propterea in quadratum rectæ CF,
 ad quadratum rectæ RM, ita qua-
 dratum rectæ BF, ad quadratum re-
 ctæ RS. Atque adeo, per ea, quæ
 demonstrata sunt in scholio pro-
 pos. 4. lib. 5, ut triplum quadrati re-
 ctæ CF, ad quintuplum quadrati re-
 ctæ RM, ita triplum quadrati rectæ
 BF, ad quintuplum quadrati rectæ
 RS: Est autem triplum quadrati re-
 ctæ CF, æquale quintuplo quadrati
 rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex
 propos. 14. lib. 13, quam quintuplum quadrati semidiame-
 tri RM, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13 æquale est quadra-
 to ex A, diametro sphaerae.) Igitur & triplum quadrati re-
 ctæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: Quia ve-
 ro quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est qua-
 drato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris de-
 cagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqua-
 lia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis re-
 ctæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia
 sunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc est, ita sint æ-
 qualia quæ quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis
 rectæ BF, quæ æqualia sunt quinque quadratis rectæ R.
 Sed quoniam, (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque
 quadratis semidiametri PE, sint æqualia) ita quadrata re-
 ctæ



16. serti de

4. quartide.

2. quartide.

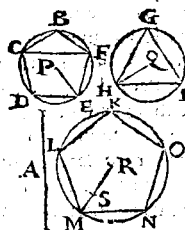
22. sexti.

10. serti de.

3. quartide

ſitæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectæ MN; æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH) (Nam eū

12. tertij de.



MN, æqualis ſit viſtentiæ ipſi GH, lateri Icoſaedri ſeu trianguli æquilateri; ſit autem quadratū ipſius GH, æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) Erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea unū quadratum rectæ PE, uni quadrato

rectæ QH, & idcirco ſemidiameter PE, ſemidiametro QH, æqualis. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales ſunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonſtrandū.

3.
6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigieſies ſumptum Dodecaedri ſuperficieiei æquale.

Ex centro F, circuli circumſcribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum contentum ſub FG, & CD, trigieſies ſumptum, eſſe æquale toti ſuperficieiei Dodecaedri. Duſtis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, reſoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. cum bina latera unius æqualia ſint binis lateribus aliorum; & baſis quoque unius baſibus aliorum æqualis.

qualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est, sub FG, & CD. Quoniam uero rectangulum CI, duplum est trianguli FCD, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, equalium erit rectangulum CI, quinque sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia sint uni pentagono. Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumptum, nimirum rectangulum CI, sumptum trigies, æquale quodque erit sexuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Siquidem ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



41. primi

ALITER. Facta eadem figure constructione, cum rectangulum CI, duplum sit trianguli ECD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumptum; Erit rectangulum CI, trigies sumptum æquale triangulo FCD, bis sumpto trigies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cum enim unum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficiei Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Ac idcirco triangulum FCD, sumptum sexagesies æqualis erit superficiei Dodecaedri.

41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

3.

7.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendicu-

lari

lari comprehenditur; rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, trigesies sumptum,



æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes triangulæ angulos, resolvetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. proposi. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera unius binis lateribus aliorum æqualia, & basis utriusq; basibus aliorum æqualis. Ducatur

quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duobus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad FG; eritq; rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. Quoniam uero rectangulum BG, duplum est rectanguli BDG; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum rectangulorum ipsi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, iter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cum tria talia triangula quælibet sint unitriangulo Icosaedri; Atque adeo idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, iter sumpti, æquale erit uiginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

ALITER. Facta eadem constructione figuræ, cum rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale triangulo DBC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula faciunt uiginti triangula Icosaedri, eo quod tria faciunt unum. Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIUM.

Itaque superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscun-

41. primi.

41. primi.

cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphaera, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigies sumpto; Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. Quare erit superficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ut rectangulum illud, trigesima uidelicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigessimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

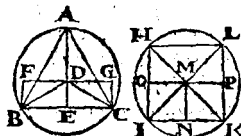
6. quartile.

7. quartide.

15. quinti.

S C H O L I O N.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri uidelicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, uel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad unum aliquod eorum latum; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In Octaedro uero, & cubo duodecies sumptum superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC , circumscriptum a circulo, cuius centrum D , a quo perpendicularis ducatur DE , ad latum BC , & reliqua fiant, ut de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum BG , sexies sumptum, æquale esse superficiei Tetraedri. Quoniam rectangulum BG , duplum est trianguli DBC , hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituent totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipsi ABC , æqualia, eo quod tria conficiunt unum; Erit rectangulum BG , sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis æquale.



7. quartide

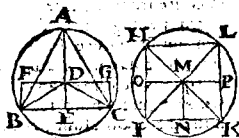
41. primi.

SIT secundo idem triangulum ABC , Octaedri, &c. Dico rectangulum BG , duodecies sumptum, æquale esse superficiei Octaedri. Cum enim rectangulum BG , duplum sit trianguli

41. primi.

DBC

DBC , hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem



rectangulum duodecies sumptum æquale nongintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed nongintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiant unum. Igitur rectangulum BG , duodecies sumptum æquale est superficiem Octaedri.

SIT tertio quadratum cubi $HIKL$, circa quod circulus ex cetro M , describatur, & deducta MN , perpendiculari ad IK , ducantur ex M , ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, ut quadratum resolvatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M , agatur OP , ipsi IK , parallela. Dico rectangulum IP , contentum sub OI , hoc est sub MN , & IK , sumptum duodecies, æquale esse superficiem cubi. Quoniam rectangulum IP , duplum est trianguli MIK ; hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erunt idem duodecies sumptum æquale nongintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cum nongintiquatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula unum quadratum conficiant; Erunt rectangulum IP , duodecies sumptum æquale superficiem cubi. Quod est propositum.

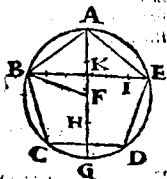
ALITER. Cum duo rectangula IP , conficiant quadratum $HIKL$; sunt n IP , PH , æqualia, cum recta HI , sit dimidius lateris HI , nempe æqualis ipsi MN , constituantur duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi; hoc est, totam superficiem cubi.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendētis angulum pentagoni æquilateri in eodē circulo descriptæ æquale est dicto pentagono.

In circulo, cuius centrum F , describatur pentagonum æquilaterum $ABCDE$, & ducta diameter AG , diuidatur in quatuor

tuor æquales partes, quarum tres sint A H: Angulum uero A, subtendens recta BE, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint BI, & una IE, ita ut BI, sit quintupla ipsius IE. Dico rectangulum comprehensum sub A H, BI, æquale esse pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF, quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cum sit semidiameter; erit A H, ipsius A F, sesquialtera. Quia uero recta F A, diuidens arcum B A E, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propos. 1. lib. 13, in puncto K; contine-



bit tam KB, quam KE, tres sextas rectæ BE; atque adeo cum BI, contineat quinque, continebit KI, duas; Ac proinde & K B, ipsius KI, erit sesquialtera. Quamobrem erit ut A H, ad A F, ita K B, ad KI; atque ideo rectangulum sub extremis A H, K I, æquale erit rectangulo sub medijs A F, K B. Est autem rectangulum sub A F, K B, duplum trianguli A B F, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin A F, & eandem altitudinem BK; hoc est, inter easdem sint parallelas constructæ. Igitur & rectangulum sub A H, K I, duplum erit eiusdem trianguli A B F. Est autem & rectangulum sub A H, K I, duplum rectanguli sub A H, I E, propterea quod & basis K I, dupla sit basis I E. (connet. n. K I, duas sextas partes ipsius BE, & I E, unam) eademque semper altitudo A H. Igitur æqualia sunt triangulum A B F, & rectangulum sub A H, I E; ideoque, & eorum quintupla æqualia erunt. At uero pentagonum ABCDE, quintuplum est trianguli A B F, quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluit, ductis rectis e centro F, ut propos. 6. huius lib. docuimus. Rectangulum uero sub A H, BI, quintuplum est rectanguli sub A H, I E, quod & basis BI, quintupla sit basis I E, eademque semper altitudo A H. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum sub A H, BI, æqualia sunt. Rectangulum ergo constructum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam si A H, uero, si pentagonum ABCDE, statuaturs basis Dodecaedri in aliqua sphaera descripti, &c. est latus cubi in eadem sphaera descripti, ex coroll. 2. propos. 1. lib. 13, & unum latus trianguli Icosaedri in eadem sphaera constituti, (comprehensum uidelicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum A G, in H,

(cum

16. sexti.

41. primi.

1. sexti.

1. sexti.

5. quartide.

(cum ex coroll. propos. 12. lib. 13. secet semidiametrum F. G., bifariam. quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad unum eius latus ducta, nempe sub AH, & sub quinque sentis paribus lateris cubi eidem sphaera, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub B I, equale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphaera constituti.

4.
8.

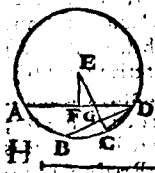
THEOR. 9. PROPOS. 9.

SUPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphaera descripti, eandem proportionem habet, quam, latus cubi ad latus Icosaedri.

5. quarside.

3. tertij.

IN circulo ABCD, circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & trianguli A D, & ex centro E. ducantur ad A D, B D, perpendiculares EF, F G, & abunturque AD, BD, bifariam; & EG, protrahat scabit quoque arcum BD, bifariam in C, ex coroll. 1. propos. 1. huius lib. atque adeo continua recta C D, latus erit decagoni eiusdem circuli. Sit denique H, latus cubi in eadem sphaera cum Dodecaedro, Icosaedro descripti. Dico esse ut H, latus cubi, ad A D, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam latus cubi H, fecit extrema ac media ratione, maius se, mentum est B D, latus Dodecaedri, ex coroll. 1. propos. 17. libri 3. Recte autem EG, secat quoque extrema ac media ratione, minus segmentum est E F, ex coroll. propos. 2. huius lib. Erit, ut H, tota ad B D, maius sui segmentum, ita E G, tota ad E F, maius sui segmentum; At promde rectangulum sub extremis H, E F, æquale erit rectangulo sub medijs B D, E G. Qua uero est, ut H, ad A D, ita rectangulum sub H, E F, ad rectangulum sub A D, E F, sicut bases sunt H, A D, altitudo uero semper eadem E F. Erunt quoque ut H, ad A D, ita rectangulum sub



2. quarside.

16. sexti.

1. sexti.

sub

sub B D, E G, (quod ostensum est æquale rectangulo sub H. E F,) ad idem rectangulum sub A D, E F. Quare cum ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, ut rectangulum sub B D, E G, ad rectangulum sub A D, E F, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, Erit quoque, ut H, latus cubi, ad A D, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, &c. Quod ostendendum erat.

A L I E R. Circumscribat pentagonum Dodecaedri A B C D E, & triangulum Icosaedri A F G, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propos. 19. lib. 13. dividit latus F G, bisariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. cuius quinque ut sextæ partes sint B K. Dico rursus esse, ut B E, latus cubi ad F G, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam rectangulum sub A I, B K, æquale est pentagono A B C D E, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectangulum sub A I, I F, æquale est triangulo A F G, ex scholio



propos. 41. lib. 1. cum F G, basis trianguli dupla sit ipsius I F, basis rectanguli: Erit ut rectangulum sub A I, B K, ad rectangulum sub A I, I F, ita pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G: Est autem ut rectangulum sub A I, B K, ad rectangulum sub A I, I F, ita B K, ad I F, cum bases sint B K, I F, & altitudo eadem semper A I. Erit igitur quoque ut pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G, ita B K, ad I F. Ac primum, & tertium, nimirum pentagonum A B C D E, & recta B K, æquemultiplicentur per numerum 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulum A F G, & recta I F, æquemultiplicentur per numerum 10.) erit quoque ut pentagonum A B C D E, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum A F G, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta B K, duodecies sumpta ad rectam I F, vigesies sumptam: Atqui recta B K, duodecies sumpta æquivaleret lateri cubi B E, decies sumptæ; (Nam cum B K, contineat quinque sextas per

5. quartide.

3. semi.

4. quinti.

tes ipsius BE ; continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem B E, quæ efficiunt decem integras rectas B E.) Recta uero I F, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosædri FG, decies sumpto (eo quod FG, sit ipsius I F, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosædri, ut latus cubi BB, decies sumptum ad latus Icosædri FG, decies



sumptum; Ac propterea, cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosædri, quæ unū latus cubi ad unum latus Icosædri, perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosædri, ut latus cubi ad latus Icosædri. Quod est propositum.

15. quinti

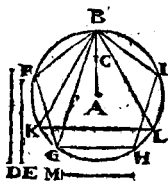
4.

9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit ut recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori segmento, ad rectam potentē id, quod a tota, & id quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosædri eidem sphaeræ cum cubo inscripti.

SECETUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosædri in sphaera eadem cum cubo descripti. Ex



A, centro, ad interuallum A B, circulus describatur, in quo constituantur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphaeræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphaera descripti, ex coroll. 2. proposit. 17. lib. 13. Quoniam uero AC, maius segmentum semidiametri A B, sectæ extrema ac media

dia ratione, est latus Decagoni in circulo $BFGHF$; in quo nimirum AB , latus est Hexagoni; poterit BF , latus pentagoni & totam AB , latus uidelicet hexagoni, & maius segmentum AC , latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possitiam & recta M , totam AB , & minus segmentum BC , per ea, quæ ad propof. 47. lib. I. demonstrauiamus. Dico sic esse D , latus propositum cubi ad E , latus propositum Icosædri, ut est $B F$, potens totam AB , & maius segmentum AC , ad M , potentem totam AB , & minus segmentum BC . Quoniam quadratum lateris trianguli æquilateri $B K$, triplum est quadrati semidiametri AB : Item quadrata rectorum AB , BC , tripla sunt quadrati rectæ AC ; Erit ut quadratum rectæ $B K$, ad quadratum rectæ AB ; ita quadrata rectorum AB , BC , hoc est, quadratum rectæ M , ipsiæ æquale, ad quadratum rectæ AC . Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, ut quadratum rectæ $B K$; ad quadratum rectæ M , ita quadratum rectæ AB , ad quadratum rectæ AC : Est autem ut quadratum rectæ AB , ad quadratum rectæ AC , ita quadratum rectæ $B G$, ad quadratum rectæ $B F$. (Nam cum rectæ $B G$, scilicet extrema ac media ratione, maius segmentum sit $B F$, ex coroll. 1. propof. 17. lib. 13, eo quod $B G$, est latus cubi, & $B F$, latus Do decaedri eiusdem sphaeræ; Erit ut tota AB , ad maius segmentum AC , ita tota $B G$, ad maius segmentum $B F$: Ac proinde ut quadratum rectæ AB , ad quadratum rectæ AC , ita quadratum rectæ $B G$, ad quadratum rectæ $B F$.) Igitur erit quoque, ut quadratum rectæ $B G$, ad quadratum rectæ $B F$, ita quadratum rectæ $B K$, ad quadratum rectæ M : Et permutando, ut quadratum rectæ $B G$, ad quadratum rectæ $B K$, ita quadratum rectæ $B F$, ad quadratum rectæ M ; Ac propterea erit ut recta $H G$, ad rectam $B K$, ita recta $B F$, potens totam AB , & maius segmentum AC , ad rectam M , potentem totam AB , & minus segmentum BC . Cum igitur proposita latera D , E , cubi, & Icosædri, eandem habeant proportionem, quam rectæ $B G$, $B K$, ut mox ostendemus; perspicuum est, ut se habet recta $B F$, potens totam AB , & maius segmentum AC , ad rectam M , potentem totam AB , & minus segmentum BC , ita se habere propositum cubi latus D , ad Icosædri propositum latus E . Si recta itaq; linea secetur

4. quarside.

10. tertijdec.

12. tertijdec.

4. tertijdec.

2. quarside.

22. sexti.

22. sexti.

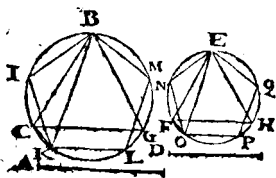
extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphaerae eandem habeant proportionem, quam recta BG, BK; demonstrabimus hoc propositio theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphaerae, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quavis alia sphaera descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphaerae: Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quavis alia sphaera: Dico esse ut A, ad BC, ita D, ad EF. Perfeclis



namque triangulis Icosaedrorum BCG, EKH, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona aequilatera BIKLM, ENOPQ, connectanturque rectae BK, CK, EO, FO.

Quoniam ergo idem circuli

5. quartide. lus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphaerae; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphaera descripti, in qua cubi latus A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsius sphaera descripti; Ac propterea, ex coroll. 2. prop. 15. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphaerae, ideoque ipsi A, aequalis. Simili argumento aequalis erit recta EO, latus cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt (Nam uterque continet duas quintas partes suae circumferentiae.) Item arcus BDK, EQPO; (uterque enim tres quintas partes totius circumferentiae comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione segmentorum similium, aequales: inter se, quam anguli BKC, EOF, inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ex coroll. 1. propo-

32. lib. 1. reliquus angulus $C B K$, trianguli BCK , reliquo angulo $F E O$, trianguli EFO , equalis erit, & totum triangulum BCK , toti triangulo EFO , equiangulum. Quare erit, ut BK , hoc est, recta KA , illi equalis, nempe latus cubi, ad BC , latus Icosaedri, ita EO , hoc est, recta D , illi equalis, latus scilicet alterius cubi, ad EF , latus Icosaedri. Quod est propositum.

P E R S P I C V M est igitur id, quod in demonstratione assumetur, nimirum eandem habere proportionem D , & E , latera cubi & Icosaedri in una sphaera, quam habent $B G$, $B K$, latera cubi & Icosaedri in alia sphaera.

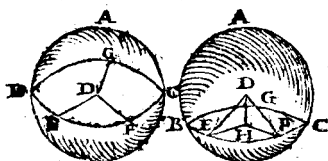
Ex hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphaera cum ipsis, ut vult proposit. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphaera.

L E M M A I.

S I sphaera plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

S E C E T V R sphaera ABC , cuius centrum D , plano aliquo faciente communem sectionem planam $B E F C G$. Dico $B E F C G$ esse circulum. Transeat enim primo planum se-

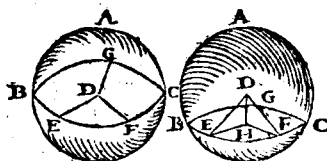
cans per centrum sphaerae, ita ut centrum D , sit in plano, seu communi sectione $B E F C G$,



ducanturque ex D , centro sphaera ad extremitatem communis sectionis, lineae rectae quocunque $D E, D F, D G$. Quoniam igitur omnes hae lineae ductae, quocunque fuerint, aequales sunt, ex definitione sphaerae, cum ex eius centro ad superficiem cadant: erit figura plana

BEFCG, unica linea contenta, circulus eiusque centrum D , idem cum centro sphaerae.

TRANSEAT secundo planum secans non per



centrum sphaerae:

Ducatur autem ex

D , centro sphaerae

ad planum secans

perpendicularis

DH , emittaturque;

ex H , rectae utcumque HE , HF , ad extremitatem usque;

communis sectionis; & connectantur rectae DE , DF .

Quoniam igitur anguli DHE , DHF , ex defn. 3.

lib. 11. recti sunt; erit tam quadratum rectae DE , qua-

dratis rectarum DH , HE , quam quadratum rectae

DF , quadratis rectarum DH , HF , aequale: Sunt

autem quadrata rectarum DE , DF , aequalium ex

centro sphaerae ad eius superficiem cadentium, aqua-

lia. Igitur & quadrata rectarum DH , HE , qua-

dratis rectarum DH , HF , aequalia erunt; & pro-

inde, dempto communi quadrato rectae DH , reliquum

quadratum rectae AE , reliquo quadrato rectae HF ,

aequale erit. Quare & rectae HE , HF , aequales

erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas

ex H , ad extremitatem communis sectionis cadentes

esse aequales & inter se, & distis duabus HE , HF . Fi-

gura igitur plana BEFCG, unica linea contenta, cir-

culus erit; eiusque centrum, punctum H , in quod per-

pendicularis DH , cadit. Quod est propositum.

COROLLARIUM.

ITAQUE si planum secans transierit per centrum sphaerae, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphaera. Si vero planum secans

secans per sphaerae centrum non tranſerit, efficitur circulus habens aliud centrum, quam ſphaera; illuſ uidelicet punctum, in quod ca- dit perpendicularis ex centro ſphaerae ad planum ſecans ducta. Nam ſemper demonſtrabuntur linee rectae cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli eſſe aequales, ut perſpicuum eſt.

LEMMA II.

Circuli in ſphaera aequales, aequaliter diſtanti a centro ſphaerae: & circuli aequaliter diſtantes a centro ſphaerae, aequales ſunt.

In ſphaera $ABCD$, cuius centrum E , ſint circuli aequales AB, DC . Dico ipſos aequaliter a centro E , diſtare. Ducantur enim ex E , ad eorum plana per- pendiculares EF, EG , quae per coroll. præceden- tis lemmatis in ipſorum centra ca- dent, ex quibus ducantur rectae FB, GC , ad circumferentias cir- culorum utcuſque, connectan- turque rectae EB, EC . Quo- niam igitur anguli EFB, EGC , recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectae EB , quadra-



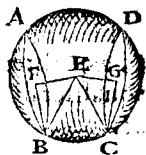
47. primi

tis rectarum EF, FB , quam quadratum rectae EC , qua- dratis rectarum EG, GC , aequale: Sunt autem qua- drata rectarum EB, EC , aequalium, cum cadant ex cen- tro ſphaerae ad eius ſuperficiem, aequalia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB , quadratis rectarum EG, GC , aequalia erunt. Et proinde demptis qua- dratis aequalibus rectarum aequalium FB, GC , cum ſint ſemidiametri circulorum aequalium, erit re- liquum quadratum rectae EF , reliquo quadrato

Gg 4 recta

rectæ EG , æquale; Atque adeo æquales erunt rectæ
perpendiculares EF , EG . Quam ob rem circuli AB ,
 DC , equaliter distant a centro E .

SED iam equaliter distant circuli AB , DC , a
centro sphaerae E . Dico ipsos esse



æquales. Constructa enim figura,
ut prius, ostendemus eodem modo,
quadrata rectarum EF , FB , æqua-
lia esse quadratis rectarum EG , GC .
Ac proinde, demptis quadratis æ-

qualibus rectarum æqualium EF , EG , cum circuli
equaliter possint distare a centro, reliquum qua-
dratum rectæ FB , reliquo quadrato rectæ GC ; itque
adeo æquales erunt rectæ FB , GC , semidiametri, scilicet
circularum AB , DC . Circuli igitur AB , DC , æqua-
les sunt. Quod est propositum.

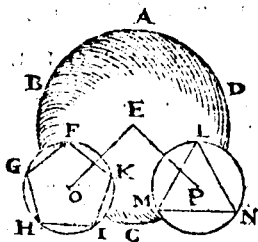
4.
10.

THEOR. II. PROPOS. II.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum
in eadem cum ipso sphaera descriptum, est
ut cubi latus ad latus Icosaedri, in una ea-
demque sphaera.

IN sphaera $ABCD$, cuius centrum E , inscriptum sit Do-
decaedrum, cuius unum pentagonum $FGHIK$: Item
Icosaedrum; cuius unum triangulum LMN . Dico esse
Dodecaedrum ad Icosaedrum, ut latus cubi ad latus Icosae-
dri, in una eademque sphaera, siue hæc eadem sit, quæ sphæ-
ra $ABCD$, siue non. Quoniam omnes anguli tam pen-
tagoni, quam trianguli, superficiem sphaerae tangunt; si per
pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficiantur,
per lemma præcedens, duo circuli in sphaera $FGHIK$,
 LMN ,

L M N, comprehendentes pentagonum, & triangulum. Quia uero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli F G H I K, L M N; Ac propterea per lemma præcedens, equaliter ad E, centro sphaeræ distabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt.



Non aliter ostenduntur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri, & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in 12 pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter se, ex coroll. propof. 6. lib. 12. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. Quoniam autem est, ut basis F G H I K, ad basin L M N, ita pyramis F G H I K E, ad pyramidem L M N E, cum utriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propof. 4. lib. 5. demonstraui, ut duodecim bases Dodecaedri, tota uidelicet superficies Dodecaedri, ad basin L M N, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est; totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem L M N E. Rursus quia est, ut tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin L M N, ita Dodecaedrum ad pyramidem L M N E; erit, per idem scholion, ut tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, ut cubilatus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphaeræ, atque alio, ex scholio propof. 10. huius libri, ut latus cu-

6. duodec.

9. quatuordec.

bi ad

bi ad latus Icoſaedri cuiuſcunq; alterius ſphære unius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, ut latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunq; ſphære. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandū.

COROLLARIUM.

9. quartide.

10. quarti-decimi.

11. quarti-decimi.

QVONIAM uero oſtentum eſt quoque, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuiſdem ſphære, ut latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra: Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri unius eiuiſdemque ſphære, ut eſt linea potens totam diuiſam quamcunq; extrema ac media ratione, & minus ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum eiuiſdem ſphære, ut latus cubi ad latus Icoſaedri in una eademque ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportionē, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiē Dodecaedri, ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcunq; ſecū extrema ac media ratione, & eiuiſ ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuiſdem ſphære, eſſe inter ſe æquales.

O.
I I.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

L A T V S trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab uno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

ſ. primi.



26. primi

IN triangulo æquilatero ABC , ducatur ex angulo A , ad latus oppoſitum BC , perpendicularis AD . Dico quadratum lateris AB , ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD . Quoniam ob æqualitatem laterum AB , AC , anguli B , & C , æquales ſunt; & anguli ad D , recti: Erunt duo anguli B , & D , trianguli ADB , æquales duobus angulis C , & D , trianguli ADC ; habent autē & latus AD , commune, uel AB , AC , æqualia. Igitur & reliqua latera BD , CD , æqualia ſunt; ac propterea latus BC , hoc eſt, latus AB , duplum rectæ BD ; & idcirco

circò quadratum lateris AB , quadruplum quadrati rectæ BD , ex scholio propof. 4. lib 2. Cum igitur quadrato rectæ AB , æqualia sint quadrata rectarum AD , BD ; erunt quoque quadrata rectarum AD , BD , quadrupla quadrati rectæ BD ; A c proinde, qualium partium 4. est quadratum rectæ AB , uel quadrata rectarum AD , BD , talium 1. erit quadratum rectæ BD , ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD . Quare quadratum rectæ AB , partium 4. scilicet tertium est quadrati rectæ AD , partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia fefquitercium est, &c. Quod ostendendum erat.

47. primi.

COROLLARIUM.

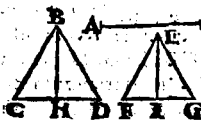
Hic manifestum est, lineam perpendicularem ex uno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bisariam. Demonstratum enim est BD , & CD , rectas æquales esse, hoc est, latus BC , secari bisariam a perpendiculari AD . Quare cum latera AB , AD , trianguli ABD , æqualia sint lateribus AC , AD , trianguli ACD ; & basis BD , basi CD , æqualis; Erunt & anguli BAD , CAD , æquales, id est, angulus BAC , bisariam secabitur ab eadem perpendiculari AD .

8. primi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI sphaerae diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphaera, Media.

SIT sphaerae diameter Rationalis A . Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphaera, esse Media. Sit enim BCD , unum triangulū Tetraedri, & EFG , Octaedri illius sphaerae, ducanturq; ex angulis B , & E , ad latera opposita CD , FG , perpendiculares BH , EI . Quoniam igitur quadratū diametri A , fefquialterū est quadrati lateris Tetraedri BC , & duplū quadrati lateris Octaedri EF ; habebūt quadrata rectarū A , BC , EF , proportionē, quā numeri 6. 4. indeq;



14. tertijdec

14. tertijdec

commensu-

6. decimi.

commensurabilia erunt. Quare & lineę ipsę A, BC, EF, cõ
menfurabiles existent, saltem potentia; Atque adeo, cum
A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF; &
idcirco & earum dimidia Rationales erunt CH, FI.

12. quarti-
decimi.

R v h s v s., quia tam quadratum rectę BC, quadrati re
ctę BH, quam quadratura rectę EE, quadrati rectę EI,
sequentium est; habebunt tam



6. decimi.

quadrata rectarum BC, BH, quã
quadrata rectarum E, F, EI, pro
portionem inter se, quam numeri
4, 3, ideoque tam illę, quã hęc
inter se commensurabilia erunt.

12. decimi

9. decimi.

12. quarti-
decimi.

12. decimi.

Quare & tam lineę ipsę BC, BH,
quam lineę E, F, EI, commensurabiles existent. Est autem
& tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia videlicet ro
ti, commensurabilis. Igitur & tam BH, CH, quam EI,
FI, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum CH,
& FI, ostensę sint Rationales, erunt quoque BH, EI,
Rationales. Quoniam uero tam CH, BH, quam FI, EI,
longitudine sunt incommensurabiles, quod eorum quadri
ta non habeant proportionem, quam numerus quadratus
ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propof.
24. lib. 8. Habent enim proportionem, quã 1, ad 3, cum osten
sum sit talium partium 1. esse tam CH, quam FI, qualium
3. est tam BH, quam EI.) Erunt tam CH, BH, quam FI,
EI, Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac pro
inde tam rectangulum sub CH, BH, Rationalibus poten
tia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub FI,
EI, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus con
tentum, Medium erit: Sunt autem trianguła BCD, EFG,
æqualia rectangulis sub CH, BH, & sub FI, EI, ex scholio
propof. 41. lib. 1. cum bases triangulorum CD, FG, dupla
sint basium rectangulorum CH, FI. Igitur & trianguła
BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota superficies
Tetraedri triangulo BCD, sit commensurabilis; (est enim
triangulum BCD, totius superficiẽ quarta pars,) Item to
ta superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis;
(Est enim triangulum EFG, totius superficiẽ quarta pars.)
Erunt quoque, ex coroll. propof. 24. lib. 10. superficies Te
traedri,

tetraedri, & Octaedri, Mediar. Si igitur Sphaerae diameter fuerit Rationalis, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

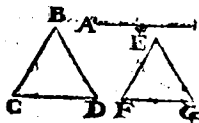
SAQUITUR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum aequilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiei Median. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, EI, hoc est, triangula BCD, EFG, ipsis aequalia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo aequilatero, cuius unum latus sit Rationale; perspicuum est, quod interat.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eisdem sphaerae inscribantur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficier Tetraedri.

SI T. sphaerae diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri uero basis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, sesquitertium esse triangulo EFG; Ac uero superficiem Octaedri esse sesquialteram superficier Tetraedri. Quonia

quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri CD; duplum uero quadrati lateris Octaedri FG; fit, ut quailum partium 6. fuerit quadratū diametri A, talium 4. sit quadratum lateris CD, & talium 2. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectae CD, sesquitertium est quadrati rectae FG: Ut autem quadratum rectae CD, ad quadratum rectae FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum EFG. (quia tam

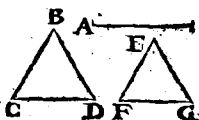


13. sexti dec.

14. tertii dec.

10. & 19.
sexti.

tam quadrata, quam triângula proportioneth inter se habent laterum CD, FG, duplicatam, cum sint similia. Igitur & triângulum BCD, sesquitergium est triânguli EFG.



R V R S V S, quoniã ostensum est triângulũ BCD, sesquitergiũ triânguli EFG; Ac propterea qualium partiũ 4. fuerit triângulum BCD, talium 3. esse triângulũ EFG; Efficitur, ut triângulũ EFG, octies sumptũ, hoc est, tota

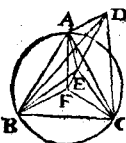
superficies Octaedri, sit earundem partiũ 34; At triângulũ BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partiũ 16. Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, &c, Quod erat ostendendum.

0.
15.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

R E C T A linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

S i Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triángulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in sphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E,



centrum sphæræ recta DEF, incidens in basim ABC, circulo inscriptam, ad punctum F. Dico F, esse centrum basis ABC, & DF, perpendicularem esse ad eandem basim. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro sphæræ ad eius superficiem, æquales sunt; erunt duo latera EA, ED, triânguli EAD, æqualia duobus lateribus

bus

bus EC, ED , trianguli CED ; Sunt autem & bases AD, CD , æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli AED, CED , æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF , æquales erunt, eo quod tã AED, AEF , quam CED, CEF , duobus rectis æquivalent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF , si considerentur triangula BED, CED . Quoniam igitur latera EA, EF , trianguli EAF , equalia sunt lateribus EC, EF , trianguli ECF ; & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; Erunt bases FA, FC , æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC , si considerentur triangula EBF, ECF . Quare cum tres rectæ FA, FB, FC , ex F , in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; erit F , centrum basis ABC , seu circuli eam circumscribentis.

8. primi.

13. primi.

4. primi.

9. terij.

Quia uero, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E , centro spheræ ad planum circuli ABC , demissa in centrum circuli cadit; efficitur, ut recta DE , per centrum ducta, & in centrum circuli F , cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC . Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictam coroll. Quare cum F , quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli, haberet unus idemque circulus duo centra. quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

O.
I 6.

OCTAEDRVM in spherâ descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis uero utriusque est quadratum subduplum quadrati diametri spheræ.

SIT Octaedrum $ABCDEFG$, contentum octo triangulis æquilateris & equalibus $EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC$, & in spherâ descriptum, cuius centrum G . Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqua-

14. *tertiūdec.*



48. *primi.*

14. *primi.*

2. *undec.*

7. *undec.*

48. *primi.*

4. *undec.*

lium altitudinum, quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphaerę. Ductis enim ex G, centro sphaerę ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quę eęuales sunt, cum sint semidiametri sphaerę: ductę uidelicet e centro ad superficię sphaerę: quoniam quadratum diametri sphaerę duplum est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri AG, ex scholio. propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphaerę, talium partium 2. erit quadratum rectę AB, & talium partium 1. quadratum rectę AG; Ac proinde quadratum rectę AB, duplum erit quadrati rectę AG. Cum ergo quadratum rectę AG, eęuale sit quadrato rectę BG; erit quadratum rectę AB, eęuale duobus quadratis rectarum AG, BG; Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, DGC, CGB, recti. Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectis erunt coniunctę; atque adeo rectę AC, BD, se se secantes in G, in uno existens plano; Ac propterea rectę earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum ABCD, in uno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum basis communis ABCD, uertices uero E, & F; quę pyramides eęuales sunt & similes, ex defin. 10. lib. 11. cum quęlibet constet ex quatuor triangulis eęquilateris Octaedri, quę eęualia sunt & similia, & basi communij ABCD. Dico iam earum altitudines esse eęuales, & basin ABCD, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphaerę. Quoniam ostensum est, quadratum lateris Octaedri AB, eęuale esse duobus quadratis semidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, eęuale duobus quadratis semidiametrorum AG, EG; Ac propterea angulus AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, se mutuo secantibus in G, ad rectos angulos insistit, ipsa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nempe ad basin pyramidum. Quare EG, altitudo est pyramidis ABCDE. Similiter ostendemus FG, altitudinem esse pyramidis ABCDF. Cum ergo

ergo EG, FG, sint semidiametri sphaerae aequales, perspicuum est, distas pyramides esse aequalium altitudinum. Rursus quia A C, est diameter sphaerae; erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea equale duobus quadratis laterum A D, DC. Quare angulus A D C, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli D A B, A B C, h C D. Quare quadrilaterum A B C D, rectangulum est: Sed & aequilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere octaedri A B, constat, ipsum esse subduplum quadrati diametri sphaerae. Octaedrum ergo in sphaera descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

14. tertij de.

48. primi.

14. tertij de.

SCHOLION.

MVLTO breuius hanc propositionem demonstramus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa uidelicet constructione octaedri. Verumtamen quia hic demonstratur a Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

o.

17.

TETRAEDRVM sphaerae impositum ad Octaedrum in eadem sphaera descriptum se habet, ut rectangulum sub linea potente uigintisepte sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum ad quadratum diametri sphaerae.

¶ B. L. ut Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphaerae impositum

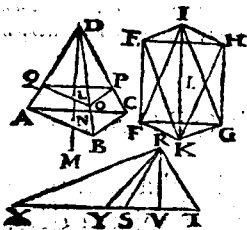
H h

tum

tum ad octaedrum in eadem sphaera descriptum se habet, ut rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia triū quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquintupartiente uigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphaeræ.

S I T Tetraedrum $ABCD$, & octaedrum $EFGHIK$, in una eademque sphaera, cuius centrum L . Ducatur ex angulo D , per centrum L , diameter sphaeræ DM , incidens in basin ABC , ad punctum N . Erit igitur N , centrū basis ABC ,

15. quar-
tadecimi.



& DN , perpendicularis ad eādem basin. Quia uero pars diametri LN , inter centrum sphaeræ & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia pars semidiametri, per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Erit DL , semidiameter taliū partium 3. qualium 1. est LN . Ac propterea DN , taliū 4.

Ducatur deinde, ex scholio propos. 15. lib. 11. per centrum L , planum OPQ , parallelum plano ABC ; eruntque rectæ QQ, OP, PQ , parallelæ rectis AB, BC, CA ; Ac propter ea triangulum QOP , æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC , cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC , est æquiangulum, ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & QOP , æquiangulum erit; Ac propterea & equilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC : Sunt autem m & triangula DQO, DOP, DQP , triangulis DAB, DBC, DAC , æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides $ABCD, QOPD$, similes sunt, ex defin. 9. lib. 11. Rursus quia plana parallela ABC, QOP , secant rectas DN, DC , proportionaliter; erit ut DN , ad DL , ita DC ,

16. undec.

10. undec.

17. undec.

DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, ut 4 ad 3. (cum ostē-
sum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3 est DL.) Igitur & DC, ad DP, erit ut 4. ad 3. Ac proinde, cum pyrami-
des similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit
pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, ut 64. ad 27. hæc
enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. ut constat
in his numeris 4. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi
in proportione 4. ad 3. ut constat ex 2. propof. lib. 8. Rursus
quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam,
erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, ut
64. ad 36. ut in iisdem numeris constat.

8. duodec.

10. sexti.

Sic etiam triangulum æquilaterum RST, æquale trian-
gulo DQP; demittaturq; ex R, ad ST, perpendicularis RV.
Eritq; latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquiter-
rium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36.
fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ
RV: Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ
DC. Igitur linea RV, est potens uigintiseptem sexagesimas
quartas partes quadrati lateris tetraedri.

12. quarti
decimi.

RVRSVS extensa TS, fiat TX, ad TS, ut 64. ad 27. ex
coroll. propof. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bifariam in Y, ut sit
TY, taliū partiū 32. qualiū 17. est TS, seu illi æqualis DP.
Quoniā uero proportio DC, ad DP, erat, ut 4. ad 3. nempe
sesquitertia; erit DC, taliū partiū 36. qualiū DP, est 27. (pro-
portio enim 36. ad 27. est sesquitertia) Ac propterea qualiū
partiū TY, est 32. Quare linea TY, cōtinet octo nonas par-
tes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedrū A B.
CD, ad octaedrū EFGHIK, ut rectangulū contentū sub re-
cta RV, (quæ potest uigintiseptē sexagesimas quartas partes
quadrati lateris DC) & sub recta TY, (quæ cōtinet octo no-
nas partes eiusdē lateris) ad quadratū diametri sphæræ DM.

CVM enim ductis rectis RX, RY, triangulum RTX, du-
plum sit trianguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis
TY: Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum
eiusdem trianguli RTY, Erit triangulum RTX, æqua-
le rectangulo sub RV, TY. Ac propterea erit ut trian-
gulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulū sub RV,
TY, ad idem triangulū RST: Est autem triangulum RTX,
ad triangulum RST, ut basis TX, ad basin ST, nimirum

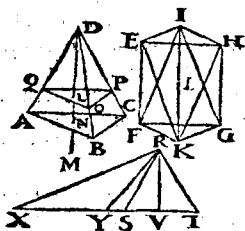
1. sexti.

41. primi.

7. quinti.

1. sexti.

ut 64. ad 27. Igitur & rectangulum sub R V, T Y, ad trian-
gulum RST; hoc est, ad triangulum DQ P, siue QOP, si-
bi æquale, erit, ut 64. ad 27. Fuit autem & pyramis ABCD,
ad pyramidem QOPD, ut 64. ad 27. Erit ergo ut rectangu-



lum sub R V, T Y, ad triangu-
lum QOP, ita pyramis AB-
CD, ad pyramide QOPD:
At uero ut triangulū QOP,
ad quadratum diametri sphæ-
rę DM, ita est pyramis QO-
PD, ad octaedrum EFGH-
IK. (Nam cum DN, recta
sit ad planum ABC, recta
quoque erit ad planū QOP,

ex scholio propof. 14. lib. 11. ideoque sphærę semidiameter
DL, altitudo erit pyramidis, seu tetraedri QOPD: Octae-
dru autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æqua-
les EFGHI, EFGHK, quarum basis communis quadratum
EFGH, dimidium quadrati diametri sphærę; & altitudines
æquales semidiametri sphærę LI, LK. Pyramides ergo QO-
PD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex scholio
propof. 6. lib. 12. erit ut basis QOP, ad basin EFGH, ita py-
ramis QOPD, ad pyramidem EFGHI; Ac propterea, per
ea, quæ in scholio propof. 4. lib. 5. ostendimus, ut basis
QOP, ad duplum basis EFGH, hoc est, ad quadratum dia-
metri sphærę DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyra-
midis EFGHI, hoc est, ad Octaedrū EFGHIK.) Ex quo
igitur erit, ut rectangulum sub R V, potente uiginti septem
sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, &
sub TY, octo nonis eiusdem lateris DC, contentum, ad qua-
dratum diametri sphærę DM, ita pyramis, seu tetraedrum
ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo sphæ-
rę impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demon-
strandum.

16. quarti-
decimi.

S C H O L I O N.

Q V O N I A M uero DC, salum partium 4. fuit, qua-
lium 3. DP; continebit DP, seu illi equalia RT, tres quar-
tas par-

ius paries lateris tetraedri DC: Ac proinde, cum recta RT, sit potentia sesquitercia recta RV, erit RV, potentia subse-
quitercia ipsius RT, nempe trium quartarum partium late-
ris Tetraedri. Rursus quia TY, fuit alium partium 32. qua-
lium 27. ST, seu DP, (tres videlicet quarta partes lateris te-
traedri.) erit TY, superquintupartiens vigesimas septimas par-
tes ipsas ST, nimirum trium quartarum partium lateris te-
traedri. Quare constat, esse quoque tetraedrum AB & D, ad
octaedrum EFGHIK, ut rectangulum sub RV, quæ potentia
subsequitercia est trium quartarum partium lateris tetraedri,
& sub TY; quæ superquintupartiens est vigesimas septimas
partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri,
ut volebat Campanus.

12. quadri-
decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet
angulo trianguli æquilateri ad basin oppo-
sitam demissa; tripla est eius perpendicula-
ris, quæ ex centro trianguli ad eandem ba-
sin deducitur.

o.
17e

S. i. r. triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D.
Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad
BC, eamque bisariam dividet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13.
Dico AE, triplam esse rectæ DE, quæ scili-
cet perpendicularis est e centro ad basin du-
cta. Ductis enim rectis BD, CD, cum late-
ra DA, DB, trianguli ADB, æqualia sint la-
teribus DB, DC, trianguli BDC, e centro e-
nim ducuntur; sit autem & basis AB, basi
BC, æqualis: Erunt triangula ADB, BDC, æqualia ex co-
roll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt
triangula ADB, ADC. Quare, ob æqualitatem trium trian-
gulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum est
trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum sub AE, EB,



Hh 3 triangulo

I. sexi.

triangulo ABC, & rectangulū sub EE, EB, triangulo BDC, æquale est, ex scholio propof. 41. lib. 1. cū basis triā. ul. BC, dupla sit basis BE, utriusq; rectanguli: Erit quoq; rectangulum sub AE, EB, triplum rectanguli sub DE, EB: Est autē ut rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub DE, EB, eiusdem altitudinis EB, ita basis AE, ad basin DE. Igitur & AE, tripla est ipsius DE. Linea ergo perpendicularis ex quo libet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

ITAEQ; eadem perpendicularis AB, sesquialtera est reliquæ rectæ AD, inter angulum, & cētrum comprehēsa. Cum enim AB, tripla sit ipsius DE; quālium partium 3. ponetur AB, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AB, sesquialtera erit ipsius AD.

Ex quibus sursum sit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

17.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum sphaeræ inscribatur; erit semidiameter sphaeræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphaeræ in basin quamcunq; octaedri deducitur.

Si T. basis aliqua octaedri in sphaera, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro sphaeræ D, perpendicularis demittatur DE, ducaturq; semidiameter sphaeræ DB. Dico semidiametrum DB, potētia triplam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphaeræ, qui triangulum ABC, circū scribit, cadat, erit E, centrum trianguli.

Ducta igitur recta BE; quoniam quadratum diametri sphaeræ duplum est quadrati lateris octaedri AB, & quadruplum quadrati semidiametri sphaeræ DB, ex scholio propof. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6, & quadratum semidiametri



4. terijde.

midiametri sphære DB, 3. Quia uero quadratū lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triāgulum ambien-
tis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium par-
tium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare cum
quadratum rectæ DB, æquale sit quadratis rectarū BE, DE;
sit autem quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit
reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium
1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati
rectæ DE. Si igitur octaedrum sphære inscribatur, &c.
Quod demonstrandum erat.

12. serijde.

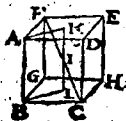
47. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cu-
iuslibet sphære descripti, æquale est super-
ficie cubi in illa sphæra collocati: Perpen-
dicularis autem a centro sphære in aliquam
basin cubi demissa, æqualis est dimidio late-
ris cubi.

o.
18.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius
centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad unam
basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati dia-
metri sphære æquale esse superficiei cubi;
& perpendicularem IK, æqualem esse dimi-
dio lateris cubi. Cum enim quadratum dia-
metri sphære triplum sit quadrati lateris cu-
bi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi;
Erit duplum eiusdem quadrati ex diame-
tro sphære descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti su-
perficiei cubi.



15. serijde.

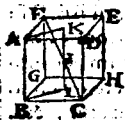
PRODVCTA autem HIL, ad basin oppositam BC-
HG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad pla-
num AE, recta quoque erit ad planum BH, illi pa-
rallelum, per scholion propos. 14. lib. 11. Rursus, quia
AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE,

6. undec.

Hh 4 ducatur

16. undec.

ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis A E, B H, communes sectiones, lineas rectas A K, B L, quæ parallelae quoque erunt inter se. Ac propterea parallelogrammum erit A B L K; atque adeo recta



K L, æqualis lateri cubi A B. Quoniam vero perpendicularis K L, e centro sphaeræ I, cadit in bases A E, B H, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circuli in dictis bases ambientium in sphaera, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare K L, in centro I, bisariam secabitur a dicta diametro C F, ut in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea, cum K L, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit I K, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphaeræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

C O L L A R I U M

15. terzide.

Ex dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphaeræ dictum cubum comprehendens, æquale esse cubo. Cum enim quadratum diametri sphaeræ triplum sit quadrati lateris cubi; erunt duo quadrata A E, B H, duæ tertie partes quadrati diametri sphaeræ. Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex I K, dimidio lateris cubi in A E, tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, æquale esse solido, quod fit ex I L, dimidio lateris cubi in B H, tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, ut quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphaeræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.

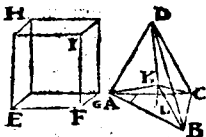
31. undec.

ALITER propterea potest hoc corollarium, ut dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphaeræ, æquale esse cubo. Nam cubus B E, producit ex B A, latere cubi in quadratum A E, quod est tertia pars quadrati diametri sphaeræ: Ut perspicuum est.

S C H O L I O N

V. B. L. E. S. S. autem Solidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuscumque corporis regularis ad aliquam eius basem ductam in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est præposito corpori regulari. Sit autem corpus regulare quod-

quodcunque $ABCD$, contentum planis ABC , ABD , ACD , BCD , solidum autem $EFGH$, contentum sub EI , tertia parte suo per se ipsi corporis $ABCD$, & sub altitudine FG , qua aequalis sit perpendiculari KL , ducta ex centro K , ad basin ABC . Dico solidum $EFGH$, aequale esse dato corpori regulari $ABCD$. Nam ductis ex centro K , rectis KA , KB , KC , KD , ad omnes angulos corporis, resoluerunt corpus regulare in pyramides aequales, cum aequales habeant basi s. & altitudines. Cum enim circuli distas bases ambiantes, aequales sint, ipsi aequaliter a centro distabunt, per lemmam. 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpendicularares ex K , centro ad ipsorum plana ducta, nempe altitudines pyramidum, aequales erunt. Quoniam autem prisma contentum sub basi ABC , & altitudine KL , triplum est pyramidis $ABCK$, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prisma contentum sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL , tripla sunt suarum pyramidum; Erunt prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL , (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis $ABCD$. Quamobrem, cum idem prisma triplum sit prismatis $EFGH$, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, qua ad propos. 7. lib. 12. demonstravimus, erunt solida $EFGH$, $ABCD$, equalia. Quod est propositum.



THEOR. 21. PROPOS. 21.

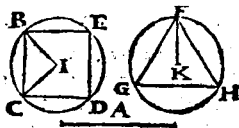
IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphaerae.

IN sphaera, cuius diameter A , intelligatur descriptus cubus, cuius unum quadratum $BCDE$, & octaedrum, cuius unum triangulum FGH . Dico eundem circulum circumscribere & quadratum $BCDE$, & triangulum FGH , hoc est, circulos $BCDE$, FGH , ipsa circumscribentes, esse aequales.

15. *serijde.*

47. *primi.*

les. Sint enim rectæ e centrīs IB, KP. Quia igitur quadratū diametri A, triplum est quadrati lateris cubi BC; & quadratum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum subtendat quadrantē; Ac proinde quadratum rectæ BC, æquale erit quadratis rectorum BI, IC. Quare cū rectorum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata, duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BI.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rur-



14. *serijde.*

12. *serijde.*

tri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG; & quadratū lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI, æqualia erunt quadrata rectorum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCD E, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM

1. *quarti
decimi.*

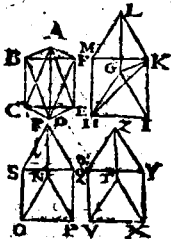
Hinc fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulo- rum, qui bases oppositas tam cubi quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex cetro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulo- rum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt a centro sphæræ, ex lemmatē 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt distæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectorum, quæ centra oppositarum basium connectunt (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11.) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. Quod est propositi.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidē sphæræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum

plum tetraedri, sit latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphaera inscriptum sit & octaedrum ABCD-EF, & tetraedrum GHLK. Dico ita esse octaedri ad triplū tetraedri, ut latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, dividetur octaedri in quatuor pyramides, quarum latus commune est ipsa diameter AD, & vertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD, in BDF, cuius basis BDF, in CDEA, cuius basis CDE, & in DEFA, cuius basis DEF; quae quidem omnes bases infra quadratū BGEF, existunt continentes cum ipso dimidiatam partem octaedri.



Quoniam uero quilibet harum pyramidū constat duobus triangulis æquilateralis octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quā latus ipsorum commune est AD diameter, & reliqua latera ipsius octaedri latera existunt, inter se equalia sunt, efficitur has quatuor pyramides æquales esse inter se, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Constituatursuper GHI, basin tetraedri, prisma GHIKLM, eiusdem cū tetraedro altitudinis, quod ipse tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propof. 7. lib. 1. 2. Rursus, super basin octaedri NOP, & TVX, basi tetraedri æqualem, constituentur duo prismata NOPQRS, TVXYZ, eiusdem cū octaedro, seu pyramide ACDE, altitudinis. Quia igitur GHI, hoc est, TVX, basis tetraedri sesquitertia est ipsius NOP, basis octaedri: Erit quoque prisma TVXYZ, prismatis NOPQRS, sesquiterciū, cū prismata eiusdem altitudinis sint, ut bases, ex ijs, quæ ad propof. 7. lib. 1. 2. demonstrauimus. Est autē & octaedri ABCDEF, eiusdem prismatis NOPQRS, sesquitertium;

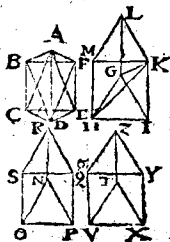
(Nā prisma æquale est tribus pyramidibus, ex coroll. 1. propof. 7. lib. 1. 2. qualis quatuor continere dixim⁹ octaedri) Igitur æquale est octaedrum prismati TVXYZ. Quia uero prisma TVXYZ, ad prisma GHIKLM, proportionē habet, quā altitudo illius ad altitudinē hui⁹, ex scholio propof. 1. lib. 1. 2. Est autē altitudo prismatis TVXYZ, quod

octaedro

8. primi.

14. quarti.
decimi.

octaedro æquale est, eadem quæ octaedri, ex constructione : Erit quoque octaedrum ad prismam $GHIKLM$, hoc est, ad triplum tetraedri $GHIK$, ut altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri : Est autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra basium oppositarum coniungens, equalis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra basium oppositarum connectenti, per coroll. propos. 21. huius lib. Atque ut latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita est latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratū lateris cubi ad quadratū altitudinis tetraedri, quam quadratū lateris octaedri ad quadratū lateris tetraedri, est, ut 3. ad 4. Posito enim quadrato diametri sphaerae 9. erit quadratū lateris cubi 3. ex propos. 1. lib. 13. & quadratū altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. ideoque quadratū lateris cubi ad quadratū altitudinis tetraedri, est ut 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphaerae 6. erit quadratū lateris octaedri 3. & quadratū lateris tetraedri 4. &c.) Est igitur octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque tetraedrum eidem sphaerae inscribantur, &c. Quod demonstrandum erat :



18. versijde.

COROLLARIUM.

Ex dictis inferitur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphaerae ad latus tetraedri, ut latus octaedri ad latus cubi. Nam & quadratū diametri ad quadratū lateris tetraedri, & quadratū lateris octaedri ad quadratū lateris cubi, proportionem habet sesquialteram.

18. versijde.

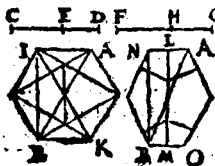
THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita potuerit totam aliquam

aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphaeræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius segmentum maius CE; Item rectam FG, & eius segmentum minus HG. Dico CE, esse latus Icosaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius sphaeræ; cuius AB, diameter existit. Intelligatur enim in sphaera, cuius diameter AB, descriptum Icosaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde Icosaedri opposita AI, BK, connectantur recta IB, quæ subtendit unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, ut constat ex propof. 16. lib. 13. quod etiam uidere licet in aliquo Icosaedro materiali. Quia uero AI, BK, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propof. 15. lib. 13. erunt anguli

AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro IK; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & bases quoque AB, IK, æquales; Erunt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt; ideoque quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB: Erit autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothefi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, sit maius segmentum ipsius CD, diuise extrema ac media ratione; Item IA, maius segmentum ipsius IB, similiter diuise; (Nam IB, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est, IA, latus Icosaedri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni,

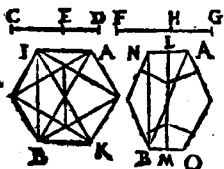


29. primi.

8. primi.
47. primi.

8. *tertydec.* tagoni, si secetur extrema ac media ratione, maius segmen-
tum esse equale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit CE,
maius segmentum ipsi I A, lateri Icosædri. Cum enim sit
2. *quartide.* ut C D, ad C E, ita I B, ad I A; erit quoque ut quadratum

22. *sexti.*



rectæ C D, ad quadratum rectæ C E, ita quadratum rectæ I B, ad quadratum rectæ I A; Ac componendo, ut quadrata rectarum C D, C E, ad quadratum rectæ C E, ita quadrata rectarum I B, I A, ad quadratum rectæ I A: Oſtenſi ſunt

14. *quinti.*

autem quadratis rectarum C D, C E, æqualia quadrata rectarum I B, I A. Igitur & quadrato rectæ C E, æquale est quadratum rectæ I A; ideoque rectæ C E, I A, æquales sunt. Quod est propositum.

33. *primi.*

R v s s v s latera Dodecaedri opposita A N, B O, secen-
tur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta L M, & ipsa la-
tera recta N B, coniungantur. Quoniam igitur N L, B M,
æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13.
erunt quoque L M, N B, æquales & parallelæ: Est autem
recta L M, ſecans latera opposita bifariam, perpendicularis
ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & N B,
ad eadem perpendicularis erit; Ac proinde quadratum rectæ
propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum N B,
N A.

47. *primi.*

Quare cum idem quadratum rectæ A B, æquale
ſit poſitum quadratis rectarum F G, H G; æqualia erunt
quadrata rectarum N B, N A, quadratis rectarum F G,
H G. Ac propterea, cum H G, ſit minus ſegmentum ipſius
F G, ſectæ extrema ac media ratione; Item N A, minus
ſegmentum ipſius N B, hoc eſt, ipſius L M, ſimiliter diui-
ſæ, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. æquale erit H G, mi-
nus ſegmentum ipſi N A, lateri Dodecaedri. Quod qui-
dem non aliter oſtendemus, ac ſupra demonſtrauimus C E,
maius ſegmentum æquale eſſe ipſi I A, lateri Icoſædri. Si
recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam lineam
ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmen-
tum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſeg-
mentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Ico-
ſædri;

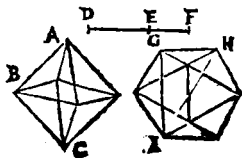
saedri; minus autem segmentum posterioris, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ & lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphaera descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem sphaeræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF.

Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius unum angulū subtendit recta GI; erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione; Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto, extrema ac media ratione.



8. tertijdec.

5. tertijdec.

47. primi.

14. tertijdec.

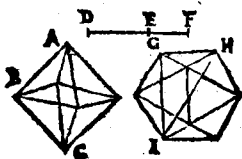
2. quattide.

Quia uero quadratū diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, ut in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, ut quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: Est autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam cum sit ut GI, ad GH, ita DE, ad EF: Erit quoq;

ut qua-

22. *sexti.*

ut quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH,



ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF. Et permutando, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. Quadratum igitur rectæ GH, du-

plum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphaeræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

L I N E A recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta AD, quæ æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD; sitq; recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E, latus esse octaedri illius sphaeræ, in qua AD, uel AC, latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propof. 17. lib. 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphaeræ, cuius minus segmentum AC, uel AD, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphaeræ potentia tripla maioris seg-



ris segmenti BC, nempe lateris cubi: Summa autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphaeræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphaeræ. Quare cum diameter sphaeræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; E, ite E, latus Octaedri eiusdem sphaeræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponitur. Sigitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

4. tertijdec.

14. tertijdec.

COROLLARIUM.

QUANTAM uero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, ut constat ex ipis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC, sit maius segmentum. & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisa: Peripicuum est, si linea quævis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum esse latus Dodecaedri eiusdem sphaeræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

18. tertijdec.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: latus Icosaedri eidem sphaeræ inscripti sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuisæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icosaedri HI, K, eiusdem sphaeræ. Dico HI, rectam potentia esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta I, K, diameter. Quia igitur HI, est maius segmentum re-

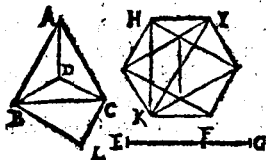
8. tertijdec.

II

æ

5. tertijdec.
22. primi.
48. primi.

Et HK , diuisa extrema ac media ratione; Erit quoque composita KHI , diuisa eodem modo in H , maiusque segmentum HK , & minus HI . Fiat ex rectis BC , EF , FG , triangulum BCL , ita ut BL , recta ipsi EF , & CL , ipsi FG ,



2. quartide.

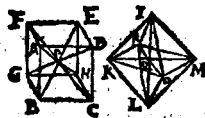
6. sexti.
4. sexti.
13. tertijdec.

fit æqualis: Eritque angulus L , rectus, quod recta BC , ponatur posse rectas BL , CL , hoc est, rectas EF , FG : Est autem & angulus IHK , rectus, ut propos. 27 huius lib. ostendimus; Estq; ut BL , ad LC , ita KH , ad HI . Igitur triangula BLC , KHI , equiangula sunt: Ac propterea ut KI , ad IH , ita BC , ad CL ; & permutando, ut KI , ad BC , ita HI , ad CL : Atqui IK , diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC . Ergo & HI , latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL , hoc est, minoris segmenti FG . Si latus itaq; Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadē cum ipso sphaera descriptum est, ut superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item ut latus cubi ad semidiametrum sphaerae.

SIN in eadem sphaera cubus $ABCDEFGH$, & Octaedrum $IKLMNO$, quorum centra P , & Q . Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec



non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphaerae. Ductis enim ex centrīs P , & Q , ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides aequales, quod habeant & bases aequales, & altitudines: (cum enim circuli descripti circa pyramides, seu cubi bases aequales, sint aequales,

ac

æ propterea æqualiter a centro sphaerae distant; eunt lineæ
 perpendiculares ex centro P; ad plana. circulatorum, seu ba-
 sium distarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, equa-
 les. per lemma 2. pro pos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in
 octo pyramides æquales, eandem ob causam. Quoniam au-
 tem idem circulus cõplectitur & cubi quadratum, & Octae-
 dri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi,
 & Octaedri a centro sphaeræ; per lemma præfatum: Ac
 propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, &
 Octaedri. Quam ob rem erit, ut una pyramis cubi ad unã
 pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim py-
 ramidis Octaedri, ex scholio propof. 6. lib. 12. Ac proinde,
 ex istis, quæ in scholio propof. 4. lib. 5. demonstrauimus, ut
 sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem
 Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies uni-
 delictet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoq; rur-
 sus, ex eodẽ scholio, ut cubus ad octuplũ pyramidis Octae-
 dri, nimirum ad ipsam Octaedrũ, ita superficies cubi ad octu-
 plũ basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem
 Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.
 S E N T. rursus in eadem sphaera cubus ABCD, & Octae-
 drum EFGHIK, sitque diameter sphaeræ, seu Octaedri E G,
 & centrũ L. Auferatur autem ex A. B, latere cubi, tertia pars
 A M; Item ex semidiametro. E L, tertia pars E N. Quoniam
 uero quadratũ IFKH, lateris Octaedri, basis existens duarũ
 pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propof. 16.
 huius lib. sesquialterum est quadrati B D, lateris cubi B C:
 Est autem & recta AB, rectæ B M, sesquialtera, ex constru-
 ctione; recipiuntur bases IFKH, B D, & altitudines A B,
 B M: Ac propterea parallelepipedũ super basim IFKH, & sub
 altitudine B M, æquale erit parallelepipedo super basim B D,
 & sub altitudine A B, nimirum cubo ABCD. Rursus quia
 recta E L, rectæ E N, tripla est; erit & parallelepipedũ super ba-
 sim IFKH, & sub altitudine E L, triplũ parallelepipedũ su-
 per eandem basim, & sub altitudine E N, ut in scholio propo-
 pos. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum
 super basim IFKH, & sub altitudine E L, triplum est
 pyramidis I F K H E, ex corollario 1. propof. 7. lib. 12.
 Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo

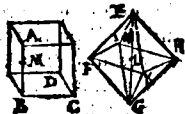
31. quatti-
decimi.

18. sesijdec.

34. undec.

I 1 2 super

16. quarside



super basim I F K H, & sub altitudine E N : Atqui huius parallelepipedum duplum est parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ex scholio propof. 14. lib. 1. 2. quod

& altitudo L N, dupla fit altitudinis E N ; Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E . Aequale igitur erit parallelepipedum super basim

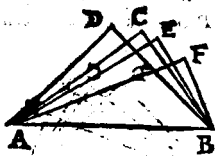
I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K . Ceterum quia parallelepipedum super basim I F K H, & altitudine B M, est ad parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ut altitudo B M, ad altitudinem L N, ex scholio propof. 14. lib. 1. 2. Ut autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L . (Cum enim sit ut A M, ad M B, ita E N, ad N L, & componendo, ut A B, ad B M, ita E L, ad L N, erit quoque permutando, ut A B, ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, aequale est octaedrum cubo A B C D ; Et parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, aequale Octaedro E F G H I K . Igitur erit quoque ut cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, semidiametrum sphaerae . Quod secundo loco demonstrandum proponebatur . Quoniam cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphaera descriptum, &c. Quod erat ostendendum .

S C H O L I O N .

13. tertijdec.

Q U I A demonstratum est, diametrum sphaerae, in qua omnia quinque corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, id est, si quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. fit quadratum lateris Tetraedri, perspicuum est, si ex quadrato diametri dicta auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in scholio propof. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus . Vel etiam, si quadrato diametri constituentur duo quadrata aequalia, quae proportionem habeant duplam, ex eodem scholio maioris quadrati latus esse latus Tetraedri . Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partis, da

ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. Vt si diameter sphaerae ponatur AB , ex cuius quadrato detrahaatur quadratum rectae AC , continens duas tertias partes quadrati diametri AB ; Vel si constituantur duo quadrata rectarum AC , BC , quadrato diametri AB aequalia, ita ut quadratum rectae AC , duplum sit quadrati rectae BC ; Erit recta AC , latus Tetraedri.



RURSUS cum ostensum sit, diametrum sphaerae potentia duplam esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri AB , dematur quadratum rectae AD , quod dimidium sit quadrati diametri AB ; Vel si constituantur duo quadrata rectarum AD , BD , quadrata diametri AB aequalia, & inter se proportionem habentia equalitatis, secundum doctrinam scholii propof. 33. lib. 6. rectam AD , latus esse Octaedri.

DEINDE, quoniam docuimus diametrum sphaerae potentia esse triplum lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri AB , auferatur quadratum rectae BC , quod tertia pars sit quadrati diametri AB ; Vel si quadrato diametri AB , constituantur duo quadrata aequalia rectarum AC , BC , ita ut quadratum rectae AC , duplum sit quadrati rectae BC , iuxta doctrinam eiusdem scholii propof. 33. lib. 6. Lineam rectam BC , cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB , possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB , auferatur quadratum lateris Tetraedri AC , relinqui quadratum lateris cubi BC ; Quemadmodum cōtaxeris, si ex quadrato diametri AB , tollatur quadratum lateris cubi BC , remanet quadratum lateris Tetraedri AC .

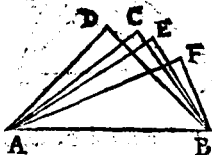
PRÆTEREA, quia si recta aliqua poterit tui quāpiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum; Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphaerae, cuius diameter est recta prior linea; Constat, si quadrato diametri AB , exhibeantur, iuxta ea, quae in scholio propof. 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata aequalia rectarum AE , BE , proportionem habentium, quam recta quavis entre-

23 'quarti-
decimi.

ma ac media ratione diuisa ad maius segmentum: Rectam mi-
norem BE, esse Icofaedri latus.

POSTREMO, quoniam si recta quapiam potuerit totā

aliquam rectam diuisam extrema
ac media ratione, & minus illius
segmentum; Minus segmentum
hucus est Dodecaedri eius spha-
ra, cuius diameter prior linea:
Liquet, si quadrato diametri AB,
constituantur duo quadrata aqua-
lia rectarum AF, BF, propor-



tionem habensium, quam quacunque recta linea extrema ac
media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam
BF, latus esse Dodecaedri.

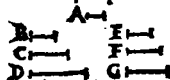
HACTENUS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus
Candalla de comparatione solidorum regularium eidem spha-
ra impostorum scripserunt: Sequentes autem quinque pro-
pos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5.
de proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue
proportionales, nec non & aliæ quatuor,
ita ut sit eadem antecedens omnium. Erit
proportio tertiæ ad tertiam proportionis se-
cundæ ad secundam duplicata; & propor-
tio quartæ ad quartam eiusdem proportio-
nis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continue proportio-
nales; nec non quatuor A, E, F, G, ita ut A, recta antece-
dens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad
tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad
secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam,
esse

esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundę ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectę B, ad rectam A; habeat autem & quadratum rectę B, ad quadratum rectę A, duplicatam proportionem eiusdem proportionis re



20. sexti.

ctę B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita quadratum rectę B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, ut recta F, ad rectam A, ita quadratum rectę E, ad quadratum rectę A: Et conuertendo, ut recta A, ad rectam F, ita quadratum rectę A, ad quadratum rectę E. Quoniam igitur est quadratum rectę B, ad

quadratum rectę A, ut recta C, ad rectam A; & quadratum rectę A, ad quadratum rectę E, ut recta A, ad rectam F; Erit ex

quadr. B.	Recta C.
quadr. A.	Recta A.
quadr. E.	Recta F.

ęquo, quadratum rectę B, ad quadratum rectę E, ut recta C, ad rectam F: Est autem proportio quadrati rectę B, ad quadratũ rectę E, duplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & proportio rectę C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectę B, ad rectam E. Quod est primum.

20. sexti.

R v r s v s cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectę B, ad rectam A; habeat autem & cubus rectę B, ad cubum rectę A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectę B, ad rectam A; Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus rectę B, ad cubum rectę A.

33. undec.

Eadem ratione erit ut recta G, ad rectam A, ita cubus rectę E, ad cubum rectę A; Et conuertendo ut

Cubus B.	Recta D.
Cubus A.	Recta A.
Cubus E.	Recta G.

recta A, ad rectam G, ita cubus rectę A, ad cubum rectę E. Quia ergo est cubus rectę B, ad cubum rectę A, ut recta D, ad rectam A; & cubus rectę A, ad cubum rectę E, ut recta A, ad rectam G; Erit ex ęquo, cubus rectę B, ad cubum rectę E, ut recta D, ad rectam G: Est autem proportio cubi rectę B, ad cubum rectę E, triplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & proportio rectę D, ad rectam G,

33. undec.

I i 4 triplica-

triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Atque si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I O N.

Hoc idem demonstravimus ad propos. lib. 2. de quocunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab uno aliquo, eodemque numero incipientiam.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

Q V A D R A T V M lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularẽ ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

In triangulo æquilatere A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, recta perpendicularis A D, quæ bisectam secabit latus B C, ut in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium



est lateris A B. Invenitur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, ut perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. Sit autem eodem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. Quoniam vero quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam late-

13. sexti.

17. tertij.

20. sexti.

ris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

ITAEQUE, si in triangulo æquilatere perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter A D, & D B, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadē sphaera describantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiusvis A B C D, & Tetraedri in eadem sphaera descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta diuidens F G, latus b. sariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum A C ad triangulum E F G, ut latus trianguli E F, ad perpendicularem E H.



Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K, cum quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B; sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, & dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangulum sub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc est, tres rectæ F H, A B, E F, continue erunt proportionales: Sūt autem & tres rectæ F H, I K, E H, continue proportionales,

ex

18. tertij dec.

1. sexti.

17. sexti.

28. quart.
decimi.

ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit FH ,
erit proportio rectę EF , ad rectam EH ,
tertię ad tertiam, proportionis rectę AB ,
ad rectam IK , secundę ad secundam du-
plicata. Quare cum & quadratum AC , re-
ctę AB , ad quadratum rectę IK , hoc est,
ad triangulum EFG , (est enim ex coroll. propos. 29. huius
lib. quadratum rectę IK , æquale triangulo EFG ,) pro-
portionem habeat duplicatam proportionis rectę AB , ad
rectam IK ; Erit quadratum cubi AC , ad triangulum
Tetraedri EFG , ut latus EF , ad perpendicularem EH .
Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphaera descri-
bantur, &c. Quod erat demonstrandum.

20. sexsi.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquial-
terũ est axis, seu altitudinis ipsius: Axis ue-
ro, siue altitudo Tetraedri potetia sesquiter
tia est lateris cubi in eadẽ sphaera descripti.

9. quart.



47. primi.

12. tertijdec.

SIT Tetraedri triangulum ABC , & altitudo, seu axis
Tetraedri DE , latusque cubi eiusdem sphaerę F . Dico latus
Tetraedri AB , esse potentia sesquialterum axis DE : Axem
uero DE , potentia sesquitertium lateris cubi F . Nam circa
triangulum descripto circulo ABC ; ad cen-
trum D , in quod uidelicet cadit axis DE , ut cõ-
stat ex propos. 15. huius lib. ducatur AD , se-
midiameter, & AE , latus Tetraedri. Quia
igitur quadratum lateris AE , hoc est, lateris
 AB , æquale est quadratis rectarum AD ,
 DE , & triplũ quadrati semidiametri AD ; Fit, ut posito qua-
drato lateris AB , seu AE , partium 6. quadratum rectę
 AD , sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum qua-
dratum axis DE , talium partium 4. Quapropter qua-
dratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis
Tetraedri.

QVONIAM uero latus Tetraedri AB , potentia duplum est lateris cubi F , Erit quadratum lateris F , talium partium 3: quabum 6. positum est quadratum lateris AB ; Oñtensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE . Igitur quadratum axis DE , sesquitercium est quadrati lateris cubi F . Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

18. tertijdec.

COROLLARIUM. I.

QVIA uero, posito quadrato lateris AB , partium 6. quadratum diametri sphaerae talium partium est 9, quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem uero partium 4. ostensum est quadratum axis DE ; perspicuum est, diametrum sphaerae potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri; Ac pròinde, cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialterae enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, ut in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

19. tertijdec.

20. sexti.

COROLLARIUM. II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphaerae inscripti, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia uidelicet tam latus trianguli aequilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitercium est perpendicularis ex uno angulo ad latus oppositum deducta; quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

22. quartidecimi.

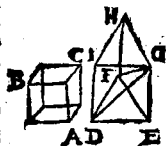
THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphaerae inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphaera cubus ABC , & Tetraedrum $DEFG$. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatursuper DEF , basim Tetraedri prisma $DEFGHI$, eandem habes cum Tetraedro altitudinē. Quoniam igitur basis prismatis, seu cubi ABC , ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF , ut latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF , ad lat^{us} oppositum. Ut autem lat^{us} Tetraedri ad

20. quartidecimi.

ad perpendicularē dictam, ita est, per coroll. 2. propof. 3. 1.
huius lib. altitudo Tetraedri, ac ipsoindē prismatis DEFGHI,



nam cubi, seu prismatis ABC, Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, ut huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propof. 9. lib. 12. demonstrauiamus, æqualia erunt prismata ABC, DEFGHI,

cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propof. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphaeræ inscripti. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

VND ē prisma, eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphaera, in quā Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubū ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

ELEMENTI DECIMIQUARTI FINIS.



E V C L I D I S

E L E M E N T V M XV.

ET SOLIDORVM QVINTVM,
ut nonnulli putant. Vt uero alij, Hyp-
sichis Alexandrini de quin-
que corporibus.

L I B E R S E C V N D V S.



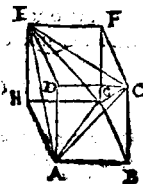
PROBLE. I. PROPOS. I.

I.

IN dato cubo pyramidem describere.



In cubo dato A B C D E F G H, oportet describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab uno eius angulo, nempe ab E, ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA, EG, EC, a quarum extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur A G, G C, C A, in reliquis tribus basibus. Quoniam igitur diametri quadratorum equalium equalis sunt, quod potentia duplæ sint laterum equalium quadratorum, ut in scholio propof. 47. lib. I. demonstrauiamus; perspicuum est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se equalia; Ac propterea pyramidem,



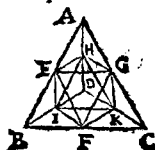
dem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quia nec omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 3. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

2.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro $ABCD$, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bisariis in E, F, G, H, I, K , & ductis duodecim rectis $EF, FG, GE, HI, IK, KH, BI, IF, FK, KG, GH, HE$, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE , supra planum $EIKG$ quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI , infra idem planum consistunt. Quoniam uero latera AE, AH , trianguli AEH , æqualia sunt lateribus AG, AH , trianguli AGH , quod sint dimidia restarum equalium AB, AD, AC ; item & anguli contenti EAH, GAH , æquales, quod sint anguli triangulorum æquilateralum ABD, ACD ; æquales erunt bases EH, GH . Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI , & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque octaedrum componunt $EIKG, GHF$; quod quidem ex definitione 3. lib. 11, intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.



4. primi.

COROLLARIUM.

QUONIAM uero tria plana $EIKG, GHIF, FKHE$, quadrata sunt æqualia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, ut in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus; quorum quodlibet pyramidem $ABCD$, secat bisariam. (Nam quadratum $EIKG$, ipsam diuidit in pyramidem $HIKD$, & prisma $HIKGAH$; nec non

non in pyramidem $BBFI$, & prismam $EFCKI$; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prismam prismati: Eodemque modo reliqua quadrata $GHIF$, $FKHE$, diuidunt bifariam eandem pyramidem $ABCD$: Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

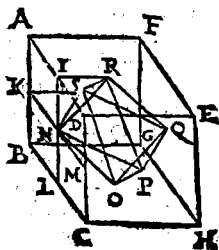
3. duodec.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo octaedrum describere.

3.

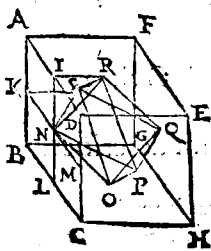
DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH . Diuidantur latera basis $ABCD$, bifariam in punctis I, K, L, M , quæ connectantur rectis IL, KM , secantibus sese in N , puncto, quod qui dem centrū est quadrati $ABCD$, ut constat ex demonstracione propof. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S . Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK , &c. æquales dimidijs lateribus cubi, seu quadratorum, ut perspicuum est ex prædicta demonstracione propof. 8. lib. 4. Postremo si præfata centra coniungantur duodecim rectis $NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS$; constituta erunt octo triangula, quorū quidē quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN . supra planum $NOQR$; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO , infra idem planum consistunt. Quoniam uero latera IN, IR , trianguli INR , æqualia sunt lateribus KN, KS , trianguli KNS , quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, ut dictum est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum NI, IR , parallelæ sint rectis BA, AF ; angulus $NI R$, æqualis sit recto angulo KAF , in quadrato AG , eademque ratione angulus NKS , angulo



10. undec.

4. primi

gulo recto I A F, in quadrato A E, Erunt bases N R, N S, æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum e centrīs ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, ut quælibet duæ



ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa pñcta, e quibus uidelicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim uides duas rectas N I, R I, ductas esse ad I, dimidium lateris A D, quod cõmune est quadratis A C, A E. quorum centra sunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ N K, S K, ductæ sunt ad K, dimi-

dium lateris A B, quod commune est quadratis A C, A G, quorum centra existunt puncta N. & S, &c. Quam ob rē constituta octo triangula & æquilatera sunt, & equalia inter se; ideoque Octaedrum constituunt NOQ & SP; Quod quidem ex defin. 3. 1. lib. 11. intra cubum est descriptum, cum omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earū centrīs. Quam ob rem in dato cubo Octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

1. quintide
2. quintide

ALITER. In cubo dato inscribatur pyramis; In hac deinde pyramide Octaedrum figeretur, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim ex demonstratione propof. 1. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera uero pyramidis, ex demonstratione propof. 1. huius lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri, perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi; atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

COROLLARIUM.

Quia uero diametri Octaedri in cubo descripti N Q, R O, si ducerentur, se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propof. 14. lib. 13. quæ quidē coniungūt centra basium cubi oppositarū: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarū connectentes nō solū se se mutuo bisectam, ut docuimus coroll. 1. propof. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, ut hic ostendimus, quidē.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

IN dato octaedro cubum inscribere.

DATUM octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in octaedro sex pyramides quadrangulae continentur, quarum uidelicet uertices sunt sex anguli octaedri, & quilibet duae octaedrum constituunt, sit una earum pyramis ABCDE, cuius basis ABCD, quadratum, triangula uero aequilatera ABE, EBC, CED, DEA, sineque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quae ducantur rectae LM, MN, NO, OL, parallelae lateribus AB, BC, CD, DA: Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, aequilatera, cum similia sint triangulis aequilateris ABE, EBC, CED, DBA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se aequalia, propterea quod latera habeant communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; Et denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc aequo ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, aequale esse. Quocirca & quatuor rectae LM, MN, NO, OL, inter se aequales sunt; Quia uero ducta recta EKP, tripla est rectae KP; Est autem ut EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectae LA. Eademque ratione EB, EC, ED, tripli erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectae LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportionem secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursum quia LO, LM, parallelae sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; aequalis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, ut ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam uero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, parallelum est plano



18. quarta
2. sexsi.

10. undec.

15. undec.

Kk

ABCD;

A B C D; ipsa quoque inter se parallela erunt, atque adeo, cum conueniant in punctis M, & O, unum planum efficiet, ex scholio propof. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratū



4. primi.

erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera E L, E K, trianguli E L K, æqualia sint lateribus E O, E K, trianguli E O K, & anguli quoq; ipsis cōtēti, æquales, quod recta E K, ex angulo E, p centriū K, trianguli æquilateri E A D, ducta bifariā fecerit angulū A E D, per coroll. ppos. 12. lib. 3. Erunt & bases K L, K O, æquales, hoc est, recta L O, bifariam secabitur in K.

4. primi.

Eadem ratione L M, M N, N O, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac proinde rectæ G L, G M, H M, H N, I N, I O, K O, K L, cum sint laterum quadrati L N, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, æquales erunt & rectæ G H, H I, I K, K G, centra G, H, I, K, connectentes. Quia uero hæ rectæ in plano existunt quadrati L N, angulosque comprehendunt rectos; (cum enim anguli L K G, G K I, I K O, duobus sint rectis æquales; Sint autem L K G, I K O, per coroll. 2. propof. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus G K I; Eademque ratione recti erunt anguli K G H, G H I, H I K.) quadratum erit G H I K, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubū descriptimus. Quod faciendū erat.

13. primi

5.

6.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrū inscribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continentur, quarum uidelicet bases sunt pentagona

ex quinque Icofaedri lateribus composita, uertices uero, duodecim anguli Icofaedri, una pyramis ABCDEF, curus basis pentagonum ABCDE, triangula uero æquilatera ABF, BCE, CDF, DEF, EAF, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rursus ex uertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ, ex scholio propoſi. 12. lib. 3. bifariam secabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita ut decem rectæ MA, MB, NE, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint: quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, æquales quoque erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculariter ex angulis triangulorum æquilaterorum, æqualium ad bases oppositas demisse. Cum enim latera FB, BM, trianguli FBM, lateribus FB, BN, trianguli FBN, æqualia sint, contineantq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam uero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL, primi rum semidiametri circulorū æqualium triangula æquilatera equalia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, ut demonstratum est; Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. Rursus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quæ anguli BNM, MNO, ONC, æquales sunt duobus rectis, Sunt autē anguli AMQ, NMB, anguli BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademq; ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterū & equiangulum MNO PQ, in plano pentagoni ABCDE, existens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter secantur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centrīs, æquales sint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplè sunt ipsarum



4. primi.

8. primi

4. primi.

4. primi

3. primi.

4. primi

Kk a GM,

2. *sexii.* GM, HN, IO, KP, LQ. ex coroll. propof. 1. lib. 1. paralle-
lae erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ,
10. *undec.* QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG,
angulis aequalibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM,
15. *undec.* ideoque & inter fe aequales erunt. Quia uero plana per re-
ctas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela sunt plano penta-
goni MNO PQ, p rectas MN, NO OP, ducto, conueniuntq;
in recta H I; ipsa unum planum efficiunt, ex scholio propof.
16. lib. 1. Eodemque modo ostendemus plana per IK, KL,
& per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum
constituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca
GHIKL pentagonum est aequilaterum & aequiangulum,
cum & latera habeat aequalia & angulos. Quod si eadem ar-
te in reliquis undecim pyramidibus Icofaedri centra trian-
gulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter
pentagona aequilatera & aequiangula: quae cum latera ha-
beant communia, aequalia inter fe erunt. Quamobrem
duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituunt:
quod quidem ex defin. 31. lib. 1. in Icofaedro erit descri-
ptum, cum uiginti anguli Dodecaedri in centris uiginti ba-
sium Icofaedri consistant. Quapropter in dato Icofaedro
Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

ITAEQUE cum omnes rectae e centro Icofaedri ad centra ba-
sium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint aequales;
(Cum enim ex coroll. lemm. 1. propof. 10. lib. 14. perpendiculares
sint ad plana circulorum aequalium bases Icofaedri circumscriben-
tium, atque adeo eorundem distantiae existant a centro sphaerae,
seu Icofaedri; aequales erunt inter fe, ex lemm. 1. eiusdem propof.
20. lib. 14.) Idem erit centrum Icofaedri, atque sibi inscripti Do-
decaedri.

0.
5.

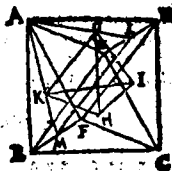
PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidē describere.

PRIMAERIS describenda sit in octaedro ABCDEF.
In pyramide octaedri superiori ABCDE, sumantur G, &
H, cen-

H, centra triangulorū ex aduerso sibi respondentiu A E D, B E C; Item in pyramide inferiori ABCDE, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AFB: quę quidem centra coniungantur sex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, ut fiat pyramis HIKG.

Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectę AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE BF, bisariam in L, & M per scholiū propof. 12. lib. 13. coniungaturq; recta LM, quę ipfi BE, uel FD, equalis & parallela erit, cum EL, BM; Item DL, FM, rectę æquales sint, & parallelę, nimirū



dimidia laterum DE, BF, oppositorum in quadrato EF. Quoniam uero rectę AL, AM, sectę sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod AG, AK, duplę sint ipsarum GL, KM, ex coroll. propof. 12. lib. 14. Erunt GK, LM, parallelę; Ac propterea, per coroll. propof. 4. lib. 6: triangu-
 13. primi.
 2. sexti.
 4. sexti.
 18. quarti
 decimi.
 4. quinde.
 1. quinde.
 ALM, AGK, similia. Quare erit ut AL ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, ut AL, ad AG, ita LM, ad GK: Est autem AL, ipsius AG, sesquialtera, quod GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, duę tertię. Item & LM, hoc est, ipsi æqualis DF; sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centi-
 4. quinde.
 1. quinde.
 a G, H, I, K, coniungentium sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HIKG, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangu-
 4. quinde.
 1. quinde.
 la æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoque Tetraedrum constitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 3. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

ALITER. In octaedro dato inscribatur cubus, & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; Et in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

COROLLARIUM. I.

9. undec.

15. undec.

QUIA uero ostensum est, utramque GK , DF , parallelam esse ipsi LM ; ac propterea & GK , ipsi DF , atque adeo ipsi BE , parallelam esse: Atque eadem ratione KH , ipsi FC , EA , parallelam esse: Atque ideoque planum GKH , per GK , KH , ductum, parallelum esse plano DFC , per DF , FC , necnon & plano BEA , per BE , EA , ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singulas uidelicet binis oppositis.

COROLLARIUM. II.

PRAETEREA, cum octaedrum circumscribat & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium octaedri constituentur; Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphaerae circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, ut constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphaerae sesquialtera axis tetraedri in ea sphaera descripti, per coroll. 1. propos. 21. lib. 14. uel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quae centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deductae.

o.

7.

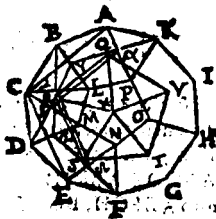
PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis $ABLPK$, $PKIHO$, $OHGFN$, $NFEDM$, $MDEBL$, $LMNOP$, quorum centra Q , R , S , T , V , X , quae libet duo proxima, rectis iungantur QR , RS , ST , TV , VQ , QX , RX , SX , TX , VX : Et ex angulis K , D , quos subtendant rectae AP , CM , per centra Q , R , recte ducantur KY , DY , quae per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppositum BL , & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y , conuenient: Diuident autem & rectae eadem YK , YD , rectas AP , CM , bifariam & ad angulos rectos in α , β , ex 1. coroll. eiusdem propositionis, quod

& arcus

& arcus AKP, CDM, circularum circa pentagona descri-
 prorum bifariam diuidant, (constat enim rectas AK, PK;
 Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) Igitur $A\alpha$, $C\beta$,
 parallelæ sunt rectæ BY; atque adeo & inter se parallelæ :
 Sunt autem & æquales nempe di-
 midia rectarum AP, CM, quæ æ-
 quales sunt, cum latera KA, KP,
 lateribus DC, DM, æqualia sint,
 angulosque contineant æquales.
 Rectæ ergo ipsas connectentes
 AC, $\alpha\beta$, æquales erunt, & paral-
 læ. Non aliter ostendemus, si
 ex angulis B, F, quos subtendant
 rectæ CL, EN, per centra R, S, re-
 ctæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, $\gamma\delta$, æqua-
 les esse ipsas CE, $\gamma\delta$: Sunt autem AC, CE, inter se æquales,
 cum contineant angulos æquales æqualibus lineis compre-
 hensos. Igitur & $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter, cum
 & rectæ Y α , Y β , Z γ , Z δ , æquales sint. (Nam YQ, YR,
 ZR, ZS, perpendiculares, distantie sunt æqualium rectarum
 BL, DM, a centris Q, R, S, circularum æqualium,
 qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, atque adeo
 æquales. Item Q γ , R β , R γ , S δ , distantie sunt rectarum
 æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulo-
 rum æqualium, ideoque æquales; Ac proinde & totæ Y α ,
 Y β , Z γ , Z δ , æquales erunt,) Erunt quoque anguli $\alpha Y\beta$,
 $\gamma Z\delta$, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR,
 ZS, æquales sint; æquales quoque erunt rectæ QR, RS,
 centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales
 demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum co-
 pulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV,
 VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N,
 O, P, constituta, æquilatera erunt, & equalia. Quod
 si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dode-
 caedri, similia triangula construantur; (Habet enim
 Dodecaedrum uiginti angulos solidos.) quæ quidem latera
 habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra
 Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri
 consistent in centris duodecim basium dodecaedri. In dato



28. tertij.
 28. primi.

4. primi.

33. primi.

4. primi.

14. tertij.

14. tertij.

8. primi.

4. primi.

ergo Dodecaedro icosaedrum descriptum. Quod faciendum erat.

6.
8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubū describere.

PROPONANTUR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus, $ABCDE$, $EFGHA$, $AHIK B$, $BKLMC$, convenientia ad latus AB ; duo quidem $ABCDE$, $ABKIH$, sūm latus idem commune AB ; alia autē duo $AEFGH$, $BCMLK$, sūm angulos EAH , CBK . In his uero pentagonis subtendantur anguli A, B, D, I , rectæ EH , CK, CE , HK , quadrilaterum efficientes $EHKC$. Quoniam igitur rectæ AE, BC , æquales, auferunt ex circulo pentagonum $ABCDE$, circumscribente arcus æquales; Erunt, ex scholio propof. 27. lib. 3. rectæ AB, CE , parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt AB, HK . Quare, & EC, HK , inter

28. tercij.

9. undec.

33. primi,

7. undec.



4. primi.

22. tercij.

34. primi.

se parallelæ erunt; Ac propterea rectæ EH, CK , quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, in eodemq; cum ipsis plano. Ideoq; parallelogrammum erit $EHKC$; quod dico esse æquilaterum. Cum enim omnia latera $AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK$, æqualia sint, angulosque contineant æ-

quales, ex hypothesi; æquales erit bases EH, HK, KC, CE . Quia uero planum $ECKH$, productum communem sectionem in sphaera facit circulum, per lemma 1. propof. 16. lib. 14. circa quadrilaterum EK , descriptum; Erunt tam anguli oppositi E, K , quam C, H , duobus rectis æquales; Ac propterea cum oppositi E, K , sint æquales, nec non & oppositi C, H ; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H , recti. Quare EK , quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorū Dodecaedri. Sūgitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo alie rectæ subtendantur eodem ordine; constitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia, eo quod eorum latera æquales angulos pen-

los pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendunt æqualia sine, cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim eius latera iaceant in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis resident. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.

4. primi.

COROLLARIUM.

Hinc fit, rectam, quæ subtendit unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est, C B, ipsi A B, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

o.

9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SYMANTE in Dodecaedro, cui inscribendum sit octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum A B, C D; E F, G H, I K, L M, quæ bifariam secantur in N, O, P, Q, R, S. Recte igitur N O, P Q, R S, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphaeræ bifariam, & ad angulos rectos diident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoque erunt earum dimidiatae partes N T, O T, P T, Q T, R T, S T. Quo circa duodecim recte subtendentes duodecim angulos rectos N T P, P T O, O T Q, Q T N, N T R, R T P, P T S, S T Q, Q T R, R T O, O T S, S T Q, quales sunt N P, P O, O Q, Q N, N R, R P, P S, S Q, Q R, R O, O S, S N, æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur, Ac proinde octo triangula N R P, P R O, O R Q, Q R N, O S P, P S N, N S Q, Q S O, æquilatera, & æqualia erunt, constituentque octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli



4. primi.

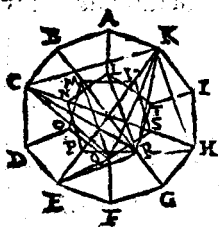
guli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum descriptum. Quod faciendum erat.

o.
10.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componens, in quibus tres anguli C,



K, R, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At uero K, lateri L T, communi pentagonis K L T, L T P; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, ut

fit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphaeræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; quoniam Dodecaedrum in sphaera describitur; si planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphaera circulus, per lem. 1. propos. 10. lib. 14. Ac propterea angulus CAH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus rectos esse angulos CRH, ARE, KQE, RQM, CQH. Quo circa cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Aequalia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum

KR,

17. verside.

31. versij.

47. primi.

KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualiū KH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectæ cum sub tendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales sunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraëdruum componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptū erit intra Dodecaedruum. Itaque in dato Dodecaedro Pyramidē descripsimus. Quod faciendū erat.

ALITER. In proposito Dodecaedro cubus describitur, & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit.

PROBL. II. PROPOS. II.

IN dato Icosaedro cubum describere.

DESCRIBATUR in dato Icosaedro Dodecaedru; & in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; anguli uero Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam obrem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidē describere.

IN dato Icosaedro cubus describat, & huic cubo pyramis, factumque

4. primi.

8. quintide.
1. quintide.

O.
II.

8. quintide.
8. quintide.

O.
12.

11. quintide.
decimi.

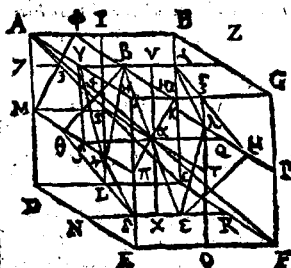
11. quinside.
1. quinside.

Atque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi uniantur, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri; Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bisariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π , ξ , Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξ O, M π , KP, NR, nullaquā inter se cocuntibus, quæ



rursus bisariam secantur in S, V, T, ρ , Q, X, connexis rectis ST, VX, ρ Q, quæ se mutuo in cētro α , bisariam secant, & ad angulos rectos, ut in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, suntque lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia restarum YZ, M π , secantur

extrema ac media ratione in β , γ , θ , κ , ut sint maiora segmenta, Y β , Z γ , M θ , $\pi\kappa$, ductis rectis Y ρ , Y κ , $\beta\theta$, $\beta\kappa$. Quoniam ergo Y ρ , YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & $\rho\kappa$ β V, segmenta minora rectarū equalium YV, $\rho\pi$, æqualia quoque: Sunt autem quadrata rectarum YV, β V, tripla quadrati rectæ Y β ; Erunt & quadrata rectarum Y ρ , $\rho\kappa$, tripla eiusdem quadrati rectæ Y β . Quare, cum quadratis rectarum Y ρ , $\rho\kappa$, æquale sit quadratum rectæ Y κ , quod angulus Y ρ κ , rectus sit; Erit & quadratum rectæ Y κ , triplum quadrati rectæ Y β . Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Y ρ , recta est ad planum AE, per rectas AY, Y ρ , ductum; rectus erit angulus

4. tertijdec.

47. primi

29. primi

4. donec.

gulus $\beta\gamma$, ex defin. 3. lib. 11. Ac propterea quadratum rectæ $\beta\gamma$, æquale quadratis rectarum $\gamma\delta$, $\gamma\epsilon$, existens, quadruplum erit quadrati rectæ $\gamma\delta$ (quia nimirum quadrata rectarum $\gamma\delta$, $\gamma\epsilon$, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ $\gamma\delta$, cum quadratum rectæ $\gamma\delta$, triplum sit ostensum quadrati rectæ $\gamma\delta$.) Ideoque cum quadrata proportionem habeant laterum duplicata, dupla erit recta $\beta\gamma$, rectæ $\gamma\delta$. Quadrupla, enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autem & $\beta\gamma$, dupla ipsius $\rho\alpha$, quod minora segmenta $\delta\rho$, $\delta\epsilon$, rectarum æqualiū $M\rho$, $M\epsilon$, æqualia sint. Erig igitur ut $\gamma\delta$, ad $\rho\alpha$, ita $\beta\gamma$, dupla ipsius $\gamma\delta$, ad $\rho\alpha$, duplam ipsius $\rho\alpha$: Est autem $\gamma\delta$, maius segmentum ad $\rho\alpha$, rectam minori segmento $\beta\gamma$, æqualem, ut tota ad maius segmentum. Ergo & $\beta\gamma$, ad $\rho\alpha$, erit ut tota ad maius segmentum; Ac proinde $\rho\alpha$, erit maius segmentum rectæ $\beta\gamma$, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus $\rho\alpha$, maius esse segmentum rectæ $\beta\gamma$, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta $\gamma\theta$. Quare æquales erunt $\beta\theta$, $\beta\alpha$, constituentes triangulum $\beta\theta\alpha$, simile illi, quod ab Euclide constructum est propof. 10. lib. 4. ut postea demonstrabimus; Ac proinde $\rho\alpha$, erit latus pentagoni in circulo triangulum $\beta\theta\alpha$, circumscribente descripti, ut perspicuum est, ex 11. propof. lib. 4.

INTSLLIGATUR iam planum trianguli $\beta\theta\alpha$, extendi, (ducta per β , recta $\beta\phi$, ipsi $M\pi$, parallela,) per parallelas $M\pi$, $\phi\theta$, ut sit planum extensum $\phi\pi$, occurrens diametro AC , quadrati $ABCD$, in puncto 3. cubi uero diametro AE , in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi $A\phi$, parallela, connectaturque MS , quæ parallela est utrique $A\phi$, 73. Quoniam igitur, per coroll. propof. 4. lib. 6. triangulum $A\gamma\delta$, simile est triangulo AMS ; ac proinde ut AM , ad MS , ita est $A\gamma$, ad 73. Sunt autem AM , MS , æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoque $A\gamma$, 73. æquales Eadem ratione erit ut MA , ad $A\phi$, ita $M\gamma$, ad 73. Est autem $A\phi$, maius segmentum rectæ MA , diuisæ extrema ac media ratione. (quod æquales sint $A\phi$, $\gamma\delta$, nec non & MA , $\gamma\gamma$, dimidia cubi latera. Igitur & 73, hoc est, γA , maius segmentum erit rectæ $M\gamma$, extrema ac media ratione sectæ; Ac propterea tota MA , diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque

47. primi.

20. sexti.

15. quinti.

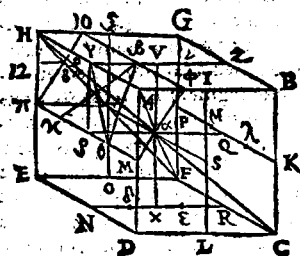
33. primi.

4. sexti.

24. primi.

3. tertijdec.

2. *sexti.* sique segmentum erit M 7. Atqui ut M 7. ad 7 A, ita est S 3. ad 3 A. Secta est ergo & S A, extrema ac media ratione in
 3. *primi.* 3. maiusque segmentum est S 3. Quia uero S α T, parallela est ipsi M π , quod & recta ducta π T, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per S α T, planum ducatur parallelum plano
 17. *undec.* $\phi \pi$, ducto per M π , secabuntur rectæ AS, A α , in eisdem rationes, in punctis 3. & 4. A tq; idcirco, cum AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo A α ; semidiameter cubi, in 4. maiusq; segmentum erit α 4. Isdem argumentis ostēdemus, ducta diametro H F, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione a plano $\phi \pi$, ut perspicuū est,

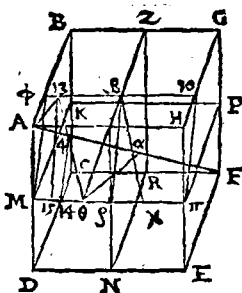


si cubus inuerratur, ut in hac figura secūda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, ita ut quadratum AC, locū quadrati HF, & quadratum HF, locū quadrati, AC, obtineat in hac secūda figura. Ostēdamus nūc,

si rectæ iungātur θ 4. β 4. β 9. χ 9. rectilīnēū β 4 χ θ 9. in plano $\phi \pi$, existēs, pentagonū esse equilaterū, & æquiāgulū.

- INVERTATUR rursum cubus, ut quadrata ADEH, AB GH, quæ nimirū continent triangulū β θ χ , siue planum $\phi \pi$, hunc situm habeant, quē mōstrat tertia hæc figura. Deinde in plano $\phi \pi$, recta coniuncta θ 4 extēdatur usq; ad rectam ϕ 10. in punctū 13. Quoniā igitur ducta recta KP, & iūctis rectis MK, π P, planū MP, parallelū est plano AG, (quod & rectæ PK, KM, parallelæ sint rectis GB, BA,) secatq; cubū bifariā; ideoq; per cētrū α , trāsīt, per ea, quæ in scholio propos. 39. lib. 11. ostēsa sunt; si per rectas α 4 A, δ 4 13. planū extendatur, sient α θ , A 13. communes sectiones planorū MP, AG, parallelæ; At proinde triangula α 4 A 13 4. æquiāgula erūt; Erūtq; ut α 4. ad 4 A, ita 4. ad 4 13. Quare cū A, in 4. secta sit extrema ac media rōne, ut ostēdimus, eodē modo erit
15. *undec.*
 32. *undec.*
 16. *undec.*
 4. *sexti.*

do erit secta $\Delta 13$. in 4. Rursus plano NZ, per centrū α , tran-
seunti, parallelū ducatur planū per punctū γ . ex scholio, propo-
sit 15. lib. 11. secans planū $\phi\pi$, recta $\gamma 14$. Est aut eidē plano
NZ, parallelū planum DB.
Rectæ igitur αA , & ρM , in
eadem rationes secabūtur
in punctis β & ι . Quocir-
ca & ρM , in 14 . secta erit
extrema ac media ratione,
minusq; erit segmentū 14
M, ideoque æquale minori
 ρ , ipsius $M\rho$. Quare cum
ex $\rho 14$. maiori segmēto ip-
sius ρM , auferatur ρ , mi-
nus segmentū; Erit, ut de-
monstrauimus ad propos.



15. undec.

17. undec.

5. lib. 13. $\rho 14$. diuisa in ρ , extrema ac media ratione, maiusq;
segmētū erit ρ . Postremo acta $\rho 13$, recta $13 15$. rectæ $4 14$,
parallela, secabūtur rectæ $\Delta 13$. $\Delta 15$. proportionaliter; Ac pro-
inde & $\Delta 15$. secta erit in 14 . extrema ac media rōne, maiusq;
segmētū erit $\Delta 14$. Quapropter erit ut ρ , maius segmētum
ad $\Delta 14$. minus, ita $\Delta 14$. maius ad $14 15$ minus: Ut autem
 $\Delta 14$. ad $14 15$. ita est tota $\Delta 15$. ad $\Delta 14$. maius segmētū. Igit
erit ut ρ ad $\Delta 14$. ita $\Delta 15$. ad eandē $\Delta 14$. Ac propterea re-
ctæ ρ , uel $\rho \kappa$, & $\Delta 15$ æquales erūt. Qu, uero planū NZ, &
planū illi parallelū per $4 14$. ductū, secātur plano $\phi\pi$; erunt
cōes sectiones $\beta \rho$. $4 14$. parallelæ, ideoq; & $13 15$. $\beta \rho$, paralle-
læ erūt, angulusq; externus $\beta \rho \kappa$, internus $13 15 \Delta$, æqualis.
Cū igitur & latera $\beta \rho$, $\rho \kappa$, lateribus $13 15$, 15Δ , sint æqualia;
A Equales erūt quoq; rectæ $\beta \kappa$, 13Δ ; Ac proinde & earum
segmēta maiora $\Delta \kappa$, $\Delta 4$ (Ostēsum n. est $\Delta \kappa$, esse maius segmē-
tū ipsius $\beta \kappa$.) æqualia erūt. Eadē arte & β ipsi $\beta \gamma$, in prima
figura ostēdet æqualis, si simili sitū triāgulū isosceles forme-
tur sup basim $\beta \gamma$, cui⁹ uertex cōstitat in pacto, qđ rectā 15 . di-
uidit extrema ac media rōne. Eodēq; modo eidē $\Delta \kappa$, $\beta \gamma$, æ-
quales erūt $\kappa 9$, $\beta 9$. A Equilaterū ergo est pētagonū $\beta 4 \Delta \kappa 9$.
Sed & equiāgulū, ut mox ostēdem⁹. Si igit hac arte duodecim
triāgula, nimirū ad singulas rectas $M\pi$, YZ , NR , IL , ξO , KP ,
bina ipsi $\beta \Delta \kappa$, similia, & æqualia cōstruāt (ita. n. ad $M\pi$, duo
hu usand;

2. sexti.

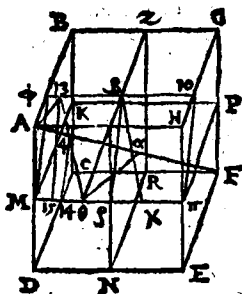
2. quartide.

16. undec.

29. primi.

4. primi

huiusmodi triangula uides $\beta\theta\kappa$, $\beta\theta\pi$) & ipsorum officio duodecim pentagona ipsi β 4. δ 9. similia & æqualia fabricentur, constituitur Dodecaedrum, cuius duodecim

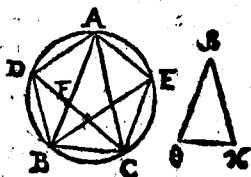


quidem anguli in sex rectis lineis, $M\pi$, YZ , NR , IL , ξO , KP , bini nimirum in singulis, octo uero reliqui in octo semidiаметris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ ipsas extrema ac media ratione diuidunt, qualia sunt puncta δ . & 9. in semidiаметris $A\alpha$, $H\alpha$, secundæ fi-

gurar; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicitur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cū non omnes eius anguli uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo uero in punctis, quæ octo semidiámetros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

L E M M A.

QVOD autem triangulum $\beta\theta\pi$, cuius basis $\theta\pi$, maius segmentum existit utriusque lateris $\beta\theta$,



$\beta\pi$, extrema ac media ratione diuisi, simile sit illi, quod Euclides construxit propof. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles ABC, quale Euclides construere docet propof. 10. lib. 4. circulus $ADBCE$, diuisisq;

construere docet propof. 10. lib. 4. circulus $ADBCE$.

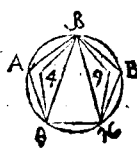
divisisque, angulis ABC, ACB , bisariam rectis BE, CD ; persiciat & pentagonum equilaterum, & equi-
angulum $ADBCE$, ut propos. 11. lib. 4. tradidimus,
secentque se mutuo recte AB, CD , in F . Quoniam
ergo AB , in F , secatur extrema ac media ratione, ma-
iusque eius segmentum est AF , aequale lateri BC ;
Erit ut AB , tota ad maius suum segmentum BC , ita
 BC , tota ad maius suum segmentum AC ; Eodemque
modo, ut tota AC ad maius segmentum CB , ita BC ,
tota ad maius segmentum AB : Est autem quoque ut
 AB , ad AC , ita BC , ad AB , utrobique enim est propor-
tio equalitatis. Triangula igitur ABC, ACF , pro-
portionalia habentia latera, equiangula sunt, aequa-
lesque erunt anguli B ; Item C , & A ; pro-
ptereaque uterque angulorum B, C , duplus erit anguli
 F ; & triangula ABC, ACF , similia.

8. tertij dec.

2. quartide.

5. sexti;

PENTAGONVM uero $ABCEA$, equilate-
rum, esse quoque equiangulum, hac ratione ostende-
mus. Describatur circa triangulum ABC , circulus



$ABCEA$, qui si transeat per puncta 4,
et 9, perspicuum est ex ijs, quae ad propos.
16. lib. 4. docuimus, pentagonum equian-
gulum esse. Si uero non incedat per puncta
4, et 9. Describatur in circulo dicto, iux-

ta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum equila-
terum & equiangulum $ABCEA$. Quoniam igitur
tam recte AD, AE , quam recte AD, AE , aequales
sunt recte AB , cum $ABCEA$ equilaterum sit; Erunt tam duae recte AD, AE ,
quam duae AB, AE , aequales, quod fieri non pos-
se demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo cir-

culus

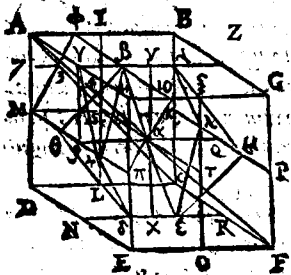
culus triangulo $\beta \theta x$, circumscribitur per puncta 4
 & 9. Ac proinde pentagonum $\beta 4 \theta x 9$, equiangulum est.

SCHOLIUM.

Ex his colligere licebit sequentes propositiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo dodecaedrum describitur.



DUCATUR enim in prima figura diameter Dodecaedri βe , intelligaturque coniuncta recta γe , aequalis existens & parallela lateri cubi $V X$, quod & $V \gamma$, $X e$, aequales sint, & parallela. Quoniam igitur angulus $\beta V X$, rectus est; rectus quoque erit angulus $\beta \gamma e$, ad γ , constitutus; Ac proinde quadratum diametri βe , aequale erit quadratis

lateralum $\beta \gamma$, γe , nempe Dodecaedri, & cubi.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, cum sit ut γV , ad βV , ita γZ , dupla ipsius γV , ad $\beta \gamma$, duplam ipsius βV ; Sit autem βV , minus segmentum ipsius γV , secta extrema ac media ratione: Erit & $\beta \gamma$, minus segmentum lateris cubi γZ , secti extrema ac media ratione; composita vero ex $\gamma \beta$, γZ , hoc est, recta βx , (qua dupla suis ostensa ipsius $\gamma \beta$, ideoque composita ex $\gamma \beta$, γZ , aequalis) maius segmentum. Constat autem ex constructione $\beta \gamma$, esse latus Dodecaedri, & βx , seu βz , esse

esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendas angulum pentagoni β γ α , vel β γ δ .

L A T U S cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri uidelicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

III.

N A M in prima rursus figura, latus cubi γ α , componitur ex latere Dodecaedri β γ , in ipso descripti, & ex recta composita ex γ β , γ α ; quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim γ α , cubi latus subtendas angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, ut perspicuum est ex 8. propos. huius lib. Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris γ α , secti extrema ac media ratione: Erit β γ , existens quoque maius segmentum eiusdem lateris γ α , ut iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris γ α , circumscripti.

8. terijdec.

R E C T A duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IIII.

I N prima enim figura, recta connectens puncta β , δ , in quibus constituntur duo anguli pentagonorum communi lateri β γ , oppositi, æqualis est rectæ γ α , (quod & β γ , δ α , æquales sunt, & parallela) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

33. primi.

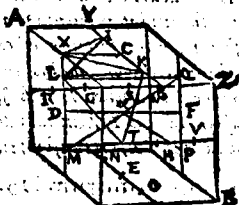
PROBL. 14. PROPOS. 14.

I N dato cubo Icosaedrum describere.

C V B V S datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit $A B$, per cuius basium centra C , D , E , F , G , H , lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur usquæ inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secantur, ita ut maiora segmenta prope centra sint, in punctis I , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , V ; quorum quodlibet cum quatuor

vicinioribus connectatur, ut L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. ut constituentur uiginti triangula, I K L, I K Q, L M R, L M T, N O M, N O P, P Q V, P Q S, R S I, R S N, T V K, T V O, I L R, I S Q, K T L, K Q V, O P V, O T M, N: P, N M R: quorum, tota duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora uero octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectæ X C, X I, X K. Quoniam igitur latera X C, C I, trianguli X C I, æqualia sunt lateribus X C, C K, trianguli X C K: & anguli contenti, recti, quod X C, parallela sit ipsi

29. primi.
4. primi.



4. primi.
47. primi.

A Y. Erunt & bases X I, X K, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoque erit ad lineas X I, X K: Ac propterea cum latera LX, X I, trianguli L X I, æqualia sint lateribus L X, X K, trianguli L X K, & anguli contenti, recti, æquales erunt bases L I, L K. Rursus quoniam quadratum rectæ L I, æquale est quadratis rectarum L X, X I: Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ I Y: quadratum uero rectæ X I, quadratis rectarum X C, C I, est æquale: Aequalis erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis rectarum X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ L I, æquale est tribus quadratis rectarum C Y, C I, I Y: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ C I. (Cum enim quadrata rectarum C Y, I Y, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ C I, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ C I, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum C Y, C I, I Y, quadrupla eiusdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergo rectæ L I, quadruplum est quoque quadrati rectæ C I: Ac propterea, cum eiusdem quadrati rectæ C I, quadruplum sit quadratum rectæ K I, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarum L I, I K, idemque & rectæ ipsæ æquales. Aequaliterum igitur est triangulum I. K. L, lateri cubi A G, sub-

4. tersijdec.

NON aliter ostendemus, reliqua undecim triangula, undecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera I K, L M, N O, P Q, R S, T V, æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis, ut in triangulo K T L, latus K L, commune est triangulo I K L; & latus K T, triangulo T V K; & latus T L, triangulo L M T; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia uiginti huiusmodi triangula Icosædri component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosædri descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

COLLIGEMUS ex hoc propositiones sequentes.

DIAMETER Icosædri potest & latus Icosædri, & cubi Icosædri ambientis.

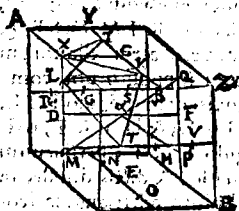
DUCTA enim recta LQ, qua lateri cubi D F, parallelæ est, & æqualis, quod & D L, F Q, parallelæ sint, & æquales; manifestum est, quadratum diametri Q M, æquale esse quadratis rectarum L M; lateris Icosædri, & L Q, lateri cubi; in quo Icosædri descriptum est, cum angulus M L Q, sit rectus, quod & L D F, rectus sit, per coroll. 1. propof. 15. lib. 13.

BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosædri coniunguntur tribus rectis æqualibus, se se in centro Icosædri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ, nimirum D F, C E, G H, cum coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, seseque per coroll. propof. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α , diuidunt. Quod qui-

LI 3 dem

dem & centrū esse Icosædri, ita ostendetur, ducta recta αP .



4. primi

Quoniam latera αF , $F Q$, trianguli $\alpha P Q$, equalia sunt lateribus αF , $F P$, trianguli $\alpha F P$, angulosque comprehendunt rectos; equales erunt recte αQ , & P . Eademque ratione equales erunt omnes recte ex α , ad angulos Icosædri procedentes. Igitur α , centrum est Icosædri.

III.

Si latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosædri in dicto cubo descripti.

15. quinti
2. quatuordec.

Cum enim $C I$, sit maius segmentum recte $C T$; sitque ut $C I$, ad $C X$, ita $K I$, dupla ipsius $C I$, ad βT , duplam ipsius $C T$, erit quoque $K I$, latus Icosædri, segmentum maius lateris cubi βT .

IIII.

ICOSÆDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

15. undec.

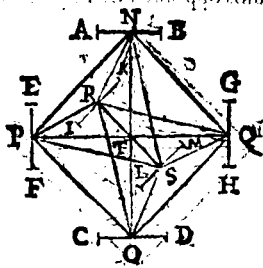
Si enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, sicut duo triangula inter se equalia, angulosque alternos habentia equales, ex 4. propos. lib. I. quæ quidem in centro conveniunt. Quare qualibet latera opposita parallela erunt; Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosædro Octædri describere.

EX P O N A N T U R dati Icosædri, cui inscribendum est Octædri, sex latera opposita, AB, CD, EF, GH, IK, LM ; quorum bifariis sectiones N, O, P, Q, R, S , iugant tres rectæ NO, PQ, RS , æquales se se in centro T , bifariam, & ad angulos

angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos præcedentis ostensa sunt, ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ ; OP, OR, OS, OQ ; PR, PS ; QR, QS , constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN ; RNP, RPO, ROQ, RON . Quia igitur latera TN, TS , trianguli TNS , æqualia sunt lateribus TN, TP , trianguli TNP , (cum sint rectarum æqualium dimidia) angulosque continent rectos, ut dictum est; Aequales erunt bases NS, NP : Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hisce duabus, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia; Ideoque Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro descriptum est, cum eius anguli resideant in bisariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.



4 primi

COROLLARIUM.

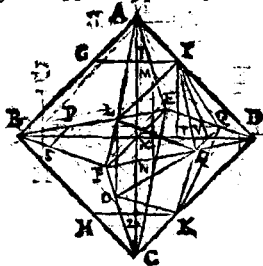
Si quævis hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in ea descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS , per T , centrum Icosaedri incidentes, diametri sunt Octaedri $NPOQRS$, ubi inscriptus. Quare T , centrum Icosaedri, ubi se intersecant, centrum quoque est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.

DATUM Octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit $ABCDEF$. Cum a quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur a singulis bina non proxima, sed sibi e regione respondentia, hoc est, quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt BA, BC ; DA, DC , iuxta angulos oppositos B, D , quadrati $ABCD$; AF, AE ; CE, CF , iuxta angulos oppositos A, C , quadrati $AECF$: (Nam la-

tera A B, A D; C B, C D, quadrati A B C D, iuxta ossem angulorum A, C, iam sumpta fuere,) E B, E D; F D, F B, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati E B, E D; (Nam latera E A, E C; F C, F A, quadrati A E, C F, iuxta eodẽm angulos B, F, iam accepta sunt,) quæ omniũ secantur extrema ac media ratione, hac lege, ut maiora segmenta sint prope angulos a quibus egrediuntur, in duosque punctus G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a singulis ad quicunque proximas sectiones quinque linear rectæ ducantur, ut ex R, rectæ R Q, R I, R L, R O, R K. Et ex I, rectæ I Q, I R, I M, I L, I G, & sic de cæteris, quæ maius non omnes ductæ sunt in figurâ, ad vitandam linearum confusionem: Post hæc, ductis tribus Octaedri diametris A C, B D, E F, se se in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14 lib. 1; quarum A C, B D, secant rectas G I, R Q, in Y, & V; connectaturque recta I V, agaturque I T, parallela ipsi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I, æqualia sunt lateribus D R, D I; (Sunt enim D Q, D R; minora segmenta rectarum æqualium D E, D F,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri A D E, A D F; Erunt bases I Q, I R, æquales. Deinde cum sit, ut B G, ad G A, ita D I, ad I A; erit G I, rectæ B D, parallela. Eademque ratione Q R, ipsi E F, parallela; Ac prout ut D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A, secata erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est ut A X, ad X D, ita A Y, ad Y I, (quod triangulum A Y I, simile sit triangulo A X D, per coroll. propos. lib. 6.) Est autem A X, ipsi X D, æqualis; Erit & A Y, ipsi Y I, æqualis. Quare Y I, minus segmentum est rectæ X A. Non aliter ostendemus A Y, ipsi Y G, esse æqualem; ideoque G I, rectam bifariam in Y; similiterque Q R, in V, secari. Cum vero latera A G, A I, trianguli A G I, æqualia sint lateribus D Q, D R, trianguli D Q R, (nimirum minora segmenta minori-



mas sectiones quinque linear rectæ ducantur, ut ex R, rectæ R Q, R I, R L, R O, R K. Et ex I, rectæ I Q, I R, I M, I L, I G, & sic de cæteris, quæ maius non omnes ductæ sunt in figurâ, ad vitandam linearum confusionem: Post hæc, ductis tribus Octaedri diametris A C, B D, E F, se se in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14 lib. 1; quarum A C, B D, secant rectas G I, R Q, in Y, & V; connectaturque recta I V, agaturque I T, parallela ipsi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I, æqualia sunt lateribus D R, D I; (Sunt enim D Q, D R; minora segmenta rectarum æqualium D E, D F,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri A D E, A D F; Erunt bases I Q, I R, æquales. Deinde cum sit, ut B G, ad G A, ita D I, ad I A; erit G I, rectæ B D, parallela. Eademque ratione Q R, ipsi E F, parallela; Ac prout ut D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A, secata erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est ut A X, ad X D, ita A Y, ad Y I, (quod triangulum A Y I, simile sit triangulo A X D, per coroll. propos. lib. 6.) Est autem A X, ipsi X D, æqualis; Erit & A Y, ipsi Y I, æqualis. Quare Y I, minus segmentum est rectæ X A. Non aliter ostendemus A Y, ipsi Y G, esse æqualem; ideoque G I, rectam bifariam in Y; similiterque Q R, in V, secari. Cum vero latera A G, A I, trianguli A G I, æqualia sint lateribus D Q, D R, trianguli D Q R, (nimirum minora segmenta minori-

4. primi.
2. quartide.
2. sexti.
4. sexti.

bus

bus segmentis æqualium rectarum) angulosque comprehen-
dunt rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF. Acqua-
les erunt bases GI, QR. Eadem ratione his æquales osten-
dentur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum subtendunt
reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECE, angulos, in
singulis uidelicet quadratis binos oppositos, complectun-
turque duo segmenta laterum minora. Deinde quia YI,
minus segmentum ipsius XA, ostensum, maius est segmen-
tum maioris segmenti XY, diuisi extrema ac media ratione,
ut demonstrauius ad propof. 3. lib. 13. Est autem XY, re-
cta XV, æqualis, (cum ambæ sint maiora segmenta æqualiū
rectarum XA, XD.) & YI, rectæ XT, erit XT, maius
segmentum ipsius XV, & ideo T V, segmentum minus
eiusdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc
est, ipsius IT, (cum & recta IT, æqualis sit ipsi XY) & TV,
minoris segmenti, tripla sunt quadrati rectæ XT, maioris
segmenti. Atque adeo quadratum rectæ IV, æquale exi-
stens quadrati rectarum IT, TV, triplum est eiusdem qua-
drati rectæ XT, hoc est, rectæ RV, quæ æqualis est ipsi
XT, seu ipsi YI, ex demonstratis, cum RV, YI, dimidia
sint æqualium rectarum RQ, GI. Adde igitur quadra-
to rectæ RV, ipsi quadrato rectæ TV, erunt quadrata recta-
rum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV. At quadra-
tis rectarum IV, VR, æquale est quadratum rectæ IR, quod
anguli IVR, IVQ, comprehensum lateribus æqualibus
IV, VR; IV, VQ, & subtensi basibus æqualibus IR, IQ,
æquales sint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR,
quadruplum est quadrati rectæ VR; Ac propterea cū eius-
dem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque sit, per scho-
lium propof. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR; Æqualia erunt
quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipsæ æqua-
les: Erat autem IQ, ipsi IR, æqualis. Triangulum igitur
equilaterum est IQR. Non secus demonstrabimus, equi-
latera esse triangula similem situm cum IQR, habentia,
nempe KQR; GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OIK;
RLO, SLO; PMN, QMN; atq; adeo triangulo IQR,
equalia, cum latera omnium sint equalia inter se. Cum enim
in quolibet horum triangulorum unum latus subtendat an-
gulum rectum quadrati comprehensum duobus segmentis
minoribus

4. primi.

34. primi.

34. primi.

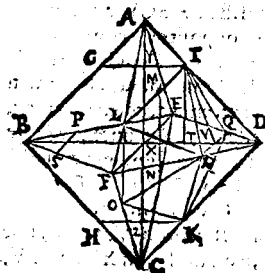
4. terdec.

47. primi.

47. primi.

8. primi.

minoribus laterū Octaedri; Duo uero reliqua subtendunt duos æquales angulos triangulorum æquilateralum contentos singulos duobus segmentis laterū Octaedri, maiore & minore: Erunt latera unius trianguli lateribus aliorū æqua-



lin' ac propterea & i, fa-
triangula æqualia, per co-
roll. propof. 8. lib. 1. Vt in
triangulis IQR, GIL, la-
tera KQ, GI, subtenden-
tia angulos rectos QDR,
GAI, quadratorū DEBF,
ABCD, comprehensos mi-
noribus segmentis DQ,
DR; AG, AI, æqualia ut.
Eodem modo latera IQ,

IL, æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales IDQ;
IAL, triangulorum æquilateralum ADE, ADF, quorum
ille continetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore
& minore, hic uero segmentis AL, AI, maiore & minore
quoque. Nonsecus latera IR, GL, æqualia erunt. Æqualia
igitur sunt triangula IQR, GIL, per coroll. propof. 8. lib. 1.
Atqui IQR, ostensum est esse æquilaterum; Eigo & GIL,
æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda.
Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex
angulis Octaedri, bina uidelicet singulis. Ex his consequitur
reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, uide-
licet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ,
in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD;
ILR, in AFD, æquilatera quoque esse, & præd. æqua-
lia, cum horum latera cum illorū lateribus communia sint.
Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis se-
ctionibus laterum Octaedri conueniunt ad constitutionem
anguli solidi, (ut uides in quinque RQI, RIL, RLO,
ROK, RKQ, solidum argulum R, componentibus.)
Icosædruum componunt Octaedro inscriptum, cum Icosæ-
dri duodecim anguli duodecim si & ones laterum
Octaedri possideant. In dato itaque Octæ-
dro Icosædruum descripsimus. Quod
faciendum erat.

COROL.

COROLLARIUM. I.

COLLIGITUR ex demonstratis, si duo latera trianguli equilateri secantur extremitatibus ac media ratione, ita ut unus maior segmentum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cum enim in triangulo equilatero ADE , maius segmentum lateris AD , sit DI , & BQ ; minus lateris DE ; Sit autem recta IQ , ostensa aequalis rectae GI , quae duplum potest minoris segmenti AI , cum quadratum rectae GI , aequale sit duobus quadratis aequalibus rectarum aqualium AG , AI . Perspicuum est, & rectam IQ duplum posse eiusdem segmenti minoris AI .

47. primi.

COROLLARIUM. II.

PROBATUR, cum octo Icosædri bases collocatae sint in octo basibus Octaedri, adesse esse octiduum basium Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namque Octaedri superioris triangulum ABD , in quo collocatum est triangulum Icosaedri IMQ , sitque C centrum trianguli ABD , ex quo rectae educantur CA , CB , CD , & CE , CM , CQ . Quoniam igitur latera CA , AM , trianguli CAM , aequalia sunt lateribus CB , BQ , trianguli CEQ , (quod hæc latera sunt ex centro, & maiora segmenta aequalium rectarum) angulosque comprehendunt aequales, nempe dimidios angulorum trianguli equilateri, at in scholis prop. 1. lib. 1. ostendimus, sunt bases CM , CQ , aequales. Non secus demonstrabimus CI , aequalem esse lineis CM , CQ . Quare C centrum erit trianguli IMQ .



COROLLARIUM. III.

NON difficile est colligere ex dictis, idem centrum esse Octaedri, acque subiscripti Icosaedri. Ductum enit ex X , centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG , XO , ad angulos G , & O ; cum latera XA , AG , trianguli XAG , aequalia sint lateribus XF , FO , trianguli XFO ; (nam XA , XF semidiametri sunt Octaedri, & AG , FO segmenta minorum laterum aequalium Octaedri sectionum extrema ac media ratione); angulosque comprehendantur aequales, semirectus videlicet; (cum AC , CF diametri sint quadratorum $ABCD$, $EACF$; & proinde, per demonstrata in scholis prop. 1. lib. 1. angulos quadratorum bisectum sitent.) Aequales erunt & bases XG , XO . Eodemque argumentis ostenduntur omnes aliae rectae ex X , ductae ad angulos Icosaedri aequales esse. Igitur X centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

48. primi.

PROBL.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

16. quinside
5 quinside.

INSCRIBATUR dato Octaedro Icosaedrum; & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centrīs bāsum Icosaedri, quā, u. octo concentrici sunt bāsis Octaedri, ex coroll. p. opof. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulo, in eisdem centrīs octo bāsum Octaedri, reliquos autē duodecim in centrīs duodecim bāsum Icosaedri, quarum hinc singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicitur, quamquam non proprie, ut ex definitione 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

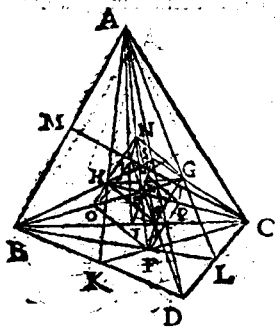
IN data Pyramide cubum describere.

15. quarti
decimi.

DETER Pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis recte educantur AEF, BEG, CEH, DEI, quae cadunt in centra bāsum oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hanc centra porro ex angulis A, B, C, recte ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFZ, CGS, secantes bases oppositas B D, C D, A B, A D, B C, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propof. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque recte ex solidis angulis per centrum E, demissae AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centrīs bāsum rectis lineis coniungantur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H.

Dico

Dico solidum N F, contentum quadrilateris N O, N P, N Q, F G, F H, F I, cubum esse. Cum enim latera A F, F K, trianguli A F K, equalia sint lateribus A F, F L, trianguli A F L, (quod F K, F L, cum perpendicularares sint ad B D, C D, ex centro F ducit, ostendat & quales distantias rectarum equalium B D, C D, a centro F) angulo que contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. Aequales erunt & bases A K, A L & anguli K A F, L A F. Rursus quia latera A N, A H, trianguli A N H, equalia sunt lateribus A N, A G, trianguli A N G, (sunt enim A H, A G, semidiametri triangulorum equilateralium equalium A B D, A C D,) angulos item comprehendunt equalis, ut demonstrauimus; Aequales erunt bases N H, N G. Haud secus ostendetur quales recte Q G, Q H, si recte ducantur D G, D H, nec non & relique, cum omnibus subtrahantur quales angulos equalibus lateribus comprehensos; ut perspicuum est. Si enim recta ducatur F T, cum latera A F, F T, equalia sint lateribus A F, F K. (Sunt namque F T, F K, distantie rectarum equalium B C, B D, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli T A F, K A F. Ac proinde cum latera A N, A I, equalia sint lateribus A N, A H; (Sunt enim A I, A H, semidiametri triangulorum equilateralium equalium A B C, A B D:) angulosque contineant equalis: Aequales erunt bases N I, N H, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, equilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangula, ut tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum N F.



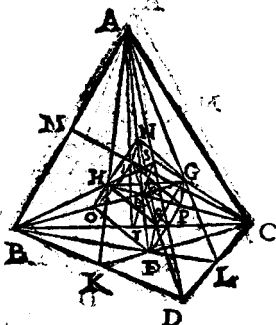
4. primi

4. primi.

4. primi.

ASSUMATUR quadrilaterum N Q, ductis rectis G H, N Q. Quoniam in pyramide latera B C, A D, opposita sunt, hoc est, non coeunt in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter Octaedri in pyramide descripti, ut constat ex figura propof. 2. huius

huius lib. Nam punctum S, huius figuræ, responderi puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint latera opposita, siue non cocuntia B C, A D. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis, & Octaedri in ipsa descripti, ut



mox demonstrabimus, ut quod sibi ST, per E, centrum Pyramidis, æqualesque erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde, quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, p. scholiū, p. pos. 12. lib. 13. erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSG, proportionaliter secantur, atque idcirco HG, parallela est lateri BC,

secatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC,) proportionaliter; Ideoque & SR, tertiæ pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rursus quia DI, perpendicularis est ad triangulum A B C; erit EI, tertiæ pars semidiametri DE, ex coroll. 2. p. pos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponitur DE, talium 1. erit EI, ac proinde raliū 4, recta DI, ideoque eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, raliū partium erit 1, atque idcirco EQ, tertiæ pars erit ipsius DE. Eadem, ratione EN, tertiæ pars erit ipsius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter secantur, recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidē pars est trianguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, sit tertiæ pars ipsius DE, tertiæ pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiusdem SE. Quoniam igitur utraque HG, NQ, ex SE, duas tertiæ partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur SE, a rectis HG, NQ; Ac idcirco & ipsæ HG, NQ, in eodem se se puncto interfecabunt. Quare in eodem sunt plano, proptereaque & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem

17. quarti-
decimi.

2. sexti.

15. quarti-
decimi.

2. sexti.

2. undec.

cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ . Eademque est ratio de ceteris quinque. Quod autem de rectangulum, nunc demonstramus.

Cum ostensa sit HG , ipsi BC , parallela, atque adeo triangulum SHG , simile triangulo $SB C$, ex coroll. propof. 4. lib. 6. Erit ut SH , ad HG , ita SB , ad BC ; & permutando, ut SH , ad SB , ita HG , ad BC : Est autem SH , tertia pars ipsius SB : Igitur & HG , tertia pars erit lateris BC . Haud secus ostendemus NQ , tertiam esse partem lateris AD . Cum ergo latera BC , AD , sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG , NQ , æquales. Ac proinde cum subendantur æqualibus lateribus HN , GN ; GQ , HQ ; NG , QG ; NH , QH ; QH , NQ ; Acquales erunt quatuor anguli HNG , NGQ , GQH , QHN . Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis, æquales, ut ostendimus ad propof. 32 lib. 1. recti erunt; ideoque quadratum erit NQ . Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent: qui ideo Pyramidi dicatur infcriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F , G , H , I , in centris quatuor basium pyramidis, quatuor uero reliqui N , Q , P , Q , in bifarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum residant, ut constat. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

4. sexti.

8. primi.

COROLLARIUM. I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi NF , OG , PH , QI , cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum; per H , centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIUM. II.

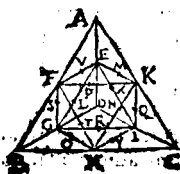
INFERTUR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim BR , ex E , centro cubi, in R , centrum basis $GNHQ$, ducta dimidium sit lateris cubi, ut constat; Recta RS , dupla eius ER ,

trum pyramidis, & octaedri in ea descripti.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATAE Pyramidi ABCD, inscribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secantur extrema ac media ratione, hac lege, ut bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum octaedri cadentia, ut in propol. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, ut M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrum in dicto octaedro, ut constat



ex propol. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim praefatis sectionibus duodecim laterum octaedri. Cum ergo haec ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK, KE; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per

defn. 3. lib. 11. cuius quidem quatuor bases

MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor

basibus Pyramidis existunt, ut con-

stat. In data igitur Pyramide,

Icosaedrum descripsi

mus. Quod e-

rat facien-

dum.

2. quintide.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum describere.

19. quinside.
5. quinside.

8. quinside.

18. quinside.

Pyramidi datæ inscribatur Icosaedrum, & in hoc Dodecaedrum habens uiginti suos angulos in centis uiginti basium Icosaedri; Factumque erit, quod iuberur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, ut in præcedenti propos. diximus; consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, ut constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bisarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bisarijs sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicitur in pyramide proposita, etiamsi non proprie. Quamobrem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

13.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato solido regulari sphaeram describere.

Ex centro sphaeræ datum solidum completentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulo-
rum

tum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter a centro distent, ex lemma 2. eiusdem propos. Quapropter sphaera, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa singulas bases in eorum centris contingat.

S C H O L I O N.

ITAQUE, cum quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, ut sint in uniuersum uiginti inscriptiones; unum dumtaxat Dodæcaedrum improprie describitur in cubo, octaedro, atque Pyramide, ut perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter unus tantummodo cubus, non proprie in Pyramide describitur, ut ex propos. 18. huius lib. est manifestum. Nam, ut proprie solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constitui uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, ut defin. 31. lib. 11. exposuimus: Quæ quidem conditio Dodæcaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.

CÆTERVM inter omnia quinque solida regularia, unum octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta. In octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde Icosaedro imponitur Dodæcaedrum, quod eidem octaedro inscriptum est, ut constet ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodæcaedro describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodæcaedri conuenientes, contra basium octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est. Deniq; in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicitur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

N E Q V E uero prætereundum est, Dodæcaedrum, sibiq;

16. quintide.

5. quintide.

3. quintide.

1. quintide.

1. quintide. inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphaera comprehendit. Cum enim quatuor anguli Pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquet, constare, sphaeram Dodecaedro circumscriptionem completi quoque cubum atque Pyramidem, cum sphaera illius superficies per horum solidorum angulos incedat.

P A R I ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centrīs conspiciuntur, ut demonstratum est: In centrīs quidem basium Icosaedri, propos. 5. 11. & 12. In centrīs uero basium octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centrīs denique basium Pyramidis, propos. 10. & 18. huius libi.

K. I G I N T I porro prioribus habuit lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesque quinque solidorum regularium, unus in alio, quosque excogitari possunt; absoluiimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In octaedro uero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo denique, Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum, propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At uero posteriori unica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphaera depingatur, ducimus.

E L E M E N T I D E C I M I Q V I N T I F I N I S.



E L E M E N T I

ELEMENTVM

DECIMVMSEXTVM,

Quo uaria solidorum regularium sibi mutuo inscri-
ptorum, & laterum eorundem comparationes
explicantur, a Francisco Flussate Candalla
adiectum, & de quinq; corporibus;

LIBER TERTIVS.



PER AD MODVM in lib. 14. tra-
dita sunt comparationes quatuor plurima
figurarum regularium, & laterum ex-
rundem in eadem sphaera descriptarum,
quarum quidem descriptione in lib. 13.
exposuit Euclides; ita etiam Franciscus
Flussas Candalla in hoc lib. 16. inter se
comparat easdem figuras regulares sibi

mutuo inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem
inscriptionem in precedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam
connexionem habet hic liber 16. cum precedenti 15. quam quar-
tus decimus cum tertio decimo habuit; ut imperfecta quodam-
modo uideri possit tractatio hac quinq; corporum regularium,
si liber hic decimus sextus non adiungatur.

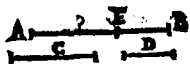
THEOR. I. PROPOS. I.

SI in Dodecaedro cubus describatur,
& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit
proportio Dodecaedri exterioris ad Do-

M m 3 decaedrum

decaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.

LEITON. cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius segmen-



tum ad EB, minus. Cum enim, ut in scholio ultimæ propos. lib. 15. decimus, Dodecaedrum, cubusque in illo descriptus, eadem comprehendantur sphaera; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphaera cum cubo descripti, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphaera, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti, erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit ut C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, ut AE, maius segmentum ad EB, minus: Atque Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris segmenti AE, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo

gulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in
latus oppositum demissa, secatur a recta illâ
angulum subtendente, extrema ac media ra-
tione.

In pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex
angulo A, ad latus oppositum CD, perpendicularis demit-
tatur AF, Dico AF, a recta BE, subtendente angulum A, se-
cari in G, extrema ac media ratione. Du-
cta enim recta AD, que secet BE, in H;
quoniam BE, recta lateri CD, per coroll.
propos. 8. lib. 15. est parallela; secabun-
tur rectæ AF, AD, proportionaliter:
Atqui AD, in H, secta est extrema ac me-
dia ratione, estque maius segmentum DH.
Igitur & AF, in G, similiter erit secta. Quocirca linea per-
pendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demon-
strandum.

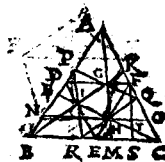


2. sexti.
3. tertijdec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducan-
tur rectæ opposita latera secantes extrema
ac media ratione; ita ut prope quemvis an-
gulum sit maius segmentum unius lateris,
& minus alterius: Hæ sectionibus suis in me-
dio producent basin Icosædri in dicta pyra-
mide descripti, inscriptam quidem alij trian-
gulo æquilatero, cuius anguli latera trian-
guli pyramidis secant extrema ac media ra-
tione, & latera ipsa bifariam secantur ab an-
gulis basis Icosædri.

TRIANGVLVM pyramidis sit ABC , cuius latera
secentur bisariam in D, E, F , iunctis rectis DE, EF, FD , qui-
bus rursus sectis extrema ac media ratione in G, H, I , iun-
gantur rectæ GH, HI, IG , conſtituentes GHI , triangulum
Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, ut conſtat ex propoſ.
10. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli ABC , extrema
ac media ratione in K, L, M , iunctis rectis BK, CL, AM . Di-
co has rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſae-
dri GHI , hoc eſt, rectam BK tranſire per puncta G, I , &
rectam CL per puncta H, I , & rectam AM , per puncta $G,$



H . Ducta enim per H , recta NO ,
ipſi BC , parallela; erit triangulum
 FHO , triangulo FEC , ſimile, ex co-
roll. propoſ. 4. lib 6. Ideoque & æqui-
laterum, cum & FEC , æquilaterum
ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo
 ABC , per idem coroll. Quare HO ,
recta æqualis eſt rectæ FH , maiori
ſegmento rectæ FE , ſeu DF , ipſi æqualis: (Eſt enim &
 DEF , triangulum æquilaterum, cum eius latera ſubrendāt
angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimi-
dis ſcilicet æqualium laterum eiſdem trianguli comprehen-
ſos; ideoque equalia ſint.) Eſt autem & NH , æqualis toti
 DF , in parallelogrammo DH , propterea quod FH, DE , pa-
rallelæ ſint rectis AB, BC , ſeu NO . Igitur recta NO , como-
ſita ex NH , tota, & HO , maiori ſegmento, ſecta erit in H ,
extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ
 BC, NO, DE , ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G , nimirum extre-
ma ac media ratione; Recta autem AM , ex ijs, quæ demon-
ſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eandem ſimiliter; liqui-
do conſtat, ipſam AM , tranſire per puncta G, H . Haud ſe-
cus oſtendemus BK , per puncta G, I ; & CL , per puncta $H,$
 I , tranſire, ſi per $G, & I$, rectæ ducantur parallelæ lateribus
 AC, AB ; Atque ideo rectæ BK, CL, AM , ſuis ſectioni-
bus producent triangulum Icoſaedri GHI .

AGATVR iam per G , recta PQ , rectæ CL , parallela.
Quoniā igit AF , æqualis eſt rectæ DF , ſeu rectæ FE , cuius
maius ſegmentū fuit FH , hoc eſt, FO , illi æqualis; Erit quoque
 FO , maius ſegmentū rectæ AF ; ac proinde tota AO , ſecta in
 F , extre-

4. primi.
34. primi.
2. ſexti.
5. ſerijdec.

5. ſerijdec.

F, extrema ac media ratione: Est autem ut AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO, & ut AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectę AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntque maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectę ergo AQ, AL, segmenta maiora secantur æqualiū AC, AB, æquales erunt. Quia uero est ut AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum; Et est AQ, recta rectę AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectę AP. Quare & recta AB, minus segmentum erit lateris AB, maiusque reliqua AP, ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quę per I, ducitur parallela rectę AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectę BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione, atque adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam uero singula latera trianguli PQR, cum subdantur æqualia e- quales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, æqualia inter se sunt; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bisariam secantur ab angulis trianguli Icosædri GHI: (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL, secabuntur PQ, LC, in eadem rationes, ex ijs, quę ad propos. 4. lib. 6. demonstrauimus: Diuiditur autem CL, bisariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela est lateri AL, secans proportiona liter latera CA, CL. Agitur & PQ, bisariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP.) Ac propterea triangulum Icosædri GHI, inscriptum est triangulo æquilatroy PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bisariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosædri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Ex his facile colligi potest, latus Icosædri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectę diuisę extrema ac media ratione, quę ab uno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque

2. sexti.

2. quarside.

4. primi.

2. sexti.

2. sexti.

34. primi.



quoque ac media ratione. Cum enim, ut constat. ex propof. 16. lib. 15. GHI , triangulum fit Icofaedri in octaedro, cuius bafis $D\epsilon F$, defcripti; ducatur ex angulo F , triangu-
li FEC , quod triangulo DEF , est æquale,
recta FS , parallela rectæ AM , fecans $E C$,
 HO , in S , & T . Cum igitur MC , bifariam
fecetur in S , ob triangulum AMC ; fitque
 MS , ipsi GF , æqualis, ob parallelogram-
mum GS ; Erit & SC , æqualis eidem GF ,
minori segmento rectæ DF ; Ac propterea
cum totæ DF , EC , æquales fint, erit quoque
reliqua ES , reliquæ DG , maiori segmen-

2. sexti.

34. primi.

to æqualis: Ideoque EC , in S , secta erit extrema ac media ratione.
Deinde quia FE , FS , similiter secantur; secatur autem EB , extrema
ac media ratione; secabitur & FS , in T , extrema ac media ratio-
ne, maiusque segmentum erit FT , recta æqualis exiftens lateri
Icofaedri GH , ob parallelogrammum GT . Igitur FT , latus Icofae-
dri octaedro infcripti, maius est segmentum rectæ FS , quæ diuidit
 EC , latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F , demif-
fa. Quod est propofitum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyrami-
dis extrema ac media ratione secti, duplum
est potentia lateris Icofaedri in ea pyrami-
de defcripti.

RASIS Pyramidis fit ABC , cuius latera extrema ac me-
dia ratione fecetur in K, L, M , & ductis rectis BK, CL, AM ,



producentibus GHI , basim Icofaedri in il-
la pyramide defcripti, infcriptam triangu-
lo æquilatero PQR , cuius anguli latera
trianguli ABC , fecent extrema ac media
ratione in P, Q, R , & ipsa latera PQ, QR ,

RP , bifariam diuidantur in G, H, I , ut in propof. præceden-
ti demonstratū est. Dico AP , minus segmentum lateris Py-
ramidis duplum esse potētia lateris Icofaedri HI . Cū. n. PQ ,
dupla fit potentia minoris segmenti AP , ex coroll. 1. propof.
16. lib. 15. quadrupla uero potentia rectæ HI , ex scholio pro-
pof. 4. lib. 2. qd̄ PQ , recta dupla fit rectæ PG , hoc est, sibi æ-
qualis HI , ob parallelogrammū PH ; Erit PQ , potentia 4. &

AP .

AP, & HI, 1. Quāobrē AP, dupla erit potētia rectæ HI.
Minus ergo segmentū lateris, &c. Quod erat demonstrādū.

COROLLARIUM.

Si quivtr ex his latus Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. Cum enim diameter ſphære potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis; ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rōnale; cū diametro potētia ſit cōmēſurabile. Quare minus ſegmentū lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti Apotome erit; Atq; adeo cū minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit cōmēſurabile; (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri.) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ. 164. hb. 10. Apotome.

13. ſerviſſe.

6. decimi.

6. ſerviſſe.

6. decimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATUS cubi potētia dimidiū eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus uero Pyramidis duplū eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: latus deniq; cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri.

Cum enim latus Pyramidis in cubo deſcriptę diameter ſit baſis cubi, ut cōſtat ex propoſ. 1. lib. 15. Sit autē quadratū huius diametri duplū baſis cubi, hoc eſt, quadrati lateris cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Maniſeſtum eſt, latus cubi dimidiū eſſe potētia lateris Pyramidis in cubo illo deſcriptæ.

Rursus, quia rectæ coniungentes biſarias ſectiones laterum Pyramidis conſtituunt octaedrum in pyramide deſcriptum, ut liquet ex propoſ. 2. lib. 15. Eſt autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis biſarias eius ſectiones, cum ea recta æqualis ſit dimidio lateris trianguli, ſut cōſtat ex 4. propoſ. lib. 4. Perſpicuum eſt, latus pyramidis duplum eſſe longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti.

24. ſerviſſe.

Denique quia diameter ſphære, ſeu octaedri potentia eſt duplū lateris octaedri; Eſt autem latus cubi æquale diametro octaedri ſibi inſcripti, cū diameter octaedri cōiungat cētra baſiū cubi oppoſitarū, ut in coroll. propoſ. 3. lib. 15. diximus: patet, lat⁹ cubi potētia eſſe duplū lateris octaedri in

code.

eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidia est la-
teris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATUS Dodecaedri maius segmen-
tum est rectæ, quæ potentia est dimidia la-
teris Pyramidis sibi inscriptæ.

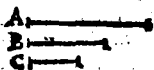
CUM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoq;
in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, ut docuimus pro-
pos. 10. lib. 13. Sit autem latus dodecaedri maius segmen-
tum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo
describitur, ex ista denique latus cubi dimidia potentia la-
teris Pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Do-
decaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimi-
dia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demon-
strandum.

5. sextidec.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum,
& Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium
proportionale erit inter latus cubi, & Do-
decaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B,
latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico
B, latus Icosaedri medio loco esse pro-
portionale inter A, latus cubi, & C,
latus Dodecaedri. Cum enim ex ijs,
quæ in scholio propos. 14. lib. 13. de-
monstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit la-
teris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scho-
lio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum
sit



fit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, ut B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosædrium, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

Cum enim per ea, quæ propos. 18. lib. 1. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti; (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramidis BC,) Et quadrata proportionē habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti; cum noncupla proportio sit triplæ duplicata, ut in his numeris 1. 3. 9. appareat. Quare, cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, ut si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi, quadratum eiusdem basis diametri sit 2. & quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti: Quod erat ostendendum.

10. sexti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

Cum enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inscribitur, ut docuimus in scholio propos. ultimæ lib. 13. Erit latus Pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi & Dodecaedro inscripti:

8. sextidec.

inscripti : Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentum est, ex coroll. 1. propof. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icofaedrum describatur: Erit latus Icofaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuifi.

47. *primi.* VT enim constat ex propof. 16. lib. 15. recta coniungens duas sectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta, (quauis fuit ibi recta GI, subtendens angulum rectum GAI, minoribus segmentis AG, AI, comprehensum;) latus est Icofaedri in octaedro descripti. Quare, cum hoc ipsum latus Icofaedri possit duo illa minora segmenta æqualia; duplum poterit unius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icofaedrum describitur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT una sex pyramidum octaedri ABCDE, cuius basis quadratum ABCD, triangula uero ad E, uerticem, ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quas rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod si coniungantur rectæ FG,

FG, GH, HI, IF; erit FGH I, quadratum cubi in octaedro descripti, ut demonſtrauimus propoſ. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, ſeſquialtera eſt rectæ EH, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: Atqui. ut EO, ad EH, ita eſt EB, ad EL. Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit EL, ſeu LM, ſibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum KLMN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, uidelicet FGH I, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum ſit quadrati GI, ſibi inſcripti, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Eſt enim LN, quadratum ex diametro quadrati GI, deſcriptum; cum GI, diameter (ſi ducatur) æqualis ſit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum, &c. Quod erat demonſtrandum.



2. ſexti.

13. primi.

COROLLARIUM.

QVIA uero latus cubi extrema ac media ratione diuiſum eſt ſic maius ſegmentum latus Dodecaedri, cui inſcribitur, per coroll. 1. propoſ. 13. lib. 15. Inſcribunturque Dodecaedrum, & cubus ſibi inſcriptus, eidem octaedro, ut docuimus in ſcholio propoſ. ultimæ lib. 15. Perſpicuum ſit, octaedri latus eſſe potentia quadruplum ſeſquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti. Eſt. n. eiſmodi recta latus cubi eidem octaedro inſcripti, cuius quadruplum ſeſquialterum potentia eſſe oſtendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſeſtæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVO.

14. versijde.

Q U A N T I A M Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres recte lateri cubi æquales, ut constat ex propof. 14. lib. 15. eiusque scholio. Et in bifarijs sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri resident sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propof. 15. eiusdem lib. 15. Fit, diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cū per ea, quæ ad propof. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti: Atqui diameter sphaeræ, seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

L A T V S cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione. Latus uero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

O S T E N S I M est in scholio propof. 13. lib. 15. Minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, uel maioris segmenti ad minus, (quod tota

tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continuæ proportionales:) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus Icosædri, in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

P R A E T E R E A, cum constet ex coroll. 1. propof. 17. lib. 12. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur, manifestum est esse ut latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, ut tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, ut maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Oâædri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

S I T una sex pyramidum Oâædri $ABCDE$, cuius basis quadratum $ABCD$, triangula autem ad uerticem E , sint ABE , EBC , CED , DEA , (siveque horum triangulorum centra F , G , H , I , quæ rectis iungantur FG , GH , HI , IF , quadratum cubi in Oâædro descripti constituentibus, ut docuimus in propof. 4. lib. 5. Quoniam uero Pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Oâædro, cui cubus imponitur, ut in scholio propof. ultimæ lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, ut constat ex propof. 1. lib. 15, Erit ducta diameter GL latus Pyramidis in Oâædro dicto descriptæ. Dico igitur latus oâædri BC , sesquialterum esse lateris Pyramidis GL . Ductis enim rectis EGK , EIL , diuidentibus latera AB , CD , bisariam in K , L , ex scholio propof. 12. lib. 13. Ipsæque EK , EL , sesquialteræ erunt rectarum EG , EL , per coroll. propof. 12.



2. sexti.

lib. 14. Ac propterea GI , parallela erit rectæ KL , auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum EGI , simile triangulo EKL . Quare erit, ut EK , ad KL , ita EG , ad GI ; & permu-
tando, ut EK , ad EG , ita KL , ad GI ; ideoque cum EK , sesquialtera sit ip-
sius EG , erit & KL , sesquialtera ipsius GI . Cum ergo BC , æqualis sit ipsi
 KL , quod & BK , CL , æquales sint, & parallelæ; Erit BC , latus octaedri
sesquialterum lateris Pyramidis GI , sibi inscriptæ. Quod
erat demonstrandum.

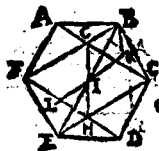
33. primi



THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri au-
feratur triplum quadrati lateris cubi in eo
descripti; relinquitur quadratum sesquiter-
tium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum $ABCDEFGH$, cuius diameter
 BE , & centrum I ; triangula utro opposita & parallela, per
coroll. 4. propos. 14. lib. 13. BCG , EFH , quorum centra



KL . Ducatur ex centro I , ad
planū BCG , perpendicularis
 IK , cadens. ex coroll. lem-
matis 1. propos. 10. lib. 14. in
cētrū K . Producta igitur KI ,
perpendicularis quoque erit
ad planū EFH , parallelum
plano BCG , per scholiū pro-
pos. 14. lib. 11. cadetque

idcirco in centrum L , per coroll. præfati lemmatis. Quā ob-
rem, cum cubus in Icosaedro descriptus statuatur suos angu-
los in centris basium Icosaedri, ut constat ex propos. 11. lib.
13. atque adeo angulos oppositos in centris basium opposi-
tarum; Erit KL , diameter cubi in Icosaedro descripti, tran-
siens per I , centrum Icosaedri. Cum ergo eadē ratione reli-
qu-

qu-

quæ diametri cubi per idem centrū I, tranſeant, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque I K, I L, ſemidiametri equales: Coniuncta autem K B, ſemidiametro circuli triangulum B C G, circunſcribentis, erit angulus B K I, reſtus, ex defn. 3. lib. 1. e. Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum B K, K I. Igitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri B I, ut in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum B C G, circunſcribentis, & K L. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris B K, K I, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi K L, (quod triplum eſt quadrati lateris cubi,) ex quadrato diametri Icoſaedri B E, remanet quadratum diametri circuli triangulum B C G, circunſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitercium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum B C G, circulus, extenſaque B K, uſque ad M, quæ ſecet C G, in N, ducatur quoque recta C M. Quoniam igitur B N, per centrū K, ducta perpendicularis eſt ad C G, per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. erit recta B C, potentia ſeſquitercia rectæ B N; Vt autem B C, ad B N, ita eſt B M, ad B C, quod B C, ſit media proportionalis inter B M, & B N, ex coroll. propoſ. 9. lib. 6. cum angulus B C M, reſtus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur B M, potentia quoque ſeſquitercia eſt rectæ B C; Ac propterea quadratum diametri B M, ſeſquitercium eſt quadrati lateris B C. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

47. primi.

15. ſexti dec.

12. quarti decimi.

1. tercij.

COROLLARIUM.

Hæc fit diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri B E, æquale eſſe quadratis diametri cubi K L, & diametri circuli triangulum B C G, circunſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATUS Dodecaedri minus segmen-
tum est rectæ linæ extrema ac media ratio-
ne diuisæ, quæ duplum potest lateris Octæ-
dri in eo descripti.

11. versij dec.

QUONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descri-
pti duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias sectio-
nes laterum oppositorum Dodecaedri, ut manifestum est
ex propof. 9. lib. 13. Est autem rectæ dictas sectiones con-
iungentis diuisæ. extrema ac media ratione minus segmen-
tum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propof. 17. lib. 13. Liquet,
latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema
ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris octaedri
in eo descripti, cum huiusmodi recta coniungat bifarias se-
ctiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem mi-
nus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll.
tranquilatus Dodecaedri minus segmentum est, &c. Quod
erat demonstrandum.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icofaedri potest & sui
ipfius lateris sesquialterum, & lateris Pyra-
midis in eo descriptæ sesquialterum.

13. versij dec.

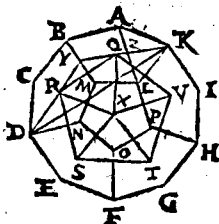
CUM cubus & Pyramis in eo descriptæ, in eodem Ico-
saedro describantur, ut docuimus in scholio propof. ultime
lib. 13. eademque sphaera comprehendantur, eadem erit dia-
meter cubi, & diameter sphaeræ pyramidem circundantis:
potest autem diameter sphaeræ sesquialterum lateris pyrami-
dis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo &
Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris Pyrami-
dis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter cir-
culi basim Icofaedri circumscribentis sesquialterum potest
lateris

lateris Icoſaedri, ut in demonſtratione propoſ. 15. huius lib. demonſtratumus. Igitur diamēter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circumdantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poſeſt & ſuiipſius lateris ſeſquialterum, nimirum diametrum circuli circa baſim Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATUS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, ut minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiſdem poſitæ.

Si r dimidium Dodecaedri contentum ſex pentagonis ABMLK, LKIH P, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet uidelicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque trian- gula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, ut oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam biſariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſ. 10 lib. 12. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſe-



2. sextidec.

abitur perpendicularis KY , in Z , extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri LM , ad latus Icosaedri sibi inscripti QR , ut KZ , minus segmentum perpendicularis KY , ad rectam QY , inter centrum Q , & latus BM , interceptam. Subtrahenda enim recta



DK , quae, per demonstrata in scholio propos. 13. lib. 5. latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositum describitur; erit LM , latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK , si extrema ac media ratione secetur, ex eodem scholio propos. 13. lib. 5. Quoniam uero latera YD , YK , trianguli YDK , pro-

portionaliter secantur in R , & Q , (sunt enim RD , QK , semidiametri circulorum aequalium equales; necnon & YR , YQ , distantes nimirum rectae BM , a centris R , & Q , eorundem circulorum aequalium) parallela erit QR , ipsi DK ; Ideoque triangulum YRQ , triangulo YDK , simile, per coroll. propos. 4. lib. 6. Quia ob rem erit, ut DK , ad KY , ita QR , ad QY . Ut autem DK , tota ad totam KY , ita est LM , minus segmentum ad minus KZ . Ut igitur LM , ad KZ , ita erit QR , ad QY . Et permutando, ut LM , latus Dodecaedri, ad QR , latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ , minus segmentum perpendicularis KY , ad QY , inter centrum Q , & latus BM , interceptam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.

2. sexti.

4. sexti.

3. quattide.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum a toto latere Icosaedri sublatum; A reliqua quoque recta pars rursus tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excidentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, ex ijs, quæ in propof. 6. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilatrum inscribitur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cum sint tertiæ partes eiusdem circumferentiæ, erunt reliqui arcus HC, ID, æquales, proptereaque rectæ HI, CD, parallelæ, per scholium propof. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, secans rectas

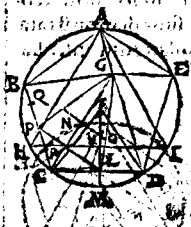


3. terij.

HI, CD, bifariam in K, & L, coniuganturque rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilateralum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diidentes, per scholium propof. 12. lib. 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, ut constat ex demonstratis in propof. 5. lib. 13, latus erit Dodecaedri in Icosaedro descripti. Denique BP, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem esse lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere trianguli æquilateri HI, secetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propositionis 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento FK, æqualis recta KM, per corollarium propof. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonstrauius ad propof. 5. lib. 13. maius segmentum KM, sectum quoque in L, a minori segmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ sui ipsius

N n 4 segmento

4. sexti.



2. sexti.

segmento L M. Quoniam uero iuncta P L, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, descripti, idemque contrum F, habentis, ex scholio ultimo lib. 4.

ideoque similis illi; erunt triangula F C D, F P L, (si recta duceretur F P,) similia, per scholium propos. 20 lib. 6. Quare, ut F C, ad C D, ita erit F L, ad L P; & permutando, ut F C, ad F L, ita C D, ad L P: Atqui F C, hoc est, sibi æqualis F M, excedit rectam F L, minore segmento dimidij ipsius F M, nempe minore segmento rectæ K M, ut ostendimus. Recta igitur C D,

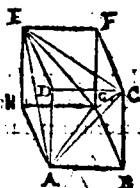
ut sibi æqualis B C, excedet quoque rectam L P, minore segmento dimidij ipsius B C, nimirum minore segmento rectæ B P, quod sit B Q; ideoque reliqua C Q, rectæ P L, æqualis erit. Rursus quia G P, G L, proportionatè secantur in conis M O, (quod G N, G O, duplæ sint ipsarum N P, O L, per coroll. propos. 18 lib. 14.) parallelæ erunt P L, N O; ac proinde triangulum G N O, triangulo G P L, simile, ex coroll. propos. 18 lib. 6. Igitur erit ut G P, ad P L, ita G N, ad N O; & permutando, ut G P, ad G N, ita P L, ad N O: Est autem G P, ipsius G N, sesquialtera, per coroll. propos. 8. lib. 14. Quare & P L, hoc est, sibi æqualis C Q, sesquialtera erit ipsius N O; Ac proinde, cum C Q, sesquialtera quoque sit rectæ Q R. (Nam qualium partium 3. est C Q, talium 1. est C R, per constructionem; Ac propterea earundem 2. Q B,) æqualis erit Q R, ipsi N O, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CUBVS sibi inscriptæ Pyramidis triplus est.

IN cubo A F, descripta sit pyramis A C E G. Dico cubum pyrami-

pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramidæ fundatæ super quatuor bases ipsius, uertices uero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non resident quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin ACE , fundatur pyramis $ACED$; super basin ABG , pyramis $AEGH$; super basin CEG , pyramis $CEGF$; & super basin ACG , pyramis $ACGB$: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. defin. 11.



cum contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine, & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus, & similibus triangulis, dimidijs scilicet quadratum cubi, ut præct. & in q. triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ. Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus: (Nam ex eorum causa, pyramis $ABCG$, basin habens ABC , dimidium basis cubi BD , & altitudinem uero eandem, quam cubus, rectam uidelicet BG , tertia pars est, per coroll. 1. præf. 7. lib. 12. prismatis eandem basis, & altitudinem habentis. Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis, manifestum est pyramidem $ABCG$, sextam partem esse cubi, propterea quæ cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficiuntur, quatuor illas, pyramides circumstantes quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi: Atque proinde reliquam pyramidem æquilateram $ACBG$, cubo inscriptæ eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphaera comprehendantur, ut docuimus in scholio præf. ultimæ lib. 15. Cubus uero triplus sit pyramidis in eadem sphaera descriptæ, ut demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis; quandoquidem hæc in eadem sphaera, in qua cubus, continetur.

THEOR.

32. undec.

32. quartidecimi.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri du-
pla est.

In pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum E I K-
G H F. Dico Pyramidem octaedri esse duplā. Cum enim
octaedrum circumstant quatuor pyramides pyramidi A B-
C D, similes, ut propof. 3. lib. 12. demon-
stratum est fundatæ super quatuor ba-
ses octaedri E G H, E F I, F G K, H I K;
quales sunt pyramides E G H A, E F I B,
F G K C, H I K D: (quæ quidem æqua-
les inter se sunt, ex defin. 1. octib. 11. cum
contineantur triangulis similibus, equali-



busque numero & magnitudine, quippe quæ similia sunt ba-
sibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propof. 4. lib.
6. lateraque habeant equalia, nempe dimidia laterum æqua-
lium eiusdem pyramidis A B C D, ex constructione pro-
pos. 2. lib. 13.) Habeant autem pyramides similes proportio-
nem homologorum laterum, triplicatā; Erit pyramis A B-
C D, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octæ-
dro circumpositarum, (cum octupla proportio, sit propor-
tionis duplæ, qualem habent latera pyramidis A B C D, ad
latera distarum quatuor pyramidum, triplicata, ut in his
numeris 1.2.4.8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illa-
rum quatuor pyramidum pars erit octava pyramidis A B-
C D; Ac idcirco omnes quatuor distæ pyramides quatuor
partes octavas, id est, dimidium pyramidis A B C D, con-
sistent. Quare & reliquum octaedrum E I K G H F, reli-
qua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis A B C D. Py-
ramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat
demonstrandum.

8. dædet.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextu-
plus est.

Q v o.

Q VONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, ut constat ex secunda demonstratione propof. 3. lib. 15. Est autem cubus pyramidis in eo descriptę triplus, & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, ut qualiam partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus, sibi inscripti Octaedri sextuplus est. Quod erat ostendendum.

20. sextide.

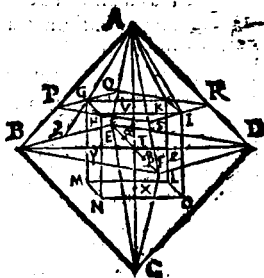
21. sextide.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO; angulos suos statuens in centrīs basium octaedri: Dico octaedrum cubi esse quadruplum, sesquialterum.

Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectę PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelę, quadratum cōstituentes PQRS, ut in propof. 4. lib. 15. est demonstratum; quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoq; octaedri diameter AC,



15. undec.

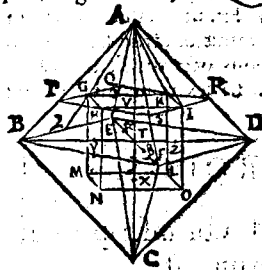
perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quę ostendimus in coroll. 1. propof. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholion propof. 14. lib. 11. Est autem V, centrū quadrati PQRS: (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales.

17. undec.

Intelli.

47. primi

Intelligentur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS . Quoniam
gitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ ,
æqualia sunt quadratis rectarum $AV, VP; AV, VQ$,
quod anguli AVP, AVQ recti sint, per def. 3. lib. 1. dem



pro communi quadrato
rectæ AV ; æqualia erunt
reliqua quadrata rectarum
 VP, VQ , proptereaque
& rectæ ipsæ VP, VQ ,
æquales. Non aliter osten
demus & hisce, & inter se
æquales esse rectas VR ,
 VS . Quare V , centrum
est quadrati $PQRS$.

Igitur & centrum erit qua

drati $GHIK$, in illo descripti, per scholium ultimum lib. 4.
Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP bifariam in G, K ,
 I, H , ut constat ex demonstratis in propof. 4. lib. 15. Eodem
argumento concludemus N , centrum esse basis $LMNO$;
Nec non & alias diametros ductas BD, EF , per Y, Z, α, β ,
centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta $A\gamma$,
per G , centrum trianguli æquilateri ABE ; erit AG , dupla
ipsius $G\gamma$, per coroll. propof. 1. 8. lib. 14. Cum ergo plana PR ,
 BD , parallela secent rectas $A\gamma, AT$, proportionaliter; du
pla quoque erit AV , ipsius VT . Eodem modo dupla pro
babitur CX , ipsius XT ; Ac proinde cum æquales AT, CT ,
similiter secentur in V , & X ; æquales erunt AV, CX ; nec
non VT, XT . Recta igitur VX , coniungens centra basium
cubi oppositarum bifariam secatur in T . Quare cum ad
eundem modum $YZ, \alpha\beta$, bifariam secentur in T ; erit T ,
centrum cubi; cum, per coroll. 1. propof. 5. lib. 18, rectæ cen
tra basium cubi oppositarum connectentes se se bifariam se
cent in centro. Iam uero, quoniam VX , ipsius VT , dupla
est; dupla autem fuit & AV , eiusdem VT ; æqualis erit
 AV , ipsi VX , nempe altitudini cubi. Quare pyramis $GHIK$,
ductis rectis AI, AK , tertia pars est cubi, seu prismatis
 $G O$, per coroll. 1. propof. 7. lib. 12. cum utriusque eadem
sit basis GI , & altitudines æquales AV, VX : Est autem
pyramis $PQRSA$, pyramidis $GHIKA$, dupla, quod &
basis

17. undec.

6. duodec.

basis $PQR S$, dupla sit basis $GHIK$, illi inscriptæ. Igitur pyramis $PQRSA$, duastertias partes cubi GO , continet. Quia uero pyramides $BEDFA$, $PQRSA$, similes existentes, per definit. 9. lib. 11. (cum triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulus illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem laterus AB ; lateris AP ; sesquialterum, quod & recta AY , proportionaliter secta ipsi AB ; sesquialtera sit ipsius AG ; Erat pyramis $BEDFA$, ad pyramidem $PQRSA$, ut 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. ut in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum $ABCDEFG$, duplum existens pyramidis $BEDFA$, proportionem habebit ad eandem pyramidem $PQRSA$, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis $PQRSA$, talium 12. esse cubum GO , iam demonstratum est. (Nam numerus 8 duastertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum $ABCDEFG$, ad cubum GO , proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

8. duodec.
2. sexti.

COROLLARIUM I.

Idem ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. ostendimus enim T , utriusque esse centrum.

COROLLARIUM II.

Præterea etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem uidelicet demonstraui-
mus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

11. sextide.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRUM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVO-

QVONIAM ut ostendimus ad finem lib. 13. cubus, sibiq; inscripta Pyramis in eodẽ octaedro describuntur; Est
 23. sexide. autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesqui-
 20. sexide. alterum; Et cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyra-
 midis triplus: Qualium partium 2. ponetur pyramis, ta-
 lium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent
 enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, &
 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam py-
 ramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est tredec-
 cuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi in-
 scriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi non-
 cupla est.

IN Pyramide A B D C, cubus intelligatur describens.
 Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumentur enim
 G, H, centra duarum basium A C D, A B D, commune



latus A D, habentium, per quæ ex angu-
 lis C, B, ad latus commune oppositum
 A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diui-
 dentes latus A D, bifariam, & ad angulos
 rectos, per scholium propos. 12. lib. 13.
 ac propterea conuenientes in medio pun-
 cto S. Connexæ uero rectæ G H; cum B H, C G, duplæ sint
 rectarum H S, G S, ex coroll. propos. 8. lib. 14. ac proinde
 proportionaliter secantur B S, C S, parallele erunt B C,
 H G, & per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum H G S, trian-
 gulo B C S, simile. Erunt ergo ut B C, ad C S, ita H G, ad G S;
 & permutando, ut B C, ad H G, ita C S, ad G S: Est autem
 C S, ipsius G S, tripla. Igitur & B C, tripla erit ipsius
 H G. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cu-
 bo diameter est basis cubi, ut in propos. 1. lib. 15. demonstra-
 tum est; Recta uero connectens duo centra basium pyrami-
 dis commune latus habentium diameter est basis cubi in py-
 ramide descripti, ut perspicuum est ex demonstratis in propo-
 s.

2. tertij.
 4. sexai.
 18. quarti-
 decimi.

pos. 18. lib. 15. (ibi enim recta GH , iungens centra G, H , basium ACD, ABD , commune laeus $A'D$, habentium diameter fuit basis $GNHQ$, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC , diameter basis cubi pyramidem $ABDC$, circumscribentis, GH , uero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Est enim ut diameter unius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio utraque sit potentia dupla: Permutando ergo, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC , diameter basis cubi circumscripti ad GH , diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, ut ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At uero cubi, cum sint parallelepipeda similia, proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi $ABDC$, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est triplæ proportionis, ut hic 1. 3. 9. 27. uidere licet. Quam ob rem, cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat, quam 27. ad 9. uidelicet triplam; Habebit pyramis $ABDC$, ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

33. undec.

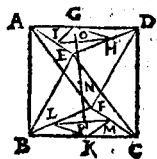
20. sextide.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosædram proportionem habet, quā dux bases octaëdri ad quinque bases Icosædri.

IN octaëdro $ABCDEFG$, concipiatur descriptum Icosædram. Dico Octaëdram esse ad Icosædram, ut sunt dux bases octaëdri ad quinque bases Icosædri. Cum enim ut ex demonstratis in propof. 16. lib. 15. liquet, octo bases Icosædri in octo basibus octaëdri reponantur; Sint dux bases Icosædri, GHI, KLM , in duabus basibus oppositis octaëdri ADE, BCF

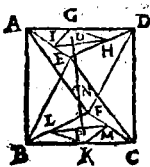
B C F; Atque ex N, centro octaedri, nec non & Icofaedri (idem enim utriusque est centrum, per coroll. 3. propof. 6. lib. 15.) ad basim A D E, perpendicularis ducatur N O, cadēs in centrum O, trianguli A D E, seu circuli ipsum ambientis,



ex coroll. lemm. 1. propof. 6. lib. 14. quod quidem O, centrum, quoque est trianguli G H I, per coroll. 2. propof. 16. lib. 15. Cū ergo plana opposita A D E, B C F, parallela sint, ex coroll. 4. propof. 14. lib. 13. Recta O N, producta perpendicularis quoque erit, per

scholion propof. 14. lib. 11. ad planum B C F, in eiusque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta altitudo est & octaedri, & Icofaedri sibi inscripti. Quia uero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo est N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icofaedrū in 20. pyramides æquales eiusdem altitudinis N O: Est autem prisma triplum pyramidis eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propof. 7. lib. 12. Erit prisma, cuius basis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At uero prisma, cuius eadem basis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum est prismatis, cuius basis eadem A D E, altitudo uero O N, per ea, quæ in scholio propof. 14. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cuius basis A D E, & altitudo O P, æquale est sex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basim A D E, & sub altitudine O P, constituti; prisma uidelicet, cuius basis tertia pars est trianguli A D E, altitudo uero eadem O P. Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super basem A D E, & sub altitudine O P; cum per ea, quæ docuimus ad propof. 7. lib. 12. prismata eiusdem altitudinis inter se sint, ut bases. Quare duo prismata, quorum vnus basis A D E, & altitudo O P, alterius autem basis tertia pars basis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia sunt octaedro A B C D E F. Non secus demonstrabimus prisma, cuius basis G H I, altitudo uero O P, æquale esse

esse sex pyramidibus Icofaedri: proptereaque triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis GHI , altitudo autem eadem OP , æquale esse 18. pyramidibus Icofaedri. Reliquis igitur duabus Icofaedri pyramidibus, quæ terriam partem sex pyramidum eiusdem Icofaedri constituent, æqualis erit tertia pars prismatis super basem GHI , & sub altitudine OP , constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI , altitudo uero eadem OP . Atque idcirco duo prismata, quorum unius basis tripla sit trianguli GHI , altitudo autem OP , alterius uero basis tertia pars basis GHI , & altitudo eadem OP , æqualia erunt Icofaedro in dicto octaedro descripto. Iam uero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icofaedro æqualia, sint, per ea, quæ ostendimus ad propof. 7. lib. 12. ut bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE , continentes, (cum unius basis sit ADE , nempe tres tertie partes ipsius ADE , completens, alterius uero basis tertia pars ipsius ADE , ad bases prismatum Icofaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI , comprehendentes; (cum unius basis tripla sit trianguli GHI , nimirum nouem tertias partes ipsius GHI , continens, alterius uero basis tertia pars ipsius GHI .) Sint autem, ut quatuor tertiæ partes trianguli ADE , ad decem partes tertias trianguli GHI , ita duæ tertie partes ipsius ADE , nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius GHI , hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et ut duæ tertiæ partes ipsius ADE , ad quinque tertias partes ipsius GHI , ita quoque sint, per ea, quæ demonstraui in scholio propof. 4. lib. 4. sex tertie partes ipsius ADE , (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum unius basis constituentes, cum sex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius GHI , (id est, ad quinque bases Icofaedri, triplum quinque tertiarum unius basis completentes, cum quindecim tertias complectantur; Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icofaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icofaedrum, ut



15. quinti.

duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri . Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum , &c. Quod erat demonstrandum .

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptũ Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportionē lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportionē triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem .

EXHIBEATUR Icosaedrum ABC , in quo recta DE , coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit AC , & F , sit latus Icosaedri, & G , latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionē Icosaedri ABC , ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportionē F , lateris Icosaedri ad G , latus cubi, & ex



proportionē triplicatā diametri AC , ad rectam DE . Cum enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeo oppositos angulos in centris basium oppo-

sitarum; Erit DE , diameter dodecaedri in Icosaedro ABC , descripti, cum copulet angulos ipsius oppositos in D , & E , centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet ABC ; Dodecaedro diametri AC , hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum ABC , descripto, cum utriusque eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri DE , intra Icosaedrum uide-

licet,

habet ABC, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosædri ABC, ad tertiam, uidelicet ad Dodecaëdru diametri DE, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defn. 3. lit. 6. a nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosædri ABC, ad Dodecaëdru diametri AC, in eadem sphaera cum ipso descriptum, & Dodecaëdri eiusdem diametri AC, ad Dodecaëdru diametri DE, in Icosædro ABC, descriptum. Cum ergo Icosædru ABC, ad Dodecaëdru diametri AC, eadem sphaera comprehensum sit ut F, latus Icosædri ad G, latus cubi. (Nam Dodecaëdru diametri AC, ad Icosædru ABC, eiusdem diametri est, ut G, latus cubi ad F, latus Icosædri. Convertendo igitur erit Icosædru ABC, ad Dodecaëdru diametri AC, ut F, latus Icosædri ad G, latus cubi.) At uero Dodecaëdru eiusdem diametri AC, ad Dodecaëdru diametri DE, in Icosædro uidelicet ABC, descriptum proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, id est, ad rectam centra basium Icosædri oppositarum coniungentem, ex coroll. propof. 17. lib. 11. Manifestum est, proportionem Icosædri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaëdru diametri DE, componi quoque ex proportionibus F, lateris Icosædri, ad G, latus cubi, & ex proportionibus triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icosædru ad sibi inscriptum Dodecaëdru proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

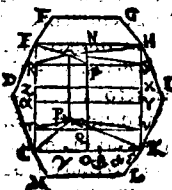
11. quarti
decimi.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At uero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ,

quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

Q V O N I A M ex demonstratis propof. 8. lib. 1. c. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro defcripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus convenientium; ſint huiusmodi pentagona $ABCDE$, $EFGHA$, $AHIKB$, $BKLMC$, convenientia ad latus AB ; duo quidem $ABCDE$, $AHIKB$, ſecundum latus



idem commune $A B$, alia autem duo $AEFGH$, $BCMLK$, ſecundum angulos EAH , CBK . His uero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi $ECKH$, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circunſcribens, ſolidum ſcilicet $GBKHAE$, conſiſtens quinque planis CBK , EAH , $ABCE$, $ABKH$, $ECKH$; quorū duo CBK ,

4. primi.

EAH , triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni $B C$, $B K$, æqualia ſint lateribus pentagoni $A E$, $A H$, anguloſque comprehendant æquales pentagonorum EAH , CBK . Duo uero $ABCE$, $ABKH$, trapezia ſunt æqualia quoque: ſum enim & pentagona $ABCDE$, $ABKIH$, per hypoteſin, & triangula ex ipſis ablata CDE , HIK , æqualia exiſtant, & equalia erunt & reliqua trapezia $ABCE$, $ABKH$; Q uo

4. primi.

tum denique eſt baſis cubi inſcripti $ECKH$. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & æqualia, per 10. defin. lib. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita ut Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiusmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circunſtantibus conſtat, æquale eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deſicit a $CEHK$, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK , tertiatq; parte minoris ſegmenti eiufdem lateris cubi; ac uero altitudo ab altitudine, ſc. latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus EH , CK , biſariam in N , O , iunctaq; recta NO , quæ parallela eſt lateri pentagoni $A B$, & in quâ

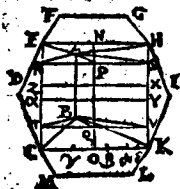
cadunt

cadunt perpendiculares A P, B Q, demissæ in planum E K, ut constat ex demonstratis propof. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lin. & N O, A B, A P, B Q, huius figure linee L N, V X, V R, X S, figure propof. 17. lib. 13.) Erit utraque recta A B, P Q, maius segmentum lateris cubi N O, uel H Q, & utraque A P, B Q, æqualis dimidio lateris pentagoni A B, seu maioris segmenti lateris cubi, ut liquet ex eadem propof. 17. lib. 13. Ac propterea si per P, Q, ducantur rectæ R S, T V, rectis E H, C K, parallelæ; erunt quoque R T, S V, maiora segmenta laterum E C, H K; atque adeo E R, C T, simul, & H S, K V, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis A R, A S, B T, B V, constituentur duæ pyramides E R S H A, C T V K B, quæ per coroll. propof. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cum & earum bases E R S H, T C K V, & altitudines P A, Q B, æquales sint; consistentque extra solidum A B T V S R. Quoniam autem A S, ipsi B V, & A R, ipsi B T, æqualis est, & parallelæ, cum coniungant æquales rectas, & parallelas A B, S V, R T; parallelæ erunt plana triangulorum A R S, B T V, atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propof. 8. lib. 1. cum latera unius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum A B T V S R, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis A R S, B T V, & tribus parallelogrammis R V, A T, A V, prisma est, ex definitione.

I A M uero, cum ostensum sit, rectas H S, K V, minus segmentum efficere lateris H K, fiat illis æqualis V X, dupla nimirum utriusque H S, & K V; & ipsius V X, minoris segmenti lateris H K, duas tertias partes contineat V Y, tertia uero pars sit X Y, ducanturque X Z, Y æ, rectæ T V, parallelæ. Quoniam igitur pyramides E R S H A, C T V K B, æquales sunt ostensæ; utriusque uero earum dupla est pyramis super basem T X, & sub eadem altitudine P A, uel Q B, constituta, quod & basis T X, dupla sit basis C V, uel R H; A Equalis erit pyramis T V X Z B, utrique pyramidi E R S H A, C T V K B, simul: At pyramis T V X Z B, duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem T X, & altitudo eadem Q B, uertex uero linea recta, pars uidelicet rectæ A B, quæ æqualis sit ipsi V X, ut demonstrauimus in scholio

1. *sexti.*

propof. 7. lib. 12. Item eiuſdem priſmatis, cuius baſis TX , & altitudo QB , uertex uero pars rectæ AB , æqualis ipſi VX , duas tertias partes continet priſina, cuius baſis TY , & altitudo eadem QB , uertex uero pars rectæ AB , æqualis ipſi VY , ex ſcholio propof. 25. lib. 11. quod & baſis TY , duas partes tertias complectatur baſis TX . Igitur & priſma, cuius baſis TY , & altitudo QB , uertex uero pars rectæ AB , æqualis ipſi VY , æquale erit duabus pyramidibus $ERSHA$, $CTVKB$; Ac proinde hoc priſma appoſitum priſmati $ABTVSR$, efficiet priſma æquale ſolido $CBKHA$, habens baſin reſtangelum contentum ſub latere cubi TV , & ſub recta cõpoſita ex VY , duas tertias partes minoris ſegmenti VX , cõprehendente, & ex VS , maiore ſegmento, ideoque a baſe eui-



bi deficientem reſtangelo αX , contento ſub latere cubi αY , & ſub XY , tertia parte minoris ſegmenti VX . Nõ diſſimili ratione inueſtigabimus alia ſimilia quinque priſmata æqualia & proxime dicto priſmati. & reliquis quinque ſolidis ſuper reliquas quinque cubi baſes conſtitutis. Sex igitur huiuſmodi priſmata æqualia erunt ſex illis ſolidis, exceſſui nimirum Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum. Quia autem duo quilibet priſmata illiuſmodi inter ſe aptata componunt parallelepipedum eiuſdem altitudinis; conſtruentur ex ſex illis priſmatis tria parallelepipeda ſub eadem altitudine QB , quæ æqualis eſt dimidio lateris pentagoni AB , ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, & ſuper baſes a baſe cubi deficientes ſingulas reſtangelo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter ſe compoſitis exurget parallelepipedum exceſſui eidem Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum æquale, cuius baſis a baſe cubi deficit reſtangelo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo uero æqualis eſt tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc eſt, altitudini QB , quæ æqualis fuit dimidio maioris ſegmenti lateris cubi, ſeu ſumptæ. Hanc igitur altitudinẽ dico ab altitudine, ſeu latere cubi deficte

ficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β : Itemq; C β , maius segmentum, & β K, minus bifariam in γ , δ : atq; ex β K, abscindatur β ϵ , æqualis ipsi β γ , seu C γ , ita ut C γ , uel γ β , uel β ϵ , dimidia pars maioris segmenti C β , æqualis sit ipsi Q B, & C ϵ , toti altitudini præfati parallelepipedo. Quoniam igitur est, ut rota CK, ad maius segmentum C β , ita maius segmentum C β , ad minus β K; erit quoque ut CO, dimidia ipsius CK, ad C γ , uel β ϵ , dimidiam ipsius C β , ita C γ , uel β ϵ , ad β δ , dimidiam ipsius β K; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C γ , uel β ϵ , & minus β δ . Quare & β δ , minus segmentum secabit β ϵ , maius segmentum extrema ac media ratione, ut demonstrauimus ad propos. 5. lib. 1. 3. eritq; maius segmentum β δ , minus autem δ ϵ : Ac propterea rursus δ ϵ , minus segmentum secabit rectam δ K, maiori segmento β δ , æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit ϵ K. Deficit igitur C ϵ , altitudo præfati parallelepipedo ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmento ϵ K, rectæ δ K, uel sibi æqualis rectæ β δ , quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedo, quo dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum a base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem uero ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

VND ϵ elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum unus longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiae partis minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit; Alterius uero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum

addatur illi parallelepipedo, quo cubum a Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, quā cubus, altitudo uero a latere cubi defert nullo segmento eius lineæ, quæ dimidiat lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque ideo, ut Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituitur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo uero alter cubus, ut demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRUM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportionem triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulante, & proportionem lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphaera cū cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At uero F, latus cubi,



& G, latus Icosaedri in eadem sphaera cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportionem triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportionem F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri.

Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum, erit recta DE,

centra

centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE , in eadem sphaera cum Icosaedro intra Dodecaedrum ABC , collocato describetur, cum eandem habeant diametrum DE . Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet ABC ; Dodecaedro diametri DE ; & Icosaedro eiusdem diametri DE , intra Dodecaedrum uidelicet ABC , descripto; Proportio Dodecaedri ABC , primae magnitudinis, ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quae ad defin. 5. lib. 6. nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC , primae magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE , secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE , descripti secundae magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro ABC , descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC , ad Dodecaedrum diametri DE , proportionem habeat triplicatam diametri AC , ad diametrum DE , ex coroll. propos. 17. lib. 12. Dodecaedrum uero diametri DE , ad Icosaedrum eiusdem diametri DE , quod nimirum in Dodecaedro ABC , describitur, proportionem habeat, quam F , latus cubi ad G , latus Icosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri ABC , ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter DE , componi quoque ex triplicata proportionem proportionis diametri AC , ad diametrum DE , rectam uidelicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportionem F , lateris cubi, ad G , latus Icosaedri, in eadem sphaera cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

11. quarti
decimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum

rum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo uero tertix parti minoris segmēti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo uero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

25. sextide.

Q V O N I A M si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, ut ad finem lib. 13. tradidimus; Cubus autem pyramidis in qua describitur, nona pars est, cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, ut magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in uerbis propositionis huius, non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo ut si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

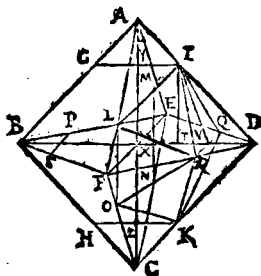
THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, repetita figura propof. 16. lib. 13. ubi demonstratum est, uiginti triangula Icosaedrum inscriptum componentia esse IQR, KQ-

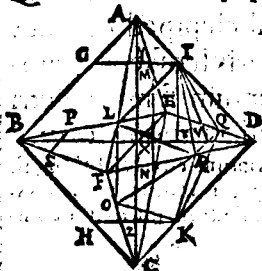
R, GIL, GIM, GPS, HP-S, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ.

IMQ, GLS, HOS, KOR, ILLR, quorum octo pos-
trema octo basibus octae-
dri sunt imposita, secantia
uidelicet omnia eius late-
ra extrema ac media ra-
tione; Item rectam IT,



perpendicularem ad BD, æqualē esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrū ABCDEF, superare Ico-
saedrū sibi inscriptū parallelepipedo, cuius basis est quadra-
tum lateris Icosaedri QR, altitudo uero IT, maius segmē-
tum semidiametri AX. Cū enim in quatuor basibus octae-
dri DEA, DFA, LEC, DFC, angulū solidū octaedri D, cō-
stituentibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR,
KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulū solidū D, in
eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula IQD,
IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Ico-
saedrū, IQR, KQR, & commune triangulum DQR, con-
stituentur duæ pyramides super communē basem DQR,
nempe IDQR, KDQR, inter se æquale, per coroll.
propof. 3. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem
IT, maius uidelicet segmētum semidiametri octaedri. (Nam
quemad-

34. primi.



quemadmodum $A X$, secunda est a recta $G I$, in Y , extrema ac media ratione, ita quoque secunda est $C X$, a recta $H K$, in Z . Quare si ex K , ad $B D$, perpendicularis ducatur, altitudo

nimirum pyramidis $K D Q R$; erit ea æqualis rectæ $Z X$, maiori segmento semidiametri $C X$, hoc est ipsi $I T$. Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se & dictis duabus

æquales, extra Icosaedrum prædictum: Ita ut octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidi- bus æqualibus. Quia uero triangulum $D Q R$, dimidium est quadrati lateris $D Q$; (cum $D Q$, $D R$, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumque contineant rectum.) erit recta $Q R$, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius $Q R$, duplum erit quadrati lateris $D Q$, ideoque quadruplum trianguli $D Q R$. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, & altitudo $I T$, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum $D Q R$, & altitudo eadē $I T$, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis $D Q R$, & altitudo $I T$, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis $D Q R$, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quæ circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, uel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, & altitudo $I T$, quadruplum quoque est trium illarum pyramidi- dum. Quare cum eundem trium pyramidum quadrupla sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambi- entes; Æquale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, lateris nimirum Icosæ- dri, & altitudo $I T$, maius segmentum semidiametri $A X$, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri (su-

pra

pro Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, uel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc inferitur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. lib. 19. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum; octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe recta QK , altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri, recta uide licet IT , seu YX : Fit, ut octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, (quod Pyramis dupla sit sibi inscripti octaedri) superet idem Icosaedrum in octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedo, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero recta YZ , coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI , HK . Hoc eam parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata a nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.

31. sextide.

21. sextide.

INVENTIO ANGULI INCLINATIONIS

duarum basium cuiuscunque solidi regularis, unius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, unius ad alteram, inuenire.

I.

EUCCLID.GEOM.

SIT Pyramis $ABCD$, cuius latere BD , bisariam
secto in E , ex angulis A , & C , lateri BD , oppositis re-
cta ducantur AE , CE ; quae cum perpendicularares sint



ad BD , communem sectionem pla-
norum ABD , CBD , in quibus exi-
stunt, ut ostensum est in scholio pro-
pos. 12. huius lib. angulum incli-
nationis AEC , basium ABD , CBD .

continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo aequalem
exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assum-
tur FGH , triangulum equilaterum super rectam FG ,
lateri pyramidis aequalem constructum, atque iucirco
triangulo cuiusque pyramidis proposita, ipsi nimi-
rum ABD , aequale, in quo ducta HI , perpendicu-
lari ad FG , constituitur super FG , triangulum FGK , habes
utrumque; latus FK , GK , aequale perpendiculari HI , hoc est,
utrique perpendiculari AE , CE , cum perpendicularares HI ,
 AE , CE , sint aequales in triangulis aequalibus. Dico an-
gulum FKG , aequale esse angulo inclinationis AEC , ba-
sium ABD , CBD . Cum. n. latera KF , KG , aequalia sint la-
teribus EA , EC ; & basis FG , basi AC : Aequales erunt
anguli FKG , AEC . Dico insuper angulum inclinatio-
nis AEC , acutum esse. Cum. n. latus AD , uel illi aqua-
le AC , sesquitertium sit potentia utriusque perpendicularis
 AE , CE ; qualium partium 4. ponetur quadratum
rectae AC , talium 3. erit quadratum utriusque rectae AE ,
 CE ; ideoque earundem partium 6. erunt ambo simul qua-
drata rectarum AE , CE . Quare cum in triangulo ABC ,
quadratum lateris AC , minus sit quadratis simul la-
terum AE , CE , acutus erit angulus AEC , ut in
scholio propos. 13. lib. 2. demonstrauimus.

8. primi.
12. quarti
decimi

COROL.

COROLLARIUM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis equales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt $A E$, $C E$, subtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit $A C$; omnes erunt inter se æquales, quod & omnes illæ perpendicularares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & latera pyramidis eisdem subtendentia.

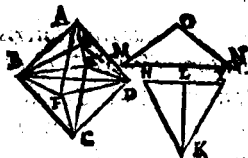
3. primi

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri basium, unius ad alteram, reperire.

II.

EXHIBEATUR Octaedrum $ABCDEF$, cuius diameter BD . Ex angulis B , & D , ad latus $A E$, triangulis ABE , ADE , commune, bisariamque sectionem in G , rectæ ducantur BG ,

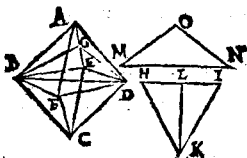
DG ; quæ cū perpendicularares sint ad $A E$, communem sectionem planorum ABE , ADE , in quibus existunt (quod in triangu-



lis BGA , BGE , anguli ad G , æquales sint, &c.) continebunt angulum BGD , inclinationis basium ABE , ADE , per defin. 6. lib. II. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK , triangulum æquilaterum super rectam HI , lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propositi, triangulo scilicet ABE , æquale, in quo ducta KL , perpendiculari ad HI , constituitur super recta MN , quæ æqualis sit diametro octaedri BD , hoc est, diametro quadrati $ABCD$, ex AB , latere octaedri descripti trianguli OMN , habes utrunq; latus MO , NO , perpendiculari KL , æquale,

3. primi

æquale, hoc est, utrique perpendiculari BG, DG, cū
perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus
æquales sint. Dico angulum MON, æqualem esse an-
gulo inclinationis BGD, basium ABE, ADE. Cum
enim latera OM, ON, æqualia sunt lateribus GB,
GD; & basis MN, basi



BD; & basis MN, basi
BD; Æquales erunt an-
guli MON, BGD. Dico
præterea, angulum incli-
nationis BGD, esse obtu-
sum. Cum enim diameter

8. primi.

14. tertij de.
12. quarti
decimi.

octaedri BD, dupla sit potentia lateris AB; latus
vero AB, potentia sesquitertium rectæ BG: qualium
partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium
4. erit quadratum lateris AB, earundemque 3. qua-
dratum rectæ BG; ideoque ambo simul quadrata re-
ctarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare
quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius est
quadratis simul laterum GB, GD; Ac propterea an-
gulus BGD, obtusus erit, ut in scholio propof. 12.
lib. 2. ostendimus.

COROLLARIUM.

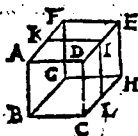
Hinc fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse.
Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpē-
dicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, qua-
les sunt BG, DG, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmo-
di est BD; omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ per-
pendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & dia-
metri octaedri eosdem subtendentes.

8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum
cubi basium, unius ad alteram, inuenire.

SIT cubus $ABCDEFGH$, in quo secetur latus DE , bisariam in I , nec non & latera illi opposita in quadratis AE , EC , commune latus illud DE , habentibus, in punctis K , L . Deinde rectæ ducantur IK , IL ; quæ cum æquales, ac parallele sint lateribus EF , EH , (quod & KF , IE , inter se, nec non & IE , LH , inter se æquales existant, et parallele) ideoque angulos rectos ad latus DE , efficiant, continebunt KIL , angulum inclinationis basium AE , EC ; ex defn. 6. lib. 11. Quoniam uero rectæ IK , IL , parallele existentes rectis EF , EH , & non in eodem cum illis plano, angulum KIL , æqualem continent angulo recto FEH ; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare ut angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, ut modo demonstramus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



33. primi.

10. undec.

COROLLARIUM.

QUOCIRCA, eam eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum; perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, unius ad alteram, inuenire.

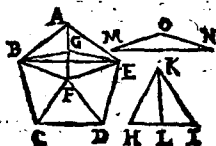
ESTO pyramis $ABCDEF$, una ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentagonum $ABCDE$, ex quinque Icosaedri lateribus compositum, uertex autem F . Dimiso itaque latere AF , bisariam in G , ducantur ex triangulorum ABF , AEF , latus AF , commune habentium

Pp

bentium

IIII.

uentium, angulis B, & E, lateri AF, oppositis rectæ BG, EG, quæ cum ex demonstratis in problemate 2. huius scholii perpendiculares sint ad AF, communem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendunt BGE, angulum inclinationis basium



ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Huius igitur in plano quomodo exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatr triangulum æquilaterum HIK, super re-

ctam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuius triangulo Icosaedri, ipsi uidelicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, construatur super recta MN, quæ recta BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens utrumque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, utrique perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; Æquales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB; erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemque modum AE, maior erit quam EG. Quare recta AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, posite sint æquales. Si itaque recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON,

ita

3. primi.

19. primi.

ita ut rectæ AB, AE , rectas OM, ON , prorsus includant. *Angulus ergo O , maior erit angulo BAE : At hic obtusus est. (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ a nobis sunt demonstrata in scholio propof. 32. lib. I. comprehendet quilibet illorum rectum unum, ac insuper unius recti partem quintam. obtusus ergo erit, cum recto sit maior) multo igitur magis obtusus erit angulus MON , hoc est, sibi æqualis BGE .*

21. primi.

COROLLARIUM.

NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosædri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, EG , subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE ; omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendant æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales existant.

8. primi.

4. primi

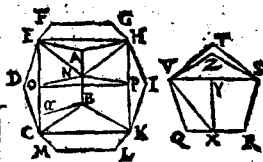
ANGVLVM inclinationis duarum basium Dodecaedri, unius ad alteram, reperire.

V.

CUM per ea, quæ ostendimus in propof. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus coeuntium; sint huiusmodi pentagona $ABCDE, EFGH, AHIKB, BKLMC$, ad latus AB , conuenientia; duo quidem $ABCDE, AHIKB$, secundum idem latus commune AB ; alia autem duo $A EFGH, BCM LK$, secundum angulos $E A H, C B K$. His porro pentagonis inscriptum sit

Pp 2 qua-

quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera sub-
tendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A.



Diviso autem latere AB,
bisariam in N, ducantur
ex N, in planis pentago-
norum ABCDE, AB-
KIH, ad AB, perpen-
diculares NO, NP, se-

cantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque
rectos, cum rectæ EC, HK, ipsi AB, sint parallelæ,
per coroll. propos. 8. lib. 15. Comprehendunt igitur
NO, NP, angulum ONP, inclinationis basium
ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis pla-
no hac arte construemus. Super rectam QR, late-
ri Dodecaedri AB, æqualem constituatur pentagonum
æquilaterum & equiangulum QRS TV, hoc est,
cuius pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi ABCDE,
æquale, cuius angulo T, recta subtendatur VS, æqua-
lis existens recta EC, cum & latera TV, TS, lateri-
bus DC, DE, æqualia sint, angulosque contineant
æquales. Divisa deinde recta QR, bisariam in X,
ducatur a puncto X, ad QR, perpendicularis XT:
proptereaque perpendicularis ad VS, cum VS, sit pa-
rallæla ipsi QR, per coroll. propos. 8. lib. 15. Ac po-
stremo super recta VS, triangulum fabricetur VZS,
habens utrumque latus ZV, ZS, perpendiculari XT,
æquale. Dico angulum VZS, æqualem esse angulo in-
clinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH,
VX; cum latera EA, AN, æqualia sint lateribus
HA, AN; Item lateribus VQ, QX, angulosque com-
prehendant æquales; æquales erunt & bases NE,
NH,

4. primi.

NH, VX , & anguli ANE, ANH, QXV ; 4. primi
 ideoque & residui ex rectis, anguli uidelicet ENO, HNP, VXY , aequales erant. Quoniam igitur anguli ENO, EON , trianguli ENO , aequales sunt angulis $HN P, HPN$, trianguli $HN P$; nec non & angulis VXY, VYX , trianguli VXY ; (sunt enim EON, HPN, VYX , ostensi recti.) Et latus NE , lateribus NH, VX , aequale demonstratum. Aequalia erunt reliqua latera NO, OE , reliquis lateribus NP, PH ; Item lateribus XY, YV . Quare rectae ZV, ZS , aequales existentes ipsi XY , rectis NO, NP , aequales erunt. Iam uero, quia OE, PH , aequales sunt, ac parallelae erit quoque recta coniuncta OP , aequalis & parallela ipsi EH , ideoque aequalis ipsi EC , hoc est, rectae VS . Quam ob rem, cum latera ZV, ZS , lateribus NO, NP , aequalia sint; basis item VS , basi OP ; Aequalis erit angulus VZS , angulo inclinationis ONP . Dico etiam, angulum hunc ONP , inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta $B\alpha$, ipsi NO , parallela; cum sit quoque NB , ipsi $O\alpha$, parallela, per coroll. propof. 8. lib. 15. Parallelogrammum erit $NO\alpha B$, ideoque recta $B\alpha$, ipsi NO , aequalis. Quia uero BC , latus pentagoni oppositum angulo $C\alpha B$, qui rectus est, (aequalis nimirum interno CON ,) maius est latere $B\alpha$, hoc est, recta NO , uel utraque ZV, ZS , quae ipsi NO , ostensa sunt aequales; Erunt duae rectae $T V, TS$, maiores duabus rectis ZV, ZS . Cadit igitur punctum Z , intra triangulum $T V S$, ita ut rectae $T V, TS$, rectas ZV, ZS , includant omnino; Atque proinde angulus VZS , ideoque illi aequalis ONP , maior est angulo pentago- 22. primi.
 ni

ni T : Hic vero , cum sit pentagoni angulus , paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto . Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

COROLLARIUM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri euales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis; quales sunt NO, NP, subtendanturque a rectis, quae cubi inscripti lateribus sunt aequales, uel certe, quae rectis subtendentibus angulos pentagonorum euales sunt, cuiusmodi est, recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni BAH, subtendit, aequales; Erunt omnes in-

8. primi.

ter
se aequales, cum & omnes illae perpendiculares, quae ipsos continent, aequales sint, nec non & rectae illae omnes, quae eosdem subtendunt, latera uidelicet cubi, inter se etiam sint aequales.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.





R O M A E,

Apud Vincentium Accoltum.

M. D. LXXIIII.

Cum licentia Superiorum.